# СТО ДВАДЦАТЬ ПЯТЬ ЛЕТ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

## 1826–1951

*Празднование*
*Казанским государственным университетом*
ИМЕНИ В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА
*и Казанским физико-математическим обществом*
*125-летия открытия*
*Н. И. ЛОБАЧЕВСКИМ*
*неевклидовой геометрии*

*Под редакцией*
*А. П. НОРДЕНА*


ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
*Москва — Ленинград*
1952

Н. И. Лобачевский.
С гравюры В. Матэ.

Гравюра напечатана в сборнике «Празднование столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского» (Казань, 1894 г.).

## ВВЕДЕНИЕ

С 24 по 26 февраля 1951 г. в Казанском университете торжественно отмечалось стодвадцатипятилетие открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии (23. II. 1826 г. — 23. II. 1951 г.).

На празднование прибыли представители — геометры из других городов СССР, в том числе один из старейших и ведущих геометров Советского Союза профессор С. П. Фиников (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова), профессор Б. А. Розенфельд (Азербайджанский гос. университет), доцент Г. Ф. Лаптев (Военно-воздушная академия им. Н. Е. Жуковского), доцент З. А. Скопец (Ярославский гос. педагогический институт им. К. Д. Ушинского), доцент В. И. Ведерников (Воронежский гос. университет), директор Государственного издательства технико-теоретической литературы Г. Ф. Рыбкин и редактор того же издательства И. Н. Бронштейн, доставившие в виде подарка к юбилею только что вышедший III том Полного собрания сочинений Лобачевского, завершающий геометрические труды великого русского ученого, и другие.

24 февраля в 18 часов в Актовом зале состоялось торжественное заседание Ученого Совета университета, Института математики и механики имени Н. Г. Чеботарева и Казанского физико-математического общества. В президиуме торжественного заседания присутствовали члены правительства Татарской АССР, представители областных и городских партийных и профсоюзных организаций, представители научных институтов и высших учебных заведений.

Заседание открылось вступительным словом ректора университета К. П. Ситникова.

Далее были прочитаны два доклада.

Доклад проф. А. П. Нордена «125 лет неевклидовой геометрии» был посвящен выявлению роли идей Лобачевского в развитии современных физико-математических наук.

В докладе доц. Б. Л. Лаптева «Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского» были обрисованы основные моменты творческой жизни великого ученого.

С приветствиями выступили:

проф. Х. М. Муштари — от Физико-технического института Казанского филиала Академии наук,

проф. С. П. Фиников — от Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и от Московского математического общества,

Г. Ф. Рыбкин — от Государственного издательства технико-теоретической литературы и редакции журнала «Успехи математических наук».

Информацию о приветственных телеграммах, пришедших на имя университета от многих вузов нашей страны, сделал профессор В. В. Морозов.

Приветствия были получены: от Томского гос. университета и от коллектива научных работников и студентов механико-математического факультета университета, от Ростовского гос. университета и от физико-математического факультета этого университета, от Ростовского физико-математического общества, от Горьковского университета и научно-студенческого общества при Горьковском университете, от Уральского государственного университета, от Каунасского политехнического института, от Президиума Киргизского филиала Академии наук СССР, от Института физики и математики Академии наук Азербайджанской ССР, от Физико-технического института и сотрудников сектора математики Казанского филиала Академии наук СССР, от Лодзинской высшей педагогической школы, от Казанского авиационного института, от коллектива преподавателей физико-математического факультета Казанского педагогического института, от Казанского музея им. М. Горького, от Татарского Республиканского совета научных инженерно-технических обществ, от кафедры математики физического факультета Московского гос. университета, от кафедры математики Московского лесотехнического института, от заслуженного деятеля науки профессора Московского университета В. Ф. Кагана, от профессора Н. И. Идельсона и других.

Присутствующие с энтузиазмом приняли предложение отправить письмо товарищу Сталину. Текст письма был прочитан доцентом А. С. Шофманом и принят под бурные аплодисменты.

На этом торжественное заседание закрылось.

В предактовом зале была развернута выставка, посвященная жизни, деятельности, научным трудам и развитию идей Н. И. Лобачевского. Организацию выставки провели Г. В. Бушманова и сотрудник Научной библиотеки Г. В. Черняева.

25 февраля перед началом научной конференции для иногородних гостей была организована поездка на Арское кладбище для осмотра надгробного памятника на могиле Н. И. Лобачевского.

Заседания научной конференции, происходившие 25 февраля, были посвящены творчеству Н. И. Лобачевского и развитию его идей.

На утреннем заседании председательствовал проф. С. П. Фиников.

Были сделаны следующие доклады:

Г. Ф. Рыбкин — О мировоззрении Н. И. Лобачевского.

И. Н. Бронштейн — Выявление наследия Н. И. Лобачевского и материалов к его биографии.

В. В. Морозов — Об алгебраических рукописях Н. И. Лобачевского.

Б. А. Розенфельд — Неевклидовы геометрии над комплексными и гиперкомплексными числами и их применение к вещественным геометриям.

На вечернем заседании научной конференции председательствовал проф. В. А. Яблоков.

Были сделаны следующие доклады:

А. Д. Дубяго — Поездка Н. И. Лобачевского в Пензу для наблюдения солнечного затмения 1842 г.

А. П. Норден — Об изложении основных теорем геометрии Лобачевского.

Б. Л. Лаптев — Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского.

З. А. Скопец — Циклографическое отображение пространства Лобачевского.

Б. М. Гагаев — Обобщение Н. И. Лобачевским интеграла Фурье *.

В. М. Герасимова сделала сообщение о том, что ею составлен и сдан в печать библиографический справочник по геометрии Лобачевского и развитию ее идей.

Вечером 26 февраля состоялось заключительное заседание научной конференции. Это заседание было посвящено геометри-

* Фактически доклад Б. М. Гагаева состоялся на заседании конференции 26 февраля.

ческим вопросам и проходило как расширенное заседание Казанского физико-математического общества.

Председательствовал проф. А. П. Норден.

В начале заседания присутствовавшие почтили вставанием память продолжателя идей Лобачевского, профессора Казанского университета П. А. Широкова, годовщина смерти которого исполнилась в этот день (26. II. 1944 г. — 26. II. 1951 г.).

Затем состоялось единогласное избрание иногородних гостей в действительные члены, а профессора С. П. Финикова в почетные члены Казанского физико-математического общества.

Далее, был принят текст поздравительной телеграммы, отправленной участниками конференции старейшему геометру Советского Союза, распространителю и продолжателю идей Лобачевского, профессору Московского университета, главному редактору Полного собрания сочинений Лобачевского, заслуженному деятелю науки В. Ф. Кагану, по состоянию здоровья не имевшему возможности лично принять участие в работе конференции.

Были прочитаны следующие доклады:

С. П. Фиников — Система конгруэнций $W$ с функциональным произволом.

Г. Ф. Лаптев — О новом инвариантном аналитическом методе дифференциально-геометрических исследований.

А. З. Петров — О полях тяготения.

А. П. Норден — Об одной интерпретации комплексной аффинной связности.

А. П. Широков — К вопросу об $A$-пространствах.

В. И. Шуликовский — Теория сетей и некоторые вопросы классической дифференциальной геометрии.

В заключительном слове итоги работы конференции подвел профессор А. П. Норден. От имени гостей выступил профессор С. П. Фиников.

---

Настоящий сборник содержит выступления и доклады, состоявшиеся 24, 25 и 26 февраля в Казанском университете. Некоторые из этих докладов были напечатаны в журнале «Успехи математических наук»* и в «Историко-математических исследованиях»*.

* Том VI, вып. 3, 1951 г., стр. 3—30.

* Выпуск IV, 1951 г., стр. 201—234.

# I

# ТОРЖЕСТВЕННОЕ ЗАСЕДАНИЕ

## УЧЕНОГО СОВЕТА КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.Г ЧЕБОТАРЕВА И КАЗАНСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

*24 февраля 1951 г.*

## ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО РЕКТОРА УНИВЕРСИТЕТА К. П. СИТНИКОВА

Товарищи делегаты и гости! Мы собрались сегодня здесь для того, чтобы торжественно отметить стодвадцатипятилетие открытия Николаем Ивановичем Лобачевским неевклидовой геометрии. Эта замечательная дата совпала с датой окончания послевоенной Сталинской пятилетки, обусловившей мощное развитие народного хозяйства и культуры в нашей стране. Коммунистическая партия и советская власть создали самые благоприятные условия для расцвета социалистической культуры, и она развивается в нашей стране невиданными в истории темпами. Ее размах и внутреннее содержание неизмеримо превосходят всё, что когда-либо имело место в истории человечества. Наука и культура в нашей стране стали достоянием всего советского общества. Две трети всего населения нашей страны так или иначе учатся, — говорил в свое время М. И. Калинин. Как величественно звучат эти простые слова, как много в них любви и гордости за наш советский народ!

Народ-герой, народ-освободитель с величайшей любовью чтит выдающихся деятелей русской науки, именами которых отмечаются поворотные вехи в развитии мировой науки, и среди них — нашу гордость и нашу славу, Николая Ивановича Лобачевского.

Народ наш знает, ка́к узок был круг этих подлинных революционеров в науке, ка́к ограничены были возможности для их деятельности. Но их дело не пропало. Народ, освобожденный Октябрьской революцией, явился достойным наследником всех достижений русской науки и культуры. Один миллион двести тысяч девушек и юношей обучаются в высших учебных заведениях Союза. Эти молодые патриоты нашей Родины и будущие строители коммунизма с любовью изучают труды великих соотечественников. Да! Пришло то время, когда и русский и тунгус, казах и башкир, украинец и татарин с настойчивостью большевиков и патриотов изучают труды наших великих предков и черпают в них необходимые знания для новых дерзаний. Благодарная советская молодежь — это и есть величественный памятник, который воздвигла Великая Октябрьская революция нашим предшественникам — великим мужам науки.

Товарищи! Мы собрались в Казанском государственном университете имени В. И. Ульянова-Ленина, в этой колыбели, где рос, воспитывался, работал и творил Николай Иванович Лобачевский, развитию науки и культуры в котором он посвятил всю свою жизнь. Николай Иванович Лобачевский совершил дважды подвиг. Первый его подвиг — он создал Казанский университет, в котором процветали наука и культура, в котором воспитывались патриоты отечества. Второй его подвиг — он открыл неевклидову геометрию.

Мы полагаем, что конференция сделает новый вклад в сокровищницу науки — поможет еще полнее осветить грандиозную фигуру Н. И. Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский нам дорог и как великий мыслитель, приведший нас к новым понятиям о сущности пространства, и как математик, владевший глубочайшей логикой и даром интуиции, и как ученый, считавший себя обязанным говорить истину. Он нам дорог также как человек, отдавший всю жизнь просвещению родной страны, служению университету.

Как гражданин и патриот Николай Иванович Лобачевский своим титаническим трудом возвеличил нашу родину. Свою любовь к отечеству он особенно ярко выразил в речи «О важнейших предметах воспитания» *. В этой речи он учил, что человек принадлежит обществу и что целью жизни является служение обществу.

> «Были люди, — говорил Н. И. Лобачевский, —... Гоббс и Гельвеций, которые не хотели верить, чтобы человек рожден

* Произнесена в торжественном собрании Казанского университета 5 июля 1828 г. См. «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский (далее цит. как Модзалевский), изд. АН СССР, М. Л., 1948, докум. № 345, стр. 321—327. Будет помещена в VI томе Полн. собр. соч. Н. И. Лобачевского.

> был для общества. По счастию, заблуждение их не опасно: подобные будут являться, может быть, по временам, но последователей себе не найдут» *.

Н. И. Лобачевский верил в великое будущее русского народа и государства и боролся за его процветание.

Лобачевский дорог нам как воспитатель. Он и в этом вопросе выступает как ученый, который имеет свою систему взглядов, отдает ее на суд общества и требует от него советов и суждений, и этим показывает, как заботливо относился он к этому вопросу. Какое значение придавал Лобачевский воспитанию, можно заключить на основании следующего его суждения:

> «В каком состоянии, воображаю, должен бы находиться человек, отчужденный от общества людей, отданный на волю одной дикой природе. Обращаю потом мысли к человеку, который среди устроенного, образованного гражданства последних веков просвещения, высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества. Какая разность, какое безмерное расстояние разделяет того и другого. *Эту разность произвело воспитание* ★. Оно начинается от колыбели, приобретается сперва одним подражанием; постепенно развертывается ум, память, воображение, вкус к изящному, пробуждается любовь к себе, к ближнему, любовь славы, чувство чести, желание наслаждаться жизнью. Все способности ума, все дарования, все страсти, всё это обделывает воспитание, соглашает в одно стройное целое, и человек, как бы снова родившись, является творением в совершенстве» ⊘.

Лобачевский требовал, чтобы воспитание было всесторонним, чтобы оно давало человеку знания, образованность вкуса и чувство чести и гражданского долга. По Лобачевскому человек рожден для общества, а воспитание должно приготовить этого человека к высокополезной деятельности в обществе.

Народы Союза гордятся великими культурными ценностями, созданными на всем протяжении развития их культуры. Великий

---

* Модзалевский, стр. 326.

★ **Курсив наш.** — *К. С.*

⊘ Модзалевский, стр. 322.

русский народ гордится Ломоносовым и Менделеевым, Лобачевским и Циолковским, Мечниковым и Тимирязевым, Павловым и Мичуриным. Все они — мировые ученые, двинувшие вперед мировую науку и прославившие наш народ. Вечная слава нашим великим предкам!

Мы родились позже, мы — счастливое племя. Страна наша, как верил Лобачевский, возвысилась в своем величии и достигла высоты, на которую еще не восходило ни одно племя человеческое на земле. На нашу долю выпало счастье защищать нашу великую родину, нашу великую культуру. Великие русские ученые беззаветно любили свою родину, отдавали всю свою жизнь на служение ей, матери-родине. Наши советские ученые являются достойными наследниками великого прошлого, они вместе со всем советским народом под руководством Коммунистической партии большевиков и корифея науки великого Сталина борются за процветание передовой науки, за построение коммунистического общества в нашей стране. Советский народ, верный последователь учения Ленина — Сталина, сохранит на вечные времена и умножит великое наследство, созданное гением Н. И. Лобачевского.

Пусть процветает и здравствует советская наука!

Пусть здравствует многие годы наш верный кормчий, корифей науки товарищ Сталин!

# 125 ЛЕТ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Доклад А. П. Нордена

В истории науки трудно найти дату, разделяющую две эпохи ее развития с такой определенностью, как дата 23 февраля 1826 года. В этот день молодой профессор Николай Иванович Лобачевский представил Отделению физико-математических наук Казанского университета свой доклад по теории параллельных, открывший новую эру развития геометрии.

Как известно, текст этого доклада не дошел до нас, но по свидетельству самого Лобачевского, был включен в его сочинение «О началах геометрии», опубликованное в 1829 г. в февральском номере «Казанского вестника». Здесь содержится и первое высказывание Лобачевского, излагающее сущность открытия:

> «Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$ или $< \pi$. То и другое может быть принято без всякого противоречия в последствии, от чего и происходит две Геометрии: одна *употребительная*..., другая *воображаемая*...» *.

В этих немногих словах дается решение проблемы, которая два тысячелетия занимала умы крупнейших греческих, арабских и европейских ученых. Решение это неожиданно, как всё гениальное, так как предшественники Лобачевского искали доказательства положения, равносильного предположению о том, что сумма углов треугольника равна $\pi$, и не сомневались в его существовании, а Лобачевский первый со всей определенностью заявил, что такое

---

* Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I, 1946, стр. 194.

доказательство не может быть получено чисто геометрическими средствами.

Еще более важно утверждение о существовании *двух* геометрий, порывающее со всеобщим убеждением о немыслимости геометрии, отличной от геометрии Евклида.

Прежде всего следует отметить философское значение этого результата.

Исторический факт единственности евклидовой системы и ее неизменности в течение тысячелетий служил опорой идеалистической теории о внеопытном происхождении аксиом геометрии. А из этой теории Кант и его последователи делали вывод о субъективности времени и пространства, обосновывая таким образом учение о непознаваемости вещей в себе, которые якобы вневременны и внепространственны.

Существование различных логически равноправных геометрий делало неизбежным вопрос о том, какая из этих геометрий полнее выражает свойства реального мира. А так как на этот вопрос мог ответить только опыт, то пространство, становясь объектом такого опыта, уже не могло не считаться объективным.

Сам Лобачевский стоял в этом вопросе на последовательно материалистических позициях. «Первые понятия...,—говорил он,—приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить» *. Или в другом месте: «... в справедливости принятых истин без доказательства убеждаемся... опытом, например астрономическими наблюдениями» ⋆.

В осуществление этой мысли он проводит сравнение евклидовой системы с данными астрономических наблюдений и, хотя уровень техники наблюдений его времени и не позволил ему притти к определенным выводам, он не терял надежды на то, что дальнейший прогресс науки рано или поздно позволит решить вопрос о строении космического пространства ⊘.

Чтобы не возвращаться в дальнейшем к вопросу об экспериментальной проверке геометрии Лобачевского, отметим сейчас же некоторые стороны современного состояния этого вопроса.

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 186.

⋆ Там же.

⊘ См. «О началах геометрии», там же, стр. 209.

Как известно, в геометрии Лобачевского особую роль играет линейная константа $a$, называемая радиусом кривизны пространства. Чем больше эта величина по сравнению с размерами некоторого конкретного физического тела (например, с радиусом земного шара), тем ближе свойства фигур, доступных непосредственному наблюдению, к свойствам фигур евклидова пространства. В 1931 году Ф. Шиллинг показал *, что эксперимент Лобачевского, основанный на определении суммы углов треугольников с вершинами на земле, солнце и неподвижной звезде, не может привести к решающим результатам и при современной технике наблюдений, если радиус кривизны превышает 60 световых лет.

Проблема связи геометрии Лобачевского и строения действительного мира получила совершенно новое освещение в общей теории относительности. Как известно, эта теория опирается на геометрическую схему пространственно-временно́го многообразия, геометрия которого зависит от распределения и движения тяготеющих масс. Если допустить, что эти массы равномерно заполняют пространство, то можно притти к схеме так называемого изотропного мира. В изотропном мире можно отделить пространственные и временны́е координаты и поставить вопрос о кривизне трехмерного мирового пространства. Чтобы определить знак и величину этой кривизны, нужно учесть значение средней плотности $\rho$ космической материи и отношение $\alpha$ средней скорости внегалактических туманностей к их расстоянию от наблюдателя. Исходя из современных астрономических данных, на основе которых можно считать

$$\rho = 10^{-30}\ г/см^3 \quad и \quad \alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-17}\ сек^{-1},$$

теория показывает, что кривизна пространства отрицательна, т. е. оно является *пространством Лобачевского*, а радиус этой кривизны $a$ равен $1{,}8 \cdot 10^9$ световых лет *.

Сравнение этой величины с приведенной ранее величиной 60 световых лет показывает, почему непосредственные астрономические наблюдения не могут решить вопроса о строении космического пространства.

* F. Schilling, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig und Berlin, 1931, стр. 213.
* См. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, М.—Л., 1941, стр. 277.

Перейдем теперь к вопросу о значении идей Лобачевского для развития математики.

Работы Лобачевского, несомненно, положили начало аксиоматическому методу, характерному для современной математики. После того как в 60-х годах прошлого столетия была выяснена непротиворечивость системы Лобачевского, была построена полная система аксиом геометрии Евклида (Гильберт, В. Ф. Каган), задача аксиоматизации была поставлена и для других областей математики. Так, в частности, С. Н. Бернштейну и А. Н. Колмогорову удалось построить аксиоматику теории вероятностей, раскрывающую основное содержание понятия вероятности.

Сам Лобачевский придавал большое значение строгости обоснования математики. «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения» *.

Это требование не осталось простой декларацией, и Лобачевский пытался выполнить его в своих «Новых началах геометрии», наиболее подробной из его работ, которая содержит не только изложение его системы, но также и изложение абсолютной геометрии. Попытку эту нельзя считать вполне удавшейся, так как Лобачевский поставил себе трудно выполнимую задачу построить всю геометрию на одном неопределимом понятии «прикосновения» и без аксиом, ограничиваясь только явными определениями. Однако с современной точки зрения в самом его замысле нет ничего принципиально невозможного. Мы теперь знаем, что аксиомы являются не чем иным, как неявными определениями, характеризующими основные понятия с точностью до изоморфизма. Основным понятиям можно всегда дать явное определение по крайней мере для такой системы, которая допускает реализацию, и тогда аксиомы обращаются в теоремы.

Построение геометрии, основанной на явных определениях, фактически осуществляется и в таких геометриях, в основу которых кладется задание некоторых соотношений аналитической природы, например задание выражения линейного элемента пространства, как это делается в геометрии Римана.

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 186.

Интересно отметить, что Лобачевский стоял весьма близко и к этой современной точке зрения, когда положил в основу изложения «Воображаемой геометрии» формулы своей тригонометрии *. Более того, после введения этих формул он немедленно получает выражение линейного элемента своей плоскости, которым и пользуется в дальнейшем.

Лобачевский предвосхитил также и одну из основных идей современного аксиоматического метода — идею доказательства непротиворечивости с помощью аналитической интерпретации, так как именно к этой цели направлено изложение его системы, принятое в «Воображаемой геометрии».

Однако развитие аксиоматического метода, определенное открытием Лобачевского, не является самым важным из его последствий. До Лобачевского наука знала одну геометрию, основы которой были изложены Евклидом. В настоящее время совокупность уже известных нам геометрий почти необозрима, и, принципиально говоря, число их может увеличиваться неограниченно.

Геометрия Лобачевского, геометрия групп преобразований, проективная, аффинная, центроаффинная, три конформных геометрии, биаксиальная, риманова, вейлева, аффинной, проективной и конформной связности, неголономная, финслерова, пространства линейных элементов, биметрические системы Рашевского и многие другие представляют собой целые самостоятельные дисциплины. Но многие из этих геометрий содержат бесконечные классы геометрий более специального вида, обладающие рядом своеобразных особенностей, как, например, геометрии, рассмотренные В. Ф. Каганом, П. А. Широковым, В. В. Вагнером, П. К. Рашевским, Б. А. Розенфельдом, Б. В. Лесовым, А. И. Чахтаури, М. А. Джевадовым, А. З. Петровым и другими советскими геометрами.

Наблюдая картину развития нашей науки и сравнивая геометрию Евклида с зерном, пролежавшим в почве в течение двух тысячелетий, а геометрию Лобачевского с первым мощным побегом, который дало это зерно, мы должны уподобить современную геометрию взрослому широко разветвленному дереву, которое продолжает расти и ветвиться.

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 26.

Какова же цель создания всех этих «воображаемых геометрий» и каково их значение для математики и ее приложений? Не являются ли они созданием научной фантазии, уводящей нас от действительности?

На этот вопрос мы должны ответить отрицательно. Конечно, среди геометрических схем, появившихся за последние десятилетия в обстановке кризиса буржуазной науки, найдется немало таких, которые представляют собой обобщения ради обобщений или получены в порядке спортивного интереса к преодолению математических трудностей, однако тенденция разработки таких пустых схем глубоко чужда советской науке. Появление новых геометрических систем следует считать вполне здоровым явлением, если создание таких систем преследует ясно поставленную цель приложения к практическим, общенаучным или математическим вопросам, имеющим крупное принципиальное значение.

Прежде всего мы должны, конечно, помнить, что непосредственный объект геометрии — пространство — реально и познается опытом. Всякий же опыт не совершенен и дает только приближенно верную картину действительности. Однако наука вообще и техника наблюдений в частности совершенствуются, следуя в этом за развитием человеческого общества. Поэтому опыт дает возможность познавать действительность всё глубже и полнее. Таким же образом и наши представления о реальном пространстве должны неизбежно меняться, и всякая геометрическая схема, как бы она хорошо ни соответствовала потребностям сегодняшнего дня, неизбежно заменится другой схемой, может быть более сложной, но зато и более полно отражающей действительность.

История науки вполне подтверждает эти общие положения материалистической теории познания. Если евклидова геометрия удовлетворительно выражает свойства непосредственно наблюдаемого нами мира, то она уже оказывается недостаточной для описания пространства, взятого в космических масштабах с учетом заполняющей его движущейся материи. Даже при упрощающих предположениях о равномерности распределения материи в мировом пространстве выясняется необходимость перехода к более сложной схеме геометрии Лобачевского, а при отказе от этих предположений требуется еще более сложная схема Римана.

Наконец, попытки учесть электромагнитные силы, т. е. задача построения единой теории гравитационного и электромагнитного полей приводят к построению еще более сложных геометрий аффинной и проективной связности.

Таким образом, основной задачей геометрии является разработка схем, лучше всего выражающих свойства реального пространства в соответствии с данными физики, астрономии и космологии. Задача эта решается нашим постепенным приближением в бесконечном процессе познания к абсолютной истине. Поэтому и процесс геометрического творчества, дорогу которого открыл нам гений Лобачевского, никогда не прекратится.

Однако роль геометрии в общей системе математических знаний далеко не исчерпывается отмеченной выше основной задачей. Математика, в процессе перехода на более высокие ступени абстракции, существенно опирается на аналогии между основными понятиями и отношениями своих новых теорий и понятиями и отношениями более конкретных и изученных ранее областей. Эти аналогии закрепляются тем, что новым понятиям присваиваются имена аналогичных им старых понятий. При этом, в конечном счете, вся математика опирается либо на арифметику, либо на геометрию. Примером понятия, заимствованного первоначально из арифметики, которое меняет свой смысл, но сохраняет свое имя вместе с некоторыми своими существенными свойствами, может служить понятие умножения. Введенное первоначально для целых чисел, где оно имеет совершенно наглядный и конкретный характер, оно последовательно применяется в теории дробных, отрицательных, иррациональных, комплексных и гиперкомплексных чисел, векторов, тензоров, матриц, подстановок, операторов и, наконец, в наиболее абстрактном смысле в теории групп и в топологии.

Не менее важное значение для построения почти всех математических дисциплин имеет и возможность использования геометрической терминологии, которая основана на глубоких связях между всеми явлениями, изучаемыми математическим методом. Теория величин древнегреческой математики в значительной мере опиралась на геометрию. Современный анализ немыслим без использования таких геометрических понятий, как точка, линия, поверхность, область, окрестность и т. д. Но если эти понятия употребляются чаще всего в топологическом смысле этих слов, то теория функций комплексного переменного существенным образом опирается на полную систему отношений евклидовой планиметрии.

Возможность построения неевклидовых геометрий дает новую базу для плодотворного применения геометрии в других частях математики. Эта важная сторона открытия неевклидовой геометрии была совершенно ясно осознана и самим ее творцом.

«Как бы то ни было, — говорит Лобачевский, — новая Геометрия, основание которой уже здесь положено..., оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики» *. Выполняя эту свою программу, Лобачевский пишет «Воображаемую геометрию» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», в которых находит большое число различных интегралов и соотношений между ними. При этом он всё время основывается на геометрических соображениях, предполагая, что рассматриваемые им интегралы выражают длины, площади и объемы его пространства и подвергая переменные и области интегрирования геометрическим наглядным преобразованиям. Эти геометрические соображения играют не только наводящую роль. Даже прямая аналитическая проверка результатов, полученных Лобачевским, часто бывает сопряжена с большими вычислительными трудностями.

Начиная с конца 60-х годов, когда идеи Лобачевского получили всеобщее признание, геометрические методы на основе неевклидовых геометрий начинают играть всё более и более важную роль в математике.

Пуанкаре решает основную проблему теории автоморфных функций, опираясь на геометрию Лобачевского.

Теория дифференциальных квадратичных форм геометризируется на основе системы Римана, а затем эта геометризация используется и в механике систем с голономными связями. Одно из возможных обобщений этой теории в связи с использованием геометрических методов в механике неголономных систем приводит

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 209—210.

к созданию геометрии неголономных пространств. Теория этих пространств с применениями к механике была значительно углублена в работах В. В. Вагнера, которые были удостоены в 1936 г. премии имени Лобачевского (в Казани).

Другие обобщения тех же идей приводят к постановке проблемы геометризации общей задачи вариационного исчисления. Ведущее место в разработке этой проблемы тоже принадлежит В. В. Вагнеру. Интересные результаты в той же области получил Б. Л. Лаптев.

Геометризация теории непрерывных групп привела к созданию геометрии симметрических пространств Картана. Важные результаты и здесь были получены П. А. Широковым, а в последнее время П. К. Рашевским. В настоящее время на очереди стоит проблема приложения геометрических методов к теории функций многих комплексных переменных, в решении которой, повидимому, сделаны только первые шаги.

Что касается значения неевклидовой геометрии для теоретической физики, то специальный и общий принципы относительности дают яркий пример плодотворного ее использования. Повидимому, возможны столь же плодотворные применения неевклидовой геометрии и в области квантовой механики.

Вопрос о приложениях неевклидовой геометрии к изучению образов евклидова пространства слишком обширен для того, чтобы пытаться здесь изложить его систематически. И геометрия Лобачевского и родственные ей геометрии пространств постоянной кривизны служат незаменимым аппаратом для изучения различных вопросов геометрии кругов, сфер, линейчатой геометрии и. т. д. Систематический переход к рассмотрению комплексных неевклидовых пространств, осуществленный в работах Б. А. Розенфельда, еще расширил область этих приложений.

Роль неевклидовых геометрий более общих типов и в особенности геометрий различных связностей в дифференциальной геометрии пространств проективных подгрупп вообще и евклидова пространства в частности еще более значительна. В этой связи достаточно напомнить значение понятия внутренней геометрии, которая играет важную роль в общей теории поверхностей. С совершенно новой точкой зрения подошел к этому понятию

А. Д. Александров, удостоенный за свои работы в этой области Сталинской премии.

Идеи Лобачевского на много лет опередили его время. Даже такой выдающийся ученый как М. В. Остроградский в своем отзыве на рукопись «О началах геометрии» сообщил, что по его мнению «труд г. Лобачевского не заслуживает внимания Академии» *. Только после смерти великого геометра его открытие получает всеобщее признание и начинает оказывать всё возрастающее влияние на ход развития математики. Русские и в особенности советские математики уделяли много внимания распространению и разъяснению учения Лобачевского. В связи с этим следует прежде всего упомянуть имена казанских математиков Ф. М. Суворова, А. П. Котельникова, А. В. Васильева, Н. Н. Парфентьева, П. А. Широкова и Н. Г. Чеботарева. Но особенно велика в этом отношении заслуга старейшего геометра Советского Союза Вениамина Федоровича Кагана, который посвящает всю свою научную деятельность распространению идей создателя неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского. Сейчас под редакцией В. Ф. Кагана заканчивается издание первого полного собрания сочинений Лобачевского, и к юбилейным дням вышел последний том его геометрических работ.

Сто двадцать пять лет назад в стенах Казанского университета гениальный русский ученый Николай Иванович Лобачевский начертал программу, которая на столетия вперед определила пути развития геометрии. Долг советских геометров глубже усвоить идеи этой программы и приложить все силы к ее выполнению.

---

* См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 410.

# ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Доклад Б. Л. Лаптева

Величественно научное творение Н. И. Лобачевского. Работы гениального геометра произвели коренной переворот в неизменявшихся тысячелетиями основаниях математики. Дальнейшее обобщение его идей сопровождается постоянно возрастающим влиянием неевклидовой геометрии на всю совокупность физико-математических наук, что сделало неевклидову геометрию жизненно необходимой для современной науки. Это значение глубоких и многосторонних идей Лобачевского для выработки современного математического мышления, для развития современной механики, астрономии и физики освещено в докладе А. П. Нордена. Мне остается рассмотреть историю жизни гениального творца неевклидовой геометрии, чтобы дать представление хотя бы о некоторых сторонах его многогранной деятельности, чтобы найти объяснение причин, которые привели его к открытию, чтобы очертить необычайно привлекательный образ великого ученого, образ страстного и непреклонного борца за новые геометрические идеи, которые остались непризнанными при его жизни, но принесли посмертно великую славу и ему и русской науке.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 года в Нижнем-Новгороде (ныне Горький) в бедной семье мелкого чиновника.

Девятилетним мальчиком он был привезен матерью в Казань и ее стараниями устроен вместе с двумя братьями в гимназию на казенное содержание. С этого времени его жизнь и работа протекают в Казани.

В гимназии, как мы знаем по «Воспоминаниям» С. Т. Аксакова, увлекательно преподавал математику талантливый учитель Г. И. Карташевский, воспитанник Московского университета. Он поставил изучение математики на значительную высоту. И когда юный 14-летний Лобачевский становится в феврале 1807 г. студентом университета (тоже казеннокоштным), он уже вскоре проявляет особенную склонность к изучению физико-математических наук, обнаруживая выдающиеся способности. В этом, несомненно, сказались результаты педагогической деятельности Г. И. Карташевского.

Повидимому, вспоминая годы своего учения, Лобачевский писал впоследствии, подчеркивая значение общественного воспитания в деле подготовки подлинных ученых-математиков: «Едва ли не из общественных заведений могут только выходить хорошие Математики, где всё благоприятствует этой науке; выбор лучших наставников, которые непрестанно трудятся увеличить собственные свои познания; порядок и строгость, так сказать, военные, которые одни только в состоянии принудить учеников следовать неослабно за преподаванием и удерживать в непрестанном напряжении их внимание; наконец, множество учеников, возбуждая соревнование, рождает охоту, превращает ее со временем в страсть и бывает причиною появления гениев — Математиков» *.

Однако в университете Лобачевскому уже не удалось слушать лекции Карташевского, так как последний в декабре 1806 г. был отстранен от должности директором И. Ф. Яковкиным, как «проявивший дух неповиновения и несогласия». Математические курсы в университете стал вести М. Ф. Бартельс, прибывший в Казань в 1808 г.

Успехи студента Н. И. Лобачевского, соревнующегося в своих занятиях с И. М. Симоновым, впоследствии известным астрономом и участником кругосветного плавания, неизменно вызывали одобрение М. Ф. Бартельса и других профессоров. Но его горячий, живой характер, независимое поведение, выработанные им самостоятельно передовые взгляды сталкиваются с требованиями администрации, озабоченной лишь благонравием студентов и «удержанием их в должном повиновении».

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, 1948, стр. 369.

Сохранился рапорт помощника инспектора студентов от 27 мая 1811 года, содержащий «Историческое изображение поведения Лобачевского 1-го», в котором он пишет: «Лобачевский 1-й в течение трех последних лет был, по большей части, весьма дурного поведения, оказывался иногда в проступках достопримечательных, многократно подавал худые примеры для своих сотоварищей, за проступки свои неоднократно был наказываем, но не всегда исправлялся; в характере оказался упрямым, нераскаянным, часто ослушным и весьма много мечтательным о самом себе, в мнении получившим многие ложные понятия... *.

Сквозь слова суровой характеристики просвечивает подлинный образ молодого Лобачевского, уже ощущающего свои растущий силы, свои творческие возможности, смело вступающего в борьбу с окружающей его косностью взглядов и обычаев.

Новый рапорт добавлял еще, что Лобачевский «в значительной степени явил признаки безбожия». Поэтому, когда 10 июля 1811 г. на заседании Совета обсуждалось проведение лучших из студентов в магистры (аспиранты), имя Лобачевского не было внесено в список директором И. Ф. Яковкиным. Только совместное заступничество профессоров — его учителей — изменило положение.

3 августа 1811 г. Лобачевский утверждается магистром. Его руководитель профессор М. Ф. Бартельс был квалифицированным математиком и опытным преподавателем, но не вел творческой работы. Лобачевский изучил под его руководством классические труды по математике и механике: «Теорию чисел» (Disquisitiones Arithmeticae) Гаусса и первые томы «Небесной механики» Лапласа. Представив два научных исследования по механике и по алгебре ⋆, он был ранее срока в 1814 г. произведен в адъюнкт-профессоры (доценты).

Со следующего учебного года он ведет самостоятельное преподавание, постепенно расширяя круг читаемых им курсов и уже

---

* «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, (далее цит. как Модзалевский), изд. АН СССР, М. — Л. 1948, докум. № 20, стр. 44. В университете учились тогда два брата Лобачевских. Старший из них — Николай Иванович — часто значился под именем *Лобачевский 1-й.*

⋆ «Теория эллиптического движения небесных тел» (1812 г.) и «О разрешении алгебраического уравнения $x^n - 1 = 0$» (1813 г.).

задумываясь над перестройкой начал математики. Еще через год он получает звание экстраординарного профессора.

Но вскоре в университете создается очень тяжелая обстановка для работы. В целях борьбы с революционными настроениями и «вольнодумством», развивающимися среди русской интеллигенции в те годы, правительство Александра I, проводя все более реакционную линию, ищет идеологическую опору в религии, в мистико-христианских учениях. Университеты в первую очередь подвергаются проверке, чтобы искоренить зарождающиеся в них свободомыслие и атеизм.

Для обследования Казанского университета был назначен и прибыл в марте 1819 г. член Главного правления училищ М. Л. Магницкий, который использовал свое назначение в карьеристских целях. В своем отчете он, считая «единым основанием народного просвещения благочестие», приходит к выводу, что университет «причиняет общественный вред полуученостью образуемых им воспитанников..., особенно же противным религии их духом деизма», а потому «подлежит уничтожению в виде публичного его разрушения» ради назидательного примера для других правительств.

Однако университет не был уничтожен. Александр I решил его исправить. Попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий, который и приступил к энергичному «обновлению университета». Он начал свою деятельность увольнением девяти профессоров, введением преподавания «богопознания и христианского учения» и изъятием из библиотеки книг «вредного направления» для их сожжения. Он приказал установить в аудиториях доски с религиозными текстами и составил инструкцию для преподавания каждой науки в духе отвратительного ханжества и поповщины. Например: «Профессор теоретической и опытной физики обязан во всё продолжение курса своего указывать на премудрость божию и ограниченность наших чувств и орудий для познания непрестанно окружающих нас чудес. Профессор естественной истории покажет, что обширное царство природы, как ни представляется оно премудро и в своем целом для нас непостижимо — есть лишь слабый отпечаток того высшего порядка, к которому после кратковременной жизни мы предопределены».

Профессор всеобщей истории «после истории священной... займет он слушателей своих преимущественно древностями христианскими...» * и т. д. и т. п.

Вместе с тем была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записок и введен суровый казарменный режим для студентов.

Семь лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому тяжелые испытания, но не сломили его непокорный дух. Выдержать этот гнет ему помогла только его обширная и многообразная педагогическая, административная и исследовательская деятельность. Он преподает математику на всех курсах вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) Бартельса; заменяет профессора физики К. Броннера, не вернувшегося после отпуска в Казань; читает физические курсы и заведует физическим кабинетом; замещает отправившегося в кругосветное плавание астронома И. М. Симонова; читает астрономию и геодезию, приняв в свое ведение обсерваторию. Ряд лет он работает деканом физико-математического отделения. Колоссальный труд вкладывает он в упорядочивание библиотеки и в расширение ее физико-математической части. Он является вместе с тем одним из активнейших членов, а затем и председателем строительного комитета, занятого постройкой главного университетского корпуса. Наконец, несмотря на тысячи текущих дел и обязанностей, Лобачевский не прекращает напряженной творческой деятельности. Он пишет два учебника для гимназий: «Геометрию» (1823 г.) и «Алгебру» (1825 г.). «Геометрия» получает отрицательный отзыв у академика Н. И. Фусса, не оценившего тех изменений, которые Лобачевский внес в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер, поскольку она создана в революционной Франции. «Алгебра» из-за внутренних проволочек в университете тоже не была напечатана.

Вскоре начинаются столкновения с попечителем. Лобачевский мужественно отказывается от произнесения актовых речей, которые следовало заполнять восхвалениями Магницкого и религиозно-мистическими рассуждениями. Лобачевский, по словам Магницкого,

* Н. П. Загоскин, История Императорского Казанского университета за первые сто лет его существования, т. III, Казань, 1904, стр. 350 и 352.

проявляет дерзость, своеволие, нарушение инструкций. Наконец, Магницкий решает установить особенный надзор за его поступками.

Однако и в этих унижающих достоинство человека условиях мысль Лобачевского работает неустанно над строгим построением начал геометрии. Первые следы этой работы мы находим в студенческих записках его лекций по геометрии за 1817 г. О ней же свидетельствует рукопись учебника «Геометрия» и его «Обозрения преподавания чистой математики» за 1822 — 1823 и 1824 — 1825 гг. Наконец, его искания завершаются гениальным открытием. Разрывая оковы тысячелетних традиций, Лобачевский приходит к созданию новой геометрии. 23 (11) февраля 1826 г. он делает на факультете доклад о новой «Воображаемой геометрии». Этот доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» был передан на отзыв профессорам И. М. Симонову, А. Я. Купферу и адъюнкту Н. Д. Брашману. Лобачевский хотел знать мнение своих сотрудников об открытии, величие которого он сознавал, и просил принять свое сочинение в предполагаемое издание «Ученых Записок» отделения.

Но отзыва не последовало. Рукопись доклада до нас не дошла. Материал этого доклада был включен Лобачевским в его первое сочинение «О началах геометрии», вышедшее в 1829—1830 гг. в «Казанском вестнике».

Открытие Лобачевского было сделано им на путях принципиального критического пересмотра самых первых, начальных геометрических понятий принятых в геометрии еще со времен Евклида (3-й век до н. э. ). Это требование безусловной строгости и ясности в началах, это пристальное внимание к вопросам основ науки и углубленный анализ первоначальных понятий характерны вообще для всего творчества Лобачевского. Избранное им направление исследований способствовало тому, что он не только в геометрии, но и в целом ряде других областей математики превосходит достигнутый в то время уровень науки: так, им дано уточнение понятия функции, приписанное впоследствии Дирихле; он четко разграничивает непрерывность функции и ее дифференцируемость; им проведены глубокие исследования по тригонометрическим рядам, опередившие его эпоху на много десятилетий; им разработан метод численного решения уравнений, несправедливо получивший впоследствии название метода Греффе, тогда как Лобачевский и независимо от него бельгийский математик Данделен разработали этот метод значительно раньше.

Самая необходимость переработки начал геометрии и направление этой переработки полностью объясняются материалистическими философскими взглядами Лобачевского. Согласно Лобачевскому, строгость в развитии геометрии может быть достигнута лишь при таком выборе понятий, которые наиболее просты и ясны и которые наиболее близки к непосредственно воспринимаемым нами пространственным отношениям материальных тел. Практика точных измерений должна, по мнению Лобачевского, дать окончательное заключение о правильности той или иной математической теории. «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость, — говорил он от лица философа-материалиста Ф. Бэкона, — спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно» *.

Доклад Н. И. Лобачевского совпал по времени с падением Магницкого. Специальная ревизия выявила ряд злоупотреблений, и мракобес-попечитель был смещен и выслан.

Новый попечитель Казанского учебного округа М. Н. Мусин-Пушкин сумел оценить кипучую деятельную натуру Н. И. Лобачевского. Великого геометра избирают вскоре, в 1827 г., ректором, и 19 лет он самоотверженно трудится на этом посту, добиваясь расцвета Казанского университета.

Лобачевский стремился претворить в жизнь свою широкую передовую программу университетского образования, представление о которой дает его речь «О важнейших предметах воспитания», произнесенная им через год после назначения ректором. Он высказывает в ней глубокие мысли об общественном значении воспитания, рисует картину гармоничного и всестороннего развития человеческой личности, бичует невежество крепостнического дворянства, освещает роль науки в развитии благосостояния обще-

---

* Н. И. Лобачевский, «Речь о важнейших предметах воспитания», произнесенная в торжественном собрании Казанского университета 5 июля 1828 г. См. сноску на стр. 10 наст. сборника.

ства, выступает как патриот своего отечества, уверенный в великом и счастливом его будущем.

Невозможно в кратких словах описать его поистине титаническую деятельность. Лобачевский добивается существенного повышения уровня научно-учебной работы на всех факультетах. Он проводит строительство целого комплекса университетских вспомогательных зданий: библиотеки, астрономической и магнитной обсерватории, анатомического театра, физического кабинета и химической лаборатории. Он пытается создать при университете «Общество наук», но не получает на это разрешения. Журнал смешанного содержания «Казанский вестник» он заменяет организованным им строго научным журналом — «Учеными записками Казанского университета», первая книжка которого выходит в 1834 г. и открывается предисловием Лобачевского, освещающим цели научного издания. В течение 8 лет он продолжает одновременно с ректорством управлять библиотекой. Он сам читает ряд специальных курсов для студентов. Он пишет наставление учителям математики и заботится о постановке преподавания также в училищах и гимназиях. Он принимает участие в поездке в Пензу в 1842 г. для наблюдения солнечного затмения. Умело оберегает он сотрудников и студентов университета во время эпидемии холеры в 1830 г., изолировав университетскую территорию и проводя тщательную дезинфекцию. Он организует спасение астрономических инструментов и выноску книг из загоревшейся библиотеки во время громадного пожара Казани в 1842 г., причем ему удается отстоять от огня почти все университетские здания. Наконец, он организует чтение научно-популярных лекций для населения и открывает свободный доступ в библиотеку и музеи университета.

И вместе с тем он находит время для непрерывных и обширных научных исследований, посвященных, главным образом, развитию новой геометрии. Его идеи были настолько непривычны, глубоки и новы, он настолько обогнал свою эпоху, что современники не смогли понять его и правильно оценить. Его первая работа «О началах геометрии» (1829—1830 гг.) была представлена Советом университета в 1832 г. в Академию наук. Но даже академик М. В. Остроградский не понял ее значения и дал на нее отрицательный отзыв: «...Книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой..., она небрежно изложена и..., следовательно, она не заслуживает внимания Академии» *. А в 1834 г. в реакционном журнале Ф. Булгарина «Сын отечества» появился издевательский анонимный отзыв об этой работе. «Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезною целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего», —писал неизвестный рецензент, укрывавшийся за двумя буквами С. С. *. Редакция журнала уклонилась от помещения объяснений и возражений Лобачевского.

Встретив непонимание и даже издевательство, Лобачевский не прекратил своих исследований. Не имея возможности в этом кратком докладе осветить выдающиеся результаты, полученные Лобачевским, я ограничусь перечислением только важнейших его сочинений по геометрии.

После работы 1829—1830 гг. «О началах геометрии» Лобачевский печатает в «Ученых записках»:

в 1835 г. «Воображаемую геометрию»;

в 1836 г. «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам».

С 1835 по 1838 гг. он публикует свою наиболее обширную работу «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Наконец, в 1840 г. выходят на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий», где содержится предельно ясное и лаконичное изложение его основных идей.

Эта мужественная борьба за научную истину резко отличает Лобачевского от других его современников, приближавшихся тоже к открытию неевклидовой геометрии.

Замечательный венгерский математик Янош Больаи опубликовал на 3 года позже Лобачевского свое исследование «Аппендикс» — добавление к книге его отца. В этой работе он несколько с иной стороны подошел к тем же результатам, что и Лобачевский. Но не встретив одобрения и поддержки, он прекратил борьбу. Выдающийся немецкий математик Гаусс, как выяснилось из опубликованной

* См. Модзалевский, стр. 334.

* Там же, стр. 358.

посмертно его переписки, получил некоторые начальные соотношения новой геометрии, но, оберегая свой покой, а также, быть может, не будучи уверен в правильности и объективной значимости этих результатов, запретил своим корреспондентам какие-либо высказывания об его взглядах. Восхищаясь в частной переписке с друзьями геометрическими работами Лобачевского, он ни одним словом не высказался о них публично.

Ни одного положительного отклика не получает Лобачевский, кроме единственного высказывания профессора механики Казанского университета П. И. Котельникова, который в актовой речи в 1842 г. отметил, что изумительный труд Лобачевского, построение новой геометрии на предположении, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, рано или поздно найдет своих ценителей.

Многолетние плодотворные труды Лобачевского не получили положительной оценки у правительства Николая I. В 1846 г. Лобачевский оказался фактически отстраненным от работы в университете. Внешне он получил повышение — был назначен помощником попечителя *, но при этом он лишился кафедры и ректорства.

Следует отметить, что менее чем за год до этого он был утвержден в шестой раз ректором университета на очередное четырехлетие. Вместе с тем более года он управлял Казанским учебным округом, заменив М. Н. Мусина-Пушкина, переведенного в Петербург. Указывая на эти свои служебные обязанности, Лобачевский незадолго до неожиданного предписания Министерства о его назначении помощником попечителя, сам рекомендовал вместо себя на кафедру математики учителя Казанской гимназии А. Ф. Попова, защитившего докторскую диссертацию. Он считал необходимым поощрить молодого способного ученого и находил несправедливым занимать при таких обстоятельствах кафедру. Но лишившись кафедры и ректорства и оказавшись в должности помощника попечителя, Лобачевский потерял возможность не только руководить университетом, но и вообще действенно участвовать в жизни университета.

Насильственное отстранение от деятельности, которой он посвятил свою жизнь, ухудшение материального положения, а затем и

---

* Однако жалованья ему за эту работу не назначили, сохранив только пенсию и добавив 800 руб. столовых денег в год.

семейное несчастье (в 1852 г. у него умер старший сын) разрушающе отразились на его здоровье; он сильно одряхлел и стал слепнуть. Но и лишенный зрения, Лобачевский не переставал приходить на экзамены, на торжественные собрания, присутствовал на ученых диспутах и не прекращал научных трудов.

Непонимание значения его новой геометрии, жестокая неблагодарность современников, материальные невзгоды, семейное несчастье и, наконец, слепота не сломили его мужественного духа. За год до смерти он закончил свой последний труд «Пангеометрия», диктуя его своим ученикам. Эту работу он посвятил родному университету, пятидесятилетие которого исполнялось в 1855 г.

24 (12) февраля 1856 г. кончилась жизнь великого ученого, целиком отданная русской науке и Казанскому университету.

Лобачевский умер непризнанным. Но если его идеи не были восприняты современниками, то в последующие десятилетия они пробили себе дорогу и утвердили его имя как имя одного из революционеров в науке.

Однако величие и значение изумительного творения Лобачевского предстает во всей полноте только в наше время. Только после Великого Октября у нас в Советском Союзе проводится глубокое и всестороннее изучение творческого наследия великого геометра и впервые издается полное научное собрание его сочинений. Советские ученые выявляют грандиозный вклад, внесенный в науку созданием неевклидовой геометрии.

Замечательная жизнь Н. И. Лобачевского, отданная неустанным творческим исканиям, самоотверженному труду на благо Родины и упорной борьбе за научную истину, служит вдохновляющим примером жизни подлинного ученого.

К смелым творческим дерзаниям, к упорной непреклонной борьбе за достижения советской науки призывает нас наш вождь, вождь всего прогрессивного человечества дорогой и любимый Иосиф Виссарионович Сталин!

## ПРИВЕТСТВИЯ

### Речь проф. Х. М. Муштари от Физико-технического института Казанского филиала Академии наук СССР

Многочисленные плодотворные идеи, содержащиеся в замечательных работах Н. И. Лобачевского, оказали большое влияние не только на развитие неевклидовой геометрии, но способствовали также успехам других отраслей физико-математических наук. Гениальность открытий Лобачевского в области геометрии общепризнана, но при этом как-то остается в тени замечательная разносторонность великого казанского математика, его стремление не отрывать теории от практики, но наоборот, тесно сближать их. Известно, что Лобачевский старался применить созданную им систему геометрии к решению астрономических задач, т. е. что он ставил вопрос об объективном существовании неевклидовой геометрии в мировом пространстве. Применяя «воображаемую геометрию» к вычислению определенных интегралов, Лобачевский обращал особое внимание на интегралы, встречающиеся на практике, в частности на интегралы, рассмотренные Пуассоном при решении некоторых вопросов механики. Это стремление к сближению теории и практики характерно для всей деятельности Лобачевского. Возглавляя Казанский университет, он всеми силами стремился оправдать свои слова об этом университете: «Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено одним лишь праздным умом» *.

---

* Н. И. Лобачевский. «Речь о важнейших предметах воспитания». См. сноску на стр. 10 наст. сборника.

Будучи в течение многих лет профессором Казанского университета, Лобачевский читал лекции по самым разнообразным отделам физико-математических знаний. В том числе он читал лекции по статике, общей динамике, динамике твердого тела. Он читал аналитическую механику по Лагранжу и Лапласу, но это не значит, что он просто пересказывал студентам содержание работ этих ученых. Отдавая, например, должное началу возможных перемещений, он в то же время делал следующие критические замечания относительно непосредственной применимости этого принципа.

> «Слишком большая обширность сего правила и бесконечное различие возможных условий, которым подчиняются тела в своем движении, представляли столь много затруднения обнять их в доказательстве, что должно откровенно сказать: совершенно удовлетворительного объяснения нет. Лагранж начинает прямо отсюда свою Механику; Лаплас, кажется, хочет уклониться от ответа и скрыться в выражениях неопределенных. Пуассон и Фурье сделали более и даже всё необходимое: они рассмотрели все случаи, какие действительно могут встретиться в природе. Я думаю, что могу пополнить недостаток, однако ж хочу ожидать прежде суждения других и до времени следовать в преподавании примеру знаменитых математиков Пуассона и Фурье» *.

К сожалению, Лобачевский не успел более подробно изложить свои взгляды на обоснование механики. Известно лишь, что он ставил себе задачу построить всю механику из одного общего принципа и напряженно размышлял над тем, ка́к это выполнить.

Следует отметить, что и в своих лекциях по физике Лобачевский неоднократно указывал на необходимость найти единую точку отправления для построения теоретической физики.

Интерес Лобачевского к механике отразился также на его работе «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе», напечатанной в 1835 г. в «Ученых записках

* Н. И. Лобачевский. Конспект аналитической механики (1824 г.). Центр. Гос. Архив Тат. АССР, ф. 377, оп. 323, № 36, лл. 22—23. См. Модзалевский, докум. № 219, стр. 187.

Московского университета»*. Эта работа содержит своеобразный вывод уравнений движения твердого тела и основных свойств главных осей вращения.

Деятельность Лобачевского во многом способствовала превращению Казани в крупный научный центр. Не случайно памятник Лобачевскому установлен вблизи здания Казанского университета. В настоящее же время этот памятник находится между зданиями университета и Казанского филиала Академии Наук СССР, как бы символизируя собой развитие науки в Казани.

Сотрудники Физико-технического института Казанского филиала Академии Наук СССР стремятся, по мере сил своих, к дальнейшему развитию и претворению в жизнь идей великого русского ученого Николая Ивановича Лобачевского.

---

## Речь проф. С. П. Финикова от Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и Московского математического общества

Я счастлив, что на мою долю выпала честь приветствовать конференцию от имени механико-математического факультета Московского университета и от Московского математического общества.

Русская наука являла достаточно примеров крупных геометров: Эйлер в Петербурге, Миндинг в Дерпте, Петерсон, Млодзеевский и Егоров в Москве, Синцов в Харькове, Котельников и Зейлигер в Казани — вот далеко не полный перечень выдающихся ученых, с честью поддерживавших славу русской науки в различных областях геометрии. Бурный рост математики в наши дни, в советский период сопровождался развитием геометрии, созданием у нас целого ряда геометрических школ и направлений, представленных нередко замечательными учеными, но над всеми ними возвышается фигура великого создателя неевклидовой геометрии, профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Значение его с веками только растет, интерес к идеям великого ученого возрастает с каждым годом по мере развития нашей науки.

* Напечатано в V томе Полн. собр. сочинений Н. И. Лобачевского, М. — Л., 1951, стр. 357—368.

Мне хочется закончить свое выступление пожеланием, чтобы процветал Казанский университет, созданный Лобачевским, чтобы процветал его физико-математический факультет и чтобы цвела и преуспевала кафедра Н. И. Лобачевского, так достойно сейчас замещенная.

---

## Речь Г. Ф. Рыбкина

## от Государственного издательства технико-теоретической литературы и редакции журнала «Успехи математических наук»

Разрешите мне от коллектива работников Государственного издательства технико-теоретической литературы и от редакции журнала «Успехи математических наук» приветствовать Вашу конференцию, посвященную 125-летию со дня открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии.

Нас, издателей, роднит с казанцами любовь к научному наследию Лобачевского.

Огромная заслуга казанских математиков состоит в том, что они донесли до наших дней знамя неевклидовой геометрии, гордо поднятое Лобачевским в полном одиночестве. Казань, Казанский университет — источник, из которого весь мир черпал замечательные идеи великого казанца. Казанский университет впервые издал почти все основные работы Лобачевского. Исключение составляют лишь «Геометрические исследования по теории параллельных линий», изданные Лобачевским впервые за границей. Геометрические сочинения Лобачевского изданы Казанским университетом дважды: при жизни Лобачевского в «Казанском вестнике» и «Ученых записках», а затем в 1883 и 1886 годах в Полном собрании сочинений по геометрии в двух томах. Говоря об издании сочинений Лобачевского, нельзя не отметить, что они, благодаря казанским публикациям, сравнительно быстро проникли за границу. До 1914 г. в переводе на другие языки за границей появилось 23 издания шести основных геометрических произведений Лобачевского. Десять из них падает на «Геометрические исследования» (4 на английском, 3 на французском, 2 на немецком и 1 на сербском языках), шесть изданий относятся к «Пангеометрии» (3 на французском, 2 на немецком, 1 на итальянском языках). «Новые начала геометрии» появились на английском, немецком и французском языках, «Воображаемая геометрия» — на французском и немецком, «Применение воображаемой геометрии» и «О началах геометрии» — на немецком. При этом следует иметь в виду, что «Воображаемая геометрия», изданная в Казани в 1835 г., появилась на французском языке уже в 1837 г. в тексте, написанном самим Лобачевским. «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Лобачевский вообще публикует впервые в 1840 г. на немецком языке. «Пангеометрия», изданная в Казани в 1855 г., появляется на французском языке (в переводе самого Лобачевского) в 1856 г., на немецком — в 1858 г., на итальянском — в 1867 г. Другие издания геометрических работ Лобачевского появляются за границей позднее: промежуток, отделяющий их от русских изданий, измеряется уже полустолетием. Однако это не меняет дело и можно с уверенностью сказать, что быстрое проникновение трех основных геометрических сочинений Лобачевского за границу разбивает распространенную Клейном версию о том, что будто бы только с опубликованием писем Гаусса идеи Лобачевского были замечены математиками. Они были замечены в момент, когда Лобачевский предал их гласности. Но должно было пройти полвека, прежде чем эти идеи были усвоены полностью и проникли чуть ли не во все отделы современной математики.

В дело популяризации и развития идей Лобачевского казанскими математиками также внесен большой вклад. Первым, выступившим публично с одобрением идей Лобачевского, был казанец, профессор Петр Иванович Котельников. Вот его слова: «Тысячелетние тщетные попытки доказать со всею математическою строгостию одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудило достопочтенного заслуженного профессора нашего университета предпринять изумительный труд построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике менее двух прямых — труд, который рано или поздно найдет своих ценителей» *. И это сказано было в 1842 г. при общей атмосфере неодобрительного отношения к новым идеям Лобачевского!

---

* См. Модзалевский, стр. 440. [В оригинале вместо «прямолинейном» оба раза, несомненно по ошибке, сказано «прямоугольном».]

Дело популяризации и развития идей Лобачевского получило особенно большой размах за последние тридцать лет в результате благоприятных условий для научной работы, созданных советской властью. Если с 1828 по 1921 г., то-есть за 92 года, почти за целый век, было всего лишь около 140 русских публикаций, то за период времени, втрое меньший, за 30 лет, с 1921 по 1951 г., их уже было 240.

С 1945 г. стали вновь выпускаться сочинения Лобачевского. Академия наук СССР отдельным изданием выпустила «Геометрические исследования». За 1946—1950 гг. Издательство, которое я представляю, выпустило четыре тома Полного собрания сочинений Лобачевского, подготовленных к изданию под руководством проф. В. Ф. Кагана при живейшем участии казанских математиков (А. П. Котельников, П. А. Широков, Н. Г. Чеботарев, А. П. Норден, Б. Л. Лаптев, А. Н. Хованский). Третий том, завершающий издание сочинений Лобачевского по геометрии, вышел к началу Вашей конференции, и представителям издательства было радостно привезти его на Ваши торжества.

Издано много хороших книг о Лобачевском. Следует отметить издание АН СССР прекрасной монографии В. Ф. Кагана о Лобачевском (1944 и 1948 гг.), а также «Материалов для биографии Н. И. Лобачевского», собранных Л. Б. Модзалевским в значительной мере в казанских архивах. Во втором и третьем выпусках «Историко-математических исследований», издаваемых нашим издательством, опубликован большой материал о Лобачевском, также в основном стимулированный казанскими архивными данными. Третий выпуск этих исследований вышел к началу Ваших торжеств.

Издательство в 1950 г. начало издание специальной серии под названием «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей». Издание серии началось с казанских авторов. Первый выпуск «Строение неевклидовой геометрии» содержит работу П. А. Широкова, а второй — «Некоторые применения идей Н. И. Лобачевского в механике и физике» — работу А. П. Котельникова.

Перед Издательством стоят еще большие задачи по завершению издания научного наследства Н. И. Лобачевского, а также литературы о великом геометре и о развитии его идей.

В текущем году намечен выпуск пятого тома «Полного собрания сочинений». В этот том войдут работы по математическому анализу, а также по теории вероятностей, механике и астрономии. В подготовке к изданию этого тома большую помощь оказывают казанцы: проф. А. Д. Дубяго и Г. Г. Тумашев и доц. А. Н. Хованский. В следующем 1952 г. предполагается подготовить выпуск последнего, шестого тома сочинений Лобачевского. В этом томе следует собрать такие материалы, которые характеризуют Лобачевского как ученого и общественного деятеля, а также его мировоззрение. Сюда должны войти: «Речь о важнейших предметах воспитания», «Наставления учителям математики в гимназиях», «Обозрения преподавания чистой математики» и другие найденные материалы, а также материалы, которые к этому времени могут быть обнаружены в архивах. В этом отношении казанские математики могут оказать очень большую помощь. Только при условии совместной работы мы с честью завершим издание всех трудов нашего великого соотечественника.

В текущем году намечено издание четырех выпусков серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей» (Смогоржевский, Букреев, Фукс, Адамар), а с помощью казанских математиков издание этой серии мы надеемся продолжать и в дальнейшем. Перед нами стоит и такая серьезнейшая задача, как создание и издание полной научной биографии Н. И. Лобачевского, а также монографии о его мировоззрении.

Разрешите пожелать конференции плодотворной деятельности, а коллективу издательства — издать результаты Ваших трудов в кратчайший срок. Изданием трудов конференции будет достойно отмечено 125-летие неевклидовой геометрии, открытой великим Лобачевским.

# II

# ДОКЛАДЫ НА НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

## ПОСВЯЩЕННЫЕ ТВОРЧЕСТВУ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО И РАЗВИТИЮ ЕГО ИДЕЙ

•

*25 февраля 1951 г.*

# О МИРОВОЗЗРЕНИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Г. Ф. Рыбкин

В истории развития русской науки и культуры никогда не забудется замечательное имя Николая Ивановича Лобачевского, делом всей жизни которого, его великим научным подвигом явилось открытие неевклидовой геометрии. Н. И. Лобачевский дорог нам как светоч новых геометрических идей, в которых геометрия, сломав застывшие формы, данные ей еще Евклидом более двух тысяч лет назад, нашла мощный стимул для бурного развития, продолжающегося до наших дней. Н. И. Лобачевский дорог нам как выдающийся деятель университетского образования, отстоявший Казанский университет от опасности застоя, в значительной мере создавший и превративший его в условиях царизма и крепостничества в первоклассное учебное заведение, в котором он сам был первым проводником передовых идей в обучении юношества. Н. И. Лобачевский дорог нам как замечательный тип ученого-патриота, ученого-мыслителя, прогрессивные взгляды которого не только служили образцом для передовых людей его времени, но и сейчас еще являются острым орудием в борьбе против идеализма в математике.

В борьбе за новые геометрические идеи, в борьбе за преобразование различных сторон жизни современного ему общества, главным образом в борьбе за народное образование Лобачевский шел тем же путем, который прокладывал великий основоположник русского естествознания Михайло Васильевич Ломоносов. Это — путь материалистического понимания природы вещей — единственно правильный путь научного понимания окружающего нас реального мира.

Мировоззрение великого ученого и общественного деятеля Н. И. Лобачевского до сих пор совершенно недостаточно исследовано и освещено *. У Лобачевского не было специально философских работ. В его «Речи о важнейших предметах воспитания» содержится ряд общих высказываний, которые обычно и использовались раньше для суждений о мировоззрении Лобачевского. Однако глубокий, материалистический смысл методологических идей Лобачевского полностью раскрывается лишь при обращении ко всей совокупности его научных трудов и исследований по математике, к его педагогической и общественной деятельности.

Помимо самих математических работ, богатство философского содержания которых становится доступным всякому, кто внимательно изучит их с методологической точки зрения, богатейшим источником сведений о мировоззрении Лобачевского, о его взглядах на основания науки, ее отношение к действительному миру, о его взглядах на принципы воспитания и т. п. являются новые архивные материалы о Лобачевском, найденные и опубликованные за последнее время в печати. Есть основания полагать, что в пыли архивов найдется еще не один документ, весьма важный в этом отношении.

Вопрос о мировоззрении Лобачевского заслуживает серьезнейшего внимания. Раскрытие характерных черт мировоззрения Лобачевского проливает свет на многие стороны его научного творчества. И здесь прежде всего мы замечаем глубокую связь между передовым мировоззрением Лобачевского и его открытиями в науке.

По складу своего математического мышления Лобачевский не был похож на своих предшественников и современников, которым приходилось заниматься теорией параллельных линий. *Лобачевскому был чужд формализм в математике.* В то время как другие математики, потерпев крушение при попытке доказать постулат

* Серьезной попыткой осветить мировоззрение Н. И. Лобачевского, основываясь на разборе математического творчества ученого, являются работы С. А. Яновской, которая выпустила небольшую книгу «Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике» (1950) и в третьем выпуске «Историко-математических исследований» (1950) поместила статью «О мировоззрении Н. И. Лобачевского». Но эти работы С. А. Яновской далеко не завершены.

о параллельных линиях, немедленно брались за другие его доказательства, оказывавшиеся столь же неудачными, как и первые, Лобачевский быстро пришел к мысли, что искомое доказательство *невозможно вообще*, т. е. что вопрос о числе прямых, проходящих через точку $O$ и не пересекающих прямую $l$ (не проходящую через $O$), не может быть решен чисто формально-логическими средствами. Для других математиков с их формальной точкой зрения на геометрию, как на «априорную» науку, постулат о параллельных или должен быть доказан чисто логическим путем, т. е. путем вывода его из остальных исходных положений геометрии, или должен быть принят на основании геометрической «интуиции». Иначе подходит к делу Лобачевский. Его подход к теории параллельных и последовавшее затем открытие неевклидовой геометрии основываются на стремлении объяснить происхождение основных понятий геометрии из свойств материальных тел природы. В отличие от других математиков он обращает свое внимание не столько на самый постулат, сколько на исходные понятия геометрии, на природу их происхождения. Для Лобачевского важно при этом, является ли исходное понятие абстрагированным свойством реальных вещей или отношений реального мира, или оно введено в основание науки произвольно. Решая этот вопрос материалистически, он требует реальных оснований для всякой науки, требует изгнания из нее произвольных допущений.

В литературе по неевклидовой геометрии и ее истории, особенно в зарубежной, широко распространено представление революционного открытия Лобачевского в геометрии как обоснования «права» геометра строить свою науку, исходя из любых, произвольных допущений. Типичным выразителем таких представлений является крупный французский математик, но мелкий философ-махист, Анри Пуанкаре, которого, по замечанию В. И. Ленина, нельзя брать всерьез как философа.

Пуанкаре считает, что геометрия Лобачевского оставалась чистым логическим упражнением, умственной игрой, пока не была найдена ее евклидова интерпретация. Между тем для Лобачевского задача интерпретации никогда не имела самодовлеющего значения. Созданная им геометрия интересовала его прежде всего в ее отношении к материальному миру, к природе. Она обобщала известную до него геометрию и расширяла рамки ее возможных применений — в том числе и к математическому анализу — и никогда не была «чистым» логическим упражнением.

Взгляд Пуанкаре на геометрию Лобачевского не случаен, он находится в полном соответствии с его идеалистическими воззрениями на математику. Для Пуанкаре математика есть такое творение человеческого ума, «для которого он меньше всего заимствовал извне». В построениях, «которые относятся к исследованию постулатов необычных геометрий», Пуанкаре видит лишь пример того, «что может сделать человеческий ум, когда он освобождается всё более и более от тирании внешнего мира». Этим идеалистическим утверждениям Пуанкаре со всей силой противостоит борьба Лобачевского за новую геометрию, к которой он пришел, решая вопрос об исключении из геометрии элемента произвола и случайности, который он видел в том, что принятием пятого постулата Евклида пытаются исчерпать все возможности нашего представления о реальном пространстве. Эта борьба вытекала из того, что Лобачевский никогда не отрывался от реальной действительности и всю жизнь боролся за признание происхождения наших понятий из внешнего мира, из природы.

Лобачевский пришел к своей геометрии в борьбе с произвольными допущениями в математике. Постулат Евклида о параллельных и многочисленные равносильные ему положения, с помощью которых математики пытались «доказать» этот постулат, не удовлетворяли его именно потому, что все они произвольны. Вот его характерные слова из «Пангеометрии»: «Недостаточность начальных понятий для доказательства приведенной теоремы (речь идет о пятом постулате. — *Г. Р.*) принудила геометров допускать прямо или косвенно вспомогательные положения, которые как ни просты кажутся, *тем не менее произвольны и, следовательно, допущены быть не могут* *.

Видя основной недостаток большей части определений, даваемых в началах геометрии, в том, что «эти определения не только не указывают на происхождение геометрической величины, которую хотят определить, но даже не доказывают, что такие величины

* Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. III, 1951, стр. 435. Курсив мой — *Г. Р.*

существовать могут» *, Лобачевский не следовал проторенной дорогой в построении своей геометрической системы. «Вместо того,— писал он в «Пангеометрии»,— чтобы начинать геометрию прямой линиею и плоскостью, как это делают обыкновенно, я предпочел начать сферой и кругом, которых определение не подлежит упреку в неполноте, потому что в этих определениях заключается способ, каким образом эти величины происходят. Потом я определяю плоскость, как поверхность, где пересекаются равные сферы, описанные около двух постоянных точек. Наконец, определяю прямую линию, как пересечение равных кругов в плоскости, описанных около двух постоянных точек той же плоскости. Допустив такие определения, вся теория прямых и плоскостей перпендикулярных может быть изложена строго с легкостью и краткостью» *.

Основываясь на этих определениях и введя понятие параллельности ⊘, Лобачевский строил свою геометрию как *свободную от произвольного допущения* верности того или иного постулата о параллельных линиях. Он ставил поэтому перед собой задачу исследовать *все* реально существующие возможности. А поскольку Лобачевский всегда исходил из движения твердого тела (понятие прикосновения ♀, возможность переноса расстояний и пр.) и бесконечности пространства (возможность неограниченного протяжения прямой), таких возможностей оставалось только *две* ‡. «Итак,— писал он в «Пангеометрии»,— два только предположения возможны: или сумма трех углов во всяком прямолинейном треугольнике равна

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 436.

* Там же.

⊘ «Прямую, проведенную из данной точки в плоскости, я называю параллельною к данной прямой в той же плоскости, как скоро она составляет границу между теми прямыми, проведенными из той же точки в той же плоскости, которые пересекают данную прямую по достаточному продолжению, и тех, которые не пересекают, сколько бы ни продолжались» (Там же).

♀ «*Прикосновение*,— говорит Лобачевский,— составляет отличительную принадлежность тел и дает им название *геометрических*, когда в них удерживаем это свойство, не принимая в рассуждение все другие, существенные ли то будут или случайные... Два тела *A*, *B*, *касаясь* друг друга, составляют одно Геометрическое тело *C*... Обратно, всякое тело *C* произвольным *сечением* *S* разделяется на две части... Так можно представлять себе все тела в природе частями одного целого, которое называем *пространством*» (Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 168).

‡ Что сумма трех углов в прямолинейном треугольнике не может быть более двух прямых — Лобачевский строго доказывает (см. Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 437), исходя из указанных выше предпосылок.

двум прямым углам — это предположение составляет обыкновенную геометрию — или во всяком прямолинейном треугольнике эта сумма менее двух прямых, и это последнее предположение служит основанием особой геометрии, которой я дал название воображаемой геометрии, но которую может быть приличнее назвать пангеометрией, потому что это название означает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай» *.

*Основной чертой мировоззрения Лобачевского является материализм, твердая уверенность в объективности реального мира, отражаемого нашим сознанием.* Для Лобачевского геометрия являлась наукой о реальном пространстве. Вот почему свои знаменитые «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» он начинает словами:

«Всем известно, что в Геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты...» ⋆.

В «Пангеометрии» он вновь говорит, что для выяснения свойств реального пространства необходимо обратиться к опыту: «... принятое в обыкновенной геометрии явно или скрытно предположение, что сумма трех углов всякого прямолинейного треугольника постоянна, не есть необходимое следствие наших понятий о пространстве. Один опыт только может подтвердить истину этого предположения...» ⊘.

Уже в этой постановке вопроса выступает материалистический характер взглядов Лобачевского на геометрию, истинность которой, т. е. правильность отражения ею свойств реального пространства и, следовательно, границы ее применимости, мы должны проверить на опыте, на практике.

В исследованиях постулата о параллельных линиях Лобачевского прежде всего интересует соответствие построенной при его допущении геометрии истинным отношениям реального мира, возможность ее опытной проверки. При этом и вскрывается невоз-

* Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 437.
⋆ Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 147.
⊘ Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 521.

можность доказательства постулата путем чисто логического вывода его из остальных аксиом геометрии. В самом деле, ка́к может быть, чтобы истина, неизменно подтверждавшаяся во всех практических приложениях геометрии, была тем не менее и не очевидна и не доказуема? И ответ Лобачевского гласил: эта истина не геометрического, а физического характера. Она не вытекает из геометрических свойств, характерных для любых тел природы (под «геометрическим телом» Лобачевский всегда понимал твердое тело) независимо от физических условий, в которых они находятся. Подтвердить ее поэтому, «подобно другим физическим законам, могут лишь опыты» (а не логические выводы из других аксиом геометрии). С другой стороны, если истинность постулата о параллельных зависит от физических условий, то с изменением этих условий должен изменяться и постулат о параллельных. «После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии» *. Иными словами, возможны геометрии, отличные от евклидовой. Больше того, ограничение геометрической науки только одной из них — геометрией Евклида — означает произвольный выбор одного частного случая, одной лишь из существующих возможностей. Должна поэтому существовать «общая геометрическая система» «с полной теорией параллельных» *. «Полной» потому, что здесь должны быть изучены все реально существующие возможности и исключен элемент случайности в выборе одной из них. Именно такую общую геометрию и создает Лобачевский.

В литературе часто встречаются утверждения, что Лобачевский построил наряду с евклидовой другую геометрию, столь же логически совершенную.

На самом деле геометрия Лобачевского не может рассматриваться как стоящая наряду с евклидовой. Геометрия Лобачевского является более общей, чем геометрия Евклида, которая содержится в первой как частный случай, является, как говорят сейчас, предельным случаем геометрии Лобачевского.

---

* Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 159.

* Наиболее подробная работа Лобачевского, посвященная началам геометрии, носит название «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». В ней параллельно изучаются как геометрия Евклида, так и геометрия Лобачевского.

«Главное заключение, — говорит Лобачевский, — к которому пришел я с предположением зависимости линий от углов *, допускает существование Геометрии более в обширном смысле, нежели как ее представил нам первый Евклид. В этом пространном виде дал я науке название *Воображаемой Геометрии*, где как частный случай входит *Употребительная Геометрия*» (т. е. евклидова. — *Г. Р.*) ★.

Лобачевский не опроверг геометрии Евклида и не ставил перед собой этой цели. Он вскрыл ее ограниченность и произвольность, если рассматривать ее как единственно существующую в мире.

Сомнений в правильности отображения свойств реального пространства евклидовой геометрией, т. е. сомнений в ее истинности, у Лобачевского не было. Он лишь доказал несостоятельность взгляда, будто евклидова геометрия единственно возможна в качестве безраздельно господствующей системы наших пространственных представлений. «Способ употребительной Геометрии, — говорит он, — приводит, следовательно, всегда к заключениям верным, однако ж не в таком обширном виде, в каком дает их общая Геометрическая система, которую назвал я *Воображаемая Геометрия*». «Принятая всеми Геометрия, — говорит он далее, — более нежели достаточна, хотя б она сама по себе не была строго верной» ⊘.

Геометрия Лобачевского, таким образом, более полно отражает свойства реального пространства, чем геометрия Евклида, хотя бы последняя и была «более нежели достаточна».

Важно подчеркнуть здесь материалистический характер исходных установок Лобачевского. Построенная им геометрия — не плод досужей фантазии, выведенный из произвольного допущения, не имеющий никакого отношения к реальному миру. Его геометрия так же реальна и необходима, как реальна и необходима геометрия Евклида. Весь вопрос в том, каковы границы применимости обеих геометрий. Мы уже приводили мнение Лобачевского о том, что «в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии». Решить вопрос, какие силы природы «следуют» геометрии Лобачевского, должен опыт, практика. Назвав

* То-есть отказом от евклидова постулата о параллельных. — *Г. Р.*

★ Полн. собр. соч., т. II, стр. 147—148.

⊘ Там же, стр. 160.

свою геометрию «воображаемой», Лобачевский вовсе не думал выдавать ее за произвольное творение своего ума. Он никогда не сомневался в том, что она отражает свойства реального пространства, никогда не терял надежды на ее опытную проверку.

В своем последнем сочинении «Пангеометрия» Лобачевский прямо заявляет, что подтверждение истины предположения о непостоянстве суммы трех углов всякого прямолинейного треугольника нужно искать в опытной проверке, «например, измерением на самом деле трех углов прямолинейного треугольника, измерением, которое может быть произведено различным образом. Можно измерять три угла в треугольнике, построенном на искусственной плоскости, или три угла одного треугольника в пространстве» * с весьма далекими друг от друга вершинами. И если сам Лобачевский еще не располагал возможностью проверки истинности открытой им геометрии, то он очень ясно представлял себе, что тут дело не в принципиальной невозможности, а в невозможности временной, объясняющейся недостатком наших наблюдений. Он прямо заявляет, что «воображаемой» геометрии, «может быть, следуют молекулярные силы», хотя это пока еще, быть может, и «чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительнее доводов» *. Дальнейшее развитие науки действительно подтвердило предположение Лобачевского, что в окружающем нас пространстве геометрия Евклида отнюдь не является единственной.

Материалистический характер геометрических взглядов Лобачевского проявился не только в вопросе о параллельных линиях. Для Лобачевского весьма характерно, что он в своих математических работах и в преподавании математики постоянно заботится о выяснении реальной природы понятий, положенных в основание науки.

По своему мировоззрению Лобачевский был материалистом. Во всей своей деятельности как при разработке научных проблем математики и вопросов воспитания, так и в качестве практического деятеля народного образования, Лобачевский занимал исходную материалистическую позицию. Основной вопрос философии об

---

* Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 521.

* Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 159.

отношении мышления к бытию Лобачевский решал в материалистическом духе. «В природе,—говорил он,—мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения» *.

Лобачевский рассматривал абстрактные положения геометрии, как отражения самых общих и простых отношений и свойств реальных вещей. Он твердо и последовательно проводил мысль, что «первыми данными без сомнения будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств» ⋆, что «первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука..., приобретаются чувствами; врожденным—не должно верить» ⊘, что «мы всеми нашими понятиями о телах одолжены чувствами» ♀. Этот сенсуализм Лобачевского носит ярко выраженный материалистический характер. Для Лобачевского внешний мир объективен, а наши представления о нем—результат воздействия реального мира на сознание человека через ощущения, чувства. Чувства человека не отгораживают его от природы, они связывают его с нею. Именно поэтому Лобачевский говорит, что «в основание математических наук могут быть приняты все понятия, каковы бы они ни были, приобретаемые из природы», и математика «на сих основаниях по справедливости может назваться наукою точною» ↧.

С точки зрения Лобачевского исходные математические абстракции представляют собой отражение реальных свойств материального мира и не могут рассматриваться как свободные продукты произвола человеческой мысли. Лобачевский говорит: «Поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойство тел, познание которых должно родить в нас понятия о поверхностях и линиях **. Он требует таких оснований в математике, которые «должны быть

---

* Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 158—159.

⋆ Там же, стр. 164.

⊘ Полн. собр. соч., т. I, стр. 186.

♀ «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. (Далее цитируется как М о д з а л е в с к и й). Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 203.

↧ М о д з а л е в с к и й. Стр. 204.

** Там же, стр. 177.

несомнительные для нас истины, первые наши понятия о природе вещей, которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда, которые неразлучны с каждым умственным представлением и служат первым основанием всякого суждения о вещах: таковы-то должны быть и основания геометрии [*].

Разум для Лобачевского — «известные начала суждения, в которых как бы отпечатались первые действующие причины вселенной и которые соглашают, таким образом, все наши заключения с явлениями в природе» [★]. Таким образом, источником наших знаний является реальный мир, доставляющий материал для показания наших органов чувств, из которого наш разум, образуя отвлеченные понятия, черпает их содержание. Мы приобретаем знания с помощью разума, но «там,— говорит Лобачевский,— останавливается наше суждение, где перестают руководствовать нас чувства» [⊘].

Ярко выраженную материалистическую направленность имеют взгляды Лобачевского на соотношение теории и практики. Критерием истины для Лобачевского служит опыт, практика. Самую возможность соответствия построенной им геометрии отношениям, существующим в реальном мире, Лобачевский стремился подтвердить опытной проверкой. С этой целью он предпринимал измерения углов треугольника с вершинами в неподвижных звездах. Он считал, что в самых первых понятиях геометрии «еще не заключается той истины, которую хотели доказывать» математики и что эту истину «поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения [♀].

Принятое исходное положение теории параллельных в геометрии Евклида (пятый постулат) или в «воображаемой» геометрии Лобачевского (постулат, противоположный постулату Евклида) «не есть необходимое следствие наших понятий о пространстве. Один опыт только может подтвердить истину этого предположения» [⊺]. Лобачевский — математик-материалист, для которого логическая непротиворечивость геометрии еще недостаточна для того, чтобы признать ее истинной, он требовал практического

---

[*] Модзалевский, стр. 177.

[★] Там же, стр. 323.

[⊘] Там же, стр. 203.

[♀] Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 147.

[⊺] Полн. собр. соч., т. III, 1951, стр. 521.

подтверждения соответствия геометрии реальным отношениям физического пространства.

Для Лобачевского цель научного знания состояла не в развитии оторванных от жизни понятий, а в изучении реального мира. При этом он прекрасно сознавал необходимость введения новых понятий, определений и допущений, признавал роль гипотез для развития науки. «...Мы познаем одну зависимость из опытов,— говорил он,— а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно...» *. Однако он решительно боролся против введения этих допущений как произвольных соглашений. При выборе гипотез он требовал руководствоваться практикой, которая только и может позволить останавливаться на тех, которые находятся в тесной связи с практическими приложениями и вернее отражают соотношения, наблюдаемые в действительности.

Мысль, что опыт, практика дают уверенность в правильности теоретических выводов, характерна для взглядов Лобачевского. Она послужила руководящим принципом во всей его педагогической деятельности, направленной на укрепление практических тенденций в образовании. Пассивно созерцательному характеру обучения в школе он противопоставлял активно действенный. «Всё должно быть у ученика под пальцами и перед глазами», говорил он ★. Цель школьного обучения он видел в его практических результатах. Он говорил, что «математике должно учить в гимназиях еще и с тою целью, чтобы познания, здесь приобретаемые, были достаточны для обыкновенных потребностей в жизни» ⊘. Лобачевский требовал такого начального обучения детей математике, которое приучало бы учеников за каждым математическим действием и формулой видеть реальное явление жизни, доступной пониманию детского ума практики. Таким образом, Лобачевский не отгораживался от жизни, от практики, а ради них добивался серьезных математических познаний для юношества.

Материалистическая направленность воззрений Лобачевского сказалась и в том, что ему был чужд взгляд на науку как на за-

* Полн. собр. соч., т. II, 1949, стр. 160.

★ «Наставления учителям математики в гимназиях» («Труды Института истории естествознания», т. II, 1948, стр. 556).

⊘ Там же, стр. 557.

стывшее знание. Открытием неевклидовой геометрии он расширил рамки наших представлений о пространстве, вывел геометрию как науку на путь дальнейшего развития. Само это открытие не могло произойти без правильного, материалистического взгляда на пространство. Оно родилось в результате смелой ломки многовековых традиций в математике, в результате борьбы против кантовских идей в философии.

Лобачевский как материалист был убежденным противником кантианства. Согласно взглядам Лобачевского в основаниях математических наук должны лежать не произвольные понятия, а «приобретаемые из природы». «Те,— говорил он,— которые хотели ввести подобные (произвольные.—*Г. Р.*) понятия в математику, не нашли себе последователей. Такую участь имели основания форономии Канта...» *.

Историческая заслуга Лобачевского состоит в том, что он смело с материалистических позиций выступил против идеализма Канта. Борьба против кантовского априоризма была одной из важнейших предпосылок создания неевклидовой геометрии. Пошатнув «незыблемость» основ евклидовой геометрии, Лобачевский нанес тяжелый удар философии Канта, которая в этой «незыблемости» и пыталась найти свою опору, рассматривая исходные истины геометрии не как результат опыта человечества, а как врожденные формы человеческого сознания. Лобачевский постоянно подчеркивал никчемность попыток вывести всю математику из одних лишь построений разума. «Все математические начала,— говорил он,— которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики...» *. Всю свою жизнь Лобачевский руководствовался этим убеждением и в соответствии с ним учил своих учеников. В «Речи о важнейших предметах воспитания», произнесенной 5 июля 1828 г. на торжественном собрании Казанского университета, он со всей страстностью своей натуры произносил слова Бэкона: «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно». В этой программной речи Лобачевский

* **Модзалевский**, стр. 204.

* **Там же.**

четко и резко провозглашает принцип, который кладется им в основу обучения. «Здесь,— говорил он,— в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено одним праздным умом» *.

Столь же страстно выступает Лобачевский и против формализма, выхолащивающего из математики и ее понятий их реальное содержание и видящего в математических знаках и операциях над ними лишь простую игру символов.

«Для отвлеченных и общих понятий о величине,— писал он,— также и для тех действий, которые величины должны соединять между собой, изобретены знаки. Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы один передавал другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он постигнул, и зависимость между всеми частями, которую он открыл. Но так же как мнения могут казаться ложно от того, что разумеют иначе слова, так всякое суждение в математике останавливается, как скоро перестаем понимать под знаком то, что оно собственно представляет» *.

Эти слова не потеряли своей актуальности и по сей день, когда в буржуазной науке пышно расцветает формализм, пытающийся лишить математику, в которой существенную роль играют знаки и операции над ними, ее материалистического смысла. Вообще для Лобачевского характерна борьба с формальным усвоением математики, с отказом от выяснения содержательного смысла математических знаков и операций над ними.

Хорошо известно, что великое открытие Лобачевского не было понято его современниками, оно опередило свой век. Потребовалось около полустолетия для того, чтобы идеи Лобачевского вошли в математику как ее составная часть и явились тем поворотным пунтом, который определил почти весь стиль математического мышления последующей эпохи. Но это произошло уже в то время, когда творца этих идей не было в живых. При жизни

* **Модзалевский**, стр. 323.

* «Наставления учителям математики в гимназиях» («Труды Института истории естествознания», т. II, 1948, стр. 555—556).

Лобачевского гениальные его работы по неевклидовой геометрии большинством математиков замалчивались, а в «Сыне отечества» за 1834 г. и в немецкой печати появились даже издевательские статьи о работах Лобачевского. Однако это не сломило воли Лобачевского, ни минуты не сомневавшегося в выбранном им пути. Он не прекращал работ по неевклидовой геометрии и ее приложениям и незадолго до своей смерти, будучи уже слепым, продиктовал свое последнее сочинение «Пангеометрия» — так он называл теперь свое творение «потому, что это обозначает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай».

Естественно возникает вопрос, почему из всех математиков, в той или иной мере стоявших на пути открытия неевклидовой геометрии, только один Лобачевский мужественно боролся за новые идеи, в то время как другие были либо лишь тайными их последователями (Гаусс), либо такими их приверженцами, которые после первых неудач на путях признания впадали в уныние и отказывались от дальнейшей борьбы (Швейкарт, Вахтер, Тауринаус, Янош Больаи)?

Здесь резко сказывается различие характера мировоззрения ученых, определяющего их отношение к жизни, к действительности. Мужественную борьбу за новые смелые идеи мог вести человек, обладающий передовым последовательным мировоззрением. Таким человеком как раз и был Лобачевский. Особенно интересно сравнить в этом отношении Лобачевского и Гаусса. Решительно всё — отношение к жизни, к народу, к просвещению, к событиям — отличает этих двух гигантов математической мысли. Мы видим, что Гаусс, великий человек в математике, в своей обыденной жизни является обыкновенным филистером. Личное спокойное благополучие — вот его идеал. Этому идеалу он готов даже принести в жертву великие идеи, которые разделяет, отказываясь от борьбы за их признание. Множество писем Гаусса пестрит филистерскими высказываниями. Не таков был Лобачевский. Великий человек в математике, он и в обыденной жизни возвышался над уровнем окружавших его людей своими передовыми взглядами.

«Мой нрав не таков и правила, чтобы унывать и раскаиваться, когда нельзя помочь чему. Простительным мне кажется робеть, когда еще надобно решиться; но когда дело решено, то не надобно падать духом», — пишет Лобачевский попечителю Казанского учебного округа М. Н. Мусину-Пушкину 1 сентября 1827 г., вскоре после вступления в должность ректора Университета, когда он увидел всю трудность ноши, которую взвалил на свои плечи *. И это не только слова. Лобачевский — борец, которому чужд пессимизм. Он отдается всем своим существом кипучей деятельности профессора и ректора университета, благородному делу воспитания юношества.

Наоборот, у Гаусса мы встречаем сетования на «тяжелые времена», его угнетает деятельность профессора, не волнует роль воспитателя молодого поколения. «Я здесь далек от того, чтобы быть хозяином своего времени,— пишет он Бесселю 14 марта 1824 г., — я должен его делить между академическими лекциями (*к которым я с давних пор питаю отвращение*, которое, если не вызывается, то усиливается неотлучным сознанием того, что я теряю время) и практическими астрономическими работами *. Благородному делу образования Гаусс уделяет время по необходимости, тогда как Лобачевский отдается ему по призванию. В этом деле, как истинный патриот, Лобачевский видит великую цель преобразования и возвеличивания своей родины, в то время как Гаусс видит в нем лишь докучливое беспокойство.

Характерно, что Гаусса не тревожила судьба новых идей неевклидовой геометрии, он не решился открыто выступить за их признание. Лобачевский же всю жизнь за эти идеи боролся. Но его тревожило не только это. Он беспокоился за правильную организацию народного образования, за экономическое процветание своей родины, за чистоту родного языка. «Жалким событием нашего времени» назвал он пренебрежение родным языком, столь характерное для высших слоев современного ему общества. «Язык народа», — говорил Лобачевский,— представляет собой «свидетельство его образованности». Не знать русского языка, «не постигать духа в своем отечественном языке постыдно». Вообще Лобачевский проводил передовые для своего времени просветительные взгляды, доказывая, что воспитание должно ставить своей целью подготовку всесторонне развитого человека. Величайшее препятствие для развития общества Лобачевский видел в невежестве, насаждавшемся

---

* Модзалевский, стр. 238.

* Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig, 1880, стр. 428. Курсив мой. — *Г. Р.*

крепостническим строем. Лобачевский был страстным борцом за возвышенные идеалы человечества. «Жить, — говорил он,— значит чувствовать... непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем... Будем же дорожить жизнию, покуда она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в Истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которые дозволят нам торжествовать над ужасом смерти» *. Он требовал от пришедшего в университет студента прежде всего, чтобы он был гражданином, который «высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества» ⋆. В соответствии с этими словами находились и дела Лобачевского. Во всём этом виден благородный патриотизм ученого. Разве можно сравнить эти благородные черты Лобачевского с узко мещанским подходом к жизни Гаусса, который на приглашение приехать на работу в Россию предоставлял Академии решить, «может ли она еще улучшить... условия и тем обеспечить мне положение, при котором я был бы склонен считать менее тяжким пожертвование моим отечеством» ⊘? Читая письма Гаусса, поражаешься тому обилию жалоб на «вещи, которых нельзя изменить», на чувствительность «к неприятным впечатлениям», на «горькие стороны жизни» и т. д. Такое жизнеощущение Гаусса, несомненно, не могло не сказаться и на его отношении к новым геометрическим идеям. Беспокойство и борьба за их признание не были в духе Гаусса. Вообще он всячески избегал затрагивать темы, которые могли бы вызвать споры и потревожить спокойное течение его жизни. Не выступив открыто в печати за признание неевклидовой геометрии, он так и остался до конца своей жизни тайным сторонником этих идей.

Передовые геометрические взгляды Лобачевского были в полном соответствии с передовым характером его мировоззрения. Этим объясняется тот факт, что Лобачевский не побоялся, подобно Гауссу, выступить со своими смелыми геометрическими идеями, не отказался от борьбы за них, подобно Больаи, когда не встретил

* Речь о важнейших предметах воспитания (Модзалевский, стр. 324, 326).

⋆ Там же, стр 322.

⊘ Письмо к Н. И. Фуссу от 20 октября 1802 г. «Труды Института истории науки и техники», 1934, сер. 1, вып. 3, стр. 219—220.

поддержки своих идей со стороны других математиков. Не сломили воли Лобачевского к борьбе и нападки в печати на его геометрию со стороны рутинеров в науке.

Прогрессивное значение великих идей Лобачевского заключается не только в том, что открытие неевклидовой геометрии заставило математиков по-иному взглянуть на свою науку, перестроить всё здание геометрии, расширить ее границы, из системы с застывшими формами, данными ей еще Евклидом, вывести ее на путь широкого развития, на путь перехода одной геометрии в другую. Не менее важна роль материалистической направленности исходных установок Лобачевского, его утверждений, что начальные понятия и положения науки должны быть «необходимым следствием из сущности вещей», роль направленности работ Лобачевского на выяснение материалистического содержания математических понятий и предложений, на раскрытие связей геометрии с действительностью, с отражаемыми ею свойствами реального мира. Эта материалистическая направленность творчества Лобачевского делает его одним из наиболее ярких гениев науки XIX века.

# ВЫЯВЛЕНИЕ НАСЛЕДИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО И МАТЕРИАЛОВ К ЕГО БИОГРАФИИ

И. Н. Бронштейн

Жизнь и деятельность Лобачевского изучены еще далеко не в полной мере: слабо выявлены целые периоды его жизни, существенные стороны его деятельности. Несмотря на наличие таких превосходных трудов о Лобачевском, как А. В. Васильева * и В. Ф. Кагана *, достаточно полной биографии великого русского ученого мы еще не имеем. Его научное и педагогическое наследие не собрано, личного архива Лобачевского не найдено. Каждый год находятся новые работы, заметки, письма и руководящие указания самого Лобачевского, характеризующие его многогранную деятельность; в еще большем числе находятся документы о Лобачевском, освещающие важные моменты его биографии.

Обширная деятельность Лобачевского, ее диапазон могут быть сравнимы только с многогранной деятельностью другого гения русской науки — Михаила Васильевича Ломоносова. Я могу насчитать по меньшей мере восемь направлений деятельности Лобачевского.

Лобачевский прожил замечательную научную жизнь и прославил себя и нашу Родину своим великим открытием. Научные исследования — первая и важнейшая сторона его деятельности; естественно, что она более изучена. Это было относительно легче сделать еще и потому, что в нашем распоряжении имеется основной

---

* А. В. Васильев. Жизнь и научное дело Н. И. Лобачевского. Рукопись (геометрический кабинет Казанского университета).

* В. Ф. Каган. Лобачевский. Изд. АН СССР, М. — Л., 1944 и 1948 гг.

материал, освещающий это направление, — сочинения самого Лобачевского. Но и здесь предстоит еще очень большая работа. Научная деятельность Лобачевского в области математического анализа, в области алгебры, теории вероятностей, астрономии — только в самые последние годы стала объектом исследования советских ученых. Я имею в виду работу Н. Г. Чеботарева, комментировавшего сочинения Лобачевского по алгебре *, работу А. П. Юшкевича и И. Г. Башмаковой на эту же тему *, работы Г. Л. Лунца о сочинениях Лобачевского по анализу ⊘, работы Б. В. Гнеденко и Н. И. Идельсона о трудах Лобачевского по теории вероятностей и астрономии ♀. Это — только опубликованные работы; изучение научной деятельности Лобачевского продолжается, и на настоящей конференции мы познакомимся с результатами последних исследований в этом направлении (доклады Б. Л. Лаптева, Б. М. Гагаева, В. В. Морозова, А. Д. Дубяго) ‡.

Непосредственно к этому первому направлению деятельности Лобачевского примыкает второе направление — многолетняя преподавательская работа, профессура в Казанском университете. На протяжении более 30 лет Лобачевский читал все математические предметы, физику, механику, астрономию, читал в Казани публичные лекции по математике и физике, вел научное руководство физико-математическим отделением, выражаясь современным языком — руководил целым рядом кафедр. Остались многочисленные документы, характеризующие педагогическую деятельность Лобачевского в университете, многие из них опубликованы, но еще

* В IV томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, 1948.

* А. П. Юшкевич и И. Г. Башмакова. «Алгебра или вычисление конечных» Н. И. Лобачевского. «Историко-математические исследования», вып. II, М.—Л., 1949, стр. 72—128.

⊘ Г. Л. Лунц. О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу. «Историко-математические исследования», вып. II, М. — Л., 1949, стр. 9—71. Г. Л. Лунц. Аналитические работы Н. И. Лобачевского, «Успехи математических наук», т. V, вып. 1, 1950.

♀ Б. В. Гнеденко. О работах Н. И. Лобачевского по теории вероятностей. Н. И. Идельсон. Лобачевский — астроном. «Историко-математические исследования», вып. II, М. — Л., 1949, стр. 129—167.

‡ Печатаются в настоящем сборнике. После конференции, в 1951 году вышел V том Полного собрания сочинений Лобачевского, содержащий его работы по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии с комментариями Г. Л. Лунца, А. Н. Колмогорова, А. Н. Хованского, Н. И. Идельсона, Г. Г. Тумашева и А. Д. Дубяго.

больше не опубликовано и не разыскано. Эта деятельность Лобачевского подняла Казанский университет на очень большую высоту, сделала его одним из передовых университетов как в России, так и за границей.

Третье направление Лобачевского, также связанное с Казанским университетом — его личное руководство университетом в качестве ректора в течение почти 20 лет. Яркая общественная и административная деятельность Лобачевского на посту ректора еще очень мало изучена. По существу, кроме знаменитого четырехтомного труда Загоскина*, который можно считать только предисловием к этой деятельности Лобачевского, об этом почти ничего не опубликовано. Лобачевский провел поистине гигантскую работу, высоко подняв университет из той бездны мракобесия и упадка, в которой он находился в мрачную эпоху Магницкого. Материалы, освещающие эту сторону деятельности Лобачевского, в значительной степени сохранились, но они очень мало изучены. А ведь эта деятельность имеет очень большое общественно-историческое значение по тому влиянию, которое имел университет в огромном Казанском учебном округе и вне его.

Четвертое направление — живое руководство средним образованием в Казанском учебном округе в течение почти всей жизни Лобачевского, начиная от преподавания в Казанской гимназии до работы в качестве управляющего казанским учебным округом, то-есть почти до самых последних лет его жизни. Передовые педагогические взгляды Лобачевского, его активная руководящая деятельность видны из документов, недавно найденных тт. Якуниным, Болгарским, Нагаевой. Недавно вышла большая работа В. М. Нагаевой «Педагогические взгляды и деятельность Лобачевского»*. Лобачевский предстает перед нами в новом свете — как передовой деятель просвещения в тяжелую николаевскую эпоху. Но работа Нагаевой — только первая в этом направлении: были найдены и новые интересные материалы, в частности работником Казанского педагогического института Б. В. Болгарским. Предстоит

* Н. П. Загоскин. История Казанского университета, Казань, т. I, 1902; II, 1903; III, 1904; IV, 1906.

* В. М. Нагаева. Педагогические взгляды и деятельность Н. И. Лобачевского. «Историко-математические исследования», вып. III, М. — Л., 1950, стр. 76—153.

еще очень большая работа по изучению этого направления деятельности Лобачевского.

Пятое направление — замечательная работа Лобачевского в качестве многолетнего главного библиотекаря Казанского университета. Это направление важно изучить не только потому, что оно очень ярко освещает личность Лобачевского. Плоды этой работы Лобачевского библиотека Казанского университета ощущает и по настоящее время: классификация книг в ней ведет свое начало от Лобачевского. Это направление деятельности Лобачевского получило еще мало отражения в литературе; найденные документы почти не опубликованы *.

Шестое направление — строительная деятельность Лобачевского. Это направление почти совсем не изучено, во всяком случае опубликовано об этом очень мало. Имеется статья известного казанского работника — архитектора В. В. Егерева, знатока казанской старины *. Мы все ждем, что В. В. Егерев поделится с нами своими большими знаниями, своим богатым опытом по изучению строительной, да и не только строительной деятельности Лобачевского. Превосходно знавший строительное дело, Лобачевский мог принимать смелые решения в строительстве университетских зданий и — как Вы все хорошо знаете — блестяще осуществил эти решения. Найдено немало документов, характеризующих это направление деятельности Лобачевского, но они почти не опубликованы.

Седьмое, может быть менее известное направление, — активная редакционно-издательская деятельность Лобачевского. Лобачевский понимал всю силу, все значение печатного слова — достаточно привести первые слова из его редакционного предисловия к первой книге «Ученых Записок, издаваемых Казанским университетом»:

> «Печатанию, как будто второму дару слова, новейшие времена обязаны самой большой частию своей образованности. Если науки так удачно и во многих отношениях сравнены со светом, который открывает глазам до того невидимые в тем-

---

* См. М. К. Андреев. О Н. И. Лобачевском как библиотекаре Казанского университета. Журнал «Природа», 1949, № 4, стр. 56—58.

* В. В. Егерев. Н. И. Лобачевский как строитель. Изд. О-ва археологии, истории и этнографии при Каз. гос. ун-те, т. XXXIII, вып. 2—3, Казань, 1926.

ноте предметы, то сходство сделалось еще совершеннее, когда тиснение книг позволило с такой быстротой распространять наши познания. Вечером родившаяся мысль в уме одного человека, утром повторяется тысячи раз на бумаге и разглашается потом во все концы обитаемой земли» *.

Лобачевский еще адъюнктом работает в издательном комитете университета, затем он принимает активное редакционное участие в газете «Казанские известия», далее — в «Казанском вестнике»; пишет сам, редактирует, переводит, некоторое время работает в цензурном комитете, наконец, основывает и направляет «Ученые записки Казанского университета». Он организует университетскую типографию. Эта деятельность Лобачевского должна еще изучаться, надо исследовать издания, вышедшие при участии и под руководством Лобачевского. Некоторые документы, характеризующие это направление его деятельности, найдены, но еще не опубликованы.

Наконец, восьмым направлением я называю своеобразную и очень активную деятельность Лобачевского в «Казанском экономическом обществе», в основном направленную на организацию сельского хозяйства, но затрагивающую и другие вопросы. Лобачевский относился с энергией, инициативой, со страстью ко всему, с чем он соприкасался, и в этой далекой от университета деятельности он проявил свойственную ему активность, практически применял новые, организованные им мероприятия, новые конструкции машин. Сохранились некоторые документы, характеризующие и эту деятельность Лобачевского; имеются некоторые исследования по этому вопросу *, но конечно очень недостаточные, носящие только предварительный характер.

Таков несомненно неполный перечень направлений кипучей деятельности Лобачевского. И в каждом из этих направлений имеется большое число документов, которые до сих пор не выявлены, не изучены. Лобачевский оставил после себя многогранное

---

* Ученые записки Каз. ун-та, 1834, кн. 1, стр. I—VI. Воспроизведено в сборнике Л. Б. Модзалевского (см. сноску на следующей странице), документ № 389, стр. 367. Будет помещено в VI томе Полного собрания сочинений Лобачевского.

* См., например, И. А. Износков, О деятельности Н. И. Лобачевского в Казанском экономическом обществе, Казань, 1894.

наследие, изучение которого представляет большой интерес и большое значение.

Предстоит поднять еще большое количество материала, связанного с личными биографическими моментами, — документы, представляющие огромную ценность для полной, подлинно научной биографии великого русского ученого.

Большой вклад в дело выявления материалов для биографии Лобачевского сделал безвременно погибший Л. Б. Модзалевский, выпустивший в 1948 году большой, тщательно отредактированный том документов и воспоминаний о Лобачевском *. Он содержит более 600 документов, подбор личных воспоминаний о Лобачевском, ряд ценных приложений. Но этот сборник, содержащий более 800 страниц большого формата, всё еще далек от полноты. Об этом говорит и сам Модзалевский в предисловии к сборнику, это подтверждается еще и тем, что после выхода сборника, в течение последних лет появляются в большом количестве новые, важные материалы, вносятся существенные исправления в материалы, опубликованные Модзалевским.

Систематическим подбором и изучением документов, связанных с Лобачевским, независимо от Модзалевского, занимался в Казани покойный профессор Петр Алексеевич Широков. Эту работу он проводил в связи с подготовкой к изданию Полного собрания сочинений Лобачевского (П. А. входил в редакционную коллегию этого издания). Семья П. А. Широкова любезно предоставила во временное пользование Государственного издательства технико-теоретической литературы материалы, переписанные и систематизированные им.

Научный сотрудник Центрального государственного архива Татарской АССР Д. С. Гутман обнаружил в архиве несколько сотен очень интересных и важных документов о Лобачевском, которые подготовил к изданию; они сейчас находятся в Институте истории естествознания Академии наук СССР.

И просмотр материалов Широкова, сделанный мною, и — как мне сообщили — просмотр материалов Гутмана обнаружили, что оба собрания документов, конечно, содержат некоторое число из

* «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд. АН СССР, М.-Л., 1948.

опубликованных Модзалевским, но большая часть обоих этих собраний у Модзалевского отсутствует и между собою не перекрывается.

И после выхода в свет сборника Модзалевского выявлением документов как самого Лобачевского, так и о Лобачевском занято очень много людей. Я уже назвал имена Нагаевой, Болгарского, Якуниной, Егерева — это те, о которых я случайно знаю. Могу еще добавить казанского писателя И. П. Заботина, изучавшего подлинные документы в связи со своими писательскими целями (он пишет роман о Лобачевском *). А скольких я не назвал — как в Казани, так и в других городах!

Эти люди делают большое, нужное дело, но мне представляется, что, занимаясь выявлением архивных материалов, они дублируют работу, распыляют свои силы и время. На своем личном опыте я убедился, что эта работа, по крайней мере в Казани, идет — не скажу по неправильному, но по очень нерациональному пути.

В прошлом году, в связи с изданием Полного собрания сочинений Лобачевского, Государственное издательство технико-теоретической литературы командировало меня в Казань для сличения с первоисточниками некоторых работ Лобачевского, не напечатанных при его жизни и хранящихся в рукописном виде в Казанском университете и в Центральном государственном архиве Татарской АССР. Это были работы Лобачевского, опубликованные Модзалевским и Якуниным, а также найденные Нагаевой (у меня были копии с них): они относились главным образом ко второму и четвертому направлениям по моей классификации, т. е. к преподавательской деятельности Лобачевского в университете и педагогическому руководству средней школой; кроме того, мне было поручено ознакомиться с теми рукописями Лобачевского, которые хранятся в Геометрическом кабинете Казанского университета (о них я скажу ниже). Тогда я и узнал о существовании собраний Широкова и Гутмана, о документах, найденных Болгарским, об исследованиях Егерева и Заботина.

В процессе работы и мне встретилось немало новых документов, которые представляют интерес не только для биографии

* Отрывок из романа И. П. Заботина «Лобачевский» помещен в альманахе «Литературный Татарстан», кн. 4, Казань, 1950, стр. 63—106.

Лобачевского, но и для полного собрания его сочинений (я преимущественно ими и интересовался). Копии свыше 50 документов, в общем занимающих около 200 страниц, находятся сейчас в распоряжении издательства. Я не буду затруднять Ваше внимание перечислением и характеристикой этих документов; они относятся ко всем восьми перечисленным мною направлениям деятельности Лобачевского или к его биографии. Я хочу сейчас говорить не о том, что я нашел, а о том, что я не нашел — это является главной целью моего настоящего сообщения.

К найденным документам я пришел тем же путем, как и другие — Модзалевский, Гутман, Нагаева. В Центральном государственном архиве Татарской АССР я руководствовался описями дел фондов Казанского университета и попечителя Казанского учебного округа. Из этой описи названий архивных дел я выбирал те, в которых по названиям и другим внешним признакам в описи (годы, количество листов в деле и т. д.) предполагал найти интересный материал для помещения его в Полном собрании сочинений Лобачевского. По большей части поданное мне дело ничего не давало, и я напрасно перелистывал сотни страниц. Но в некоторых делах оказались документы, представившие интерес

Несовершенство этого выборочного метода мне стало ясно с первых дней моей работы, но я был ограничен временем и не мог работать иначе. Несомненно, я пропустил гораздо более интересные и важные документы. Неточное название дела в описи, слишком общее, а зачастую и просто неверное, много раз вводило меня в заблуждение. Иногда, по косвенным данным, почерпнутым из другого дела, мне приходилось снова возвращаться к уже просмотренной описи и требовать дело, которое раньше совершенно не обращало на себя внимания — и в нем оказывались важные материалы. Кто бы, например, мог сказать, что в деле под названием «Ссора почетного попечителя Симбирской гимназии Сталыпина с инспектором Княгницким» — прямо гоголевское название! — будут найдены три больших документа Лобачевского о его обследовании Симбирской гимназии и Симбирского благородного пансиона. В этих документах имеются очень интересные педагогические высказывания Лобачевского; они ярко характеризуют личность Лобачевского, представляют большой биографический интерес. В сборнике Модзалевского об этом обследовании имеется только переписка попечителя Казанского учебного округа Мусина-Пушкина с министром народного просвещения Уваровым *, а сами записи обследователя-Лобачевского отсутствуют. Не обнаружила их и В. М. Нагаева, специально искавшая в архиве документы о педагогической деятельности Лобачевского. Таких примеров можно привести немало.

Совершенно ясно, что такой выборочный метод просмотра архивных фондов Казанского университета и попечителя Казанского учебного округа, где Лобачевский развивал в течение многих лет такую активную деятельность, всегда будет недостаточен — всегда будет риск упустить важную деталь из жизни и деятельности Лобачевского, пропустить важный документ, не только характерный для биографии Лобачевского, но и такой, который нашел бы место в полном собрании его сочинений.

Необходимо положить конец такому методу и *пересмотреть эти важные фонды за определенные годы внимательно сплошь, не пропуская ни одного дела и ни одного листа.* Эта работа очень большая, для одного человека она потребовала бы нескольких лет, но если ее провести организованно, то она может быть закончена в 1—2 года. Для этого необходимо организовать бригаду из квалифицированных работников — математиков, историков, архивистов, хорошо знающих жизнь и творчество Лобачевского. В бригаде должны принять руководящее участие и работники самого архива Татарской АССР. Бригада «прочешет» архив и выявит все имеющиеся там документы Лобачевского и о Лобачевском. Кроме указанных двух фондов, необходимо будет пересмотреть и некоторые другие (фонды Казанской гимназии, Казанского экономического общества и др.).

Беглое ознакомление с двумя сотнями дел, которые мне удалось видеть, приводит меня к уверенности, что только в одном Центральном архиве Татарской АССР имеются неизвестные документы — не менее ценные, чем опубликованные Модзалевским, и в таком количестве, которое составит по меньшей мере еще один-два тома

* Модзалевский (см. сноску на стр. 66), документы №№ 397 и 398, стр. 373—377.

такого же объема, как и сборник Модзалевского. Книга Модзалевского составит только первый том материалов для научной биографии Лобачевского.

Но полное обследование Казанского архива — это далеко не вся работа по выявлению наследия Лобачевского и материалов к его биографии. Подобную же работу необходимо провести и в библиотеке Казанского университета, в отделе редких книг и рукописей, где материалы о Лобачевском очень разбросаны, далеко не все выявлены. Я лично видел интересные документы в этой библиотеке, которые не попали в сборник Модзалевского (его послужные списки, документы, касающиеся работы Лобачевского в цензурном комитете, и другие). Ценнейшие материалы о библиотечной деятельности Лобачевского, а также собственноручно написанный Лобачевским годовой отчет университета, спасенные М. К. Андреевым от уничтожения, — ни в каких каталогах не значатся. «Прочесать» эту библиотеку — ее отдел редких книг и рукописей — и составить исчерпывающий каталог всех материалов о Лобачевском, хранящихся в ней — это долг работников Казанского университета, в первую очередь — работников библиотеки университета. В библиотеке же следует сконцентрировать и библиографическую работу по изучению печатных материалов прошлого века, в которых есть упоминание о деятельности Лобачевского, его неизвестные печатные работы, часто не подписанные Лобачевским (особенно в «Казанских известиях», «Казанском вестнике», в учебных программах и ведомственных документах, связанных с работой университета). Не могу не отметить ценнейшего начинания Г. А. Скопина — исследовать сохранившийся личный читательский формуляр Лобачевского в университетской библиотеке.

В Геометрическом кабинете Казанского университета бережно хранятся как драгоценнейшие реликвии те немногие отрывки, фрагменты из рукописей Лобачевского, которые удалось сохранить из его личного архива, а также большая тетрадь с записями Лобачевского главным образом по математике и астрономии.

Эти документы начинали изучать, ими занимались покойные профессора Казанского университета, так много сделавшие для распространения идей Лобачевского: А. В. Васильев, Н. Н. Парфентьев, П. А. Широков, Н. Г. Чеботарев. Но всё же эта работа далека от завершения *. Просматривая эти документы, я нашел среди них черновые записки, относящиеся к знаменитым работам Лобачевского «О началах геометрии» и «Новые начала геометрии» *; имеются там странички и из недошедшего до нас полностью первого варианта учебника Лобачевского «Основание геометрии» ⊘. Мне кажется, что ближайшая задача казанских математиков, работников Физико-математического института имени Чеботарева — завершить изучение этих материалов, составить их научную опись, выявить отношение каждого сохранившегося документа к научной и педагогической деятельности Лобачевского.

К работе по выявлению научного наследия Лобачевского и материалов к его биографии должны присоединиться и сотрудники Государственного музея Татарии и отдельные любители казанской старины, патриоты и знатоки истории своего города, столицы своей республики. Они помогут найти новые места, где имеются документы Лобачевского или о Лобачевском — как в самой Казани, так и в других местах республики. Если личный архив Лобачевского не уничтожен, он должен быть разыскан! Я лично верю в то, что знаменитый первый доклад Лобачевского «Краткое изложение основ геометрии с полным доказательством теоремы о параллельных», который знаменует день рождения геометрии Лобачевского — день, 125-летие которого мы сейчас торжественно отмечаем, — будет найден!

Я говорил только о Казани. Но кроме Казани материалы о Лобачевском имеются во многих местах Союза. Модзалевский опубликовал ряд документов, хранящихся в архивах Москвы и Ленинграда. Этим работа по выявлению наследия Лобачевского и материалов к его биографии в нашей столице и городе Ленина только начата, необходимо ее организовать и проводить интенсивными темпами.

В бывших губернских городах, входивших в Казанский учебный округ (Нижний-Новгород, Саратов, Пенза, Симбирск, Вятка,

---

* О тетради Н. И. Лобачевского см. в докладе В. В. Морозова, стр. 75—78 наст. сборника.

* Фотография черновой записки, относящейся к «Новым началам геометрии», помещена в V томе Полного собрания сочинений Лобачевского, М. — Л., 1951, стр. 348.

⊘ Один из этих отрывков помещен в «Историко-математических исследованиях», вып. III, М.-Л., 1950, стр. 192—194.

Астрахань и другие) — в этих городах имеется также немало документов Лобачевского, связанных с его деятельностью в качестве ректора университета и попечителя округа. Нижний-Новгород — Горький — ценен еще и тем, что там Лобачевский родился и провел первые годы своей жизни, прежде чем навсегда переехать в Казань. Надо и там проводить выявление этих документов, в первую очередь, местными силами — математическими и архивно-историческими, но с централизованным руководством.

Наконец, кроме известных государственных архивов и библиотек, многие документы имеются в частных руках или в местах, о существовании которых знают лишь отдельные лица. Их все необходимо обнаружить.

Организация, которая возглавит работу по выявлению научного наследия Лобачевского и материалов для его биографии, должна сделать ряд объявлений в центральной и местной печати о том, чтобы все владеющие такими документами или знающие об их местонахождении, сообщили об этом, дали возможность ознакомиться с ними, опубликовать важнейшие из них.

Так будут собраны и том за томом изданы материалы для биографии Лобачевского; таким образом одновременно будет получен материал для действительно полного собрания сочинений Лобачевского, в которое войдут немногие, наиболее ценные из найденных документов — характерные высказывания великого русского ученого, его научное наследие.

Все эти соображения возникли в Государственном издательстве технико-теоретической литературы именно в связи с издающимся сейчас Полным собранием сочинений Лобачевского. Первые пять томов его будут содержать научные сочинения Лобачевского, напечатанные при его жизни. В заключительный, VI том предполагается включить научное наследие Лобачевского. Подготовляя материал к этому VI тому, редакция и столкнулась с тем, что к настоящему дню обнаружена только небольшая часть этого наследия. Между тем, окончание издания должно быть, по утвержденному плану, завершено в 1953 году.

В редакции и издательстве было принято следующее решение: выпустить VI, последний том Полного собрания сочинений Лобачевского в 1953 году, включив в него те материалы, которые будут обнаружены к сроку, обеспечивающему своевременный выпуск тома (конечно, тщательно отобрав из большого найденного материала всё то, что достойно помещения в полном собрании, исключив то второстепенное, что найдет себе место только в материалах к биографии Лобачевского). При этом редакция отдает себе отчет, что это шеститомное издание не может быть исчерпывающе полным. Разумеется, все научные материалы, хранящиеся в Геометрическом кабинете Казанского университета, должны быть обработаны теперь же и важнейшие из них помещены в VI томе. Это должны иметь в виду казанские математики и закончить изучение материала в 1951—1952 годах.

Одновременно с этим редакция сочинений Лобачевского и Государственное издательство технико-теоретической литературы считают желательным немедленно приступить к полному выявлению всех необнаруженных материалов, связанных с жизнью и деятельностью Лобачевского; издательство берет на себя обязательство быстро выпускать в свет все эти материалы. Эта работа — не на год, но ее недопустимо и затягивать. Мы и так очень виноваты в том, что научная биография великого русского ученого до сих пор не создана, а его научное наследие не выявлено. Важно торопиться еще и потому, что время идет, документы безнадежно теряются, портятся, иногда варварски уничтожаются. В прошлом году в Казани я с болью в душе узнал, что здесь недавно в порядке «пересмотра» архива были уничтожены ценнейшие материалы, относящиеся к Лобачевскому или написанные его рукой; некоторые из них только случайно удалось спасти. Такое преступление является исключительным случаем, но безжалостное время всё более и более отдаляет нас от годов жизни Лобачевского и затрудняет работу по восстановлению его наследия. Надо спешить!

Я представляю себе реальными следующие сроки. В течение ближайших 3 лет, в 1952—1954 гг. мы должны выявить и издать материалы для биографии Лобачевского. Важнейшее из того, что удастся найти в 1951—1952 годах, будет помещено в VI томе. Если (а это несомненно) среди материалов, найденных в 1953 и 1954 годах, окажутся документы, достойные того, чтобы войти в Полное собрание сочинений, то они будут выпущены отдельно в виде седьмого дополнительного тома.

На основе найденных и опубликованных материалов должна быть написана большая, полная, подлинно научная биография Лобачевского. Год или два потребуется для ее написания и издания; конечно, предварительная работа по изучению всех материалов начнется значительно раньше — можно сказать, теперь же, одновременно с их выявлением.

Ровно через 5 лет наша страна будет отмечать столетие со дня смерти Лобачевского. В эти дни в этих же стенах будет с еще большей торжественностью проведен столетний юбилей. И необходимо принять все меры к тому, чтобы к этому дню, 23 февраля 1956 года, в Казани находился том (или томá!) полной биографии великого русского ученого!

В заключение — несколько слов об организации работы, общие черты которой я перед Вами обрисовал. Эта работа потребует много научных и организационных усилий, много средств. Она должна быть правильно поставлена. Издательство берется выпустить в свет материалы, относящиеся к жизни и деятельности Лобачевского, примет участие в их редакционной обработке, но основная работа здесь, конечно, не издательская, а научно-исследовательская, и она должна проводиться в большом, общегосударственном масштабе, специально утвержденной авторитетной комиссией, в плане работы большого научного учреждения, которая возьмет на себя ответственность за осуществление работы в определенные сроки.

Каким должно быть это учреждение? Кому по плечу эта большая и почетная работа? Кто, наконец, имеет право претендовать на руководство делом изучения жизни и деятельности Лобачевского? Ответ один — это Казанский государственный университет имени Владимира Ильича Ульянова-Ленина, которому Лобачевский отдал всю свою жизнь. Мы все можем выразить уверенность, что он с честью выполнит это большое государственное и родное для него дело!

# ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РУКОПИСЯХ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

В. В. Морозов

Это краткое сообщение является результатом первых шагов в исследовании тетради Н. И. Лобачевского, хранящейся в Геометрическом кабинете Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина. Описание этой тетради было сделано проф. А. В. Васильевым в его работе о Лобачевском, не вышедшей в свет и хранящейся там же. Попытки систематического изучения тетради мне неизвестны.

Тетрадь содержит 180 страниц большого формата (поллиста), частично чистых, но большей частью исписанных. Начинается она списком книг по математике, астрономии, физике и химии; на 11-й странице содержится алфавитный список терминов от Abaissement до Aimant с указанием литературы по каждому термину. В конце дано оглавление (неполное) тетради, сделанное Лобачевским; страницы указаны в беспорядке.

Большая часть тетради заполнена математическими выкладками (алгебра, анализ, механика, астрономия), причем выкладки, не законченные на одной странице, переходят на другую, подчас весьма удаленную от первой; переход осуществляется иногда в направлении возрастания страниц, иногда в обратном направлении, но, как правило, выкладка проводится либо только на четных, либо только на нечетных страницах.

Начало заполнения тетради можно достаточно достоверно отнести к 1822 г., ввиду наличия в ней ссылок на журналы за 1821 г., а также алгебраического материала, который должен был понадобиться Лобачевскому для чтения лекций в 1823 г., но не в 1821—1822 или 1822—1823 гг. *. Нужно отметить, что применяемое в тетради обозначение для $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ посредством $n^{:m}$ совпадает с обозначением в рукописи «Алгебра», относящейся к 1825 г., в то время как в напечатанном в 1834 г. сочинении «Алгебра или вычисление конечных» применено обозначение $n^{\infty m}$ ⋆.

Алгебраический материал тетради в основном касается трех разделов: 1) непрерывные дроби — стр. 15, 17, 19, 21 и т. д.; 2) исследование характера корней уравнения — стр. 141, 135, 133, 131, 49, 51, 53 и т. д.; 3) симметрические функции и преобразование Чирнгаузена — стр. 8, 10, 12, 14, 16 и т. д. Так как есть все основания считать, что нечетные страницы тетради были использованы в первую очередь, то мне представляется, что это расположение соответствует хронологии заполнения тетради.

1. Непрерывные дроби. На стр. 15, 17 рассматривается разложение по степеням $t$ функции

$$u=(1+t)^m+mq(1+t)^{m+n}+m^{:2,-n}q^2(1+t)^{m+2n}+\ldots \text{⊘}$$

Устанавливается функциональное уравнение, связывающее коэффициенты этого разложения; для тех значений $m$, $n$, для которых это функциональное уравнение содержит только три члена, оно позволяет представить отношение последовательных коэффициентов в виде непрерывной дроби. Интересно, что при этом самые коэффициенты нередко представляются всюду расходящимися рядами.

На стр. 19, 21 рассматривается разложение в непрерывную дробь функции $u=A-AA't+AA'A''t^2-\ldots$ Некоторые из полученных результатов вошли в статьи 197—198 сочинения «Алгебра или вычисление конечных».

Дальнейшая часть, посвященная разложению корней уравнения в непрерывную дробь, является конспектом статей 1 и 2 главы 6 книги Лагранжа «Traité de la résolution des équations numériques».

---

* См. «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд. АН СССР, 1948, документ № 266, стр. 241—242.

⋆ Сочинение Н. И. Лобачевского «Алгебра или вычисление конечных» напечатано в его Полном собрании сочинений, т. IV, М.—Л., 1948, на стр. 23—356. Рукопись «Алгебра» напечатана там же на стр. 368—426.

⊘ $m^{:p,q}=m(m+q)\ldots(m+(p-1)q)$.

2. Исследование характера корней уравнения. Изложение вопроса о вещественности корней уравнения (стр. 53) есть конспект статьи 3 главы 5 и примечания 3 той же книги Лагранжа. На стр. 135 доказано, что при вещественности всех корней уравнения $f(x)=0$ вещественны и корни уравнения $f'(x)=0$; в обобщенной форме этот вывод дан в статье 236 сочинения «Алгебра или вычисление конечных».

Как мне кажется, наибольший интерес представляет материал о вещественности корней, изложенный на стр. 137, 131, 49, а именно:

а) если вещественны все корни уравнения $f(x)=0$, то вещественны и все корни уравнения $\omega f+f'=0$ при любом $\omega$;

б) если уравнение $x^n+k'x^{n-1}+\ldots+k^{(n)}=0$ не имеет вещественных корней и $n$ — четное, то уравнение

$$\frac{x^n}{\omega}+\frac{k'x^{n-1}}{\omega+1}+\ldots+\frac{k^{(n)}}{\omega+n}=0$$

не имеет вещественных корней.

3. Симметрические функции и преобразование Чирнгаузена. Эти записи, видимо, более позднего происхождения и оригинального характера. На стр. 8 выведена общая формула для симметрической функции $\sum\limits_{a+b+\ldots=mt} x_1^a x_2^b x_3^c \ldots$ корней уравнения $x^m-1=0$ при $m$ простом. Функцию эту Лобачевский обозначает через $\underset{mt}{S}\,1^a2^b3^c\ldots$ На стр. 10 этот результат применен к нахождению коэффициентов уравнения, корни которого суть $m$-ые степени корней заданного уравнения. Идея этого приема, без деталей выкладок, указана в статье 248 сочинения «Алгебра или вычисление конечных». Далее, общее уравнение $n$-й степени подвергается преобразованиям Чирнгаузена 2-й и 3-й степени. Выкладки не доведены до конца, но явно предназначены для упрощения уравнения (уничтожения 2-го и 3-го коэффициентов). Повидимому, встретившись с необходимостью вычисления степенных сумм, Лобачевский переходит (стр. 14) к выводу соотношений между степенными суммами корней $S_m$ и коэффициентами уравнения

$$x^n-P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}-\ldots=0.$$

Соотношения эти получаются из формул

$$\frac{1-P_2x^2-2P_3x^3-\ldots-(n-1)P_nx^n}{1+P_1x+P_2x^2+\ldots+P_nx^n}=1-S_1x+S_2x^2-\ldots, \quad \text{(стр. 14)}$$

$$\frac{P_1-2P_2x+3P_3x^2-\ldots}{1-P_1x+P_2x^2-\ldots}=S_1+S_2x+S_3x^2+\ldots \quad \text{(стр. 15)}$$

Переходом к показательным функциям устанавливается выражение $S$ через $P$. Обратное не нужно для преобразования Чирнгаузена, но в статьях 246 и 247 сочинения «Алгебра или вычисление конечных» дано то и другое.

Далее проводится общее преобразование $y=ax+bx^2+\ldots$ Коэффициенты полученного уравнения суть формы от $a$, $b$, ... с коэффициентами, зависящими от $P$. Лобачевский делает попытку определить эту зависимость; в простейших случаях это удается, но затем выкладки разрастаются и обрываются.

Естественно предположить, что в качестве конечного результата своих исследований Лобачевский ожидал получить способ решения уравнений высших степеней. Что он был уверен в существовании такового, говорит статья 232 сочинения «Алгебра или вычисление конечных»: «Общее решение уравнений далее четвертой степени еще до сих пор не найдено» *. Н. Г. Чеботарев высказал мнение, что Лобачевскому была известна статья Абеля, где доказывается невозможность такого решения, но что Лобачевский отнесся к результату Абеля скептически ★. Однако это неверно. Статья Абеля появилась в 1-м томе журнала Крелля; библиотека же Казанского университета начала выписку журнала Крелля с 4-го тома, который был получен в 1829 г.; 1—3-й тома журнала были куплены библиотекой уже во второй половине XIX в. Равным образом Лобачевскому остался неизвестным другой мемуар Абеля о доказательстве формулы бинома, помещенный в том же 1-м томе журнала Крелля.

---

* Полн. собр. соч., т. IV, стр. 304.

★ См. вводную статью Н. Г. Чеботарева, там же, стр. 17—18.

## ОБОБЩЕНИЕ Н. И. ЛОБАЧЕВСКИМ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Б. М. Гагаев

Н. И. Лобачевский в работе «Значение некоторых определенных интегралов» (статья 1)* дает различные способы для вычисления некоторых определенных интегралов. Среди других результатов он получает следующую формулу ⋆:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\varphi(\lambda z - xz)\,dx = [f(\lambda+0)+f(\lambda-0)]\int_{0}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x}\,dx,$$

где $0<\lambda<h$, а $\varphi(x)=\dfrac{d\psi(x)}{dx}$.

Эта формула является обобщением интеграла Фурье, который из нее получается при $h=\infty$, и $\varphi(x)=\cos x$, а именно в этом случае имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} f(x)\cos z\,(\lambda-x)\,dx = \frac{f(\lambda+0)+f(\lambda-0)}{2}.$$

Формула Фурье была впервые получена Фурье в 1822 г.⊘ Доказательство ее, данное Фурье, с современной точки зрения, не может быть названо доказательством, а является лишь наводящим рассуждением.

В 1836 году Лиувилль дал обобщение интеграла Фурье♀. Это обобщение было первым обобщением рассматриваемой формулы.

---

* Опубликована в «Ученых записках Казанского университета», 1852 г. кн. 4. Воспроизведена в V томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, М. — Л., 1951, стр. 275—302.

⋆ Там же, формулы 33 (стр. 296 V тома Полн. собр. соч.)

⊘ Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822.

♀ Liouville, Note sur une manière de généraliser de Fourier. Journ. de math. pures et appliquées, т. 10, 1836, стр. 102—105.

Доказательство Лиувилля обобщенной формулы аналогично доказательству самого Фурье, и также в настоящее время не может быть названо доказательством.

Лиувилль берет функцию $\varphi(x)$ и полагает

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Затем он накладывает условия, что $\varphi_1(x)$ не превосходит некоторого максимума, а величина $A$, равная

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx,$$

не обращается ни в нуль, ни в бесконечность. Затем он полагает

$$\frac{1}{A}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(zy - zx)\,f(y)\,dy = u,$$

обращает порядок интегрирования, но интегрирует по $z$ от 0 до некоторого $z$. Тогда

$$\int_0^z \varphi(zy - zx)\,dz = \frac{\varphi_1(zy - zx)}{y - x}$$

и

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(zy - zx)}{y - x}\,f(y)\,dy.$$

Пусть $y = x + \frac{\theta}{z}$; тогда

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\theta)}{\theta}\,f\left(x + \frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

Затем он полагает $z$ равным бесконечности и пишет

$$u = \frac{f(x)}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\theta)}{\theta}\,d\theta = f(x). \tag{1}$$

В оправдание этой формулы он пишет, что для $z$, равного бесконечности, $f\left(x + \frac{\theta}{z}\right) = f(x)$ для любых $\theta$, кроме бесконечно больших, но для последних множитель $\frac{\varphi_1(\theta)}{\theta}$ обращается в нуль.

Очевидно, Лиувилль предполагает $f(x)$ непрерывной. Но одной непрерывности недостаточно. Необходимо наложить на $f(x)$ условие абсолютной интегрируемости на $[-\infty, \infty]$ и какое-либо дополнительное условие, вроде условия Липшица, или условий Дирихле для функций, разлагаемых в ряд Фурье. Лиувилль доказывает также и более общую формулу. Пусть $F(x, z, \theta)$ — функция $x$, $z$ и $\theta$, обращающаяся тождественно в нуль при $z=0$, $\theta=0$, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, \infty, \theta)}{\theta}\, d\theta$$

не обращается ни в нуль, ни в бесконечность и равен для любого $x$ конечной функции $\omega(x)$.

Тогда если

$$\frac{z}{\theta} \frac{dF(x, z, \theta)}{dz} + \frac{dF(x, z, \theta)}{d\theta} = \varphi(x, z, \theta),$$

причем $\varphi(x, z, \theta)$ никогда не обращается в бесконечность, то

$$f(x) = \frac{1}{\omega(x)} \int_{0}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, z, zy - zx)\, f(y)\, dy.$$

Доказательство этой формулы у Лиувилля аналогично его доказательству формулы (1) и вызывает те же замечания.

Формула, доказанная Н. И. Лобачевским, несколько отличается от формулы Лиувилля и предполагает, что функция $f(x)$ в точке $x$ непрерывна или имеет разрыв первого рода.

Для доказательства Н. И. Лобачевский рассматривает *

$$V = \int_{-b}^{b} dz \int_{0}^{h} f(x)\, \varphi(\lambda z - xz)\, dx,$$

где

$$h > \lambda > 0 \quad \text{и} \quad b > 0.$$

Интегрируя по $z$, он получает

$$V = \int_{0}^{h} f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x}\, dx,$$

где

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x).$$

Затем он полагает

$$V = P + Q,$$

* Полн. собр. соч., т. V, стр. 295.

где

$$P = \int_0^\lambda f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x}\, dx;$$

$$Q = \int_\lambda^h f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x}\, dx.$$

Подставив в интеграле $P$ $\lambda - x$ вместо $x$, а в интеграле $Q$ $\lambda + x$ вместо $x$, Н. И. Лобачевский получает:

$$P = \int_0^\lambda f(\lambda - x) \frac{\psi(bx) - \psi(-bx)}{x}\, dx,$$

$$Q = \int_0^{h-\lambda} f(\lambda + x) \frac{\psi(bx) - \psi(-bx)}{x}\, dx.$$

Наконец, подставив в оба интеграла $\frac{x}{b}$ вместо $x$ и переходя к пределу при $b = \infty$, он получает

$$P = f(\lambda - 0) \int_0^\infty \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}\, dx, \tag{2}$$

$$Q = f(\lambda + 0) \int_0^\infty \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}\, dx. \tag{3}$$

Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^h f(x)\, \varphi(\lambda z - xz)\, dx = [f(\lambda + 0) + f(\lambda - 0)] \int_0^\infty \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}\, dx. \tag{4}$$

Относительно доказательства следует заметить, что для обоснования формул (2) и (3) необходимо на функцию $f(x)$ наложить условия абсолютной интегрируемости в $[-\infty, \infty]$ и какое-либо дополнительное условие относительно поведения функции в окрестности точки $x = \lambda$.

Формула Лобачевского отличается от формулы Лиувилля тем, что внутренний интеграл берется от 0 до $h$, а у Лиувилля от $-\infty$ до $\infty$, а внешний интеграл Лобачевский берет от $-\infty$ до $\infty$, а Лиувилль от 0 до $\infty$.

Для формулы Лобачевского излишне требование Лиувилля, что $A$ не равно ни нулю, ни бесконечности.

Затем Н. И. Лобачевский идет дальше, а именно, аналогичным способом он доказывает, что для $\lambda$ и $h$ положительных справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,\varphi(\lambda z + xz)\,dx = 0\,^{*}, \tag{5}$$

а для $\lambda = 0$ и для $f(x)$ непрерывной в точке $x = 0$, справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,\varphi(xz)\,dx = f(0)\int_{0}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x}\,dx\,^{\star}.$$

Формулы (4) и (5) дают для функции $f(x)$, непрерывной в точке $x = \lambda$,

$$2f(\lambda)\int_{0}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,[\varphi(\lambda z + xz) + \varphi(\lambda z - xz)]\,dx, \tag{6}$$

$$2f(\lambda)\int_{0}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,[\varphi(\lambda z - xz) - \varphi(\lambda z + xz)]\,dx\,^{\oslash}. \tag{7}$$

Эти формулы при $\varphi(x) = \cos x$ переходят в известные формулы:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\cos\lambda z \cos xz\,dx,$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\sin\lambda z \sin xz\,dx\,^{♀}.$$

При произвольном $h > 0$ и $0 < \lambda < h$ получаются более общие формулы.

Неизвестно, была ли работа Лиувилля известна Н. И. Лобачевскому. В начале своей работы он пишет: «Здесь соединил я значения некоторых определенных интегралов с указанием различных способов выводить эти значения» ⫱. Он в работе приводит значения известных уже интегралов, но полученные им иным способом.

---

* Полн. собр. соч., т. V, стр. 298, формула (35).

★ Там же, формула (36).

⊘ Там же, формулы (37), (38).

♀ Там же, формулы (39), (40).

⫱ Там же, стр. 275.

Работа, в отличие от других работ Н. И. Лобачевского, не содержит никаких литературных ссылок, кроме указания на книгу Лежандра «Exercice du calcul intégral, Tome I». Н. И. Лобачевский пишет, что Лежандр нашел значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\pi$$

иным способом, чем он.

Формула Фурье после Лиувилля и Лобачевского обобщалась различными математиками. Она была обобщена также Дю-Буа-Реймоном *. Свое обобщение он основывает на следующей доказанной им теореме *.

Если интеграл

$$\int_0^\infty dz \int_0^a \varphi(x,\ z)\, dx$$

для каждого $a\,(0 < a \leqslant \infty)$ имеет конечное, не зависящее от $a$ значение и интеграл

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

абсолютно сходится, то

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x)\, \varphi(x,\ z)\, dx = f(0) \int_0^\infty dz \int_0^\infty \varphi(x,\ z)\, dx.$$

Доказательство Дю-Буа-Реймон основывает на второй теореме о среднем значении.

При доказательстве своей теоремы Дю-Буа-Реймон неявно предполагает, что функция $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет ограниченную вариацию, но не высказывает явно этого предположения. Это предположение или какое-либо иное о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ необходимо для справедливости теоремы.

Дю-Буа-Реймон показывает, что когда функция $\varphi(x,\ z)$ зависит лишь от произведения $xz$, то интеграл

$$\int_0^\infty dz \int_0^a \varphi(x,\ z)\, dx$$

для каждого $a$ имеет значение, не зависящее от $a$.

---

* Math. Annalen, 4, 1871.

* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 69, 1868.

Его теорема для этого случая является частным случаем формулы (4) Н. И. Лобачевского. Она получается из этой формулы при $\lambda = 0$ и функции $f(x)$, равной тождественно единице.

Обобщение Н. И. Лобачевским формулы Фурье было рассмотрено Г. Л. Лунцем*. Он, между прочим, пишет*, что трансформация вида

$$g(u) = \int_0^\infty h(uy) f(y)\, dy, \tag{8}$$

$$f(x) = \int_0^\infty k(xu) g(u)\, du, \tag{9}$$

как показывают формулы (6) и (7) Лобачевского, получаются, если пара ядер $h(x)$ и $k(x)$ может быть представлена следующим образом:

$$\varphi(u - v) + \varphi(u + v) = A\, k(u)\, h(v), \tag{10}$$

или

$$\varphi(u - v) - \varphi(u + v) = B\, k(u)\, h(v), \tag{11}$$

где $\varphi(u)$ — некоторая функция. Затем он замечает: «Нам неизвестно, чтобы даже в настоящее время имелись результаты такого вида» ⊘.

Относительно этого следует сказать, что если предположить, что $\varphi(u)$ дважды дифференцируема, то из формул (8) и (9) следует, что функции $k(u)$ и $h(v)$ удовлетворяют уравнениям

$$k''(u) + \lambda k(u) = 0, \quad h''(v) + \lambda h(v) = 0,$$

т. е. формулы (10) и (11) не дают трансформаций, существенно отличных от трансформаций Фурье.

В настоящее время полностью решена задача отыскания общего вида функций $k(u)$ и $h(v)$, допускающих трансформации (8) и (9). А именно ♀, если $K(u)$ и $H(v)$ — трансформации Меллина ядер $k(u)$ и $h(v)$, т. е. если

$$K(u) = \int_0^\infty k(x)\, x^{u-1}\, dx, \quad H(v) = \int_0^\infty h(x)\, x^{v-1}\, dx,$$

---

* Г. Л. Лунц, О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу. «Историко-математические исследования», вып. II, М.—Л., 1949, стр. 9—71.

* Там же, стр. 64.

⊘ Там же.

♀ Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М. — Л., 1948, стр. 279.

то между $K(u)$ и $H(v)$ должно существовать соотношение

$$K(u)\,H(1-u)=1,$$

и обратно, зная трансформацию Меллина $H(v)$ ядра $h(v)$, можно восстановить $h(v)$ по формуле

$$h(v)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} H(s)\,v^{-s}\,ds,$$

где $C$ — произвольное действительное число.

# ПОЕЗДКА Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО В ПЕНЗУ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ 1842 г.

А. Д. Дубяго

Только в настоящее время вырисовывается в полном объеме вся широта и всё многообразие интересов Н. И. Лобачевского. Помимо собственной области его призвания, он был физиком, астрономом, администратором и общественным деятелем крупнейшего масштаба. Специально Лобачевскому, как астроному, посвящена недавно появившаяся статья видного исследователя истории науки проф. Н. И. Идельсона *. В этой прекрасной статье отражена постоянная связь Лобачевского с астрономией и подробно разъяснены его попытки проверки идей неевклидовой геометрии в масштабах астрономических измерений. Но из статьи Н. И. Идельсона, в сущности, видно, ка́к мало дошло до нас от результатов астрономических занятий Лобачевского.

Еще на студенческой скамье Лобачевский интересовался астрономией и, едва окончив университет, он наблюдал вместе со студентом И. М. Симоновым знаменитую комету 1811 I. Это — та самая комета, о которой Пушкин сказал: «Вина кометы брызнул ток», и которая описана Л. Толстым в конце второго тома «Войны и мира». Осенью 1811 года комета развернула, хотя и не очень длинный, но весьма яркий хвост, и обращала на себя всеобщее внимание.

Наблюдения Лобачевского и Симонова, сделанные под руководством проф. И. А. Литтрова, были опубликованы в 21 номере

---

* Н. И. Идельсон. Лобачевский — астроном. «Историко-математические исследования», вып. II, М.—Л., 1949, стр. 137—167.

«Казанских известий» за 1811 г.*, и они являются единственно сохранившимися для нас астрономическими наблюдениями Лобачевского. Правда, эти наблюдения были сделаны с самыми скромными инструментами (так как хорошими инструментами университет тогда не располагал).

В следующем году Лобачевский пишет сочинение «Теория эллиптического движения небесных тел», заслужившее лестный отзыв со стороны профессора математики Бартельса★. Прошло не так много времени, и Лобачевскому пришлось еще теснее соприкоснуться с астрономией. И. М. Симонов уехал в 1819 г. в далекую Антарктику вместе с Беллинсгаузеном и Лазаревым, в ту самую экспедицию, которая покрыла своих участников славой открытия южного полярного материка. И, пока не вернулся Симонов, в 1821 г., Лобачевский заведует астрономической обсерваторией (весьма небольшой), читает курсы по астрономии и ведет астрономические наблюдения. Он сам сообщил Совету университета в 1819 г., что он иногда посвящает наблюдениям дни и ночи⊘.

Но и после возвращения Симонова к заведыванию обсерваторией, Лобачевский иногда занимался наблюдениями. Об этом он пишет в отчете о затмении 1842 года, говоря, что он наблюдал комету Энке в 1832 г. и комету Галлея в 1835 г. Кроме немногих фраз отчета мы ничего об этих наблюдениях не знаем; не знаем также, какие еще наблюдения могли быть сделаны Лобачевским.

В связи с этим, я напомню следующие факты. В 1842 г., как раз тогда, когда Лобачевский вместе со своими спутниками наблюдал в Пензе солнечное затмение, И. М. Симонов уехал за границу. Он путешествовал несколько месяцев и, посетив ряд стран, в сентябре 1842 г. присутствовал на съезде естествоиспытателей и врачей в Германии, в г. Майнце. Когда съезд окончился, хозяин дома, где жил Симонов, подал ему газету, из которой Симонов узнал об ужасном пожаре, истребившем большую

* Эта заметка — публикация первой научной работы Н. И. Лобачевского — воспроизведена в V томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, стр. 490—493.

★ Текст сочинения Лобачевского до нас не дошел. Отзыв Бартельса воспроизведен Л. Б. Модзалевским в его сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, документ № 37, стр. 54—56.

⊘ Там же, документ № 95, стр. 90.

часть Казани 24 августа. «И прекрасная астрономическая обсерватория стала жертвой пламени», прочел Симонов, «слезы брызнули из глаз» у него, и он поспешил на поезд, чтобы скорее вернуться в Россию. Несмотря на принятые меры, от пожара пострадали некоторые инструменты и, повидимому, в огне погиб архив обсерватории; по крайней мере, в нем нет никаких наблюдений или других материалов ранее 1842 г. Этим, по всей вероятности, и объясняется отсутствие каких-либо сведений об астрономических наблюдениях Лобачевского.

Итак, отчет Н. И. Лобачевского о наблюдении затмения 26 июня (8 июля нового стиля) 1842 г. является единственным его сочинением, специально посвященным астрономической теме [*]. Но в своем отчете Лобачевский выходит далеко за рамки первоначальной темы и высказывает глубокие мысли по поводу научных теорий вообще и теорий физики в частности. И отчет Лобачевского о затмении Солнца вызвал в свое время живой интерес. До напечатания он был заслушан на ученом собрании профессоров Казанского университета; эти собрания могли посещаться и посторонними лицами [★]. Когда отчет Лобачевского, который он предназначил для опубликования в «Ученых записках Казанского университета», в копии дошел по официальным инстанциям до Петербурга и попал в руки министра народного просвещения, тот немедленно направил отчет для напечатания в редакцию «Журнала министерства народного просвещения». Очевидно, без всякого ведома и намерения Лобачевского, его отчет о затмении 1842 г. появился в двух печатных редакциях — случай крайне редкий. Сличение обоих текстов показывает, что против первоначального текста, который, несомненно, опубликован в «Ученых записках» без изменений, в журнале

---

[*] Отчет Лобачевского под названием «Полное затмение Солнца в Пензе 26 июня 1842 года» был опубликован при жизни Лобачевского дважды — в «Ученых записках Казанского университета», 1842 г., кн. 3, стр. 51–83 и в «Журнале министерства народного просвещения», 1843, ч. XXXIX, отд. II, стр. 65—96 (см. об этом ниже). Воспроизведен в сборнике Л. Б. Модзалевского, документ № 496, стр. 463 — 478, и помещен в V томе Полного собрания сочинений Лобачевского, стр. 433 — 455, с комментариями А. Д. Дубяго.

[★] Отчет об этом собрании воспроизведен в сборнике Модзалевского (документ № 493, стр. 458 — 460) и в V томе Полного собрания сочинений Лобачевского, стр. 497 — 498.

министерства были внесены стилистические поправки *; впрочем, при этом везде была сохранена мысль Лобачевского и никаких сокращений или переделок по существу не было допущено (если не считать единичных, повидимому, случайных отклонений).

Но прошло немного времени, и об этой интересной работе Лобачевского забыли. Не являясь геометрическим исследованием, статья Лобачевского не вошла в его собрание сочинений, опубликованное в Казани в 1880-х годах. Только в замечательной речи, произнесенной в 1893 году на праздновании столетнего юбилея дня рождения великого геометра *, в речи, вскоре переведенной на ряд иностранных языков, покойный профессор А. В. Васильев привел, без комментариев по существу, мысли Лобачевского о природе света и о солнечной короне, изложенные им в отчете о затмении 1842 г. Тогда, в конце XIX века, время для комментирования этих идей еще не наступило, еще физика не сделала открытий, которые совершили переворот в наших воззрениях на самые основы этой науки и которые глубоко изменили понятия о природе света, оправдав гениальные предвидения Лобачевского.

В 1943 г. покойный академик С. И. Вавилов в книге, посвященной Исааку Ньютону, снова цитировал слова Лобачевского о слиянии эмиссионной и волновой теорий света, но уже возвращаясь к ним с позиций физики наших дней.⊘.

Переходя к самому отчету Лобачевского о затмении, я не могу исчерпать весь материал, который он нам дает, — для этого слишком много потребовалось бы времени. Позвольте мне, с одной стороны, указать на некоторые мало известные, или даже только теперь выясненные моменты, с другой стороны, — коснуться тех важнейших принципиальных взглядов Лобачевского, которые он изложил в отчете. После того, как отчет о затмении опубликован в хорошо известной книге Л. Б. Модзалевского, ♀ он перестал быть трудно доступным для широкого круга читателей.

---

* См. об этом в V томе Полного собрания сочинений Лобачевского, стр. 496—497.

* Помещена в сборнике «Празднование имп. Казанским университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского», Казань, 1894 (см. стр. 125—126 этого сборника).

⊘ С. И. Вавилов, Исаак Ньютон, 2-е изд., АН СССР, 1945, стр. 79.

♀ И в Полном собрании сочинений Лобачевского. См. сноску * на стр. 89.

Но, прежде всего, я хотел бы ненадолго остановиться на самом затмении Солнца 1842 г., ибо это необходимо для оценки отчета Лобачевского в правильной исторической перспективе.

Это затмение явилось первым, которое многие астрономы наблюдали, заранее подготовившись и снарядив особые экспедиции в полосу полной фазы. До того солнечные затмения наблюдались случайными, неподготовленными наблюдателями, которые за краткое время полной фазы, пораженные картиной, представившейся их глазам, не успевали разобраться в том, что они видели. Тому слишком много поразительных свидетельств: одним солнечная корона казалась вращающейся наподобие фейерверочного колеса, другие видели дыру в Луне, сквозь которую просвечивало Солнце, и т. п. Последнее полное затмение в Европе, о наблюдениях которого имеются сведения, произошло более чем за 100 лет до рассматриваемой нами эпохи — в 1733 г.; с тех пор наблюдалось еще полное затмение в 1778 г. — в открытом море и в 1806 г. — в Америке. Но затмение 26 июня (8 июля) 1842 г. должно было наблюдаться в особо благоприятных условиях; пятно лунной тени должно было пробежать по Испании, южной Франции, Италии, Австрии, Украине, пересечь остальную часть Европейской России и продолжить свой путь по Сибири. Полоса полного затмения проходила через множество городов, и продолжительность полной фазы была значительной.

Незадолго до затмения Араго поместил в Comptes rendus Парижской академии статью, посвященную наблюдениям предстоявшего замечательного небесного явления.* Указывая на невыясненный вопрос о природе солнечной короны и на наблюдения, которые следует сделать над короной, Араго перечислил ряд описаний солнечной короны при прежних затмениях. Эта статья не могла попасть в Казань до затмения, но по всей вероятности Лобачевский ознакомился с ней при составлении своего отчета и из нее заимствовал приведенные им исторические факты наблюдений затмений.

В России наблюдения затмения были организованы директором Главной астрономической обсерватории в Пулкове академиком

* Arago, Sur l'éclipse totale du Soleil... Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, т. 14, 1842, стр. 843—861.

В. Я. Струве, который уже тогда прославился своими открытиями в области двойных звезд. Были организованы четыре экспедиции: в Дубно, Чернигов, Липецк и Пензу, но проводились наблюдения затмения и в других местах, в том числе в Сибири. Заметим сразу же, что впоследствии, сообщая о наблюдениях затмения в России, В. Я. Струве пишет, что в Дубно и в Пензе наблюдениям помешали облака. Наилучшая погода была в Липецке, где наблюдали затмение О. В. Струве и Шидловский. Для них само затмение и, в особенности, солнечная корона представили прекрасное зрелище. В 1842 г. В. Я. Струве еще не располагал отчетами казанских наблюдений; позже ему был направлен отчет Ляпунова, но Ляпунов сам к тому времени (май 1843 г.) уже прибыл в Пулково с инструментами Казанской обсерватории, пострадавшими от пожара, для их ремонта. Несомненно, с согласия Ляпунова, его отчет, в конце концов, не появился в печати и до нас не дошел.

Наблюдать затмение в Пензе В. Я. Струве предлагал Симонову, который, уезжая за границу, передал это поручение астроному-наблюдателю М. В. Ляпунову. К сожалению, все попытки разыскать это письмо В. Я. Струве не увенчались успехом; повидимому, оно вместе с инструкцией для наблюдений затмения, составленной И. М. Симоновым, погибло при пожаре 24 августа 1842 г. К Ляпунову, по собственной инициативе («чтоб удовлетворить собственное любопытство» *), присоединился Лобачевский, кроме него поехал профессор физики Э. А. Кнорр.

Не описывая обстоятельств поездки в Пензу и выбора места для наблюдения, укажем, что главным астрономическим инструментом была ахроматическая труба с объективом, имевшим отверстие 97 *мм* (или почти 4 дюйма) работы Фраунгофера. Слабым местом в оборудовании экспедиции было наличие только одного карманного хронометра; к тому же этот хронометр остановился как по дороге в Пензу, так и на обратном пути. Поэтому определение долготы пункта наблюдения в Пензе получилось слишком ненадежно и, по всей вероятности, это обстоятельство помешало в дальнейшем использованию наблюдений моментов начала и

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. V, стр. 434.

конца полной фазы затмения, сделанных Ляпуновым, а может быть, и явилось препятствием к появлению отчета Ляпунова в печати.

В первой половине XIX века под астрономическими наблюдениями понимались преимущественно, или даже исключительно, наблюдения астрометрические. Такими наблюдениями во время затмения Солнца являются отметки моментов контакта дисков Солнца и Луны, т. е. наступление той или иной фазы затмения. В этом духе говорил, например, Араго, что «солнечное затмение не представляет интереса для астрономов, но так как астроному трудно не отметить моментов начала и конца затмения, то мы это и сделали». Всё остальное, в том числе и изучение короны, относилось к области физических наблюдений; астрофизики в современном смысле в 1842 г. еще не существовало.

Во время затмения в Пензе небо было покрыто легкой пеленой облаков, и бо́льшую часть намеченных физических наблюдений Лобачевский и Кнорр не смогли провести, хотя Кнорр сумел сделать полярископические наблюдения над короной; также измерялась температура воздуха во время затмения.

После затмения Н. И. Лобачевский посетил некоторые учебные заведения в Пензе и возвратился в Казань. Вскоре в «Прибавлениях к Пензенским губернским ведомостям» * появилась (без подписи) заметка о наблюдениях затмения казанскими учеными ⋆. В 1926 г., в связи со столетним юбилеем неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского, упомянутая заметка была извлечена из-под спуда и повторно опубликована Х. Чаликовым в Пензенской газете «Трудовая правда» ⊘. Еще раз приводит текст этой заметки С. А. Касьянюк в своей статье о поездке Лобачевского в Пензу ♀. Оба автора почти дословно одинаково аргументируют, что эта заметка о затмении может принадлежать Н. И. Лобачевскому.

> «Пасмурное время принудило отказаться от всех физических наблюдений, какие предположено было сделать над степенью уменьшения солнечного света и солнечной теплоты.

* «Прибавления к Пензенским губернским ведомостям», 10 июля 1842 г., № 28.

⋆ Текст этой заметки воспроизведен в Полн. собр. соч. Н. И. Лобачевского, т. V, стр. 485—486.

⊘ № 51 от 4 марта 1926 г.

♀ С. А. Касьянюк, Поездка Н. И. Лобачевского в Пензу для наблюдения полного солнечного затмения 1842 г., «Природа», 1950, № 10, стр. 69—71.

Утвердительно сказать можно только то, что темнота во время полного затмения была совершенно полуночная и, вероятно, при ясном небе открылись бы многие звезды и для простого глаза. Всего более поразителен был удивительно быстрый переход от этой темноты к свету, когда появился первый луч солнца. С этим появлением всё исчезло: дымчатый отлив, каким одеты были все окружающие предметы, особенный вид облаков, мрак, покрывающий восточную часть горизонта, и заря, освещающая противоположную часть неба, одним словом, всё, что явление полного затмения делало столько величественным и удивительным для всякого внимательного наблюдателя чудес природы» *.

Итак, кто написал этот отрывок? Это был ректор Казанского университета Н. И. Лобачевский, возглавивший экспедицию для наблюдений затмения. Это не мог быть корреспондент газеты, ибо в ту эпоху у губернских ведомостей вообще не было штатных корреспондентов в современном смысле. Это не мог быть Кнорр, статья которого «О темных лучах света», одновременно появившаяся с отчетом Лобачевского, слишком отличается от приведенного текста по стилю и, вообще, походит на дословный перевод с немецкого. Это не был и Ляпунов, который занят был наблюдениями в астрономическую трубу; он просто не мог одновременно замечать по хронометру момент конца полной фазы и рассматривать смену ландшафта при появлении первого луча Солнца.

Мне выпала на долю редкая участь дважды видеть полное затмение Солнца, и при этом я, наподобие Лобачевского, не был занят производством наблюдений. Я могу засвидетельствовать удивительную точность его изображения полного затмения при легкой пелене облаков на небе.

Наконец, столь свободное владение художественными средствами русского языка дается лишь очень немногим. Сравним описание Лобачевского в окончательном тексте отчета.

«Астрономические наблюдения делал Г. Ляпунов, которому помощником был студент Магзиг. Мы с Г. Кнорром оставили для себя другого рода занятие: наше внимание обращено было на самое явление, по истине великолепное, хотя многое

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. V, стр. 486.

скрыто было для наших глаз под завесой облаков. На месте дневного светила, когда последний его луч исчёз, явился темный круг, как бы само солнце, но теперь уже черное стояло на небе. В трепетном ожидании чего-то неизвестного, с торопливым желанием всё видеть, с опасением чего-нибудь не заметить, стояли мы, зрители, среди призраков во мраке, с обращенным взором к потухшему солнцу, как обвороженные, постигнутые страхом и беспокойством, вдохновенные чувством возвышенным и торжественным» *.

Отчет был написан Лобачевским, вероятно, вскоре по возвращении в Казань, но первый его текст погиб при пожаре 24 августа. Лобачевский вторично написал отчет значительно позже, уже ознакомившись с описаниями других наблюдений над затмением 1842 г. Он воспользовался также сведениями, устно сообщенными Симоновым по его возвращении из заграничного путешествия. Итак, отчет, если и был вторично начат, то, по крайней мере, не был завершен до 14 ноября 1842 г., когда Симонов вернулся в Казань; но к концу 1842 г. труд Лобачевского был уже окончен, ибо он говорит в тексте о «затмении нынешнего года».

В неопубликованном отчете по Казанскому университету за 1842 календарный год, написанном Лобачевским (в черновом экземпляре, писанном его рукой) *, имеется фраза: «Подробный отчет об этой поездке [в Пензу] и свод всех наблюдений представлены Лобачевским и Ляпуновым». Всем этим достаточно определяется время написания Н. И. Лобачевским отчета о затмении: ноябрь—декабрь 1842 г. Напечатан он был через полгода, почти одновременно в Казани и в Петербурге.

Что же является главным в сочинении Лобачевского? Наибольшее место он отводит разбору различных теорий, предназначенных для объяснения солнечной короны. В некоторых местах его критика чрезвычайно остроумна, и не столь уж важно, что сам он останавливается на предположении, что корона обязана свечению верхних слоев земной атмосферы, свечению, возбужденному действием солнечных лучей (Лобачевский на этом предположении не

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч. т. V, стр. 436—437.

* Отчет имп. Казанского университета за 1842 г., составленный профессором Лобачевским. Центр. Гос. Архив Татарской АССР, ф. 977, № 8705а, л. 40.

настаивает). Отметим, однако, что в 1842 г. астрономы совершенно не знали, чему приписать солнечную корону, и недоумение Араго насчет природы короны хорошо отражено как в отчете Лобачевского о затмении, так и в «Записках» И. М. Симонова о его путешествии за границу в 1842 году*. Принадлежит ли корона Солнцу, или Луне, или она есть диффракционное явление — всё это осталось невыясненным до полного затмения Солнца в 1851 г., а более или менее надежные сведения были получены только после наблюдений затмений 1860 и даже 1868 гг., когда был применен спектральный анализ.

Но полное затмение Солнце 1842 г. побудило Лобачевского коснуться также тех основ, на которых тогда строилась важнейшая теория физики — теория света. И здесь его мысли очень интересны. Лобачевский ставит высокие требования к волновой теории света и считает, что она им не удовлетворяет. Это отношение Лобачевского к волновой теории интересно для нас тем, что оно было высказано в такую эпоху, когда волновая теория света праздновала свои наибольшие успехи, а эмиссионная теория (теория истечения) быле оставлена всеми виднейшими физиками. Лобачевский не смутился перед торжеством волновой теории. Нет сомнения, что опыты, подтверждающие волновую теорию, блестящи, но сама теория далеко не была разработана до той степени, чтобы удовлетворять строгим и принципиальным требованиям Лобачевского, и многое в ней было совершенно произвольно. Действительно, волновая теория света еще не вскрывала самих причин световых явлений — утверждалось, что они представляют собою колебания некоторой среды, эфира. Попытки выяснить механизм этих колебаний и сохранить теорию эфира привели к противоречию с опытом.

В связи с этим Лобачевский говорит*:

> «Теория волнений представляет верно некоторые законы в явлениях света, но не дает еще понятия, в чем существенность заключается».

---

* И. М. Симонов. Записки и воспоминания о путешествиях по Англии, Франции, Бельгии и Германии. Казань, 1844, стр. 145.

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. V, стр. 449.

Вслед за этим Лобачевский указывает:

> «То несомненно, что пространство повсюду наполнено центрами, откуда вытекает или сила притягательная или сила отталкивающая; что центры таким образом между двух противоположных сил держатся в равновесии; что нарушение равновесия бывает или причиной изменения совершенного, или только колебаний внутри тел».

Эта мысль Лобачевского прямо перекликается с известными словами Энгельса:

> «Обыкновенно принимается, что *тяжесть есть наиболее всеобщее определение материальности,* т. е. что притяжение, а не отталкивание есть необходимое свойство материи. Но притяжение и отталкивание столь же неотделимы друг от друга, как положительное и отрицательное, и поэтому уже на основании самой диалектики можно предсказать, что истинная теория материи должна отвести отталкиванию такое же важное место, как и притяжению, и что теория материи, основывающаяся только на притяжении, ложна, недостаточна, половинчата» *.

Лобачевский делает предположение о том, что в основе теории света должны быть и частицы, и волнения:

> «Можно верным остаться теории Ньютона, прибавя только, что поток эфира, встречая препятствие на пути, приходит в волнение» ⋆.

Эта мысль Лобачевского замечательна для того времени: Лобачевский рассматривает свет как поток частичек, приходящих в волнение при встрече с препятствиями. Лобачевский с гениальной прозорливостью предугадывает черты созданной через много десятилетий после его смерти современной теории света с ее фотонами и волнами, связанными с ними.

В заключение Лобачевский касается физической географии виденной им местности и приводит следующее мнение Кнорра ⊘:

> «Г. Кнорр полагает, что вода на земной поверхности сначала долго пребывала запертая в случайных углублениях;

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы. Госполитиздат, 1948, стр. 195.

⋆ Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. V, стр. 449.

⊘ Там же, стр. 455.

потом, проложив себе дорогу, произвела реки, где течением углубилось дно и придало возвышенность берегам, которые может быть совсем и не должно почитать за ветви горных хребтов. Такое мнение совершенно подтверждается при первом взгляде на холмистую поверхность Пензенской губернии. Падение реки Свияги произвело в высоком Волжском береге разрыв, где в промежутках еще видны остатки. На одном из таких возвышений уцеленного берега построен город Свияжск».

В 1878 г. В. В. Докучаев опубликовал замечательную работу «Способы образования речных долин Европейской России»; мы отметим, что задолго до этого в отчете Лобачевского была высказана идея одного из обнаруженных Докучаевым способов образования речных долин, а именно, путем вскрытия замкнутых водоемов. В эпоху Лобачевского почти все видные геологи — Эрман, Мурчисон и другие — придерживались взгляда, что правобережье Волги представляет собой крайние отроги Урала. Лобачевский возражает против этой, как мы теперь знаем, неправильной точки зрения, и очень любопытно, что он уже тогда отмечает останцовый характер местоположения Свияжска.

Ни один из отчетов других наблюдателей затмения Солнца в 1842 г. — а их много — далеко не может сравниваться с отчетом Лобачевского по богатству содержания, которое я не был в состоянии вскрыть здесь в полной мере. Мы имеем перед собой сочинение, написанное Лобачевским в зрелом возрасте (ему тогда исполнилось 50 лет), произведение, в котором он явно хотел выразить свои взгляды на важнейшие вопросы физики и в котором он предъявил высокие требования к подлинно научной теории. Можно думать, что он имел в виду позже вернуться к затронутым им проблемам и разработать их подробно. Этого не случилось. Отчет о полном солнечном затмении 1842 г. остался единственным в своем роде памятником творчества Н. И. Лобачевского, неоценимым документом, обрисовывающим нам с новой стороны его научные воззрения и его личность.

# ТЕОРИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ В РАННИХ РАБОТАХ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Б. Л. Лаптев

В истории создания неевклидовой геометрии особенный интерес представляют первые этапы формирования новой геометрической системы Н. И. Лобачевского.

Как известно, Н. И. Лобачевский впервые изложил основные идеи своей геометрии в докладе «Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles» («Сжатое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»), представленном 7 (19) февраля 1826 г. в Отделение физико-математических наук Казанского университета и рассмотренном там 11 (23) февраля того же года. Лобачевский хотел опубликовать этот доклад в составляемых «Ученых записках Физико-математического отделения», и доклад этот был передан профессорам И. М. Симонову, А. Я. Купферу и адъюнкту Н. Д. Брашману, чтобы они «мнение свое сообщили Отделению» *; однако, как установлено в 1950 г. И. Н. Бронштейном на основании изучения архивных документов, отзыв ими не был представлен *. Хотя доклад до нас не дошел, но в своей первой публикации, посвященной новой геометрии, т. е. в работе «О началах геометрии» (1829—1830) Лобачевский

* Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I, 1946, стр. 411—412 (в дальнейшем цитируем это издание как Полн. собр. соч.).

* См. «Успехи математических наук», т. VI, вып. 1, 1951, стр. 165—167. Предположение об этом было высказано ранее В. Ф. Каганом в его книге «Лобачевский», изд. АН СССР, 1944, стр. 137.

указывает*, что материал, предшествующий уравнению (17), уже входил в его доклад 1826 г. Следовательно, к началу 1826 г. геометрическая система Лобачевского в существенных чертах была закончена, так как была разработана теория параллелей, введено понятие об угле параллельности, изучены свойства предельной поверхности, найдена основная формула (12), выражающая зависимость угла параллельности от отрезка, и установлены тригонометрические формулы для прямоугольных треугольников, как прямолинейных — формула (14), так и сферических — формула (15)★.

Ближайшей предшествующей по времени геометрической работой Лобачевского, если не учитывать его «Обозрений преподавания чистой математики», о которых речь пойдет в конце настоящего сообщения, является его рукопись учебника геометрии, представленная к печати в 1823 г., но оставшаяся в то время неопубликованной вследствие отрицательного отзыва академика Н. Фусса. Впоследствии эта рукопись была обнаружена проф. Н. П. Загоскиным в архиве Казанского университета и опубликована проф. А. В. Васильевым в 1909 г.⊘.

В этом сжатом курсе элементарной геометрии, сложившемся на основе тех лекций, которые Лобачевский читал студентам младших курсов в университете, и носившем обзорный характер, отсутствуют прямые указания на возможность существования иной, отличной от евклидовой, геометрии. Однако уже расположение материала указывает на особое внимание, которое Лобачевский уделял теории параллелей. Те вопросы, которые опираются на постулат параллельности, по возможности отодвинуты в конец, и первые пять глав (из тринадцати) содержат материал, не зависящий от этого постулата, т. е. материал абсолютной геометрии. Постулат параллельности Евклида появляется в начале главы VI «О измерении прямоугольников» в следующей формулировке, употреблявшейся и Лежандром:

---

* Полн. собр. соч., т. I, сноска Лобачевского на стр. 207.

★ Номера формул даны по сочинению «О началах геометрии» (Полн. собр. соч., т. I, стр. 205—206).

⊘ Н. И. Лобачевский, Геометрия, Казань, 1909, и Полн. собр. соч., т. II. стр. 43—107.

«Линии $AB$ и $CD$ должны сходиться по достаточном продолжении, если одна из них $AB$ перпендикулярна к $BC$, а другая $CD$ наклонена к $BC$ под острым углом $C$, обращенным к перпендикулу $AB$»* (рис. 1).

Далее следует очень важное для выяснения взглядов Лобачевского замечание:

«Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами» ★.

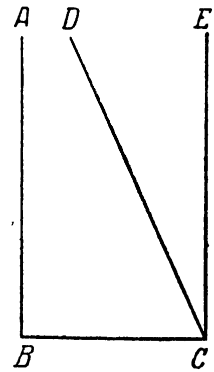

Рис. 1.

Как лучшее из них, приводится известное псевдодоказательство, принадлежащее Л. Бертрану (1778) ⊘, ошибку которого разъяснил позже сам Лобачевский в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» (1835) ♀.

Естественное предположение, что Лобачевский встал на путь создания новой геометрической системы только после ряда неудачных попыток доказать евклидов постулат параллельных, находит окончательное подтверждение в сохранившихся записках лекций Лобачевского от 1816—1817 учебного года, о которых впервые опубликовал сообщение А. В. Васильев в предисловии к «Геометрии» Лобачевского в издании 1909 г. В этих записках приведена одна такая попытка, причем ошибочность своего доказательства Лобачевский к 1822—1823 гг. уже осознал, так как, не включив его в «Геометрию», он тем самым показал, что его прежние рассуждения тоже «не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами». Вместе с тем эти записи лекций свидетельствуют об упорных исканиях молодого Лобачевского, о напряженной работе его мысли. Они показывают, что даже в те ранние годы он уже стоял в первых рядах современных ему геометров, причем во многом опередил пользовавшегося

* Полн. собр. соч., т. II, стр. 70.

★ Там же.

⊘ Это доказательство воспроизведено в вводной статье В. Ф. Кагана к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского, помещенной в Полн. собр. соч., т. I, стр. 54—55.

♀ Полн. собр. соч., т. II, стр. 152 и примечание [5] на стр. 458—460.

заслуженным авторитетом известного французского математика А. М. Лежандра.

Действительно, Лежандр в своих «Началах геометрии» («Eléments de géométrie») с 1800 г. (т. е. с третьего издания) возобновляет попытки доказать постулат параллельности, от которых он отказался во втором издании, и, наконец, в 1833 г. в мемуаре «Размышление о различных доказательствах теории параллелей...» * собирает те из своих результатов, которые кажутся ему наиболее удовлетворительными. Однако ошибки Лежандра в этих доказательствах гораздо более очевидны и более легко обнаруживаемы, чем допущения, сделанные Лобачевским в его доказательстве постулата параллельности в лекциях 1816—1817 гг., анализ которого мы дадим в настоящем докладе. Притом оказывается, что Лобачевский вполне строго доказал уже в этих лекциях замечательную теорему: «Сумма углов во всяком треугольнике равна $\pi$, если она равна $\pi$ в каком-нибудь одном»,—теорему, к которой Лежандр пришел только в 1833 г. *, т. е. через 16 лет после рассматриваемых лекций и через 4 года после опубликования сочинения «О началах геометрии», где Лобачевский приводит формулировку этого предложения.

Наконец, доказательства ряда теорем, данные Лобачевским в этих лекциях, показывают, что он был близок уже в те годы к созданию новой геометрической системы.

Упомянутые выше студенческие записки лекций Лобачевского, вместе с другими записками и конспектами, написанными разными почерками и на разной бумаге, переплетены в один сборник, получивший условное название «Тетрадей Темникова», который хранится в Казани в библиотеке им. Лобачевского ⊘.

Интересующие нас записки имеют заголовок «Лекции Г. П. Лобачевского ♀ от 1816—1817. Михайлы Темникова». Они содержат

---

* A. M. Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, Paris, Mém. Acad. Sci., Inst. 12, 1833, стр. 367—410. Исследования Лежандра изложены в вводной статье В. Ф. Кагана к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского (см. Полн. собр. соч., т. I, стр. 56—67).

* A. M. Legendre (см. предыдущую сноску), стр. 375—378.

⊘ Геометрический кабинет Казанского университета имени В. И. Ульянова-Ленина, № 1067.

♀ То-есть «господина профессора Лобачевского».

два раздела: «О логарифмах» (§§ 1—9) и «Геометрия» (§§ 1—21). Оба раздела написаны одинаковым почерком на серовато-голубой бумаге формата тетрадки, причем «Геометрия» — на бумаге более темного оттенка. Им предшествуют «Лекции Г. П. Лобачевского от 1815 по 1816. Михайлы Темникова», написанные тем же почерком и содержащие основы арифметики и алгебры (глава 1, §§ 1—3 — «О количих. Вообще». Глава 2, §§ 4—12 — «О четырех действиях арифметических». Глава 3, §§ 13—18 — «О степенях и корнях») *. В конце сборника переплетены две тетради, содержащие тоже геометрический материал. В 1942 г. проф. П. А. Широков обнаружил, что первая из этих тетрадей является почти дословной копией «Введения к Лонгиметрии» (§§ 1—75) из известного «Курса математики» харьковского профессора Т. Ф. Осиповского (1814) ⋆, и таким образом исправил ошибку А. В. Васильева, который во вступлении к изданию «Геометрия» 1909 г. считал эту тетрадь (называя ее «тетрадью № 2») тоже тетрадью записок лекций Лобачевского ⊘. Последняя тетрадь («тетрадь № 3», по А. В. Васильеву) написана другим почерком и содержит материал по элементарной геометрии, разбитый на 40 параграфов. Она не имеет ни особого заголовка, ни указания на время составления. В теории параллелей в ней дано доказательство постулата Евклида по Л. Бертрану. Весьма сомнительно, что эта тетрадь является записью лекций Лобачевского, как это безоговорочно утверждал А. В. Васильев.

Прежде всего следует окончательно выяснить вопрос, являются ли упомянутые нами тетради М. Темникова от 1815—1816 гг. и от 1816—1817 гг. действительно записками лекций Лобачевского? Какие факты подтверждают это? Перечислим эти факты.

Во-первых, из списков студентов Казанского университета ♀ известно, что студент Михаил Григорьевич Темников обучался

* Сюда включен также бином Ньютона и биномиальный ряд.

⋆ Т. Осиповский, Курс математики, часть II, изд. 2, при Академии наук, СПб., 1814.

⊘ Н. И. Лобачевский, Геометрия, Казань, 1909, стр. I—III, и Р. Бонола, Неевклидова геометрия, СПб. 1910, стр. 457—459.

♀ А. И. Михайловский, Преподаватели, учившиеся и служившие в Императорском Казанском Университете (1804—1904), часть I, выпуск 1 (1805—1854), Казань, 1901, стр. 61. В этом издании год поступления М. Г. Темникова содержит опечатку: должно быть 1816 вместо 1815.

с 10 июля 1816 г. по 4 июля 1819 г. и окончил университет, получив установленное в те годы звание действительного студента *.

Далее известно, что магистр Н. И. Лобачевский, после того как он был произведен, согласно распоряжению министра просвещения от 26 марта 1814 г., в адъюнкт-профессоры чистой математики (протокол заседания Совета Казанского университета от 18 апреля 1814 г. ★), получил от Физико-математического отделения университета 23 мая того же года указание занимать студентов практическими частями математики. Ему было поручено читать: «1. Плоскую тригонометрию, наиболее уча употреблению таблиц логарифмических для тех студентов, кои учатся практической геометрии; 2. Тем же, кои хотят усовершенствовать себя в чистой математике, преподавал бы теорию чисел (Theoria numerorum)» ⊘. Эти курсы числились за ним в 1814—1815 и в 1815—1816 учебных годах. В 1816—1817 учебном году он, после утверждения 7 июля 1816 г. в звании экстраординарного профессора, должен был читать еще плоскую и сферическую тригонометрии ♀.

Известно, что летом 1814 г. Лобачевский уезжал в г. Макарьев в отпуск для поправления здоровья, а 7 октября он отмечен в дневнике инспектора студентов Ф. К. Броннера как не читавший лекций ↧.

Дальнейшие сведения о чтении Лобачевским курсов в 1814—1815 учебном году можно получить из его ежемесячных рапортов, правда, сохранившихся лишь начиная с января 1815 г. **. У Лобачевского было только 4 слушателя (тогда как у Г. Б. Никольского

---

* Следует отметить, что в статьях А. В. Васильева М. Г. Темникову ошибочно приписаны инициалы М. М. Эта ошибка А. В. Васильева объясняется тем, что сборник тетрадей побывал впоследствии в руках мальчика Митрофана Михайловича Темникова (повидимому, сына М. Г. Темникова), который детским почерком и другими чернилами повторил некоторые заголовки, вписывая их рядом, а в конце лекций Лобачевского за 1815—1816 гг. приписал «Конец арифметики ученика Митрофана Михайлова Темникова».

★ «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд АН СССР, 1948 (в дальнейшем цитируется как Модзалевский), документ № 42, стр. 58.

⊘ Там же, документ № 46, стр. 61—62.

♀ Там же, документы №№ 49, 51, 66 на стр. 63, 64, 75.

↧ Там же, документы №№ 47, 48 на стр. 62—63.

** ЦГА ТАССР, фонд 977, № 478, св. № 14, листы 14, 59, 95, 149.

38 слушателей), и читал он им в одни часы тригонометрию, а в другие — алгебру и элементы теории чисел. В январе он пропустил 4 занятия «за болезнию», в марте тоже 4 и далее по болезни совсем не занимался со своими слушателями, а в июне ушел в отпуск *.

31 августа 1815 г. Совет университета поручил Лобачевскому по предложению Ф. К. Броннера замещать отсутствующего проф. Г. Б. Никольского, читавшего курс элементарной математики, а по возвращении Никольского предложил им разделить студентов-математиков ⋆.

Начиная с октября 1815 г. ⊘ у Лобачевского, как видно из его рапортов, было уже от 28 до 20 слушателей, и читал он им в этом учебном году начала арифметики и алгебру, кончая уравнениями высших степеней ♀.

Однако М. Темникова среди его слушателей не было. Михаил Темников появляется только в следующем учебном году, начиная с сентября 1816 г. ⤈. Следовательно, записки по лекциям Лобачевского за 1815 — 1816 учебный год он переписал впоследствии у кого-нибудь из других слушателей. Эти записки содержат материал, который был прочитан Лобачевским (согласно рапортам), кончая январем 1816 г. Этим, может быть, и объясняется заголовок записок: «Лекции Г. П. Лобачевского от 1815 по 1816».

В 1816 — 1817 учебном году Лобачевский фактически продолжал начатый им курс элементарной математики (хотя состав слушателей был новым), читая теорию логарифмов и геометрию. Действительно, об этом прежде всего свидетельствуют его рапорты **, а также и жалоба двух студентов Ф. С. Иконникова и А. П. Евреинова, поступивших в августе 1816 г. в университет ⋆⋆. С этой жалобой они обратились 31 октября того же года к инспектору

* ЦГА ТАССР, фонд 977, № 478, св. № 14, листы 45, 90, 114, 135, 189, 234.

⋆ Модзалевский, докум. № 52, стр. 64 — 65.

⊘ Рапорта за сентябрь 1815 г. не сохранилось.

♀ ЦГА ТАССР, фонд 977, № 478, св. № 14, листы 280, 325, 373 и за 1816 г. № 658, св. № 20, листы 16, 59, 105, 144, 184.

⤈ ЦГА ТАССР, фонд 977, № 658, св. № 20, листы 225, 265, 310, 352.

** Там же, листы 225, 265, 310, 352 и за 1817 г. № 812, св. № 26, листы 247—251.

⋆⋆ А. И. Михайловский (работа, цитированная на стр. 103), стр. 59—60.

Ф. К. Броннеру, сообщив, что они «не могут понимать чтений проф. Лобачевского, так как он объясняет не применение логарифмов, а их происхождение», а потому студенты просили разрешения перейти в слушатели к проф. Г. Б. Никольскому *. Далее, из рапорта Лобачевского за март 1817 г. известно, что в этом месяце им пройдена теория параллелей ⭑, а с 7 июня Лобачевский, согласно его просьбе, уже уволен для лечения в г. Сергиевск на минеральные воды ⊘.

Таким образом, содержание записок М. Г. Темникова за 1816—1817 учебный год вполне соответствует приведенным выше данным о лекциях, читанных Лобачевским в этом учебном году.

Далее, в апреле 1817 г. М. Темников «мало ходил» и в мае остался не аттестован у Лобачевского, так как пропустил 7 занятий. Его записки действительно обрываются на теореме Пифагора и не включают стереометрию, которую Лобачевский проходил в мае.

Итак, можно считать твердо установленным, что рассматриваемые нами записки М. Темникова представляют действительно записи лекций, читанных Лобачевским в 1815—1816 и в 1816—1817 учебных годах в Казанском университете.

Особый интерес представляет для нас в этих лекциях попытка Лобачевского доказать евклидов постулат параллельности — попытка, свидетельствующая о напряженных исканиях, завершившихся в 1826 г. созданием первой новой отличной от евклидовой геометрической системы, названной впоследствии геометрией Лобачевского.

Чтобы дать анализ и критику этой попытки, необходимо обратиться к тексту соответствующего раздела записок М. Темникова, т. е. к §§ 12—17 ♀. Рассмотрим подробнее эту часть записок М. Темникова, содержащую теорию параллельных прямых.

---

* Модзалевский, докум. № 71, стр. 77.

⭑ ЦГА ТАССР, фонд 977, № 812, св. № 26, лист 249.

⊘ Модзалевский, докум. № 76, стр. 80.

♀ Этот раздел записок был опубликован А. В. Васильевым в виде приложения к «Геометрии» Лобачевского, изданной в 1909 г. (доказательство А, стр. 57—65) и вновь воспроизведен нами (с исправлением некоторых очевидных неточностей, вкравшихся в студенческие записи лекций Лобачевского) в «Историко-математических исследованиях» (вып. IV, М.—Л., 1951, стр. 220—229) в виде приложения к тексту настоящего доклада.

§ 12 этого раздела содержит евклидово определение параллельных прямых и предложение о параллельности двух прямых в случае равенства соответственных углов.

В § 13 дана теорема, доказанная ранее Лежандром, что сумма углов в треугольнике не может быть более $\pi$.

§ 14 содержит три предложения:

Во-первых, замечательную теорему: «Если сумма углов в каком-нибудь треугольнике равна двум прямым, то и во всяком другом треугольнике будет тоже». Доказательство состоит из 4 частей.

Во-вторых, теорему о сложении дефектов треугольников, в предположении, что сумма углов треугольника меньше $\pi$.

В-третьих, теорему (уже неверную!), что сумма углов во всяком треугольнике должна быть более $\frac{\pi}{2}$, доказанную на основании предшествующей ей леммы о ломаной с прямыми углами, в которой-то и кроется ошибка. Эта ошибка заключается в произвольном допущении, незаметно введенном Лобачевским.

Теорема § 15 о том, что перпендикуляр, восставленный на боку угла, равного $\frac{\pi}{8}$, должен по продолжении встретить другой бок, является естественным следствием теоремы «сумма углов треугольника не может быть меньше $\frac{\pi}{2}$».

В § 16 устанавливается, как следствие теоремы § 15, существование треугольника, в котором сумма углов равна $\pi$, и, таким образом, согласно первой теореме § 14, Лобачевский находит, что сумма углов в любом треугольнике равна $\pi$.

В § 17 дано доказательство евклидова постулата параллельности, опирающееся на последнее предложение.

Из этого обзора мы видим, что если в § 13 доказательство теоремы «сумма углов в треугольнике не может быть больше $\pi$» совпадает с доказательством Лежандра, опубликованным в 3-м издании его «Начал» (1800), то первая половина § 14 содержит совершенно строгое доказательство замечательной новой теоремы: «Если сумма углов в каком-нибудь треугольнике равна двум прямым, то и во всяком другом треугольнике будет тоже» (эта теорема, как отмечено нами выше, была доказана Лежандром лишь в 1833 г., т. е. через 16 лет после Лобачевского)*.

* Ранее Лобачевского эта теорема доказывалась на основе совсем иного хода рассуждений итальянским геометром Саккери в 1733 г. (G. Saccheri, Euclides ab

Следующее далее за лежандровой же теоремой о дефектах сумм углов треугольников предложение, которое мы назвали леммой, касается ломаной с прямыми углами и имеет важное значение, так как оно служит основой для последующих теорем. Но в этом-то предложении Лобачевский и вводит незаметно для себя в процессе доказательства произвольное допущение. Правда, эта ошибка скрыта очень глубоко и, чтобы обнаружить ее, нужно, собственно говоря, уже быть основательно знакомым с геометрией Лобачевского. Проанализируем это доказательство.

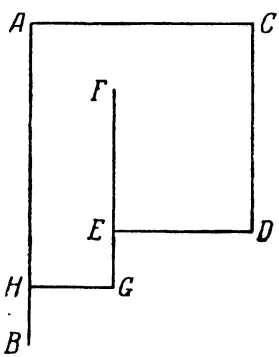


Рис. 2.

В записках М. Темникова лемма и ее доказательство приведены в следующем виде (рис. 2):

«*Естьли на линеи возставится $\perp$, а к этому $\perp$ проведется другой $\perp$ на той же стороне, на которой находится 1-я линея, к этой 3-й линеи проведется опять $\perp$ по ту же сторону, на которой находится 2-я линея, наконец к сей последней естьли проведется $\perp$ по ту сторону, где лежала предыдущая линея, то сей последний по достаточном продолжении должен пересечь либо 1, либо 2-ю линею.*

*Пусть $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, $ED \perp CD$, $FE \perp ED$, то $EF$ по продолжении должна пересечь либо $AB$, либо $AC$.*

Доказательство. Продолжаем $EF$ в противную сторону и на продолжении из какой-нибудь точки $G$ опускаем $\perp$ $GH$ на $AB$, то линея $EF$ будет заключаться в ограниченном пространстве $ACDEGHA$, след. по продолжении должна выдти из сего пространства вон, что не иначе может произойти, как когда $EF$ пересечет $AH$ или $AC$».

Необоснованным в этом доказательстве является утверждение, что «линея $EF$ будет заключаться в ограниченном пространстве $ACDEGHA$», утверждение, всегда верное только в евклидовой геометрии.

---

omni naevo vindicatus, Милан, 1733). Изложение рассуждений Саккери приведено в книге Бонола, Неевклидова геометрия, СПб., 1910, стр. 19—36. Но к книге Саккери внимание было привлечено лишь в конце XIX в., после опубликования Е. Бельтрами заметки о ней (Rend. Accad. Lincei (4) 5, 441—448, 1889).

Чтобы выявить произвольность допущения, введенного Лобачевским, мы рассмотрим, как обстоит дело с расположением отрезков ломаной *BACDEF* на плоскости Лобачевского и покажем, что здесь возможно такое расположение частей, при котором многоугольник *ACDEGHA* будет иметь самопересечение, и потому полупрямая *EF* не будет заключена в ограниченном пространстве.

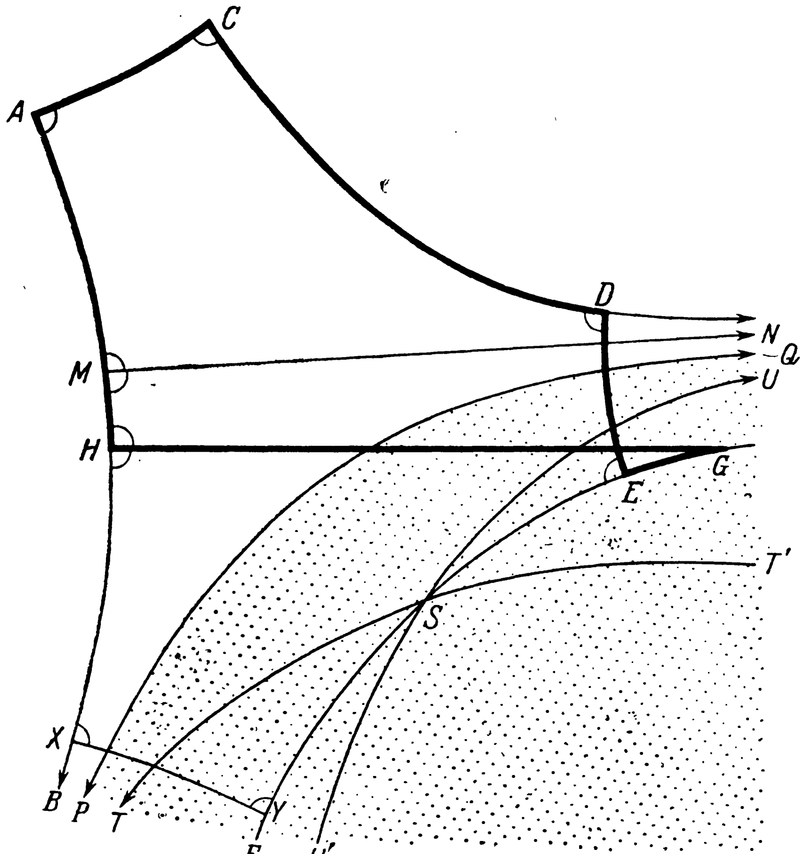


Рис. 3.

Итак, пусть на плоскости Лобачевского прямые *BA*, *AC* и *CD* последовательно перпендикулярны одна к другой (см. рис. 3, на котором дужками отмечены прямые углы); тогда, как известно, существует такая прямая *MN*, которая, будучи перпендикулярной к *AB*, будет параллельной к *CD* в направлении *CD*. Проведя, далее, прямую *PQ*, параллельную одновременно прямым *MN* и *MB*, в указанных порядком букв направлениях, мы для каждой точки *S*, лежащей с той стороны от прямой $PQ$, которая не содержит точки $M$, будем иметь две параллели к прямой $PQ$, проходящие через $S$: прямую $T'ST$, параллельную $QP$, и прямую $U'SU$, параллельную $PQ$. Тогда каждая прямая $FG$, проходящая через $S$ внутри угла $TSU'$ (следовательно, и внутри вертикального с ним угла $UST'$), будет прямой, расходящейся и с $AB$ и с $CD$. Поэтому она будет иметь общий перпендикуляр $DE$ с прямой $CD$ и общий перпендикуляр $XY$ с прямой $AB$.

Таким образом, мы получили такую ломаную $BACDEF$, что полупрямая $EF$, подчиненная условиям леммы, не будет пересекать ни $AB$, ни $AC$, в противоречии с утверждением Лобачевского, так как $EF$ не будет заключаться в ограниченном пространстве, поскольку перпендикуляр $GH$, опущенный на $AB$ из точки $G$, взятой на продолжении $EF$ в обратном направлении, расположится иначе, чем на чертеже Лобачевского. Основание $H$ этого перпендикуляра упадет между $M$ и основанием перпендикуляра, опущенного из $E$ на $AB$; следовательно, в этом случае многоугольник $ACDEGHA$ будет иметь самопересечение сторон $DE$ и $GH$.

Итак, *допустив, что такого рода самопересечения в многоугольнике $ACDEGHA$ быть не может, Лобачевский этим самым ввел незаметно новый постулат, исключающий возможность гиперболической геометрии.*

В дальнейшем Лобачевский, опираясь на эту лемму о ломаной с прямыми углами, которую он считает доказанной, приходит путем вполне строгих рассуждений к теореме, что сумма углов произвольного треугольника равна $\pi$. Таким образом, эту лемму о ломаной с прямыми углами, или точнее, постулат о невозможности самопересечения в многоугольнике $ACDEGHA$, можно считать эквивалентным постулату параллельности Евклида, так как он приводит к евклидовой теории параллелей.

В заключение заметим, что не легко выявить неправильность, допущенную Лобачевским в его цепи изящных и тонких рассуждений. Особенно это заметно, если сравнить ее с ошибками Лежандра, вводившего с 3-го по 8-е издание «Начал геометрии» (1800—1809), предложение «через точку, лежащую внутри угла, всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла», равноценность которого постулату Евклида почти непосредственно очевидна.

С 12-го издания (1823) Лежандр делал грубые ошибки в рассуждениях, касающихся предельного положения вершины треугольника, два угла которого стремятся к нулю, а стороны растут неограниченно. При этом, начиная с 1-го издания (1794), Лежандр в замечаниях приводил еще доказательство постулата параллельности, опирающееся на принцип однородности, не замечая порочного круга в своих рассуждениях*.

Записки М. Темникова, составленные по лекциям Лобачевского, дают очень ценный материал. Они знакомят нас с творческими исканиями молодого Лобачевского, подтверждают его упорную самостоятельную глубокую исследовательскую работу в период, предшествующий созданию новой геометрической системы, и показывают, насколько он уже тогда опередил Лежандра.

Очень ярко проявилась смелость и строгость его мысли в последней теореме § 14, в первой части ее доказательства.

Эта теорема и первая часть ее доказательства имеют в записках М. Темникова следующий вид:

«*Во всяком △-е сумма ∠ ∠-ов должна быть более* $\frac{\pi}{2}$.

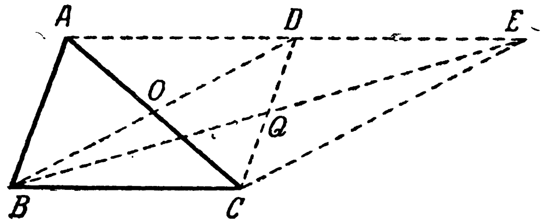


Рис. 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о [рис. 4]. Пусть в $\triangle ABC$

$$\angle A + \angle B + \angle C < \frac{\pi}{2};$$

делаем $AO = OC$; $BO = DO$, потом проводим линею $DC$ и делаем $DQ = QC$, $BQ = QE$, то $\triangle ADC$ будет $\approxeq \triangle ABC$*, $\triangle DCE \approxeq \triangle BDC$, посему $\angle ADE = \angle A + \angle B + \angle C$. Поступая подобным образом со

---

* Ошибки Лежандра полностью вскрыты Н. И. Лобачевским в «Новых началах» (см. Полн. собр. соч., т. II, стр. 149—161). Доказательства Лежандра текстуально воспроизведены в вводной статье к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского в Полн. собр. соч., т. I, стр. 56—64.

* $\approxeq$ — знак конгруэнтности (*Б. Л.*).

многими вновь выходящими $\triangle$-ками получим ряд соединенных линей под $\angle$-ом равным $\angle A + \angle B + \angle C$, из коих каждая $= BC$ и которыя никак не могут пересечь продолжения линеи $BC$, а того менее линею $AB$ или продолжение ея. Из сего также следует, что когда проведутся линеи из точек соединений $A$, $D$, $E$ и т. д. в какую нибудь точку произвольно взятую на $AB$ или ее продолжении, то сии линеи составят с линеями $AD$, $DE$ и т. д. острые углы».

Лобачевский получает бесконечный ряд конгруэнтных прямолинейных отрезков, образующих последовательно равные острые углы, т. е. бесконечную правильную простую ломаную с острыми углами, лежащую в то же время по одну сторону некоторой прямой, заключенной целиком в бесконечной выпуклой области, ограниченной этой ломаной (рис. 5). *Однако этот факт, противоестественный*

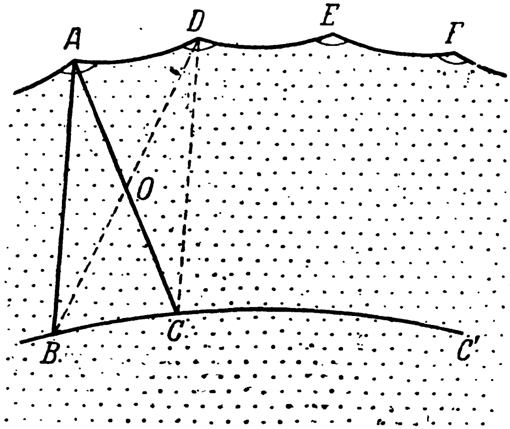


Рис. 5.

*с точки зрения мышления, привычного к евклидовой геометрии, Лобачевский еще не считает противоречием и добивается формального противоречия во второй части доказательства.*

Таким образом, *уже в те годы Лобачевскому были известны особенные свойства, которые должны иметь прямые, если допустить, что сумма углов треугольника меньше* $\pi$, *т. е. ему были известны, в сущности, некоторые факты новой геометрии.*

Если еще обратить внимание на замечательную первую теорему § 14, на вторую теорему § 14, на теорему § 13 и на ход доказательств в теоремах §§ 16 и 17, то приходится признать, что

Лобачевский уже в 1817 г. имел в своем распоряжении многие теоремы и методы, введенные им впоследствии в новую геометрическую систему *, т. е., что он был близок к созданию этой системы, правда, еще подозревая ее в противоречивости.

Представление о дальнейших этапах на пути Лобачевского к созданию воображаемой геометрии можно получить из рассмотрения теории параллелей в его учебнике «Геометрия» (1823), что сделано в начале настоящей статьи, и из его «Обозрений преподавания чистой математики на 1824—1825 и на 1825—1826 гг.», в которых излагаются как общие установки, так и программы математических курсов, чтение которых было поручено Лобачевскому.

Недавно И. Н. Бронштейну *, на основании анализа архивных документов удалось с полной определенностью установить, что «Обозрение», помеченное 1825—1826 г. ⊘, было первоначально представлено Лобачевским в 1822 г. под названием «Об обозрении преподавания чистой математики на 1822/23 г.» и препровождено в копии попечителю Казанского учебного округа М. Л. Магницкому.

* Поскольку в сочинении «О началах геометрии» — первой работе, посвященной новой геометрической системе — многие доказательства опущены, в нем имеются лишь формулировки первой теоремы § 14 и теоремы § 17, причем последняя высказана в предположении, что сумма углов треугольника равна $\pi$ (см. Полн. собр. соч., т. I, стр. 194 — 195). Но в «Новых началах», где даны развернутые доказательства, мы находим, что

1) в статье 91 приведена первая теорема § 14 с доказательством, переработанным и значительно упрощенным; при этом вторая теорема § 14 — о получении дефекта целого треугольника путем сложения дефектов его частей — входит как составная часть в это доказательство (Полн. собр. соч., т. II, стр. 262 — 264);

2) ход доказательств и построения, применявшиеся в § 16, полностью использованы в теореме статьи 102, в которой доказывается, что каждый острый угол можно рассматривать как угол параллельности некоторого отрезка (там же стр. 276 — 277);

3) ход доказательств и построения, примененные в § 17, использованы в теореме статьи 98, в которой доказывается, что из данной точки можно провести прямую под сколь угодно малым углом к данной прямой (там же, стр. 271—272) сама теорема § 17 доказана в статье 101 в предположении, что сумма углов треугольника равна $\pi$ (см. там же, стр. 274 — 275).

В «Геометрических исследованиях по теории параллельных линий» использование упомянутых теорем и методов совершенно аналогично (Полн. собр. соч., т. I, стр. 87 — 89, 91 — 93, 89 — 91).

* И. Н. Бронштейн, К истории «Обозрений преподавания чистой математики» Н. И. Лобачевского, «Историко-математические исследования», вып. III 1950, стр. 171—194.

⊘ Модзалевский, стр. 201 — 216.

Это «Обозрение 1»* получило у неизвестного нам референта отрицательный отзыв, который был сообщен Лобачевскому. На 1824—1825 год Лобачевский представил новое «Обозрение»⋆. Это «Обозрение 2»* существенно отличается от «Обозрения 1» и отражает дальнейшую эволюцию мысли Лобачевского. Но оригинал «Обозрения 1» Лобачевский вновь представил отделению в 1825 г. в качестве обозрения на 1825—1826 гг., не изменив ни одного слова и только подчистив цифры единиц годов 2 и 3 и заменив их на 5 и 6.

Эти факты имеют очень большое значение, так как разъясняют многие парадоксы, возникавшие ранее при сличении текстов рассматриваемых обозрений.

Использование старого текста можно объяснить тем, что занятый, повидимому, вплотную развитием идей своей новой геометрии, а также многообразными прочими обязанностями, Лобачевский не имел времени для составления нового рассуждения о преподавании, и, поскольку он считал общие установки «Обозрения 1» правильными, он решил наперекор М. Л. Магницкому, вновь к ним вернуться. При этом он пренебрег даже поправкой тех частей своего текста, которые отражали уже пройденный им этап в теории параллелей.

Из «Обозрения 1», как и из учебника «Геометрия», мы видим, что в 1822 г. Лобачевский уже обнаружил дефект доказательства евклидова постулата параллельности, рассмотренного в настоящей статье. Действительно, об этом свидетельствуют его слова, что параллелизм линий представляет «трудность до сих пор непобедимую», за которыми следуют общие критические замечания, отмечающие ошибочность попыток Бертрана, Лежандра и других геометров.

В «Обозрении 2» (1824) о теории параллелей не сказано открыто ни слова. Одно это уже говорит о многом. Умолчание по такому важному разделу является прямым указанием на совершающийся коренной перелом в трактовке самой проблемы теории параллелей. Далее, в его высказываниях можно уловить как бы намек на

---

* Согласно сокращенному названию, принятому И. Н. Бронштейном в цитированной выше статье.

⋆ Модзалевский, стр. 173—185.

открываемую им новую систему геометрии *. Лобачевский, указав, что, «...естьли в математике строгость необходима, то начала геометрии представляют трудности, которые должно встретить зрелому уму, суждением укрепленным предшествовавшим уже учением математики», говорит далее о необходимости нового выбора основных понятий, рекомендуя принимать в качестве начального понятия, характеризующего геометрическое тело, прикосновение и выводить отсюда понятия поверхности, линии и точки. Этому проекту полной перестройки изложения начал геометрии предшествует следующее замечание:

«Во-первых трехкое измерение тел толкуется обыкновенно недостаточно. Нельзя дать ясного понятия о длине, ширине, толщине тел, когда с этого начинают геометрию.

Если собственные чувства предохраняют от ложных заключений в продолжении геометрии, то всё остается желать избавить одну из частей математики от нарекания погрешать против обыкновенной своей строгости, быть темной и недостаточной в самых основаниях. К тому ж, кто знает, какие от нас скрыты истины в том, чего мы не понимаем?».

Следовательно, в первую очередь в этих словах Лобачевского следует видеть критическое высказывание, относящееся к неудачному выбору основных понятий у Евклида, представляющих слишком высокую ступень абстракции от реальных тел, чтобы служить строгими начальными основаниями геометрии.

Но вместе с тем известно, что Лобачевский считал наряду с евклидовыми определениями точки, линии, поверхности, также и евклидов постулат параллельности именно нарушением строгости в геометрии, недостаточностью в ее началах, так как вместо возможной общей теории, вытекающей из постулата параллельности Лобачевского, Евклидом рассматривался лишь частный ее случай. Так, в сочинении «О началах геометрии» (1829) мы читаем: «... нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных

* В этом мы присоединяемся к мнению И. Н. Бронштейна, высказанному в его цитированной выше работе, правда, не воспринимая этот намек в столь прямом смысле. Действительно, чтобы не искажать смысла цитаты, следует учесть также фразу, предшествующую тому абзацу, на который ссылается И. Н. Бронштейн, что мы и делаем в дальнейшем.

линий» *. А в «Новых началах» Лобачевский писал, что в его трактовке «...параллельность уже рассматривается во всей обширности... Евклид, не будучи в состоянии дать удовлетворительное доказательство, допускал в употребительной Геометрии тот частный случай, когда две параллельные должны быть вместе перпендикулами к одной прямой... Евклидовы последователи затрудняли только предмет дополнительными положениями, либо произвольными, либо совсем темными, стараясь убеждать в справедливости принятой истины, которую по существу самой Геометрии доказывать невозможно» *.

Поэтому мы имеем право усматривать в приведенной выше цитате из «Обозрения 2» также и некоторый намек на открытую Лобачевским более общую и строгую, чем у Евклида, теорию параллелей.

Таким образом, «Обозрение 2» убеждает нас в том, что работа по перестройке всех начал геометрии и, в частности, по построению новой теории параллелей производилась Лобачевским уже в 1824 г. Окончательным завершающим итогом этой работы и явился его исторический доклад, полученный Отделением физико-математических наук Казанского университета 7 (19) февраля 1826 г.

* Полн. собр. соч., т. I, стр. 185.

* Там же, т. II, стр. 267.

# ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

А. П. Норден

## § 1. Абсолютная теория параллельных линий

Изложение геометрии Лобачевского приходится начинать с приведения некоторых теорем, не зависящих от постулата о параллельных. С методической точки зрения число этих теорем желательно увеличить, включив в него те, которые обычно доказываются на основе постулата Лобачевского, или, по крайней мере, после того как он уже введен. Приводя эти теоремы, мы будем помещать их доказательства только в том случае, если они являются оригинальными, делая в противоположном случае ссылку на те руководства, в которых даны наиболее простые и удобные доказательства.

Теорема 1. *В четырехугольнике $ABCD$ с двумя прямыми углами при основании $AB$ $AD > BC$ тогда и только тогда, если $\angle D < \angle C$,* и *$AD = BC$ тогда и только тогда, если $\angle D = \angle C$.*

Теорема 2. *Если две прямые образуют равные соответственные углы с третьей, то они не пересекаются.*

Определение. Прямая $CD$ называется *параллельной* прямой $AB$ в точке $C$ и в полуплоскости $CAB$ (обозначается $CD \| AB$), если она является первой из тех прямых пучка с центром в точке $C$, которые не пересекают $AB$ в этой полуплоскости. (При этом предполагается, что в этом пучке установлен порядок так, что луч $CA$ предшествует всем остальным лучам в этой полуплоскости.) Эта прямая $CD$ называется также *параллельной прямой $AB$ в направлении $AB$.* Если $CD \| AB$ и $CA \perp AB$, то угол $\omega = \angle DCA$

называется *углом параллелизма*, а отрезок $p = AC$ — *стрелкой*, соответствующей этому углу.

Теорема 3. *Угол параллелизма не может быть тупым.*

Доказательство. Проведя через точку $C$ прямую, перпендикулярную $AC$, мы видим на основе теоремы 2, что она не может предшествовать параллели.

Теорема 4. *Существует одна и только одна прямая, которая параллельна прямой $AB$ в точке $C$, не лежащей на этой прямой и в полуплоскости $CAB$.*

Доказательство основывается, как обычно, на принципе Дедекинда.

Теорема 5. *Через всякую точку $C$ вне прямой $AB$ можно провести прямую $CF$, пересекающую $AB$ под любым наперед заданным острым углом* *.

Определение. Будем говорить, что *луч $CD$ расходится с прямой $AB$*, если расстояние точки $M$ от $AB$ растет неограниченно, когда эта точка движется по лучу $CD$, удаляясь от точки $C$.

Теорема 6. *Луч $OM$ расходится с прямой $ON$, которую он встречает в точке $O$* ⋆.

Теорема 7. *Для того, чтобы прямая $CD$ была параллельна прямой $AB$ в любой своей точке, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала луча, расходящегося с этой прямой в направлении параллелизма.*

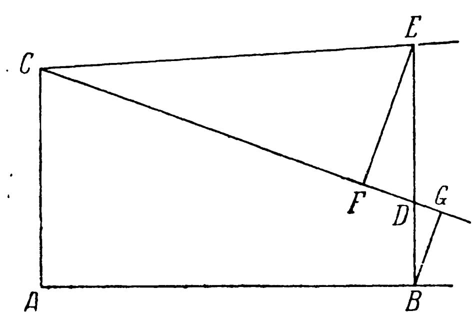


Рис. 1.

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия (рис. 1). Пусть $CD \parallel AB$ в полуплоскости $CAB$, а $CA$ и $DB$ перпендикулярны $AB$. Из точки $C$ опустим перпендикуляр $CE$ на $BD$. По теореме 2, прямая $CE$ не пересекается с $AB$. Точка $E$ не может лежать ниже $D$, так как прямая $CD$ есть первая из прямых, проходящих через точку $C$ и не пересекающих $AB$. Вследствие

* Доказательство см. в книге Лукьянченко, Элементы неевклидовой геометрии Лобачевского — Болье, М.—Л., 1933. стр. 10.

⋆ Доказательство см. там же, стр. 16.

этого $\angle CDB \geqslant \angle CEB$ (как внешний угол треугольника $CED$), т. е. не может быть острым. С другой стороны, угол параллелизма $\angle ACD$ не может быть тупым, вследствие чего

$$\angle ACD \leqslant \angle CDB$$

и, согласно теореме 1, $BD \leqslant AC$, откуда и следует ограниченность расстояния точки $D$ от прямой $AB$ при ее движении в сторону параллелизма.

Для доказательства достаточности нужно установить, что всякая прямая, проходящая через точку $C$ и не совпадающая с $CD$, расходится с $AB$ неограниченно. Если прямая $CE$ пересекает $AB$ в полуплоскости $CAB$, то неограниченная расходимость $CE$ с $AB$ непосредственно следует из теоремы 6. Если же прямая $CE$ следует за $CD$, то перпендикуляр $EF$, опущенный на $CD$, растет неограниченно при движении точки $E$ вправо. Но $EF < ED < EB$, откуда следует, что и $EB$ растет неограниченно.

Следствие. *Если прямая $CD$ параллельна прямой $AB$ в некоторой своей точке $C$, то она параллельна ей и во всякой другой своей точке.*

Теорема 8. *Если прямая $CD$ параллельна $AB$, то и прямая $AB$ параллельна $CD$.*

Доказательство. Пусть (тот же рис. 1) $BD$ перпендикулярна $AB$. Опустим на $CD$ перпендикуляр $BG$. Так как $BG \leqslant BD$, а последний остается ограниченным при движении $D$ в сторону параллелизма, то и $BG$ тоже остается ограниченным, что и доказывает теорему.

Теорема 9. *Если прямые $AB$ и $CD$ параллельны прямой $EF$ в одном и том же направлении, то они параллельны между собой в том же направлении.*

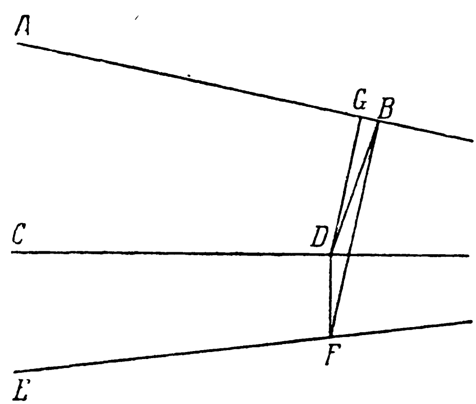

Рис. 2.

Доказательство. Пусть (рис. 2) $FD \perp CD$, а $FB \perp AB$. Отрезки $FB$ и $FD$ остаются ограниченными при движении в сторону параллелизма, а вместе с ними остается ограниченным и отрезок

$DB \leqslant FD + FB$. Но если $DG \perp AB$, то $DG \leqslant DB$ и, следовательно, тоже остается ограниченным, откуда и следует, что $AB \| CD$.

Замечание. Приведенное доказательство теоремы 7 сохраняет свою силу и для прямых, расположенных в пространстве, если принять во внимание, что скрещивающиеся прямые расходятся неограниченно в обоих направлениях. Действительно (рис. 3), если прямая $BE$ скрещивается с прямой $AN$, т. е. не лежит в плоскости $BAN$, то она расходится неограниченно со своей проекцией $BE_1$ на эту плоскость и, тем более, расходится с прямой $AN$, так как перпендикуляр $EE_1$, опущенный на $BE_1$ из точки $E$, меньше перпендикуляра $EE_2$, опущенного из той же точки на прямую $AN$.

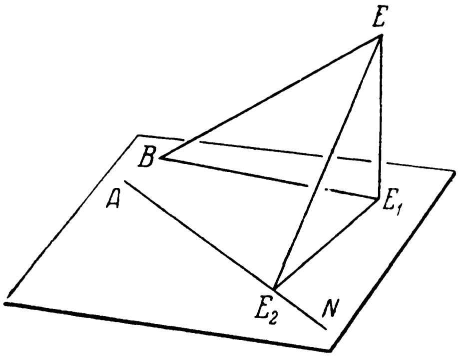

Рис. 3.

Доказательство теоремы 9 тоже полностью сохраняет свою силу для прямых пространства.

Теорема 10. *Угол параллелизма является невозрастающей функцией соответствующей стрелки.*

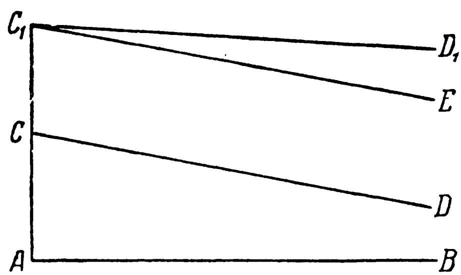

Рис. 4.

Доказательство. Всякому значению стрелки $p$ соответствует вполне определенное значение угла параллелизма $\omega = \Pi(p)$, так как, в противоположном случае, совместив стрелки, мы получили бы различные прямые, которые, находясь в одной полуплоскости, были бы параллельны одной прямой.

Если стрелка $A_1C_1$ больше стрелки $AC$, то мы наложим $AC$ на $A_1C_1$ так, чтобы точки $A$ и $A_1$ совпадали. Прямые $CD$ и $C_1D_1$ параллельны между собою, так как обе они параллельны $AB$. Если $\Pi(AC_1) > \Pi(AC)$ (рис. 4), то, проведя прямую $C_1E$ под углом $\omega = \Pi(AC)$ к $AC_1$, мы получим, согласно теореме 2, что $C_1E$ и $CD$ не пересекаются, а это невозможно, так как $C_1D_1$ следует за $C_1E$.

## § 2. Основные теоремы геометрии Лобачевского

Аксиома. *Существует такая стрелка $AC$, которой соответствует острый угол параллелизма.*

Теорема 11. *Угол параллелизма, соответствующий любой стрелке, — острый.*

Доказательство. Допустим, что стрелке $AC$ соответствует острый, а стрелке $AC_1$ — прямой угол параллелизма (рис. 5). В таком случае $AC_1 < AC$, так как другое предположение противоречит теореме 10. Но если $AC_1 < AC$ и $C_1D_1 \parallel AB$, то зеркальное отражение $AB$ в $C_1D_1$ — прямая $C_2D_2 \parallel AB$, а стрелке $AC_2 = 2AC$ снова отвечает прямой угол параллелизма. Повторяя отражение, мы, согласно аксиоме Архимеда, придем к такой стрелке $AC_n$, которая больше $AC$ и ей опять-таки, будет соответствовать прямой угол параллелизма. Таким образом, мы снова вступаем в противоречие с теоремой 10.

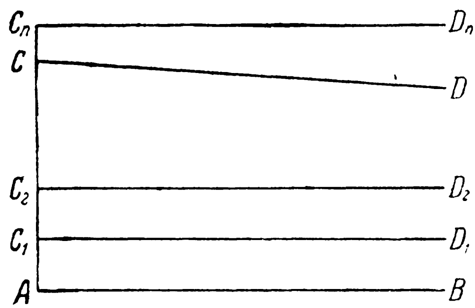

Рис. 5.

Определение. *Асимптотическим треугольником* называется фигура, образованная двумя параллельными прямыми, которые пересечены третьей.

Теорема 12. *Внешний угол асимптотического треугольника больше внутреннего, не смежного с ним.*

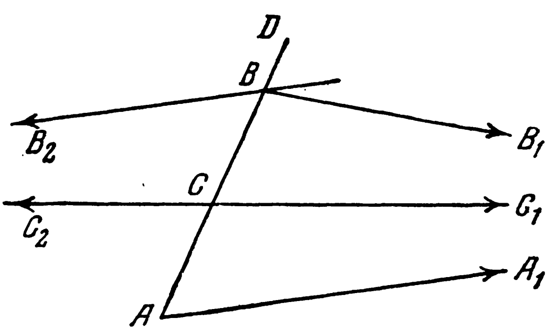

Рис. 6.

Доказательство. Разделим пополам сторону $AB$ асимптотического треугольника $AA_1BB_1$ (рис. 6) точкой $C$ и проведем через эту точку прямую $CC_1$, параллельную его сторонам $AA_1$ и $BB_1$. Продолжив эту прямую в сторону $CC_2$, противоположную стороне параллелизма, построим прямую $BB_2$, параллельную $CC_2$.

Асимптотические треугольники $AA_1CC_1$ и $BB_2CC_2$ конгруэнтны между собою, вследствие чего $\angle A_1AC = \angle B_2BC$. Но этот последний угол соответствует только части внешнего угла $DBB_1$, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. *Угол параллелизма является убывающей функцией соответствующей стрелки.*

Теорема 13. *Любой острый угол может служить углом параллелизма.*

Доказательство. Пусть $CD \parallel AB$ и $AC \perp AB$ (рис. 7). Если точка $C$ перемещается по прямой $CA$ в положение $A$, то $\angle DCA$ из острого становится прямым и, следовательно, принимает все значения между своим первоначальным значением $\omega$ и $\frac{\pi}{2}$. Остается доказать, что угол $\omega$ может быть сколь угодно малым.

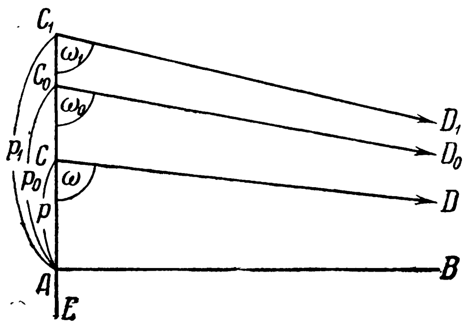


Рис. 7.

Допустим противное и предположим, что существует такой угол $\omega_1$, который не может быть углом параллелизма. Разобьем все острые углы на два класса: а) класс недопустимых углов, т. е. таких углов, которые не являются углами параллелизма, и б) класс допустимых углов, т. е. таких, которые могут быть углами параллелизма. Легко видеть, что это разбиение удовлетворяет условиям аксиомы Дедекинда. Но, в таком случае, существует такой угол $\omega_0$, который производит сечение. Этот угол не может быть наименьшим из допустимых, так как, если $\omega_0 = \Pi(p_0)$, то $\omega_1 = \Pi(p_1) < \omega_0$, если $p_1 > p_0$. Остается предположить, что $\omega_0$ есть наибольший из недопустимых.

Пусть дан угол $D_0C_0E$. Проведем из произвольной точки $C$ луча $C_0E$ прямую $CD \parallel AC$. Вследствие теоремы 12 $\angle DCE > \omega_0$ и, следовательно, является углом параллелизма, соответствующим некоторому значению стрелки $p$. Отложим вниз отрезок $C_0A = p$ и восставим к $AC_0$ перпендикуляр $AB$. Мы будем иметь $C_0D_0 \| CD \| AB$, откуда следует, что $\omega_0 = \Pi(AC_0)$, а это противоречит предположению о том, что $\omega_0$ не является углом параллелизма.

Замечание. Доказательство последней теоремы приведено нами потому, что оно не опирается на теорию дефектов углов треугольника. После ее доказательства можно перейти к рассмотрению вопроса о взаимном расположении прямых, а уже после этого обратиться к вопросу о сумме углов треугольника.

## § 3. Натуральная показательная функция

Тригонометрия Лобачевского требует введения гиперболических функций или, по крайней мере, натуральной показательной функции. В последующем предлагается такое изложение элементов теории этих функций, которое опирается только на элементарные сведения о графиках, площадях * и пределах, не выходящие за рамки программы девятого класса средней школы. Основываясь на этом, можно излагать тригонометрию Лобачевского, не предполагая у слушателей знакомства с элементами высшей математики.

Будем называть *компенсированным растяжением* такое преобразование точек плоскости, при котором их прямоугольные координаты преобразуются по формулам

$$x' = \lambda x; \qquad y' = \frac{1}{\lambda} y. \tag{1}$$

Оси $OX$ и $OY$ мы будем называть *осями* этого растяжения.

Рассматриваемое преобразование обладает следующими очевидными свойствами:

1. *Оно переводит прямые, параллельные осям, также в прямые, параллельные осям.*

2. *Оно сохраняет площади фигур,* что очевидно для треугольников со стороной, параллельной оси, а на такие треугольники можно разбить всякий многоугольник, распространив теорему на криволинейные фигуры с помощью предельного перехода.

---

* Разумеется, в евклидовой геометрии.

3. *Оно переводит в себя гиперболу* $xy=1$.

Рассмотрим (рис. 8) область, ограниченную дугой этой гиперболы $B_0B$, отрезком $A_0A$ оси $OX$ и двумя ординатами $A_0B_0$, $AB$, восставленными в конце этого отрезка, предполагая, что $B_0$ есть вершина гиперболы. Обозначим площадь этой области через $t$ и рассмотрим функциональную зависимость $x=E(t)$, где $x$ есть абсцисса точки $B$.

Рассмотрим две области $A_0B_0B_1A_1$ и $A_0B_0B_2A_2$ с площадями $t_1$ и $t_2$ и пусть $x_1=E(t_1)$, $x_2=E(t_2)$. Подвергая вторую из этих областей компенсированному растяжению

$$x'=x_1x; \qquad y'=\frac{1}{x_1}y,$$

мы переведем ее в область $A_1B_1B_3A_3$ так, что она будет примыкать справа к первой области и будет ограничена ординатой точки $B_3$ с абсциссой $x_3=x_1x_2$. Вследствие этого

$$E(t_1)\cdot E(t_2)=E(t_1+t_2). \qquad (2)$$

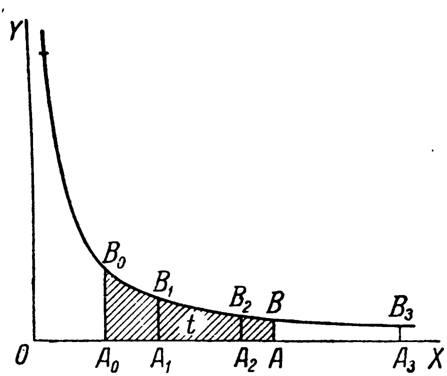

Рис. 8.

Отсюда обычным приемом, который, так или иначе, приходится применять при изложении геометрии Лобачевского, мы приходим к заключению, что

$$E(t)=[E(1)]^t.$$

Обозначив $E(1)=e$ и показав, что $e>1$, мы будем называть это число *неперовым*, а функцию

$$x=e^t \qquad (3)$$

*натуральной показательной функцией.*

Чтобы ввести гиперболические функции, мы повернем гиперболу $xy=1$ на угол 45° по часовой стрелке (рис. 9) и, приняв во внимание, что новые координаты могут быть связаны со старыми соотношениями

$$\xi=\frac{x+y}{\sqrt{2}}; \qquad \eta=\frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

приведем ее уравнение к виду:

$$\xi^2-\eta^2=2.$$

Будем называть *гиперболическим аргументом* точки $B$ гиперболы величину $S$, где $S$ есть площадь сектора $OB_0B$, и *гиперболическими функциями* этого аргумента — функции

$$\operatorname{ch} S = \frac{\xi}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{sh} S = \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Введем теперь старую прямоугольную систему координат $XOY$ (рис. 8), расположив оси $OX$ и $OY$ так, как это помечено на рис. 9.

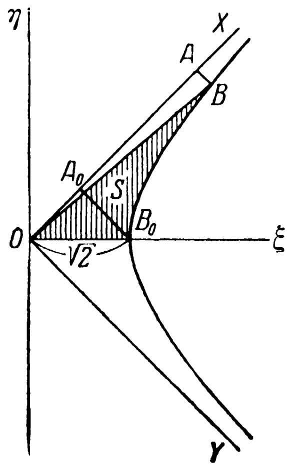


Рис. 9.

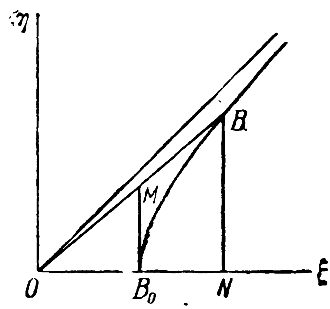


Рис. 10.

Опустив перпендикуляры $B_0A_0$ и $BA$ на ось $OX$, мы будем иметь

$$\text{пл. } OB_0BA = \text{пл. } OB_0A_0 + \text{пл. } A_0B_0BA = \text{пл. } OBA + \text{пл. } OB_0B.$$

Но

$$\text{пл. } OB_0A_0 = \text{пл. } OBA = \frac{1}{2}, \quad \text{пл. } A_0B_0BA = t, \quad \text{пл. } OB_0B = S,$$

так что

$$t = S.$$

Кроме того,

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t},$$

откуда окончательно

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{5}$$

В геометрии Лобачевского используются некоторые неравенства и предельные значения выражений, составленных из гиперболических функций. Всё это легко получить из следующего геометрически очевидного неравенства (рис. 10):

$$\text{пл. } OB_0M < \text{пл. } OB_0B < \text{пл. } ONB,$$

из которого немедленно следует

$$\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} < t < \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t,$$

или

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} < \frac{t}{\operatorname{sh} t} < \operatorname{ch} t. \tag{6}$$

Отсюда, в свою очередь, выводим

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sh} t}{t} = 1, \tag{7}$$

или

$$\operatorname{sh} t = t + \varepsilon, \tag{8}$$

где $\varepsilon$ — малая более высокого порядка, чем $t$.

Далее

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{(\operatorname{ch} t + 1)(\operatorname{ch} t - 1)}{t^2} =$$

$$= 2 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t^2} = 1,$$

откуда

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + \varepsilon_1, \tag{9}$$

где $\varepsilon_1$ — величина более высокого порядка малости, чем $t^2$.

Соотношения (8) и (9) используются при доказательстве того, что формулы евклидовой тригонометрии получаются при предельном переходе из формул тригонометрии Лобачевского.

## § 4. Об одном способе вывода тригонометрии Лобачевского

Предполагая знакомство с элементами проективной геометрии, можно дать следующий вывод тригонометрии Лобачевского.

Рассмотрим плоскость $F$ и орисферу $S$, касающуюся $F$ в точке $O$. Продолжив оси $S$ до встречи с $F$, мы можем поставить в соответствие всякой точке $A$ плоскости некоторую точку $A_0$ орисферы.

Все точки плоскости спроектируются, таким образом, во внутренние точки некоторого круга $K$ на орисфере, причем центр этого круга совпадет с точкой $O$, а окружность его будет состоять из точек пересечения орисферы с ее осями, параллельными плоскости $F$. Прямым плоскости будут соответствовать отрезки орициклов, заключенные внутри круга $K$.

При перемещении плоскости $F$ по себе внутренность круга $K$ на орисфере будет подвергаться проективному отображению на себя с точки зрения внутренней евклидовой геометрии этой орисферы.

Рассмотрим отрезок $AB$ на плоскости и соответствующий ему отрезок $A_0B_0$ на орисфере, и пусть орицикл $A_0B_0$ пересекает круг $K$ в точках $P_0$, $Q_0$. Ангармоническое отношение дуг орицикла

$$(A_0B_0P_0Q_0)=\frac{A_0Q_0}{B_0Q_0}:\frac{A_0P_0}{B_0P_0}$$

сохраняется при движении отрезка $AB$ по плоскости, вследствие чего величина

$$f(AB)=\frac{1}{2}\ln(A_0B_0P_0Q_0)$$

есть функция длины отрезка $AB$. Но для двух отрезков, расположенных на одной прямой,

$$f(AB+BC)=f(AB)+f(BC),$$

откуда следует, что значение этой функции может отличаться только постоянным множителем от длины отрезка $AB$*, так что

$$AB=\frac{k}{2}\ln(A_0B_0P_0Q_0).$$

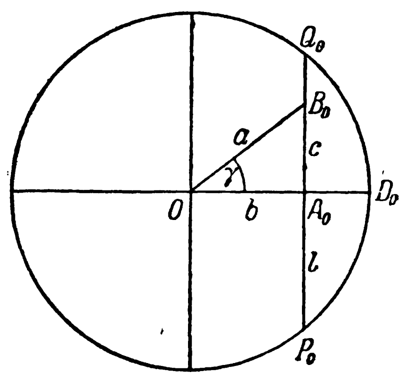

Рис. 11.

Далее мы можем поступать совершенно так же, как это делается при известном выводе гиперболической тригонометрии, основанном на проективной интерпретации плоскости Лобачевского ⋆.

Отрезок $AB$ приводится в такое специальное положение, когда дуга орицикла $A_0B_0$ перпендикулярна орисферическому диаметру $OD_0$, проходящему через точку $A_0$ (рис. 11). В этом случае

$$c=AB=\frac{k}{2}\ln\frac{B_0P_0}{B_0Q_0}=\frac{k}{2}\ln\frac{l_0+c_0}{l_0-c_0},$$

где

$$c_0=\smile{A_0B_0};\quad l_0=\smile{A_0P_0}=\smile{A_0Q_0},$$

* Это следует из основной теоремы теории измерения, согласно которой аддитивная функция отрезка определяет его длину с точностью до выбора единицы масштаба. См., например, Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, стр. 55 (Гостехиздат, 1945 год.)

⋆ Р. Бальдус. Неевклидова геометрия, ГТТИ, 1933 г., § 92.

откуда

$$\frac{c_0}{l_0} = \operatorname{th} \frac{c}{k}.$$

Если точка $A_0$ совпадает с центром круга $O$, а его орисферический радиус $OD_0 = r_0$, то предыдущая формула принимает вид

$$\frac{a_0}{r_0} = \operatorname{th} \frac{a}{k},$$

а требуя, чтобы предел отношения дуги к хорде был равен единице, мы получим $r_0 = k$ и

$$\frac{a_0}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k}.$$

Всякий прямоугольный треугольник можно привести в специальное положение, когда вершина его острого угла совпадает с центром круга $O$, и в таком случае ему будет соответствовать прямоугольный орисферический треугольник $OA_0B_0$ с тем же углом при вершине $O$. Применяя полученные формулы, мы будем иметь

$$\frac{a_0}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k}; \qquad \frac{b_0}{k} = \operatorname{th} \frac{b}{k}; \qquad \frac{c_0}{k} = \frac{l_0}{k} \operatorname{th} \frac{c}{k};$$

но

$$l_0^2 = k^2 - b_0^2 = k^2\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{b}{k}\right) = \frac{k^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{k}},$$

вследствие чего

$$\frac{c_0}{k} = \frac{\operatorname{th} \frac{c}{k}}{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}.$$

После этого из соотношений

$$a_0^2 = b_0^2 + c_0^2; \qquad b_0 = a_0 \cos \gamma; \qquad c_0 = b_0 \operatorname{tg} \gamma,$$

имеющих место для орисферического треугольника, мы получим уравнения

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k}; \quad \operatorname{th} \frac{b}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k} \cos \gamma; \quad \operatorname{th} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{tg} \gamma,$$

из которых следуют все остальные формулы тригонометрии Лобачевского.

# ЦИКЛОГРАФИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

З. А. Скопец

Рассмотрим в пространстве Лобачевского некоторую плоскость $\pi$, будем ее мыслить горизонтальной и назовем ее *плоскостью изображения*.

Эта плоскость разбивает пространство на два полупространства: $R$ (верхнее) и $R'$ (нижнее).

Всякая другая плоскость $\sigma$ либо расходится, либо параллельна, либо пересекается с плоскостью $\pi$, причем с каждой такой плоскостью связана другая плоскость $\sigma'$, симметричная с $\sigma$ относительно $\pi$. Если $\sigma$ принадлежит $R$, то $\sigma'$ принадлежит $R'$; в случае, когда $\sigma$ пересекает $\pi$ по прямой $b$, то $\sigma'$ проходит также через $b$ и $(\widehat{\pi, \sigma}) = (\widehat{\pi, \sigma'})$.

## § 1. Задание плоскости

1°. Пусть плоскость $\sigma$ находится в $R$ и расходится с плоскостью $\pi$. Каждая точка плоскости $\sigma$ имеет в плоскости $\pi$ свою ортогональную проекцию, но не наоборот, т. е. не всякая точка плоскости $\pi$ является ортогональной проекцией точки плоскости $\sigma$. Тем самым все точки плоскости $\pi$ заданием плоскости $\sigma$ разбиваются на два класса: на точки, являющиеся проекциями, и на точки, не являющиеся проекциями точек плоскости $\sigma$.

Естественно возникает необходимость в выяснении следующих двух вопросов: 1) каким образом осуществляется в плоскости $\pi$ разбиение ее точек на два класса, когда дана плоскость $\sigma$, и 2) определяет ли, обратно, такое разбиение точек в плоскости $\pi$ однозначно положение плоскости $\sigma$ в пространстве.

Известно, что две расходящиеся плоскости имеют единственный общий перпендикуляр. Пусть общий перпендикуляр плоскостей $\pi$ и $\sigma$ пересекает их соответственно в точках $P$ и $S$. Построим пучок плоскостей $\alpha$ с осью $PS$. Каждая плоскость пучка $\alpha$ пересекает плоскости $\pi$ и $\sigma$ по расходящимся прямым $p$ и $s$, для которых отрезок $PS$ длины $h$ является общим перпендикуляром. В таком случае все точки прямой $s$ проектируются ортогонально на $p$ в точки отрезка $AB$ длины $2r$, причем

$$\Pi(h)+\Pi(r)=\frac{\pi}{2}.$$

Серединой отрезка $AB$ является, очевидно, точка $P$ (рис. 1). Перпендикуляры в точках $C$, лежащих правее $B$, и в точках $D$,

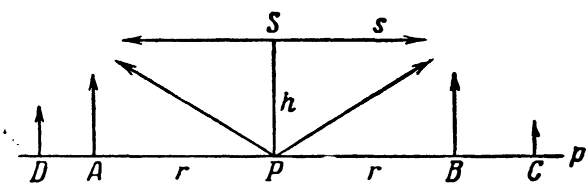


Рис. 1.

лежащих левее $A$, расходятся с прямой $s$ и, следовательно, с плоскостью $\sigma$, и поэтому точки $C$ и $D$ не являются проекциями точек плоскости $\sigma$. Перпендикуляры же в точках $A$ и $B$ параллельны $s$ и, следовательно, плоскости $\sigma$. Будем говорить, что точки $A$ и $B$ являются проекциями бесконечно удаленных или несобственных точек прямой $s$ на прямую $p$. Когда прямая $s$ опишет в плоскости $\sigma$ пучок с вершиной $S$, то ее проекция $AB$ опишет пучок диаметров окружности $c$ радиуса $r$ с центром в точке $P$. Так как все несобственные точки плоскости $\sigma$ являются несобственными точками прямых пучка, принадлежащего $\sigma$, с центром в точке $S$, и наоборот, то можно сказать, что точки окружности $c$ являются проекциями несобственных точек плоскости $\sigma$. Точки, лежащие внутри $c$, являются, а точки, лежащие вне $c$, не являются проекциями точек плоскости $\sigma$.

Точки плоскости $\sigma'$, симметричной с $\sigma$ относительно $\pi$, проектируются в точки, расположенные внутри той же окружности $c$. Таким образом, двум различным плоскостям $\sigma$ и $\sigma'$ соответствует одна и та же окружность $c$ в плоскости $\pi$, т. е. образы этих плоскостей не отличимы. Чтобы отличить окружность, соответствующую плоскости $\sigma$, от окружности, соответствующей плоскости $\sigma'$, придадим окружности $c$ ориентацию, а именно: окружность $c$ с положительной ориентацией отнесем к плоскости $\sigma$, а ту же окружность с отрицательной ориентацией отнесем к плоскости $\sigma'$.

Обратно, всякая ориентированная окружность $c$ в плоскости $\pi$ определяет единственную плоскость $\sigma$ в пространстве, расходящуюся с плоскостью $\pi$. Действительно, пусть радиус ориентированной окружности $c$ равен $r$. Отложим на перпендикуляре, восставленном к плоскости $\pi$ в центре $P$ окружности $c$, отрезок $PS=h$ так, чтобы $\Pi(h)+\Pi(r)=\frac{\pi}{2}$, причем этот перпендикуляр направим вверх, если $c$ ориентирована положительно, и вниз, если $c$ ориентирована отрицательно. Точки плоскости $\sigma$, проходящей через точку $S$ перпендикулярно к $PS$, будут проектироваться в точки, лежащие внутри $c$.

Теорема 1. *Всякой плоскости $\sigma$, расходящейся с плоскостью $\pi$, можно однозначно отнести ориентированную окружность в плоскости $\pi$, и обратно, каждой ориентированной окружности в плоскости $\pi$ можно однозначно отнести плоскость $\sigma$, расходящуюся с плоскостью $\pi$. Кратчайшее расстояние $h$ между плоскостями $\pi$ и $\sigma$ и радиус $r$ ориентированной окружности связаны соотношением*

$$\Pi(h)+\Pi(r)=\frac{\pi}{2},$$

*а центр ориентированной окружности находится в основании общего перпендикуляра обеих плоскостей.*

При $h\to\infty$, т. е. когда плоскость $\sigma$ неограниченно удаляется от плоскости $\pi$, радиус $r$ ориентированной окружности, соответствующей $\sigma$, стремится к нулю. Можно сказать, что несобственные плоскости пространства Лобачевского отображаются в ориентированные точки плоскости $\pi$, и наоборот. Если же $h\to 0$, то $r\to\infty$, т. е. когда плоскость $\sigma$ неограниченно приближается к плоскости $\pi$, то радиус $r$ соответствующей ориентированной окружности неограниченно увеличивается.

В некотором смысле можно поэтому говорить, что несобственные точки плоскости $\pi$ принадлежат окружности бесконечно большого радиуса с центром в любой точке.

2°. Пусть плоскость $\sigma$ находится в $R$ и параллельна плоскости $\pi$. Каждая точка плоскости $\sigma$ имеет свою ортогональную проекцию на плоскости $\pi$, но не наоборот. Выясним, как и раньше, каким образом происходит в плоскости $\pi$ разбиение всех ее точек на точки являющиеся и на точки не являющиеся проекциями точек плоскости $\sigma$.

Известно, что всякая плоскость $\alpha$, перпендикулярная к обеим плоскостям $\pi$ и $\sigma$, пересекает их соответственно по параллельным прямым $p$ и $s$, принадлежащим двум параллельным друг другу пучкам параллельных прямых в плоскостях $\pi$ и $\sigma$. Все точки прямой $s$ проектируются ортогонально на точки полупрямой, принадлежащей прямой $p$ с вершиной $A$ (рис. 2).

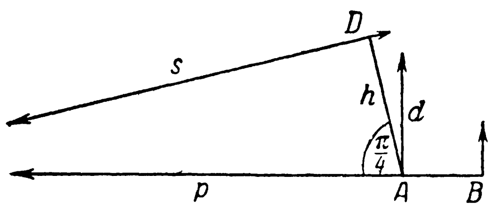


Рис. 2.

Перпендикуляры к прямой $p$ в точках $B$, лежащих правее $A$, расходятся с $s$ и, следовательно, с плоскостью $\sigma$; перпендикуляры в точках левее $A$ пересекают $s$, следовательно, и плоскость $\sigma$; перпендикуляр в точке $A$ к прямой $p$ параллелен прямой $s$, а поэтому и плоскости $\sigma$, так как он параллелен своей проекции $s$ на плоскости $\sigma$.

Когда прямая $s$ опишет весь пучок параллельных прямых в плоскости $\sigma$, т. е. всю плоскость, то точка $A$ опишет некоторую линию $c$, которая будет отделять в плоскости $\pi$ точки, являющиеся проекциями, от точек, не являющихся проекциями точек плоскости $\sigma$ на плоскость $\pi$. Линия $c$ будет являться проекцией несобственных точек плоскости $\sigma$. Если расстояние точки $A$ от плоскости $\sigma$ обозначим через $h$, то таково же будет и расстояние точки $A$ от прямой $s$, причем $\Pi(h)=\frac{\pi}{4}$. Другими словами, все точки линии $c$ в плоскости $\pi$ находятся на одинаковом расстоянии $h$ от плоскости $\sigma$. Это значит, что линия $c$ является линией пересечения плоскости $\pi$ с эквидистантной поверхностью с базой $\sigma$, для которой $h$ является высотой. Но плоскость, параллельная базе эквидистантной поверхности, пересекает ее по орициклу. Следовательно, линия $c$ является орициклом. Все точки, лежащие внутри этого орицикла, являются проекциями точек плоскости $\sigma$ на плоскость $\pi$.

Точки плоскости $\sigma'$, симметричной с $\sigma$ относительно плоскости $\pi$, проектируются ортогонально на $\pi$ в точки, расположенные внутри того же орицикла $c$. Таким образом, двум различным плоскостям $\sigma$ и $\sigma'$, симметричным относительно плоскости $\pi$, соответствует один и тот же орицикл $c$, т. е. образы этих плоскостей в плоскости $\pi$ не отличимы. Чтобы отличить орицикл, соответствующий плоскости $\sigma$, от орицикла, соответствующего плоскости $\sigma'$, орициклу $c$ придадим ориентацию, а именно, положительно ориентированному орициклу отнесем плоскость $\sigma$, а отрицательно ориентированному орициклу отнесем плоскость $\sigma'$.

Обратно, всякому ориентированному орициклу в плоскости $\pi$ можно отнести определенную плоскость $\sigma$, параллельную плоскости $\pi$. Действительно, пусть точка $A$ принадлежит положительно ориентированному орициклу $c$ в плоскости $\pi$ (рис. 2). Строим ось $p$ с вершиной $A$ для данного орицикла и перпендикуляр $d$ к плоскости $\pi$ в точке $A$, направленный в $R$. На биссектрисе прямого угла $(\widehat{d, p})$ откладываем отрезок $h$ такой, что $\Pi(h) = \frac{\pi}{4}$. Плоскость, проходящая через точку $D$ перпендикулярно к $AD$, будет искомой плоскостью $\sigma$. В самом деле, плоскость лучей $d$ и $h$ перпендикулярна к плоскостям $\pi$ и $\sigma$ и пересекает их по параллельным прямым $s$ и $p$. Поэтому плоскость $\sigma$ параллельна плоскости $\pi$. Но в таком случае плоскости $\sigma$ относится однозначно определенный орицикл с осью $p$ и вершиной $A$. Таким образом, данному ориентированному орициклу относится однозначно плоскость $\sigma$, параллельная плоскости $\pi$.

Т е о р е м а 2. *Всякой плоскости $\sigma$, параллельной плоскости $\pi$, можно однозначно отнести ориентированный орицикл в плоскости $\pi$ и обратно, каждый ориентированный орицикл в плоскости $\pi$ может быть однозначно отнесен плоскости $\sigma$, параллельной плоскости $\pi$. Ориентированный орицикл, соответствующий плоскости $\sigma$, получается от пересечения плоскости $\pi$ с эквидистантной поверхностью высоты $h$, где $\Pi(h) = \frac{\pi}{4}$, с базой $\sigma$.*

3°. Пусть плоскость $\sigma$ п е р е с е к а е т плоскость $\pi$ по прямой $b$ и образует с нею острый угол $\varphi$. Как и в предыдущих двух случаях, рассмотрим, каким образом в плоскости $\pi$ происходит разбиение всех ее точек на точки, являющиеся ортогональными проекциями, и на точки, не являющиеся ортогональными проекциями точек плоскости $\sigma$ на плоскость $\pi$. Пусть плоскость $\alpha$ перпендикулярна к плоскостям $\pi$ и $\sigma$. Все такие плоскости принадлежат гиперболическому пучку плоскостей, перпендикулярных к прямой $b$. Плоскость $\alpha$ пересекает плоскости $\pi$ и $\sigma$ по прямым $p$ и $s$, образующим угол $\varphi$ с вершиной $P$ на прямой $b$. Точки прямой $s$ проекти-

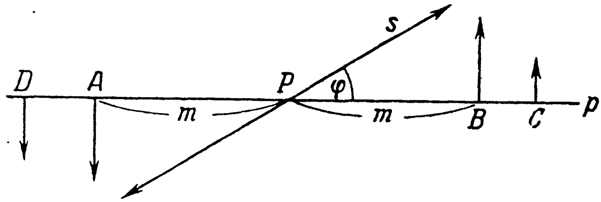


Рис. 3.

руются ортогонально в точки отрезка $AB$ длины $2m$, принадлежащего прямой $p$, где $\varphi = \Pi(m)$ (рис. 3). Когда плоскость $\alpha$ опишет гиперболический пучок плоскостей, прямые $s$ опишут плоскость $\sigma$, а проекции точек плоскости $\sigma$ заполнят поэтому внутреннюю область, заключенную между двумя эквидистантами с общей базой $b$ высоты $m$. В дальнейшем будем рассматривать две эквидистанты, симметричные относительно общей базы, как две ветви одной эквидистанты. В таком случае эквидистанта $c$ является проекцией

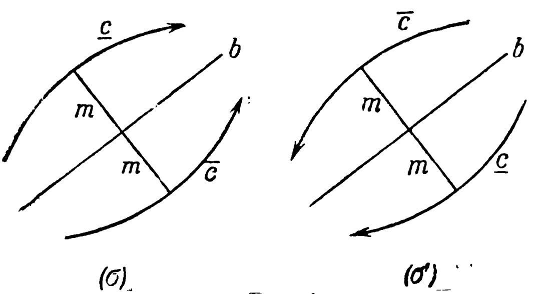


Рис. 4.

несобственных точек плоскости $\sigma$. Прямая $b$ разбивает плоскость $\sigma$ на две полуплоскости $\bar{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$. Все точки полуплоскости $\bar{\sigma}$ проектируются в точки, заключенные между одной ветвью $\bar{c}$ эквидистанты и ее базой $b$, а точки полуплоскости $\underline{\sigma}$ проектируются в точки, заключенные между второй ветвью $\underline{c}$ эквидистанты и той же базой $b$.

Точки плоскости $\sigma'$, симметричной с плоскостью $\sigma$ относительно плоскости $\pi$, проектируются в точки, расположенные внутри той же эквидистанты $c$. Чтобы отличить эквидистанту, соответствующую плоскости $\sigma$, от эквидистанты, соответствующей плоскости $\sigma'$, придадим ей ориентацию, а именно, плоскостям $\sigma$ и $\sigma'$ отнесем эквидистанты $c$ соответственно противоположно ориентированными ветвями $\bar{c}$ и $c$ (рис. 4).

Следует иметь в виду, что обе ветви ориентированной эквидистанты противоположно направлены, так как одна ветвь соответствует точкам, принадлежащим $R$, а другая ветвь соответствует точкам, принадлежащим $R'$.

Обратно, каждая эквидистанта, у которой ветви противоположно ориентированы, соответствует определенной плоскости $\sigma$, пересекающей плоскость $\pi$. Действительно, через базу $b$ эквидистанты проводим плоскость $\sigma$ под углом $\varphi$ к плоскости $\pi$ так, чтобы высота $m$ эквидистанты $c$ была отрезком параллельности для угла $\varphi$ и чтобы полуплоскость $\bar{\sigma}$, принадлежащая $R$, прилегала к ветви $\bar{c}$. В таком случае, на основании вышеизложенного, плоскости $\sigma$ будет соответствовать данная эквидистанта $c$.

Когда $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, то $m \to 0$ и эквидистанта стягивается в прямую, т. е. в свою базу $b$, которую нужно себе мыслить двойной прямой с двумя противоположными направлениями.

Когда $\varphi \to 0$, то $m \to \infty$ и несобственные точки плоскости $\pi$ можно себе мыслить также принадлежащими эквидистанте $c$ с произвольной базой и бесконечно большой высотой.

Теорема 3. *Всякой плоскости $\sigma$, пересекающей плоскость $\pi$, можно однозначно отнести ориентированную эквидистанту $c$ с положительно ориентированной ветвью $\bar{c}$ и отрицательно ориентированной ветвью $\underline{c}$ в плоскости $\pi$, и обратно. Высота эквидистанты $c$ является отрезком параллельности для линейного угла двугранного угла между плоскостями $\pi$ и $\sigma$, а базой эквидистанты является прямая пересечения этих плоскостей, причем полуплоскости $\bar{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$ плоскости $\sigma$ прилегают соответственно к $\bar{c}$ и $\underline{c}$. В частности, прямым плоскости $\pi$ соответствуют плоскости $\sigma$, проходящие через эти прямые перпендикулярно к плоскости $\pi$, и наоборот.*

Прямые (сдвоенные и снабженные противоположными направлениями), ориентированные окружности, орициклы, эквидистанты и точки в плоскости $\pi$ будем называть *циклами* плоскости $\pi$. Согласимся также несобственные точки плоскости $\pi$ считать принадлежащими несобственному циклу плоскости $\pi$. Теперь можно все выше доказанные теоремы объединить в следующее общее предложение.

Теорема 4. *Все собственные и несобственные плоскости пространства Лобачевского можно взаимно однозначно отобразить на* *циклы в любой собственной фиксированной плоскости* $\pi$ *этого пространства.*

Отображение плоскостей пространства Лобачевского на циклы в фиксированной плоскости $\pi$ будем называть *циклографическим отображением* пространства Лобачевского на плоскость $\pi$. Принцип отображения дается теоремами 1, 2, 3.

## § 2. Задание прямой

Прямую можно задать двумя плоскостями, проходящими через нее. Через любую прямую можно провести плоскость, перпендикулярную к плоскости изображения $\pi$. Поэтому за одну из двух плоскостей, определяющих данную прямую $s$ в пространстве, можно принять плоскость $\gamma_1$, перпендикулярную к плоскости $\pi$ и проходящую через прямую $s$. В качестве другой плоскости можно выбрать произвольную плоскость, проходящую через $s$. Однако вторую плоскость можно также выбрать специальным образом в зависимости от положения прямой $s$ относительно плоскости $\pi$. Пусть вторая плоскость $\gamma_2$, проходящая через прямую $s$, расходится с плоскостью $\pi$. Тогда и прямая $s$ будет расходиться с плоскостью $\pi$. Обе плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяют в плоскости $\pi$ два цикла $c_1$ и $c_2$, из которых один изображается прямой, а другой — направленной окружностью. В таком случае точки прямой $s$ проектируются в точки отрезка $AB$, принадлежащего циклу $c_1$ и внутренней области цикла $c_2$. Другими словами, прямая $s$ проектируется на плоскость $\pi$ в точки хорды, которая определяется пересекающимися циклами $c_1$ и $c_2$. Обратно, два цикла $c_1$ и $c_2$, из которых один является прямой, а другой — направленной окружностью, определяющих своим пересечением хорду $AB$, определяют прямую $s$, расходящуюся с плоскостью $\pi$. Действительно, оба цикла $c_1$ и $c_2$ определяют две плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в пространстве. Перпендикуляры к плоскости $\pi$ в точках $A$ и $B$ параллельны $\gamma_2$ и расходятся между собой. Но если в плоскости $\gamma_1$ имеются две расходящиеся прямые, параллельные плоскости $\gamma_2$, то эти плоскости пересекаются и тем самым определяют однозначно прямую $s$ в пространстве. Эта прямая расходится с плоскостью $\pi$, так как плоскость $\gamma_2$ расходится с плоскостью $\pi$. Нетрудно определить кратчайшее расстояние прямой $s$ от плоскости $\pi$. Общий перпендикуляр $h$ прямой $s$ и цикла $c_1$ проходит через середину $M$ хорды $AB$ (рис. 5). Поэтому

$$\Pi(h)+\Pi\left(\frac{AB}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, отрезок, дополнительный с половиной хорды, изображающей прямую $s$, характеризует кратчайшее расстояние прямой $s$ от плоскости $\pi$.

Проведем через точки $A$ и $B$ цикл $c_3$, имеющий такую же ориентацию, что и цикл $c_2$. Если этот цикл $c_3$ является эквидистантой, то прямая $c_1$ должна пересечь ветвь $\overline{c_3}$ в двух точках, когда $c_2$ ориентирован положительно, или же прямая $c_1$ должна пересечь ветвь $\underline{c_3}$ в двух точках, когда цикл $c_2$ ориентирован отрицательно. Очевидно, что циклы $c_1$ и $c_3$ определяют ту же прямую $s$ в пространстве, ибо ее кратчайшее расстояние от плоскости $\pi$ остается прежним, она имеет тот же общий перпендикуляр с плоскостью $\pi$ и эта прямая лежит в той же плоскости $\gamma_1$.

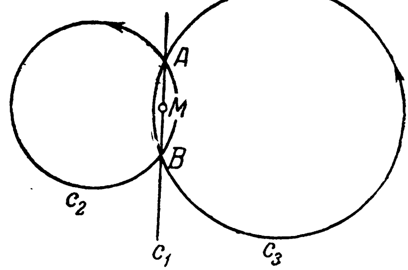

Рис. 5.

Теорема 5. *Все одинаково ориентированные циклы, проходящие через две данные точки $A$ и $B$ в плоскости $\pi$, определяют в пространстве пучок плоскостей с осью $s$, проекцией которой является хорда $AB$. Если среди циклов, проходящих через точки $A$ и $B$, имеются два орицикла, то прямая $s$ расходится с плоскостью $\pi$; если среди циклов, проходящих через точки $A$ и $B$, нет орициклов, то прямая $s$ пересекает плоскость $\pi$; если, наконец, одна из двух точек $A$ и $B$ становится несобственной, то имеется лишь один орицикл, проходящий через $A$ и $B$, и прямая $s$ параллельна плоскости $\pi$.*

На рис. 6 даны последовательно изображения прямой расходящейся, пересекающей и параллельной плоскости $\pi$. Таким образом, прямая $s$ задается циклом $c$ и его хордой $AB$. Если эта хорда принадлежит ориентированному орициклу, ориентированной окружности или одной ветви эквидистанты, то соответствующая прямая $s$ расходится с плоскостью $\pi$ (рис. 6, $a$); если эта хорда пересекает обе ветви эквидистанты, то соответствующая прямая $s$

пересекает плоскость $\pi$ (рис. 6, *б*); если, наконец, хорда $AB$ вырождается в полупрямую, то-есть один конец этой хорды становится несобственным, то соответствующая прямая $s$ параллельна плоскости $\pi$ (рис. 6, *в*).

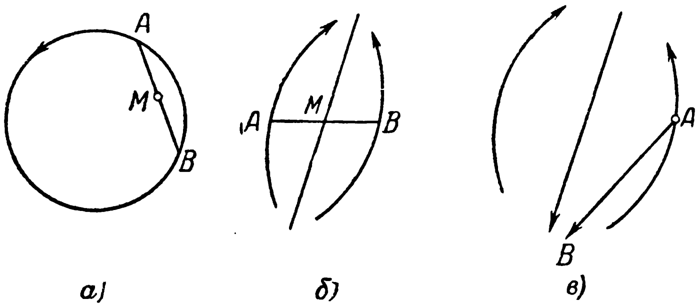


Рис. 6.

Теорема 6. *Если прямая $s$ расходится с плоскостью $\pi$ и проектируется в хорду $AB$ некоторого цикла, то отрезок $h$, дополнительный к полухорде $AB$, выражает кратчайшее расстояние между $s$ и $\pi$; если же прямая $s$ пересекает плоскость $\pi$ и образует с ней угол $\varphi$, то отрезок параллельности для этого угла равен полухорде $AB$, соответствующей этой прямой.*

В частности, прямая, перпендикулярная к плоскости $\pi$, изображается двумя пересекающимися прямыми $c_1$ и $c_2$, а прямая, принадлежащая плоскости $\pi$, изображается двумя эквидистантами с общей базой.

## § 3. Задание точки

Каждую точку $P$ в пространстве можно себе мыслить как точку пересечения двух прямых, проходящих через нее. Эти две прямые определяют плоскость $\gamma_3$ и поэтому задаются двумя пересекающимися хордами соответствующего цикла $c_3$ (рис. 7). Но обе хорды принадлежат двум циклам (прямым) $c_1$ и $c_2$. Поэтому точку $P$ можно считать заданной тремя плоскостями $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, соответствующими циклам $c_1$, $c_2$, $c_3$. Таким образом, изображением $A$ точки $P$ можно считать точку пересечения двух циклов (прямых) $c_1$ и $c_2$, принадлежащую внутренней области третьего цикла $c_3$, отличного, конечно, от прямой. Обратно, три таких цикла определяют единственную точку $P$ в пространстве. Действительно, точка пересечения $A$ циклов $c_1$ и $c_2$ определяет единственный перпендикуляр к плоскости $\pi$, проходящий через точку $A$. Этот перпендикуляр пересекает плоскость $\gamma_3$, соответствующую циклу $c_3$, в некоторой точке $P$, так как точка $A$ лежит внутри $c_3$.

Точка $P$ является вершиной трехгранного угла, образованного плоскостями $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. Ребрами этого трехгранного угла служат прямые $(c_1, c_2)$, $(c_2, c_3)$, $(c_3, c_1)$. Если через точки $M$ и $N$ (рис. 7) провести какой-нибудь цикл $c_4$, одинаково ориентированный с $c_3$,

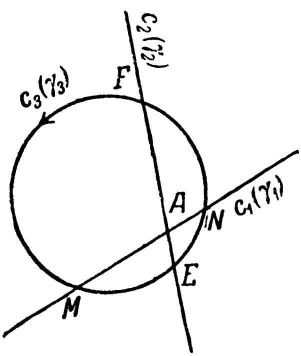


Рис. 7.

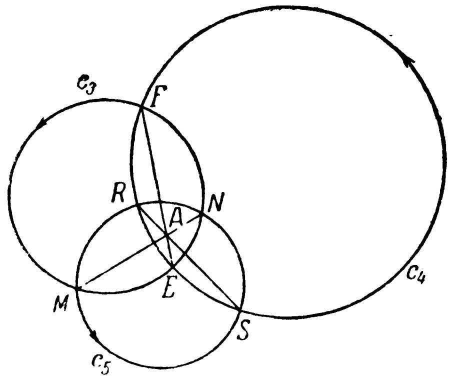


Рис. 8.

то ему будет соответствовать плоскость $\gamma_4$, проходящая через точку $P$. Поэтому плоскость $\gamma_1$ можно заменить плоскостью $\gamma_4$, с тем чтобы определилась та же самая точка $P$. Аналогично, плоскость $\gamma_2$ можно заменить плоскостью $\gamma_5$, изображаемой циклом $c_5$, одинаково ориентированным с циклом $c_3$. Общие хорды трех таких циклов пересекаются, очевидно, в точке $A$, являющейся проекцией точки $P$ в плоскости $\pi$.

Обратно, пусть даны три одинаково ориентированных цикла $c_3$, $c_4$, $c_5$, пересекающихся в парах точек $M$, $N$; $R$, $S$; $E$, $F$ (рис. 8). Пусть хорды $MN$ и $EF$ пересекаются в точке $A$. Очевидно, что соответствующие плоскости $\gamma_3$, $\gamma_4$ и $\gamma_5$ пересекаются, так как точка $A$ является проекцией точки пересечения прямых, по которым плоскости $\gamma_4$ и $\gamma_5$ пересекают плоскость $\gamma_3$. Но эта точка в пространстве и является точкой пересечения трех плоскостей $\gamma_3$, $\gamma_4$, $\gamma_5$. Отсюда следует, что хорда $RS$ проходит через точку $A$.

Теорема 7. *Если две общие хорды трех попарно пересекающихся циклов пересекаются, то третья общая хорда проходит через точку* *пересечения первых двух хорд, и точка пересечения является образом точки пересечения соответствующих плоскостей на плоскости* $\pi$.

Если точку $A$ будем называть *радикальным центром* трех циклов, то очевидно, что в случае трех плоскостей, пересекающихся в некоторой точке, радикальный центр будет лежать внутри всех трех циклов.

Примечание. Если цикл является эквидистантой, то нельзя говорить о положительно или отрицательно ориентированной эквидистанте, как это имеет место для орицикла и окружности. Однако, если окружность или орицикл рассмотреть в совокупности с одной лишь ветвью эквидистанты, то можно говорить об одинаковой и противоположной ориентации окружности, орицикла и эквидистанты.

Через точку $A$ можно провести кратчайшие хорды к циклам $c_3$, $c_4$, $c_5$. Эти хорды являются образами прямых, проходящих через точку $P$ в пространстве. Все эти прямые перпендикулярны к отрезку $PA$ в точке $P$ и поэтому они имеют равные проекции с общей серединой $A$. Отсюда, далее, следует, что концы этих равных отрезков лежат на окружности с центром в точке $A$. Эта окружность является, очевидно, образом плоскости, проходящей через точку $P$ перпендикулярно к $AP$.

Теорема 8. *Совокупность одинаково ориентированных циклов, проходящих через диаметрально противоположные точки окружности $c$ той же ориентации, является образом связки плоскостей с вершиной в точке $P$, образ которой находится в центре $A$ окружности $c$. Сама окружность $c$ является образом плоскости, принадлежащей той же связке плоскостей и перпендикулярной к отрезку $AP$, а расстояние $h$ вершины связки от плоскости $\pi$ связано с радиусом $r$ окружности $c$ равенством*

$$\Pi(r)+\Pi(h)=\frac{\pi}{2}.$$

Из последней теоремы следует, что расстояние $h$ точки $P$, принадлежащей плоскости $\sigma$, от плоскости $\pi$ и длина $m$ кратчайшей полухорды, проходящей через точку $A$, соответствующую точке $P$, относительно цикла $c$ связаны соотношением

$$\Pi(h)+\Pi(m)=\frac{\pi}{2}.$$

Чтобы построить кратчайшую хорду цикла $c$, проходящую через точку $A$, достаточно построить перпендикуляр в точке $A$ к оси данного цикла, проходящей через точку $A$. Этот перпендикуляр встречает цикл $c$ в точках $M$ и $N$ (рис. 9), и хорда $MN$ является кратчайшей. Отсюда следует, что цикл $c$ и заданная точка $A$ внутри его вполне определяют точку $P$ в пространстве, принадлежащую плоскости $\sigma$, соответствующей циклу $c$. Расстояние $h$ этой точки от плоскости $\pi$ и кратчайшая полухорда $m$, проходящая через точку $A$, связаны соотношением

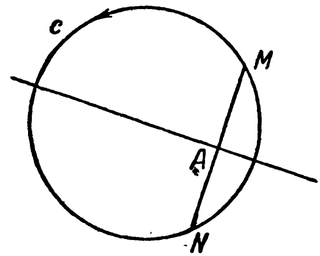


Рис. 9.

$$\Pi(h)+\Pi(m)=\frac{\pi}{2}.$$

## § 4. Параллельные плоскости

Пусть даны два одинаково ориентированных цикла $c_1$ и $c_2$, касающихся друг друга в точке $T$ (рис. 10). В таком случае можно построить их общую касательную $c_3$ в точке $T$. Все три цикла $c_1$, $c_2$, $c_3$ являются образами трех плоскостей $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. Нетрудно выяснить, что плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_3$ параллельны.

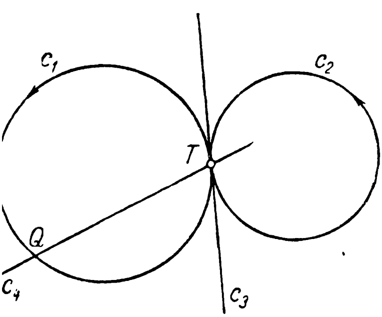


Рис. 10.

Действительно, перпендикуляр $TT_1$ к плоскости $\pi$ в точке $T$ параллелен плоскости $\gamma_1$ и лежит в плоскости $\gamma_3$. Всякая другая плоскость $\gamma_4$, проходящая через прямую $TT_1$, пересекает плоскость $\gamma_1$, ибо ее образ $c_4$ пересекает $c_1$ в токках $T$ и $Q$ и, следовательно, плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_4$ пересекаются по прямой $s$, образом которой является отрезок $QT$. А поскольку через $TT_1$ проходит единственная плоскость $\gamma_3$, не пересекающая плоскость $\gamma_1$, то $\gamma_1 \parallel \gamma_3$. Точно так же плоскости $\gamma_2$ и $\gamma_3$ параллельны между собой в том же направлении $TT_1$, что и плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_3$. Поэтому плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$ параллельны друг другу в том же направлении $TT_1$.

Всякий другой цикл $c$, проходящий через точку $T$, касательный к циклу $c_3$ и одинаково ориентированный с циклом $c_1$, является образом плоскости $\gamma$, параллельной плоскости $\gamma_1$.

Теорема 9. *Семейство одинаково ориентированных циклов, касательных друг к другу в точке $T$, является образом пучка плоскостей, параллельных друг другу в направлении луча $TT_1$, перпендикулярного к плоскости $\pi$ в точке $T$ и направленного в соответствии с ориентацией в $R$ или $R'$.*

Если согласимся считать, что плоскости, параллельные в одном и том же направлении, имеют общую несобственную прямую, то можно сказать, что пучок плоскостей с несобственной осью задается пучком касающихся друг друга одинаково ориентированных циклов. Несобственная прямая тем самым определяется двумя циклами этого пучка, и ее образом в плоскости $\pi$ является точка касания $T$ этих циклов.

## § 5. Угол между двумя плоскостями

Пусть даны пересекающиеся плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$ своими изображениями $c_1$ и $c_2$. Поставим задачу определения линейного угла двугранного угла между $\gamma_1$ и $\gamma_2$ по заданным изображениям $c_1$ и $c_2$.

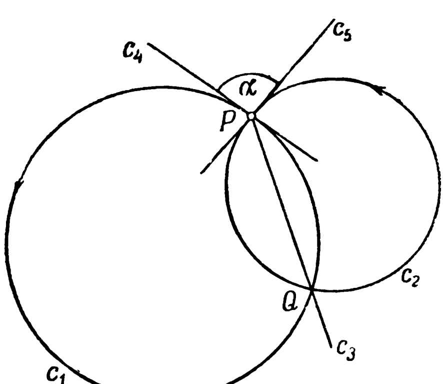

Рис. 11.

Пусть циклы $c_1$ и $c_2$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Цикл $c_3$ (рис. 11) является изображением плоскости, проходящей через линию пересечения $s$ плоскостей $\gamma_1$ и $\gamma_2$ перпендикулярно к плоскости $\pi$, а хорда $PQ$ является образом этой линии пересечения. Касательные $c_4$ и $c_5$ в точке $P$ к циклам $c_1$ и $c_2$ определяют угол $\alpha$. Эти касательные являются образами двух плоскостей $\gamma_4$ и $\gamma_5$, параллельных соответственно плоскостям $\gamma_1$ и $\gamma_2$, т. е. $\gamma_1 \| \gamma_4$, $\gamma_2 \| \gamma_5$ в направлении $PP_1$, перпендикулярном к плоскости $\pi$. Плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$ пересекаются по прямой $s$, а плоскости $\gamma_4$ и $\gamma_5$ пересекаются по прямой $PP_1$. Очевидно, что прямые $s$ и $PP_1$ параллельны между собой в направлении $P_1$, ибо перпендикуляры в точках $P$ и $Q$ к плоскости $\pi$ параллельны $s$. Если построить орисферу, проходящую через $P_1$ и имеющую своей осью прямую $PP_1$, то и прямая $s$ будет ее осью.

Четыре плоскости $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_4$, $\gamma_5$ пересекают эту орисферу по четырем орициклам $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$. Известно, что внутренняя геометрия орисферы совпадает с геометрией Евклида, если за прямые принять орициклы на орисфере. Тогда на орисфере будем иметь две пары орициклов $z_1$, $z_2$ и $z_4$, $z_5$, причем $z_1 \| z_4$, $z_2 \| z_5$, ибо параллельные плоскости, проходящие через оси орисферы, пересекают ее по параллельным орициклам. Но в таком случае орициклы $z_1$ и $z_2$ пересекаются под тем же углом, что и орициклы $z_4$ и $z_5$, ибо углы с параллельными сторонами равны. Но угол между орициклами $z_1$ и $z_2$ равен линейному углу двугранного угла между плоскостями $\gamma_1$ и $\gamma_2$, а угол между орициклами $z_4$ и $z_5$ равен углу между плоскостями $\gamma_4$ и $\gamma_5$ или углу между касательными $c_4$ и $c_5$ к циклам $c_1$ и $c_2$. Значит, двугранный угол между плоскостями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ измеряется углом между касательными к изображающим их циклам $c_1$ и $c_2$ в точке их пересечения.

Теорема 10. *Линейный угол двугранного угла равен углу между циклами, изображающими грани двугранного угла.*

## § 6. Взаимные пучки плоскостей

Рассмотрим эллиптический пучок плоскостей $\alpha$ с осью $s$. Плоскости, перпендикулярные к прямой $s$, образуют гиперболический пучок плоскостей $\beta$. Оба пучка плоскостей взаимны — один пучок определяет и определяется другим. Каждая плоскость одного пучка перпендикулярна ко всякой плоскости другого пучка. Если данный пучок плоскостей является параболическим пучком, то существует пучок плоскостей, перпендикулярных к плоскостям данного пучка. Этот второй пучок плоскостей, как нетрудно доказать, также является параболическим. Таким образом, пучок плоскостей, взаимный с параболическим пучком, также является параболическим и каждая плоскость одного пучка перпендикулярна ко всякой плоскости другого пучка.

В результате циклографического отображения в плоскости $\pi$ получим два типа взаимных пучков циклов: 1) эллиптический пучок циклов и взаимный или сопряженный с ним гиперболический пучок циклов; каждый цикл одного пучка перпендикулярен ко всякому циклу сопряженного пучка; 2) параболический пучок циклов и сопряженный с ним другой параболический пучок, причем каждый цикл одного пучка перпендикулярен ко всякому циклу сопряженного пучка. Отсюда следует, что гиперболический пучок циклов, который нами раньше не был рассмотрен, можно задать двумя циклами $c_1$ и $c_2$, перпендикулярными к циклам эллиптического пучка. Все одинаково ориентированные циклы, перпендикулярные к циклам $c_1$ и $c_2$, принадлежат одному и тому же эллиптическому пучку.

Если прямая $s$ расходится с плоскостью $\pi$, то среди плоскостей, перпендикулярных к прямой $s$, существует одна плоскость, перпендикулярная и к самой плоскости $\pi$. Поэтому среди циклов гиперболического пучка непременно будет прямая $p$, и все циклы этого пучка разбиваются на две части, симметричные относительно цикла $p$.

Когда прямая $s$ параллельна плоскости $\pi$ или же пересекает ее, то не существует плоскости, перпендикулярной к плоскости $\pi$ и к прямой $s$; следовательно, гиперболический пучок циклов не содержит прямой. Будем, однако, говорить, что прямая $p$ является, в таком случае, соответственно либо несобственной, либо идеальной.

Если прямую, принадлежащую данному пучку циклов, назовем *радикальной осью* этого пучка, то придем к следующей теореме.

Теорема 11. *Радикальная ось гиперболического пучка циклов будет прямой собственной, несобственной или идеальной в зависимости от того, будет ли ось сопряженного эллиптического пучка плоскостей расходиться, параллельна или пересекать плоскость изображения* $\pi$.

Возьмем на радикальной оси $c_3$ двух циклов $c_1$ и $c_2$ (если эта ось существует) точку $A$ так, чтобы из нее можно было провести к циклам $c_1$ и $c_2$ касательные $AT_1$ и $AT_2$. Окружность радиуса $AT_1$ с центром в точке $A$ пересекает циклы $c_1$ и $c_3$ ортогонально. Следовательно, эта окружность принадлежит сопряженному пучку циклов и поэтому пересекает цикл $c_2$ под прямым углом. Отсюда немедленно следует, что отрезки касательных $AT_1$ и $AT_2$ равны между собой. Обратно, пусть касательные $AT_1$ и $AT_2$, проведенные из некоторой точки $A$ к двум циклам $c_1$ и $c_2$, имеют одинаковую длину. Тогда окружность $c$ радиуса $AT_1$ с центром в точке $A$ пересекает циклы $c_1$ и $c_2$ ортогонально. Если из точки $A$ опустить перпендикуляр $p$ на общую ось обоих циклов $c_1$ и $c_2$, то цикл $c$ также будет перпендикулярен к циклу $p$. Тем самым цикл $p$ принадлежит пучку, определяемому циклами $c_1$ и $c_2$. Это значит, что цикл $p$ является радикальной осью этого пучка.

Теорема 12. *Для того чтобы отрезки касательных, проведенных из данной точки к двум циклам, имели одинаковую длину, необходимо и достаточно, чтобы эта точка лежала на радикальной оси данных циклов.*

Из этой теоремы следует, что если два цикла не имеют радикальной оси, то не существует окружности, ортогональной к ним.

## § 7. Перпендикулярные прямые

Рассмотрим прямую $s(AB)$ в плоскости $\gamma(c)$ (рис. 12). Касательные прямые $c_1$ и $c_2$ в точках $A$ и $B$ к циклу $c$ определяют в плоскости $\pi$ пучок прямых. Построим цикл $c_0$ с осями $c_1$ и $c_2$ и вершинами $A$ и $B$ и придадим ему ту же ориентацию, что и циклу $c$. Нетрудно доказать, что прямая $s_1(PQ)$, принадлежащая плоскости $\gamma(c)$, перпендикулярна к прямой $s(AB)$. Действительно, циклы $c_0$ и $c$ ортогональны; поэтому соответствующие плоскости $\gamma_0$ и $\gamma$ также перпендикулярны. Плоскость $\gamma_3(c_3)$ пересекает плоскость $\gamma_0$ ортогонально. Но если плоскость $\gamma_3$ пересекает одну из двух перпендикулярных плоскостей ($\gamma_0$) под прямым углом, то она пересекает другую плоскость ($\gamma$) по прямой, перпендикулярной к линии пересечения плоскостей $\gamma$ и $\gamma_0$, т. е. к прямой $s(AB)$. Но плоскость $\gamma_3$ пересекает плоскость $\gamma$ по прямой $s_1(PQ)$; поэтому прямые $AB$ и $PQ$ являются образами перпендикулярных прямых.

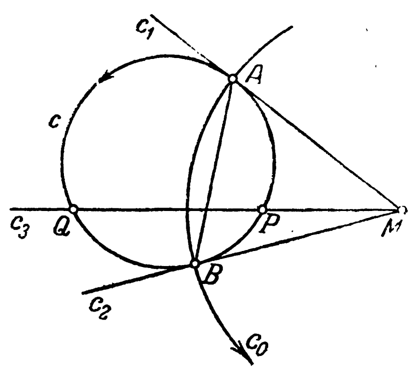

Рис. 12.

Условимся говорить, что каждой хорде некоторого цикла соответствует определенный *полюс*. Этот полюс может быть собственным, несобственным и идеальным, в зависимости от того, определяют ли касательные к циклу в концах хорды эллиптический, параболический или гиперболический пучок прямых. На рис. 12 дано изображение эллиптического пучка прямых, т. е. полюсом хорды $AB$ является собственная точка $M$.

Теорема 13. *Для того чтобы прямые $s(AB)$ и $s_1(PQ)$ в плоскости $\gamma(c)$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы прямая, содержащая одну хорду, проходила через полюс другой хорды.*

## § 8. Угол между двумя пересекающимися прямыми

Пусть в плоскости $\gamma(c)$ даны две прямые $s(AB)$ и $s_1(PQ)$ (рис. 13). Определим натуральную величину угла между этими прямыми по их изображениям в плоскости $\pi$.

Построим плоскости $\gamma_1(c_1)$ и $\gamma_2(c_2)$, проходящие соответственно через прямые $s(AB)$ и $s_1(PQ)$ перпендикулярно к плоскости $\gamma(c)$. Для этого через концы хорд $AB$ и $PQ$ надо провести соответственно циклы $c_1$ и $c_2$, ортогональные к данному циклу $c$ и ориентировать их одинаково с циклом $c$. Очевидно, что угол между плоскостями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяется линейным углом между прямыми $s$ и $s_1$. Но, с другой стороны, линейный угол двугранного угла между плоскостями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяется углом между соответствующими циклами $c_1$ и $c_2$.

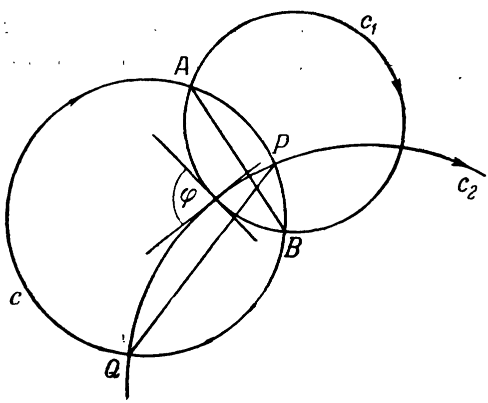

Рис. 13.

Теорема 14. *Натуральная величина угла между пересекающимися прямыми $s(AB)$ и $s_1(PQ)$, принадлежащими плоскости $\gamma(c)$, представляется углом между циклами $c_1$ и $c_2$, проведенными через концы данных хорд $AB$ и $PQ$ перпендикулярно к циклу $c$.*

## § 9. Угол между двумя скрещивающимися прямыми

Пусть даны две скрещивающиеся прямые $a$ и $b$. Через прямую $a$ можно провести две плоскости $\alpha_1$ и $\alpha_2$, параллельные прямой $b$, а через прямую $b$ — две плоскости $\beta_1$ и $\beta_2$, параллельные прямой $a$. Нетрудно доказать, что биссекторные плоскости двугранных углов $(\widehat{\alpha_1, \alpha_2})$ и $(\widehat{\beta_1, \beta_2})$, содержащих соответственно прямые $a$ и $b$, пересекаются по общему перпендикуляру $c$ данных прямых. Пары прямых $(a, c)$ и $(b, c)$ определяют пересекающиеся плоскости $\gamma_1$ и $\gamma_2$. По определению, угол между плоскостями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ принимается за меру угла между данными скрещивающимися прямыми. Методом циклографического отображения можно легко построить общий перпендикуляр данных двух скрещивающихся прямых и найти натуральную величину угла между ними.

Пусть прямая $a$ дана двумя ориентированными точками $A_1$ и $A_2$, а прямая $b$ — двумя ориентированными точками $B_1$ и $B_2$. Для циклов, проведенных через тройки точек $A_1$, $A_2$, $B_1$ и $A_1$, $A_2$, $B_2$, строим биссекторный цикл $c_1$, а для циклов, проведенных через тройки точек $B_1$, $B_2$, $A_1$ и $B_1$, $B_2$, $A_2$, строим биссекторный цикл $c_2$. Угол, под которым пересекаются циклы $c_1$ и $c_2$, равен натуральной величине угла между данными скрещивающимися прямыми.

## § 10. Расстояние между двумя точками

Пусть в пространстве даны две точки $M$ и $N$. Определим натуральное расстояние $d$ между точками $M$ и $N$.

Через прямую $MN$ проведем произвольную плоскость $\gamma$, не перпендикулярную к плоскости $\pi$. При отображении плоскости $\gamma$ и точек $M$ и $N$ на плоскость $\pi$ получим цикл $c$ и две точки $M_1$ и $N_1$ внутри него. Обозначим кратчайшие полухорды, проведенные через точки $M_1$ и $N_1$, через $m_1$ и $n_1$. Натуральные расстояния точек $M$ и $N$ от плоскости $\pi$ равны $m_1'$ и $n_1'$, где $\Pi(m_1)+\Pi(m_1')=\frac{\pi}{2}$, $\Pi(n_1)+\Pi(n_1')=\frac{\pi}{2}$.

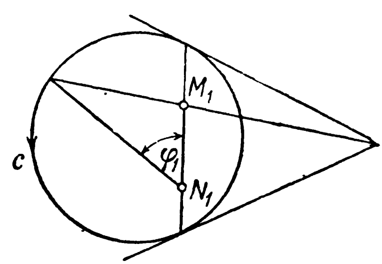

Рис. 14.

Если $M_1N_1 = d_1$, то натуральное расстояние $d$ между $M$ и $N$ легко определяется как верхнее основание двупрямоугольника с нижним основанием $d_1$ и с высотами $m_1'$, $n_1'$.

Можно, однако, определить отрезок $d$, построив его угол параллельности (рис. 14).

Если $\varphi$ является натуральной величиной угла $\varphi_1$ (§ 8), то остается построить отрезок $d$ по его углу параллельности $\varphi$. Пользуясь построением предыдущего параграфа, можно определить натуральное кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Определение расстояния от точки, прямой или плоскости до другой плоскости не вызывает никаких принципиальных затруднений, и оно сводится к рассмотренным выше задачам.

## § 11. Конформное отображение в плоскости Лобачевского

Известно, что с каждой прямой в плоскости Лобачевского и с данной константой $0 < c \leqslant \frac{\pi}{2}$ связано преобразование Либмана. Это преобразование является конформным. Рассматриваемое нами циклографическое отображение дает возможность более глубоко и, вместе с тем, более просто изучить преобразование Либмана и, с другой стороны, что более существенно, дает также возможность установить еще два основных вида конформных преобразований в плоскости Лобачевского.

Рассмотрим две плоскости изображения $\pi$ и $\pi'$ в пространстве. Каждая ориентированная точка $P$ плоскости $\pi$ является проекцией несобственной точки $P'_\infty$ пространства. Последняя, в свою очередь, имеет свою проекцию $P'$ в плоскости $\pi'$. Таким образом, каждой ориентированной точке $P$ плоскости $\pi$ соответствует ориентированная точка $P'$ плоскости $\pi'$, и наоборот. Рассмотрим, далее, некоторую плоскость $\sigma$. Проекции ее несобственных точек на плоскости $\pi$ и $\pi'$ образуют некоторые циклы. Каждая точка $P$ цикла, принадлежащего плоскости $\pi$, является образом точки $P'_\infty$ пространства. Точка $P'_\infty$ проектируется на плоскость $\pi'$ в ориентированную точку $P'$, принадлежащую соответствующему циклу в плоскости $\pi'$. Таким образом, каждому циклу плоскости $\pi$ соответствует определенный цикл в плоскости $\pi'$, и наоборот. Это соответствие циклов двух плоскостей $\pi$ и $\pi'$ является взаимно однозначным и оно устанавливается плоскостями пространства Лобачевского. Между точками этих соответствующих циклов тем самым также устанавливается взаимно однозначное соответствие. Так как прямая как цикл в плоскости изображения является предельным положением эквидистанты, когда ее ветви стремятся к совпадению, то такой цикл нужно себе представить как сдвоенную прямую, снабженную противоположными направлениями. Такой прямой, принадлежащей плоскости $\pi$, соответствует невырожденный цикл в плоскости $\pi'$.

Каждой точке этой прямой соответствуют две точки на соответствующем цикле, ибо эта точка является сдвоенной.

Нетрудно доказать, что точечное соответствие между плоскостями $\pi$ и $\pi'$ является конформным. Действительно, угол между двумя циклами в плоскости $\pi$ равен углу между соответствующими двумя плоскостями, а эти плоскости отображаются на $\pi'$ в соответствующие циклы и угол между циклами при этом сохраняется.

Теорема 15. *Несобственные точки пространства Лобачевского ортогональным проектированием их на две плоскости изображения $\pi$ и $\pi'$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между ориентированными точками этих плоскостей. Это соответствие является конформным и переводит циклы одной плоскости в циклы другой плоскости.*

В частности, когда плоскости $\pi$ и $\pi'$ приведены к совпадению, то конформное соответствие между ориентированными точками устанавливается в одной плоскости $\pi$.

Пусть плоскости изображения $\pi$ и $\pi'$ пересекаются по прямой $b$ и образуют между собой угол $\varphi$. Каждой ориентированной точке $P$, принадлежащей плоскости $\pi$, соответствует ориентированная точка $P'$ в плоскости $\pi'$. На рисунке 15 дано сечение плоскостей $\pi$ и $\pi'$ плоскостью, перпендикулярной к прямой $b$ в точке $A$. После поворота плоскости $\pi'$ около прямой $b$ на угол $\varphi$ до совпадения с плоскостью $\pi$ точки $P$ и $P'$ окажутся на одном перпендикуляре к прямой $b$. Соответствие между ориентированными точками $P$ и $P'$ в совмещенных плоскостях является взаимно однозначным, конформным, и оно переводит циклы в циклы. Это соответствие определяется в плоскости $\pi$ прямой $b$ и углом $\varphi$. Оно обобщает известное преобразование Либмана в том смысле, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между циклами.

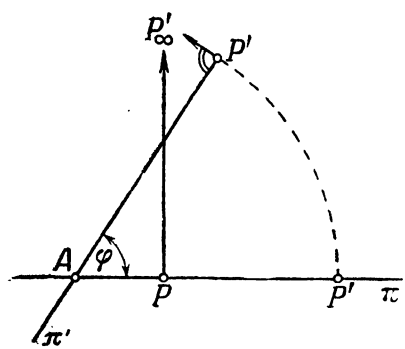


Рис. 15.

Пусть плоскости $\pi$ и $\pi'$ расходятся и имеют общий перпендикуляр $QQ'$. Если совместить плоскость $\pi'$ с плоскостью $\pi$ движением вдоль общего перпендикуляра $QQ'$ без поворота около него, то в плоскости $\pi$ установится конформное соответствие другого вида, переводящее циклы в циклы, и в котором соответствующие точки лежат на одной прямой с точкой $Q$. Это соответствие определяется точкой $Q$ и отрезком $d$, характеризующим кратчайшее расстояние между плоскостями $\pi$ и $\pi'$.

Наконец, если $\pi$ и $\pi'$ параллельны, то после отражения плоскости $\pi'$ на плоскость $\pi$ относительно плоскости симметрии плоскостей $\pi$ и $\pi'$ получим в плоскости $\pi$ конформное соответствие, сохраняющее циклы. Соответствующие точки лежат на прямых, принадлежащих параболическому пучку.

Так как соответствие в плоскости $\pi$ зависит от положения плоскости $\pi'$ относительно $\pi$, а положение плоскости $\pi'$ относительно $\pi$ определяется циклом в плоскости $\pi$, то можно высказать следующую теорему.

Теорема 16. *Каждый цикл в плоскости $\pi$ устанавливает в ней взаимно однозначное соответствие между ориентированными точками, причем пары соответствующих точек лежат на осях этого цикла. Это соответствие является конформным и переводит циклы в циклы.*

# НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЕЩЕСТВЕННЫМ ГЕОМЕТРИЯМ

Б. А. Розенфельд

Неевклидовы геометрии Лобачевского и Римана тесно связаны с комплексными и гиперкомплексными числами: всем хорошо известны интерпретация Пуанкаре неевклидовой плоскости Лобачевского на плоскости комплексного переменного и аналогичная конформная интерпретация Клейна неевклидовой плоскости Римана на той же плоскости*. Как видно из классических работ казанского математика А. П. Котельникова *, трехмерная неевклидова геометрия Лобачевского тесно связана с векторами с комплексными координатами, а трехмерная неевклидова геометрия Римана — столь же тесно с векторами, координатами которых служат не обычные комплексные числа

$$\alpha = a + bi, \quad i^2 = -1, \tag{1}$$

а так называемые *двойные числа*

$$\alpha = a + be, \quad e^2 = +1; \tag{2}$$

эта связь состоит в том, что ориентированные прямые трехмерных неевклидовых пространств Лобачевского и Римана взаимно однозначно изображаются единичными векторами соответственно с комплексными или двойными координатами, причем метрические инварианты двух прямых определяются соответственно комплексным или двойным углом между изображающими эти прямые

* См. Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, М.—Л., 1936, стр. 318—359.

* См., например, А. П. Котельников, Теория векторов и комплексные числа. Сборник «Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике», Гостехиздат, М. — Л., 1950, стр. 7—47.

векторами, а движения неевклидовых пространств изображаются вращениями этих векторов. Как показал И. М. Яглом, для многообразия ориентированных прямых неевклидовой плоскости Лобачевского может быть построена интерпретация, аналогичная интерпретации Пуанкаре на плоскости двойного переменного*. С другой стороны, неевклидовы геометрии Лобачевского и Римана тесно связаны с гиперкомплексными числами, являющимися обобщениями комплексных и двойных чисел — с *кватернионами*

$$\alpha = a + bi + cj + dk, \quad i^2 = j^2 = -1, \quad ij = -ji = k \tag{3}$$

и *псевдокватернионами*

$$\alpha = a + bi + ce + df, \quad i^2 = -1, \quad e^2 = +1, \quad ie = -ei = f; \tag{4}$$

эта связь состоит в том, что движения плоскости Римана могут быть представлены кватернионными преобразованиями

$$'\xi = \alpha\xi\alpha^{-1}, \tag{5}$$

где $\xi$ и $'\xi$ — кватернионы вида $xi + yj + zk$, а движения неевклидовой плоскости Лобачевского могут быть представлены псевдокватернионными преобразованиями того же вида (5), где $\xi$ и $'\xi$ — псевдокватернионы вида $xi + ye + zf$; имеется связь с кватернионами и псевдокватернионами и у трехмерных неевклидовых геометрий*.

В настоящем докладе мы рассмотрим другое геометрическое применение указанных видов комплексных и гиперкомплексных чисел, состоящее в построении новых видов неевклидовых пространств, в которых роль координат точек играют уже не вещественные числа, а комплексные и двойные числа, кватернионы и псевдокватернионы.

## § 1. Некоторые свойства комплексных и двойных чисел, кватернионов и псевдокватернионов

Комплексные и двойные числа, кватернионы и псевдокватернионы обладают следующими общими свойствами.

1°. Для всех этих видов чисел можно определить переход к сопряженному числу, которое соответственно имеет вид

$$\bar{\alpha} = a - bi, \quad \bar{\alpha} = a + be, \quad \bar{\alpha} = a - bi - cj - dk, \quad \bar{\alpha} = a - bi - ce - df, \tag{6}$$

* И. М. Яглом, Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. VII (1948), стр. 276—318.

* См. Ф. Клейн, Цит. соч., стр. 261—264.

причем самосопряженными числами, т. е. числами, для которых $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, являются только вещественные числа.

2°. Для всех этих видов чисел имеют место соотношения

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}, \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}. \tag{7}$$

3°. Для всех этих видов чисел произведение $\alpha\bar{\alpha}$, которое в силу свойства 2° является самосопряженным, а следовательно, в силу свойства 1° является вещественным числом, представляет собой невырожденную квадратичную форму от координат числа $\alpha$:

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2, \ \alpha\bar{\alpha} = a^2 - b^2, \ \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \ \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2. \tag{8}$$

Можно показать, что эти четыре вида чисел являются единственными видами гиперкомплексных чисел с вещественными координатами, удовлетворяющими этим условиям *.

Как видно из (8), квадратичная форма $\alpha\bar{\alpha}$ является положительно определенной для комплексных чисел и кватернионов и знаконеопределенной — для двойных чисел и псевдокватернионов. В последних двух случаях эта форма может быть равна нулю для $\alpha \neq 0$; в этом случае число $\alpha$ является *делителем нуля.*

Для чисел, не являющихся нулем или делителем нуля, можно определить *обратное число*

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}. \tag{9}$$

Число $\alpha\bar{\alpha}$ часто называют квадратом *модуля* числа.

Двойные числа, являющиеся делителями нуля, имеют вид $a(1 \pm e)$. Особую роль играют двойные числа

$$e_+ = \frac{1 + e}{2}, \quad e_- = \frac{1 - e}{2}, \tag{10}$$

обладающие свойствами:

$$e_+^2 = e_+, \quad e_-^2 = e_-, \quad e_+e_- = 0. \tag{11}$$

Всякое двойное число можно записать в виде

$$\alpha = Ae_+ + Be_-, \tag{12}$$

где $A$, $B$ — два вещественных числа, причем

$$\bar{\alpha} = Be_+ + Ae_-, \tag{13}$$

* Это утверждение следует из более общей теоремы Алберта, см. A. A. Albert, Quadratic forms permitting composition. Ann. of math., 43 (1942), стр. 169—177.

а $\alpha\bar{\alpha} = AB$. Формула (11) показывает, что

$$(Ae_+ + Be_-)(Ce_+ + De_-) = ACe_+ + BDe_-,$$

$$\frac{Ae_+ + Be_-}{Ce_+ + De_-} = \frac{A}{C}e_+ + \frac{B}{D}e_-. \tag{14}$$

С другой стороны, кватернионы могут быть представлены комплексными двухрядными матрицами вида $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$, причем каждый кватернион (3) представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а псевдокватернионы могут быть представлены произвольными вещественными двухрядными матрицами $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, причем каждый псевдокватернион (4) представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} a+d & b+c \\ -b+c & a-d \end{pmatrix}. \tag{16}$$

При этом сопряженный кватернион и псевдокватернион представляются матрицами $\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ \bar{B} & A \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$, а квадратичные формы $\alpha\bar{\alpha}$ — детерминантами матриц $A\bar{A} + B\bar{B}$ и $AD - BC$.

Будем обозначать системы комплексных и двойных чисел, кватернионов и псевдокватернионов соответственно через $\Phi(i)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, j)$ и $\Phi(i, e)$.

## § 2. Проективные геометрии над комплексными и двойными числами, кватернионами и псевдокватернионами

Прежде чем определить неевклидовы пространства над рассматриваемыми нами числами, определим *проективные пространства* над этими числами. Если вещественное $n$-мерное проективное пространство $P_n$ можно определить, задавая каждую точку этого пространства системой $n+1$ вещественных чисел $x^0, x^1, \ldots, x^n$, определенных с точностью до общего вещественного множителя, то определим $n$-мерные проективные пространства $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, задавая точки этих пространств системами $n+1$ чисел $x^0, x^1, \ldots, x^n$, являющихся соответственно комплексными и двойными числами, кватернионами и псевдокватернионами, определенными с точностью до общего множителя, являющегося числом того же вида, причем в случае кватернионов и псевдокватернионов, для которых несправедлив переместительный закон, этот множитель должен находиться с одной и той же стороны от чисел $x^0, x^1, \ldots, x^n$, например с правой. В пространствах $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ можно определить прямые, плоскости и гиперплоскости в точности так же, как в $P_n$.

Совершенно аналогично, если вещественное $n$-мерное аффинное пространство $A_n$ можно определить, задавая каждую точку этого пространства системой $n$ произвольных вещественных чисел $X^1, X^2, \ldots, X^n$, можно определить $n$-мерные *аффинные пространства* $A_n(i)$, $A_n(e)$, $A_n(i, j)$ и $A_n(i, e)$, задавая точки этих пространств системами $n$ чисел $X^1, X^2, \ldots, X^n$, являющихся соответственно комплексными и двойными числами, кватернионами и псевдокватернионами. Так же как пространство $A_n$ можно погрузить в пространство $P_n$, считая за координаты $X^i$ точек $A_n$ отношения $\frac{x^i}{x^0}$ координат точек $P_n$, можно погрузить и пространства $A_n(i)$, $A_n(e)$, $A_n(i, j)$ и $A_n(i, e)$ в соответственные пространства $P_n(i)$, $P_n(e)$; $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, считая за координаты $X^i$ точек аффинных пространств отношения $x^i(x^0)^{-1}$ координат точек проективных пространств; точки проективных пространств, для которых $x^0 = 0$ составляют *бесконечно удаленные гиперплоскости* соответственных аффинных пространств. В случае пространств $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ для получения этих пространств, к аффинным пространствам, кроме бесконечно удаленных гиперплоскостей, следует добавить *идеальные области* — геометрические места точек, у которых $x^0$ является делителем нуля. Заметим, что наше определение проективных пространств $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ расходится с общепринятым определением *, при котором проективные пространства во всех случаях определяются как соответственные аффинные пространства, дополненные только бесконечно удаленными гиперплоскостями.

Пространства $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ допускают простые вещественные интерпретации: точки пространства $P_n(e)$ изображаются парами

* См., например, работу W. Wagner, Über die Grundlagen der Projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme. Math. Annalen, 113 (1937), стр. 528—567.

точек вещественного пространства $P_n$, причем точка $P_n(e)$ с двойными координатами

$$x^i = X^i e_+ + Y^i e_- \tag{17}$$

изображается парой точек $P_n$ с координатами $X^i$ и $Y^i$; при замене координат $X^i$ и $Y^i$ координатами $kX^i$ и $lY^i$, координаты $x^i$ умножаются на двойное число $ke_+ + le_-$; при этом прямые, плоскости и гиперплоскости $P_n(e)$ изображаются парами прямых, плоскостей и гиперплоскостей $P_n$. Точки пространства $P_n(i, e)$ изображаются прямыми вещественного пространства $P_{2n+1}$, причем точка $P_n(i, e)$ с псевдокватернионными координатами $x^i$, представляемыми вещественными двухрядными матрицами

$$x^i = \begin{pmatrix} X^i & Y^i \\ X^{n+1+i} & Y^{n+1+i} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

изображается прямой $P_{2n+1}$, проходящей через точки с координатами $X^i$ и $Y^i$; при замене этих точек их линейными комбинациями $AX^i + CY^i$ и $BX^i + DY^i$ матрица (18) умножается справа на матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$; при этом $m$-мерные плоскости (при $m = 1$ прямые, при $m = n - 1$ гиперплоскости) $P_n(i, e)$ изображаются $(2m + 1)$-мерными плоскостями.

Эти интерпретации наглядно показывают, что в пространствах $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ через две точки иногда проходит не одна, а бесконечное множество прямых (если две точки $P_n(e)$ изображаются двумя парами точек $P_n$, имеющими одну общую точку, или если две точки $P_n(i, e)$ изображаются пересекающимися прямыми $P_{2n+1}$), две прямые иногда пересекаются не по одной, а по бесконечному множеству точек (если две прямые $P_n(e)$ изображаются двумя парами прямых $P_n$, имеющими одну общую прямую, или если две прямые $P_n(i, e)$ изображаются двумя 3-мерными плоскостями $P_{2n+1}$, лежащими в 4-мерной плоскости). В то же время при нашем определении пространств $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ две прямые этих пространств, лежащих в одной плоскости, обязательно пересекаются (при упомянутом нами другом определении этих пространств эти две прямые могут не пересекаться, если с нашей точки зрения они пересекаются в идеальной точке).

Заметим, что в силу того, что кватернионы и псевдокватернионы не подчиняются переместительному закону, в пространствах $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ не имеет места *теорема Паппа*.

В пространствах $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, так же как в пространстве $P_n$, можно определить *группу коллинеаций*, имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} 'x^0k &= a^0_0x^0 + a^0_1x^1 + \ldots + a^0_nx^n, \\ 'x^1k &= a^1_0x^0 + a^1_1x^1 + \ldots + a^1_nx^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 'x^nk &= a^n_0x^0 + a^n_1x^1 + \ldots + a^n_nx^n, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где элементы матриц $a^i_j$ являются соответственно комплексными и двойными числами, кватернионами и псевдокватернионами, а $k$ — произвольное число того же вида. Произведения коллинеаций на преобразование $'x^i = \bar{x}^i$ называются *антиколлинеациями*. Коллинеации всех рассмотренных нами пространств переводят прямые в прямые, а плоскости — в плоскости; антиколлинеации обладают этим свойством только в $P_n(i)$ и $P_n(e)$. Произведения коллинеаций на преобразование $u_i = x^i$, ставящее в соответствие каждой точке гиперплоскость с тангенциальными координатами $u_i$, численно равными координатам этой точки, называются *корреляциями*, а произведения антиколлинеаций на такие преобразования называются *антикорреляциями*. Антикорреляции всех рассматриваемых нами пространств переводят $m$-мерные плоскости (при $m = 1$ в прямые) в $(n - m - 1)$-мерные плоскости; корреляции обладают этим свойством (кроме $P_n$) только в $P_n(i)$ и $P_n(e)$. Коллинеации и антиколлинеации, коллинеации и корреляции, коллинеации и антикорреляции, а также все четыре вида этих преобразований также образуют группы. Последние группы в случае пространств $P_n(i)$ и $P_n(e)$ и группы коллинеаций и антикорреляций $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, так же как группы коллинеаций и корреляций $P_n$, называются группами *проективных преобразований* этих пространств.

При рассмотренных нами вещественных интерпретациях пространств $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ проективные преобразования $P_n(e)$ изображаются парами проективных преобразований $P_n$, а проективные преобразования $P_n(i, e)$ изображаются проективными преобразованиями $P_{2n+1}$: если в $P_n(e)$ происходит коллинеация или корреляция с матрицей

$$a^i_j = A^i_je_+ + B^i_je_-, \qquad (20)$$

то одна из двух точек $P_n$ подвергается коллинеации или корреляции с матрицей $A^i_j$, а другая из этих точек подвергается коллинеации или корреляции с матрицей $B^i_j$; а при антиколлинеации или антикорреляции эти точки, кроме того, меняются местами; если в $P_n(i, e)$ происходит коллинеация или антикорреляция с матрицей $a^i_j$, элементы которой представляются вещественными двухрядными матрицами

$$a^i_j = \begin{pmatrix} A^i_j & B^i_j \\ C^i_j & D^i_j \end{pmatrix}, \tag{21}$$

то в $P_{2n+1}$ происходит коллинеация или корреляция с матрицей $A^I_J$, для которой $A^i_{n+1+j} = B^i_j$, $A^{n+1+i}_j = C^i_j$, $A^{n+1+i}_{n+1+j} = D^i_j$.

Точки пространств $A_1(i)$, $A_1(e)$, $A_1(i, j)$ и $A_1(i, e)$ определяются одной координатой, вследствие чего эти пространства можно рассматривать как, соответственно, плоскость комплексного переменного, плоскость двойного переменного, 4-мерное пространство кватернионов и 4-мерное пространство псевдокватернионов. Поэтому пространства $P_1(i)$, $P_1(e)$, $P_1(i, j)$ и $P_1(i, e)$ можно рассматривать как те же плоскости или 4-мерные пространства, дополненные одной бесконечно удаленной точкой и, в случае $P_1(e)$ и $P_1(i, e)$, идеальными точками (играющими роль обратных чисел для делителей нуля), причем коллинеации этих пространств изображаются *дробно-линейными преобразованиями* этих плоскостей или 4-мерных пространств. В частности, так как пространство $P_1(i, e)$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых $P_3$, мы получаем новый метод изучения прямых $P_3$, при котором *каждой прямой $P_3$ ставится в соответствие вещественная двухрядная матрица, а коллинеации $P_3$ изображаются дробно-линейными преобразованиями матриц*. Заметим, что если мы введем в пространства $A_1(i)$, $A_1(e)$, $A_1(i, j)$ и $A_1(i, e)$ метрику, считая расстоянием между числами $\alpha$ и $\beta$ модуль $|\alpha - \beta|$ их разности, то мы превратим эти пространства в *евклидовы или псевдоевклидовы пространства*; при этом группы дробно-линейных преобразований этих пространств, которые, как мы только что видели, играют роль коллинеаций в этих пространствах, в евклидовых и неевклидовых пространствах изображаются группами *конформных преобразований*, переводящих окружности и сферы в окружности и сферы.

## § 3. Новые неевклидовы геометрии над комплексными и двойными числами, кватернионами и псевдокватернионами

Как известно, $n$-мерные неевклидовы пространства Римана и Лобачевского могут быть определены как $n$-мерное проективное пространство $P_n$, в котором задано расстояние $\omega$ между двумя точками $x$ и $y$ по формуле

$$\cos^2\frac{\omega}{r}=\frac{(x,\ y)^2}{(x,\ x)(y,\ y)},\tag{22}$$

где $(x, y)$ — билинейная форма, имеющая вид $x^0y^0+x^1y^1+\ldots+x^ny^n$ в случае геометрии Римана и $-x^0y^0+x^1y^1+\ldots+x^ny^n$ в случае геометрии Лобачевского, а $r$ — радиус кривизны пространства, вещественный в случае геометрии Римана и чисто мнимый в случае геометрии Лобачевского (в последнем случае, если положить $r=qi$, левую часть (22) можно переписать в виде $\operatorname{ch}^2\frac{\omega}{q}$).

Для определения новых неевклидовых пространств с помощью определенных нами проективных пространств $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i,\ j)$ и $P_n(i,\ e)$, определим *эрмитовы формы*

$$\{x,\ y\}=\bar{x}^0y^0+\bar{x}^1y^1+\ldots+\bar{x}^ny^n;\tag{23}$$

эти формы обладают свойством:

$$\{x,\ y\}=\overline{\{y,\ x\}},\tag{24}$$

откуда следует, что форма $\{x,\ x\}$ всегда вещественна. С помощью этих форм в определенных нами проективных пространствах можно определить расстояние $\omega$ по формуле, аналогичной формуле (22):

$$\cos^2\frac{\omega}{r}=\frac{\{x,\ y\}\{y,\ x\}}{\{x,\ x\}\{y,\ y\}},\tag{25}$$

где $r$ — радиус кривизны пространства, который здесь можно считать вещественным числом. Будем называть эти пространства *унитарными неевклидовыми пространствами* и будем обозначать их, соответственно, через $K_n(i)$, $K_n(e)$, $K_n(i,\ j)$ и $K_n(i,\ e)$. Мы называем эти пространства унитарными для того, чтобы отличить их от пространств, определенных по формуле (22), т. е. с помощью не эрмитовых, а билинейных форм. Коллинеации пространств $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i,\ j)$ и $P_n(i,\ e)$, сохраняющих расстояния между точками $K_n(i)$,

$K_n(e)$, $K_n(i, j)$ и $K_n(i, e)$, будем называть *движениями* этих пространств; матрицы этих коллинеаций являются *унитарными* матрицами, т. е. удовлетворяют условиям

$$\bar{a}_i^0 a_j^0 + \bar{a}_i^1 a_j^1 + \ldots + \bar{a}_i^n a_j^n = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{26}$$

В пространствах $K_n(i)$ и $K_n(e)$ можно определить также *движения второго рода* — антиколлинеации $P_n(i)$ и $P_n(e)$, сохраняющие расстояния между точками $K_n(i)$ и $K_n(e)$. Расстояния между точками $K_n(i)$ и $K_n(i, j)$ всегда вещественны, а расстояния между точками $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ могут быть вещественными, чисто мнимыми и равными нулю. Заметим, что если определить в пространствах $P_n(i)$ и $P_n(e)$ расстояние по формуле (22), оно будет, соответственно, комплексным и двойным числом общего вида, а в пространствах $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ невозможно определить расстояние по формуле (22), так как в этих пространствах, в силу того, что кватернионы и псевдокватернионы не подчиняются переместительному закону, нельзя определить билинейных форм, которые при преобразованиях координат оставались бы билинейными формами (в то время как эрмитовы формы в этих пространствах определить можно).

Метрика пространств $K_n(i)$ и $K_n(i, j)$, если рассматривать эти пространства как вещественные 2-мерные и 4-мерные пространства, является *римановой метрикой*, а метрика пространств $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ при таком же рассмотрении этих пространств является *псевдоримановой метрикой*. При этом все эти римановы и псевдоримановы пространства являются частными случаями *симметрических пространств Картана* *, пространство $K_n(i)$ является частным случаем *A-пространства П. А. Широкова* ★, а пространство $K_n(e)$ является частным случаем *расслоенного пространства П. К. Рашевского* ⊘.

---

* См. Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., 1949.

★ П. А. Широков, Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах. Изв. Каз. физ.-мат. о-ва (2) 25 (1925), стр. 86—114. См. также доклад А. П. Широкова на стр. 195—200 настоящего сборника.

⊘ П. К. Рашевский, Скалярное поле в расслоенном пространстве. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. VII (1948), стр. 225—248.

Идея построения новых неевклидовых пространств с помощью эрмитовых форм принадлежит *Сегре* *. Пространства $K_n(i)$ впервые рассматривались *Фубини* и *Штуди* *.

Движения пространств $K_n(i)$, $K_n(e)$, $K_n(i, j)$ и $K_n(i, e)$ можно также рассматривать как коллинеации пространств $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, приводящие в себя геометрическое место точек с уравнением

$$\{x, x\} = 0, \tag{27}$$

мнимое в случае $K_n(i)$ и $K_n(i, j)$ и вещественное в случае $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$; будем называть это геометрическое место точек *абсолютом* пространства.

Пространства $K_1(i)$, $K_1(e)$, $K_1(i, j)$ и $K_1(i, e)$ с радиусом кривизны $r$ изометричны 2-мерным и 4-мерным сферам соответственно в 3-мерных и 5-мерных евклидовых и псевдоевклидовых пространствах.

Пространства $K_n(i)$ и $K_n(e)$ допускают следующую вещественную интерпретацию: как известно, в $(2n+1)$-мерном неевклидовом пространстве Римана $S_{2n+1}$ имеются так называемые *паратактические конгруэнции прямых* — $2n$-параметрические семейства прямых, вдоль которых возможна 1-параметрическая группа движений — паратактических сдвигов; две прямые такой конгруэнции имеют 1-параметрическое семейство общих перпендикуляров одинаковой длины; эту длину можно считать расстоянием между двумя прямыми такой конгруэнции; такие же конгруэнции имеются и в $(2n+1)$-мерном неевклидовом пространстве ${}^{n+1}S_{2n+1}$, расстояние в котором определяется по формуле (22), где $(x, y) = -x^0y^0 - \ldots - x^ny^n + x^{n+1}y^{n+1} + \ldots + x^{2n+1}y^{2n+1}$. *Пространство $K_n(i)$ изометрично паратактической конгруэнции прямых в $S_{2n+1}$, а пространство $K_n(e)$ изометрично паратактической конгруэнции прямых в ${}^{n+1}S_{2n+1}$.*

Пространства $K_n(i, j)$ и $K_n(i, e)$ допускают аналогичную интерпретацию в пространствах $K_{2n+1}(i)$ и $K_{2n+1}(e)$: в этих пространствах также можно определить паратактические конгруэнции прямых —

---

* C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti di Accad. d. sc. Torino, 26 (1890), стр. 40—56.

* G. Fubini, Sulle metriche definite de una forma Hermitiana. Atti d'Istit. Veneto, 63 (1903), стр. 502—513 и E. Study, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet. Math. Annalen, 60 (1905), стр. 321—377.

такие $4n$-параметрические семейства прямых, что каждые две прямые такого семейства имеют 2-параметрическое семейство общих перпендикуляров одинаковой длины; эту длину также можно считать расстоянием между двумя прямыми такой конгруэнции. *Пространство* $K_n(i, j)$ *изометрично паратактической конгруэнции прямых в* $K_{2n+1}(i)$, *а пространство* $K_n(i, e)$ *изометрично паратактической конгруэнции прямых в* $K_{2n+1}(e)$.

## § 4. Применение новых неевклидовых геометрий к вещественным геометриям

Если при вещественной интерпретации пространства $P_n(e)$, когда точки этого пространства изображаются парами точек $P_n$, при коллинеациях $P_n(e)$ точки этих пар подвергаются *независимым* коллинеациям, то при движениях пространства $K_n(e)$ точки этих пар подвергаются коллинеациям, тесно связанным друг с другом: коллинеации $P_n(e)$, являющиеся движениями $K_n(e)$, переводят в себя эрмитову форму

$$\{x, x\} = \bar{x}^0 x^0 + \bar{x}^1 x^1 + \ldots + \bar{x}^n x^n, \tag{28}$$

которая, если положить двойные числа $x^i$ равными $X^i e_+ + Y^i e_-$, имеет вид:

$$\{x, x\} = X^0 Y^0 + X^1 Y^1 + \ldots + X^n Y^n. \tag{29}$$

Поэтому если точка $P_n$ с координатами $X^i$ подвергается коллинеации с матрицей $A^i_j$, то точка $P_n$ с координатами $Y^i$ подвергается коллинеации с матрицей $(A^{-1})^j_i$, т. е. *матрицей, полученной транспонированием матрицы, обратной к* $A^i_j$. Тот же результат мы получим, накладывая условия унитарности (26) на матрицу $a^i_j = A^i_j e_+ + B^i_j e_-$. Но при коллинеации $P_n$ с матрицей $A^i_j$ подвергаются преобразованию с матрицей $(A^{-1})^j_i$ тангенциальные координаты гиперплоскостей $P_n$. Поэтому точки пространства $K_n(e)$ можно представлять конфигурациями «*точка + гиперплоскость*» пространства $P_n$, причем каждое движение $K_n(e)$ изображается преобразованием как точек, так и плоскостей $P_n$, происходящим при одной и той же коллинеации. Группа движений $K_n(e)$ в точности изоморфна группе коллинеаций $P_n$. Заметим, что движения второго рода $K_n(e)$ соответствуют корреляциям $P_n$.

При нашем соответствии конфигурация, состоящая из точки $P_n$ с координатами $X^i$ и гиперплоскости с тангенциальными координатами $U_i$, соответствует точке $K_n(e)$ с координатами

$$x^i = X^i e_+ + U_i e_-. \tag{30}$$

Подставляя координаты $x^i = X^i e_+ + U_i e_-$ и $Y e^i_+ + V_i e_-$ двух точек $K_n(e)$ в формулу (25), мы найдем, что квадрат косинуса расстояния $\omega$ между двумя точками $K_n(e)$ с радиусом кривизны 1 равен проективному инварианту

$$W = \frac{(U_0 Y^0 + U_1 Y^1 + \ldots + U_n Y^n)(V_0 X^0 + V_1 X^1 + \ldots + V_n X^n)}{(U_0 X^0 + U_1 X^1 + \ldots + U_n X^n)(V_0 Y^0 + V_1 Y^1 + \ldots + V_n Y^n)} \tag{31}$$

двух соответствующих конфигураций $P_n$. Этот инвариант равен двойному отношению точек этих конфигураций и точек пересечений гиперплоскостей этих конфигураций с прямой, определяемой их точками.

Точки абсолюта $K_n(e)$ изображаются такими конфигурациями $P_n$, для которых

$$U_0 X^0 + U_1 X^1 + \ldots + U_n X^n = 0, \tag{32}$$

т. е. точки которых лежат в их гиперплоскостях.

Таким образом, *многообразие конфигураций точка + гиперплоскость $P_n$, если за расстояние между двумя конфигурациями принять число $\omega$, квадрат косинуса которого равен их проективному инварианту $W$, изометрично неевклидову пространству $K_n(e)$.*

Заметим, что роль геодезических линий этого многообразия конфигураций с введенной нами метрикой играют последовательности конфигураций, точки которых лежат на одной прямой, а гиперплоскости которых проходят через одну $(n-2)$-мерную плоскость, причем точки этих конфигураций и точки пересечения их прямой с гиперплоскостями этих конфигураций находятся в инволюционном проективном соответствии *.

---

* Конфигурации «точка + плоскость» в пространстве рассматривались (с другой точки зрения) Д. М. Синцовым («Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка», Казань, 1894) и А. П. Котельниковым (см. цит. соч.). Рассматриваемая нами метрика в случае конфигураций «точка + прямая» на плоскости рассматривалась бакинским математиком М. А. Джавадовым в работе «Об одной реализации расслоенного пространства». Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. VIII (1949), стр. 314—327.

Если при вещественной интерпретации пространства $P_n(i, e)$, когда точки этого пространства изображаются прямыми $P_{2n+1}$, при коллинеациях $P_n(i, e)$ эти прямые подвергаются произвольным коллинеациям $P_{2n+1}$, то при движениях $K_n(i, e)$ эти прямые подвергаются коллинеациям специального вида: коллинеации $P_n(i, e)$, являющиеся движениями $K_n(i, e)$, переводят с себя эрмитову форму (28), которая, если положить псевдокватернионы $x^i$ равными матрицам $\begin{pmatrix} X^i & Y^i \\ X^{n+1+i} & Y^{n+1+i} \end{pmatrix}$, имеет вид

$$\{x, x\} = \begin{pmatrix} Y^{n+1} & -Y^0 \\ -X^{n+1} & X^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 & Y^0 \\ X^{n+1} & Y^{n+1} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{pmatrix} Y^{2n+1} & -Y^n \\ -X^{2n+1} & X^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^n & Y^n \\ X^{2n+1} & Y^{2n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= X^0 Y^{n+1} - X^{n+1} Y^0 + \ldots + X^n Y^{2n+1} - X^{2n+1} Y^0. \tag{33}$$

Проективные преобразования $P_{2n+1}$, переводящие в себя кососимметрическую билинейную форму (33), называются *симплектическими преобразованиями*, а пространство $P_{2n+1}$, если за основную группу в нем рассматривать группу этих преобразований, называется *симплектическим пространством* $Sp_{2n+1}$. Поэтому точки $K_n(i, e)$ можно представить прямыми пространства $Sp_{2n+1}$, причем движения $K_n(i, e)$ изображаются симплектическими преобразованиями этого пространства. Группа движений $K_n(i, j)$ в точности изоморфна группе симплектических преобразований $Sp_{2n+1}$.

При нашем соответствии прямая $Sp_{2n+1}$, проходящая через точки с координатами $X^i$, $Y^i$, соответствует точке $K_n(i, e)$ с координатами $x^i = \begin{pmatrix} X^i & Y^i \\ X^{n+1+i} & Y^{n+1+i} \end{pmatrix}$. Подставляя координаты $x^i = \begin{pmatrix} X^i & Y^i \\ X^{n+1+i} & Y^{n+1+i} \end{pmatrix}$ и $y^i = \begin{pmatrix} Z^i & W^i \\ Z^{n+1+i} & W^{n+1+i} \end{pmatrix}$ в формулу (25), мы найдем, что квадрат косинуса расстояния $\omega$ между двумя точками $K_n(i, e)$ с радиусом кривизны 1 равен симплектическому инварианту

$$V = \frac{\begin{pmatrix} X^0 W^{n+1} - X^{n+1} W^0 + \ldots \\ \ldots + X^n W^{2n+1} - X^{2n+1} W^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^0 Y^{n+1} - Z^{n+1} Y^0 + \ldots \\ \ldots + Z^n Y^{2n+1} - Z^{2n+1} Y^0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} X^0 Y^{n+1} - X^{n+1} Y^0 + \ldots \\ \ldots + X^n Y^{2n+1} - X^{2n+1} Y^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^0 W^{n+1} - Z^{n+1} W^0 + \ldots \\ \ldots + Z^n W^{2n+1} - Z^{2n+1} W^0 \end{pmatrix}} \tag{34}$$

двух соответственных прямых $Sp_{2n+1}$. Этот инвариант имеет следующий геометрический смысл: в $S_{2n+1}$ определена корреляция

$$U_0 = X^{n+1},\ U_1 = X^{n+2},\ \ldots,\ U_n = X^{2n+1},$$
$$U_{n+1} = -X^0,\ U_{n+2} = -X^1,\ \ldots,\ U_{2n+1} = -X^n, \qquad (35)$$

называемая *абсолютной нуль-системой* пространства $Sp_{2n+1}$ (симплектические преобразования $Sp_{2n+1}$ можно определить как коллинеации, перестановочные с этой корреляцией); каждой прямой $Sp_{2n+1}$ в этой нуль-системе соответствует некоторая $(2n-1)$-мерная плоскость; две непересекающиеся прямые $Sp_{2n+1}$ и две прямые, являющиеся прямыми пересечения $(2n-1)$-мерных плоскостей, соответствующих этим прямым, с 3-мерной плоскостью, определяемой этими прямыми, принадлежат одному семейству прямолинейных образующих одной линейчатой поверхности 2-го порядка, находящейся в этой 3-мерной плоскости; эти четыре прямые определяют на каждой прямолинейной образующей этой поверхности, принадлежащей к второму семейству, двойное отношение 4 точек пересечения, причем это двойное отношение одно и то же для всех образующих второго семейства; это двойное отношение и представляет собой инвариант $V$.

Точки абсолюта $K_n(i, e)$ изображаются такими прямыми $Sp_{2n+1}$, для которых

$$X^0Y^{n+1} - X^{n+1}Y^0 + \ldots + X^nY^{2n+1} - X^{2n+1}Y^n = 0, \qquad (36)$$

т. е. такими прямыми $Sp_{2n+1}$, которые лежат в соответствующих им $(2n-1)$-мерных плоскостях.

Таким образом, *многообразие прямых $Sp_{2n+1}$, если за расстояние между двумя прямыми принять число $\omega$, квадрат косинуса которого равен их симплектическому инварианту $V$, изометрично неевклидову пространству $K_n(i, e)$.*

Заметим, что роль геодезических линий этого многообразия играют семейства прямолинейных образующих линейчатых поверхностей 2-го порядка, лежащих в 3-мерных плоскостях, содержащих вместе с каждой прямой прямую пересечения этой 3-мерной плоскости с $(2n-1)$-мерной плоскостью, соответствующей данной прямой в абсолютной нуль-системе.

Таким образом, мы показали, что проективная и симплектическая геометрии, которые обычно противопоставлялись неевклидовой геометрии, при надлежащем выборе основного элемента можно рассматривать как неевклидовы геометрии, определенные тем же способом, как и классические неевклидовы геометрии — как геометрии проективного пространства, в котором рассматриваются только те проективные преобразования, которые переводят в себя некоторый абсолют, определяемый уравнением 2-го порядка.

Как известно, неевклидова геометрия Лобачевского была первой непротиворечивой геометрией, отличной от евклидовой. Расширившееся в результате открытия Лобачевского понятие о пространстве привело к построению целого ряда новых геометрий, определяемых различными группами преобразований. В частности, учение о проективных свойствах фигур в нашем обычном пространстве превратилось в геометрию *проективного пространства*, учение о нуль-системах в нашем пространстве превратилось в геометрию *симплектического пространства*. В ряду этих геометрий сама классическая неевклидова геометрия заняла место важного, но частного случая.

Мы видим, что при естественном расширении понятия неевклидовой геометрии с помощью гиперкомплексных чисел эта геометрия представляет собой широкую схему, включающую в себя как проективную, так и симплектическую геометрии.

# III

# ДОКЛАДЫ НА РАСШИРЕННОМ ЮБИЛЕЙНОМ ЗАСЕДАНИИ КАЗАНСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

•

*26 февраля 1951 г.*

## СИСТЕМА КОНГРУЭНЦИЙ $W$ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОИЗВОЛОМ

С. П. Фиников

1°. Террачини назвал системой Бианки двупараметрическое семейство конгруэнций $W$, фокальными поверхностями которых служат два однопараметрических семейства поверхностей, присоединенных к расслояемой паре конгруэнций. Как известно, пара конгруэнций, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, называется расслояемой, если существуют два семейства поверхностей, обладающих тем свойством, что касательные плоскости к поверхностям одного семейства, проведенные в точках пересечения с произвольным лучом первой конгруэнции, проходят через соответствующий луч второй, и наоборот. Отсюда следует, что прямая, соединяющая две соответствующие точки каких-нибудь поверхностей первого и второго семейства, лежит в касательной плоскости и первой поверхности и второй, следовательно, описывает конгруэнцию, фокальными поверхностями которой служат эти две поверхности. Между тем, на всех поверхностях, которые расслояют пару конгруэнций, асимптотические линии соответствуют. Следовательно, всё двупараметрическое многообразие конгруэнций, лучи которых соединяют пары соответствующих точек двух расслояющих поверхностей, состоит из конгруэнций $W$. Это многообразие конгруэнций и называется системой Бианки.

2°. Рассматривая расслояемую пару кривых, я построил новую систему конгруэнций $W$. Пара кривых, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие, называется расслояемой, если в каждой паре соответствующих точек кривые допускают касательный (касание 2-го порядка) линейный комплекс. Если воспользоваться нулевой системой $\Xi$ того касательного линейного комплекса, который находится в инволюции с общим соприкасающимся, то каждой точке соприкасающейся плоскости первой или второй кривой можно присоединить плоскость, которая вместе с этой точкой образует плоский элемент. Таким образом, каждой паре соответствующих точек кривых присоединяется два двупараметрических семейства плоских элементов, где каждый элемент состоит из плоскости и принадлежащей этой плоскости точки (центра). Всего расслояемая пара кривых несет две трехмерные системы $H_3'$ и $H_3''$ плоских элементов. Эти системы (та и другая) расслояемы, т. е. каждая допускает семейство поверхностей, которые в каждой точке касаются плоскости, присоединенной к точке касания, в плоском элементе расслояемой системы.

Оба семейства поверхностей состоят из линейчатых поверхностей $\Sigma$, образующие которых лежат в соприкасающихся плоскостях кривых пары. Эти плоскости устанавливают взаимно однозначное соответствие между прямолинейными образующими поверхностей $\Sigma$. С другой стороны, в точках, лежащих на соответствующих образующих, касательные плоскости соответствуют своим точкам касания в нулевой системе $\Xi$. По теореме взаимности отсюда следует, что в точке пересечения касательной плоскости $\pi'$ поверхности $\Sigma'$ с образующей поверхности $\Sigma''$ касательная плоскость $\pi''$ этой последней пройдет через точку касания плоскости $\pi'$. Следовательно, линия пересечения плоскостей $\pi'$, $\pi''$ соединяет их точки касания $A'$, $A''$ и является общей касательной поверхностей $\Sigma'$, $\Sigma''$. Она описывает конгруэнцию $(A'A'')$ с фокальными поверхностями $\Sigma'$, $\Sigma''$, а поскольку прямолинейные образующие на фокальных поверхностях соответствуют, все $\infty^2$ таких конгруэнций являются конгруэнциями $W$ и образуют систему $W$.

Все поверхности $\Sigma'$ с прямолинейными образующими, лежащими в соприкасающихся плоскостях кривой $C'$, имеют эту линию своей общей асимптотической. Точно так же поверхности $\Sigma''$ касаются друг друга вдоль общей асимптотической $C''$.

Каждой поверхности $\Sigma_i'$ можно поставить в соответствие поверхность $\Sigma_i''$, которая касается ее вдоль общей асимптотической $R_i$.

Любые две линии $R_1$, $R_2$ образуют новую расслояемую пару. Тот же самый линейный комплекс имеет касание второго порядка с линиями $R_i$ в соответствующих точках. Та же самая нулевая система $\Xi$ определит для каждой пары линий $R_1$, $R_2$ две новые трехмерные системы плоских элементов $H_3^{(1)}$, $H_3^{(2)}$, расслояемых двумя семействами линейчатых поверхностей $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$.

Все эти линейчатые поверхности $\Sigma^{(i)}$ собираются в пары поверхностей, касающихся друг друга вдоль общих асимптотических $S_i$. Каждая пара кривых $S_i$ расслояема. Семейство кривых $S_i$ содержит в себе исходную пару линий $C'$, $C''$.

Совокупность всех этих систем $H_3$ образует четырехмерную систему $H_4$, распадающуюся на нулевые системы однопараметрического семейства линейных комплексов, присоединенных к точкам кривых $R_i$ (или $S_i$).

Всё это множество плоских элементов $H_4$ расслояется двупараметрическим семейством линейчатых поверхностей $\Sigma$.

Любая пара таких поверхностей $\Sigma$ (кроме тех, которые касаются друг друга вдоль общей асимптотической) служит фокальными поверхностями конгруэнции $W$. Таким образом, получается более общая система из двупараметрического семейства линейчатых фокальных поверхностей и четырехпараметрического семейства конгруэнций $W$.

Эта система тоже связана с расслояемой парой конгруэнций; именно: соответствующие точки кривых $S_i$ с одной стороны, кривых $R_i$ — с другой, располагаются на паре прямых, которые описывают, таким образом, две линейчатые поверхности, образующие расслояемую пару. Они расслояются семействами линий $(S_i)$ и $(R_i)$ в том смысле слова, что соприкасающаяся плоскость каждой кривой $S_i$, проведенная в точке пересечения ее с образующей $r'$ первой линейчатой поверхности, проходит через соответствующую образующую $r''$ второй, а соприкасающаяся плоскость всякой линии $R_i$ в точке пересечения ее с лучом $r''$ проходит через луч $r'$. Эти две линейчатые поверхности $(r')$ и $(r'')$ можно рассматривать как пару соответствующих линейчатых поверхностей расслояемой пары конгруэнций, которые пересекают расслояющие поверхности этой пары по соответствующим асимптотическим. Эти асимптотические и образуют два семейства линий $(S_i)$ и $(R_i)$.

3°. Общая задача определения систем $W$ из двух однопараметрических семейств поверхностей и двупараметрического семейства конгруэнций приводит к довольно тяжелым дифференцированиям и исключениям; но выделяется специальный случай, когда на всех поверхностях системы установлено взаимно однозначное соответствие одного семейства линий. Все эти линии служат асимптотическими линиями (одного семейства).

Если они прямолинейны, то получается рассмотренный выше случай линейчатых поверхностей. Если они криволинейны, то каждая линия принадлежит некоторому линейному комплексу. При этом все соответствующие линии всех поверхностей принадлежат одному и тому же линейному комплексу таким образом, что системой связано всего однопараметрическое семейство линейных комплексов, нулевые системы которых определяют всё многообразие плоских элементов, расслояемое поверхностями системы. Конгруэнции $W$ этой системы замечательны тем, что они переводят поверхность с асимптотическими одного семейства в линейных комплексах в поверхность того же класса так, что соответствующие асимптотические этого семейства обеих фокальных поверхностей принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

4°. В настоящее время я рассматриваю системы $W$, у которых многообразие конгруэнций зависит от двух функций одного аргумента, а фокальные поверхности образуют два многообразия, каждое из которых определяет поверхности с одной произвольной функцией одного аргумента. Таким образом, здесь произвольная поверхность системы связана с каждой поверхностью другого многообразия посредством одной из конгруэнций системы.

Если к каждому лучу каждой конгруэнции присоединить тетраэдр первого порядка $\{A_i\}$, $(i=1, 2, 3, 4)$, то инфинитезимальные проективные преобразования тетраэдра при перемещении тетраэдра по всем лучам системы определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{1}$$

где $\omega_i^k$ суть линейные формы относительно дифференциалов шести независимых переменных, удовлетворяющие, кроме уравнений структуры, следующей системе

$$\left.\begin{aligned}&\omega_3^4=\omega_1^2,\quad \omega_4^3=\omega_2^1,\quad \omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4=0,\\ &\omega_3^1+\omega_4^2+a_3(\omega_1^3+\omega_2^4)=0,\\ &\omega_3^2+a_1(\omega_1^3+\omega_2^4)+a_2\omega_1^2+a_3\omega_1^4=0,\\ &\omega_4^1+a_4(\omega_1^3+\omega_2^4)-a_2\omega_2^1+a_3\omega_2^3=0;\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

коэффициенты $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ должны удовлетворять четырем уравнениям в частных производных первого порядка (или эквивалентной системе четырех квадратичных уравнений), которые вытекают из уравнений структуры.

Система $W$ определяется с произволом четырех функций одного аргумента. На фокальных поверхностях установлено твердое соответствие (не зависящее от выбора конгруэнций системы) асимптотических линий одного семейства. Все эти асимптотические принадлежат линейным комплексам таким образом, что различные асимптотические линии этого семейства на одной и той же поверхности принадлежат различным линейным комплексам, но соответствующие между собой асимптотические всех поверхностей системы $W$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Отсюда вытекает, что конгруэнции $W$ этой системы, так же как и в системе п. 4°, отличаются той особенностью, что они переводят асимптотические линии одной фокальной поверхности, которые принадлежат линейным комплексам, в асимптотические другой фокальной поверхности, принадлежащие соответственно тем же линейным комплексам.

Система дифференциальных уравнений (2) допускает одномерное характеристическое многообразие

$$\omega_1^3+\omega_2^4=0,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0.$$

На характеристическом многообразии все тетраэдры $\{A_i\}$ перемещаются так, что ребра $A_1A_3$ и $A_2A_4$ скользят по неподвижным прямым.

5°. Система (2) допускает с произволом трех функций одного аргумента решения, на которых $a_2=0$ и $a_3=0$. Они обладают характеристическим многообразием трех измерений, определяемым системой

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0.$$

На этом многообразии точки $A_3$ и $A_4$ неподвижны, а точки $A_1$ и $A_2$ описывают плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$. Проективные перемещения каждой из этих плоскостей зависят только от двух переменных; следовательно, они огибают две поверхности.

# О НОВОМ ИНВАРИАНТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Г. Ф. Лаптев

1°. В настоящем сообщении рассматриваются произвольные погруженные многообразия в однородных пространствах. Исследование носит локальный характер.

Все встречающиеся функции предполагаются аналитическими в рассматриваемых областях. Основным аналитическим аппаратом исследования является исчисление внешних дифференциальных форм. Развивается идея сведе́ния всякого дифференциально-геометрического исследования к изучению полей геометрических объектов, получаемых из некоторого исходного поля путем продолжений и охватов.

2°. Конечную непрерывную группу $G$ с зафиксированной непрерывной подгруппой $H$ (не содержащей нормальных делителей группы $G$) назовем *абстрактным геометрическим элементом* $GH$ с фундаментальной группой $G$ и опорной подгруппой $H$.

Такой элемент $GH$ реализуется как геометрический образ со стационарной подгруппой $H$ в однородном пространстве с фундаментальной группой $G$.

3°. Точку пространства какого-либо представления опорной подгруппы $H$ геометрического элемента $GH$ мы будем называть *геометрическим объектом* этого элемента $GH$, а само пространство представления — *пространством этого объекта*. При этом параметризация преобразований $H$ предполагается везде единой.

В частности, всякий геометрический образ любого однородного пространства, фундаментальная группа которого содержит данную опорную подгруппу $H$, является геометрическим объектом элемента $GH$. Многообразие всех образов, эквивалентных данному относительно опорной подгруппы $H$, является соответствующим пространством представления этой подгруппы.

Если пространство одного объекта ($X$) отображено в пространство другого объекта ($Y$) (с сохранением групповой операции), то говорят, что первый объект *охватывает* второй.

4°. *Абстрактным погруженным многообразием* геометрических элементов мы назовем аналитическое подпространство пространства эквивалентных геометрических элементов $GH$, опорные подгруппы $H$ которых сопряжены между собою.

Во всяком однородном пространстве с фундаментальной группой $G$ такое многообразие реализуется как геометрическое место эквивалентных между собою геометрических образов, стационарные подгруппы которых сопряжены с опорной подгруппой $H$.

На погруженном многообразии определено *поле* геометрического объекта, если это многообразие отображено на подпространство пространства (образующего) геометрического объекта.

Одно поле ($X$) охватывает другое поле ($Y$), если первое отображено на второе так, что каждый локальный объект первого одинаково охватывает соответствующий локальный объект второго.

5°. На всяком погруженном многообразии имеется вполне определенное поле «исходного фундаментального геометрического объекта». Исходя из него, можно строить бесконечную последовательность продолженных полей (*«последовательность фундаментальных полей* погруженного многообразия»), из которых каждое последующее охватывает все предыдущие. Эта последовательность строится в совершенно инвариантной аналитической форме при помощи лишь рациональных алгебраических операций, применяемых по вполне определенному шаблону.

На некотором этапе такого построения получается *«основное фундаментальное поле»*, которое, как и любое следующее за ним, охватывает поля с любыми образующими элементами.

Опыт показывает, что такие охваты находятся алгебраическим путем. Однако пока лишь можно утверждать, что эта операция сводится каждый раз к решению вполне интегрируемой пфаффовой системы.

Все дифференциально-геометрические построения, внутренне связанные с многообразием, могут-быть получены таким путем. Получается единый инвариантный метод дифференциально-геометрических исследований любых погруженных многообразий.

Общую задачу дифференциально-геометрического исследования погруженного многообразия можно сформулировать как задачу изучения его фундаментальных полей и полей, ими охватываемых.

Примерами таких полей на поверхности евклидова пространства могут служить поля значений коэффициентов первой и второй квадратичных форм, конгруэнции метрических и аффинных нормалей, семейство проективных канонических пучков, семейство квадрик Ли и т. д.

6°. В общем случае на погруженном многообразии существует фундаментальное поле, которое определяет погруженное многообразие с точностью до преобразования фундаментальной группы $G$ и играет здесь роль пары квадратичных форм метрической теории поверхности.

7°. Предложенный метод полностью приложим к изучению погруженных многообразий в пространствах с различными связностями.

8°. В настоящее время имеются приложения метода к построению дифференциальной геометрии $n$-мерной поверхности $\frac{n(n+3)}{2}$-мерного аффинного пространства, гиперповерхности конформного пространства, гиперповерхности пространства проективной связности.

При этом, в частности, получены в инвариантной аналитической форме основные конструкции обычной проективно-дифференциальной геометрии поверхности.

9°. В самое последнее время А. М. Васильев обобщил метод и на однородные пространства с бесконечной фундаментальной группой. Это обобщение открывает новые перспективы в дифференциальной геометрии.

10°. Все изложенные исследования протекали в руководимом С. П. Финиковым семинаре по дифференциальной геометрии при Московском государственном университете.

# О ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ

А. З. Петров

Как известно, в общей теории относительности метрика пространственно-временного континуума, задаваемая квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1}$$

определяется распределением и движением материи. Решение основного вопроса теории поля — определение поля в зависимости от поведения материи, — предложенное Эйнштейном в 1915 г., выражается уравнениями поля

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = -\lambda T_{ij},$$

которые связывают, таким образом, фундаментальный тензор $g_{ij}$ с тензором Риччи $R_{ij}$ и тензором импульса-энергии $T_{ij}$.

Важный частный случай поля определяется тогда, когда тензор импульса-энергии отличается лишь скалярным множителем от фундаментального тензора и, следовательно, уравнения поля тяготения будут иметь вид

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij}. \tag{2}$$

Например, таким уравнениям удовлетворяет поле в пустом пространстве, или поле точечных масс вне точек расположения масс, когда $T_{ij} = 0$ и, следовательно, $R = R_i^i = 0$ и уравнения (2) принимают вид

$$R_{ij} = 0.$$

Римановы многообразия, определяемые уравнениями (2), называют обычно в дифференциальной геометрии *пространствами Эйнштейна*. Поле называют *реальным*, если оно соответствует некоторому реальному распределению материи в пространстве. Как необходимое условие реальности поля тяготения нужно потребовать, чтобы линейный элемент (1) в точке определял геометрию Минковского *, то-есть

$$(g_{ij})_P = \begin{Vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Такие $V_n$, определяемые условиями (2), обозначим символом $T_n$ и, имея в виду приложения, положим $n=4$. Определение возможных типов полей $T_4$ сводится к нахождению общего решения системы 10 уравнений (2) с частными производными второго порядка с 10 неизвестными функциями от 4 аргументов. Можно назвать более двадцати работ, посвященных отысканию решений системы (2) при тех или иных частных предположениях. В этой работе ставится задача определить общее решение уравнений (2).

Произведем предварительно классификацию многообразий $T_4$. Для этого выделим в $T_4$ поля тензоров с четным числом ковариантных и контравариантных валентностей. Потребуем, чтобы индексы разбивались на независимые антисимметрические пары и, сопоставив каждой такой паре один собирательный индекс, обозначим его греческой буквой. Тогда можно убедиться, что таким образом каждой точке $P$ в $T_4$ сопоставляется локальная центроаффинная геометрия Клейна ⋆, $\frac{n(n-1)}{2}=6$ измерений с группой

$$\eta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\eta^{\alpha}, \quad |A^{\alpha'}_{\alpha}| \neq 0, \quad A^{\alpha}_{\beta'}A^{\beta'}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$
$$A^{\alpha'}_{\alpha} \to 2A^{i'j'}_{[ij]}, \quad (A^{i'}_{i}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_P.$$

Введем в этом многообразии, которое назовем *бивекторным*, метрику при помощи неособенного тензора

$$g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} \to g_{\alpha\beta}, \qquad |g_{\alpha\beta}| \neq 0,$$

который будет иметь в точке сигнатуру вида $---+++$. Введем также одно обобщение понятия римановой кривизны в двумерном направлении

$$K = \frac{R_{ijkl}\,v^{ij}\,v^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})v^{ij}v^{kl}} \to \frac{R_{\alpha\beta}\,v^{\alpha}\,v^{\beta}}{g_{\alpha\beta}\,v^{\alpha}\,v^{\beta}},$$

---

* Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

⋆ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, Гостехиздат, М. — Л., 1950.

которое получится, если в этой формуле снять требование простоты бивектора $v^{ij}$, и назовем $K$ — *бивекторной кривизной* $V_n$.

Необходимые и достаточные условия того, чтобы $K$ принимала безусловно-стационарные значения, выражаются уравнениями

$$(R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta}) v^{\beta} = 0,$$

то-есть $v^{\beta}$ определяют главные направления тензора $R_{\alpha\beta}$. Ввиду этого классификация $T_4$ сводится к классификации пары тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в 6-мерном пространстве, когда тензор $g_{\alpha\beta}$ неособенный и неопределенный. Отсюда следует*, что *верхняя граница числа возможных типов* $T_4$ *не превышает* 23, *элементарные делители матрицы*

$$\| R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta} \| \tag{4}$$

*могут быть не простыми, а характерные числа — комплексными.*

Если каждой точке $T_4$ сопоставить комплексное 4-мерное многообразие, для которого

$$g_{ii} = 1, \quad g_{ij} = 0 \qquad (i \neq j),$$

то при некоторой нумерации собирательных индексов и соблюдении условий поля (2) получим, что матрица (4) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} M & N \\ N & M \end{Vmatrix},$$

то-есть она *симметрично-сдвоенная*; такого рода матрицами, при дополнительном условии, что они ортогональны, занимались В. Ф. Каган и Я. С. Дубнов, исследуя лоренцовы преобразования*.

Основываясь на этом факте, можно показать, что имеет место теорема: *в данной точке* $T_4$ *матрица* (4) *будет либо* — (a) — *простого типа с характеристикой* [111111], *либо* — (б) — *не простого типа с характеристикой* [(33)], *а характерные числа ее, которые будут стационарными бивекторными кривизнами* $T_4$, *связаны условиями*

$$\underset{s}{K} = \underset{s}{\alpha} + i\underset{s}{\beta}; \quad \underset{s+3}{K} = \underset{s}{\alpha} - i\underset{s}{\beta}; \quad \sum_{s} \underset{s}{\alpha} = \varkappa, \quad \sum_{s} \underset{s}{\beta} = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

---

* А. З. Петров, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, 109, 4, 1948, стр. 37.

* В. Ф. Каган, О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцовы преобразования, 1, 1926; 2, 1927. Я. С. Дубнов, О симметрично-сдвоенных ортогональных матрицах, 1927.

*и, следовательно, для характеристики не простого типа все они равны* $\frac{\varkappa}{3}$.

Дальнейшее исследование матрицы (4) основывается на решении вопроса об одновременном приведении к каноническому виду пары тензор — бивектор *. Определив структуру бивекторов $v^{ij} \to v^{\alpha}$, то-есть векторов главных направлений $R_{\alpha\beta}$, и имея в виду, что каждое вещественное преобразование Лоренца, оставляющее инвариантными области *длин* и *длительностей*, эквивалентно трем пространственным вращениям с зеркальными отображениями и трем *специальным* преобразованиям Лоренца *, можно убедиться, что матрицу (4) можно привести к виду

$$\begin{Vmatrix} M & N \\ N & M \end{Vmatrix},$$

где соответственно

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & M=\begin{Vmatrix} -\alpha_1 & & \\ & -\alpha_2 & \\ & & -\alpha_3 \end{Vmatrix}; \quad N=\begin{Vmatrix} -\beta_1 & & \\ & -\beta_2 & \\ & & -\beta_3 \end{Vmatrix}; \\ \text{(б)} & M=\begin{Vmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varkappa}{3} & \pm\sqrt{2} \\ 0 & \pm\sqrt{2} & -\frac{\varkappa}{3} \end{Vmatrix}; \quad N=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm\sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

а *неголономный репер, для которого имеют место эти соотношения, определяется с* 4 *степенями свободы.*

Вследствие этого можно утверждать, что *существует не более* 7 *типов реальных полей тяготения.*

Их можно классифицировать следующим образом.

$T_4$ *простого типа с вещественными стационарными кривизнами*, определяемые характеристиками:

1. $[(11)(11)(11)]$; 2. $[(1111)(11)]$; 3. $[(111111)]$.

$T_4$ *простого типа с комплексными стационарными кривизнами, характеристики которых имеют вид*

4. $[\overline{11}\,\overline{11}\,\overline{11}]$; 5. $[\overline{(11)(11)}, \overline{11}]$; 6. $[\overline{(11)(11)}(11)]$.

---

* А. З. Петров, Уч. зап. Каз. ун-та, 100, 3, 1950, стр. 5.

* И. А. Схоутен и Д. Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М. — Л., 1939.

*$T_4$ не простого типа*, отвечающие характеристике

7. $[(33)]$.

Здесь надчеркнуты числа, соответствующие комплексно-сопряженным элементарным делителям.

После того как получена классификация $T_4$, вопрос о нахождении общего решения уравнений поля (2) приводится к определению голономной системы отнесения, наиболее тесным образом связанной с особенностями каждого из возможных типов $T_4$.

Рассмотрим $T_4$ первого типа. Воспользуемся коэффициентами вращения Риччи

$$\gamma_{ijk} = \nabla_q \underset{i}{\xi^p} \underset{j}{\xi_p} \underset{k}{\xi^q},$$

где $\underset{i}{\xi^p}$ — координатные векторы неголономного репера, для которого имеют место соотношения (2). Можно утверждать, что $T_4$ *первого типа допускает голономную систему координат, относительно которой конгруэнция $\underset{4}{\xi^i}$, соответствующая времени, — геодезическая.*

Доказательство этого утверждения следует из того, что условия, определяющие такую систему отнесения, можно выразить через коэффициенты вращения. Каждая из конгруэнций $\underset{k}{\xi^i}$ зависит от 4 произвольных функций, обеспечивающих 4 степени свободы в выборе неголономного репера. Получающуюся таким образом систему уравнений с частными производными первого порядка с 4 неизвестными функциями можно привести к форме, удовлетворяющей всем условиям теоремы существования Коши-Ковалевской *.

Пользуясь этой голономной системой отнесения и накладывая условия поля (2) и (5), можно убедиться, что и конгруэнции, соответствующие векторам $\underset{k}{\xi^i}$ $(k = 1, 2, 3)$, будут $V_3$-*образующими*, то-есть $T_4$ первого типа допускает голономную ортогональную систему координат.

Производя интегрирование уравнений поля (2) в этой голономной системе отнесения, получим общее решение для данного типа $T_4$. Для формулировки получаемого при этом результата введем предварительно одно понятие.

* С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

Как показал Коттон, любое $V_3$ допускает голономную ортогональную систему координат. Риччи, рассматривая просто транзитивные группы движений в $V_n$, ввел термин *регулярные* $V_n$ для тех римановых многообразий, у которых ортогональные составляющие тензора кривизны в неголономной ортогональной системе отнесения, имеющие более двух различных индексов, обращаются в нуль. По аналогии с этим, назовем *голономно-регулярными* $V_n$ римановы пространства, которые обладают этим свойством относительно голономной ортогональной системы отнесения. Определение таких $V_3$ является обобщением проблемы Дарбу о триортогональных системах поверхностей на римановы многообразия. Обозначим составляющие фундаментального тензора голономно-регулярного $V_3$ определенной метрики следующим образом:

$$\overset{*}{g}_{\alpha\alpha} = \overset{*}{H}{}^2_\alpha, \quad \overset{*}{g}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3;\quad \alpha \neq \beta).$$

Тогда общее решение уравнений поля (2) для рассматриваемого типа $T_4$ определится следующей теоремой:

*$V_4$ будут $T_4$ первого типа тогда и только тогда, если*: 1) *они допускают голономную ортогональную систему отнесения, для которой конгруэнция, соответствующая времени $x^4$, — геодезическая, то-есть*

$$g_{\alpha\alpha} = l_\alpha H^2_\alpha; \quad g_{\alpha\beta} = 0; \quad l_\alpha = -1; \quad l_4 = +1; \quad H_4 = 1;$$
$$(\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

*и* 2) *коэффициенты Ламе*

$$H_\alpha = H_\alpha(x^4,\ \overset{*}{H}_\alpha),$$

*где зависимость $H_\alpha$ от $\overset{*}{H}_\alpha$ определяется вполне интегрируемой системой*

$$\frac{\partial_\beta H_\alpha}{H_\beta} = \frac{\partial_\beta \overset{*}{H}_\alpha}{\overset{*}{H}_\beta} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3;\ \alpha \neq \beta),$$

*решения которой при заданных правых частях зависят от трех произвольных функций одного аргумента, то-есть определяются с точностью до преобразований типа Комбескюра: $H_\alpha$ как функция времени $x^4$ определится системой обыкновенных уравнений*

$$\frac{H''_\alpha}{H_\alpha} - \frac{H'_\beta H'_\gamma + r_\alpha}{H_\beta H_\gamma} = 0, \qquad \sum_{\beta, \gamma \neq} \frac{1}{H_\beta H_\gamma}(H'_\beta H'_\gamma - r_\alpha) = 0 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq),$$

*где*

$$r_\alpha = \overset{*}{R}_{\beta\gamma\beta\gamma}(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

— *составляющие тензора кривизны любого голономно-регулярного* $V_3$.

Если, в частности, такое $T_4$ стационарно, то-есть $H_\alpha$ не зависят от времени, то оно будет плоским; как это будет видно далее, здесь имеем случай вырождения к $T_4$ третьего типа. Если же $H_\alpha$ будут зависеть только от времени, то они выражаются элементарными функциями, и получаемые при этом три решения будут различны в зависимости от того, будет ли $\varkappa \gtreqless 0$. Как особое решение при этом получается пространство Лобачевского и, следовательно, здесь также имеет место случай вырождения к 3 типу.

При наложении дополнительных условий из этого общего результата получаются частные решения уравнений (2), указанные Казнером, и некоторые другие.

Точно так же, используя произвол в выборе неголономного репера для $T_4$ второго типа, можно для этого многообразия определить голономную ортогональную систему отнесения, относительно которой *общее решение уравнений поля* (2) *выразится следующей формой линейного элемента*:

$$ds^2 = \frac{1}{(\lambda + \nu)^2}\,[\mathrm{I}(x^1,\ x^2) + \mathrm{II}(x^3,\ x^4)], \tag{6}$$

где $\mathrm{I}(x^1,\ x^2)$ и $\mathrm{II}(x^3,\ x^4)$ — *бинарные дифференциальные формы, первая из которых определенно-отрицательная, а вторая — неопределенная, то-есть это — конформно-приводимые пространства.* При этом скаляр $\lambda$ линейно выражается через гауссову кривизну поверхности, определяемой дифференциальной формой I. Такая же связь имеет место между скаляром $\nu$ и формой II. Кроме того, уравнения поля приводят к выводу, что эти скаляры можно выразить через эллиптические функции Вейерштрасса $\wp$ от криволинейных координат $x^1$, $x^4$, соответственно.

Подавляющее число известных в литературе частных решений уравнений поля (2), например хорошо известное решение Шварцшильда, решение Коттлера, решение Дельзарта и другие, относятся к этому типу поля и могут быть просто получены из (6) при некоторых дополнительных ограничениях.

Рассмотрим еще $T_4$ третьего типа с характеристикой [(111111)]. Так как в этом случае главные направления тензора $R_{\alpha\beta}$ неопределенные, то

$$R_{\alpha\beta} = K g_{\alpha\beta}$$

или, если записать это соотношение в обычных индексах,

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

то-есть $T_4$ *третьего типа являются пространствами постоянной кривизны, в каждой точке которых имеет место геометрия Минковского.*

Аналогично может быть проведено исследование для других типов $T_4$, на котором не будем здесь останавливаться.

# ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. П. Норден

Нами были рассмотрены* основные понятия биаксиальной геометрии, фундаментальная группа которой есть подгруппа проективных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих две сопряженные сильно мнимые *абсолютные прямые*. Прямые пересекающие обе *абсолютные прямые*, были названы несобственными, а теперь мы их будем называть *особыми*. Абсолютные прямые являются двойными прямыми *абсолютной пространственной инволюции* эллиптического типа, а образы называются *сопряженными*, если они сопряжены по отношению к абсолютной инволюции. На всякой особой прямой эта инволюция определяет эллиптическую меру расстояний между точками, причем считается, что расстояние между сопряженными точками равно $\frac{\pi}{2}$.

Особые прямые образуют линейную конгруэнцию, которая принадлежит *абсолютному пучку комплексов*. В этом пучке тоже можно ввести эллиптическую меру угла между двумя такими комплексами, который считается равным углу между принадлежащими им прямыми. Прямые, принадлежащие одному комплексу абсолютного пучка, мы называли *параллельными*, а теперь будем называть *псевдопараллельными*.

Рассмотрим теперь четырехмерное пространство, фундаментальная группа которого есть подгруппа аффинных преобразований, сохраняющих две бесконечно удаленные сильно мнимые

---

* А. П. Норден, Пространства линейной конгруэнции. Математический сборник, т. 24 (66) : 3, 1949.

сопряженные прямые. Мы будем называть такое пространство *биаффинным* и обозначать символом $B_4$.

Рассматривая совокупность направлений, исходящих из каждой точки $B_4$, как проективное пространство $P_3$, мы можем считать, что в этом $P_3$ определена биаксиальная угловая метрика. Эта метрика задается тензором абсолютной инволюции $G_i^j$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$G_k^i G_j^k = -\delta_j^i; \quad G_k^k = 0. \tag{1}$$

Сопряженность векторов характеризуется условием

$$\tilde{a}^i = G_k^i a^k. \tag{2}$$

Плоскость, содержащую два сопряженных вектора, или, иначе говоря, проходящую через особую бесконечно удаленную прямую, назовем *особой*. Абсолютная инволюция определяет на такой плоскости евклидову геометрию.

Через всякую точку $B_4$ проходит $\infty^2$, через всякую прямую одна, а всякая трехмерная плоскость содержит $\infty^1$ особых плоскостей, причем в последнем случае все они параллельны между собою. Параметрическое уравнение особой плоскости имеет вид

$$x^i = c^i + \lambda a^i + \mu \tilde{a}^i, \tag{3}$$

где $a^i$ и $\tilde{a}^i$ — сопряженные векторы.

Для двух плоскостей, не являющихся особыми, можно говорить об угле между ними, считая его равным углу между их бесконечно удаленными прямыми. Если этот угол равен нулю, то обыкновенные плоскости называются *псевдопараллельными*. Параллельные неособые плоскости, очевидно, будут также и псевдопараллельными.

*Репером биаффинных движений*, т. е. преобразований фундаментальной группы $B_4$, является фигура, состоящая из точки (начало координат) и четырех векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, выбранных так, что $a_1$ и $a_3$ не принадлежат одной особой плоскости, а $a_2$ и $a_3$ соответственно им сопряжены.

Будем называть *каноническими* координаты точки $B_4$ по отношению к биаффинному реперу и обозначать их через $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$. Движение сводится к такому точечному отображению $B_4$ на себя, при котором соответственные точки имеют одинаковые координаты относительно двух различных реперов. Кроме простых параллельных переносов, движениями будут также *биаффинные вращения*, т. е. такие преобразования, при которых начало координат остается неизменным. Вращение определяется неособенной матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Матрица канонических координат тензора $G_i^j$ имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Группа движений $B_4$ зависит от двенадцати параметров.

Будем называть *соответствием* $(AB)$ такое соответствие между точками $B_4$ и точками комплексной аффинной плоскости $A_2$, при котором

$$\left.\begin{aligned} X &= x^1 + ix^2, \\ Y &= y^1 + iy^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $x^i$ — канонические координаты точки $B_4$, а $X$ и $Y$ — декартовы координаты соответствующей точки $A_2$.

При отображении $AB$ особая плоскость (3) переходит в прямую $A_2$, выражающуюся уравнением

$$\vec{R} = \vec{C} + (\lambda + i\mu)\vec{A}, \tag{7}$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор текущей точки; векторы $\vec{C}$ и $\vec{A}$ соответствуют векторам $c^i$ и $a^i$, а внутренняя геометрия плоскости совпадает с евклидовой геометрией плоскости комплексного переменного $\lambda + i\mu$.

Параллельным особым плоскостям $B_4$ соответствуют параллельные прямые $A_2$. При отображении $(AB)$ параллельному переносу в $B_4$ соответствует параллельный перенос в $A_2$, а биаффинному вращению, определяемому матрицей (4), — однородное аффинное преобразование, выражаемое матрицей

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом, *группа биаффинных движений $B_4$ изоморфна группе аффинных преобразований комплексной плоскости.*

В произвольных криволинейных координатах биаффинная метрика определяется заданием тензора $G_i^j$ абсолютной инволюции, удовлетворяющего условиям (1), причем ковариантная производная этого тензора равна нулю.

Будем называть *биконформным* такое дифференцируемое отображение $B_4$ на себя, которое сохраняет тензор $G_i^j$. Если это отображение выражается уравнениями

$$y^i = y^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4),$$

то для его биконформности необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial y^q}{\partial x^i} G_q^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^p} G_j^p. \tag{9}$$

Если $x^i$ и $y^i$ — канонические координаты, то эти соотношения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} &= \frac{\partial y^2}{\partial x^2}, & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} &= -\frac{\partial y^2}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} &= \frac{\partial y^4}{\partial x^2}, & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} &= -\frac{\partial y^4}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} &= \frac{\partial y^2}{\partial x^4}, & \frac{\partial y^1}{\partial x^4} &= -\frac{\partial y^2}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^3} &= \frac{\partial y^4}{\partial x^4}, & \frac{\partial y^3}{\partial x^4} &= -\frac{\partial y^4}{\partial x^3}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Но условия (10) необходимы и достаточны для того, чтобы функции

$$\left.\begin{aligned} y^1 + iy^2 &= \varphi(x^1 + ix^2,\quad x^3 + ix^4), \\ y^3 + iy^4 &= \psi(x^1 + ix^2,\quad x^3 + ix^4) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

были аналитическими *.

---

* Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Гостехиздат, М. — Л., 1948, стр. 15.

Итак, *для того, чтобы отображение* $B_4$ *на себя было биконформным, необходимо и достаточно, чтобы в соответствии* ($AB$) *ему отвечало такое отображение* $A_2$ *на себя, при котором декартовы координаты преобразованных точек выражаются через декартовы координаты данных точек по формулам* (11), *как аналитические функции двух комплексных переменных.*

Рассматривая проективное отображение $A_2$ на себя и применяя отображение ($AB$), мы можем определить соответствующую группу преобразований в $B_4$, которые будем называть *бипроективными.*

При этих преобразованиях канонические координаты выражаются друг через друга некоторыми дробно-квадратичными соотношениями. Чтобы бипроективные преобразования давали взаимно однозначное отображение пространства $B_4$ на себя, его нужно считать дополненным особой несобственной плоскостью. При этом условии бипроективное преобразование является таким биконформным преобразованием, при котором все особые плоскости снова переходят в особые плоскости.

Теория кривых пространства $B_4$ основывается на построении сопровождающего биаффинного репера кривой. Этот репер выбирается существенно различным способом для *не особых* кривых, т. е. таких линий, касательная особая плоскость которых не принадлежит соприкасающейся плоскости трех измерений, и *особых* кривых, для которых это условие не выполнено. Неособые кривые определяются заданием трех инвариантов (кривизн) в функции параметра (биаффинной дуги). Для особых кривых число этих инвариантов понижается до двух. Кривые с особой соприкасающейся плоскостью будут плоскими линиями, лежащими в этой плоскости, и их теория совпадает с теорией кривых евклидовой плоскости.

Отображение ($AB$) позволяет считать, что теория кривых $B_4$ есть, вместе с тем, и теория нитей комплексной аффинной плоскости.

Среди двумерных поверхностей $X_2$ пространства $B_4$ будем различать *особые* и *неособые*. Первые из них характеризуются тем, что их касательные плоскости — особые и они соответствуют аналитическим кривым комплексной $A_2$.

В дальнейшем мы будем говорить только о неособых поверхностях, предполагая, что их касательная плоскость неособая. Эти поверхности соответствуют так называемым «конгруэнциям» $A_2$ *. Чтобы нормализовать ⋆ $X_2$, достаточно взять за нормаль второго рода бесконечно удаленную прямую ее касательной плоскости, а за нормаль первого рода — плоскость, ортогональную касательной плоскости, проходящую через точку прикосновения. Обозначая радиус-вектор этой точки через $x$, сопряженный ему вектор — через $\tilde{x}$, криволинейные координаты — через $u^\alpha$ и полагая

$$x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha},$$

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u^\alpha},$$

мы получим основные дифференциальные уравнения поверхности в следующем виде:

$$\nabla_\beta x_\alpha = \partial_\beta x_\alpha - G^\gamma_{\beta\alpha} x_\gamma = b^\gamma_{\cdot\beta\alpha} \tilde{x}_\gamma, \tag{12}$$

а условия их интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned} b^\gamma_{[\beta\alpha]} &= 0, \\ \nabla_{[\delta} b^\gamma_{\cdot\beta]\alpha} &= 0, \\ R_{\delta\gamma\beta\cdot}^{\quad\;\alpha} &= 2b^\sigma_{\cdot\beta[\gamma} b^\alpha_{\cdot\delta]\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности $\dot{x}_2$, а тензор $R_{\delta\gamma\beta\cdot}^{\quad\;\alpha}$ есть ее тензор кривизны.

Условия (13) равносильны обращению в нуль тензора кривизны связностей с комплексными коэффициентами

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = G^\gamma_{\alpha\beta} \pm i b^\gamma_{\alpha\beta} \tag{14}$$

и, таким образом, *внутренняя связность обыкновенной поверхности $X_2$ является средней между двумя евклидовыми связностями с комплексно-сопряженными коэффициентами.* Эта связность будет эквиаффинной. Тензор $b^\gamma_{\cdot\alpha\beta}$ можно рассматривать как тензор аффинной деформации, соответствующей отображению одной комплексной плоскости на другую. Поверхность можно классифицировать по характеру этого отображения, которое мы будем называть *характерным.*

---

* T. Coolidge, The Geometry of the Comlex Domain, Oxford, 1924.

⋆ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, Гостехиздат, М. — Л, 1950.

Бесконечно удаленные прямые касательных плоскостей $X_2$ образуют конгруэнцию в трехмерной несобственной плоскости, а ее развертывающиеся поверхности соответствуют сети *фокальных линий* $X_2$. Тензор этой сети определяется из уравнений

$$b^{\gamma}_{.\alpha\beta}a^{\alpha\beta} = 0^{*}. \tag{15}$$

Эта сеть не определена для $X_2$, принадлежащей трехмерной плоскости, а геометрия таких $X_2$ совпадает с геометрией поверхностей в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, абсолют которого распадается на два мнимосопряженных пучка.

Будем называть *квазиасимптотическими* такие линии, соприкасающаяся плоскость которых псевдопараллельна касательной плоскости $X_2$. Дифференциальное уравнение этих линий имеет вид

$$b^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma}\, du^{\alpha}\, du^{\beta}\, du^{\gamma} = 0. \tag{16}$$

Для того чтобы квазиасимптотические были вместе с тем и геодезическими линиями внутренней связности, необходимо и достаточно, чтобы они принадлежали особой плоскости. При бипроективном преобразовании квазиасимптотические и геодезические линии сохраняются. В связи с этим общим положением находится и тот факт, что $X_2$ с неопределенными квазиасимптотическими линиями являются бипроективными преобразованиями обыкновенных плоскостей. Характерное отображение для таких поверхностей будет проективным.

Угол смежности между бесконечно близкими касательными плоскостями $X_2$

$$d\varphi = b_{\beta}\, du^{\beta} = b^{\alpha}_{.\alpha\beta}\, du^{\beta}, \tag{17}$$

вследствие чего вдоль линий

$$b_{\beta}\, du^{\beta} = 0 \tag{18}$$

касательные плоскости $X_2$ псевдопараллельны. Для $X_2$, удовлетворяющих условию

$$b_{\beta} = 0, \tag{19}$$

все касательные плоскости псевдопараллельны между собою, а их характерное соответствие сохраняет площади.

---

*) Индексы перебрасываются с помощью бивектора.

Сеть переноса характеризуется тем, что она является одновременно и фокальной и чебышевской сетью поверхности переноса. Поверхности переноса нулевой кривизны образуются переносом одной особой плоской кривой по другой такой же кривой. Характерное отображение для таких поверхностей переноса может рассматриваться как конформное отображение одной комплексной евклидовой плоскости на другую.

# К ВОПРОСУ ОБ $A$-ПРОСТРАНСТВАХ

А. П. Широков

Рассмотрим аффинное векторное пространство четного числа измерений $2n$, а также $2n$-вектор $\varepsilon^{i_1 \dots i_{2n}}$ и его взаимный $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2n}}$ так, что

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_{2n}} \varepsilon_{k_1 \dots k_{2n}} = \delta^{i_1 \dots i_{2n}}_{k_1 \dots k_{2n}}.$$

С помощью этого $2n$-вектора мы можем перебрасывать индексы у всякого $n$-вектора по формулам

$$V^{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n \alpha_1 \dots \alpha_n} V_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

$$V_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n i_1 \dots i_n} V^{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Если даны два простых $n$-вектора $V^{i_1 \dots i_n}$ и $W^{i_1 \dots i_n}$, не имеющих общих векторов, то нетрудно получить формулу

$$\frac{1}{n} \delta^j_i V^{(\alpha)} W_{(\alpha)} = V^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} W_{i\alpha_2 \dots \alpha_n} + (-1)^n W^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} V_{i\alpha_2 \dots \alpha_n}.$$

Пространство псевдовекторов нашего векторного пространства образует проективное пространство $(2n-1)$ измерений, в котором $n$-векторы $V^{i_1 \dots i_n}$ и $W^{i_1 \dots i_n}$ определяют две непересекающиеся $(n-1)$-мерные плоскости, определяющие инволюцию точек в этом проективном пространстве. Аффинор этой инволюции можно задать в виде

$$g^j_i = V^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} W_{i\alpha_2 \dots \alpha_n} - (-1)^n W^{j\alpha_2 \dots \alpha_n} V_{i\alpha_2 \dots \alpha_n}. \tag{1}$$

При $n = 2$ мы получаем инволюцию биаксиального пространства, геометрия которого изучена А. П. Норденом *.

* А. П. Норден, Пространства линейной конгруэнции. Математический сборник, т. 24 (66) : 3, 1949.

Теперь рассмотрим $2n$-мерное пространство симметричной аффинной связности, в котором даны два поля простых $n$-векторов, воспроизводящихся при ковариантном дифференцировании:

$$\nabla_\alpha V^{\gamma_1\cdots\gamma_n} = \lambda_\alpha V^{\gamma_1\cdots\gamma_n},$$

$$\nabla_\alpha W^{\gamma_1\cdots\gamma_n} = \mu_\alpha W^{\gamma_1\cdots\gamma_n}.$$

Известно *, что в таком случае площадки этих $n$-векторов огибают два семейства $n$-мерных поверхностей. В каждом локальном псевдовекторном пространстве пара указанных площадок определяет инволюцию этого пространства, аффинор которой определен формулой (1). Нетрудно видеть, что этот аффинор ковариантно постоянен:

$$\nabla_\alpha g^\gamma_\beta = 0.$$

Могут представиться два случая: выбранные $n$-векторы действительные или комплексно-сопряженные. Исследуем первый случай.

Выбирая первые $n$ координатных линий в поверхностях первого семейства, а $n$ других — в поверхностях второго семейства, можно построить такую голономную систему координат, в которой матрица $(g^\alpha_\beta)$ примет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hdashline & & & -1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right\|$$

Считая, что латинские индексы пробегают значения от 1 до $n$, мы убедимся, что среди компонент связности отличны от нуля могут быть лишь $\Gamma^k_{ij}$ и $\Gamma^{n+k}_{n+i,\, n+j}$, откуда следует, что $n$-мерные поверхности обоих семейств являются вполне геодезическими поверхностями.

Образуем симметричный тензор $s_{\alpha\beta}$ такой, что тензор

$$a_{\alpha\beta} = g^\sigma_\alpha s_{\sigma\beta}. \tag{2}$$

антисимметричен. Такой тензор назовем *s-тензором*. Если поднимать индексы с помощью $s_{\alpha\beta}$, то

$$a_{\alpha\sigma} a_{\beta\cdot}^{\cdot\sigma} = -s_{\alpha\beta}.$$

---

* J. Schouten, Der Ricci-Kalkül, 1924.

В выбранной нами специальной системе координат матрицы тензоров $s_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ принимают вид

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & g \\ g' & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A=\begin{Vmatrix} 0 & g \\ -g' & 0 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $g$ — произвольная матрица $n$-го порядка:

$$g=\begin{Vmatrix} g_{1,\,n+1}\cdots g_{1,\,2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{n,\,n+1}\cdots g_{n,\,2n} \end{Vmatrix}.$$

В каком случае $s$-тензор ковариантно постоянен в связности нашего пространства? Нетрудно убедиться, что в специальной системе координат для этого необходимо и достаточно выполнения условий

$$\left.\begin{aligned} \partial_k g_{r,\,n+s} - \partial_r g_{k,\,n+s} &= 0, \\ \partial_{n+k} g_{r,\,n+s} - \partial_{n+s} g_{r,\,n+k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти условия указывают на факт существования такой функции $U(x^i,\ x^{n+i})$, заданной с точностью до преобразования

$$U(x^i,\ x^{n+i}) \to U(x^i,\ x^{n+i}) + V(x^i) + W(x^{n+i}),$$

что

$$g_{k,\,n+r} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k\,\partial x^{n+r}}.$$

Кроме того, в этом случае в пространстве существует ковариантно постоянный антисимметрический тензор $a_{\alpha\beta}$.

Если произвести замену координат

$$x^{i'} = x^i + x^{n+i},$$
$$x^{n+i'} = x^i - x^{n+i},$$

то матрица аффинора $g^\alpha_\beta$ принимает вид

$$\left\Vert\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\Vert$$

Компоненты $s$-тензора в этой системе координат удовлетворяют условиям

$$s_{kr} = -s_{n+k,\,n+r},$$
$$s_{k,\,n+r} = -s_{r,\,n+k},$$

а компоненты связности подчинены условиям

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^{n+k}_{i,\, n+j} = \Gamma^k_{n+i,\, n+j}, \quad \Gamma^{n+k}_{n+i,\, n+j} = \Gamma^k_{i,\, n+j} = \Gamma^{n+k}_{ij}.$$

Отбрасывая штрихи у новых координат, условимся относить всякой точке $x^\alpha$ и вектору $v^\alpha$ $2n$-мерного пространства точку $X^k$ и вектор $V^k$ $n$-мерного двойного пространства по формулам

$$\begin{aligned} X^k &= x^k + e\,x^{n+k}, \\ V^k &= v^k + e\,v^{n+k}, \end{aligned} \qquad (e^2 = +1)$$

и определим в этом двойном пространстве связность

$$\mathcal{Z}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + e\,\Gamma^{n+k}_{n+i,\, n+j}.$$

Сопоставляя со всяким $s$-тензором $s_{\alpha\beta}$ эрмитов тензор

$$A_{k\bar{r}} = s_{kr} + e a_{kr} = s_{kr} + e s_{n+k,\, r}, \tag{5}$$

мы убедимся, что условия ковариантного постоянства тензора $s_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$\frac{\partial A_{k\bar{r}}}{\partial X^i} - \mathcal{Z}^t_{ik} A_{t\bar{r}} = 0,$$

то-есть в этом случае связность $\mathcal{Z}^k_{ij}$ является связностью двойного унитарного пространства с метрическим тензором $A_{k\bar{r}}$. Условия же (2), записанные в новой системе координат, указывают на отсутствие кручения этого унитарного пространства.

Во втором случае, когда основные $n$-векторы комплексно сопряжены, матрицу $(g^\alpha_\beta)$ можно привести к каноническому виду

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

или к виду (в голономной системе координат $x^\alpha$)

$$\left\| \begin{array}{ccc:ccc} & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ \hdashline -1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & -1 & & & \end{array} \right\|$$

Компоненты связности будут подчинены условиям

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{n+i}_{n+j,\, k} = -\Gamma^i_{n+j,\, n+k}, \quad \Gamma^{n+i}_{n+j,\, n+k} = \Gamma^i_{j,\, n+k} = -\Gamma^{n+i}_{jk}. \tag{6}$$

Определим снова $s$-тензор $s_{\alpha\beta}$ из условия, что тензор

$$a_{\alpha\beta}=g^{\sigma}_{\alpha}s_{\sigma\beta}$$

антисимметричен. Поднимая индексы с помощью $s_{\alpha\beta}$, мы получим

$$a_{\alpha\sigma}a_{\beta\cdot}^{\sigma}=s_{\alpha\beta},$$

то-есть квадрат тензора $a_{\alpha\beta}$ равен $s$-тензору.

В используемой нами специальной системе координат компоненты $s$-тензора подчинены условиям

$$s_{kr}=s_{n+k,\ n+r},$$

$$s_{k,\ n+r}=-s_{n+k,\ r}.$$

Будем относить всякой точке $x^{\alpha}$ и вектору $v^{\alpha}$ $2n$-мерного пространства точку $X^k$ и вектор $V^k$ комплексного $n$-мерного пространства по формулам

$$X^k=x^k+ix^{n+k},$$

$$V^k=v^k+iv^{n+k},$$

и введем в это пространство комплексную связность

$$\mathcal{E}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-i\Gamma^{n+k}_{n+i,\ n+j}.$$

Со всяким $s$-тензором сопоставим эрмитов тензор

$$A_{k\bar{r}}=s_{kr}-ia_{kr}=s_{kr}-is_{n+k,\ r};$$

тогда для любых двух векторов $v^{\alpha}$, $w^{\alpha}$

$$A_{k\bar{r}}\,V^k\bar{w}^r=s_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta}-ia_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta}. \tag{7}$$

Условиям ковариантной постоянности $s$-тензора в связности $2n$-мерного пространства нетрудно придать вид

$$\frac{\partial A_{k\bar{r}}}{\partial X^i}-\mathcal{E}^s_{ik}A_{s\bar{r}}=0,$$

откуда следует, что в этом случае комплексная связность $\mathcal{E}^k_{ij}$ является связностью унитарного пространства Схоутена с эрмитовым (метрическим) тензором $A_{k\bar{r}}$. Но отнюдь не всякий $s$-тензор может быть ковариантно постоянен: требуя выполнимости условий (6), мы получим, что компоненты $s$-тензора должны удовлетворять соотношениям

$$\left.\begin{aligned}\partial_{[j}s_{m]k}-\partial_{[n+j}s_{n+m]k}=0,\\ \partial_{[j}s_{n+m]k}+\partial_{[n+j}s_{m]k}=0,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

которые указывают на отсутствие кручения у этого унитарного пространства.

Если форма $s_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}$ положительно определенная и условия (8) выполнены, мы получаем риманово пространство с метрическим тензором $s_{\alpha\beta}$ и ковариантно постоянным антисимметрическим тензором $a_{\alpha\beta}$, квадрат которого равен метрическому тензору.

Пространства такого типа были детально изучены в 1925 году П. А. Широковым* и получили название $A$-пространств.

$n$-мерные поверхности, отвечающие $n$-векторам $V^{i_1\ldots i_n}$ и $W^{i_1\ldots i_n}$, П. А. Широков называет *главными* поверхностями. Выбирая специальную систему координат, он приводит матрицы метрического и антисимметрического тензоров к виду (3) и получает условия (4), указав свойства компонент связности и тензора кривизны в этой специальной системе координат.

Полученные П. А. Широковым результаты имеют значение независимо от дальнейших предположений о положительной определенности метрики. Но псевдоримановы пространства, метрический тензор которых может быть приведен к виду (3) при выполнимости условий (4), совпадают с так называемыми расслоенными пространствами, теория которых была изложена П. К. Рашевским в 1948 году *.

Таким образом, можно утверждать, что результаты П. А. Широкова опережают результаты П. К. Рашевского на 23 года, хотя П. К. Рашевский при построении расслоенных пространств исходил из иных предпосылок, нежели П. А. Широков.

В заключение необходимо отметить, что связь между расслоенными пространствами и унитарными пространствами без кручения была установлена в 1949 году Б. А. Розенфельдом⊘.

---

* П. А. Широков, Постоянные поля векторов и тензоров в римановых пространствах, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва (2), XXV, 1925.

* П. К. Рашевский, Скалярное поле в расслоенном пространстве. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VI, М.—Л., 1948.

⊘ Б. А. Розенфельд, Об унитарных и расслоенных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VII, М.—Л., 1949.

# ТЕОРИЯ СЕТЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. И. Шуликовский

Чебышевский вектор сети, введенный Я. С. Дубновым для случая римановой геометрии, а затем А. П. Норденом для произвольного пространства аффинной связности, получил большие приложения в различных вопросах. Поэтому в теории сетей целесообразно пользоваться таким способом задания сети, при котором чебышевский вектор выражается наиболее просто. В настоящей работе сеть задается аффинором сети, несущественно отличным от главного тензора сети Я. С. Дубнова *.

Основной задачей доклада является отыскание необходимых и достаточных условий существования сети $B$, образующей с данной сетью $A$ данный взаимный угол $\varphi$ и имеющей данный чебышевский вектор.

Задача решается в пространстве $A_2$ произвольной аффинной связности без кручения.

В частном случае римановой геометрии, когда искомая сеть $B$ аполярна данной сети $A$, задача решена Н. В. Ефимовым *.

При решении основной задачи рассматриваются тройки сетей $\underset{\alpha}{A}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — тройки взаимно аполярных сетей. Если кроме исходной связности $G$ рассмотреть три связности $\underset{\alpha}{G}$, сопряженные в смысле А. П. Нордена ⊘ относительно сетей тройки $\underset{\alpha}{A}$, то эти

* Я. С. Дубнов и Н. В. Ефимов, ДАН СССР, IV, № 2, 43—46, 1936.

* Н. В. Ефимов, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. V, М. — Л., 1941, стр. 148—173.

⊘ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

связности сопряжены и между собой: $\underset{\alpha}{G}$ и $\underset{\beta}{G}$ сопряжены относительно сети $\underset{\gamma}{A}$. Здесь и далее $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — циклическая подстановка цифр 1, 2, 3. Чебышевский вектор $(\underset{\alpha}{\alpha})$ сети $\underset{\alpha}{A}$ в связности $\underset{\gamma}{G}$ назван геодезическим вектором сети $\underset{\alpha}{A}$, включенной в тройку сетей. Обращение его в нуль характеризует геодезическую сеть. Между чебышевскими $(\underset{\alpha}{\alpha})$ и геодезическими $(\underset{\alpha}{a})$ векторами тройки сетей существуют три независимых соотношения $\underset{\alpha}{a} - \underset{\beta}{a} = \underset{\gamma}{\alpha}$.

При решении основной задачи аффинор $B$ искомой сети дается формулой

$$B_k^i = \lambda \underset{1}{A_k^i} + \mu\,(\underset{2}{A_k^i}\cos\omega + \underset{3}{A_k^i}\sin\omega), \tag{1}$$

где $\lambda = -\frac{1}{2}\underset{1}{A_n^m} B_m^n = i\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $\mu = \sqrt{1-\lambda^2}$, $\omega$ — скаляр, определяющий сеть.

Условия задачи приводят к уравнениям

$$\omega_i = -\bar{p}_i - \underset{1}{\alpha_i}\sin 2\omega + \underset{1}{\bar{\alpha}_i}\cos 2\omega + (\underset{2}{A_i^m}\cos\omega + \underset{3}{A_i^m}\sin\omega)\, s_m, \tag{2}$$

где $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$, $\underset{3}{A}$ — произвольная тройка сетей и приняты обозначения:

$$p_i = 2b_i - \underset{2}{a_i} - \underset{3}{a_i} + \partial_i \ln\mu, \quad s_i = \frac{\lambda}{\mu}(2b_i - \underset{1}{a_i} + \partial_i \ln\lambda),$$

$$\bar{p}_i = \underset{1}{A_i^m} p_m, \quad \underset{1}{\bar{\alpha}_i} = \underset{1}{A_i^m}\underset{1}{\alpha_m}.$$

Условие интегрируемости этих уравнений имеет вид

$$\underset{1}{M} + \underset{2}{M}\sin 2\omega + \underset{3}{M}\cos 2\omega + \underset{4}{M}\sin\omega + \underset{5}{M}\cos\omega = 0, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{2}{M} = \underset{1}{\alpha_i}{}_{|\cdot}^{\,i} - 2\underset{1}{\alpha_i} p^i, \qquad \underset{1}{M} = \bar{p}_i{}_{|\cdot}^{\,i} - 2\underset{1}{\bar{\alpha}_i}\underset{1}{\alpha^i} + \bar{s}_i s^i,\\
&-\underset{3}{M} = \underset{1}{\bar{\alpha}_i}{}_{|\cdot}^{\,i} - 2\underset{1}{\bar{\alpha}_i} p^i, \qquad \underset{4}{M} = \underset{3}{A_n^m}\Big(2b_m s^n + 2\underset{1}{\alpha_m} s^n + \frac{\mu_m}{\mu} s^n - s_m{}_{|\cdot}^{\,n}\Big),\\
&\underset{5}{M} = \underset{2}{A_n^m}\Big(2b_m s^n - 2\underset{1}{\alpha_m} s^n + \frac{\mu_m}{\mu} s^n - s_m{}_{|\cdot}^{\,n}\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если $n \leqslant 4$ корней уравнения (3) удовлетворяют (2), то (1) определяет $n$ сетей $B$ с указанными свойствами. Если таких сетей $\bullet$, то (3) — тождества относительно $\omega$, (2) определяет $\omega$ с произволом в одну постоянную и (1) определяет семейство $\infty^1$ сетей, удовлетворяющих условию задачи. Назовем это семейство семейством $P(\underset{1}{A}, \lambda, b)$, а сеть $\underset{1}{A}$ — основанием $P(\underset{1}{A}, \lambda, b)$. В случае, когда сеть $\underset{1}{A}$ не содержит геодезических, уравнения $\underset{2}{M} = \underset{3}{M} = 0$

определяют вектор $b$, так что сеть $\underset{1}{A}$ при данном $\lambda$ может быть основанием только одного $P(\underset{1}{A}, \lambda, b)$. Необходимые и достаточные условия того, что сеть есть основание $P$, состоят в выполнении условий $\underset{1}{M} = \underset{4}{M} = \underset{5}{M} = 0$ для вектора $b$, найденного из уравнений $\underset{2}{M} = \underset{3}{M} = 0$. Семейства $P$ существуют в любом $A_2$. Семейств $P$ с $\lambda = \text{const} \neq 0$ в данном $A_2$, вообще говоря, не существует.

В случае геодезической сети $\underset{2}{M} = \underset{3}{M} = 0$. Геодезическая сеть, если она не основание $P$, допускает не более двух сетей, образующих с ней данный взаимный угол ($\varphi \neq \text{const}$) и имеющих данный чебышевский вектор.

Эти результаты получают следующие приложения:

1. *Кинематически сопряженное основание изгибания.* Здесь роль сетей $B$ играют асимптотические сети наложимых поверхностей, а роль сети $\underset{1}{A}$ — кинематически сопряженное основание изгибания.

2. *Изгибание с сохранением главных кривизн* является частным случаем изгибания на кинематически сопряженном основании. Кинематически сопряженным основанием изгибания здесь является изотропная сеть поверхности. Условия изгибаемости поверхности с сохранением главных кривизн были получены в диссертации Г. С. Гаспаряна*, не заметившего указанной связи двух задач. Здесь они получаются из уравнений (3) и (4).

3. Частный случай общей задачи, когда *искомая сеть аполярна с сетью* $\underset{1}{A}\left(\varphi = \frac{\pi}{2},\ \lambda = 0,\ s_i = 0\right)$. Здесь уравнения (1), (2), (3) упрощаются; имеем соответственно

$$B_k^i = \underset{2}{A_k^i} \cos \omega + \underset{3}{A_k^i} \sin \omega, \tag{1'}$$

$$\omega_i = -\overline{p}_i - \underset{1}{\alpha_i} \sin \omega + \underset{1}{\overline{\alpha}_i} \cos \omega, \tag{2'}$$

$$\underset{1}{N} + \underset{2}{N} \sin 2\omega + \underset{3}{N} \cos 2\omega = 0, \tag{3'}$$

$$\underset{1}{N} = \overline{P}_{i|}{}^{i} - 2\underset{1}{\overline{\alpha}_i}\underset{1}{\alpha^i}, \quad \underset{2}{N} = \underset{1}{\alpha_{i|}}{}^{i} - 2\underset{1}{\alpha_i} p^i, \quad -\underset{3}{N} = \underset{1}{\overline{\alpha}_{i|}}{}^{i} - 2\underset{1}{\overline{\alpha}_i} p^i. \tag{4'}$$

Если сеть $\underset{1}{A}$ допускает три аполярные ей сети с равными чебышевскими векторами, то таких сетей $\infty^1$ и $\underset{1}{A}$ — основание $\overline{P}(\underset{1}{A}, b)$.

---

* Г. С. Гаспарян, Автореферат диссертации, МГУ, 1951.

Семейства $\overline{P}$ существуют в любом $A_2$. Среди сетей, образующих с данной сетью данный взаимный угол, всегда существуют основания семейств $\overline{P}$.

Линии сетей семейства $\overline{P}$ являются геодезическими линиями некоторой связности, определяемой с точностью до проективного преобразования.

Можно дать ряд признаков принадлежности двух сетей одному семейству $\overline{P}$. Существует способ — по данному семейству $\overline{P}(\underset{1}{A}, b)$ в связности $G$ построить бесконечное множество (с произволом в две функции одного аргумента) семейств $\overline{P'}(\underset{1}{A}, b')$ в новых связностях $G'$, включающих в себя любую сеть, аполярную сети $\underset{1}{A}$.

4. *Признак поверхности проективного пространства $P_3$, допускающей $\infty^1$ сопряженных сетей с общими прямыми Грина.* При решении этой задачи рассматривается внутренняя геометрия поверхности, нормализованной по А. П. Нордену. Эти поверхности либо линейчатые, либо имеют постоянную проективную кривизну —8. Общие прямые Грина сопряженных сетей являются каноническими прямыми Грина поверхности.

5. *Поверхности переноса аффинного пространства $R_3$.* Если поверхность нормализована аффинно в смысле А. П. Нордена, то роль сетей $B$ играют сети переноса (чебышевские сети внутренней геометрии поверхности), а роль сети $\underset{1}{A}$ — асимптотическая сеть поверхности. Можно выделить специальные поверхности переноса, у которых конгруэнция осей Грина сети переноса сопряжена поверхности. Касательные к линиям единственной сети переноса такой поверхности пересекают несобственную плоскость $R_3$ по кривой второго порядка. Поверхности с $\infty^1$ сетей переноса — частный случай специальных поверхностей. Они определяют в несобственной плоскости пучок кривых второго порядка, по которым касательные к линиям сетей переноса пересекают эту плоскость, и определяются этим пучком с точностью до аффинного преобразования $P$. Рассматривая проективно-различные пучки кривых второго порядка в несобственной плоскости, можно получить конечные уравнения соответствующих им аффинно-различных поверхностей.

6. *$L$-сеть.* Так названа сеть $\underset{1}{A}$ — основание семейства $\overline{P}(\underset{1}{A}, \underset{1}{a})$ ($\underset{1}{a}$ — чебышевский вектор сети $\underset{1}{A}$). Связность, допускающая $L$-сеть,

допускает дробно-квадратичный интеграл геодезических

$$\frac{C_{ik}\,du^i\,du^k}{D_{nm}\,du^n\,du^m} = \mathrm{const},$$

где тензоры $C_{ik}$ и $D_{ik}$ определяют геодезические сети, аполярные с $L$-сетью. Частный случай $L$-сети есть сеть Лиувилля поверхности Лиувилля.

7. *Главное основание изгибания поверхности пространства Евклида* является основанием семейства $\overline{P}\left(\underset{1}{A},\ \frac{1}{4}\partial_i \ln K\right)$ ($K$ — гауссова кривизна поверхности). Из уравнений (4′) получим признаки главного основания, принятого за координатную сеть, полученные С. С. Бюшгенсом и С. П. Финиковым, условия Коссера, инвариантный признак поверхности Бианки, вид гауссовой кривизны поверхности Бианки в асимптотических координатах. Преобразование Петерсона главного основания есть частный случай преобразования основания $\overline{P}$ (приложение 3).

8. *Поверхности Фосса.* Здесь роль сети $\underset{1}{A}$ играет асимптотическая сеть поверхности, а роль сети $B$ — сопряженная сеть, аполярная сети Фосса. Теорема о том, что поверхность с $\infty^1$ сетей Фосса — геликоид, равносильна теореме: кодацциева сеть $\underset{1}{A}$ римановой геометрии постоянной кривизны, являющаяся основанием $\overline{P}(\underset{1}{A},\ \underset{1}{a})$, будет ортогональной и полугеодезической. Следствием этого является теорема: прямоугольное главное основание — полугеодезическое.

# СОДЕРЖАНИЕ

## III. ДОКЛАДЫ НА РАСШИРЕННОМ ЮБИЛЕЙНОМ ЗАСЕДАНИИ КАЗАНСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

26 февраля 1951 г.

Н. И. Лобачевский.

Бюст работы М. Л. Диллон.
Находится в Геометрическом кабинете
Казанского университета.

Редактор *И. Н. Бронштейн.*
Оформление художника *В. А. Селенгинского.*
Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *А. С. Каган.*

Подписано в печать 18/II 1952 г.
Тираж 5000 экз. 17,81 печатного листа+2 вклейки
10,88 уч.-изд. листа. 6,625 бум. л. Т-00277. Заказ 3017.
**Цена 5 руб. 60 коп., переплет 2 руб.**
Номинал—по прейскуранту 1952 года.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой
Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.