

А. П. НОРДЕН

КРАТКИЙ КУРС
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

ФИЗМАТГИЗ · 1958



Норден Александр Петрович.
Краткий курс дифференциальной геометрии.

Редактор **И. Н. Григорьев.**

Технический редактор **С. Н. Ахламов.**

Корректор **Г. Г. Желтова.**

Сдано в набор 25,1V 1958 г. Подписано к печати 9/VIII 1958 г. Бумага 60×92¹/₁₆.
Физ. печ. л. 15,25. Условн. печ. л. 15,25. Уч.-изд. л. 13,96. Тираж 25 000 экз. Т-08207.
Цена книги 5 руб. 20 коп. Заказ № 1839.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского Совнархоза,
Москва, Ж-54, Валуевая, 28.

Отпечатано с матриц в 1-й типогр. Трансжелдориздата МПС. Зак. 790

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|-----------------------|---|
| Предисловие | 7 |
|-----------------------|---|

ЧАСТЬ I

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

| | |
|---|----|
| § 1. Введение | 9 |
| § 2. Бесконечно малые векторы | 9 |
| § 3. Предел переменного вектора | 11 |
| § 4. Векторная функция скалярного аргумента | 12 |
| § 5. Годограф векторной функции | 13 |
| § 6. Производная векторной функции | 15 |
| § 7. Правила дифференцирования вектора | 15 |
| * § 8. Формула Тейлора | 18 |
| § 9. Вектор постоянной длины и вектор постоянного направления | 19 |
| § 10. Вектор, параллельный неизменной плоскости | 20 |
| § 11. Векторные круговые функции | 21 |
| § 12. Интеграл от векторной функции | 22 |

ГЛАВА II

КРИВАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ

| | |
|---|----|
| § 13. Понятие кривой линии | 24 |
| § 14. Параметрическое уравнение кривой | 24 |
| § 15. Касательная прямая кривой | 26 |
| § 16. Винтовая линия | 30 |
| § 17. Неявное уравнение плоской кривой | 30 |
| § 18. Особые точки кривой, заданной неявным уравнением | 32 |
| § 19. Асимптоты | 36 |
| § 20. Касательная и асимптота алгебраической кривой | 37 |
| § 21. Огибающая семейства плоских кривых | 39 |
| § 22. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности | 43 |
| § 23. Цилиндрические и конические поверхности | 45 |
| § 24. Особая точка поверхности | 46 |
| § 25. Неявное задание пространственной кривой | 48 |
| § 26. Семейство кривых, зависящих от n параметров | 49 |
| § 27. Соприкосновение кривых | 50 |
| § 28. Соприкосновение кривой и поверхности | 53 |

ГЛАВА III

ДЛИНА ДУГИ И СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК КРИВОЙ

| | |
|---|----|
| § 29. Длина дуги | 55 |
| § 30. Длина дуги как параметр | 58 |

| | | |
|-------|--|----|
| § 31. | Соприкасающаяся плоскость | 60 |
| § 32. | Уравнение соприкасающейся плоскости | 62 |
| § 33. | Сопровождающий трехгранник кривой | 64 |
| § 34. | Формулы Серре — Френе | 66 |
| § 35. | Другой вывод формул Серре—Френе | 69 |
| § 36. | Лемма о единичном векторе | 70 |
| § 37. | Кривизна | 70 |
| § 38. | Кручение | 71 |
| § 39. | Формулы для вычисления кривизны и кручения | 72 |
| § 40. | Взаимное расположение кривой и плоскости | 75 |
| § 41. | Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость | 78 |
| § 42. | Проекция кривой на спрямляющую плоскость | 78 |
| § 43. | Вид кривой вблизи данной точки | 80 |
| § 44. | Вид кривой вблизи точки уплощения | 82 |
| § 45. | Эволюта плоской кривой | 83 |
| § 46. | Соприкасающаяся окружность плоской кривой | 85 |
| § 47. | Эвольвента | 86 |
| § 48. | Трактриса и цепная линия | 88 |

ГЛАВА IV

НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ

| | | |
|---------|--|-----|
| § 49. | Натуральные уравнения | 91 |
| § 50. | Кривые с общими натуральными уравнениями | 93 |
| § 51. | Дифференциальные уравнения | 95 |
| * § 52. | Векторные дифференциальные уравнения | 98 |
| * § 53. | Лемма о взаимных тройках | 100 |
| * § 54. | Независимость кривизны и кручения | 101 |
| § 55. | Натуральные уравнения плоской кривой | 105 |
| § 56. | Линии откоса | 107 |
| § 57. | Кривые с общими нормальными | 110 |
| * § 58. | Кривые Бертрана | 112 |
| * § 59. | Линейная зависимость между кривизной и кручением | 113 |
| * § 60. | Кривые постоянной кривизны | 114 |

ГЛАВА V

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

| | | |
|---------|---|-----|
| § 61. | Огибающая семейства поверхностей | 116 |
| § 62. | Характеристика семейства поверхностей | 118 |
| § 63. | Ребро возврата | 119 |
| § 64. | Развертывающиеся поверхности | 121 |
| § 65. | Полярная поверхность | 124 |
| * § 66. | Характеристическая точка полярной поверхности | 126 |
| § 67. | Соприкасающаяся сфера | 127 |
| § 68. | Огибающая касательных плоскостей | 129 |
| § 69. | Параллельные кривые | 130 |
| § 70. | Пространственная эволюта | 132 |

ЧАСТЬ II

ГЛАВА VI

ПОВЕРХНОСТЬ И ЕЕ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

| | | |
|-------|--|-----|
| § 71. | Понятие поверхности | 134 |
| § 72. | Криволинейные координаты и параметрическое уравнение поверхности | 135 |
| § 73. | Примеры параметризованных поверхностей | 137 |

| | | |
|---|--|-----|
| § | 74. Касательная прямая поверхности | 140 |
| | 75. Касательная плоскость | 141 |
| * | 76. Огибающая семейства плоскостей, зависящих от двух параметров | 142 |
| § | 77. Длина дуги | 143 |
| § | 78. Первая квадратичная форма | 144 |
| § | 79. Угол между двумя линиями | 145 |
| * | 80. Ортогональные траектории | 147 |
| § | 81. Площадь поверхности | 148 |
| § | 82. Поверхность вращения | 151 |
| § | 83. Косая и развертывающаяся линейчатые поверхности | 153 |
| * | 84. Криволинейные координаты в пространстве | 156 |

ГЛАВА VII

КРИВИЗНА ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

| | | |
|---|---|-----|
| § | 85. Нормальная кривизна | 159 |
| § | 86. Вторая квадратичная форма | 159 |
| § | 87. Кривизна кривой и ее соприкасающаяся плоскость | 161 |
| § | 88. Нормальное сечение | 163 |
| § | 89. Теорема Менье | 163 |
| § | 90. Индикатриса Дюпена | 165 |
| § | 91. Формула Эйлера | 167 |
| § | 92. Характеристическое уравнение поверхности. Полная и средняя кривизны | 168 |
| § | 93. Кривизны поверхности вращения | 170 |
| § | 94. Кривизна линий на сфере | 171 |
| § | 95. Классификация точек поверхности | 171 |
| § | 96. Строение поверхности вблизи эллиптической точки | 173 |
| § | 97. Строение поверхности вблизи гиперболической точки | 174 |
| § | 98. Строение поверхности вблизи параболической точки | 176 |
| * | 99. Линия пересечения поверхности с ее касательной плоскостью | 178 |
| * | 100. Точки поверхностей второго порядка | 179 |
| * | 101. Сферическое отображение | 180 |
| * | 102. Знак полной кривизны | 182 |

ГЛАВА VIII

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СЕТИ И ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

| | | |
|---|---|-----|
| § | 103. Сопряженные направления | 185 |
| § | 104. Сопряженная сеть | 187 |
| * | 105. Поверхности переноса | 188 |
| § | 106. Асимптотические линии | 189 |
| § | 107. Линии кривизны | 191 |
| § | 108. Теорема Иоахимстала | 193 |
| § | 109. Уравнение линий кривизны | 194 |
| § | 110. Поверхности нулевой кривизны | 197 |
| * | 111. Поверхность, состоящая из омбилических точек | 198 |

ГЛАВА IX

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

| | | |
|---|---|-----|
| § | 112. Изгибание и наложимость | 200 |
| § | 113. Признак наложимости | 200 |
| § | 114. Внутренняя геометрия поверхности | 202 |
| § | 115. Изгибание развертывающихся поверхностей | 203 |
| § | 116. Сопровождающий трехгранник поверхности | 204 |
| § | 117. Дифференциал единичного касательного вектора поверхности | 206 |
| § | 118. Геодезическая кривизна | 207 |

| | | |
|----|--|-----|
| § | 119. Геодезические линии | 209 |
| § | 120. Геодезические линии поверхности вращения | 211 |
| § | 121. Полугеодезические координаты | 212 |
| § | 122. Геодезическая линия как кратчайшая | 214 |
| § | 123. Окончание подсчета коэффициентов сопровождающего трехгранника | 215 |
| *§ | 124. Основные квадратичные формы определяют поверхность | 216 |
| § | 125. Теорема Гаусса | 218 |
| § | 126. Конформное отображение | 220 |
| § | 127. Стереографическая проекция | 221 |
| § | 128. Линейный элемент поверхности постоянной гауссовой кривизны | 223 |
| § | 129. Наложимость поверхностей постоянной кривизны | 224 |
| § | 130. Псевдосфера | 225 |
| *§ | 131. Геодезические линии псевдосферы | 226 |

ГЛАВА X

***ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ**

| | | |
|---|--|-----|
| § | 132. Векторы, принадлежащие поверхности | 228 |
| § | 133. Внутреннее параллельное перенесение | 229 |
| § | 134. Развертывание кривой на плоскость | 231 |
| § | 135. Геодезическая кривизна и геодезические линии | 232 |
| § | 136. Площадь сферического многоугольника | 233 |
| § | 137. Параллельный обвод вектора по замкнутому сферическому контуру | 235 |
| § | 138. Параллельный обвод вектора по произвольной поверхности | 236 |
| § | 139. Теорема Гаусса—Бонне | 238 |
| § | 140. Геодезический треугольник | 240 |
| § | 141. Теорема Гаусса—Бонне для многосвязной области | 241 |
| § | 142. Интегральная кривизна замкнутой поверхности | 243 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс построен в соответствии с программами механико-математических и физико-математических факультетов университетов и пединститутов. Различие этих программ нашло свое отражение в том, что ряд абзацев, параграфов и одна глава книги отмечены звездочкой. При использовании курса в пединститутах весь отмеченный таким образом материал может быть выпущен, что не отразится на цельности изложения.

От своего первого издания (Дифференциальная геометрия. Учпедгиз, 1948) книга отличается некоторой перестановкой материала, незначительными добавлениями, изменением некоторых обозначений и изменением принципов нумерации параграфов и формул. Кроме того, выправлены многочисленные ошибки и опечатки первого издания, за которые автор не несет ответственности, так как он был лишен возможности ознакомиться с корректурами этого издания.

Казань 11. I. 1957 г.

А. Норден

Г Л А В А I

ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Введение. Приложения векторного исчисления к геометрии основаны на том, что его основные определения находятся в тесной связи с простыми геометрическими образами. Так, всякий вектор соответствует ориентированному отрезку. Сложение векторов сводится к построению ориентированных ломаных и их замыкающих. Скалярное произведение тесно связано с операцией проектирования, векторное произведение — с вычислением площади параллелограмма, а смешанное произведение — с вычислением объема параллелепипеда и т. д.

Векторное исчисление состоит из двух частей: *векторной алгебры и векторного анализа*. Векторная алгебра, рассматривая векторы, считает их постоянными, а векторный анализ изучает *переменные векторы*.

Векторная алгебра заимствует названия своих действий (сложение, вычитание, умножение) из алгебры в узком смысле этого слова и определяет их так, что законы алгебраических действий (переместительность, сочетательность, распределительность) сохраняют, за некоторыми исключениями, силу и для векторов.

Подобно этому векторный анализ берет за образец теорию пределов и дифференциальное исчисление, устанавливая для переменных векторов понятия и операции по аналогии с теми, которые лежат в основе этих глав анализа. Чтобы отличить векторный анализ от обычного анализа, мы будем в дальнейшем называть последний *скалярным анализом*.

§ 2. Бесконечно малые векторы. Среди переменных векторов особенно важную роль играют бесконечно малые векторы. Вектор называется *бесконечно малым*, если его абсолютная величина (или модуль) стремится к нулю.

Чтобы отметить, что вектор α бесконечно мал, употребляют обычную запись:

$$\alpha \rightarrow 0.$$

Для бесконечно малых векторов можно установить теоремы, совпадающие по своим формулировкам с теоремами обычного анализа.

Теорема 1. *Сумма ограниченного числа бесконечно малых векторов бесконечно мала.*

Пусть α , β , γ и т. д. — бесконечно малые векторы, а σ — их сумма.

Отрезок, соответствующий вектору σ , замыкает ломаную, построенную из отрезков, соответствующих слагаемым векторам, но длина замыкающего отрезка меньше (или, в крайнем случае, равна) длине ломаной, откуда

$$\sigma \leq \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

Так как слагаемые правой части этого неравенства бесконечно малы, а σ не может быть отрицательным, то σ стремится к нулю, а значит и вектор σ бесконечно мал. Переходя к рассмотренному произведению, отметим, что в векторной алгебре можно говорить:

а) о произведении вектора на скаляр

$$\beta = \lambda \alpha,$$

б) о скалярном произведении двух векторов

$$\lambda = \alpha \beta,$$

в) о векторном произведении двух векторов

$$\gamma = [\alpha \beta].$$

Однако во всех этих случаях абсолютная величина произведения меньше произведения абсолютных величин сомножителей или равна ему. Поэтому, если один из сомножителей бесконечно мал, а другой только ограничен по абсолютной величине, то абсолютная величина произведения, а значит и самое произведение бесконечно мало. Таким образом, для всех трех случаев имеет место следующая общая теорема.

Теорема 2. *Если вектор участвует в некотором произведении, один из сомножителей которого бесконечно мал, а другой только ограничен по абсолютной величине, то и произведение бесконечно мало.*

В заключение этого параграфа заметим, что для векторных, так же как и для скалярных, величин можно говорить об относительном порядке их бесконечной малости, рассматривая для этого отношение их абсолютных величин. Если предел отношения абсолютных величин бесконечно малых векторов α и β равен нулю, то порядок α выше порядка β , если же он равен числу, отличному от нуля, то их порядки одинаковы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что смешанное произведение трех векторов бесконечно мало, если один из них бесконечно мал, а два других ограничены по абсолютной величине.

2. Доказать, что порядок малости векторного произведения двух бесконечно малых векторов выше порядка каждого из сомножителей.

§ 3. Предел переменного вектора. Постоянный вектор a называется *пределом* переменного вектора u , если разность между ними бесконечно мала.

Пользуясь обычными обозначениями, запишем это так:

$$a = \lim u$$

или

$$u \rightarrow a,$$

если

$$u - a = \alpha \rightarrow 0.$$

Из определения следует, таким образом, что *переменный вектор равен сумме своего предела и некоторого бесконечно малого вектора*.

Пользуясь этим соотношением, а также свойствами бесконечно малых векторов, докажем теоремы о пределах суммы и произведения, причем заметим, что эти доказательства формально ничем не отличаются от доказательств соответствующих теорем скалярного анализа.

Теорема 1. *Предел суммы векторов равен сумме пределов слагаемых.*

Для определенности предположим, что w есть сумма двух векторов u и v . Тогда

$$w = \lim u + \alpha + \lim v + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые векторы. Но сумма бесконечно малых векторов мала, а значит

$$w - (\lim u + \lim v) \rightarrow 0,$$

откуда следует, что

$$\lim w = \lim (u + v) = \lim u + \lim v.$$

Теорема 2. *При умножении вектора на скаляр и при скалярном или векторном перемножении векторов предел произведения равен произведению пределов сомножителей.*

Так как во всех трех перечисленных случаях доказательства совершенно одинаковы, то мы приведем только одно из них.

Пусть w есть векторное произведение векторов u и v .

Тогда

$$w = [(\lim u + \alpha) (\lim v + \beta)],$$

где α и β — бесконечно малые векторы. Но векторное произведение подчиняется распределительному закону. Поэтому

$$w = [\lim u \lim v] + [\alpha \lim v] + [\lim u \beta] + [\alpha \beta].$$

Так как каждое из трех последних слагаемых содержит бесконечно малый множитель, то они бесконечно малы. Поэтому бесконечно мала и их сумма, а значит

$$\boldsymbol{w} - [\lim \boldsymbol{u} \lim \boldsymbol{v}] \rightarrow 0,$$

откуда следует, что

$$\lim [\boldsymbol{uv}] = [\lim \boldsymbol{u} \lim \boldsymbol{v}].$$

В рассмотренном случае векторного перемножения следует обратить внимание на порядок сомножителей. Пределы, перемножаемые в правой части, должны следовать друг за другом в том же порядке, что и соответствующие им множители левой части. Доказательство теоремы для случаев произведения вектора на число и скалярного произведения векторов предоставляем читателю.

Предел постоянного вектора следует считать равным ему самому.

Имея это в виду, получим как следствие теорему 3.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 постоянный множитель можно выносить за знак предела.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Доказать теорему о пределе произведения для случаев скалярного умножения и умножения вектора на скаляр.

4. Доказать, что предел отношения вектора и скаляра равен отношению их пределов, если предел скаляра отличен от нуля.

5. Доказать, что пределы координат переменного вектора равны координатам его предела.

§ 4. Векторная функция скалярного аргумента. Вектор может изменяться в зависимости от переменного скаляра. Пример такой зависимости мы находим в механике. Если $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ есть радиус-вектор движущейся точки M , то он изменяется в зависимости от времени, которое измеряется скалярной величиной. Вообще переменный вектор \boldsymbol{u} называется *функцией скалярного аргумента* t , если всякому значению этого аргумента соответствует определенное значение вектора.

Чтобы отметить такую зависимость, употребляют запись

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t).$$

Чтобы задать вектор \boldsymbol{u} , зависящий от скалярного аргумента t , его координатами u_x , u_y , u_z , нужно задать эти координаты в функциях этого аргумента. С этой точки зрения задание векторной функции скалярного аргумента равносильно заданию трех зависящих от него скалярных переменных

$$u_x = u_x(t); \quad u_y = u_y(t); \quad u_z = u_z(t).$$

Непрерывность векторной функции определяется так же, как и в скалярном анализе. Разность значений функций, соответствующих дан-

ному значению $t=t_1$ и приращенному значению $t=t_1 + \Delta t$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_1),$$

называется *приращением* функции \mathbf{u} , соответствующим приращению Δt аргумента.

Векторная функция называется *непрерывной* при $t=t_1$, если ее приращение, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, тоже бесконечно мало.

Абсолютная величина приращения выражается через приращение координат так:

$$|\Delta \mathbf{u}|^2 = \Delta u_x^2 + \Delta u_y^2 + \Delta u_z^2.$$

Если при $\Delta t \rightarrow 0$ приращения координат стремятся к нулю, то и $|\Delta \mathbf{u}| \rightarrow 0$ и функция \mathbf{u} непрерывна. Обратное, если $|\Delta \mathbf{u}| \rightarrow 0$, то приращение любой из координат, например

$$|\Delta u_x| \leq |\Delta \mathbf{u}|,$$

тоже стремится к нулю. Отсюда следует: *для непрерывности векторной функции скалярного аргумента необходима и достаточна непрерывность ее координат.*

* Если скалярная функция $v = v(t)$ непрерывна при любом значении аргумента t , принадлежащем промежутку $t_1 \leq t \leq t_2$, то для всякого положительного η найдется столь малое ε , что при $|\Delta t| < \varepsilon$ и при любом t , принадлежащем промежутку, $|\Delta v| < \eta$. Это свойство непрерывной функции называется равномерностью ее непрерывности. Если $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ непрерывна во всех точках промежутка $t_1 \leq t \leq t_2$, то ее координаты тоже непрерывны, а значит, можно найти столь малое ε , чтобы при $|\Delta t| < \varepsilon$

$$|\Delta u_x| < \frac{\eta}{\sqrt{3}}; \quad |\Delta u_y| < \frac{\eta}{\sqrt{3}}; \quad |\Delta u_z| < \frac{\eta}{\sqrt{3}};$$

но в таком случае

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{u}|^2 &= \Delta u_x^2 + \Delta u_y^2 + \Delta u_z^2 < \eta^2, \\ |\Delta \mathbf{u}| &< \eta. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к теореме, выражающей равномерную непрерывность векторной функции. Если функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ непрерывна при всех значениях t , принадлежащих промежутку

$$t_1 \leq t \leq t_2,$$

то для всякого сколь угодно малого η найдется достаточно малое ε , такое, что при $|\Delta t| < \varepsilon$ и при любом t , принадлежащем указанному промежутку, будет

$$|\Delta \mathbf{u}| < \eta.$$

§ 5. Годограф векторной функции. Чтобы получить наглядное представление о векторной функции, можно поступить так. Поставим

в соответствие всякому ее значению u , изображающий его ориентированный отрезок, начало которого совпадает с началом координат, а конец с некоторой точкой M . При изменении u точка M опишет некоторую пространственную кривую, которую называют *годографом* данной функции.

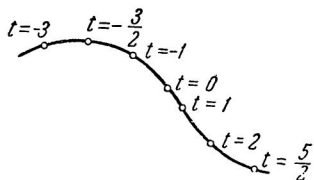


Рис. 1.

При рассмотрении векторных функций годограф играет роль, в известной мере аналогичную роли графика функций в скалярном анализе. Однако для полного представления о функции задание годографа недостаточно. Кроме задания его формы и положения в пространстве, следует еще иметь возможность определить, какое значение аргумента t соответствует каждой из его точек. Для этого мы можем представить себе, что на годограф нанесена шкала значений переменного t , отвечающих точками годографа (рис. 1).

Для этого мы можем представить себе, что на годограф нанесена шкала значений переменного t , отвечающих точками годографа (рис. 1).

УПРАЖНЕНИЯ

6. Доказать, что годограф линейной функции

$$u = at + b$$

есть прямая линия.

7. Доказать, что годограф функции

$$u = a \cos t + b \sin t + c$$

есть эллипс, расположенный в плоскости, проходящей через точку $r_0 = c$ и содержащей векторы a и b , если эти векторы неколлинеарны между собой.

Решение. Введем систему декартовых координат $Ox y$ с началом в точке c и с осями, направленными по векторам a и b . Если i и j — единичные векторы этих осей, то

$$a = ai; \quad b = bj.$$

В этой системе точки годографа будут иметь координаты

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t$$

и будут удовлетворять уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(рис. 2)

В частном случае, если векторы a и b равны по абсолютной величине ($a = b = R$) и взаимно ортогональны, то годограф будет окружностью.

8. Доказать, что если в предыдущем примере a и b коллинеарны, то годограф будет отрезком прямой.

9. Доказать, что годограф функции

$$r = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$$

есть гипербола (если a и b неколлинеарны).

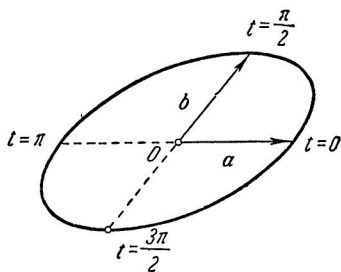


Рис. 2.

10. Доказать, что годограф функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$$

есть парабола (\mathbf{b} и \mathbf{c} неколлинеарны).

§ 6. Производная векторной функции. Операция дифференцирования вводится в векторном анализе совершенно так же, как и в анализе скалярном.

Производной векторной функции по ее скалярному аргументу называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда это приращение аргумента стремится к нулю.

Для обозначения производной пользуются или обычным символом Лейбница, принятым в скалярном анализе, или — по Ньютону — ставят точку над буквой, изображающей функцию.

Итак,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t}.$$

Так как при делении вектора $\Delta \mathbf{u}$ на число Δt снова получается вектор, то предел этого вектора, т. е. производная, является вектором. Результат перехода к пределу, очевидно, зависит от того, какому значению t давалось приращение Δt , а значит, сам вектор производной зависит от t и определяет новую векторную функцию аргумента t

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t).$$

Для этой функции снова можно вычислять производную и т. д. Производные второго, третьего и т. д. порядков обозначают

$$\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{u}}; \quad \frac{d\ddot{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} = \dot{\ddot{\mathbf{u}}}.$$

Если функция допускает существование производных до определенного порядка при всех значениях t некоторого промежутка $t_1 \leq t \leq t_2$, то она называется дифференцируемой соответствующее число раз на этом промежутке.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Доказать, что для линейной функции

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

(где \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы)

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}.$$

§ 7. Правила дифференцирования вектора. Обычные правила дифференцирования суммы и произведения имеют место и в векторном анализе.

Теорема 1. *Производная суммы векторов равна сумме производных слагаемых.*

Пусть

$$w = u + v,$$

где u и v — дифференцируемые функции t .

Тогда

$$\Delta w = u + \Delta u + v + \Delta v - (u + v) = \Delta u + \Delta v,$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

или

$$\frac{d(u + v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Теорема 2. *Произведение вектора на скаляр, скалярное и векторное произведения дифференцируются по обычному правилу скалярного анализа.*

Во всех трех перечисленных случаях доказательства протекают совершенно одинаково. Поэтому мы ограничимся рассмотрением одного случая, а именно случая векторного произведения.

Пусть

$$w = [uv],$$

где u и v — дифференцируемые функции аргумента t .

Приращение

$$w + \Delta w = [(u + \Delta u)(v + \Delta v)] = [uv] + [\Delta uv] + [u \Delta v] + [\Delta u \Delta v],$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left[u \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] + \left[\frac{\Delta u}{\Delta t} v \right] + \left[\frac{\Delta u}{\Delta t} \Delta v \right].$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \left[u \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} v \right] + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v \right],$$

но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

а

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v = 0$$

в силу непрерывности функции v .

Поэтому

$$\frac{dw}{dt} = \left[u \frac{dv}{dt} \right] + \left[\frac{du}{dt} v \right].$$

Проведя совершенно аналогичные выкладки и рассуждения в двух других случаях (что мы представляем читателю), мы придем к следующим трем формулам:

$$\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{uv}) = \mathbf{u} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \mathbf{v}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{uv}] = \left[\mathbf{u} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] + \left[\frac{d\mathbf{u}}{dt} \mathbf{v} \right]. \quad (4)$$

Из формулы (3) следует правило для дифференцирования скалярного квадрата:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}^2) = 2\mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (5)$$

Теорема 3. *Смешанное произведение векторов дифференцируется по следующему правилу:*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{uvw}) = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \mathbf{vw} \right) + \left(\mathbf{u} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{w} \right) + \left(\mathbf{uv} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right). \quad (6)$$

Доказательство этой теоремы читатель получит сам, приняв во внимание, что

$$(\mathbf{uvw}) = [\mathbf{uv}] \mathbf{w}.$$

Теорема 4. *Производная постоянного вектора равна нулю, так как его приращение равно нулю.*

Теорема 5. *Векторный или скалярный постоянный множитель можно выносить за знак производной, что следует из теорем 2 и 4.*

Полученные теоремы применим к нахождению координат производной по заданным координатам дифференцируемого вектора.

Пусть $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$.

Применяя к правой части равенства правило дифференцирования суммы и вынося постоянные векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} за знак производной, получим

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{du_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{du_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{du_z}{dt} \mathbf{k}. \quad (7)$$

Таким образом, координаты производной равны производным от соответствующих координат дифференцируемой векторной функции.

УПРАЖНЕНИЯ

12. Доказать, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\lambda} \right) = \frac{\lambda \dot{\mathbf{u}} - \dot{\lambda} \mathbf{u}}{\lambda^2}.$$

13. Вывести правило дифференцирования определителя третьего порядка из формулы (6).

***§ 8. Формула Тейлора.** Если функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ дифференцируема n раз в промежутке от t до $t+h$, то ее координаты дифференцируемы столько же раз в этом промежутке. Напишем для каждой из них формулу Тейлора:

$$x(t+h) = x + \dot{x}h + \frac{1}{2!}\ddot{x}h^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(t')h^n,$$

$$y(t+h) = y + \dot{y}h + \frac{1}{2!}\ddot{y}h^2 + \dots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(t'')h^n,$$

$$z(t+h) = z + \dot{z}h + \frac{1}{2!}\ddot{z}h^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^{(n)}(t''')h^n,$$

где t' , t'' , t''' — три, вообще говоря, различные значения t , заключенные между t и $t+h$.

Умножим левые и правые части равенств на векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} соответственно и, складывая, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)h + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{u}}(t)h^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{u}^{(n-1)}(t)h^{n-1} + \mathbf{R}_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mathbf{R}_n = \frac{1}{n!} \{ \mathbf{i} x^{(n)}(t') + \mathbf{j} y^{(n)}(t'') + \mathbf{k} z^{(n)}(t''') \} h^n. \quad (2)$$

Чтобы представить остаточный член в более компактном виде, заметим, что при h , стремящемся к нулю, все промежуточные значения t' , t'' , t''' стремятся к значению t , соответствующему началу промежутка. Вследствие этого

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ x^{(n)}(t')\mathbf{i} + y^{(n)}(t'')\mathbf{j} + z^{(n)}(t''')\mathbf{k} \} = \mathbf{u}^{(n)}(t).$$

Таким образом,

$$\mathbf{R}_n = \left(\frac{\mathbf{u}^{(n)}(t)}{n!} + \boldsymbol{\alpha} \right) h^n, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ есть вектор, стремящийся к нулю вместе с длиной промежутка h .

Вектор вполне определен, если известна его проекция на любое направление или, еще общее, если известно его скалярное произведение на любой другой вектор. Вследствие этого вместо формулы (1) можно пользоваться формулой, которая получается при разложении по формуле Тейлора скалярного произведения вектора \mathbf{u} на любой вектор \mathbf{a} . Предполагая вектор \mathbf{a} постоянным, будем иметь

$$\frac{d^k(\mathbf{a}\mathbf{u})}{dt^k} = \mathbf{a} \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k},$$

откуда

$$\mathbf{a}\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{a} \left\{ \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}h + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{u}}h^2 + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{u}^{(n)}(t')h^n \right\}, \quad (4)$$

где t' заключено между t и $t+h$, но, вообще говоря, зависит от выбора вектора \mathbf{a} .

УПРАЖНЕНИЕ

14. Доказать, пользуясь формулой Тейлора, что если на некотором промежутке производная вектора равна нулю, то вектор сохраняет на этом промежутке постоянное значение.

§ 9. Вектор постоянной длины и вектор постоянного направления.

1. Вектор постоянной длины. Если вектор, изменяя свое направление, сохраняет неизменной абсолютную величину, то

$$u^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя левую и правую части этого равенства, будем иметь следствие формулы (5) § 7

$$u \frac{du}{dt} = 0, \quad (1)$$

откуда следует: *производная вектора постоянной длины перпендикулярна этому вектору.*

2. Вектор постоянного направления. Если вектор u изменяет свой модуль, сохраняя направление, то его можно представить в виде произведения этого модуля на постоянный единичный вектор τ :

$$u = u\tau. \quad (2)$$

Дифференцируя это равенство и вынося τ за знак производной, получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \tau = \frac{\dot{u}}{u} u;$$

обозначив скаляр $\frac{\dot{u}}{u}$ через λ , будем иметь

$$\dot{u} = \lambda u. \quad (3)$$

Докажем, что условие (3) достаточно для того, чтобы вектор u имел постоянное направление. Для этого продифференцируем (2), не предполагая сначала, что единичный вектор τ постоянен, и воспользуемся условием (3):

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \tau + u \frac{d\tau}{dt} = \lambda u = \lambda u \tau.$$

Но производная единичного вектора τ перпендикулярна этому вектору. Поэтому после скалярного умножения последнего равенства на $\frac{d\tau}{dt}$, мы получим

$$u \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = 0.$$

Так как $u \neq 0$, то

$$\frac{d\tau}{dt} = 0,$$

откуда следует, что вектор τ постоянен.

Итак, коллинеарность вектора и его производной необходима и достаточна для того, чтобы этот вектор сохранял неизменным свое направление.

§ 10. Вектор, параллельный неизменной плоскости. Если вектор \mathbf{u} , изменяясь, остается параллельным неизменной плоскости, то он перпендикулярен нормальному вектору \mathbf{a} этой плоскости. Запишем условие перпендикулярности в виде равенства

$$\mathbf{a}\mathbf{u} = 0$$

и продифференцируем это равенство дважды, имея в виду, что вектор \mathbf{a} постоянен. Вследствие этого

$$\mathbf{a} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0; \quad \mathbf{a} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = 0.$$

Вектор \mathbf{u} и его две производные перпендикулярны одному направлению, следовательно, параллельны одной плоскости. Условие их компланарности можно записать в виде равенства нулю их смешанного произведения

$$(\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}\ddot{\mathbf{u}}) = 0. \quad (1)$$

Докажем достаточность этого условия для того, чтобы вектор \mathbf{u} , изменяясь, оставался параллельным неизменной плоскости.

Исключая из рассмотрения случай коллинеарности $\dot{\mathbf{u}}$ и \mathbf{u} , разобранный в предыдущем параграфе и, очевидно, не противоречащий нашему утверждению, обозначим их векторное произведение

$$[\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{a}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = [\dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}] + [\mathbf{u}\ddot{\mathbf{u}}] = [\mathbf{u}\ddot{\mathbf{u}}],$$

но $\ddot{\mathbf{u}}$ компланарен \mathbf{u} и $\dot{\mathbf{u}}$ вследствие (1), и может быть представлен в виде их линейной комбинации

$$\ddot{\mathbf{u}} = \lambda\dot{\mathbf{u}} + \mu\mathbf{u}.$$

Подставляя выражение второй производной, получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lambda[\mathbf{u}\ddot{\mathbf{u}}] + \mu[\mathbf{u}\mathbf{u}] = \lambda\mathbf{a}.$$

Это равенство показывает, что вектор \mathbf{a} имеет постоянное направление. Но он перпендикулярен вектору \mathbf{u} , который вследствие этого должен оставаться параллельным неизменной плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{a} .

Итак, для того чтобы вектор, изменяясь, оставался параллельным неизменной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы он был компланарен векторам своей первой и второй производной.

§ 11. Векторные круговые функции. Предположим, что в плоскости Oxy задан единичный вектор e , образующий угол φ с положительным направлением оси Ox , причем этот угол отсчитывается против часовой стрелки, если он рассматривается с положительного направления оси Oz . Так как значение вектора e вполне определяется заданием угла φ , то он является функцией этого угла. Будем называть ее *векторной круговой функцией* и обозначать $e(\varphi)$. Легко видеть, что годограф этой функции есть круг единичного радиуса.

Будем рассматривать также вторую круговую векторную функцию, определив ее равенством

$$g(\varphi) = e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. предполагая, что вектор g получается из соответствующего вектора e поворотом последнего на прямой угол в плоскости Oxy , в направлении, отсчитанном против часовой стрелки, если его рассматривать с положительного направления оси Oz .

Присоединяя к векторам e и g постоянный орт k , направленный по оси Oz , заметим, что эти векторы образуют правую ортонормальную тройку. Вследствие этого они должны быть связаны между собой теми же зависимостями, что и координаты орты i, j, k , а именно

$$\begin{aligned} e^2 = g^2 = k^2 = 1; \quad eg = gk = ke = 0; \\ [eg] = k; \quad [gk] = e; \quad [ke] = g. \end{aligned} \quad (1)$$

В координатах векторные круговые функции выражаются равенствами

$$e = i \cos \varphi + j \sin \varphi; \quad g = -i \sin \varphi + j \cos \varphi. \quad (2)$$

Дифференцируя эти равенства, получим

$$\frac{de}{d\varphi} = g; \quad \frac{dg}{d\varphi} = -e. \quad (3)$$

УПРАЖНЕНИЯ

15. Обобщенная круговая функция определяется равенством

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= a \cos \varphi + b \sin \varphi, \\ G(\varphi) &= -a \sin \varphi + b \cos \varphi, \end{aligned}$$

где a и b — произвольные постоянные векторы.

Доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{dE(\varphi)}{d\varphi} &= G(\varphi), \\ \frac{dG(\varphi)}{d\varphi} &= -E(\varphi). \end{aligned}$$

16. Доказать (не переходя к координатам) тождество

$$e(\varphi + \alpha) = e(\varphi) \cos \alpha + g(\varphi) \sin \alpha.$$

17. Опираясь на предыдущее, доказать тождества:

$$e(\varphi) \cos \alpha = \frac{1}{2} \{e(\varphi + \alpha) + e(\varphi - \alpha)\},$$

$$e(\varphi) \sin \alpha = \frac{1}{2} \{e(\varphi + \alpha) - e(\varphi - \alpha)\}.$$

§ 12. Интеграл от векторной функции. Неопределенным интегралом от векторной функции $\mathbf{u}(t)$ называется функция

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{u}(t) dt,$$

если

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}(t).$$

Эта функция, очевидно, определяется, как и в скалярном анализе, с точностью до постоянного слагаемого, однако это слагаемое векторное. *Определенным интегралом* будем называть следующий постоянный вектор:

$$\int_a^b \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{v}(b) - \mathbf{v}(a).$$

Легко видеть, что основные свойства интегралов сохраняются и для интеграла векторной функции. Так, например, интеграл суммы векторных функций равен сумме интегралов от слагаемых функций, а постоянный множитель (векторный или скалярный) можно выносить за знак интеграла.

Опираясь на эти свойства, получим выражение интеграла через координаты функции

$$\mathbf{u}(t) = iu_x(t) + ju_y(t) + ku_z(t),$$

$$\int \mathbf{u}(t) dt = i \int u_x(t) dt + j \int u_y(t) dt + k \int u_z(t) dt.$$

УПРАЖНЕНИЯ

18. Вычислить интеграл $I = \int \varphi e(\varphi) d\varphi$.

Решение. Будем интегрировать по частям:

$$I = - \int \varphi d\mathbf{g}(\varphi) = -\varphi \mathbf{g}(\varphi) + \int \mathbf{g}(\varphi) d\varphi = e(\varphi) - \varphi \mathbf{g}(\varphi) + c.$$

19. Вычислить интеграл

$$I = \int e^{a\varphi} e(b\varphi) d\varphi.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{a} \int e(b\varphi) de^{a\varphi} = \frac{1}{a} \left\{ e(b\varphi) e^{a\varphi} - \frac{b}{a} \int e^{a\varphi} g(b\varphi) d\varphi \right\} = \\
 &= \frac{1}{a} e(b\varphi) e^{a\varphi} - \frac{b}{a^2} \int g(b\varphi) de^{a\varphi} = \\
 &= \frac{1}{a} e(b\varphi) e^{a\varphi} - \frac{b}{a^2} \{ g(b\varphi) e^{a\varphi} + bI \}; \\
 I &= \frac{e^{a\varphi} \{ a e(b\varphi) - b g(b\varphi) \}}{a^2 + b^2} + c.
 \end{aligned}$$

20. Доказать, что

$$\int \cos \varphi e(\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} i - \frac{g(2\varphi)}{4} + c.$$

ГЛАВА II

КРИВАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ

§ 13. Понятие кривой линии. Методы элементарной и аналитической геометрии с успехом применяются к рассмотрению только небольшого числа типов различных линий и поверхностей: прямой, окружности конических сечений, плоскости, сферы, кругового конуса, цилиндра и поверхностей второго порядка. Поэтому при изложении этих математических дисциплин обычно обходятся без общего определения понятия линии и поверхности. Такое определение становится, однако, необходимым при переходе к топологии и дифференциальной геометрии, потому что топология изучает свойства кривых линий и поверхностей во всей их общности, а дифференциальная геометрия рассматривает весьма обширный класс этих геометрических образов, содержащий бесконечное множество различных частных случаев.

Мы начнем с топологического определения кривой линии, предполагая, что понятие прямой и ее отрезка уже дано в элементарной геометрии.

Топологическим, или непрерывным, соответствием двух точечных множеств называется такое взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором всяким двум бесконечно сближающимся точкам одного множества соответствуют бесконечно сближающиеся точки другого множества. Если между двумя такими множествами можно установить указанное соответствие, то говорят, что эти множества *топологически эквивалентны* между собой.

Простой дугой называют такое множество точек, которое топологически эквивалентно отрезку прямой. Точки, соответствующие конечным точкам отрезка, называются *конечными точками дуги*, а две дуги называются *примыкающими*, если одна пара концов этих дуг или обе пары этих концов совпадают между собой.

Кривой линией называют такое множество точек, которое состоит из конечного или счетного множества простых дуг, примыкающих друг к другу.

§ 14. Параметрическое уравнение кривой. Допустим, что простая дуга AB отображена топологически на прямолинейный отрезок A_0B_0 так, что всякой точке M этой дуги соответствует точка M_0 отрезка.

Будем определять всякую точку прямой A_0B_0 при помощи ее абсциссы так, как это делается в аналитической геометрии, т. е. выберем начало координат O , некоторое положительное направление и будем измерять отрезки некоторым масштабным отрезком. Всякой точке прямой мы отнесем таким образом ее абсциссу, которую будем считать положительной для точек, расположенных по одну сторону от O , и отрицательной для точек, расположенных по другую сторону. Если известен закон, по которому точки дуги отображаются в точки отрезка, то задание абсциссы t определит также и положение точки M дуги. Этим способом мы отнесем всякой точке M дуги AB число t . Соответствие между точками дуги и числами будет взаимно однозначным и непрерывным, так как бесконечно близким абсциссам t и t' соответствуют бесконечно близкие точки M_0 и M'_0 отрезка A_0B_0 , а им в свою очередь отвечают бесконечно близкие точки M и M' дуги.

Если указанное соответствие между числами и точками дуги осуществлено, то говорят, что дуга *параметризована*, а значение числа t называют *параметром* соответствующей точки.

Всякую дугу можно топологически отобразить на данный отрезок бесчисленным множеством различных способов, и каждому из этих способов будет соответствовать свой способ параметризации дуги. Рассмотрим два таких способа, и пусть при первом из них точке M относится значение параметра t , а при втором — значение τ . Эти значения будут связаны между собой функциональной зависимостью

$$t = f(\tau),$$

причем очевидно, что функция $f(\tau)$ должна быть однозначна и непрерывна вместе со своей обратной функцией.

Если в пространстве задано начало O , то всякая точка M дуги определяется ее *радиусом-вектором* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Если дуга параметризована, то положение этой же точки определяется заданием значения параметра t . При этом всякому значению параметра будет соответствовать определенное значение радиуса-вектора \vec{r} . Иными словами, *радиус-вектор точки дуги является функцией параметра, определяющего эту точку*

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Согласно предыдущим определениям эта функция должна быть непрерывной. Соотношение, которое определяет зависимость радиуса-вектора точки параметризованной дуги от ее параметра, называется *параметрическим уравнением* этой дуги.

Подобным же образом параметризуется и кривая, составленная из ряда простых дуг, и устанавливается ее *параметрическое уравнение*. Мы можем также сказать, что *параметрическое уравнение кривой* выражает такую зависимость радиуса-вектора от ее точки от параметра, для которой кривая является *годографом*.

Дифференциальная геометрия изучает некоторый класс кривых, определенных указанным топологическим образом.

Эти кривые характеризуются возможностью такой их параметризации, при которой радиус-вектор точки выражается как дифференцируемая функция параметра. В дальнейшем мы всегда будем предполагать эту дифференцируемость и для радиуса-вектора и для других рассматриваемых нами функций. Более того: мы будем предполагать, что у всех этих функций существуют производимые до тех порядков включительно, которые потребуются для наших рассуждений.

УПРАЖНЕНИЯ

21. Составить параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, приняв за параметр угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку кривой.

О т в е т:

$$x = \frac{2a}{1+k^2}; \quad y = \frac{2ak}{1+k^2}.$$

22. Абсцисса как параметр. Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — однозначная функция, то x можно принять за параметр. Параметрическое уравнение кривой

$$r = xi + f(x)j.$$

23. Полярный параметр. Составить параметрическое уравнение плоской кривой, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, приняв полярный угол за параметр.

О т в е т:

$$r = \rho(\varphi) e(\varphi),$$

где

$$e(\varphi) = i \cos \varphi + j \sin \varphi.$$

§ 15. Касательная прямая кривой. Прямая называется *касательной* к кривой в данной ее точке, если она является предельным положением секущей, проходящей через данную точку и другую точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной.

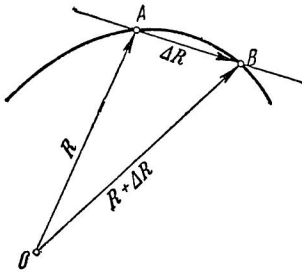


Рис. 3.

Предположим, что кривая параметризована и ее уравнение имеет вид $r = r(t)$. Пусть точкам A и B (рис. 3) этой кривой соответствуют значения параметра t и $t + \Delta t$, а их радиусы-векторы равны r и $r + \Delta r$ соответственно. В таком случае вектор Δr соответствует хорде \overline{AB} , а вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ направлен по секущей AB в ту же сторону, как и эта хорда, если

$\Delta t > 0$, и в противоположную сторону, если $\Delta t < 0$.

Если точка B неограниченно приближается по кривой к точке A , то секущая AB вращается вокруг точки A , стремясь занять положение

касательной. Вместе с тем отношение $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ стремится к производной $\dot{\mathbf{r}}$ как к своему пределу.

Отсюда следует, что производная от радиуса-вектора точки параметризованной кривой по параметру есть вектор, направленный по касательной к этой кривой.

Если, кроме того, принять во внимание замечание, сделанное относительно направления вектора \overrightarrow{AB} , то станет очевидным, что вектор $\dot{\mathbf{r}}$ направлен по касательной в сторону возрастания параметра.

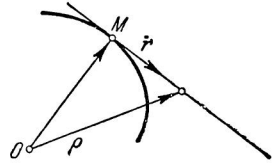


Рис. 4.

Чтобы получить уравнение касательной, воспользуемся обычным приемом аналитической геометрии, позволяющим выразить радиус-вектор ρ любой точки прямой через радиус-вектор \mathbf{r} начальной точки, направляющий вектор $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}$ и параметр λ (рис. 4):

$$\rho = \mathbf{r} + \lambda \dot{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Выразив векторы через их координаты

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; & \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \rho &= \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

получим из (2)

$$\begin{aligned} \xi &= x + \dot{x}\lambda, \\ \eta &= y + \dot{y}\lambda, \\ \zeta &= z + \dot{z}\lambda. \end{aligned}$$

Исключив λ , получим канонические уравнения касательной

$$\frac{\xi - x}{\dot{x}} = \frac{\eta - y}{\dot{y}} = \frac{\zeta - z}{\dot{z}}. \quad (3)$$

Указанный способ определения касательной, очевидно, неприменим в той точке кривой $t = t_0$, в которой вектор $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$ обращается в нуль. Такие точки мы будем называть *особыми* точками параметризованной кривой и исключим из рассмотрения.

Особая точка называется *несущественной*, если радиус-вектор разложим вблизи этой точки по формуле Тейлора. В этой точке направляющий вектор касательной можно определить следующим образом. Допустим для общности, что при $t = t_0$, кроме первой производной, обращаются в нуль все производные радиуса-вектора до некоторого порядка $s - 1$ включительно. В таком случае

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{s!} \{ \mathbf{r}^{(s)}(t_0) + \alpha \} \Delta t^s.$$

Вектор, направленный по секущей, соединяющей точки $r(t)$ и $r(t_0)$, можно представить в виде

$$\frac{r(t) - r(t_0)}{\Delta t^s} = \frac{1}{s!} \{r^{(s)}(t_0) + \alpha\},$$

где $\alpha \rightarrow 0$ вместо с Δt .

При неограниченном сближении точек предельное положение вектора секущей определяет направление касательной. Таким образом, направляющий вектор касательной

$$T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(t_0)}{\Delta t^s} = \frac{1}{s!} r^{(s)}(t_0),$$

а уравнение касательной может быть записано в виде

$$\frac{\xi - x_0}{x_0^{(s)}} = \frac{\eta - y_0}{y_0^{(s)}} = \frac{\zeta - z_0}{z_0^{(s)}}. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЯ

24. Доказать, что кривая (цилиндро-коническая винтовая линия)

$$r = e^{mt} \{ae(t) + bk\}$$

расположена на круговом конусе

$$b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$$

и пересекает его образующие под постоянным углом (рис. 5).

Указание. Вектор образующей конуса представить в виде

$$ae(t) + bk.$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{m^2(a^2 + b^2) + a^2} \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

25. Найти касательную в особой точке кривой

$$x = t^2; \quad y = \frac{t^3}{3}; \quad z = \frac{t^4}{12}.$$

Ответ: Ось Ox .

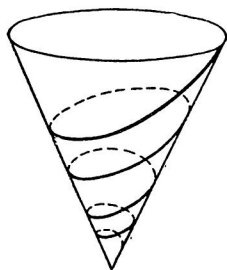


Рис. 5.

26. Циклоида. Точка окружности, катящейся без скольжения по прямой описывает циклоиду. Составить ее параметрическое уравнение.

Предположим, что окружность радиуса a катится по оси Ox , причем в начальный момент движения точка находилась в начале координат. Обозначим через t угол между вертикальным радиусом окружности и радиусом, направленным в точку M циклоиды.

Радиус-вектор этой точки

$$r = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CM},$$

где A — точка прикосновения окружности к оси Ox (рис. 6), а C — ее центр, но $\overrightarrow{AC} = ja$;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= -(i \sin t + j \cos t) a, \\ \overrightarrow{OA} &= iat.\end{aligned}$$

Последнее следует из того, что окружность катится без скольжения,

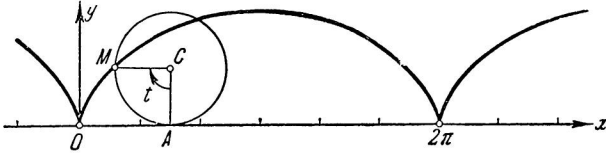


Рис. 6.

благодаря чему отрезок OA равен длине дуги окружности \overline{AM} .

Таким образом,

$$r = a \{ (t - \sin t) i + (1 - \cos t) j \}.$$

Касательный вектор циклоиды

$$\dot{r} = a \{ (1 - \cos t) i + \sin t j \}$$

обращается в нуль в ее особых точках при $t = 2k\pi$. Но в этих же точках $\dot{r} = aj$, откуда следует, что касательная в них параллельна оси Oy .

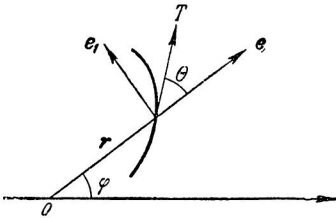


Рис. 7.

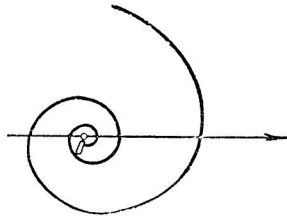


Рис. 8.

27. Касательная кривой, заданной в полярных координатах.

О т в е т: Вектор касательной (рис. 7)

$$T = \frac{d\rho}{d\varphi} e(\varphi) + \rho g(\varphi).$$

Угол, образуемый касательной с направлением радиуса-вектора точки прикосновения,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)}. \quad (*)$$

28. Логарифмическая спираль (рис. 8) в полярных координатах определяется уравнением

$$\rho = ae^{m\varphi}.$$

Если m положительно, то при неограниченном возрастании φ , ρ неограниченно возрастает. При $\varphi \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$, а при $\varphi \rightarrow -\infty$, $\rho \rightarrow 0$. Кривая закручивается вокруг полюса, никогда его не достигая. При повороте кривой на угол φ_0 вокруг полюса уравнение принимает вид

$$\rho = ae^{m\varphi_0} e^{m\varphi} = a_1 e^{m\varphi}.$$

Отсюда следует, что поворот логарифмической спирали вокруг полюса равносителен ее подобному преобразованию.

Кривая пересекает все радиусы-векторы под постоянным углом, так как из (*) следует

$$\operatorname{ctg} \theta = m.$$

§ 16. Винтовая линия. Отрезок постоянной длины a , перпендикулярный некоторой прямой, скользит по ней одним из своих концов. Если расстояние, проходимое этим концом, пропорционально углу φ поворота отрезка, то другой его конец описывает *винтовую* линию.

Если точка A отрезка AB скользит по прямой, совпадающей с осью Oz , а φ есть угол, образованный этим отрезком с осью Ox , то соответствующий ему вектор (рис. 9)

$$\vec{AB} = a(i \cos \varphi + j \sin \varphi) = ae(\varphi).$$

Расстояние точки A от начала координат пропорционально углу φ

$$OA = b\varphi.$$

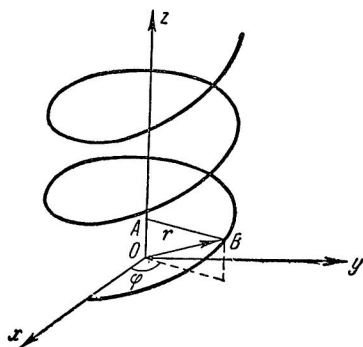


Рис. 9.

Радиус-вектор точки B винтовой линии

$$\mathbf{r} = \vec{OA} + \vec{AB},$$

откуда уравнение винтовой линии

$$\mathbf{r} = ae(\varphi) + b\varphi \mathbf{k}, \quad (1)$$

где \mathbf{k} — единичный вектор оси Oz .

Касательный вектор винтовой линии

$$\dot{\mathbf{r}} = a\mathbf{g} + b\mathbf{k}, \quad (2)$$

где $\mathbf{g} = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$ образует постоянный угол $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$ с плоскостью Oxy .

§ 17. Неявное уравнение плоской кривой. Исключая параметр из уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (1)$$

кривой, расположенной в плоскости Oxy , мы можем прийти к соотношению вида

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

которое называется *неявным уравнением* кривой. Уравнение такого вида используется в аналитической геометрии для изучения прямой, окружности и кривых второго порядка.

Подставляя выражения x и y в уравнение (2), получим тождественное равенство, справедливое при любом значении t

$$F\{x(t); y(t)\} = 0.$$

Дифференцируя левую часть по независимому переменному t , будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0. \quad (3)$$

Из этого уравнения можно определить отношение координат направляющего вектора касательной в данной точке кривой, если величины

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

не равны в ней одновременно нулю.

Принимая во внимание (3), перепишем уравнение касательной

$$\frac{\xi - x}{\dot{x}} = \frac{\eta - y}{\dot{y}} \quad (4)$$

в виде

$$F_x (\xi - x) + F_y (\eta - y) = 0. \quad (5)$$

Нормалью плоской кривой называют прямую, расположенную в ее плоскости, перпендикулярную касательной и проходящую через точку прикосновения.

Угловым коэффициентом нормали обратен по величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту касательной (из условия перпендикулярности). Отсюда следует, что уравнение нормали может быть представлено в следующих видах:

$$\dot{x} (\xi - x) + \dot{y} (\eta - y) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\xi - x}{F_x} = \frac{\eta - y}{F_y}. \quad (7)$$

Последнее уравнение показывает, что величины F_x и F_y могут быть приняты за координаты направляющего вектора нормали плоской кривой.

УПРАЖНЕНИЕ

29. *Овалом Кассини* называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянная величина b^2 . Составить уравнение этой кривой, ее касательной и исследовать форму кривой, разыскивая точки, в которых касательные параллельны координатным осям.

Решение. Поместив точки F_1 и F_2 на оси Ox на расстоянии a от начала координат, получим уравнение кривой в виде

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = c,$$

где

$$c = b^4 - a^4.$$

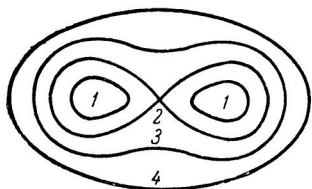


Рис. 10.

Уравнение касательной

$$x(x^2 + y^2 - a^2)(\xi - x) + y(x^2 + y^2 + a^2)(\eta - y) = 0.$$

В следующей таблице помещено число точек кривой, в которых касательные параллельны осям координат.

| | | пар. Ox | пар. Oy |
|---|----------------|-----------|-----------|
| 1 | $c < 0$ | 4 | 4 |
| 2 | $c = 0$ | 4 | 2 |
| 3 | $0 < c < 2a^4$ | 6 | 2 |
| 4 | $c \geq 2a^4$ | 2 | 2 |

В каждом из этих случаев кривая имеет форму, указанную на чертеже (рис. 10)

§ 18. Особые точки кривой, заданной неявным уравнением. В предыдущем параграфе мы видели, что направление касательной кривой

$$F(x, y) = 0$$

не определяется из соотношения (3) в точке x_0, y_0 , для которой

$$F'_x = 0; \quad F'_y = 0 \quad (1)$$

Такая точка называется *особой точкой неявного задания кривой*. Предположим, что ту же кривую можно выразить параметрическим уравнением

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

¹⁾ Здесь и в дальнейшем F'_x и F'_y обозначает $F_x(x_0, y_0)$ и $F_y(x_0, y_0)$.

и особая точка соответствует значению параметра $t = t_0$. Чтобы найти направление ее касательной в этой точке, будем дифференцировать тождественное равенство (3) § 17, имея в виду, что F_x и F_y являются сложными функциями независимого переменного t . Это дифференцирование приведет нас к новому тождеству

$$F_{xx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2F_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + F_{yy} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + F_x \frac{d^2x}{dt^2} + F_y \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad (2)$$

которое обращается в особой точке в уравнение

$$F_{xx}^0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2F_{xy}^0 \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + F_{yy}^0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0. \quad (3)$$

Если все коэффициенты этого уравнения не обращаются в нуль одновременно, то из него можно определить отношение координат касательного вектора. Однако при этом придется решать квадратное уравнение и могут иметь место следующие случаи, в зависимости от знака дискриминанта левой части уравнения

$$\delta = F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0{}^2. \quad (4)$$

А. $\delta > 0$. Корни уравнения (3) мнимы и мы приходим к противоречию, предполагая, что кривая имеет действительную ветвь, проходящую через точку (x_0, y_0) . Такая точка называется *изолированной*. В анализе доказывається, что в некоторой ее окрестности нет других точек кривой¹⁾.

В. $\delta < 0$. Корни уравнения (3) действительны и различны. В анализе доказывається²⁾, что в этом случае через точку (x_0, y_0) проходят две ветви кривой, имеющие различные касательные, направления которых и определяется из уравнения (3). Такая точка называется *узловой* (рис. 11).



Рис. 11.

С. $\delta = 0$. Корни уравнения совпадают. Анализ этого случая показывает, что могут представиться следующие возможности:

а) *Изолированная точка*. Так, например, у кривой

$$y^2 + x^4 - x^6 = 0.$$

Начало координат будет изолированной точкой, для которой выполнено условие $\delta = 0$ (рис. 12).

б) *Точка возврата первого рода*. Кривая состоит из двух ветвей с общей касательной в особой точке. Обе эти ветви расположены

¹⁾ Гурса, Курс матем. анализа, т. 1, стр. 98.

²⁾ Там же.

только по одну сторону от нормали и по разные стороны от касательной в этой точке. Примером такой точки может служить начало координат

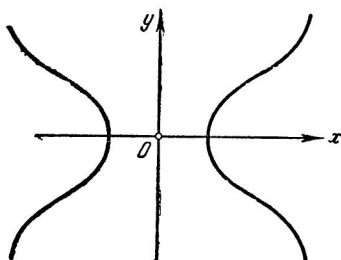


Рис. 12.

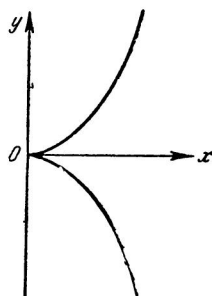


Рис. 13.

для полукубической параболы (рис. 13)

$$y^2 = ax^3.$$

с) *Точка возврата второго рода.* Две ветви кривой, проходящие через особую точку и имеющие в ней общую касательную, расположены по одну сторону от нормали и по одну сторону от касательной. Так, например, у кривой (рис. 14)

$$(y^2 - x^2)^2 - x^5 = 0$$

начало координат есть точка возврата второго рода.

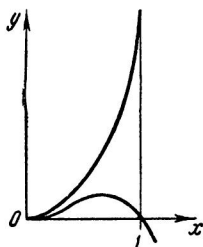


Рис. 14.

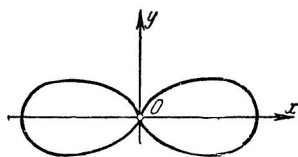


Рис. 15.

Действительно, представив уравнение кривой в виде

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

мы видим, что кривая состоит из двух ветвей, касающихся оси Ox в начале координат, причем при

$$0 < x < 1$$

y положительно для обеих ветвей.

d) *Точка самоприкосновения.* Кривая состоит из двух ветвей, не имеющих каждая в отдельности никаких особенностей, но касающихся

друг друга в особой точке. Так, например, кривая (рис. 15)

$$4x^2(x^2 - a^2) + m^2y^4 = 0$$

имеет в начале координат точку самоприкосновения.

е) Если $F_{xx}^0 = F_{xy}^0 = F_{zz}^0 = 0$ в данной точке, то через эту точку могут проходить ветви кривой в числе, большем двух (см., например, упражнение 32).

УПРАЖНЕНИЯ

30. Найти особую точку *лемнискаты Бернулли* (овал Кассини при $a = b$) и касательные в этой точке.

О т в е т: $x \pm y = 0$.

31. *Улитка Паскаля*. Конхондой данной кривой называется геометрическое место концов отрезка постоянной длины, отложенного от ее точек на продолжении их радиуса-вектора (рис. 16).

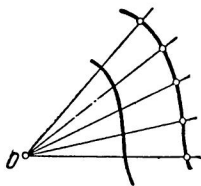


Рис. 16.

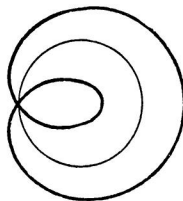


Рис. 17.

Конхоида окружности называется улиткой Паскаля, если полюс расположен на самой окружности.

Уравнение кривой в полярной системе координат

$$\rho = 2a \cos \varphi + b,$$

а в прямоугольной системе координат

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Исследовать ее особую точку при различных соотношениях между a и b .

О т в е т: 1. $b < 2a$ узловая точка (рис. 17).

2. $b = 2a$ кардиоида. Точка возврата первого рода (рис. 18).

3. $b > 2a$ изолированная точка (рис. 19).

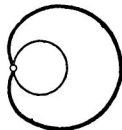


Рис. 18.

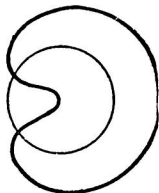


Рис. 19.

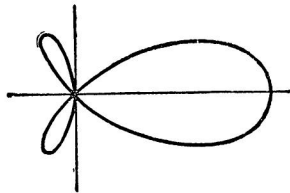


Рис. 20.

32. Найти особую точку *трилистника* (рис. 20)

$$(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0.$$

О т в е т: Через начало координат проходят три ветви кривой с касательными

$$x = 0 \text{ и } x \pm y = 0.$$

§ 19. Асимптоты. При построении плоских кривых, имеющих бесконечные ветви, весьма полезно разыскать их асимптоты. *Асимптотой* называется предельное положение касательной, точка прикосновения которой неограниченно удаляется по кривой. Для нахождения асимптоты следует получить уравнение касательной для произвольной точки этой кривой. Пусть это уравнение имеет вид

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

A , B и C , вообще говоря, будут функциями t . Пусть при стремлении t к некоторому конечному или бесконечному значению a точка кривой удаляется в бесконечность, т. е. или x , или y , или и та и другая координаты вместе стремятся к бесконечности. Если существуют пределы отношения коэффициентов уравнения касательной к одному из них при $t \rightarrow a$, то асимптота существует и отношение коэффициентов ее уравнения определяется этими пределами.

УПРАЖНЕНИЯ

33. Найти асимптоту *гиперболической спирали*

$$\rho = \frac{a}{\varphi} \quad (\text{рис. 21})$$

Решение. Представим уравнение кривой в параметрическом виде

$$r = \frac{ae(\varphi)}{\varphi}.$$

Направляющий вектор касательной

$$\dot{r} = a \left\{ \frac{g(\varphi)}{\varphi} - \frac{e(\varphi)}{\varphi^2} \right\}.$$

За вектор нормали можно принять

$$n = g(\varphi) + e(\varphi)\varphi.$$

Уравнение касательной

$$\{\varphi e(\varphi) + g(\varphi)\} \rho - a = 0.$$

Бесконечную ветвь кривой получим при $\varphi \rightarrow 0$. При этом $g(\varphi) \rightarrow j$ и уравнение асимптоты имеет вид

$$y - a = 0.$$

34. Найти асимптоты гиперболы, заданной параметрическим уравнением

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Ответ: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

35. Доказать, что парабола $y = \sqrt{2px}$ не имеет асимптоты.

36. Найти асимптоты кривой (Декартов лист)

$$x = \frac{3mt}{1+t^3}; \quad y = \frac{3mt^2}{1+t^3}.$$

Ответ $x + y + m = 0$.

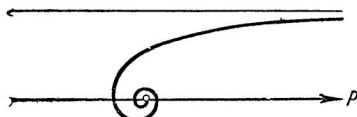


Рис. 21.

§ 20. Касательная и асимптота алгебраической кривой. Кривая называется *алгебраической*, если ее уравнение может быть приведено к виду

$$F(x, y) = 0,$$

причем левая часть его является многочленом относительно x и y . Для того чтобы найти точки пересечения кривой с прямой, выражаемой уравнением

$$y = kx + b,$$

следует подставить значение y из уравнений этой прямой в уравнение кривой, и решить относительно x получившееся алгебраическое уравнение с одним неизвестным x

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (1)$$

Если x_1, x_2, \dots, x_n корни этого уравнения, то подстановка их в правую часть уравнения прямой даст соответствующий им ряд значений y_1, y_2, \dots, y_n . И значения x_i и y_i , взятые попарно, определяют ряд искомым точек пересечения

$$M_1(x_1, y_1) M_2(x_2, y_2) \dots M_n(x_n, y_n).$$

Допустим, что M_1 и M_2 две действительные и различные точки пересечения кривой и прямой. Будем изменять в уравнении прямой коэффициенты k и b так, чтобы эти точки неограниченно сближались. Для этого достаточно, чтобы корни x_1 и x_2 многочлена (1) неограниченно сближались между собой. Однако если этот многочлен обращается в нуль при значении x_1 и x_2 , то его производная обращается в нуль при некотором значении $x = x'$, заключенном между x_1 и x_2 . При неограниченном приближении x_2 к x_1 , x тоже стремится к x_1 и в пределе корень данного многочлена будет корнем и его производной

$$f'(x) = nA_0 x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-1}, \quad (2)$$

т. е. будет кратным корнем данного многочлена. Но при том же предельном переходе секущая $M_1 M_2$ обратится в касательную и мы приходим к следующему результату: *абсцисса точки прикосновения прямой к алгебраической кривой является кратным корнем многочлена, полученного в результате исключения ординаты из уравнений кривой и касательной.*

Если алгебраическая кривая имеет бесконечные ветви, то для получения асимптот, соответствующих этим ветвям, вводят вспомогательное переменное $z = \frac{1}{x}$.

Для того чтобы значение этого переменного z_1 соответствовало двойному корню уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы оно было двойным корнем уравнения

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n = 0 \quad (3)$$

и, следовательно, должно также быть корнем уравнения

$$A_1 + 2A_2z + \dots + nA_nz^n = 0, \quad (4)$$

левая часть которого получена дифференцированием левой части (3).

Если точка кривой с координатами x_1, y_1 удаляется в бесконечность так, что при этом $x_1 \rightarrow \infty$, то $z_1 \rightarrow 0$ и в пределе уравнения (3) и (4) должны иметь нулевой корень, т. е. их свободные члены A_0 и A_1 должны обращаться в нуль.

Отсюда следует, что если уравнение $y = kx + b$ есть уравнение асимптоты, то после исключения y из уравнения $f(x, y) = 0$ коэффициенты A_0 и A_1 должны обратиться в нуль. Однако, если производить это исключение, не задаваясь частыми значениями k и b , то эти коэффициенты будут содержать значения k и b . Найдя выражения A_0 и A_1 через k и b и приравняв их нулю, получим два уравнения, из которых и определяются коэффициенты уравнения асимптоты, если она существует. Задача решения этих уравнений облегчается тем, что, как нетрудно видеть, коэффициент A_0 содержит только k , так что оно определяется уже из первого уравнения.

Следует отметить особый случай. Может оказаться, что подстановка k , найденного из уравнения $A_0 = 0$, в уравнение $A_1 = 0$ обращает его в тождество и b остается неопределенным. В этом случае следует считать, что бесконечно удаленная точка кривой, соответствующая направлению k , особая. Не входя в подробное исследование, укажем способ нахождения коэффициента b . Если коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_{s-1} тождественно обращаются в нуль при подстановке k , определенного из уравнения $A_0 = 0$, а коэффициент A_s не обращается в нуль тождественно, то, приравняв его нулю и разрешая уравнение относительно b , и определяем (вообще говоря, не одну) асимптоту, соответствующую данному k . Способ нахождения асимптоты нуждается в существенном дополнении. Разыскивая коэффициенты уравнения $y = kx + b$, мы предполагали его заданным в таком виде, который не могут иметь уравнения прямых, параллельных оси Oy . Поэтому разыскание таких асимптот должно производиться особо.

Полагая

$$x = a, \quad (5)$$

приводим уравнение кривой к виду

$$B_0y^n + B_1y^{n-1} + \dots + B_n = 0, \quad (6)$$

где n — старшая степень исходного уравнения.

Для того чтобы прямая (5) была асимптотой, должны обращаться в нуль коэффициенты B_0 и B_1 , но B_0 не зависит от a . Поэтому: *необходимым условием существования асимптоты, параллельной оси Oy , является отсутствие в уравнении старшей степени y .* Если это условие выполнено, то из уравнения $B_1 = 0$ или, в случае особой точки, из уравнения $B_s = 0$ определим a .

УПРАЖНЕНИЯ

37. Декартовым листом называется кривая

$$x^3 + y^3 - 3txy = 0.$$

Найти асимптоту, особую точку и построить кривую (рис. 22).

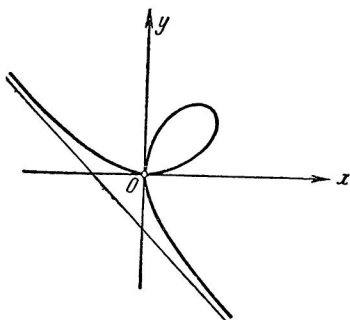


Рис. 22.

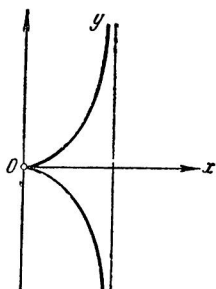


Рис. 23.

О т в е т: Асимптота $x + y + t = 0$. Касательная в особой точке $x = 0$; $y = 0$.

38. Найти асимптоту и особую точку *циссоиды Диоклеса* (рис. 23)

$$x(x^2 + y^2) = ty^2.$$

О т в е т: Асимптота $x = t$. Начало координат — точка возврата первого рода.

39. Найти асимптоты кривой

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

О т в е т: Четыре асимптоты (рис. 24)

$$k = \pm 1; \quad b = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

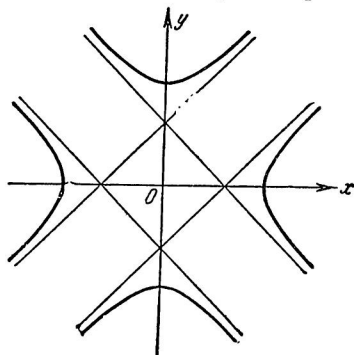


Рис. 24.

§ 21. Огибающая семейства плоских кривых. Уравнение

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

левая часть которого непрерывная и дифференцируемая функция трех переменных, выражает плоскую кривую: при каждом фиксированном значении a . Придавая a различные значения, можно получить бесконечное множество кривых. Совокупность всех таких кривых образует *семейство кривых, зависящих от параметра a* . Во многих случаях семейство допускает существование кривой, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Такая линия называется *огивающей*

данного семейства кривых. Точка прикосновения огибающей к кривой семейства называется *характеристической* точкой кривой семейства (рис. 25).

Предположим, что семейство, определенное уравнением (1), имеет огибающую. Каждая точка огибающей по определению принадлежит некоторой кривой семейства, а эта кривая определяется значением параметра a . Поэтому можно считать, что координаты точек огибающей будут функциями параметра a

$$x = x(a); \quad y = y(a), \quad (2)$$

и рассматривать эти зависимости как параметрические уравнения огибающей.

Так как всякая точка огибающей принадлежит одной из кривых семейства, то подстановка выражений (2) в уравнение (1) приводит к равенству

$$F\{x(a); y(a); a\} = 0, \quad (3)$$

справедливому при всяком значении a .

Дифференцируя по a , как по независимому переменному, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0. \quad (4)$$

Рис. 25.

Если уравнение кривой семейства имеет вид

$$x = x(t); \quad y = y(t),$$

то условием прикосновения этой кривой и огибающей будет пропорциональность координат касательных векторов

$$\frac{dx}{da} = \lambda \frac{dx}{dt}; \quad \frac{dy}{da} = \lambda \frac{dy}{dt} \quad (5)$$

в точке прикосновения.

Сделаем подстановку в уравнение (4) и приведем его к виду

$$\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Однако координаты вектора касательной кривой семейства должны удовлетворять для всякой ее точки условию

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, \quad (6)$$

откуда следует, что координаты характеристической точки удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0. \quad (7)$$

Итак, если огibaющая неизвестна, то координаты ее точек следует искать, решая совместно уравнения

$$F(x, y, a) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial a} F(x, y, a) = 0. \quad (8)$$

Разрешая эти уравнения, мы определим x и y в функции параметра a и найдем так называемую *дискриминантную кривую* данного семейства. Приведенные выше рассуждения показывают, что огibaющая, если она существует, должна входить в состав дискриминантной кривой, которая может иметь несколько ветвей. Выясним теперь, при каких условиях кривая

$$x = x(a); \quad y = y(a),$$

полученная при решении системы (8), действительно будет огibaющей. Для этого подставим найденные выражения в первое из уравнений (8), обратив его таким образом в тождество

$$F\{x(a); y(a); a\} = 0.$$

Дифференцируя и принимая во внимание второе уравнение (8), получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} = 0. \quad (9)$$

Это условие приводит нас к (5), т. е. к условию прикосновения дискриминантной кривой и кривых семейства только в том случае, если коэффициенты $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не равны нулю. В противном случае (9) может выполняться для касательного вектора $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}$ дискриминантной кривой, если он и не совпадает по направлению с касательным вектором кривой семейства. Таким образом, ветвь дискриминантной кривой может и не являться огibaющей, если в ее точках

$$F_x = F_y = 0,$$

т. е. если они являются особыми точками кривых семейств (рис. 26).



Рис. 26.

Итак, *дискриминантная кривая семейства, определяемая уравнениями (8), является огibaющей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.*

УПРАЖНЕНИЯ

40. *Астроидой* называется огibaющая семейства прямых, на которых стороны прямого угла отсекают отрезок постоянной длины l . Найти уравнение астроиды (рис. 27).

У к а з а н и е. Принять за параметр семейства угол α , обозначенный на чертеже.

О т в е т: $x = l \cos^2 \alpha,$
 $y = l \sin^2 \alpha$

или после исключения параметра

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

41. Найти огибающую семейства прямых, заданных нормальным уравнением

$$e(\alpha)r - p(\alpha) = 0, \quad (*)$$

считая, что p есть функция α (рис. 28).

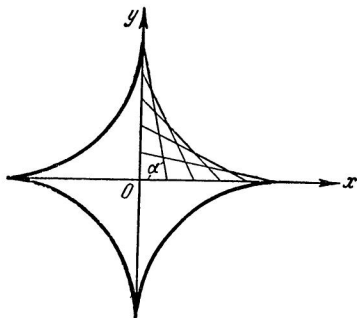


Рис. 27.

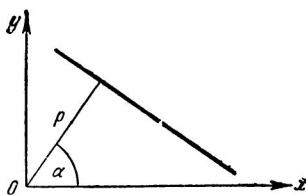


Рис. 28.

Решение. Дифференцируя уравнение семейства по параметру, получим

$$g(\alpha)r - \frac{dp}{d\alpha} = 0. \quad (**)$$

Будем искать радиус-вектор точки огибающей в виде

$$r = \lambda e(\alpha) + \mu g(\alpha).$$

Подставляя в уравнения (*) и (**), получим

$$r = pe(\alpha) + \frac{dp}{d\alpha} g(\alpha).$$

42. Найти дискриминантную кривую и огибающую семейства полукубических парабол (рис. 29)

$$3(y - c)^2 - 2(x - c)^3 = 0.$$

Решение. Дифференцируя по параметру c , получим

$$y - c - (x - c)^2 = 0.$$

Решая совместно, получим

$$x - c = 0; \quad y - c = 0,$$

$$x - c = \frac{2}{3}; \quad y - c = \frac{4}{9}.$$

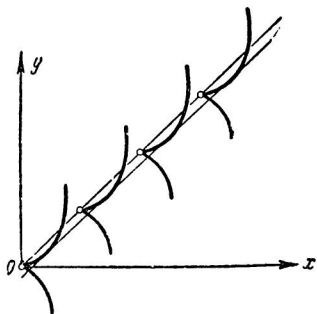


Рис. 29.

Таким образом, дискриминантная кривая распадается на пару прямых $x = y$ и $x - y + \frac{2}{9} = 0$.

Только последняя является огибающей, тогда как первая есть место особых точек.

§ 22. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Из аналитической геометрии известно, что поверхность выражается уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

связывающим координаты ее точек.

Прямая называется *касательной прямой* поверхности, если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности. Чтобы найти условие прикосновения прямой и поверхности, зададим кривую, расположенную на этой поверхности, параметрическими уравнениями

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2)$$

Подстановка координат точек этой кривой в уравнение поверхности дает тождественное равенство

$$F\{x(t); y(t); z(t)\} = 0,$$

справедливое при любом значении t .

Дифференцируя это тождество, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (3)$$

Левая часть последнего равенства содержит две группы величин.

А. Производные от координат точки кривой, равные координатам направляющего вектора касательной.

В. Частные производные от левой части уравнения поверхности, величины которых зависят только от положения точки, в которой они вычисляются и не зависят от выбора кривой, проходящей через эту точку.

Введем в рассмотрение вектор

$$N = F_x i + F_y j + F_z k, \quad (4)$$

зависящий только от точки, выбранной на данной поверхности (рис. 30). Так как левая часть равенства (3) может быть представлена в виде скалярного произведения векторов N и $\frac{dr}{dt}$, то равенство примет вид

$$N \frac{dr}{dt} = 0. \quad (5)$$

Назовем *особыми точками поверхности* точки, в которых $N = 0$, а остальные ее точки — обыкновенными. В обыкновенных точках

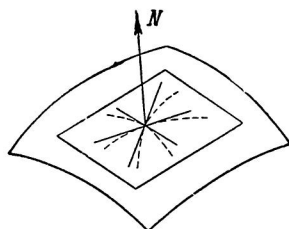


Рис. 30.

поверхности равенство (5) представляет условие перпендикулярности касательного вектора кривой и вполне определенного вектора N , связанного с данной точкой поверхности. На поверхности через данную точку можно провести сколько угодно кривых и для всех этих кривых будет иметь место условие (5). Следовательно, векторы касательных этих кривых все будут перпендикулярны одному направлению, т. е. будут расположены в одной плоскости.

Итак: *все прямые, касающиеся поверхности в обыкновенной точке, лежат в одной плоскости.*

Касательной плоскостью поверхности в ее обыкновенной точке называется геометрическое место прямых, касающихся поверхности в этой точке.

Чтобы получить уравнение касательной плоскости, примем во внимание, что она проходит через данную точку поверхности r , а ее нормальный вектор определится равенством (4). Поэтому, обозначив радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости через

$$\rho = \xi i + \eta j + \zeta k,$$

можем записать ее уравнение в виде

$$N(\rho - r) = 0 \quad (6)$$

или в координатах

$$F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) + F_z(\zeta - z) = 0. \quad (7)$$

Прямая, проходящая через точку прикосновения перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью поверхности*. Каноническое уравнение нормали, очевидно, имеет вид

$$\frac{\xi - x}{F_x} = \frac{\eta - y}{F_y} = \frac{\zeta - z}{F_z}. \quad (8)$$

УПРАЖНЕНИЕ

43. Найти уравнение касательной плоскости поверхности

$$xyz = a$$

и условие прикосновения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к этой поверхности.

Ответ: $yz\xi + zx\eta + xy\zeta = 3a$.

Условие прикосновения

$$27aABC + D^3 = 0.$$

44. Доказать, что все нормали поверхности

$$F(x^2 + y^2; z) = 0$$

перескажут ось Oz .

§ 23. **Цилиндрические и конические поверхности.** *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, описанная движением прямой постоянного направления. Эта прямая называется *образующей*, а кривая, получающаяся в сечении поверхности плоскостью, перпендикулярной образующей, — *направляющей кривой*. Если система координат выбрана так, что ось Oz параллельна образующим, а направляющая кривая, расположенная в плоскости $z=0$ имеет уравнение

$$f(x, y) = 0,$$

то последнее уравнение (без условия $z=0$) будет уравнением цилиндрической поверхности (рис. 31). Касательная плоскость цилиндрической поверхности будет иметь уравнение

$$f_x(\xi - x) + f_y(\eta - y) = 0. \quad (1)$$

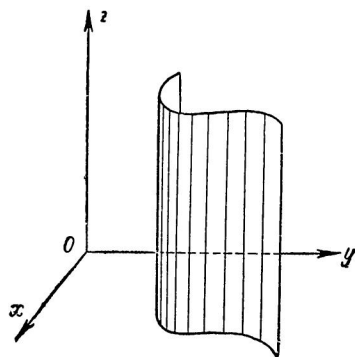


Рис. 31.

Эта плоскость параллельна оси Oz и положение ее не зависит от координаты z точки прикосновения. Таким образом, касательная плоскость цилиндрической поверхности содержит образующую и не зависит от положения точки прикосновения на этой образующей.

Конической поверхностью называется поверхность, описанная движением прямой (*образующей*), которая проходит через неподвижную точку (*вершину* конической поверхности).

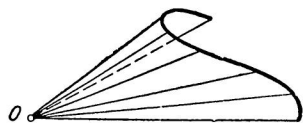


Рис. 32.

Будем называть *направляющей кривой* конической поверхности линию пересечения поверхности плоскостью, не проходящей через вершину (рис. 32).

Предположим, что вершина находится в начале координат, а направляющая кривая расположена в плоскости $z=1$ и имеет уравнение $f(x, y) = 0$. Рассмотрим однородную функцию $F(x, y, z)$, удовлетворяющую тождественному соотношению

$$F(x, y, 1) = f(x, y).$$

В таком случае уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

будет уравнением конической поверхности. Действительно, по определению однородной функции, имеем

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^p F(x, y, z).$$

Поэтому, если точка направляющей A имеет координаты $x_1, y_1, 1$, то всякая точка прямой

$$r = \lambda(x_1 i + y_1 j + k),$$

проходящей через начало координат и точку A_1 , принадлежит поверхности.

Уравнение касательной плоскости конической поверхности напишется в виде

$$F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) + F_z(\zeta - z) = 0,$$

но в силу тождества Эйлера

$$F_x x + F_y y + F_z z = pF(x, y, z)$$

и для точки, расположенной на поверхности,

$$F_x x + F_y y + F_z z = 0. \quad (2)$$

Поэтому уравнение касательной плоскости приводится к виду

$$F_x \xi + F_y \eta + F_z \zeta = 0.$$

Условие (2) показывает, что нормальный вектор касательной плоскости перпендикулярен образующей. С другой стороны, F_x, F_y, F_z — однородные функции $p-1$ измерения, так что

$$F_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{p-1} F_x(x, y, z),$$

$$F_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{p-1} F_y(x, y, z),$$

$$F_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{p-1} F_z(x, y, z).$$

Отсюда следует, что нормальный вектор поверхности сохраняет свое направление вдоль образующей. Таким образом: касательная плоскость конической поверхности содержит образующую, и ее положение не зависит от положения точки прикосновения на этой образующей.

§ 24. Особая точка поверхности. В особой точке поверхности частные производные от левой части ее уравнения по координатам точек одновременно обращаются в нуль

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0, \quad (1)$$

и равенство (3) § 22 не позволяет сделать заключения о расположении касательных прямых, проходящих через эту точку. Для того чтобы охарактеризовать это расположение, будем дифференцировать (3) § 22 по параметру t . Это дифференцирование приведет нас к новому тождеству

$$F_{xx} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + F_{yy} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + F_{zz} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2F_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2F_{yz} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} + 2F_{zx} \frac{dz}{dt} \frac{dx}{dt} + F_x \frac{d^2 x}{dt^2} + F_y \frac{d^2 y}{dt^2} + F_z \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad (2)$$

левая часть которого в особой точке не будет содержать трех последних членов.

Запишем уравнение касательных прямых, проходящих через особую точку в параметрическом виде

$$\begin{aligned}\xi - x &= \lambda \frac{dx}{dt}, \\ \eta - y &= \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \zeta - z &= \lambda \frac{dz}{dt},\end{aligned}\quad (3)$$

и подставим выражение производных в левую часть равенства (2). После сокращения на $\frac{1}{\lambda^2}$ равенство (2) примет в особой точке вид уравнения

$$F_{xx}(\xi - x)^2 + F_{yy}(\eta - y)^2 + F_{zz}(\zeta - z)^2 + 2F_{xy}(\xi - x)(\eta - y) + 2F_{yz}(\eta - y)(\zeta - z) + 2F_{zx}(\zeta - z)(\xi - x) = 0, \quad (4)$$

которому удовлетворяют координаты точек всех прямых, касающихся поверхности в этой точке.

Если среди вторых производных есть отличные от нуля, то уравнение (4) есть уравнение конуса второго порядка.

Этот конус может быть мнимым и тогда особая точка изолирована, т. е. не содержит в своей окрестности других точек поверхности.

Если конус действительный, то поверхность имеет в его вершине коническую форму. Такую точку можно получить, например, слегка деформируя этот конус, искривив его образующие так, чтобы все линии, бывшие его образующими, касались их в его вершине (рис. 33).

Наконец, уравнение (4) может выражать две плоскости. Эти плоскости будут действительными, например, в том случае, когда особая точка принадлежит линии самопересечения поверхности.

При одновременном обращении в нуль всех вторых производных дифференцирование уравнения (2) приведет к уравнению конуса, образованного касательными прямыми, причем порядок этого конуса будет выше второго. Порядок этого конуса называется порядком особой точки.

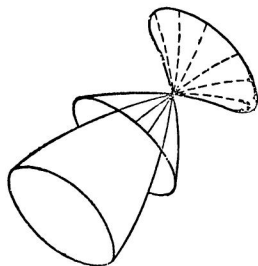


Рис. 33.

УПРАЖНЕНИЯ

45. Найти особую точку поверхности и упростить уравнение этой поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 8y - 10z = 0,$$

перенеся начало координат в эту точку.

О т в е т: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Поверхность есть круговой конус.

46. Найти особую точку поверхности

$$x^3 - z^2y - 3x^2 + 2yz + z^2 + 3x - 2z - y = 0$$

и упростить ее уравнения, перенеся начало координат в эту точку.

Отв ет: Особая линия $x = 1; z = 1$.

Упрощенное уравнение

$$x^3 + z^2 - yz^2 = 0.$$

§ 25. Неявное задание пространственной кривой. Пространственную кривую можно рассматривать как кривую пересечения двух поверхностей. Задав эти поверхности уравнениями

$$\varphi(x, y, z) = 0; \quad \psi(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

определим кривую как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют одновременно обоим этим уравнениям.

Чтобы перейти от неявного задания к параметрическому, можно поступить так. Разрешим уравнения относительно каких-либо двух переменных, например y и z , и примем третье переменное x за параметр. Тогда вместо (1) будем иметь

$$x = t; \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad (2)$$

что, очевидно, дает частный случай параметрического представления кривой.

Касательную кривой можно найти не переходя к ее параметрическому представлению. Действительно, рассматриваемая кривая лежит на обеих поверхностях и ее касательный вектор ортогонален нормальным векторам обеих поверхностей N_1 и N_2 , вычисленным для соответствующей точки. Если эти поверхности не имеют в точках кривой общей касательной плоскости, то векторы их нормалей неколлинеарны, и касательный вектор T кривой может быть получен их векторным перемножением (рис. 34)

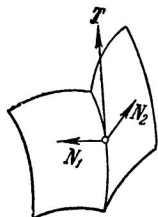


Рис. 34.

$$T = [N_1 N_2]. \quad (3)$$

Нормальные векторы поверхностей вычислим, пользуясь формулой (4) § 22, так что координатное выражение касательного вектора будет иметь вид

$$T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЯ

47. Исследовать линию пересечения цилиндров

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (*)$$

$$z^2 + y^2 = a^2. \quad (**)$$

Решение. Координаты точек искомой линии удовлетворяют уравнениям данной системы и всякой равносильной ей системы. Вычитая из (*) уравнение (**), получим

$$x^2 - y^2 = 0. \quad (***)$$

Система (*) (***) равносильна первоначальной системе, значит линия пересечения поверхностей (**) и (***) совпадает с исследуемой кривой. Но уравнение (***) выражает две плоскости.

Так как плоскости пересекают круговые цилиндры по эллипсам, то рассматриваемая линия представляет собой два эллипса, расположенных в разных плоскостях.

48. Найти касательный вектор кривой Вивини (кривой пересечения сферы и кругового цилиндра, опирающегося как на диаметр основания на радиус этой сферы) (рис. 35)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x^2 + y^2 - ax &= 0. \end{aligned}$$

Ответ: $T = 2yzi - z(2x - a)j - ayk$.

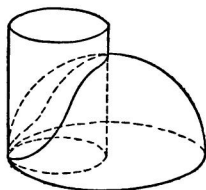


Рис. 35.

§ 26. Семейство кривых, зависящих от n параметров. Уравнение вида

$$F(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (1)$$

где x и y — координаты точки, а a_1, a_2, \dots, a_n — независимые параметры, выражает некоторую плоскую кривую, при каждой фиксированной системе значений этих параметров. Меняя эти значения, мы будем получать различные кривые, которые в своей совокупности образуют семейство, зависящее от n параметров. Примером семейства, зависящего от двух параметров, является совокупность всех прямых плоскости. Действительно, уравнение этого семейства можно представить в виде

$$y = kx + b,$$

причем угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый прямой на оси ординат, служат параметрами этого семейства. Окружности плоскости образуют семейство

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

зависящее от трех параметров, а все кривые второго порядка — семейство, зависящее от пяти параметров. Возвращаясь к общему случаю, покажем, что произвол в выборе значений параметров может быть использован для того, чтобы найти кривую семейства, проходящую через n заранее заданных точек плоскости. Действительно, для того чтобы кривая (1) проходила через точки A_1, A_2, \dots, A_n , должны выполняться условия

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, y_1, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ F(x_2, y_2, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F(x_n, y_n, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассматривая эти условия как уравнения относительно неизвестных, значений параметров, можно, решая систему, определить эти значения a с ними и искомую кривую семейства.

В согласии с этим общим выводом можно, например, найти прямую, проходящую через две данные точки плоскости, или окружность, проходящую через три данные точки.

Чтобы задача имела решение, в последнем случае заданные точки не должны лежать на одной прямой. Если это условие не выполнено, то система полученных уравнений не будет совместна.

Такую исключительную возможность нужно иметь, конечно, в виду и в общем случае.

§ 27. Соприкосновение кривых. Определяя касательную прямую, мы решали задачу о выборе из данного семейства линий (прямых) такой линии, которая связана с данной кривой наиболее тесным образом. С этой точки зрения естественно обобщить постановку вопроса, рассматривая вместе с данной кривой некоторое произвольное семейство и разыскивая такие линии этого семейства, которые наиболее тесным образом связаны с данной кривой. При этом мы будем точно следовать тому способу, при помощи которого определялась касательная прямая, учитывая только различие в числе параметров.

Рассмотрим некоторую плоскую кривую Γ

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

и семейство

$$F(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Возьмем на этой кривой n точек A_0, A_1, \dots, A_{n-1} (рис. 36) и проведем через них кривую семейства, т. е. определим значения параметров, соответствующие этой кривой. Предположим теперь, что точки A_0, A_1, \dots, A_{n-1} кривой Γ неограниченно сближаются между собой, так, например, что все они стремятся к неподвижной точке A_0 . В таком случае кривая семейства, проходящая через эти точки, будет изменять и свою форму и свое положение, а соответствующие ей значения параметров будут, вообще говоря, стремиться к некоторым предельным значениям a_1, a_2, \dots, a_n . Кривую семейства

$$F(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

соответствующую этим предельным значениям, естественно назвать *предельным положением* кривой семейства, проходящей через n неограниченно сближающихся точек данной кривой Γ , или кривой семейства, которая *соприкасается* с кривой Γ в точке A_0 .

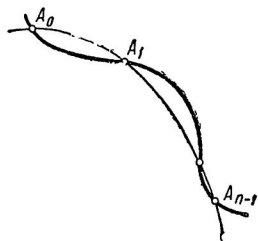


Рис. 36.

Порядком соприкосновения называется число параметров семейства, уменьшенное на единицу. Чтобы найти условие соприкосновения, предположим для определенности, что $n=3$. Пусть кривая Γ задана уравнением

$$x = x(t); \quad y = y(t), \quad (1)$$

а кривая семейства, проходящая через три ее точки A_0, A_1, A_2 , уравнением

$$F(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим функцию

$$f(t, a_1, a_2, a_3) = F\{x(t); y(t); a_1, a_2, a_3\}, \quad (3)$$

полученную в результате подстановки координат произвольной точки кривой Γ в левую часть уравнения кривой семейства. Если значения параметра t_0, t_1, t_2 соответствуют точкам A_0, A_1, A_2 , то для функции (3) мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, a_3) &= 0, \\ f(t_1, a_1, a_2, a_3) &= 0, \\ f(t_2, a_1, a_2, a_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

так как кривая семейства по условию проходит через точки A_0, A_1, A_2 и ее уравнение удовлетворяется при подстановке их координат.

Если функция $f(t, a_1, a_2, a_3)$ непрерывна и дифференцируема, то, применяя к ней теорему Ролля, получим

$$\dot{f}(t'_0, a_1, a_2, a_3) = 0; \quad \dot{f}(t'_1, a_1, a_2, a_3) = 0, \quad (5)$$

где t'_0 и t'_1 — значения параметра, заключенные между t_0, t_1 и t_2 .

Применяя теорему Ролля вторично, получим

$$\ddot{f}(t''_0, a_1, a_2, a_3) = 0. \quad (6)$$

Предположим теперь, что точки A_1 и A_2 неограниченно приближаются к точке A_0 . В таком случае параметры a_1, a_2, a_3 стремятся к некоторым предельным значениям $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, соответствующим соприкасающейся кривой семейства. Так как во все время их изменения условия (4), (5), (6) имеют место, то они имеют место и для предельного расположения кривой семейства. Но при переходе к этому положению значения t_1 и t_2 параметра стремятся к значению t_0 вместе со всеми промежуточными значениями t'_0, t'_1 и t''_0 .

Таким образом, после перехода к пределу равенства (4), (5), (6) обращаются в соотношения

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) &= 0, \\ \ddot{f}(t_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

из которых можно определить значения параметров для соприкасающейся кривой.

Приведенные для трех параметров рассуждения без всякого труда распространяются на общий случай. Система (4) заменяется системой n соотношений. Теорему Ролля можно применять к этой системе и следующим из нее $n-1$ раз, так что последнее соотношение имеет вид

$$f^{(n-1)}(t_0^{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

При переходе к пределу получим систему

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f^{(n-1)}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

из которой и определяются значения n параметров, характеризующие соприкасающуюся кривую. В заключение докажем, что кривые, соприкасающиеся в точке A_0 , имеют в этой точке общую касательную.

Прежде всего в этом можно убедиться следующим простым (хотя и не очень строгим) рассуждением. Проведем через точку A_0 и A_1 прямую, которая, очевидно, будет направлена по общей хорде кривой Γ и кривой семейства, проходящей через точки A_0, A_1, \dots, A_n . При неограниченном сближении всех этих точек прямая A_0A_1 будет стремиться занять предельное положение, в котором она, очевидно, будет касательной и к кривой Γ и к соприкасающейся кривой семейства.

К тому же результату можно прийти, рассматривая второе условие соприкосновения

$$f'(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{d}{dt} \{F(x(t); y(t); a_1, \dots, a_n)\} |_{t=t_0} = 0.$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим соотношение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \dot{x}_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \dot{y}_0 = 0,$$

из которого следует, что касательный вектор \dot{r}_0 кривой Γ направлен по касательной соприкасающейся кривой семейства, если точка соприкосновения не является особой точкой ни той, ни другой кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

49. Найти соприкасающуюся окружность кривой, заданной уравнением

$$y = f(x).$$

Решение. Так как семейство окружностей зависит от трех параметров, то в точке соприкосновения $x = x_0$ должны выполняться три условия

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \\ f'(x_0) &= 2(x_0 - a) + 2(y_0 - b)y_0' = 0, \\ f''(x_0) &= 2 + 2y_0'^2 + 2(y_0 - b)y_0'' = 0, \end{aligned}$$

которые получены в предположении, что x и y в уравнении окружности заменены координатами точки кривой, а после дифференцирования положено $x = x_0$.

Из полученных соотношений находим выражение для координат центра a радиуса *соприкасающейся окружности*

$$\left. \begin{aligned} a &= x_0 - y'_0 \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ b &= y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ R &= \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}. \end{aligned} \right\}$$

§ 28. Соприкосновение кривой и поверхности. Уравнение

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (1)$$

где x, y, z — координаты точки пространства, а a_1, a_2, \dots, a_n — независимые параметры, определяет семейство поверхностей, зависящее от n параметров.

Подставляя в уравнение семейства координаты точек A_0, A_1, \dots, A_{n-1} и разрешая полученные соотношения относительно параметров, можно найти поверхность семейства, проходящую через n данных точек.

Теория соприкосновения кривой линии к поверхности, принадлежащей данному семейству, строится вполне аналогично теории соприкосновения кривых.

Поверхность семейства, зависящего от n параметров, находится с данной пространственной кривой в соприкосновении $n - 1$ порядка, если она совпадает с предельным положением поверхности семейства, проходящей через n неограниченно сближающихся точек этой кривой.

Чтобы найти поверхность семейства, соприкасающуюся с кривой Γ определенной параметрическими уравнениями

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad (2)$$

рассмотрим уравнение поверхности

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

семейства, проходящей через точки A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , расположенные на данной кривой (рис. 37), и образуем вспомогательную функцию

$$f(t, a_1, a_2, \dots, a_n) = F\{x(t); y(t); z(t); a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

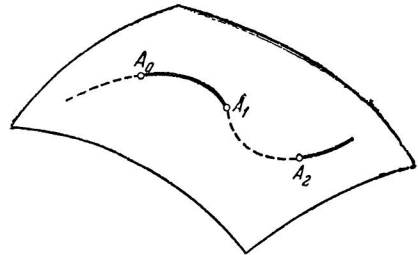


Рис. 37.

Так как эта функция должна обращаться в нуль при значениях параметра, соответствующих точкам A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , то для нее имеют место равенства

$$\begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ f(t_1, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ \dots & \\ f(t_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \end{aligned}$$

аналогичные равенствам (4) § 27. Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, т. е. применяя соответствующее число раз теорему Ролля и переходя к пределу при условии неограниченного сближения точек A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , приходим к системе соотношений

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ \dots & \\ f^{(n-1)}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

из которых и определим значения параметров a_1, a_2, \dots, a_n , соответствующие соприкасающейся поверхности.

ГЛАВА III

ДЛИНА ДУГИ И СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК КРИВОЙ

§ 29. Длина дуги. *Длина дуги* кривой линии определяется как предел периметра ломаной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к нулю.

Найдем способ вычисления длины дуги, линии, заданной параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Для этого разобьем данную дугу AB на n частей точками $A_1, A_2, \dots, A_n \equiv B$ и впишем в нее ломаную линию с вершинами в этих точках. Каждое звено этой ломаной линии будет хордой кривой, и его длина будет равна абсолютной величине приращения радиуса-вектора кривой, соответствующего переходу от точки номера $i-1$ к точке номера i

$$A_{i-1}A_i = |\Delta \mathbf{r}_i|.$$

Длина вписанной ломаной будет равна

$$S_n = \sum_{i=1}^n |\Delta \mathbf{r}_i|. \quad (1)$$

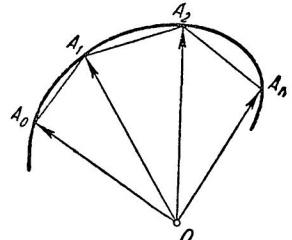


Рис. 38.

Если приращение $\Delta \mathbf{r}_i$ соответствует приращению Δt_i параметра, то ту же сумму можно представить в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i, \quad (2)$$

если при этом предположить, что номера точек возрастают вместе с возрастанием параметра, так что Δt_i положительно (рис. 38).

Но разность между отношением приращений и производной, взятой при каком-либо промежуточном значении t на промежутке Δt_i ,

стремится к нулю вместе с этим промежутком, так как предел обоих равен производной в начальной точке этого промежутка. Разность между абсолютными величинами того же отношения и производной

$$\left| \frac{\Delta r_i}{\Delta t_i} \right| - |\dot{r}(t'_i)| = \alpha_i,$$

очевидно, тоже будет бесконечно малой величиной. Представим сумму S_n в следующем виде:

$$S_n = \sum_{i=1}^n |\dot{r}(t'_i)| \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta t_i.$$

Из непрерывности производной $\dot{r}(t)$ следует, что при достаточно малых Δt_i все α_i по абсолютной величине могут быть сделаны меньше любого, наперед заданного числа ϵ , одного и того же для всех i . Так что

$$|\alpha_i| < \epsilon,$$

но в таком случае

$$|\sum \alpha_i \Delta t_i| \leq \sum |\alpha_i| \Delta t_i \leq \epsilon \sum \Delta t_i = \epsilon (t - t_0).$$

Таким образом, вторая сумма становится и остается меньше любого, наперед заданного, положительного числа при стремлении к нулю промежутков Δt_i . Но вследствие этого предел второй суммы равен нулю и

$$\lim S_n = \lim \sum_{i=1}^n |\dot{r}(t'_i)| \Delta t_i.$$

Но сумма в правой части есть интегральная сумма для функции $|\dot{r}(t)|$. Отсюда следует

$$S = \lim S_n = \int_{t_0}^t |\dot{r}(t)| dt, \quad (3)$$

и мы получили удобную для вычисления формулу длины дуги.

* Приведенное доказательство в одном пункте нуждается в уточнении. Нужно показать, что возможность выбора единого ϵ , большего абсолютных величин всех α_i , следует из непрерывности производной \dot{r} .

Для этого применим формулу Тейлора к произведению

$$\Delta r^2 = \Delta r \Delta r = \Delta r \{r(t + \Delta t) - r(t)\},$$

удержав в её правой части только один член.

К полученному соотношению

$$\Delta r^2 = \Delta r \dot{r}(t') \Delta t = \{r(t + \Delta t) - r(t)\} \dot{r}(t') \Delta t$$

применим ту же формулу вторично и получим

$$\Delta r^2 = \dot{r}(t'') \dot{r}(t') \Delta t^2,$$

где t' и t'' — два, вообще говоря, различные значения t , принадлежащие промежутку $t, t + \Delta t$.

Однако вследствие равномерной непрерывности $\dot{r}(t)$ промежутки Δt можно выбрать настолько малым, чтобы во всей области непрерывности разность

$$\dot{r}(t'') - \dot{r}(t') = \beta$$

была по абсолютной величине меньше любого, сколь угодно малого ϵ , не зависящего от положения концов промежутка Δt , причем

$$\Delta r^2 = (\dot{r}^2(t') + \beta \dot{r}(t')) \Delta t^2.$$

Оценим теперь абсолютную величину разности

$$\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| - |\dot{r}(t')| = \alpha.$$

Умножая и деля на сумму абсолютных величин $\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| + |\dot{r}(t')|$, будем иметь

$$|\alpha| = \left| \frac{\left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right)^2 - \dot{r}^2(t')}{\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| + |\dot{r}(t')|} \right| = \frac{|\beta \dot{r}(t')|}{\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| + |\dot{r}(t')|} = |\beta| \frac{|\dot{r}|}{\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| + |\dot{r}|} |\cos \theta| < |\beta| < \epsilon,$$

что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

50. Найти выражение для длины дуги цилиндрически-конической винтовой линии

$$r = e^{mt} \{ae(t) + bk\}$$

и предел этой длины в предположении, что $t_0 \rightarrow -\infty$.

$$\text{О т в е т: } s = e^{mt} \frac{\sqrt{a^2(m^2 + 1) + b^2 m^2}}{m}.$$

51. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии

$$x = a \operatorname{ch} t; \quad y = a \operatorname{sh} t; \quad z = at,$$

заключенную между точками 0 и t .

$$\text{О т в е т: } s = a \sqrt{2} \operatorname{sh} t.$$

52. Найти выражение для длины дуги циклоиды и найти длину дуги одного периода этой кривой (см. упр. 26).

$$\text{О т в е т: } s = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right) \quad (\text{при } t_0 = 0).$$

Длина дуги одного периода

$$s = 8a.$$

53. Найти выражение для длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.

Решение.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \mathbf{e}(\varphi), \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{g}(\varphi) + \dot{\varphi} \mathbf{e}(\varphi), \\ ds^2 &= \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2, \\ s &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

54. Найти длину дуги логарифмической спирали

$$\rho = ae^{m\varphi}.$$

Ответ: $s = \frac{a}{m} \sqrt{m^2 + 1} (e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0})$;

55. Найти длину дуги кривой, заданной как огибающая семейства прямых $\mathbf{e}(\alpha) \mathbf{r} - p(\alpha) = 0$.

Решение. Из решения упр. 41 имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= p \mathbf{e}(\alpha) + \frac{dp}{d\alpha} \mathbf{g}(\alpha), \\ \dot{\mathbf{r}} &= \left(p + \frac{d^2p}{d\alpha^2} \right) \mathbf{g}(\alpha), \end{aligned}$$

откуда

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(p + \frac{d^2p}{d\alpha^2} \right) d\alpha.$$

§ 30. Длина дуги как параметр. Выберем на кривой, параметризованной при помощи произвольного параметра t , некоторую точку A_0 , соответствующую значению параметра $t = t_0$, и назовем ее начальной точкой. Длина дуги, имеющей начало в точке A_0 и конец в произвольной точке A , определится формулой

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}| dt. \quad (1)$$

Она определяет s как однозначную и дифференцируемую функцию параметра t .

Так как производная этой функции

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)| \quad (2)$$

положительна во всех не особых точках кривой, то эта функция монотонно возрастает при возрастании значения параметра. Отсюда следует, что между точками кривой и значениями длины дуги, описываемой от начальной точки, можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Заметим, что точкам кривой, расположенным по разные

стороны начальной точки, соответствуют различные значения параметра, так как при $t < t_0$ значение s , определяемое интегралом (1), будет отрицательным, а при $t > t_0$ оно будет положительным.

Ввиду того что точки кривой и значения длины дуги s находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии, s можно принять за новый параметр. Этот параметр, как мы увидим ниже, особенно удобен для изучения кривой по ее уравнению и называется натуральным параметром кривой.

Итак, значение натурального параметра для некоторой точки кривой равно по величине длине дуги кривой между некоторой точкой, принятой за начальную, и данной точкой, знак же его определяется в зависимости от выбора направления движения по кривой, условно принятого за положительное.

В отличие от производных, берущихся по произвольному параметру, будем обозначать производные по натуральному параметру штрихом, так:

$$\frac{dr}{ds} = r'; \quad \frac{d^2r}{ds^2} = r'';$$

Из формулы (1) следует

$$|ds| = |\dot{r} dt| = |dr| \quad (3)$$

или

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = 1. \quad (4)$$

Таким образом, *первая производная радиуса-вектора точки кривой по натуральному параметру есть единичный вектор, направленный по касательной.*

Этому результату можно придать геометрическую формулировку. Так как производная равна пределу отношения приращения радиуса-вектора и дуги, а абсолютная величина приращения радиуса-вектора равна длине хорды, то из равенства

$$\lim \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| = 1$$

следует, что *предел отношения хорды к стягиваемой ею дуге равен единице, если дуга стремится к нулю.*

Обратно, если производная по некоторому параметру по абсолютной величине равна единице, то этот параметр натуральный. Действительно, в этом случае

$$s = \int_0^t |\dot{r}| dt = \int_0^t dt = t.$$

Всякая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной в этой точке, называется *нормалью этой кривой.* Через

всякую точку пространственной кривой проходит бесконечное множество нормалей, которые все расположены в одной плоскости. Эта плоскость называется нормальной плоскостью кривой.

Вторая производная от радиуса-вектора кривой по натуральному параметру

$$\mathbf{r}'' = \frac{d}{ds} \mathbf{r}'$$

равна первой производной от единичного вектора \mathbf{r}' , т. е. вектора постоянной длины, и, следовательно, перпендикулярна этому вектору. Но вектор первой производной направлен по касательной. Значит вектор второй производной по натуральному параметру направлен по некоторой нормали кривой. Эта нормаль называется *главной нормалью* кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

56. Параметризовать винтовую линию при помощи натурального параметра и найти вектор ее главной нормали.

Решение.

$$\dot{\mathbf{r}} = a\mathbf{g}'(\varphi) + b\mathbf{k},$$

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}| dt = t \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\mathbf{r} = ae \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'' = -\frac{a}{a^2 + b^2} e(\varphi),$$

откуда следует, что за направляющий вектор главной нормали можно принять вектор $\mathbf{N} = e(\varphi)$.

57. Параметризовать гиперболическую винтовую линию (упр. 51) при помощи натурального параметра.

$$\text{О т в е т: } x = a \sqrt{1 + \frac{s^2}{2a^2}},$$

$$y = \frac{s}{\sqrt{2}},$$

$$z = a \operatorname{Arsh} \frac{s}{a\sqrt{2}}.$$

§ 31. Соприкасающаяся плоскость. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется ее *касательной плоскостью*.

Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой, называется *соприкасающейся*.

Чтобы определить положение соприкасающейся плоскости кривой, параметризованной при помощи произвольного параметра, рассмотрим формулы преобразования производных радиуса-вектора, соответствующие переходу от параметра t к натуральному параметру s :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{s} \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''\dot{s}^2 + \mathbf{r}'\ddot{s}. \quad (2)$$

Вторая из этих формул показывает, что вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ лежит в той же плоскости, как и векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' . Но первый из них направлен по касательной, а второй по главной нормали кривой и, значит, оба эти вектора лежат в соприкасающейся плоскости. Все это приводит нас к следующему заключению.

При любой параметризации кривой вектор второй производной ее радиуса-вектора расположен в ее соприкасающейся плоскости (рис. 39).

Если t время, а

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

уравнение движения, то вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ называется *вектором ускорения* движущейся точки. *Вектор ускорения всегда расположен в соприкасающейся плоскости траектории движущейся точки.*

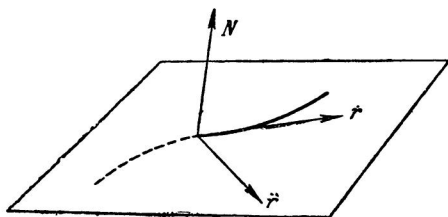


Рис. 39.

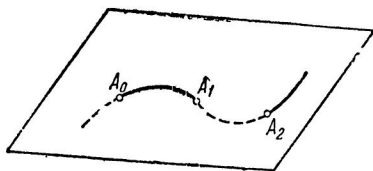


Рис. 40.

К понятию соприкасающейся плоскости можно прийти и иным способом. Так как семейство всех плоскостей пространства зависит от трех параметров и положение плоскости определяется заданием трех ее точек, не расположенных на одной прямой, то соприкасающейся плоскости можно дать такое определение: *соприкасающейся плоскостью кривой линии называется предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой линии (рис. 40).*

Если уравнение соприкасающейся плоскости кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

в ее точке

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$$

имеет вид

$$N\mathbf{r} + D = 0,$$

то согласно общей теории соприкосновения должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \{Nr(t) + D\}_{t=t_0} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \{Nr(t) + D\}_{t=t_0} &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \{Nr(t) + D\}_{t=t_0} &= 0. \end{aligned}$$

Производя дифференцирование и подстановку, получим три равенства:

$$Nr_0 + D = 0, \quad (3)$$

$$N\dot{r}_0 = 0, \quad (4)$$

$$N\ddot{r}_0 = 0. \quad (5)$$

Первое из них показывает, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку прикосновения, что совершенно очевидно.

Второе говорит, что вектор первой производной лежит в соприкасающейся плоскости. Если принять во внимание, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку A_0 , то этот результат приводит к заключению, что *соприкасающаяся плоскость кривой в данной ее точке проходит через касательную прямую, определенную для той же точки.*

Этот результат можно было предвидеть.

Действительно, прямая A_0A_1 стремилась занять положение касательной, в то время как содержащая ее плоскость $A_0A_1A_2$ принимала положение соприкасающейся плоскости. В силу непрерывности очевидно, что прямая и плоскость и в пределе должны были сохранить соединенное положение.

Третье условие выражает тот факт, что вектор лежит в соприкасающейся плоскости и в силу этого наше первое определение не отличается от второго.

§ 32. Уравнение соприкасающейся плоскости. Так как соприкасающаяся плоскость содержит векторы \dot{r} и \ddot{r} , то ее нормальный вектор B должен удовлетворять соотношениям

$$B\dot{r} = 0, \quad B\ddot{r} = 0. \quad (1)$$

Соотношения (1) позволяют найти нормальный вектор соприкасающейся плоскости во всякой точке кривой, в которой векторы первой и второй производной неколлинеарны. Его можно положить равным их векторному произведению

$$B = [\dot{r} \ddot{r}]. \quad (2)$$

Вследствие этого уравнение соприкасающейся плоскости будет иметь вид

$$(\rho - r: \dot{r}: \ddot{r}) = 0, \quad (3)$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \dot{x} & \dot{y} & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

уравнение теряет смысл для тех точек кривой, в которых

$$[\dot{r}_0 \ddot{r}_0] = 0. \quad (5)$$

Такие точки мы будем называть точками *спрямления*. Будем считать, что соприкасающаяся плоскость в этих точках не определена и в дальнейшем исключать их из рассмотрения, наравне с особыми точками кривой.

* Однако такое исключение, очевидно, недопустимо для линии, которая вся состоит из точек спрямления. Исследуем ее.

Так как производная от первой производной коллинеарна ей, то по теореме (§ 9) вектор \dot{r} имеет постоянное направление и может быть представлен в виде

$$\dot{r} = \lambda(t) a,$$

где a — постоянный вектор.

Интегрируя это соотношение и полагая

$$\mu(t) = \int \lambda(t) dt,$$

получим:

$$r = \mu a + b,$$

где вектор b играет роль постоянного интегрирования. Полученное уравнение показывает, что *линия, состоящая из точек спрямления, есть прямая*. Неопределенность соприкасающейся плоскости в этом случае очевидна, так как три точки, расположенные на одной прямой, не определяют плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

58. Найти уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии.

У к а з а н и е. Уравнение винтовой линии взять в векторном виде. При вычислении векторных произведений иметь в виду, что векторы $e(\varphi)$, $g(\varphi)$ и k образуют тройку взаимно ортогональных и единичных векторов, так что, предполагая ее правой, при векторном перемножении двух векторов, взятых в указанном циклическом порядке, получим третий вектор.

О т в е т: $\{ ak + be(\varphi) \} \rho - ab\varphi = 0$,

или

$$b \cos \varphi \xi + b \sin \varphi \eta + a\zeta - ab\varphi = 0.$$

59. Найти соприкасающуюся плоскость кривой пересечения двух поверхностей

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \psi(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Нормальный вектор соприкасающейся плоскости коллинеарен вектору

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}.$$

Для кривой пересечения двух поверхностей вектор касательной T определяется формулой (4) § 25. Дифференцируя равенства

$$dx = \lambda T_x, \quad dy = \lambda T_y, \quad dz = \lambda T_z,$$

получим:

$$\begin{aligned} B &= \lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ d\lambda T_x + \lambda dT_x & d\lambda T_y + \lambda dT_y & d\lambda T_z + \lambda dT_z \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ dT_x & dT_y & dT_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

При вычислении дифференциалов dT_x, dT_y, dT_z дифференциалы координат dx, dy, dz следует снова заменить пропорциональными им величинами

$$T_x, T_y, T_z.$$

60. Найти уравнение соприкасающейся плоскости кривой пересечения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

и гиперболического цилиндра

$$x^2 - y^2 = 3$$

в точке $(2, 1, 2)$.

О т в е т: $4x - y + z - 9 = 0$.

61. Доказать, что кривая

$$r = e^t e(t) + 2tk$$

расположена на поверхности

$$x^2 + y^2 - e^z = 0$$

и ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности.

§ 33. Сопровождающий трехгранник кривой. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим, основным* или *натуральным трехгранником* кривой. Граниями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости:

1. *Соприкасающаяся плоскость*, содержащая касательную и главную нормаль.

2. *Нормальная плоскость*, содержащая главную нормаль и бинормаль.

3. Третья плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется *спрямляющей плоскостью*¹⁾.

¹⁾ Происхождение этого названия будет объяснено ниже.

Если точка кривой задана, то для определения граней и ребер основного трехгранника нужно уметь вычислять их направляющие векторы. Направляющий вектор касательной равен первой производной

$$T = \dot{r}. \quad (1)$$

Направляющий вектор бинормали равен векторному произведению векторов первой и второй производной (рис. 41)

$$B = [\dot{r} \ddot{r}]. \quad (2)$$

Направляющий вектор главной нормали перпендикулярен вектору касательной и вектору бинормали. Поэтому его можно положить равным их векторному произведению

$$N = [\dot{r} [\dot{r} \ddot{r}]]. \quad (3)$$

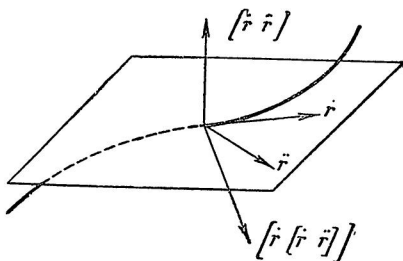


Рис. 41.

УПРАЖНЕНИЯ

62. Найти уравнение бинормали и главной нормали винтовой линии. Доказать, что ее главные нормали пересекают ось Oz под прямым углом.

О т в е т: Бинормаль

$$\rho = ae(\varphi) + b\varphi k + \lambda \{ak + be(\varphi)\}.$$

Главная нормаль

$$\rho = ae(\varphi) + b\varphi k + \lambda e(\varphi).$$

Основной трехгранник позволяет связать с каждой точкой кривой прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с касательной, главной нормалью и бинормалью. Чтобы определить их ориентацию, введем единичные векторы, направленные по этим осям в положительную сторону.

Предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру.

1. Единичный вектор касательной τ определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса-вектора по натуральному параметру

$$\tau = r'.$$

2. Единичный вектор главной нормали ν определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру

$$\nu = \frac{r''}{|r''|}.$$

3. Единичный вектор бинормали β ориентируем так, чтобы тройка векторов τ , ν , β была правой (рис. 42).

Так как векторы основного трехгранника единичны и ортогональны, то их скалярные квадраты равны единице, а их попарные скалярные произведения равны нулю:

$$\tau^2 = \nu^2 = \beta^2 = 1; \quad \tau\nu = \nu\beta = \beta\tau = 0. \quad (4)$$

Векторные произведения двух различных векторов тройки, следующие друг за другом в круговом порядке (касательная — главная нормаль — бинормаль — касательная), равны третьему вектору тройки, так как это имеет место для координатных векторов всякой правой системы координат

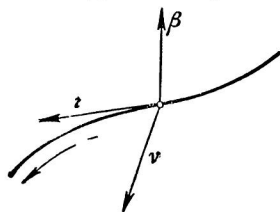


Рис. 42.

$$\left. \begin{aligned} [\tau\nu] &= \beta; \\ [\nu\beta] &= \tau; \\ [\beta\tau] &= \nu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При изменении направления возрастания дуг, т. е. при замене натурального параметра

$$s_1 = -s, \quad (6)$$

векторы τ , ν , β изменяются так:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{dr}{ds_1} = -\frac{dr}{ds} = -\tau, \\ \frac{d^2r}{ds_1^2} &= \frac{d}{ds_1} \left(\frac{dr}{ds_1} \right) = -\frac{d}{ds} \left(-\frac{dr}{ds} \right) = \frac{d^2r}{ds^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда

$$\nu_1 = \tau. \quad (8)$$

Наконец,

$$\beta_1 = [\tau\nu_1] = -[\tau\nu] = -\beta. \quad (9)$$

Итак: при изменении направления возрастания дуг векторы касательной и бинормали меняют свою ориентацию, а вектор главной нормали сохраняет ее.

§ 34. Формулы Серре — Френе. Векторы основной тройки меняются при движении точки по кривой. Чтобы охарактеризовать это изменение, нужно уметь вычислять их производные по натуральному параметру. Особенно удобно знать разложения этих производных по векторам основной тройки.

Проще всего получить производную вектора касательной, так как

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d}{ds} (r') = r'', \quad (1)$$

а вектор второй производной направлен по главной нормали, ориентирован так же, как и вектор ν .

Поэтому

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu, \quad (2)$$

где k — некоторая положительная величина, зависящая от s .

Будем искать теперь разложение производной вектора бинормали. Этот вектор определим как векторное произведение τ и ν и будем дифференцировать это соотношение, принимая во внимание (2)

$$\frac{d\beta}{ds} = \left[\frac{d\tau}{ds} \nu \right] + \left[\tau \frac{d\nu}{ds} \right] = k[\nu\nu] + \left[\tau \frac{d\nu}{ds} \right] = \left[\tau \frac{d\nu}{ds} \right].$$

Так как векторное произведение перпендикулярно каждому из своих множителей, то полученный результат показывает, что $\frac{d\beta}{ds}$ перпендикулярно τ .

С другой стороны, β — единичный вектор и его производная перпендикулярна ему самому.

Но, будучи перпендикулярна касательной и бинормали, $\frac{d\beta}{ds}$ должна быть направлена по главной нормали. Обозначая коэффициент пропорциональности κ , получим

$$\frac{d\beta}{ds} = -\kappa\nu. \quad (3)$$

Наконец, вектор главной нормали определим, перемножая векторно β и τ и дифференцируя это произведение, принимая во внимание (2) и (3):

$$\frac{d\nu}{ds} = \left[\frac{d\beta}{ds} \tau \right] + \left[\beta \frac{d\tau}{ds} \right] = -\kappa[\nu\tau] + k[\beta\nu].$$

Но вследствие формул (5) § 33 векторные произведения в правой части можно заменить векторами основной тройки, следовательно,

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \kappa\beta. \quad (4)$$

Объединяя предыдущие результаты, получим систему формул, называемых формулами Серре — Френе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau + \kappa\beta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\kappa\nu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если мы обратим внимание на строение матрицы коэффициентов разложения, определяемого этими формулами

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{array} \right\|, \right. \end{array} \right\} \quad (6)$$

то мы заметим, что она кососимметрична. Что касается коэффициентов k и κ , которые называются *кривизной* и *кручением* кривой, то их геометрическое значение и способ их вычисления будут даны ниже.

Формулы Серре — Френе позволяют просто определить коэффициенты разложения производных радиуса-вектора по векторам основного трехгранника. Будем исходить из известных формул, дающих выражение первых двух производных

$$r' = \tau, \quad (7)$$

$$r'' = k\nu. \quad (8)$$

Дифференцируя последнюю из них и пользуясь формулами Френе, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(r'') &= k'\nu + k(-k\tau + \kappa\beta), \\ r''' &= -k^2\tau + k'\nu + k\kappa\beta. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким же образом можно найти разложение производных более высоких порядков.

УПРАЖНЕНИЯ

63. Найти векторы основного трехгранника и составить формулы Серре — Френе для винтовой линии.

Решение. На основании решения упр. 56 имеем:

$$\begin{aligned} \tau = r' &= \frac{ae(\varphi) + bk}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \nu = \frac{r''}{|r''|} &= -e(\varphi); \\ \beta = \tau \times \nu &= \frac{ak - be(\varphi)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Коэффициент

$$k = |r''| = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad (*)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{be(\varphi)}{a^2 + b^2} = -\kappa\nu,$$

откуда следует, что

$$\kappa = -\frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (**)$$

Таким образом, формулы Серре — Френе имеют вид

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{a}{a^2 + b^2} \nu,$$

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{a}{a^2 + b^2} \tau + \frac{b}{a^2 + b^2} \beta, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu.$$

64. Найти рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов разложения производных радиуса-вектора точки кривой по дуге.

Решение. Предположим, что

$$r^{(n)} = A_n \tau + B_n \nu + C_n \beta.$$

Дифференцируя и пользуясь формулами Серре — Френе, получим

$$A_{n+1} = A'_n - B_n k; \quad B_{n+1} = B'_n + A_n k - C_n \kappa; \quad C_{n+1} = C'_n + B_n \kappa.$$

Например, разложение $r^{(IV)}$

$$r^{IV} = -3kk'\tau + (k'' - k^3 - \kappa k) \nu + (k\kappa' + 2k'\kappa) \beta.$$

§ 35. Другой вывод формул Серре — Френе. Формулы Серре — Френе можно получить сразу, как следствие более общей теоремы.

Предположим, что векторы m_1, m_2, m_3 , меняясь в зависимости от параметра t , образуют *нормальную тройку*, т. е. остаются при этом единичными и взаимно перпендикулярными. Все эти условия могут быть записаны одним соотношением

$$m_i m_j = \delta_{ij}, \quad (1)$$

где δ_{ij} есть так называемый *символ Кронеккера*, принимающий значения 1 при $i=j$ и 0 при $i \neq j$.

Запишем теперь разложение производной одного из векторов по этим векторам:

$$\frac{dm_i}{dt} = a_{i1} m_1 + a_{i2} m_2 + a_{i3} m_3. \quad (2)$$

Умножая обе части равенства скалярно на m_j и принимая во внимание формулы (1), получим

$$\frac{dm_i}{dt} m_j = a_{i1} \delta_{1j} + a_{i2} \delta_{2j} + a_{i3} \delta_{3j}.$$

Заметим, что в правой части остается только то слагаемое, в котором оба индекса символа δ_{ij} равны между собой. Вследствие этого

$$a_{ij} = \frac{dm_i}{dt} m_j. \quad (3)$$

Дифференцируя (1) и принимая во внимание, что правая часть равна нулю или единице, т. е. в том и другом случае постоянна, получим

$$\frac{dm_i}{dt} m_j + m_i \frac{dm_j}{dt} = a_{ij} + a_{ji} = 0, \quad (4)$$

а это есть условие косой симметрии матрицы, составленной из коэффициентов a_{ij} .

Итак: матрица разложения производных векторов нормальной тройки по векторам этой же тройки кососимметрична.

Применяя этот результат к основной тройке кривой, замечаем прежде всего, что первая формула Серре — Френе прямо следует из формулы (2), так что первая строчка матрицы разложения должна иметь вид

$$0, k, 0.$$

Если написать кососимметричную матрицу с такой первой строкой, то она необходимо будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix},$$

и формулы Серре — Френе получены.

§ 36. Лемма о единичном векторе. Пусть единичный вектор m , изменяясь, получает приращение Δm и становится равен (рис. 43)

$$m_1 = m + \Delta m.$$

Поместив начальную точку единичных векторов m и m_1 в точку O , проведем из нее, как из центра, окружность, соединяющую концы m и m_1 . Длина дуги AA_1 этой окружности

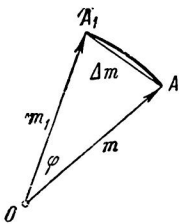


Рис. 43.

$$\overset{\frown}{AA_1} = \varphi$$

будет равна углу поворота вектора m , а длина хорды

$$AA_1 = |\Delta m|$$

абсолютной величине приращения вектора m . Так как предел

$$\lim \frac{\overset{\frown}{AA_1}}{AA_1}$$

хорды к дуге будет равен единице при $\overset{\frown}{AA_1} \rightarrow 0$, то предел отношения абсолютной величины приращения единичного вектора к углу поворота этого вектора равен единице, если этот угол стремится к нулю:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{|\Delta m|}{\varphi}. \tag{1}$$

§ 37. Кривизна. Направление касательной изменяется при движении точки по кривой. Чтобы измерить быстроту этого изменения, возьмем касательные на концах некоторой дуги (рис. 44), найдем угол φ между ними и поделим этот угол на длину Δs дуги MM_1 . Чтобы по-

лучить меру быстроты изменения направления касательной в данной точке M , предположим, что точка M_1 стремится к точке M , и найдем предел отношения

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = k. \quad (1)$$

Величину k называем *кривизной кривой* в данной ее точке.

Итак: *кривизна кривой в данной ее точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.*

Кривизна совпадает с коэффициентом k в формулах Серре — Френе. Действительно, из первой формулы следует, что положительная величина

$$k = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\tau|}{\varphi} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

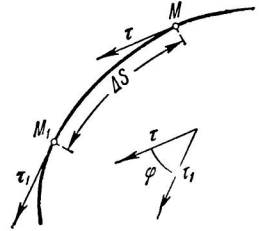


Рис. 44.

но предел отношения абсолютной величины приращения единичного вектора касательной к углу его поворота равен единице, а второй множитель совпадает с кривизной, и наше утверждение доказано. Измеряя быстроту изменения направления касательной, кривизна показывает, насколько отклоняется кривая по своей форме от формы прямой линии. Чем больше кривизна, тем сильнее это отклонение. Для прямой линии кривизна, очевидно, равна нулю во всех ее точках, так как направляющий вектор прямой не меняет своего направления. Покажем, что справедливо и обратное положение. *Если кривизна линии равна нулю во всех ее точках, то эта линия прямая.* Действительно, для рассматриваемой линии

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim_{\Delta s} \frac{\varphi}{\Delta s} = 0,$$

откуда

$$\tau = \tau_0 = \text{const.}$$

Но если

$$\tau = \frac{dr}{ds} = \tau_0,$$

то

$$r = \tau_0 s + r_0,$$

а это есть уравнение прямой линии.

§ 38. Кручение. В § 2 мы назвали кручением коэффициент κ формул Серре — Френе. Покажем теперь, что *абсолютная величина кручения в данной точке кривой равна пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся в данной точке, к длине этой дуги.*

Для доказательства будем исходить из того, что вследствие третьей формулы Серре — Френе

$$|\kappa| = \left| \frac{d\beta}{ds} \right|,$$

но

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\beta|}{\Delta s},$$

где Δs — длина дуги, стягивающейся к данной точке, а $\Delta\beta$ — соответствующее приращение единичного вектора бинормали. Но абсолютная величина приращения единичного вектора $\Delta\beta$ может быть заменена в пределе отношением углом ψ поворота вектора β на дуге Δs (рис. 45). Отсюда

$$|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\psi}{\Delta s}. \quad (1)$$

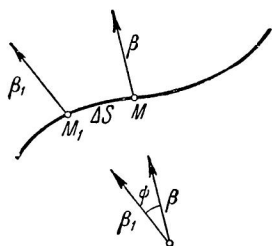


Рис. 45.

Кручение плоской кривой, очевидно, равно нулю, так как вектор бинормали совпадает с нормальным вектором этой плоскости и остается неизменным вдоль всей кривой

Докажем обратное, *если кручение равно нулю во всех точках кривой, то эта кривая плоская.*

Из третьей формулы Серре — Френе следует, что для такой кривой $\beta = \beta_0 = \text{const.}$

Так как касательный вектор перпендикулярен бинормали, то скалярное произведение

$$\beta_0 \frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds} (\beta_0 r) = 0.$$

Отсюда

$$\beta_0 r = c.$$

Таким образом, радиус-вектор точки кривой удовлетворяет уравнению постоянной плоскости, в которой и расположена кривая. Итак, можно считать, что кручение дает меру отклонения формы кривой от формы плоской кривой.

§ 39. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Чтобы вычислить кривизну и кручение, воспользуемся формулами 7, 8 и 9 § 34. Из них без труда получаются следующие соотношения:

$$r' = \tau, \quad (1)$$

$$[r' r''] = k [\tau v] = k\beta, \quad (2)$$

$$(r' r'' r''') = [r' r''] r''' = k^2 \kappa. \quad (3)$$

Эти соотношения позволяют выразить кривизну и кручение через производные радиуса-вектора r по натуральному параметру. Однако

чаще всего приходится иметь дело с кривыми, отнесенными к произвольному параметру. Чтобы перейти к такому параметру, воспользуемся формулами замены переменных:

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}t', \quad (4)$$

$$\mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}t'', \quad (5)$$

$$\mathbf{r}''' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^3 + 3\dot{\mathbf{r}}t't'' + \ddot{\mathbf{r}}t''' . \quad (6)$$

Произведя перемножение и приняв во внимание, что все произведения, содержащие равные множители, обращаются в нуль, получим

$$\tau = \dot{\mathbf{r}}t', \quad (7)$$

$$k\beta = [\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}](t')^3, \quad (8)$$

$$k^2\alpha = (\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})(t')^3. \quad (9)$$

Сравнивая абсолютные величины правой и левой частей в (4), а потом и (8), мы будем иметь

$$t' = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad (10)$$

и

$$k = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \quad (11)$$

Такова формула, определяющая кривизну.

Для кручения мы получим из (9)

$$\alpha = \frac{(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})}{k^2|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

или после замены кривизны ее выражением (11)

$$\alpha = \frac{(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \quad (12)$$

Формула (11) показывает, что обращение в нуль кривизны характеризует точку спрямления.

В координатах кривизна выражается формулой

$$k = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

которая принимает для плоской кривой, расположенной в плоскости Oxy , следующий вид¹⁾:

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (14)$$

¹⁾ В обоих случаях мы опускаем знак абсолютной величины в числителе.

а для кривой, заданной уравнением $y = f(x)$,

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (15)$$

Кручение выражается в координатах формулой

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}. \quad (16)$$

* Если мы подвергнем кривую зеркальному отражению, например от плоскости Oxz , т. е. заменим ее радиус-вектор

$$r = xi + yj + zk$$

на радиус-вектор

$$r_1 = xi - yj + zk,$$

то, как это следует из последней формулы, ее кручение изменит свой знак на обратный. Таким образом, *кручения у зеркально симметричных кривых в их соответствующих точках одинаковы по величине, но противоположны по знаку.*

К вопросу о знаке кручения мы еще вернемся в § 42, 43.

УПРАЖНЕНИЯ

65. Вычислить кривизну и кручение винтовой линии.

$$\text{Ответ: } k = \frac{a}{a^2 + b^2}; \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

66. Вычислить кривизну и кручение гиперболической винтовой линии (см. упр. 51).

$$\text{Ответ: } k = \kappa = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

67. Найти значение кривизны кривой второго порядка, по которой круговой конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

пересекается плоскостью $z = ax + by - b + 1$ в точке $(0, 1, 1)$.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой

$$k = \frac{[dr \, d^2r]}{(dr^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и указанием к упражнению 59.

$$\text{О т в е т: } k = \frac{(b-1)^2 \sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{[(b-1)^2 + 2a^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

68. Найти кривизну циклоиды (см. упр. 26).

$$\text{Ответ: } k_{\alpha} = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}.$$

69. Найти кривизну параболы $y = x^2$.

$$\text{Ответ: } k_{\alpha} = -\frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

70. Найти выражение для кривизны кривой, заданной полярным уравнением.

Решение.

$$\begin{aligned} r &= \rho e(\varphi), \\ \dot{r} &= \dot{\rho} e(\varphi) + \rho e'(\varphi), \\ \ddot{r} &= (\ddot{\rho} - \rho) e(\varphi) + 2\dot{\rho} e_1(\varphi), \\ |\ddot{r}| &= \{2\dot{\rho}^2 + \rho^2 - \rho\ddot{\rho}\} k, \\ |\dot{r}| &= (\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{3}{2}}, \\ k &= \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 - \dot{\rho}^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

71. Найти кривизну логарифмической спирали
 $\rho = ae^{m\varphi}$.

$$\text{Ответ: } k = \frac{e^{-m\varphi}}{a \sqrt{1 + m^2}}.$$

72. Найти кривизну кривой, огибающей семейство прямых

$$e(\alpha) r - \rho(\alpha) = 0.$$

$$\text{Ответ: } k = \frac{1}{\rho + \dot{\rho}}.$$

§ 40. Взаимное расположение кривой и плоскости. Рассмотрим кривую $r = r(s)$ и плоскость, которая имеет с этой кривой общую точку M_0 с радиусом-вектором $r_0 = r(s_0)$. Если n — единичный нормальный вектор плоскости, то ее нормальное уравнение имеет вид

$$n(\rho - r_0) = 0, \quad (1)$$

а формула

$$l = n(r - r_0) \quad (2)$$

выражает расстояние от произвольной точки M кривой до плоскости, причем l положительно, если точка кривой расположена по ту сторону плоскости, куда направлен вектор n , и отрицательно, если эта точка лежит по другую сторону этой плоскости.

Для оценки расстояния разложим функцию $l = f(s)$ в строку Тейлора, предположив для простоты, что точка M_0 совпадает с началом

отсчета дуг и $s_0 = 0$. Остановившись на остаточном члене четвертого порядка, мы будем иметь

$$l = (nr'_0) s + \frac{1}{2} (nr''_0) s^2 + \frac{1}{6} (nr'''_0) s^3 + As^4. \quad (3)$$

Пользуясь формулами (7), (8), (9) § 34 и опуская значок $_0$ при векторах τ , ν , β , мы получим окончательно

$$l = (n\tau) s + \frac{k}{2} (n\nu) s^2 + \frac{1}{6} n (-k^2\tau + k'\nu + kx\beta) s^3 + As^4. \quad (4)$$

Будем называть плоскость *секущей*, если она не касается кривой. Для такой плоскости $n\tau \neq 0$ и, следовательно: *расстояние от точки M кривой до плоскости, секущей кривую в точке M_0 , будет бесконечно малым того же порядка, что и длина дуги M_0M .*

Для касательной плоскости $n\tau = 0$ и

$$l = \frac{k}{2} (n\nu) s^2 + Bs^3. \quad (5)$$

Мы будем называть касательную плоскость *обыкновенной*, если она не совпадает с соприкасающейся. Для такой плоскости $n\nu \neq 0$ и, исключив из рассмотрения точки спрямления, т. е. предположив, что $k \neq 0$, приходим к следующему выводу: *расстояние от точки M кривой до обыкновенной касательной плоскости будет бесконечно малым второго порядка по отношению к длине дуги M_0M , отсчитанной от точки прикосновения M_0 .*

Наконец, для соприкасающейся плоскости $n\tau = n\nu = 0$, $n = \beta$

$$l = \frac{kx}{6} s^3 + As^4. \quad (6)$$

Исключая из рассмотрения точки спрямления ($k=0$) и уплощения ($x=0$), приходим к выводу: *расстояние от точки кривой M до соприкасающейся плоскости будет бесконечно малым третьего порядка по отношению к длине дуги M_0M , отсчитанной от точки прикосновения M_0 .*

Полученные результаты позволяют охарактеризовать взаимное расположение кривой и плоскости. Чтобы сделать это, нужно учесть геометрическое значение знаков величин s и l и связь между этими знаками.

Заметим прежде всего, что при достаточно малом s знак l совпадает со знаком первого, отличного от нуля члена разложения l . Поэтому при переходе s через нуль знак l меняется, если это разложение начинается с члена нечетной степени, и не меняется, если эта степень четная.

Но изменение знака s обозначает, что точка M , двигаясь по кривой, переходит с одной стороны точки M_0 по ее другую сторону. Если при этом и знак l изменяется, то это значит, что точка M пе-

реходит с одной стороны плоскости по ее другую сторону; если же знак l остается неизменным, то точка M возвращается на ту же сторону от плоскости, с которой она подошла к точке M_0 .

Применяя эти общие соображения к разложениям, относящимся к секущей, касательной и соприкасающейся плоскости, мы приходим к следующим трем результатам.

Предположим, что точка M движется по кривой и переходит с одной стороны точки M_0 , в которой кривая встречается с некоторой плоскостью, на другую сторону этой точки. В таком случае:

1) Точка M переходит с одной стороны плоскости на другую, если эта плоскость секущая (рис. 46).

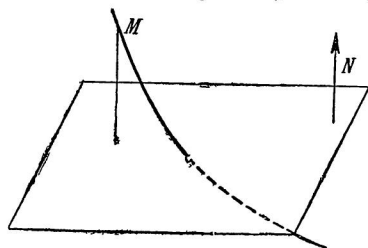


Рис. 46.

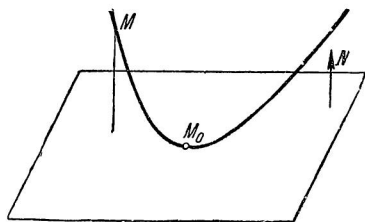


Рис. 47.

2) Точка M остается по ту же сторону плоскости, если это обыкновенная касательная плоскость (рис. 47).

3) Точка M переходит с одной стороны плоскости на другую, если эта плоскость соприкасающаяся (рис. 48).

В заключение используем формулу (4) для того, чтобы получить разложения координат точки кривой относительно прямоугольных осей, совпадающих с осями сопровождающего трехгранника. Если принять касательную за ось Ox , главную нормаль за ось Oy , а бинормаль за ось Oz , то координаты x, y, z совпадут по величине и по знаку с расстояниями точки от нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскости соответственно. Подставляя в левую часть (4) вместо n нормальные векторы этих плоскостей τ, ν, β и удерживая только первые члены разложения, мы получим

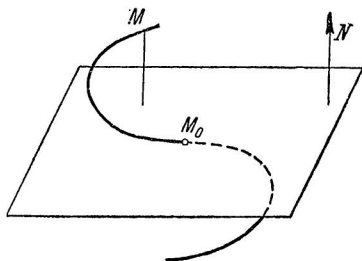


Рис. 48.

$$\begin{aligned} x &= s + \dots \\ y &= \frac{k}{2} s^2 + \dots \\ z &= \frac{kx}{6} s^3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

§ 41. Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость. Чтобы яснее представить себе зависимость формы кривой от величины k , рассмотрим проекцию кривой на соприкасающуюся плоскость. Для этого воспользуемся первыми членами разложений (7) § 40.

Первые члены этих разложений определяют знаки координат x и y вблизи начала координат, т. е. при достаточно малых (по абсолютной величине) значениях s . Больше того, кривая

$$\left. \begin{aligned} x &= s, \\ y &= \frac{1}{2} ks^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

которую получим, сохранив в данных разложениях только первые члены (и предположив, что кривизна отлична от нуля в данной точке), будет достаточно точно повторять форму проекции данной кривой вблизи начала координат.

Исключая s из уравнений (1), получим уравнение параболы (рис. 49)

$$y = \frac{k}{2} x^2. \quad (2)$$

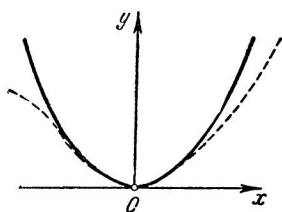


Рис. 49.

Так как кривизна определена как существенно положительная величина, то ветви параболы отходят от оси Ox в ту сторону, в которую указывает вектор главной нормали.

Приняв во внимание, что координаты точки кривой имеют вблизи данной точки те же знаки, что и знаки координат точек параболы, приходим к следующим заключениям относительно самой кривой.

Вблизи данной точки кривая расположена по ту сторону от спрямляющей плоскости этой точки, в которую направлен вектор главной нормали ν . Или, иначе: вектор главной нормали ν всегда направлен в сторону вогнутости кривой.

§ 42. Проекция кривой на спрямляющую плоскость. Первые члены разложений координат проекции кривой на спрямляющую плоскость определяются формулами (7) § 40.

Ограничиваясь главными членами этих разложений и предполагая, что в рассматриваемой точке кручение отлично от нуля, рассмотрим кривую

$$\left. \begin{aligned} x &= s, \\ z &= \frac{1}{6} kxs^3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

выражающую приближенно рассматриваемую проекцию Эта кривая

есть кубическая парабола

$$z = \frac{1}{6} kxx^3, \quad (2)$$

которая касается оси Ox в начале координат и имеет там точку перегиба. Расположение этой кривой зависит от знака коэффициента при x^3 , а знак коэффициента определяется только знаком кручения, так как кривизна всегда положительна (рис. 50).

Координата y возрастает в первом случае и убывает во втором случае по мере возрастания y . Принимая во внимание, что знаки координат определяются вблизи данной точки знаками первых членов разло-

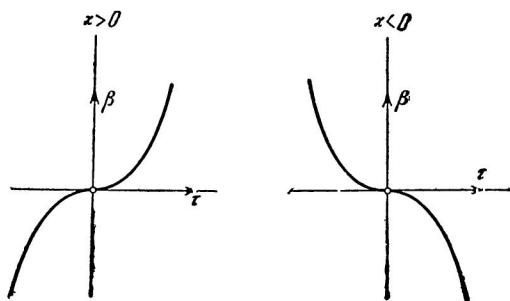


Рис. 50.

жения, мы приходим к следующим выводам о расположении кривой вблизи данной точки.

1. Вблизи данной точки кривая расположена по разные стороны от соприкасающейся плоскости.

2. Если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг и проходит через данную точку, то она переходит на ту сторону соприкасающейся плоскости, куда направлен вектор бинормали, если кручение в данной точке положительно; если же кручение отрицательно, то она переходит на противоположную сторону соприкасающейся плоскости.

При таком истолковании знака кручения может показаться, что он зависит от выбора направления возрастания параметра s . Однако это не так. Действительно, изменение этого направления равносильно изменению знака натурального параметра. Но в § 33 было показано, что при этом изменяет свое направление и вектор бинормали, а кручение и отвечающая его знаку картина расположения кривой остаются неизменными (рис. 51).

3. Кривая тем быстрее отходит от соприкасающейся плоскости, чем больше абсолютная величина кручения.

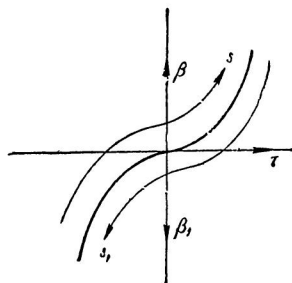


Рис. 51.

§ 43. Вид кривой вблизи данной точки. Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют судить о расположении кривой вблизи данной точки по отношению к натуральному трехграннику, соответствующему этой точке.

Плоскости этого трехгранника делят пространство на восемь частей или октантов.

Каждый из этих октантов может быть охарактеризован знаками координат расположенных в нем точек.

Будем считать, что ось Oz направлена снизу вверх, и перенумеруем верхние октанты, так как нумеруются координатные четверти в аналитической геометрии плоскости цифрами I, II, III, IV, а расположенные под ними октанты цифрами V, VI, VII, VIII. В таком случае знаки координат в октантах будут определяться следующими таблицами:

| | x | y | z |
|-----|-----|-----|-----|
| I | + | + | + |
| II | - | + | + |
| III | - | - | + |
| IV | + | - | + |

| | x | y | z |
|------|-----|-----|-----|
| V | + | + | - |
| VI | - | + | - |
| VII | - | - | - |
| VIII | + | - | - |

Рассмотрим теперь разложения координат точки кривой, предположив, что в этой точке $k \neq 0$; $\kappa \neq 0$, а оси координат Ox , Oy , Oz совпадают с касательной, главной нормалью и бинормалью данной точки соответственно.

Первые члены этих разложений, данные формулами (7) § 40

$$\begin{aligned} x &= s + \dots, \\ y &= \frac{1}{2} k s^2 + \dots, \\ z &= \frac{1}{6} k \kappa s^3 + \dots, \end{aligned}$$

определяют знаки координат вблизи данной точки.

Если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг, то при переходе через начало координат параметр s переходит от отрицательных к положительным значениям.

Заметив это, рассмотрим случаи положительного и отрицательного кручения и сведем оценку знаков координат в следующие таблицы:

| $\kappa > 0$ | | | |
|--------------|-----|-----|-----|
| s | x | y | z |
| - | - | + | - |
| + | + | + | + |

| $\kappa < 0$ | | | |
|--------------|-----|-----|-----|
| s | x | y | z |
| - | - | + | + |
| + | + | + | - |

Мы видим, что если кручение положительно, то кривая переходит из октанта VI в октант I, если же кручение отрицательно, то она переходит из октанта II в октант V.

Приняв во внимание, что кривая в начале координат касается оси Ox , мы можем изобразить ее расположение на следующих чертежах (рис. 52).

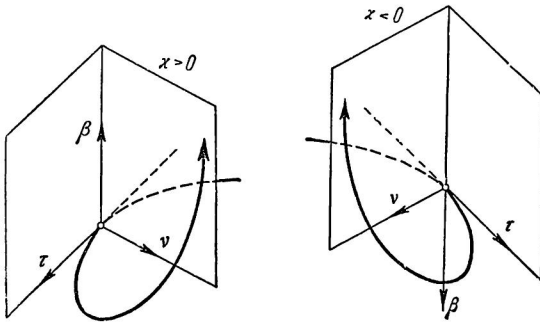


Рис. 52.

Глаз наблюдателя предполагается расположенным в первом октанте, а части кривой, закрытые плоскостями сопровождающего трехгранника, изображены пунктиром.

Из рассмотрения этих чертежей сейчас же следует, что знак кручения меняется при зеркальном отражении. Сравним кривую вблизи данной точки с винтовой линией.

Винтовая линия, рассмотренная нами, имеет положительное кручение, однако, рассмотрев ее зеркальное отражение, можно получить и винтовую линию отрицательного кручения.

На следующих чертежах изображены обе эти линии, причем части, ближайше к наблюдателю, отмечены сплошными линиями, а более далекие части — пунктиром (рис. 53).

Линия положительного кручения имеет форму обыкновенного штопора или правого винта, а линия отрицательного кручения — форму зеркального отражения штопора или форму левого винта.

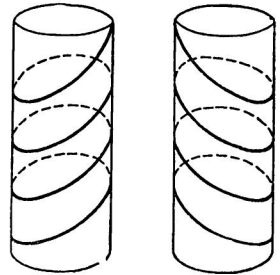


Рис. 53.

УПРАЖНЕНИЯ

73. Написать уравнение винтовой линии отрицательного кручения.

Отв е г: $r = ae(\varphi) - bk$,

где a и b — положительные числа.

§ 44. Вид кривой вблизи точки уплощения. Исследование вида разложений (7) § 40,

$$\begin{aligned}x &= s + \dots, \\y &= \frac{1}{2} ks^2 + \dots, \\z &= \frac{1}{6} kxs^3 + \dots,\end{aligned}$$

позволили нам прийти к известным заключениям о расположении кривой по отношению к основному трехграннику. Однако при этом мы предполагали, что кривизна и кручение отличны от нуля в данной точке, т. е. исключали из рассмотрения точки спрямления и точки уплощения.

Что касается точек спрямления, то в них остается неопределенной соприкасающаяся плоскость, а вместе с нею и весь основной трехгранник. Чтобы определить их в такой точке, нужны дополнительные соглашения. Поэтому не будем рассматривать точки спрямления и предположим, что кривизна отлична от нуля в данной точке. Если наряду с этим кручение равно нулю, то разложение (7) § 40 начинается с членов более высокого порядка. Находя выражение для производных более высоких порядков, так же как мы это делали для первых трех производных, и подставляя их значение в формулу Тейлора, придем, наконец, к разложениям вида

$$\begin{aligned}x &= s + \dots, \\y &= \frac{k}{2} s^2 + \dots, \\z &= es^p + \dots,\end{aligned}$$

где $p > 3$, а коэффициент e зависит определенным образом от кривизны, ее производных и производных кручения. Насколько велико p , опять-таки зависит от того, какая из этих комбинаций, первая в их ряду, не обращается в нуль.

Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость не будет существенно отличаться вблизи данной точки от рассмотренной уже в § 41.

Иначе обстоит дело с проекцией на спрямляющую плоскость. Ее вид существенно зависит от четности или нечетности p . Действительно, если p четно, то с изменением знака s знак z остается неизменным, а это значит, что кривая не переходит при этом на другую сторону соприкасающейся плоскости.

При нечетном p знак z меняется вместе со знаком s , и в этом случае, проходя через соприкасающуюся плоскость, кривая расположена относительно сопровождающего трехгранника так же, как и в обыкновенной точке. Она только теснее примыкает к соприкасающейся плоскости.

§ 45. Эволюта плоской кривой. Эволютой плоской кривой называется огибающая ее нормалей. Для плоской кривой эти нормали берутся в той же плоскости, в которой расположена и сама кривая. Если эта кривая задана уравнением $r=r(t)$, то уравнение

$$\dot{r}(\rho - r) = 0 \tag{1}$$

при изменении параметра t определяет семейство нормалей этой кривой.

Дифференцируя по этому параметру, получим уравнение

$$\ddot{r}(\rho - r) - \dot{r}^2 = 0, \tag{2}$$

из которого вместе с уравнением (1) определяется радиус-вектор эволюты.

Предположим, что кривая лежит в плоскости Oxy , и, переходя к координатам, мы приведем уравнения (1) и (2) к следующему виду:

$$\dot{x}(\xi - x) + \dot{y}(\eta - y) = 0, \tag{3}$$

$$\ddot{x}(\xi - x) + \ddot{y}(\eta - y) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \tag{4}$$

и, разрешая их относительно координат ξ, η точки эволюты, получим ее параметрическое уравнение

$$\xi = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x\dot{y} - y\dot{x}}; \quad \eta = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x\dot{y} - y\dot{x}}. \tag{5}$$

Если кривая отнесена к своему натуральному параметру s , то уравнения (1) и (2) упрощаются и принимают следующий вид:

$$r'(\rho - r) = 0,$$

$$r''(\rho - r) = 1.$$

Но

$$r' = \tau; \quad r'' = kv,$$

так что

$$\tau(\rho - r) = 0; \tag{6}$$

$$kv(\rho - r) = 1. \tag{7}$$

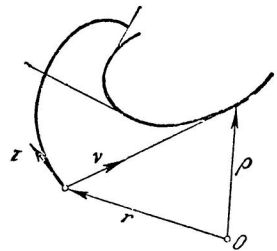


Рис. 54.

Так как все три вектора $\rho - r, \tau$ и v лежат в одной плоскости, а первый из них перпендикулярен второму в силу (6), то он параллелен третьему (рис. 54) или

$$\rho - r = \lambda v.$$

Подставляя полученный результат в (7), мы получим $\lambda = \frac{1}{k} = \rho$.

Таким образом, радиус-вектор точки эволюты плоской кривой ρ выражается через радиус-вектор r точки данной кривой, вектор ее главной нормали v и радиус ее кривизны ρ следующим образом:

$$\rho = r + \rho v. \tag{8}$$

Это соотношение показывает, что *расстояние между соответствующими точками эволюты и данной плоской кривой равно радиусу кривизны последней.*

Учитывая, что радиус кривизны ρ всегда положителен, мы можем заметить также, что *точка эволюты лежит на нормали кривой со стороны ее вогнутости.*

Для пространственной кривой точка, определенная радиусом-вектором ρ , не совпадает, вообще говоря, с точкой ее эволюты, но она всегда называется *центром кривизны данной кривой.*

УПРАЖНЕНИЯ

74. Составить уравнение эволюты эллипса (рис. 55)

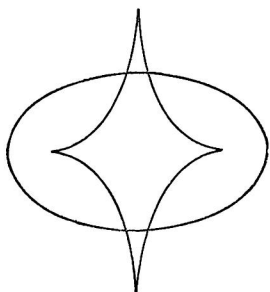


Рис. 55.

$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t.$$

О т в е т:

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t;$$

$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

75. Найти уравнение эволюты кривой, заданной полярным уравнением.

О т в е т:
$$r = \rho \frac{\dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho}}{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho}} e(\varphi) + \dot{\rho} \frac{\rho^2 + \rho^2}{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho}} g'(\varphi).$$

76. Найти эволюту спирали Архимеда

$$\rho = a\varphi.$$

О т в е т:
$$r = \frac{a \{ \varphi e(\varphi) + (\varphi^2 + 1) e_1(\varphi) \}}{\varphi^2 + 2}.$$

77. Найти эволюту логарифмической спирали.

О т в е т: Логарифмическая спираль $r = a e^{m\varphi} g'(\varphi).$

78. Найти эволюту кривой, заданной неявным уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение семейства нормалей имеет вид

$$F_y(\xi - x) - F_x(\eta - y) = 0.$$

Считая x параметром, дифференцируя и пользуясь соотношением

$$F_x + F_y y' = 0,$$

получим

$$(F_{xy} F_{xy} - F_x F_{yy})(\xi - x) + (F_x F_{yx} - F_y F_{xx})(\eta - y) = F_x^2 + F_y^2,$$

откуда

$$\xi - x = -\frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta},$$

$$\eta - y = -\frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

Кривизна данной кривой

$$k = \frac{\Delta}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

72. Найти кривизну кривой второго порядка, заданной общим уравнением.

$$\text{О т в е т: } k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда следует, что кривизна может обратиться в нуль в точке кривой второго порядка только в том случае, если кривая распадается на пару прямых.

80. Найти геометрическое место центров кривизны винтовой линии.

$$\text{О т в е т: } \text{Винтовая линия } \rho = -\frac{b^2}{a} e(\varphi) + b\varphi k.$$

§ 46. Соприкасающаяся окружность плоской кривой. Семейство всех окружностей, расположенных на плоскости, зависит от трех параметров. Поэтому можно ставить вопрос о такой окружности, которая находится с данной кривой в соприкосновении второго порядка. Эта окружность называется просто *соприкасающейся* и ее можно определить как *предельное положение окружности, проходящей через три бесконечно сближающиеся точки кривой* (рис. 56).

Предположим, что уравнение искомого соприкасающейся окружности имеет вид

$$(\rho - \rho_c)^2 - R^2 = 0,$$

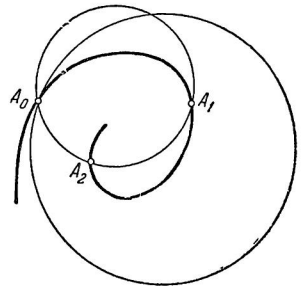


Рис. 56.

так что R — ее радиус, а ρ_c — радиус-вектор ее центра, и пусть кривая задана уравнением $r = r(s)$, где s — натуральный параметр.

В таком случае условие соприкосновения окружности и кривой

$$r = r(s)$$

в точке $s = s_0$ будет иметь вид

$$f(s_0) = \{(\mathbf{r}(s) - \rho_c)^2 - R^2\}_{s=s_0} = 0, \tag{1}$$

$$f'(s_0) = 0,$$

$$f''(s_0) = 0.$$

Но

$$f'(s) = 2(\mathbf{r} - \rho_c) \boldsymbol{\tau},$$

$$f''(s) = 2\boldsymbol{\tau}^2 + 2(\mathbf{r} - \rho_c) \mathbf{v}k = 0,$$

откуда

$$(\mathbf{r}_0 - \rho_c) \boldsymbol{\tau}_0 = 0, \tag{2}$$

$$1 + k(\mathbf{r}_0 - \rho_c) \mathbf{v}_0 = 0. \tag{3}$$

Но уравнения (2) и (3) совпадают с уравнениями (6) и (7) предыдущего параграфа. Заметив это, мы приходим к заключению, что

$$\rho_c = \mathbf{r}_0 + \rho_0 \mathbf{v} \tag{4}$$

или, иначе говоря, *центр соприкасающейся окружности плоской кривой совпадает с ее центром кривизны.*

Подставляя выражение ρ_c в (1), мы видим, что оно выражает только тот факт, что *радиус соприкасающейся окружности равен радиусу кривизны кривой.*

§ 47. Эвольвента. *Ортогональной траекторией* однопараметрического семейства линии называется кривая, которая пересекает под прямым углом все линии этого семейства.

Ортогональная траектория касательных данной кривой называется *эвольвентой* этой кривой.

Предположим, что данная кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

где s есть натуральный параметр.

Так как всякая точка эвольвенты должна лежать на касательной к данной кривой, то ее радиус-

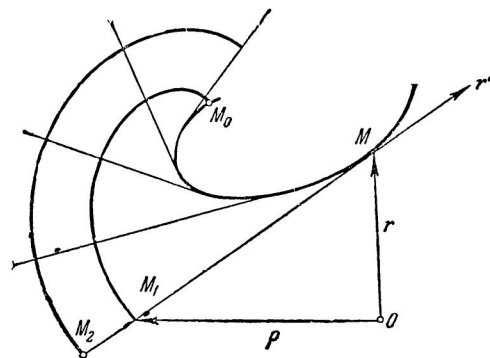


Рис. 57.

вектор может быть представлен в виде (рис. 57) $\rho = \mathbf{r} + \lambda \boldsymbol{\tau}$.

Так как вектор $\boldsymbol{\tau}$ единичный, то λ по абсолютной величине есть расстояние между точкой данной кривой и соответствующей точкой ее эвольвенты. Чтобы найти эвольвенту, нужно определить зависимость λ от s . Рассматривая s как параметр на эвольвенте (заметим, что для нее

он уже не будет являться натуральным), найдем ее касательный вектор

$$\frac{d\rho}{ds} = \tau + \frac{d\lambda}{ds} \tau + \lambda \tau'$$

Так как эвольвента пересекает касательную данной кривой под прямым углом, то

$$\frac{d\rho}{ds} r' = \left\{ \tau \left(1 + \frac{d\lambda}{ds} \right) + \lambda \tau' \right\} \tau = 0.$$

Но векторы τ и τ' взаимно перпендикулярны, откуда следует, что

$$\frac{d\lambda}{ds} + 1 = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$\lambda = s_0 - s.$$

Итак, уравнение эвольвенты кривой

$$\lambda = r(s)$$

имеет вид

$$\rho = r + (s_0 - s) \tau. \quad (1)$$

Присутствие постоянного интегрирования в уравнении эвольвенты показывает, что всякая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.

Рассмотрим две из них, соответствующие значениям

$$\lambda_1 = s_1 - s; \quad \lambda_2 = s_2 - s.$$

Расстояние между их соответственными точками

$$M_1 M_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = s_2 - s_1.$$

Таким образом, *расстояние между соответственными точками двух эвольвент данной кривой постоянно*. Слово эвольвента значит *развертка*. Чтобы объяснить происхождение этого названия, заметим, что расстояние $MM_1 = \lambda$ между точкой данной кривой и соответственной точкой ее эвольвенты равно длине дуги

$$s - s_0 = M_0 M$$

данной кривой между точкой M_0 и некоторой точкой M — соответствующими значениями параметра s_0 и s .

Отсюда следует, что эвольвенту можно построить так.

Предположим, что на кривую наложена (даже лучше сказать наклеена) гибкая и нерастяжимая нить, начало которой находится в точке M_0 . Если нить натягивать за ее конец и постепенно отделять от кривой так, чтобы она постоянно была направлена по касательной, то ее свободный конец опишет эвольвенту.

Заметим в заключение, что если кривая Γ_1 есть эволюта кривой Γ , то последняя является эвольвентой кривой Γ_1 . Так как расстояние между соответственными точками обеих кривых равно радиусу кривизны эвольвенты, то имеет место соотношение

$$c - s_1 = \rho,$$

где s_1 — длина дуги кривой Γ_1 .

УПРАЖНЕНИЯ

81. Составить уравнение эвольвент винтовой линии.

О т в е т: $\rho = ae(\varphi) + a(\varphi_0 - \varphi)g(\varphi) + b\varphi_0k$.

Плоские кривые, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости Oxy .

82. Составить уравнение эвольвенты круга.

О т в е т: $\rho = a \{e(\varphi) + (\varphi_0 - \varphi)g(\varphi)\}$

или в координатах

$$x = a \{ \cos(\varphi) - (\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi \},$$

$$y = a \{ \sin(\varphi) + (\varphi_0 - \varphi) \cos \varphi \}.$$

Заметим, что эта кривая совпадает с эвольвентой винтовой линии.

§ 48. Трактриса и цепная линия. *Трактриса* есть плоская кривая, характеризующаяся тем свойством, что отрезок ее касательной между точкой прикосновения и некоторой прямой (базой трактрисы) постоянен.

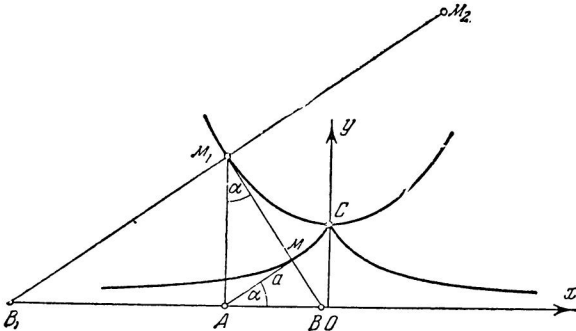


Рис. 58.

Составим уравнение трактрисы, приняв базу за ось Ox , а угол α наклона касательной к оси Ox за параметр (рис. 58). Если a есть длина постоянного отрезка касательной, то

$$y = a \sin \alpha, \quad dy = a \cos \alpha d\alpha,$$

$$dx = \operatorname{ctg} \alpha dy = a \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= a \left(\cos \alpha + \lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \\ y &= a \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При сделанном выборе постоянного интегрирования кривая симметрична относительно оси Oy .

При $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \pi$ кривая асимптотически приближается к базе. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ особая точка $x = 0$; $y = a$. Касательная в ней совпадает с осью Oy .

Найдем кривизну трактрисы. Так как для нее

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 \left(\frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \right) d\alpha^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha d\alpha^2,$$

то

$$k_\alpha = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a^2 \cos \alpha}.$$

С другой стороны, отрезок нормали BM между базой и точкой прикосновения

$$N = \frac{y}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$pN = a^2. \quad (3)$$

Таким образом, постоянный отрезок касательной трактрисы есть среднее пропорциональное между отрезком нормали и радиусом кривизны.

Отсюда следует, что для построения центра кривизны M_1 достаточно восставить перпендикуляр к базе в точке A ее пересечения с касательной и продолжить его до пересечения с нормалью.

Этот способ построения позволяет определить координаты центра кривизны

$$\begin{aligned} x_1 &= x - a \cos \alpha = a \lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \\ y_1 &= \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Исключая параметр α , получим уравнение эволюты трактрисы

$$y_1 = \operatorname{ch} \frac{x_1}{a}. \quad (4)$$

Это есть *цепная линия*, база которой совпадает с базой трактрисы, а вершина $x_1 = a$; $y_1 = 0$ с особой точкой трактрисы.

Чтобы найти кривизну цепной линии, используем тот факт, что трактриса является ее эвольвентой.

Вследствие этого длина дуги цепной линии связана с радиусом кривизны трактрисы соотношением

$$s_{10} - s_1 = p,$$

откуда

$$ds_1 = -dp.$$

С другой стороны, угол наклона касательной к цепной линии

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

откуда следует, что ее радиус кривизны

$$p_1 = \frac{ds_1}{d\alpha_1} = -\frac{dp}{d\alpha} = \frac{a}{\sin^2 \alpha} = \frac{y_1}{\sin \alpha}.$$

Но

$$N_1 = \frac{y_1}{\sin \alpha} \tag{5}$$

есть отрезок нормали цепной линии, ограниченный точкой пересечения с базой. Итак, радиус кривизны цепной линии равен отрезку ее нормали между точкой прикосновения и базой.

ГЛАВА IV

НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ

§ 49. Натуральные уравнения. Основной целью геометрического исследования является изучение формы тех или иных фигур (многоугольников, многогранников, кривых, поверхностей и т. д.), т. е. взаимного расположения частей этих фигур.

В аналитической геометрии изучаемая фигура располагается определенным образом относительно системы координат и составляются уравнения, которые прежде всего определяют расположение фигуры по отношению к этой системе. В дальнейшем это позволяет прийти к определенным выводам и относительно формы данной фигуры, что является, конечно, основной целью исследования.

С точки зрения цели геометрического исследования форма фигуры является существенной, а ее положение относительно системы координат второстепенным моментом.

Чтобы освободиться от необходимости рассматривать фигуру, например кривую или поверхность второго порядка, в связи с ее расположением относительно координатных осей, аналитическая геометрия прибегает к методу инвариантов. Инвариантом образа второго порядка называется выражение, составленное из коэффициентов его уравнения и не меняющееся при преобразовании координат или, что то же самое, при перемещении кривой относительно этой системы.

Знание полной системы инвариантов кривой вполне характеризует ее форму. С другой стороны, две кривые, одинаковые по форме, не могут иметь различных инвариантов, хотя бы они и различались по своему положению, т. е. определялись различными уравнениями.

Таким образом, знание инвариантов кривой второго порядка позволяет до конца решить вопрос о том, совпадают ли по своей форме две кривые, занимающие два различных положения на плоскости, т. е. заданные двумя различными уравнениями. Совершенно то же положение вещей имеет место и в дифференциальной геометрии. Две кривые, заданные различными параметрическими уравнениями, могут отличаться или своей формой, или только положением в пространстве. Очевидно, что решение вопроса о том, какая из этих возможностей имеет место, весьма существенно для геометрического исследования. Для решения этого вопроса дифференциальная геометрия прибегает к методу,

который по существу весьма сходен с методом инвариантов теории кривых второго порядка.

Инвариантами произвольной кривой являются ее длина дуги, кривизна и кручение. Действительно, при любом преобразовании кривой или при перемещении кривой относительно системы координат они не могут измениться.

Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить их определение. Длина дуги определяется как предел длины периметра вписанной, а кривизна и кручение как пределы отношений углов поворота касательной или бинормали к длине дуги. Но длина и углы не меняются при передвижении кривой или при преобразовании координат, а вследствие этого дуга, кривизна и кручение остаются неизменными.

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то ее кривизна и кручение являются функциями этого параметра

$$k = k(s); \quad \kappa = \kappa(s). \quad (1)$$

Система этих двух соотношений называется *натуральными уравнениями кривой*. Так как натуральные уравнения связывают инварианты кривой, то оно не меняется при преобразовании координат или при перемещении кривой относительно этой системы. Основное значение натуральных уравнений состоит в том, что задание их вполне характеризует норму кривой, так что две кривые с одинаковыми натуральными уравнениями необходимо совпадают по своей форме и могут отличаться только положением пространства.

УПРАЖНЕНИЯ

83. Составить натуральные уравнения гиперболической винтовой линии (см. упр. 51 и 66).

О т в е т: $k = \kappa = \frac{a}{2a^2 + s^2}$.

84. Составить натуральное уравнение циклоиды.

О т в е т: $s^2 + a^2 = 16a^2; \quad \kappa = 0$.

85. Составить натуральное уравнение трактрисы.

О т в е т: $p = a \sqrt{\frac{2s}{ea} - 1}; \quad \kappa = 0$.

86. Составить по натуральному уравнению данной плоской кривой натуральное уравнение ее эволюты.

Р е ш е н и е. Пусть для данной кривой

$$p = f(s).$$

Для эволюты $s_1 = p$ (гл. II, § 10) при $s_0 = s$

$$p_1 = \frac{ds_1}{d\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_1}{ds} \frac{ds}{d\alpha} = -\frac{dp}{d\alpha} p.$$

Итак,

$$s_1 = f(s); \quad p_1 = -f(s)f'(s)$$

исключая s , получим соотношение между s_1 и p_1 .

97. Составить натуральное уравнение цепной линии, рассматривая ее как эволюту трактрисы (см. § 48).

О т в е т: $p = a + \frac{s^2}{a}$.

§ 50. Кривые с общими натуральными уравнениями. Предположим, что нам даны две кривые Γ и Γ_1 . Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры s и s_1 так, чтобы в точках, отвечающих одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны k_1 и k и их кручения κ_1 и κ , т. е. чтобы

$$k_1(s_1) = k(s); \quad \kappa_1(s_1) = \kappa(s) \tag{1}$$

при

$$s = s_1,$$

то мы будем говорить, что их натуральные уравнения совпадают. Докажем, что при этом условии кривые могут отличаться только положением в пространстве. Иными словами, одну из них, например Γ_1 , можно переместить так, что она всеми своими точками совпадет с кривой Γ .

Переместим кривую Γ_1 так, чтобы ее точка A_1 , отвечающая значению параметра $s_1 = s_0$, совпала с точкой A_0 кривой Γ_0 , отвечающей тому же значению параметра s . После этого будем вращать Γ_1 вокруг этой точки до тех пор, пока векторы ее основного трехгранника, взятые в той же точке, не совпадут с векторами трехгранника кривой Γ . Этого, очевидно, можно достигнуть, так как обе тройки правые и образованы единичными и взаимно ортогональными векторами (рис. 59). Отмечая ноликом значения векторов в точке A_0 , будем иметь

$$r_1^0 = r^0; \quad \tau_1^0 = \tau^0; \quad \nu_1^0 = \nu^0;$$

$$\beta_1^0 = \beta^0.$$

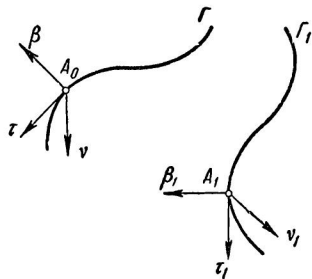


Рис. 59.

Мы должны показать, что эти равенства, которые по построению имеют место для значений $s_1 = s = s_0$, справедливы и при любом другом значении параметра. Для этого рассмотрим комбинацию

$$\tau\tau_1 + \nu\nu_1 + \beta\beta_1 = \sigma$$

и найдем ее производную по параметру s , пользуясь формулами Серре—Френе и принимая во внимание (2). Но эта производная

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} = k\beta\tau_1 + (-k\tau + \kappa\beta)\nu_1 - \kappa\nu\beta_1 + k\tau\nu_1 + \nu(-k\tau_1 + \kappa\beta_1) - \\ - \kappa\beta\nu_1 = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sigma = \text{const},$$

т. е. не зависит от s . Однако при $s = s_0$ имеем равенство

$$\sigma_0 = \tau_0^2 + \nu_0^2 + \beta_0^2 = 3,$$

вследствие чего

$$\sigma = 3$$

при любом значении s .

Скалярные произведения единичных векторов равны косинусу угла между ними, а сумма трех косинусов может равняться трем тогда, и только тогда, если каждый из этих косинусов равен единице. Отсюда следует, что при любом значении s

$$\tau_1 = \tau; \quad \nu_1 = \nu; \quad \beta_1 = \beta.$$

Используем первое из этих равенств, переписав его в виде

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr_1}{ds_1}.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$r_1(s) = r(s) + c,$$

где c — постоянный вектор. Но по условию при $s = s_0$ r_1 и r совпадают. Отсюда следует, что

$$c = 0,$$

а

$$r_1(s) = r(s)$$

при любом значении s . Таким образом, кривая Γ_1 после соответствующего перемещения совпала с кривой Γ и могла отличаться от нее только положением в пространстве.

УПРАЖНЕНИЯ

88. Доказать, что кривая

$$x = ct; \quad y = c\sqrt{2} \lg t; \quad z = ct^{-1}$$

есть гиперболическая винтовая линия.

У к а з а н и е. Составить натуральное уравнение этой кривой и сравнить его с уравнением упр. 83.

89. Если отрезок N , отсекаемый на нормали плоской кривой некоторой прямой, постоянен (рис. 60), то кривая есть окружность с центром на этой прямой.

Р е ш е н и е. Примем прямую за ось Ox . Тогда

$$y = N \cos \alpha,$$

$$dy = ds \sin \alpha = -N \sin \alpha d\alpha,$$

откуда

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{N} = \text{const.}$$

Так как кривая характеризуется своим натуральным уравнением, а радиус кривизны постоянен у окружности, то рассматриваемая линия есть

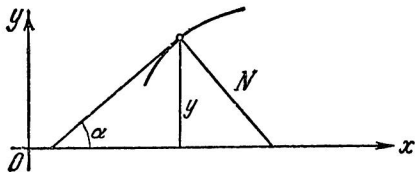


Рис. 60.

окружность. Ее радиус равен отрезку N , откуда следует, что центр окружности лежит на оси Ox .

90. Доказать, что кривая, определяемая натуральным уравнением $p^2 = 2as$; $x = 0$ есть эвольвента круга радиуса a .

У к а з а н и е. Составить натуральное уравнение эволюты данной кривой.

91. Доказать по натуральному уравнению, что эволюта циклоиды есть конгруэнтная ей циклоида (см. упр. 84).

§ 51. Дифференциальные уравнения. В дальнейшем нам неоднократно придется сталкиваться с дифференциальными уравнениями. Дифференциальным уравнением называется соотношение между независимым переменным, функцией и ее производными. Порядком уравнения называется наибольший порядок производной функции, входящей в данное уравнение. В частности, уравнение первого порядка имеет вид соотношения между независимым переменным, функцией и ее первой производной

$$f(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Интегралом или решением дифференциального уравнения называется соотношение, определяющее зависимость y от x , так что после подстановки y и ее производных в дифференциальное уравнение оно удовлетворяется, т. е. обращается в тождество.

Всякое дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество интегралов. Вообще говоря, интегральное соотношение содержит произвольные постоянные, как это видно уже на примере простейшего дифференциального уравнения

$$y' = f(x),$$

интегралом которого является соотношение

$$y = \int f(x) dx + c.$$

Интеграл уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную и имеет вид

$$F(x, y, c) = 0. \quad (2)$$

Чтобы выделить из числа интегралов уравнения какой-либо вполне определенный частный интеграл, нужно задать так называемые начальные условия, т. е. потребовать, чтобы при данном значении $x = x_0$ функция принимала некоторое определенное значение $y = y_0$.

Дифференциальные уравнения могут связывать несколько функций одного переменного и их производные с этим переменным. При этом можно рассматривать совместно несколько уравнений, образующих систему. Если число функций равно числу уравнений, а эти уравнения первого порядка, так что система имеет вид

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

то для выделения ее частного интеграла, т. е. соотношений, которые

определяют все функции y_i в зависимости от x , следует потребовать, чтобы при данном значении x эти функции принимали определенные значения

$$y_1 = y_1^0; y_2 = y_2^0; \dots, y_n = y_n^0 \text{ при } x = x_0. \quad (4)$$

Эти равенства определяют систему начальных условий, которым должно удовлетворять данное решение. Существование интеграла системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего данным начальным условиям, доказывается в анализе.

Приведем формулировку соответствующей теоремы при тех условиях, при которых она нам будет особенно полезна.

Если правые части системы n дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5)$$

имеют непрерывные частные производные по x и по всем y_i в окрестности точки $x = x_0$; $y_i = y_{i0}$, то система допускает существование решений

$$y_i = y_i(x), \quad (6)$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad (7)$$

причем функции (6) дифференцируемы в окрестности значения $x = x_0$ и определяются однозначно по данным начальным условиям.

В частности, одно уравнение с одной неизвестной функцией, дифференцируемой по x и y ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

допускает решение $y = y(x)$, определяемое однозначно по начальным условиям.

Изогональные траектории семейства плоских кривых. Изогональной траекторией семейства кривых называется линия, пересекающая все кривые семейства под постоянным углом.

Предположим, что нам дано правильное семейство, зависящее от одного параметра

$$F(x, y, c) = 0.$$

Угловой коэффициент линий этого семейства определяется равенством

$$k = -\frac{F_x}{F_y}.$$

В правую часть этого равенства можно подставить c , полученное из уравнения семейства, так что k определится в функции только координат точки.

Будем искать траекторию, пересекающую кривые семейства под данным постоянным углом α .

Пусть $y = y(x)$ — уравнение этой траектории, ее угловой коэффициент равен y' .

В таком случае

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{F_y y' + F_x}{F_y - y' F_x}. \quad (8)$$

Разрешая это уравнение относительно y' , получим соотношение вида

$$y' = f(x, y),$$

т. е. дифференциальное уравнение для определения искомых траекторий. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F_1(x, y, c_1) = 0,$$

откуда следует, что изогональная траектория образует семейство, зависящее от одного параметра.

В частности, для разыскания ортогональных траекторий нужно интегрировать уравнение

$$y' = \frac{F_y}{F_x}. \quad (9)$$

УПРАЖНЕНИЯ

92. Найти ортогональные траектории семейства парабол

$$y^2 = 2ax.$$

Решение: $y' = -\frac{y}{a}$.

Но из уравнения семейства

$$a = \frac{y^2}{2x},$$

откуда

$$y' = -\frac{2x}{y} \text{ или } 2x dx + y dy = 0.$$

Семейство траекторий

$$2x^2 + y^2 = c$$

состоит из подобных и подобно расположенных эллипсов.

93. Найти изогональные траектории пучка прямых.

Решение. Если центр пучка находится в полосе, то для радиуса-вектора искомой траектории имеет место соотношение

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{см. упр. 27})$$

или

$$\frac{d \lg \rho}{d\varphi} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение искомого семейства

$$\rho = ce^{\varphi \operatorname{tg} \alpha}.$$

Оно состоит из логарифмических спиралей.

***§ 52. Векторные дифференциальные уравнения.** *Векторным дифференциальным уравнением* называется соотношение между векторной функцией скалярного аргумента, ее производными и независимым переменным. Чаще всего приходится иметь дело с так называемыми линейными векторными дифференциальными уравнениями, имеющими вид линейных зависимостей между вектором и его производными. Примеры таких зависимостей мы имеем для вектора постоянного направления

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lambda(t)\mathbf{u}$$

или для вектора, параллельного постоянной плоскости

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \lambda(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mu(t)\mathbf{u}.$$

Примером системы дифференциальных уравнений для векторов основной тройки являются формулы Серре — Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}; \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}; \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nu}.$$

Интегрирование линейных векторных уравнений сводится к интегрированию скалярных уравнений. Покажем это на примере системы трех уравнений первого порядка с тремя векторными функциями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + a_{13}\mathbf{u}_3, \\ \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{23}\mathbf{u}_3, \\ \frac{d\mathbf{u}_3}{dt} &= a_{31}\mathbf{u}_1 + a_{32}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} — скалярные функции, зависящие от t . Введем обозначения для координат векторов \mathbf{u}_i , положив

$$\mathbf{u}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}.$$

В таком случае для каждой тройки соответствующих координат (например, для x_1, x_2, x_3) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Аналогичные системы соотношений получим и для координат y_i и z_i . Отсюда следует, что *соответствующие координаты векторов, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с теми же скалярными коэффициентами.*

Интегрируя систему дифференциальных уравнений для каждой тройки соответствующих координат, получим при условии дифференцируемости коэффициентов три системы решений

$$x_i = x_i(t); \quad y_i = y_i(t); \quad z_i = z_i(t), \quad (3)$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$x_i(t_0) = x_{i0}; \quad y_i(t_0) = y_{i0}; \quad z_i(t_0) = z_{i0}. \quad (4)$$

Таким образом, определится и решение векторных уравнений (1) в виде

$$u_i = x_i(t) i + y_i(t) j + z_i(t) k, \quad (5)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_{i0} = x_{i0} i + y_{i0} j + z_{i0} k. \quad (6)$$

На основании теоремы, приведенной в предыдущем параграфе, мы можем утверждать, что система линейных векторных уравнений первого порядка (1) имеет систему решений

$$u_i = u_i(t),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$u_i(t_0) = u_{i0},$$

определяющихся однозначно и дифференцируемых вблизи значения $t = t_0$, если вблизи этого значения дифференцируемы и коэффициенты a_{ij} .

УПРАЖНЕНИЯ

94. Найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au, \\ \frac{du_1}{dt} &= -au \end{aligned} \quad (a \text{ -- постоянно}),$$

удовлетворяющее системе начальных условий

$$u(0) = c_1; \quad u_1(0) = c_2,$$

где c_1 и c_2 — данные векторы.

Решение. Будем решать систему при помощи разложения в ряд Тейлора. Пусть

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 t^2 + \dots$$

Принимая во внимание начальные условия, дифференцируя уравнения и снова используя эти условия, получим

$$\mathbf{u}_0 = c_1; \dot{\mathbf{u}}_0 = ac_2; \ddot{\mathbf{u}}_0 = -a^2c_1; \dddot{\mathbf{u}}_0 = -a^3c_2$$

и т. д.

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = c_1 \left(1 - \frac{a^2}{2!} t^2 + \frac{a^4}{4!} t^4 - \frac{a^6}{6!} t^6 + \dots \right) + \\ + c_2 \left(at - \frac{a^3}{3!} t^3 + \frac{a^5}{5!} t^5 - \frac{a^7}{7!} t^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= c_1 \cos at + c_2 \sin at = \mathbf{E}(t), \\ \mathbf{u}_1 &= -c_1 \sin at + c_2 \cos at = \mathbf{G}(t). \end{aligned}$$

***§ 53. Лемма о взаимных тройках.** Предположим, что тройка векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \mathbf{u}_k \quad (1)$$

с кососимметричной матрицей коэффициентов, так что

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad (2)$$

Рассмотрим векторы тройки $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, взаимной с данной. Векторы этой тройки должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (3)$$

Разложим производные этих векторов по ним самим и рассмотрим это разложение

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \mathbf{v}_k. \quad (4)$$

Дифференцируя соотношения (3) и заменив производные из (1) и (4), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_j + \sum b_{jk} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_k &= \\ = \sum a_{ik} \delta_{kj} + \sum b_{jk} \delta_{ik} &= \\ = a_{ij} + b_{ji}, \end{aligned}$$

откуда вследствие (2)

$$b_{ji} = -a_{ij} = a_{ji}. \quad (5)$$

Итак: если векторы тройки удовлетворяют системе уравнений (1) с кососимметричной матрицей коэффициентов, то векторы взаимной тройки удовлетворяют той же системе уравнений.

Предположим теперь, что мы ищем систему решений уравнений (1), удовлетворяющую начальным условиям

$$\mathbf{u}_i(t_0) = \mathbf{u}_{i0},$$

причем тройка векторов \mathbf{u}_{i0} нормальная. В таком случае при $t = t_0$ векторы взаимной тройки должны совпадать с векторами данной тройки

$$\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{u}_{i0}$$

при $t = t_0$. Однако векторы обеих троек удовлетворяют одной и той же системе уравнений, а так как система решений однозначно определяется заданием начальных условий, то

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{u}_i(t)$$

при всех значениях t , при которых существует решение системы с данными коэффициентами. Но векторы тройки, совпадающей со своей взаимной тройкой, должны быть единичными и взаимно ортогональными. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Система решений уравнений (1) с кососимметричной матрицей коэффициентов образует нормальную тройку векторов, если это имеет место при начальных условиях.

***§ 54. Независимость кривизны и кручения.** В § 50 мы показали, что натуральные уравнения кривой определяют ее с точностью до положения в пространстве. При этом предполагалось, что кривая существует и уравнения (1) § 50 выражают зависимость между длиной ее дуги, кривизной и кручением.

Предположим теперь, что заданы уравнения

$$k = \varphi(\sigma > 0; \kappa = \psi(\sigma), \quad (1)$$

где $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$ — дифференцируемые функции переменного σ на промежутке его изменения

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \quad (2)$$

а первая из них положительна на этом промежутке.

Спрашивается, существует ли кривая, для которой σ есть длина дуги, а k и κ — кривизна и кручение?

Мы заранее можем дать положительный ответ на этот вопрос для тех случаев, когда k и κ совпадают с кривизной, кручением и длиной дуги заведомо существующей кривой, однако можно предположить, что при этом они должны подчиняться некоторым дополнительным условиям. На самом деле это не так. Функции $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$ могут быть

выбраны произвольно и при условии дифференцируемости обеих и положительности первой из них, и при этом найдется такая кривая, для которой σ , k и κ будут иметь указанное геометрическое значение.

Чтобы доказать это, рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{d\sigma} &= \varphi(\sigma) u_2, \\ \frac{du_2}{d\sigma} &= -\varphi(\sigma) u_1 + \psi(\sigma) u_3, \\ \frac{du_3}{d\sigma} &= -\psi(\sigma) u_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Относительно скалярных функций предположим только то, что они дифференцируемы на промежутке

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \quad (4)$$

и первая из них положительна во всех точках этого промежутка. Из дифференцируемости этих коэффициентов следует, что система допускает решения

$$u_i = u_i(\sigma),$$

непрерывные на том же промежутке¹⁾, причем эти решения однозначно определяются заданием начальных условий

$$u_i(\sigma_0) = u_{i0},$$

если

$$\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2.$$

Если выбрать начальные условия так, чтобы векторы u_{i0} , $i = 1, 2, 3$, образовывали правую нормальную тройку векторов, то вследствие ко-симметрии матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \varphi(\sigma) & 0 \\ -\varphi(\sigma) & 0 & \psi(\sigma) \\ 0 & -\psi(\sigma) & 0 \end{array} \right\|$$

векторы $u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma)$, $u_3(\sigma)$ будут образовывать такую же тройку на всем протяжении промежутка (4). Определив систему решений, удовлетворяющих этим условиям, рассмотрим кривую Γ , радиус-вектор точки которой определим интегралом

$$r = \int_{\sigma_0}^{\sigma} u_1(\sigma) d\sigma. \quad (5)$$

Так как

$$\frac{dr}{d\sigma} = u_1(\sigma), \quad (6)$$

¹⁾ Это следует из линейного строения правых частей.

то:

1) вектор u_1 есть единичный касательный вектор кривой Γ

$$u_1 = \tau; \quad (7)$$

2) параметр σ есть натуральный параметр кривой

$$\sigma = s. \quad (8)$$

Сравнивая первое уравнение системы (3) $\frac{d\tau}{ds} = \varphi(s) u_2$ с первой формулой Серре — Френе, получим, что

3) единичный вектор u_2 есть единичный вектор главной нормали кривой Γ

$$u_2 = \nu; \quad (9)$$

4) функция $\varphi(s)$ равна кривизне кривой

$$\varphi(s) = k. \quad (10)$$

Так как тройка u_1, u_2, u_3 — правая ¹⁾, а ее векторы единичны и взаимно ортогональны, то

$$u_3 = [u_1, u_2] = [\tau, \nu],$$

откуда следует

5) вектор u_3 совпадает с вектором бинормали кривой Γ

$$u_3 = \beta. \quad (11)$$

Наконец, сравнение третьего уравнения системы

$$\frac{d\beta}{ds} = -\psi(s)\nu$$

с третьей формулой Серре — Френе дает:

6) функция $\psi(s)$ совпадает с кручением кривой Γ

$$\psi(s) = \kappa. \quad (12)$$

Итак, существование кривой с натуральными уравнениями заранее данного вида доказано.

УПРАЖНЕНИЯ

95. Найти кривую по ее натуральному уравнению

$$k = \cos s; \quad \kappa = \sin s.$$

При начальных условиях

$$\tau_0 = -i; \quad \beta_0 = \frac{k+j}{\sqrt{2}}; \quad \nu = \frac{k-j}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Формулы Серре — Френе для искомой кривой имеют вид

$$\tau' = \cos s \nu; \quad \nu' = -\cos s \tau + \sin s \beta; \quad \beta' = -\sin s \nu. \quad (a)$$

¹⁾ Ориентация тройки не может измениться вследствие непрерывности.

Дифференцируя вторую и принимая во внимание две другие, получим

$$\mathbf{v}'' = -\mathbf{v} + \sin s\boldsymbol{\tau} + \cos s\boldsymbol{\beta}. \quad (b)$$

После вторичного дифференцирования получим

$$\mathbf{v}''' = -2\mathbf{v}'. \quad (c)$$

Полагая $\mathbf{v}' = \mathbf{u}$; $\mathbf{v}'' = \sqrt{2} \mathbf{u}_1$, приведем уравнение (c) к системе, аналогичной системе упр. 94, вследствие чего будем иметь

$$\mathbf{v}' = E(s\sqrt{2}) = c_1 \cos(s\sqrt{2}) + c_2 \sin(s\sqrt{2}).$$

Интегрируя, получим

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}} G(s\sqrt{2}) + c. \quad (d)$$

Из соотношений (a) и (b)

$$\left. \begin{aligned} -\cos s\boldsymbol{\tau} + \sin s\boldsymbol{\beta} &= E(s\sqrt{2}), \\ \sin s\boldsymbol{\tau} + \cos s\boldsymbol{\beta} &= c + \frac{1}{\sqrt{2}} G(s\sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

можно уже определить $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\beta}$, однако примем сначала во внимание начальные условия.

При $s=0$ будем иметь

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\tau}_0 &= c_1 = i, \\ \boldsymbol{\beta}_0 &= c + \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 = \frac{k+j}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{v}_0 &= c - \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 = \frac{k-j}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

откуда

$$c_1 = i; \quad c_2 = j; \quad c = \frac{k}{\sqrt{2}},$$

так что

$$E(s\sqrt{2}) = e(s\sqrt{2}) = i \cos s\sqrt{2} + j \sin s\sqrt{2}.$$

Разрешая соотношения (e) относительно $\boldsymbol{\tau}$, получим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ k \sin s + g(s\sqrt{2}) \sin s - \sqrt{2} e(s\sqrt{2}) \cos s \right\}.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, воспользуемся формулами упр. 17. Найдем

$$\cos s e(s\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left\{ e[(\sqrt{2}+1)s] + e[(\sqrt{2}-1)s] \right\},$$

$$\sin s g(s\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left\{ e[(\sqrt{2}+1)s] - e[(\sqrt{2}-1)s] \right\}.$$

Вследствие этого

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ k \sin s + \frac{1-\sqrt{2}}{2} e[(\sqrt{2}+1)s] - \frac{1+\sqrt{2}}{2} e[(\sqrt{2}-1)s] \right\}.$$

Интегрируя, получим выражение

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -k \cos s + \frac{3-2\sqrt{2}}{2} g[(\sqrt{2}+1)s] + \frac{3+2\sqrt{2}}{2} g[(\sqrt{2}-1)s] \right\},$$

которое при желании просто перевести в координаты.

§ 55. Натуральное уравнение плоской кривой. Если касательная плоской кривой, расположенной в плоскости Oxy , образует угол α с положительным направлением оси Ox , то единичный вектор этой касательной

$$\tau = e(\alpha). \quad (1)$$

Дифференцируя по натуральному параметру и пользуясь формулами Серре — Френе, получим

$$k\nu = \frac{d\alpha}{ds} g(\alpha).$$

Но оба единичных вектора ν и g перпендикулярны касательной и, значит, или совпадают, или отличаются только знаком. Отсюда вытекает соотношение

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|, \quad (2)$$

которое часто заменяют более удобным соотношением

$$k = \frac{d\alpha}{ds}, \quad (3)$$

включая знак в выражение кривизны.

Предположим, что кривизна k задана в функции натурального параметра так, что

$$k = k(s). \quad (4)$$

Из соотношения (3) можно сейчас же найти угол наклона касательной искомой кривой к оси Ox в функции параметра s , выразив его в виде интеграла

$$\alpha = \int k(s) ds. \quad (5)$$

Вычислив этот интеграл, получим

$$\alpha = A(s) + \alpha_0, \quad (6)$$

где $A(s)$ — вполне определенная функция, а α_0 — постоянное интегрирования.

С другой стороны, касательный вектор искомой кривой

$$\frac{dr}{ds} = e(\alpha) = i \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (7)$$

откуда следует, что

$$r = \int e(\alpha) ds. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что α есть уже известная нам функция s , мы можем считать задачу решенной.

Посмотрим, как входят в выражение (8) постоянные интегрирования. Заменяя α его выражением через s , получим

$$e(\alpha) = e\{A(s) + \alpha_0\} = e(\alpha_0) \cos A(s) + g(\alpha_0) \sin A(s),$$

откуда

$$r = e(\alpha_0) \int \cos A(s) ds + g(\alpha_0) \int \sin A(s) ds$$

или

$$r = e(\alpha_0) \xi(s) + g(\alpha_0) \eta(s) + r_0, \quad (9)$$

где $\xi(s)$ и $\eta(s)$ — вполне определенные функции s .

Формула (9) показывает, что выбор постоянных интегрирования соответствует возможности выбора различных систем прямоугольных координат, с началом в точке r_0 и направляющими векторами осей $e(\alpha_0)$ и $g(\alpha_0)$.

Так как по отношению ко всем этим системам кривая имеет одни и те же уравнения

$$\xi = \xi(s); \quad \eta = \eta(s),$$

то формула (9) явно показывает, что кривая определяется своим натуральным уравнением с точностью до выбора ее положения на плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

96. Найти плоскую кривую по ее натуральному уравнению

$$p = ms.$$

Решение. Так как

$$\frac{ds}{dx} = ms,$$

то

$$s = Ae^{mx}.$$

Радиус-вектор точки искомой кривой

$$r = A \int e(\alpha) de^{mx}.$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$\begin{aligned} J &= \int e(\alpha) de^{mx} = e(\alpha) e^{mx} - \frac{1}{m} \int g(\alpha) de^{mx} = \\ &= e(\alpha) e^{mx} - \frac{1}{m} g(\alpha) e^{mx} - \frac{1}{m^2} J, \end{aligned}$$

откуда

$$r = A \frac{m^2}{1+m^2} \left\{ e(\alpha) - \frac{1}{m} g(\alpha) \right\} e^{m\alpha}.$$

Полагая $-\frac{1}{m} = \operatorname{tg} \alpha_0$, приведем уравнение к виду

$$r = B \left\{ e(\alpha) \cos \alpha_0 + g(\alpha) \sin \alpha_0 \right\} e^{m\alpha} = B e(\alpha + \alpha_0) e^{m\alpha},$$

где

$$B = A \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0}.$$

Наконец, вводя новый параметр

$$\varphi = \alpha + \alpha_0$$

и полагая

$$c = B e^{-m\alpha_0},$$

получим окончательно

$$r = c e^{m\varphi} e(\varphi),$$

откуда следует, что найденная кривая есть логарифмическая спираль.

97. Найти уравнение эвольвенты круга по ее натуральному уравнению

$$p = \sqrt{2as}.$$

Ответ: $r = a \left\{ e(\alpha) - \alpha g(\alpha) \right\}$.

98. Найти уравнение цепной линии по ее натуральному уравнению

$$p = a + \frac{s^2}{a}.$$

Решение.

$$\alpha = \int \frac{a ds}{a^2 + s^2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{a} \right); \quad s = a \operatorname{tg} \alpha;$$

$$dx = ds \cos \alpha = \frac{a d\alpha}{\cos \alpha}; \quad dy = ds \sin \alpha = a \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha;$$

$$x = a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right); \quad y = \frac{a}{\cos \alpha};$$

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

99. Найти уравнение циклоиды по ее натуральному уравнению

$$s^2 + p^2 = 16a^2.$$

§ 56. Линии откоса. Если отношение кручения и кривизны не меняется вдоль кривой, то она называется *линией откоса*.

Соотношение

$$\frac{\kappa}{k} = \operatorname{const} \neq 0, \quad (1)$$

характерное для линий откоса, может быть дополнено заданием кривизны в функции натурального параметра и определит вместе с ним натуральное уравнение кривой. Так как при наличии одного только этого соотношения кривизна остается еще совершенно произвольной, то

оно имеет место для целого класса кривых. Выясним общие свойства кривых, принадлежащих этому классу.

Для этого примем константу в правой части условия (1) за котангенс некоторого постоянного угла α и перепишем его в виде

$$k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Умножая первое уравнение Серре — Френе на $\cos \alpha$, а последнее на $\sin \alpha$ и складывая, получим

$$\cos \alpha \frac{d\tau}{ds} + \sin \alpha \frac{d\beta}{ds} = (k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha) \nu = 0$$

или

$$\frac{d}{ds} (\cos \alpha \tau + \sin \alpha \beta) = 0.$$

Таким образом, единичный вектор

$$m = \cos \alpha \tau + \sin \alpha \beta \quad (3)$$

остается неизменным вдоль кривой.

Однако угол между этим вектором и касательным вектором кривой равен α , т. е. тоже остается постоянным. Таким образом, мы приходим к первому важному свойству: *касательный вектор линий откоса образует постоянный угол с неизменным направлением.*

Проведем через каждую точку линии откоса прямую того постоянного направления, с которым касательная кривой образует постоянный угол. Эти прямые образуют цилиндрическую поверхность, на которой будет расположена рассматриваемая линия откоса.

Развернем эту цилиндрическую поверхность, не подвергая ее ни растяжениям, ни сжатиям, и вместе с ней наложим на плоскость и нашу линию откоса.

Развернем эту цилиндрическую поверхность, не подвергая ее ни растяжениям, ни сжатиям, и вместе с ней наложим на плоскость и нашу линию откоса.

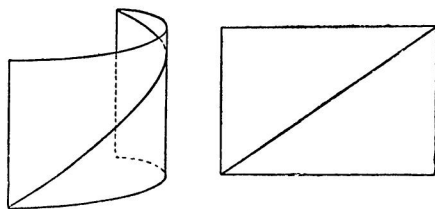


Рис. 61.

После разворачивания она, очевидно, перейдет в такую плоскую кривую, которая пересекает пучок параллельных прямых, бывших до разворачивания образующими, под постоянным углом (рис. 61).

Но такая плоская линия необходимо прямая. Итак: *всякая линия откоса есть такая линия, расположенная на цилиндрической поверхности, которая переходит в прямую при разворачивании этой поверхности на плоскость.*

Легко доказать и обратное положение, т. е. показать, что *всякая линия, обладающая указанным свойством, есть линия откоса.* Действительно, она, очевидно, пересекает под постоянным углом все

образующие цилиндрической поверхности. Обозначив единичный направляющий вектор образующей через m , будем иметь

$$m\tau = \cos \alpha = \text{const},$$

где τ — касательный вектор кривой.

Дифференцируя это соотношение по параметру s , получим

$$k m \nu = 0.$$

Оставляя в стороне неинтересный случай $k = 0$, видим, что m расположен в спрямляющей плоскости кривой и, следовательно, может быть представлен в виде

$$m = \tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha.$$

Дифференцируя это соотношение и пользуясь формулами Френе, получим соотношение

$$k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha = 0,$$

характеризующее линию откоса.

УПРАЖНЕНИЯ

100. Составить уравнение линии откоса по уравнению направляющей кривой цилиндрической поверхности, на которой эта линия расположена, и найти длину ее дуги.

Решение. Предположим, что направляющая кривая расположена в плоскости Oxy и задана уравнением

$$\rho(s_0) = ix(s_0) + jy(s_0),$$

где s_0 — ее натуральный параметр.

При разворачивании цилиндрической поверхности на плоскость $O\xi\eta$ можно предположить, что направляющая кривая перейдет в ось $O\xi$, а линия откоса изобразится прямой $\eta = \xi \operatorname{ctg} \alpha$.

Так как $\xi = s_0$, а аппликата точки линии откоса $z = \eta$, то радиус-вектор точки линии откоса будет выражаться так:

$$r = \rho(s_0) + s_0 \operatorname{ctg} \alpha k.$$

Соотношение между натуральными параметрами линии откоса s и направляющей кривой s_0

$$s = \frac{s_0}{\sin \alpha}.$$

101. Составить уравнение линии откоса на поверхности цилиндра с направляющей логарифмической спиралью $\rho = ae^{m\varphi}e(\varphi)$.

Ответ: $r = e^{m\varphi} \{ ae(\varphi) + bk \}$,

где $b = \text{const}$. Цилиндрически-коническая винтовая линия.

102. Составить натуральное уравнение линии откоса по натуральному уравнению направляющей кривой

$$k_0 = f(s_0).$$

Решение. Выразим касательный вектор τ линии откоса через касательный вектор направляющей кривой τ_0 и направляющий вектор образующей m

$$\tau = \tau_0 \sin \alpha + m \cos \alpha.$$

Дифференцируя по s — линии откоса, получим

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau_0}{ds} \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$\begin{aligned} k\mathbf{v} &= k_0\mathbf{v}_0 \sin^2 \alpha, \\ k &= k_0 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Искомое натуральное уравнение будет

$$\begin{aligned} k &= k_0 \sin^2 \alpha = f(s \sin \alpha) \sin^2 \alpha, \\ x &= k \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

103. Доказать, что линия откоса на поверхности кругового цилиндра есть винтовая линия.

Решение. Если a — радиус направляющего круга цилиндра, то натуральное уравнение линии откоса будет

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sin^2 \alpha}{a} = \operatorname{const}, \\ x &= \frac{\sin^2 \alpha}{a} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const} \end{aligned}$$

и линия не может отличаться от винтовой, так как она характеризуется постоянством кривизны и кручения.

104. Составить натуральное уравнение линии откоса на цилиндре с направляющей цепной линией (см. упр. 87).

О т в е т:
$$k = \frac{a \sin^2 \alpha}{a^2 + s^2 \sin^2 \alpha}; \quad x = k \operatorname{tg} \alpha.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ — гиперболическая винтовая линия.

§ 57. Кривые с общими нормальными. Если кривая Γ_1 пересекает под прямым углом некоторое семейство нормалей кривой Γ , то они являются и ее нормальными. В таком случае мы будем говорить, что кривые Γ и Γ_1 имеют общие нормали. Если \mathbf{n} есть единичный направляющий вектор общих нормалей, то радиусы-векторы обеих кривых Γ_1 и Γ связаны следующим образом:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}, \quad (1)$$

где λ есть расстояние между их соответствующими точками (рис. 62).

Предположим, что кривая Γ параметризована и направляющий вектор \mathbf{n} задан в функции параметра. Тогда в силу (1) мы можем считать, что и \mathbf{r}_1 определен в функции того же параметра. Дифференцируя, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \lambda \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{n}.$$

Умножив скалярно на \mathbf{n} и приняв во внимание, что это единичный вектор, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{n} + \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{n},$$

но вектор \mathbf{n} направлен по общей нормали Γ и Γ_1 , вследствие чего

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{n} = 0, \quad (2)$$

откуда следует, что

$$\lambda = \text{const.}$$

Итак: *расстояние между соответственными точками кривых с общими нормальными постоянно.*

Отметим один предельный случай предыдущей теоремы. Предположим, что кривая Γ «сжалась» в точку или, иначе, предположим, что кривая Γ имеет семейство нормалей, пересекающихся в одной точке с радиусом-вектором \mathbf{r}_1 . В таком случае условие (2), очевидно, выполняется, и мы снова будем иметь

$$\lambda = \text{const.}$$

Но это значит, что все точки кривой Γ находятся на постоянном расстоянии от неподвижной точки \mathbf{r}_1 , а кривая лежит на поверхности сферы.

Итак: *если нормали кривой пересекаются в одной точке, то эта точка является центром сферы, на поверхности которой расположена эта кривая.*

В частности, если нормали плоской кривой пересекаются в одной точке, то эта кривая — окружность.

Возвращаясь к случаю двух кривых, предположим, что Γ есть геометрическое место концов отрезков постоянной длины λ , отложенных от точек кривой Γ в направлении ее нормального вектора \mathbf{n} .

В таком случае из соотношения (2) следует

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{n},$$

и так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{n} = 0,$$

то и

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{n} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к теореме, обратной первой теореме, доказанной в этом параграфе.

Кривая, соединяющая концы отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях некоторой кривой от ее точек или исходящих из одной точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

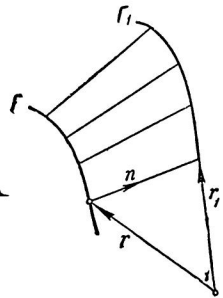


Рис. 62.

*§ 58. **Кривые Бертрана.** Кривые Γ и Γ_1 называются *сопряженными в смысле Бертрана*, если они имеют общие главные нормали.

Из теоремы, доказанной в предыдущем параграфе, сразу следует, что *расстояние между соответствующими точками кривых Бертрана постоянно.*

Обозначим через τ и τ_1 касательные векторы в соответствующих точках Γ и Γ_1 и найдем угол между ними.

Полагая

$$\cos \alpha = \tau \tau_1$$

и дифференцируя, получим

$$-\sin \alpha \, d\alpha = d\tau \cdot \tau_1 + \tau \, d\tau_1 = k_1 \nu \tau \, ds + k_1 \nu_1 \tau \, ds_1,$$

но векторы ν и ν_1 направлены по общей главной нормали кривых и, следовательно, перпендикулярны обоим касательным векторам, вследствие чего

$$d\alpha = 0.$$

Итак: *угол между касательными в соответствующих точках кривых Бертрана постоянен.*

Так как касательный вектор кривой Γ_1 перпендикулярен главной нормали кривой Γ , то он параллелен ее спрямляющей плоскости и может быть представлен в виде

$$\tau_1 = \tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha.$$

С другой стороны,

$$\tau_1 = r + a\nu,$$

где a — постоянное расстояние между соответственными точками кривых (рис. 63).

Дифференцируя последнее соотношение, получим

$$\tau_1 ds_1 = (\tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha) ds_1 = \{\tau + a(-\tau k + \beta \kappa)\} ds,$$

откуда следует

$$\frac{1 - ak}{\cos \alpha} = \frac{a\kappa}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Так как a и α постоянны, то в силу (1) *кривизна и кручение кривой Γ должны находиться в линейном соотношении с постоянными коэффициентами.*

Так как в общем случае кривизна и кручение независимы между собой, то кривая Γ не может быть взята произвольно и принадлежит некоторому классу.

Кривая, допускающая существование другой кривой с теми же главными нормальными, не может быть взята произвольно и принадлежит определенному классу линий, называемых кривыми Бертрана.

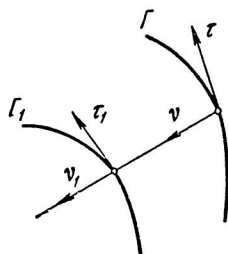


Рис. 63.

***§ 59. Линейная зависимость между кривизной и кручением.** Рассмотрим кривые, кривизна и кручение которых связаны зависимостью

$$Ax + Bk + C = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами.

Отметим отдельные частные случаи:

1. $B = C = 0$; $x = 0$ плоская кривая;
2. $A = C = 0$; $k = 0$ прямая линия;
3. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$ линия откоса;
4. $C \neq 0$; $B = 0$; $x = \text{const}$ кривая постоянного кручения;
5. $C \neq 0$; $B \neq 0$.

Чтобы выяснить свойства кривой в последнем случае, приведем уравнение (1) к «нормальному виду», так же, как это делается для уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

заданной в прямоугольных координатах.

После этого условие (1) примет вид

$$x \cos \alpha + k \sin \alpha = p.$$

Так как C и B не равны нулю, то можно положить

$$p = \frac{\sin \alpha}{a},$$

так что

$$x \cos \alpha + k \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{a}, \quad (2)$$

откуда

$$\frac{1 - ak}{\cos \alpha} = \frac{ax}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

где a и α — постоянные величины.

Покажем теперь, что рассматриваемая кривая Γ есть кривая Бертрана. Для этого рассмотрим совместно с ней кривую Γ_1 , связав ее радиус-вектор r_1 с радиусом-вектором данной кривой зависимостью

$$r_1 = r + a\nu.$$

Дифференцируя это соотношение по натуральному параметру кривой Γ и имея в виду, что $a = \text{const}$, получим

$$\tau_1 = \frac{ds}{ds_1} \frac{d}{ds} (r + a\nu) = \frac{ds}{ds_1} \{ \tau (1 - ak) + \beta ax \}$$

или вследствие (3)

$$\tau_1 = \lambda \frac{ds}{ds_1} (\tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha),$$

но вектор τ_1 и вектор $\tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha$ единичные. Поэтому коэффициент $\lambda \frac{ds}{ds_1} = \pm 1$ и

$$\pm \tau_1 = \tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha.$$

Дифференцируя последнее равенство по s_1 , получим

$$\pm k_1 \nu_1 = \frac{ds}{ds_1} (k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha) \nu.$$

Если рассматриваемая кривая не есть линия откоса, то $k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha \neq 0$ и векторы главных нормалей кривых Γ и Γ_1 коллинеарны. Таким образом, кривая Γ допускает существование кривой Γ_1 с теми же главными нормальными и есть *кривая Бертрана*.

***§ 60. Кривые постоянной кривизны.** Кривая, характеризующаяся условием

$$k = \text{const}, \quad (1)$$

принадлежит к числу кривых Бертрана.

Действительно, ее кривизна удовлетворяет условию (2) § 59

$$\kappa \cos \alpha + k \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{a}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

В этом случае $k = \frac{1}{a}$, где a — расстояние между точкой данной кривой и соответствующей точкой сопряженной кривой. С другой стороны, a есть радиус кривизны, а точка кривой Γ_1 , определяемая радиусом-вектором

$$r_1 = r + a\nu,$$

совпадает с центром кривизны кривой Γ .

Итак: *кривая постоянной кривизны и геометрическое место центров ее кривизны образуют пару сопряженных кривых Бертрана; угол между соответственными касательными этих кривых прямой.*

Так как кривая Γ_1 есть тоже кривая Бертрана и ее касательный вектор перпендикулярен касательной сопряженной кривой Γ , то ее кривизна и кручение должны находиться в зависимости

$$\kappa_1 \cos \frac{\pi}{2} + k_1 \sin \frac{\pi}{2} = \text{const},$$

откуда следует, что $k_1 = \text{const}$. Но в таком случае центр кривизны кривой Γ_1 должен совпадать с точкой кривой Γ , так что $a_1 = a$.

Итак: *кривая, сопряженная кривой постоянной кривизны, есть кривая той же постоянной кривизны.*

Исследуем в заключение тот случай, когда кривая Бертрана допускает существование двух или нескольких сопряженных ей кривых.

Для того чтобы кривая Γ была сопряжена двум различным кривым Γ_1 и Γ_2 , необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна и кручение удовлетворяли двум независимым между собой линейным соотношениям

$$\begin{aligned} A_1x + B_1k + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2k + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Однако это возможно (при условии независимости соотношений) в том и только в том случае, если кривизна и кручение имеют постоянные значения, определяющиеся при решении системы этих уравнений.

Таким образом, рассматриваемая кривая есть винтовая линия.

В этом случае, однако, кривизна и кручение удовлетворяют не только соотношению (2), но и всякому соотношению вида

$$A_1x + B_1k + C_1 + \lambda(A_2x + B_2k + C_2) = 0,$$

откуда следует, что винтовая линия допускает существование бесчисленного множества кривых, сопряженных ей по Бертрану.

Все эти кривые будут тоже винтовыми линиями, описанными концами постоянных отрезков произвольной длины a , отложенных от точек данной кривой по ее главным нормальям.

ГЛАВА V

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 61. **Огибающая семейства поверхностей.** Семейство поверхностей, зависящее от одного параметра, задается уравнением

$$F(x, y, z, c) = 0. \quad (1)$$

При фиксированном значении c это уравнение определяет одну из поверхностей семейства, а изменение c соответствует переходу к другим поверхностям (рис. 64).

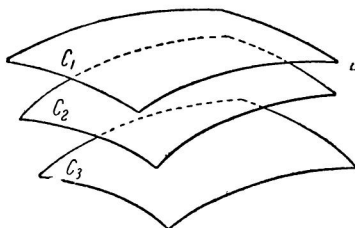


Рис. 64.

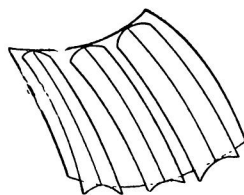


Рис. 65.

Если существует поверхность, касающаяся в каждой своей точке некоторой поверхности данного семейства, то она называется *огибающей данного семейства* (рис. 65).

По этому определению, каждая точка огибающей принадлежит некоторой поверхности семейства, а эта поверхность характеризуется определенным значением параметра c . Имея это в виду, мы можем сказать, что каждой точке огибающей соответствует определенное значение c , так что c есть функция координат x, y, z точки огибающей

$$c = c(x, y, z). \quad (2)$$

Подставляя в уравнение семейства координаты точки огибающей и соответствующее ей значение параметра, получим тождественное равенство

$$F(x, y, z, c(x, y, z)) \equiv 0. \quad (3)$$

Чтобы принять во внимание условие прикосновения огибающей и поверхностей семейства, рассмотрим некоторую кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

расположенную на огибающей.

Так как координаты точек этой кривой должны удовлетворять уравнению (3), то для них тоже будет иметь место тождественное равенство

$$F\{x(t); y(t); z(t); c(t)\} \equiv 0.$$

Дифференцирование последнего соотношения приводит к новому тождеству

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial c} \frac{dc}{dt} = 0. \quad (4)$$

Но касательный вектор огибающей $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ должен быть одновременно и касательным вектором соответствующей поверхности семейства, условием чего является равенство

$$N \frac{d\mathbf{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0, \quad (5)$$

выражающее перпендикулярность вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и нормального вектора поверхности семейства. Сравнение (4) и (5) приводит к соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dt} = 0,$$

имеющему силу для всякой кривой на огибающей.

Так как эти кривые заведомо можно выбрать так, чтобы они соединяли точки различных поверхностей семейства, то последнее условие должно выполняться и при переменном c , т. е. при

$$\frac{dc}{dt} \neq 0,$$

а это значит, что

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Итак, координаты точек огибающей должны удовлетворять двум уравнениям

$$F(x, y, z, c) = 0 \quad (A); \quad \frac{\partial F(x, y, z, c)}{\partial c} = 0 \quad (B); \quad (6)$$

исключая параметр c из этих уравнений, можно получить соотношение вида

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

которое будет уравнением огибающей, если она существует.

Если произвести исключение параметра c из уравнений (6) и рассмотреть поверхность, выражаемую уравнением (7), то она (так называемая *дискриминантная поверхность семейства*) еще не обязательно является огибающей. Для того чтобы выяснить, при каких условиях это действительно имеет место, следует привести особое исследование, повторяющее предыдущие рассуждения, но в обратном порядке.

Прежде всего ясно, что каждая точка дискриминантной поверхности принадлежит одной из поверхностей семейства, так как ее координаты удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z, c) = 0$$

при некотором значении c .

Чтобы установить, сверх этого, факт прикосновения, нужно взять произвольную кривую, расположенную на дискриминантной поверхности, подставить ее координаты, заданные в функции параметра t , в уравнение (6, А). Дифференцируя так же, как в случае вывода формулы (4), получим условие

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_c \frac{dc}{dt} = 0,$$

однако в силу (6, В) последнее слагаемое отпадает, и мы снова приходим к условию

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0.$$

Это условие выражает перпендикулярность касательного вектора $\frac{dr}{dt}$ дискриминантной поверхности к нормальному вектору поверхности семейства, если только не имеют место одновременные равенства

$$F_x = F_y = F_z = 0,$$

а эти равенства определяют особую точку поверхности семейства.

Таким образом: *дискриминантная поверхность есть огибающая семейства, если она не состоит из особых точек поверхностей семейства.*

§ 62. Характеристика семейства поверхностей. Значение параметра c , вообще говоря, изменяется при перемещении точки по огибающей. Однако можно искать на огибающей такие особые геометрические места, в точках которых параметр семейства сохраняет постоянное значение.

При таком условии уравнения

$$F(x, y, z, c) = 0 \text{ (A); } F_c(x, y, z, c) = 0 \text{ (B)} \quad (1)$$

выражают две поверхности, а место общих точек этих поверхностей есть, вообще говоря, некоторая кривая, принадлежащая огибающей, причем всем точкам этой кривой соответствует одно и то же значение

параметра c . Эта кривая называется *характеристикой семейства*. Так как все точки характеристики принадлежат в силу уравнения (1, А) также некоторой поверхности семейства, то *характеристика есть линия, вдоль которой огибающая касается некоторой фиксированной поверхности семейства* (рис. 66).

К понятию характеристики можно прийти и из других соображений, которые во многих частных случаях облегчают исследование геометрической природы характеристик.

Предположим, что две поверхности семейства, соответствующие двум достаточно близким значениям параметра c и $c + \Delta c$, пересекаются по некоторой линии. Координаты точек этой линии, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$F(x, y, z, c) = 0 \quad (I)$$

и

$$F(x, y, z, c + \Delta c) = 0. \quad (I')$$

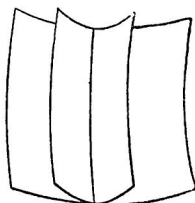


Рис. 66.

Пользуясь теоремой Лагранжа, мы можем получить третье уравнение

$$F_c(x, y, z, c_1) = 0, \quad (I'')$$

где c_1 есть значение параметра, заключенное между двумя данными.

Этому уравнению тоже удовлетворяют координаты точек рассматриваемой кривой.

Предположим теперь, что $\Delta c \rightarrow 0$, т. е., что значения параметра, соответствующие обеим поверхностям семейства, неограниченно сближаются. В таком случае уравнение (I'') перейдет в уравнение

$$F_c(x, y, z, c) = 0 \quad (II)$$

и вместе с уравнением (I) определит предельное положение рассматриваемой линии. Сравнивая уравнения (I), (II) с уравнениями (1), приходим к следующему заключению. *Предельное положение линии пересечения двух поверхностей семейства, соответствующих двум бесконечно близким значениям параметра, совпадает с его характеристикой.*

§ 63. Ребро возврата. Характеристики образуют на огибающей поверхности семейство линий, зависящее от одного параметра. Если это семейство имеет огибающую, то она называется *ребром возврата* данного семейства поверхностей.

Предположим, что рассматриваемое семейство поверхностей имеет ребро возврата, выражающееся уравнением

$$r = r(t).$$

Подставляя выражение координат точки этой кривой в уравнения (1) § 62, мы обратим их в тождества, так как по определению ребро возврата принадлежит огибающей.

Дифференцируя условие, полученное из (1, В), найдем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc}{dt} = 0. \quad (1)$$

Но касательный вектор ребра возврата должен совпадать в каждой его точке с касательным вектором соответствующей характеристике и должен поэтому быть перпендикулярен к нормальному вектору всякой поверхности, проходящей через эту характеристику. Но одна из таких поверхностей выражается уравнением (1, В)

$$F_c(x, y, z, c) = 0$$

и ее нормальный вектор N_c имеет координаты

$$F_{cx}, F_{cy}, F_{cz}.$$

Приняв во внимание условие перпендикулярности

$$N_c \frac{dr}{dt} = 0 \quad (2)$$

и заметив, что значение параметра c меняется при движении по ребру возврата, получим из соотношения (1)

$$F_{cc} = 0.$$

Таким образом, координаты точки ребра возврата должны удовлетворять трем уравнениям

$$F(x, y, z, c) = 0; F_c(x, y, z, c) = 0; F_{cc}(x, y, z, c) = 0. \quad (3)$$

Разрешая эти уравнения относительно x, y, z , мы можем определить их в функции параметра c и получить, таким образом, параметрические уравнения ребра возврата

$$r = r(c),$$

если оно существует.

В этом случае соответственно значению c на каждой поверхности семейства найдется точка, принадлежащая ребру возврата. Эта точка называется *характеристической точкой* данного семейства поверхностей.

УПРАЖНЕНИЯ

105. Огибающая семейства шаров называется *канальной поверхностью*. Найти условие, при котором семейство шаров, зависящих от одного параметра, имеет огибающую.

Решение. Представим уравнение семейства в виде

$$(\rho - r)^2 - k^2 = 0. \quad (*)$$

Примем за параметр длину дуги кривой

$$r = r(s),$$

т. е. места центров сфер семейства (случай $r = \text{const}$ не представляет интереса). Дифференцируя по параметру, получим уравнение

$$(\rho - r)\tau + k \frac{dk}{ds} = 0. \quad (*)$$

Из уравнений (*), (**) следует, что характеристика семейства есть окружность, расположенная в плоскости (**), которая параллельна нормальной плоскости линии центров и отстоит от центра соответствующей сферы на расстоянии, равном

$$k \left| \frac{dk}{ds} \right|.$$

Эта окружность (а вместе с тем и сама каналовая поверхность) действительна при условии

$$\left| \frac{dk}{ds} \right| < 1.$$

В частности, если все сферы семейства имеют одинаковый радиус, то поверхность действительна, а характеристики являются большими кругами сфер семейства и расположены в нормальных плоскостях линии центров. В этом случае поверхность называется *трубчатой*.

106. Доказать, что уравнение ребра возврата семейства сфер постоянного радиуса имеет вид

$$\rho = r + p\mathbf{v} \pm \sqrt{k^2 - p^2\beta},$$

где r , \mathbf{v} , β , p — обычные обозначения, относящиеся к линии центров.

107. Тором (рис. 67) называется огибающая семейства сфер постоянного радиуса a с центрами на окружности радиуса b . Найти уравнение тора, предположив, что центры расположены на окружности

$$r = be(\varphi).$$

$$\text{О т в е т: } 4b^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2.$$

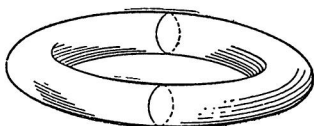


Рис. 67.

§ 64. Развертывающиеся поверхности. Рассмотрим семейство плоскостей, определяемых уравнением

$$F(x, y, z, a) = N(a)r + D(a) = 0. \quad (1)$$

Обозначая дифференцирование по параметру a точкой, присоединим к уравнению семейства уравнение

$$F_a(x, y, z, a) = \dot{N}r + \dot{D} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) при фиксированном значении a определяют характеристику семейства, если она существует. Так как уравнение (2) есть уравнение плоскости, то характеристикой будет прямая пересечения плоскостей (1) и (2). Эта прямая существует, если нормальные векторы этих плоскостей не параллельны между собой. В противном случае векторы \dot{N} и N коллинеарны

$$\dot{N} = \lambda N, \quad (3)$$

а это значит, что N есть вектор неизменного направления и все плоскости семейства параллельны между собой. Огибающей у такого семейства, очевидно, нет. Поэтому в дальнейшем мы исключаем из рассмотрения случай (3), предполагая, что направление нормального вектора плоскостей меняется вместе с параметром a .

Возвратившись к общему случаю, присоединим к уравнениям (1) и (2) уравнение

$$F_{aa}(x, y, z, a) = \ddot{N}r + \ddot{D} = 0. \quad (4)$$

Системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} Nr + D &= 0, & (\alpha) \\ \dot{N}r + \dot{D} &= 0, & (\beta) \\ \ddot{N}r + \ddot{D} &= 0, & (\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

должен удовлетворять радиус-вектор характеристической точки семейства.

Так как эти уравнения линейны, то для их однозначной разрешимости относительно r необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы был отличен от нуля. Но этот определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где через A, B, C обозначены, как обычно, координаты вектора N , являющиеся коэффициентами уравнения плоскости семейства.

Выражение Δ может быть, очевидно, переписано в виде смешанного произведения

$$\Delta = (N \dot{N} \ddot{N}). \quad (7)$$

Рассмотрим отдельно семейства, для которых $\Delta \neq 0$ и семейства, для которых $\Delta = 0$

$$A) \quad \Delta = (N \dot{N} \ddot{N}) \neq 0.$$

В этом случае система (5) разрешима относительно радиуса-вектора характеристической точки и определяет его в функции параметра a

$$r = r(a). \quad (8)$$

Если уравнение (8) определяет кривую, то это есть ребро возврата. Посмотрим, как связана плоскость семейства с этой кривой.

Так как характеристика, определяемая пересечением плоскостей (α) и (β), касается ребра возврата, то нормальные векторы этих плоскостей должны быть перпендикулярны его касательному вектору, так что

$$N\dot{r} = 0, \quad (9)$$

$$\dot{N}r = 0. \quad (10)$$

Продифференцировав тождество (9), получим

$$Nr + N\ddot{r} = 0$$

или вследствие (10)

$$N\ddot{r} = 0.$$

Таким образом, плоскость семейства, касаясь ребра возврата, содержит вектор второй производной и, следовательно, является соприкасающейся плоскостью этой линии.

Итак: *если ребро возврата семейства плоскостей совпадает с некоторой пространственной кривой, то все характеристики семейства касаются этой кривой, а плоскости семейства являются ее соприкасающимися плоскостями.*

При условии разрешимости системы (5) относительно радиуса-вектора характеристической точки может оказаться, что он не зависит от параметра. В таком случае уравнение (8) заменится уравнением

$$r = r_0 = \text{const}$$

и не определит ребра возврата как кривой линии. Однако теперь можно сказать, что все характеристики семейства проходят через точку $r = r_0$ и огибающая образована движением прямой, проходящей через неподвижную точку, т. е. является *конической поверхностью*.

Итак: *если все характеристики семейства плоскостей проходят через одну точку, то все плоскости семейства касаются конической поверхности, а характеристики совпадают с ее прямолинейными образующими.*

В) Предположим, что $\Delta = (N\dot{N}\ddot{N}) = 0$. В таком случае вектор N , изменяясь, остается параллельным постоянной плоскости (§ 10) и сама плоскость семейства все время перпендикулярна этой же плоскости. Так как характеристика семейства является предельным положением прямой пересечения двух плоскостей семейства, то и они перпендикулярны той же плоскости и, следовательно, параллельны между собой. Отсюда вытекает, что огибающая образована движением прямой постоянного направления и, следовательно, является *цилиндрической поверхностью*.

Итак: *если характеристики семейства параллельны между собой, то огибающая этого семейства есть цилиндрическая поверхность.*

По причинам, которые будут выяснены ниже, огибающие семейства плоскостей называются *развертывающимися поверхностями*.

Резюмируя результаты этого параграфа, мы можем сказать, что существует три типа развертывающихся поверхностей:

1. Поверхность, образованная касательными к пространственной кривой (поверхность касательных) (рис. 68).
2. Конические поверхности (рис. 69).
3. Цилиндрические поверхности (рис. 70).

К числу развертывающихся поверхностей следует причислить и плоскость, которая, очевидно, может рассматриваться и как поверхность касательных плоской кривой, и как коническая, и как цилиндрическая поверхность с прямолинейной направляющей.

УПРАЖНЕНИЯ

108. Найти ребро возврата семейства плоскостей

$$\{ae(\varphi) + bk\} r - c\varphi = 0.$$

О т в е т: Винтовая линия $r = \frac{c}{a} g(\varphi) + \frac{c}{b} k\varphi$.

109. Найти огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$a^2 + a^2x + ay + z = 0.$$

О т в е т: $4x^2z - x^2y^2 - 18xyz + 4y^3 + 27z^2 = 0$,

$$x = -3a; \quad y = 3a^2; \quad z = -a^3.$$

У к а з а н и е. При составлении уравнения огибающей воспользоваться методом исключения неизвестного из системы алгебраических уравнений (см., например, Г. М. Шапиро. Высшая алгебра, глава IV, стр. 132, 1935).

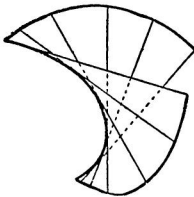


Рис. 68.

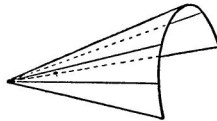


Рис. 69.

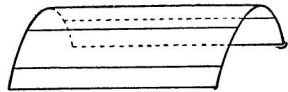


Рис. 70.

110. Найти огибающую семейства плоскостей

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - z \sin \alpha = s$$

и доказать, что она будет цилиндрической поверхностью.

О т в е т: $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 1 = 0$.

111. Найти огибающую семейства плоскостей

$$a^2x + 2ay + 2z = 2a$$

и доказать, что она будет конической поверхностью.

О т в е т: $(1 - y)^2 - 2xz = 0$.

§ 65. Полярная поверхность. Переходя к рассмотрению развертывающихся поверхностей, связанных с пространственной кривой, исследуем огибающую семейства нормальных плоскостей. *Огибающая семейства нормальных плоскостей называется полярной поверхностью данной кривой.*

Уравнение нормальной плоскости кривой

$$r = r(s)$$

имеет вид

$$\tau(\rho - r) = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя это уравнение по параметру, от которого зависят только τ и r , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau(\rho - r) &= 0, & (A) \\ \frac{d}{ds} \{\tau(\rho - r)\} &= 0, & (B), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

определяющих характеристику полярной поверхности. Преобразуем левую часть уравнения (12), воспользовавшись формулами Серре — Френе

$$\frac{d}{ds} \{\tau(\rho - r)\} = k\nu(\rho - r) - \tau^2 = k\{\nu(\rho - r) - \rho\}.$$

Таким образом, радиус-вектор любой точки характеристики удовлетворяет соотношению

$$\nu(\rho - r) = \rho. \quad (3)$$

Уравнение (2, A) или равносильное ему уравнение (3) выражает плоскость, параллельную спрямляющей плоскости, так как ее нормальный вектор направлен по главной нормали. Так как эта плоскость пересекает нормальную плоскость по характеристике семейства, то эти характеристики параллельны бинормали.

Теперь нетрудно установить положение характеристики в нормальной плоскости. Из соотношения (3) следует, что проекция вектора $\rho - r$, соединяющего точку кривой с произвольной точкой характеристики, равна радиусу кривизны, откуда сейчас же следует, что эта характеристика проходит через центр кривизны (рис. 71).

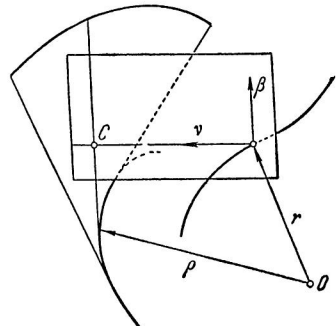


Рис. 71.

Итак: характеристика полярной поверхности есть прямая, параллельная бинормали и проходящая через центр кривизны, соответствующий точке данной кривой.

Прямую эту называют еще осью кривизны данной линии. Ее уравнение

$$\rho = r + \rho\nu + \lambda\beta.$$

УПРАЖНЕНИЕ

112. Найти ось кривизны и полярную поверхность кривой

$$r = \cos \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{e(\varphi) + k}{\sqrt{2}} \right\} - \sin \frac{\varphi}{\sqrt{2}} g(\varphi).$$

Решение. $\dot{r} = \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \{e(\varphi) - k\}.$

Уравнение нормальной плоскости $\{e(\varphi) - k\} \rho = 0.$

Дифференцируя по φ , получим

$$g'(\varphi) \rho = 0,$$

отсюда уравнение характеристики имеет вид

$$\rho = \lambda[(e(\varphi) - k)(g'(\varphi))] = \lambda \{k + e(\varphi)\},$$

откуда

$$\xi = \lambda \cos \varphi,$$

$$\eta = \lambda \sin \varphi,$$

$$\zeta = \lambda.$$

Исключая φ , получим уравнение полярной поверхности в виде

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

Это круговой конус.

Сама кривая лежит на сфере и называется *сферической эвольвентой круга*.

*** § 66. Характеристическая точка полярной поверхности.** Из общей теории развертывающихся поверхностей следует, что радиус-вектор характеристической точки полярной поверхности должен удовлетворять системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau(\rho - r) &= 0, (A) \\ \frac{d}{ds} \{\tau(\rho - r)\} &= 0, (B) \\ \frac{d^2}{ds^2} \{\tau(\rho - r)\} &= 0. (C) \end{aligned} \right\} (1)$$

Преобразуя последнее из них, воспользуемся результатами преобразования уравнения (1, B) и получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \{\tau(\rho - r)\} &= \frac{d}{ds} \{k(v(\rho - r) - p)\} = \\ &= k' \{v(\rho - r) - p\} + k \{(-k\tau + \alpha\beta)(\rho - r) + v\tau - p'\}. \end{aligned}$$

Однако в силу уравнения (1, B) первое слагаемое обращается в нуль, откуда

$$(k\tau - \alpha\beta)(\rho - r) + p' = 0. \quad (2)$$

Искомая характеристическая точка лежит на оси кривизны, вследствие чего ее радиус-вектор можно представить в виде (рис. 72)

$$\rho = r + p\nu + \lambda\beta.$$

Подставляя это выражение в (2), получим

$$-\alpha\lambda + p' = 0.$$

Вводя обозначение

$$q = \frac{1}{\kappa} \quad (3)$$

(так называемого «радиуса кривизны»), получим окончательное выражение для радиуса-вектора характеристической точки полярной поверхности

$$\rho = r + p\nu + qp'\beta. \quad (4)$$

Если рассматривать параметр s в правой части этого соотношения как переменное, то оно же дает уравнение ребра возврата полярной поверхности.

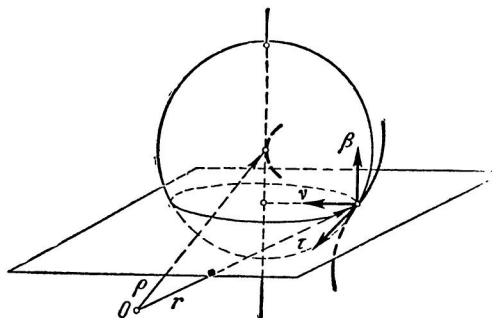


Рис. 72.

Само собой разумеется, что формула (4) имеет смысл только для неплюской кривой. Если кривая плоская, то ее полярная поверхность цилиндрическая и не имеет характеристических точек.

§ 67. Соприкасающаяся сфера. Соприкасающейся сферой называется предельное положение сферы, проходящей через четыре бесконечно сближающиеся точки данной кривой. Представим уравнение этой сферы в виде

$$(\rho - \rho_0)^2 - R^2 = 0, \quad (1)$$

где

ρ — текущий радиус-вектор сферы;

ρ_0 — радиус-вектор центра;

а

R — радиус сферы.

Согласно общей теории соприкосновения, подстановка радиуса-вектора кривой в уравнение (28) и три других, полученных дифференцированием, должна обратить их в тождества.

Но

$$\frac{d}{ds} \{ (r(s) - \rho_0)^2 - R^2 \} = 2(r - \rho_0)\tau,$$

так что указанная система равенств имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (r_0 - \rho_0)^2 - R^2 &= 0, & (A_1) \\ \tau_0 (r_0 - \rho_0) &= 0, & (A_2) \\ \frac{d}{ds} \tau(r(s) - \rho_0) \Big|_{s=s_0} &= 0, & (A_3) \\ \frac{d^2}{ds^2} \tau(r(s) - \rho_0) \Big|_{s=s_0} &= 0. & (A_4) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Первое уравнение определяет радиус искомой сферы, последние же три легко истолковать, сравнив их с уравнениями (1) предыдущего параграфа. Действительно, они показывают, что эта система удовлетворяется при подстановке в нее вместо текущего радиуса-вектора ρ радиуса-вектора центра соприкасающейся сферы.

Отсюда сейчас же вытекает, что *центр соприкасающейся сферы совпадает с характеристической точкой полярной поверхности* и, следовательно, выражается, как и в (4) § 66, формулой

$$\rho_0 = r + p\nu + q\rho'\beta. \quad (3)$$

Приняв теперь во внимание соотношение A_1 , получим для радиуса соприкасающейся сферы выражение

$$R^2 = p^2 + (p'q)^2. \quad (4)$$

Отметим в заключение некоторые частные случаи.

Плоская кривая не имеет соприкасающейся сферы, что следует как из того, что четыре точки плоскости, вообще говоря, не лежат на одной сфере, так и из того, что (3) теряет смысл, если кручение равно нулю. Сферическая кривая имеет своей соприкасающейся сферой ту сферу, на которой она расположена. Это можно доказать и непосредственно, имея в виду, что именно эта сфера проходит через любые четыре точки данной кривой. К тому же результату мы придем, если примем во внимание, что все оси кривизны кривой, расположенной на сфере, должны проходить через центр этой сферы и он, будучи характеристической точкой полярной поверхности, должен быть и центром соприкасающейся сферы — одной и той же для всех точек кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

113. Доказать, что радиус соприкасающейся сферы не зависит от точки на кривой только у сферических кривых и у кривых постоянной кривизны и совпадает в последнем случае с радиусом кривизны.

Решение. Дифференцируя соотношение

$$p^2 + (p'q)^2 = \text{const},$$

получим

$$p' \{p + q(p'q)'\} = 0.$$

Полагая $p' = 0$, получим кривую постоянной кривизны; для нее очевидно

$$R = p.$$

В противном случае дифференцирование (3) дает

$$\rho'_0 = \{p\kappa + (p'q)'\} \beta = \kappa \{p + q(p'q)'\} \beta = 0,$$

откуда и следует, что кривые расположены на сфере с центром в точке $\rho_0 = \text{const}$ и с радиусом $R = \text{const}$.

114. Углом кривизны сферической кривой называется угол между ее осью кривизны и радиусом сферы, проведенным из ее центра в точку кривой. Выразить кривизну и кручение сферической кривой через угол кривизны.

Решение. Так как ось кривизны проходит через центр сферы по направлению бинормали, а вектор главной нормали направлен к центру кривизны, то радиус-вектор точки кривой, проведенный из центра сферы, выражается через угол кривизны следующим образом:

$$r = R(\beta \cos \theta - \nu \sin \theta).$$

Дифференцируя по s , пользуясь формулами Серре — Френе и сравнивая коэффициенты при одинаковых векторах, получим

$$p = R \sin \theta; \quad \kappa = -\frac{d\theta}{ds}.$$

115. Найти натуральные уравнения линии откоса, расположенной на сфере.

Ответ: $k = \frac{1}{\sqrt{R^2 - c^2 s^2}}; \quad \kappa = \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2 s^2}}.$

116. Найти сопровождающий трехгранник ребра возврата полярной поверхности и соотношение между кривизнами и кручением этой линии и данной кривой (рис. 73).

Решение. Обозначим через τ, ν, β, k и κ величины, связанные с данной кривой, а через $\tau_c, \nu_c, \beta_c, k_c$ и κ_c те же величины для ребра возврата полярной поверхности. Так как оси кривизны являются ее характеристиками, то касательный вектор

$$\tau_c = \beta.$$

Нормальная плоскость есть соприкасающаяся плоскость кривой ρ_c , поэтому

$$\nu_c = [\beta_c \tau_c] = \pm [\tau \beta] = \mp \nu.$$

Из того, что углы поворота касательной и бинормали для кривой ρ_c равны углам поворота бинормали и касательной данной кривой соответственно, сейчас же следует

$$\frac{\kappa_c}{k_c} = \pm \frac{k}{\kappa}.$$

117. Доказать, что ребро возврата полярной поверхности линии откоса есть линия откоса.

§ 68. Огибающая касательных плоскостей. Если в каждой точке кривой

$$r = r(t)$$

задана определенная касательная плоскость с единичным нормальным

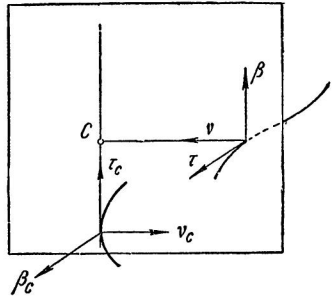


Рис. 73.

вектором \mathbf{n} (рис. 74), то уравнение семейства этих плоскостей будет иметь вид

$$\mathbf{n}(\rho - \mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя это уравнение по параметру t , от которого зависит \mathbf{r} и \mathbf{n} , и принимая во внимание, что \mathbf{n} перпендикулярен касательному вектору кривой, получим

$$\dot{\mathbf{n}}(\rho - \mathbf{r}) - \mathbf{n}\dot{\mathbf{r}} = 0$$

или

$$\dot{\mathbf{n}}(\rho - \mathbf{r}) = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) определяют характеристику семейства и, очевидно, удовлетворяются при

$$\rho = \mathbf{r}.$$

Отсюда следует, что характеристика семейства плоскостей, касающихся данной кривой, проходит через точку прикосновения этой кривой, соответствующей плоскости семейства.

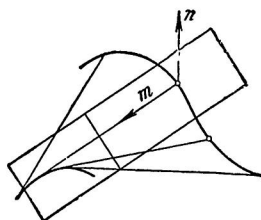


Рис. 74.

Этот же результат, очевидно, можно выразить следующим образом: кривая, касающаяся каждой плоскости семейства, лежит на огибающей этого семейства.

Зная точку, через которую проходит характеристика, для полного ее определения достаточно вычислить ее направляющий вектор \mathbf{m} . Для этого примем во внимание, что \mathbf{m} перпендикулярен нормальным векторам плоскостей (1) и (2) и может быть определен условиями

$$\mathbf{m}\mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{m}\dot{\mathbf{n}} = 0. \quad (3)$$

Уравнение характеристики может быть получено и в явном виде

$$\rho = \mathbf{r} + \lambda[\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}]. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ

118. Найти характеристики семейств соприкасающихся и спрямляющих плоскостей кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$.

О т в е т: $\rho = \mathbf{r} + \lambda\boldsymbol{\tau}$; $\rho = \mathbf{r} + \lambda(\alpha\boldsymbol{\tau} + h\boldsymbol{\beta})$.

§ 69. Параллельные кривые. Две кривые с общими нормальными называются *параллельными*, если их касательные в соответствующих точках параллельны. Так как расстояние между соответствующими точками параллельных кривых постоянно (§ 57), то связь между их радиусами-векторами может быть выражена формулой

$$\rho = \mathbf{r} + c\mathbf{n}, \quad (1)$$

где m — направляющий орт общей нормали, а c — постоянное. Дифференцирование дает связь между касательными векторами обеих кривых, которые будут параллельны в том и только в том случае, если выполняется условие

$$dm = \lambda dr. \quad (2)$$

Так как касательная плоскость развертывающейся поверхности постоянна вдоль всей образующей этой поверхности, а касательные к двум ортогональным траекториям ее образующих лежат в этой плоскости, то они необходимо параллельны между собой. Итак, *всякие две ортогональные траектории образующих развертывающейся поверхности параллельны.*

Обратно: *общие нормали двух параллельных кривых образуют развертывающуюся поверхность.*

Действительно: параллельные кривые имеют общую касательную плоскость в своих соответствующих точках. Но образующая семейства таких плоскостей должна проходить одновременно через обе соответствующие точки и, следовательно, совпадает с общей нормалью параллельных кривых.

Сопоставляя оба последних результата, мы приходим к следующему выводу:

Для того чтобы некоторое однопараметрическое семейство нормалей кривой составляло развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы дифференциалы радиуса-вектора точки этой кривой и орта ее нормали были коллинеарны, т. е. удовлетворяли условию (2).

Чтобы найти направление вектора m , представим его в виде

$$m = \nu \cos \theta + \beta \sin \theta,$$

обозначая через θ угол, который он образует с главной нормалью данной линии.

Дифференцируя последнее равенство и пользуясь формулами Серре—Френе, получим после простых преобразований

$$dm = -\tau k \cos \theta ds + (d\theta + \kappa ds) (\beta \cos \theta - \nu \sin \theta).$$

Для того чтобы dm и τ были коллинеарны, должно выполняться условие

$$d\theta + \kappa ds = 0, \quad (3)$$

которое и позволяет определить искомый угол θ в виде интеграла

$$\theta = - \int \kappa ds. \quad (4)$$

Таким образом, мы видим, что из нормалей всякой кривой можно составить развертывающуюся поверхность, и притом с известным произволом, соответствующим произволу в выборе постоянного интегрирования.

Этому произволу можно дать простое геометрическое истолкование. Предположим, что из нормалей данной кривой построены две различные развертывающиеся поверхности, причем их характеристики образуют углы θ_1 и θ_2 с главными нормальными данной кривой.

Оба эти угла должны удовлетворять условию (1). Поэтому, обозначив через $\varphi = \theta_2 - \theta_1$, получим

$$d\varphi = d(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

или

$$\varphi = \text{const.}$$

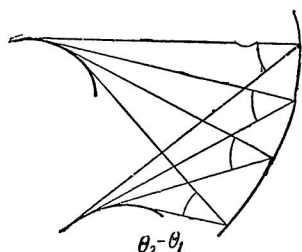


Рис. 75.

Отсюда следует, что если *нормали, образующие развертывающуюся поверхность, повернуть в нормальных плоскостях на постоянный угол, то они и после поворота будут образовывать развертывающуюся поверхность* (рис. 75).

Формула (3) позволяет решить вопрос о виде кривых, у которых главные нормали или бинормали образуют развертывающуюся поверхность. В этих случаях $\theta = 0$ или $\theta = \frac{\pi}{2}$;

$$d\theta = 0$$

и, следовательно, $\kappa = 0$, так что это возможно только для плоской кривой.

§ 70. Пространственная эволюта. *Пространственной эволютой кривой Γ называется такая кривая Γ_1 , касательные которой являются нормальными данной кривой.*

Из этого определения прямо следует, что семейство нормалей, касающихся эволюты, должно образовывать развертывающуюся поверхность, ребром возврата которой будет рассматриваемая эволюта (рис. 76).

Установим теперь положение точки эволюты на нормалях этого семейства.

Для этого заметим, что, касаясь нормали, эволюта должна касаться и всех нормальных плоскостей данной кривой и в силу этого должна быть расположена на огибающей их семейства (§ 68).

Итак: *эволюта данной кривой расположена на ее полярной поверхности.*

Приняв во внимание, что точка эволюты лежит на пересечении оси кривизны с нормалью, образующей развертывающуюся поверхность, мы

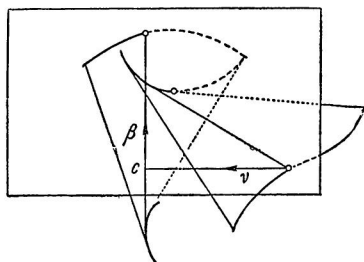


Рис. 76.

можем представить ее радиус-вектор в следующем виде:

$$\rho = r + p\nu + p \operatorname{tg} \theta \beta,$$

где p есть радиус кривизны, а θ удовлетворяет условию (3) § 69

$$d\theta + \kappa ds = 0.$$

Так как угол θ определяется с произволом в выборе постоянного слагаемого, то всякая линия имеет бесчисленное множество эволют.

Это справедливо в частности и для плоских кривых.

В этом случае $\kappa = 0$ и одну из эволют можно получить, полагая $\theta = 0$. Но в этом случае эволюта расположена в той же плоскости, что и данная кривая, совпадает с местом ее центров кривизны и была рассмотрена нами ранее (§ 45). Другие эволюты той же кривой соответствуют значениям $\theta = \operatorname{const} \neq 0$.

Все они расположены на полярной поверхности, которая в случае плоской кривой будет цилиндрической. С другой стороны, угол θ , образованный касательной эволют плоской кривой с ее плоскостью, постоянен, значит они пересекают и оси кривизны над постоянным углом и являются линиями откоса.

УПРАЖНЕНИЕ

119. Составить уравнение эволюты винтовой линии

$$r = ae(\varphi) + b\varphi k.$$

О т в е т: $\rho = \frac{c}{a} \operatorname{tg} \frac{b(\varphi - \varphi_0)}{c} (ak + bg) + b\varphi k - \frac{b^2}{a} e,$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Г Л А В А VI

П О В Е Р Х Н О С Т Ь И Е Е Л И Н Е Й Н Ы Й Э Л Е М Е Н Т

§ 71. Понятие поверхности. Переходя к изучению поверхности, мы начнем с ее топологического определения и прежде всего определим понятие *простого куска поверхности*, которое играет ту же роль, что и понятие простой дуги для кривой.

Простым куском поверхности называется такое множество точек, которое может быть отображено топологически (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) на множество внутренних точек круга и точек окружности. Те точки куска, которые отображаются в точки окружности, называются его *граничными точками*. Граничные точки образуют замкнутую кривую — *границу простого куска*. Простой кусок называют также *односвязной поверхностной областью*.

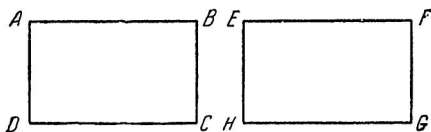


Рис. 77.

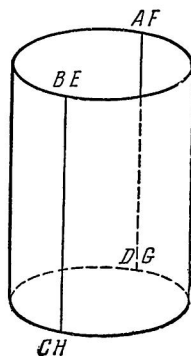


Рис. 78.

Мы будем говорить, что два простых куска *склеены*, если после некоторой непрерывной деформации они приведены в такое взаимное расположение, в котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой. В результате склеивания простых кусков может получиться снова простой кусок, а может получиться и такое множество точек, которое не является простым куском. Рассмотрим, например, два равных прямоугольника $ABCD$ и $EFGH$ (рис. 77) и склеим их так, чтобы сторона BC совместилась со стороной EH , а сторона AD — со стороной FG . В результате такого склеивания мы получим «трубку» (рис. 78). Непрерывной деформацией ее можно пре-

вратить в плоское кольцо (рис. 79) или в *двухсвязную область* плоскости, но нельзя отобразить топологически на круг.

Еще более своеобразную фигуру мы получим, если совместим по-прежнему отрезок BC с отрезком EH , но будем считать соответственными такие точки отрезков AD и GF , которые симметричны относительно центра тяжести прямоугольника $AFGD$. Произведя совмещение этих точек, т. е. налагая отрезок GF на отрезок AD , мы получим так называемый *лист Мебиуса* (рис. 80), обладающий замечательным свойством односторонности¹⁾. Лист Мебиуса тоже не является простым куском поверхности. Однако с обычной точки зрения лист Мебиуса, так же как трубка или кольцо, являются поверхностями. В согласии

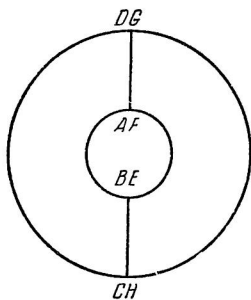


Рис. 79.

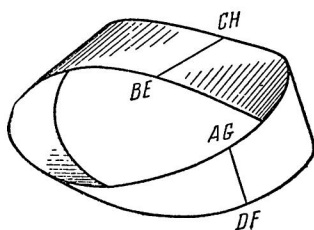


Рис. 80.

с этим, мы будем называть *поверхностями* не только простые куски, но и такие множества точек, которые могут быть склеены из конечного или счетного множества простых кусков.

Так, например, полная поверхность шара может быть склеена из двух его полушарий, каждое из которых является простым куском, а вся бесконечная плоскость может быть составлена из четного числа простых кусков прямоугольной формы.

Если возвращаться от рассмотрения полной поверхности к отдельному рассмотрению тех кусков, из которых она склеена, то говорят, что поверхность *разрезана* на эти куски.

§ 72. Криволинейные координаты и параметрическое уравнение поверхности. Рассмотрим поверхность или такую часть поверхности, которая может быть топологически отображена на плоскую область, и пусть точке M этой поверхности соответствует точка M_0 плоскости (рис. 81), прямоугольные координаты которой равны u и v . Если такое отображение задано, то говорят, что поверхность *параметризована*, а величины u , v называются *криволинейными координатами*

¹⁾ См. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

точки M данной поверхности. В силу непрерывности отображения всякой линии на плоскости соответствует некоторая линия на поверхности. В частности, прямым $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответствуют такие линии поверхности, которые называются *параметрическими* или *координатными линиями* данной параметризации. В силу однозначности соответствия через каждую точку параметризованной поверхности проходит одна и только одна линия семейства $u = \text{const}$ и одна и только одна линия семейства $v = \text{const}$. Оба эти семейства вместе образуют *правильную сеть*, которая называется *координатной сетью*.

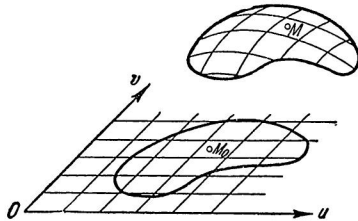


Рис. 81.

Задание криволинейных координат u, v точки M параметризованной поверхности определяет положение этой точки, следовательно, и значение ее радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$. Таким образом, радиус-вектор точки параметризованной поверхности является функцией криволинейных координат этой точки. Соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (1)$$

определяющее эту функциональную зависимость, называется *параметрическим уравнением поверхности*.

Векторное уравнение (1) равносильно трем координатным уравнениям

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как соответствие между парами значений криволинейных координат и точками поверхности должно быть взаимно однозначным, то уравнения (2) должны быть разрешимы относительно переменных u, v , а координаты точки поверхности должны быть связаны соотношением вида

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

являющегося результатом исключения параметров из уравнений (2). Это соотношение и есть неявное уравнение поверхности, которым мы пользовались выше.

Если поверхность может быть однозначно отображена в область плоскости Oxy так, что соответствующие точки M и M_0 лежат на прямой, параллельной оси Oz , то ее уравнение может быть представлено в виде

$$z = f(x, y). \quad (4)$$

Абсцисса и ордината точки поверхности играют в этом случае роль криволинейных координат, а координатные линии являются линиями пересечения поверхности плоскостями, которые параллельны координатным плоскостям Oyz и Oxz .

Метод дифференциальной геометрии позволяет изучать только такие поверхности, радиус-вектор точки которых может быть задан в виде

дифференцируемой функции криволинейных координат. В дальнейшем мы всегда будем предполагать эту дифференцируемость, т. е. предполагать, что правые части уравнений (1) и (2) допускают существование частных производных по u и по v до таких порядков, которые требуются для решения поставленных нами задач.

В предположении дифференцируемости условие разрешимости уравнений (2) относительно u и v сводится к тому, что хотя бы один из определителей второго порядка, погруженных в матрицу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

отличен от нуля, т. е. ранг этой матрицы равен двум. Точки поверхности, в которых это условие нарушено, мы будем называть *особыми точками* параметризации и исключать их из рассмотрения.

§ 73. Примеры параметризованных поверхностей. 1. Семейство прямых, параллельных между собой, очевидно, будет правильным во всей плоскости. Два таких семейства, образованных прямыми различных направлений (например ортогональных между собой), образуют сеть. Параметризуя эти семейства так, чтобы каждой прямой соответствовало, например, значение расстояния этой прямой от некоторой, принятой за начальную, и приписывая этому расстоянию знак, зависящий от того, на какую сторону от начальной прямой взята данная, мы и получим обычную декартову систему координат (рис. 82).

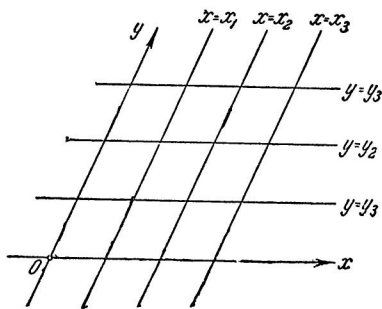


Рис. 82.

Пусть r_0 есть радиус-вектор начала, а a и b координатные векторы декартовой системы координат плоскости. Обозначая через u и v декартовы координаты, соответствующие этой системе, получим параметрическое уравнение плоскости

$$r = r_0 + au + bv. \quad (1)$$

2. Рассмотрим сеть, образованную прямыми некоторого собственного пучка и семейством концентрических окружностей с центрами в вершине этого пучка. Оба семейства будут правильными во всей плоскости, за исключением вершины пучка. Такую исключительную точку мы будем в дальнейшем называть особой точкой координатной сети. Параметризуем семейство прямых, принимая за параметр угол между некоторой прямой, принятой за начальную, и данной прямой пучка, а семей-

ство окружностей параметризуем, относя каждой из них значение ее радиуса. Система криволинейных координат, которую мы получим, таким образом совпадает с полярной (рис. 83).

Предположим теперь, что r_0 есть радиус-вектор полюса, i есть единичный вектор, направленный по полярной оси, а j — единичный вектор, перпендикулярный этой оси. Обозначив как обычно через φ и ρ полярные координаты точки на плоскости, получим ее параметрическое уравнение в этих координатах

$$r = r_0 + \rho (i \cos \varphi + j \sin \varphi)$$

или

$$r = r_0 + \rho e(\varphi). \quad (2)$$

3. В качестве третьего примера рассмотрим так называемые «географические» координаты на сфере. Зафиксировав «полярную ось» — один из диаметров этой сферы, рассмотрим семейство «меридианов», т. е.

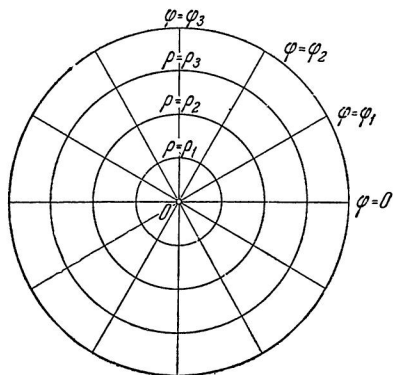


Рис. 83.

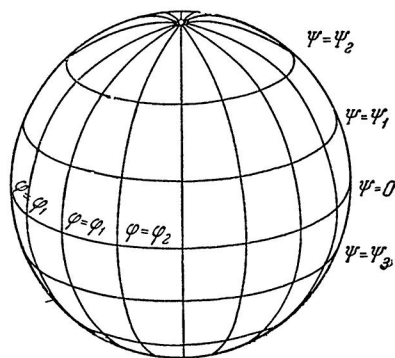


Рис. 84.

больших кругов, полученных от пересечения поверхности сферы плоскостями, содержащими этот диаметр, и параметризуем его, приняв за параметр «долготу», т. е. угол между плоскостью меридиана, принятого за начальный, и плоскостью данного меридиана. Второе семейство «параллелей» получим, пересекая поверхность сферы плоскостями, перпендикулярными избранному вначале диаметру. Это семейство будет содержать один большой круг — «экватор». За параметр второго семейства примем «широту» — угловую меру дуги меридиана, заключенной между плоскостью экватора и плоскостью данной параллели, приписав ему знак в зависимости от того, на каком полушарии («северном» или «южном») расположена параллель. Оба семейства будут правильными на всей поверхности сферы за исключением «полюсов», т. е. точек пересечения поверхности сферы с полярной осью (рис. 84).

Предположим для простоты, что центр сферы радиуса a совпадает с началом прямоугольной системы координат, координатные векторы которых есть i, j, k . Начальный меридиан поместим в плоскости Oxz и будем отсчитывать долготу φ от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy . Экваториальную плоскость будем считать совмещенной с плоскостью Oxy , а широту ψ примем положительной для точек с положительными апликатами z и отрицательной в противоположном случае (рис. 85).

Проекция радиуса-вектора точки M сферы на ось Oz и плоскость Oxy будут соответственно равны

$$z = a \sin \psi,$$

$$OM_1 = a \cos \psi,$$

проекции же вектора \vec{OM}_1 на оси Ox и Oy будут

$$x = OM_1 \cos \varphi,$$

$$y = OM_1 \sin \varphi.$$

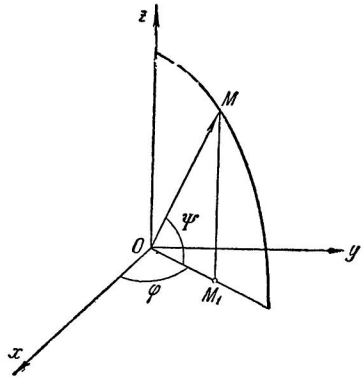


Рис. 85.

Таким образом, параметрическое уравнение сферы в географических координатах имеет вид

$$r = a \{ (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \psi + k \sin \psi \}$$

или

$$r = a \{ e(\varphi) \cos \psi + k \sin \psi \}. \quad (3)$$

УПРАЖНЕНИЯ

120. Доказать, что поверхность

$$x = a \cos \varphi \cos \psi,$$

$$y = b \sin \varphi \cos \psi,$$

$$z = c \sin \psi$$

есть эллипсоид и выяснить, какие линии будут координатными.

Отв е т. Линии $\psi = \text{const}$ — эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости Oxy . Линии $\varphi = \text{const}$ — эллипсы в плоскостях, проходящих через ось Oz .

121. Доказать, что поверхность

$$x = a \frac{u - v}{u + v}; \quad y = b \frac{uv + 1}{u + v}; \quad z = c \frac{uv - 1}{u + v}$$

есть однополостный гиперболоид, а координатные линии совпадают с его прямолинейными образующими.

122. Составить параметрическое уравнение кругового цилиндра.

Отв е т: $r = ae(\varphi) + vk$.

Координатные линии — прямолинейные образующие и их ортогональные траектории.

123. Составить параметрическое уравнение кругового конуса.

О т в е т: $r = \{ e(u) \cos \alpha + k \sin \alpha \} v$.

Координатные линии — прямолинейные образующие и их ортогональные траектории.

Угол α образующая составляет с плоскостью Oxy .

§ 74. Касательная прямая поверхности. Прямая *касается* поверхности, если она касается некоторой кривой, принадлежащей поверхности. Допустим, что поверхность задана параметрическим уравнением

$$r = r(u, v), \quad (1)$$

а принадлежащая ей кривая в свою очередь параметризована при помощи параметра t . В таком случае каждому значению этого параметра соответствует некоторая точка кривой, а ее положению на поверхности соответствуют в свою очередь определенные значения криволинейных координат u и v .

Таким образом, криволинейные координаты точек кривой, расположенной на поверхности, являются функциями параметра t .

Соответствующую систему соотношений

$$u = u(t); \quad v = v(t) \quad (2)$$

будем называть *внутренними* уравнениями кривой на поверхности.

Внутренние уравнения вполне характеризуют кривую, если задано параметрическое уравнение поверхности, так как подстановка (2) в (1) приводит нас к уравнению

$$r = r\{u(t), v(t)\}, \quad (3)$$

являющемуся параметрическим уравнением данной линии.

Касательный вектор этой кривой, а следовательно, и направляющий вектор прямой, касающейся поверхности, получим обычным приемом, дифференцируя радиус-вектор r по параметру t . Однако при этом мы примем во внимание, что в силу (3) r зависит от t через посредство аргументов u и v . Получим:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (4)$$

Правая часть этого выражения представляет линейную комбинацию двух векторов, которые для краткости обозначаются

$$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u; \quad \frac{\partial r}{\partial v} = r_v \quad (5)$$

и называются *координатными векторами*, соответствующими той точке, криволинейные координаты которой подставляются при их вычислении. Легко видеть, что координатные векторы есть векторы, касательные к координатным линиям (рис. 86). Действительно, рассмотрим одну

из координатных линий. Ее параметрические уравнения, очевидно, можно представить в виде

$$u = \text{const}; v = t.$$

Применяя к этому случаю формулу (4), получим:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_v.$$

Аналогичный результат будет, очевидно, иметь место и для другой координатной линии

$$u = t; v = \text{const}.$$

Таким образом, формула (4) показывает, что направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов, соответствующих этой точке, а его направление определяется отношением du и dv , т. е. дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, которой касается данная прямая.

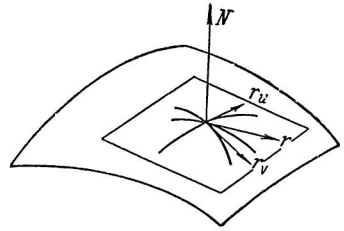


Рис. 86.

§ 75. Касательная плоскость. Так как все касательные векторы, соответствующие данной точке поверхности, выражаются линейно через координатные, то все они компланарны, откуда мы снова приходим к тому результату, что все прямые, касающиеся поверхности в данной точке, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости поверхности*.

Чтобы получить уравнение касательной плоскости, примем во внимание, что она содержит векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v и ее нормальный вектор им перпендикулярен. Поэтому этот вектор может быть положен равным

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]. \quad (1)$$

Правая часть не может быть равна нулю там, где существует правильная координатная сеть, так как по условию ее определения координатные линии не могут касаться друг друга, и векторы $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ неколлинеарны вследствие условия, наложенного на матрицу (5) § 72.

Исключим из рассмотрения и точки, в которых векторы \mathbf{r}_u или \mathbf{r}_v обращаются в нуль, так как эти точки будут особыми для параметризации координатных линий. Вообще мы будем называть особой точкой параметризованной поверхности точку, в которой $[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = 0$ и исключим в дальнейшем эти точки из нашего рассмотрения. Обозначив радиус-вектор текущей точки касательной плоскости через ρ , а радиус-вектор точки прикосновения через \mathbf{r} , получим уравнение касательной плоскости в виде равенства нулю смешанного произведения

$$(\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \rho - \mathbf{r}) = 0. \quad (2)$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, называется нормалью, а ее направляющий вектор (1) — нормальным вектором поверхности.

УПРАЖНЕНИЯ

124. Составить уравнение касательной плоскости сферы.

Решение:

$$\begin{aligned} r &= a \{ e(\varphi) \cos \psi + k \sin \psi \}, \\ r_\varphi &= a g(\varphi) \cos \psi, \\ r_\psi &= a \{ -e(\varphi) \sin \psi + k \cos \psi \}, \\ N &= [r_\varphi r_\psi] = a \cos \psi r, \\ r(\rho - r) &= 0. \end{aligned}$$

125. Составить уравнение касательной плоскости кругового цилиндра (см. упр. 122).

О т в е т: $e(\varphi)\rho - a = 0$.

126. Составить уравнение касательной плоскости кругового конуса.

О т в е т: $(be(\varphi) - ak)\rho = 0$.

127. Доказать, что поверхность

$$r = a \{ e(u) + v g(u) \} + b(u + v) k$$

— развертывающаяся.

О т в е т: Уравнение касательной плоскости

$$\{ b g(u) - a k \} \rho + a b u = 0$$

зависит только от параметра u . Таким образом, поверхность есть огибающая семейства плоскостей, зависящих от одного параметра.

Ребро возврата этой поверхности есть винтовая линия.

***§ 76. Огибающая семейства плоскостей, зависящих от двух параметров.** Семейство касательных плоскостей неразвертывающейся поверхности зависит от двух параметров.

Если дано такое семейство, то можно поставить задачу разыскания огибающей этого семейства.

Пусть уравнение семейства имеет вид

$$N(u, v)r + D(u, v) = 0. \quad (1)$$

Допустим, что огибающая существует. В таком случае подстановка радиуса-вектора точки этой поверхности, выраженного в функции параметров u и v , обращает уравнение семейства в тождество.

Дифференцируя это тождество по обоим параметрам, получим

$$N r_u + N_u r + D_u = 0; \quad N r_v + N_v r + D_v = 0.$$

Так как поверхность касается плоскости семейства, то координатные векторы r_u и r_v перпендикулярны нормальному вектору плоскости и

$$N r_u = 0; \quad N r_v = 0.$$

Таким образом, радиус-вектор огибающей должен удовлетворять трем уравнениям

$$Nr + D = 0, \quad N_u r + D_u = 0, \quad N_v r + D_v = 0. \quad (2)$$

Если эти уравнения совместны, то, решая их относительно координат точки огибающей, находим ее параметрическое уравнение.

УПРАЖНЕНИЕ

128. Найти огибающую семейства плоскостей, образующих с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема v .

О т в е т: $xyz = \frac{2}{9} v$.

§ 77. Длина дуги. Вычислим длину дуги линии, расположенной на поверхности. Для этого воспользуемся внутренним уравнением кривой (2) и подстановкой (3) § 74. Найдем сначала дифференциал дуги.

Так как

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2, \\ dr &= r_u du + r_v dv, \end{aligned} \quad (1)$$

то

$$ds^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Вводя обозначения

$$r_u^2 = E; \quad r_u r_v = F; \quad r_v^2 = G, \quad (2)$$

получим

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (3)$$

Если мы хотим вычислить длину дуги, ограниченную точками кривой, соответствующими значениям параметра t_1 и t_2 , то она выразится интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Подставляя вместо ds его выражение из (3) и вводя явно переменное интегрирование t , получим окончательно

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt. \quad (4)$$

Зная внутреннее уравнение кривой, мы должны выразить u и v через t в выражениях E, F, G , найти производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, подставить все это в подынтегральную функцию (4) и задача сведется к вычислению интеграла вида

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

§ 78. **Первая квадратичная форма.** Выражение квадрата дифференциала дуги играет основную роль во всей теории поверхностей. Правая часть его представляет квадратичную форму

$$\varphi_1 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (1)$$

с коэффициентами, являющимися функциями точки поверхности и с переменными du и dv — дифференциалами криволинейных координат, которые зависят от направления кривой, проходящей через данную точку. Форма φ_1 называется *первой основной квадратичной формой поверхности*. Кроме того, ее называют еще для краткости просто *линейным элементом поверхности*, подчеркивая этим, что знание ее является основой для вычисления длин дуг. Действительно, если линейный элемент задан, т. е. заданы его коэффициенты E, F, G в функции u и v и известно внутреннее уравнение кривой, то ее дугу можно вычислить даже в том случае, если параметрическое уравнение поверхности неизвестно. Отметим некоторые важные неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты линейного элемента.

Из равенств

$$E = r_u^2; \quad G = r_v^2$$

следует, что для всякой неособенной точки поверхности

$$E > 0; \quad G > 0. \quad (2)$$

Применяя тождество Лагранжа, получим

$$[r_u r_v]^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_{uv})^2 = EG - F^2.$$

Выражение в правой части есть дискриминант линейного элемента. Во всякой неособенной точке $[r_u r_v] \neq 0$.

Поэтому

$$EG - F^2 > 0. \quad (3)$$

Неравенства (2) и (3) соответствуют тому факту, что основная квадратичная форма положительна и не может обратиться в нуль при значении переменных du и dv , не равных нулю одновременно. Квадратичные формы, обладающие этим свойством, называются *положительно определенными*.

УПРАЖНЕНИЯ

129. Найти линейный элемент плоскости в декартовых координатах.
Решение:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + au + bv, \\ dr &= a du + b dv; \quad ds^2 = a^2 du^2 + 2ab du dv + b^2 dv^2. \end{aligned}$$

130. Найти линейный элемент плоскости в полярных координатах.
Решение:

$$\begin{aligned} r &= \rho e(\varphi), \\ dr &= e(\varphi) d\rho + \rho g(\varphi) d\varphi; \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

131. Найти линейный элемент сферы в географических координатах.
Решение:

$$\begin{aligned}r &= a \{ e(\varphi) \cos \psi + k \sin \psi \}, \\ dr &= ag(\varphi) \cos \psi d\varphi + a \{ -e(\varphi) \sin \psi + k \cos \psi \} d\psi, \\ ds^2 &= a^2 [d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2].\end{aligned}$$

132. Найти линейный элемент цилиндра.

О т в е т: $ds^2 = a^2 du^2 + dv^2$.

133. Найти линейный элемент конуса.

О т в е т: $ds^2 = dv^2 + v^2 \cos^2 \alpha du^2$.

134. Найти длину дуги кривой, заданной внутренним уравнением

$$v = u,$$

на поверхности с линейным элементом

$$ds^2 = du^2 + \text{sh}^2 u dv^2.$$

О т в е т: $s = \text{sh} u_2 - \text{sh} u_1$.

135. Найти выражение линейного элемента поверхности, заданной уравнением

$$z = f(x, y).$$

О т в е т: $ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ (обозначения Монжа).

§ 79. Угол между двумя линиями. Если две кривые пересекаются, то углом между ними называют угол между их касательными в точке пересечения. Предположим, что кривые лежат на одной поверхности и пересекаются в некоторой точке. Касательные векторы этих кривых

$$dr = r_u du + r_v dv; \quad \delta r = r_u \delta u + r_v \delta v$$

будем различать, употребляя различные обозначения для дифференциалов криволинейных координат, соответствующих изменениям последних вдоль рассматриваемых линий (рис. 87).

Искомый угол θ определится по обычной формуле

$$\cos \theta = \frac{dr \delta r}{|dr| |\delta r|},$$

в которой следует положить

$$\begin{aligned}|dr| &= ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}, \\ |\delta r| &= \delta s = \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}, \\ dr \delta r &= (r_u du + r_v dv) (r_u \delta u + r_v \delta v) = r_u^2 du \delta u + \\ &\quad + r_u r_v (du \delta v + dv \delta u) + r_v^2 dv \delta v = E du \delta u + \\ &\quad + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v.\end{aligned}$$

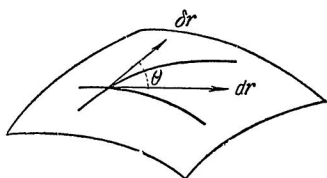


Рис. 87.

Таким образом,

$$\cos \theta = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (1)$$

Полученная формула показывает, что на данной поверхности и в данной ее точке угол двух кривых зависит только от отношения дифференциалов криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точке их пересечения. Кроме того, следует заметить, что для определения угла, так же как и в случае вычисления дуги, не нужно знать параметрического уравнения поверхности, а достаточно считать известным выражение ее линейного элемента.

Из формулы (1) легко получить выражение *координатного угла*, т. е. угла между линиями координатной сети. Действительно, для этих линий можно считать

$$\begin{aligned} du &= 0; & dv &\neq 0, \\ \delta u &\neq 0; & \delta v &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (2)$$

В частности, для того чтобы координатные линии пересекались под прямым углом, т. е. чтобы они образовали *ортогональную сеть*, необходимо и достаточно, чтобы

$$F = 0$$

и линейный элемент имел вид

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2. \quad (3)$$

Такой вид имеют линейные элементы плоскости в прямоугольных и полярных координатах и сферы в координатах географических, так как во всех этих случаях условие ортогональности выполнено.

УПРАЖНЕНИЯ

136. Найти угол, под которым кривые

$$v = Ae^{mu}$$

пересекают прямолинейные образующие кругового конуса (см. упр. 133).

Решение.

$$ds^2 = dv^2 + (v \cos \alpha)^2 du^2.$$

Для образующей $\delta u = 0$; $\delta v \neq 0$, для данной линии $dv = A m e^{mu} d\varphi = m v du$,

$$\cos \theta = \frac{dv \delta v}{\sqrt{dv^2 + (v \cos \alpha)^2 du^2} \sqrt{\delta v^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \cos^2 \alpha}} = \text{const.}$$

137. Доказать, что линейный элемент всегда может быть представлен в виде

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AB \cos \omega du dv + B^2 dv^2,$$

где ω — координатный угол.

138. Найти выражение для синуса и тангенса θ .

Решение.

$$|[\mathbf{dr} \ \delta\mathbf{r}]| = ds \ \delta s \ \sin \theta,$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{E\dot{U} - F^2} \cdot (du \ \delta v - dv \ \delta u)}{ds \ \delta s},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{E\dot{J} - F^2} (du \ \delta v - dv \ \delta u)}{E du \ \delta u + F (du \ \delta v + dv \ \delta u) + G dv \ \delta v}.$$

***§ 80. Ортогональные траектории.** Если на поверхности задано правильное семейство кривых, то каждой точке поверхности соответствует вполне определенное направление кривой этого семейства. Задавая это направление при помощи отношения дифференциалов, мы будем иметь зависимость вида

$$\frac{\delta v}{\delta u} = f(u, v). \quad (1)$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим уравнение семейства в виде

$$F(u, v, c) = 0, \quad (2)$$

где c — постоянное интегрирования — будет играть роль параметра семейства. Будем искать ортогональные траектории семейства, заданного уравнением (1), т. е. такие линии, которые пересекают кривые этого семейства под прямым углом. Задавая направление искомой кривой отношением дифференциалов du и dv , получим, положив в формуле (1) § 79 $\theta = \frac{\pi}{2}$, условие ортогональности

$$E du \ \delta u + F (du \ \delta v + dv \ \delta u) + G dv \ \delta v = 0. \quad (3)$$

Находя из него отношение dv и du и принимая во внимание (23), будем иметь

$$\frac{dv}{du} = - \frac{E + F \cdot f(u, v)}{F + G \cdot f(u, v)} \quad (4)$$

или

$$\frac{dv}{du} = f_1(u, v). \quad (5)$$

В той области, в которой функция $f_1(u, v)$ дифференцируема, по теореме существования теории дифференциальных уравнений, уравнение (5) имеет решение, причем через каждую точку области проходит одна и только одна интегральная кривая. Таким образом, при условии дифференцируемости правой части (1) и коэффициентов линейного элемента поверхности, всякое семейство линий на ней допускает существование правильного семейства ортогональных траекторий кривых этого семейства.

Решение задачи о разыскании изогональных траекторий семейства линий на поверхности протекает аналогично и тоже сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

УПРАЖНЕНИЯ

139. Составить дифференциальные уравнения ортогональных траекторий координатных линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

Ответ: $E du + F dv = 0$; $F du + G dv = 0$.

140. Найти ортогональные траектории прямолинейных образующих параболоида $z = mx$.

Ответ: Линии, расположенные на цилиндрах $x^2(1 + m^2y^2) = \text{const}$ или $y^2(1 + m^2x^2) = \text{const}$.

141. Найти уравнения сферических локсодром (изогональных траекторий меридианов) (рис. 88).

Решение. Обозначая угол с меридианом через α , получим

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{m} = \cos \phi \frac{d\phi}{d\psi},$$

$$\frac{d\phi}{\cos \phi} = m d\psi; \quad \text{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = ce^{m\psi}.$$

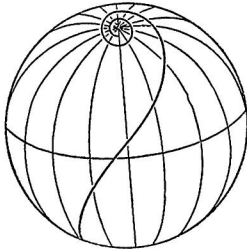


Рис. 88.

§ 81. Площадь поверхности. Определение длины дуги кривой линии сводится к вычислению суммы длин прямолинейных отрезков с последующим переходом к пределу.

Аналогичным образом и определение площади частей криволинейной поверхности сводится к измерению площадей плоских фигур.

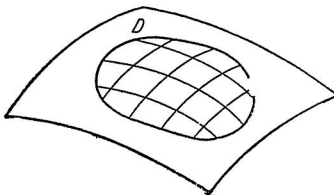


Рис. 89.

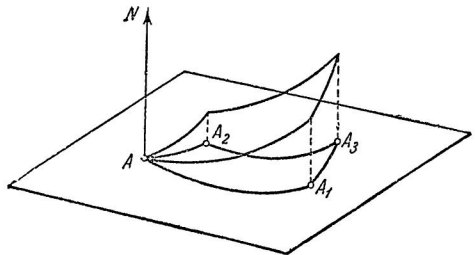


Рис. 90.

Предположим, что на поверхности задана некоторая замкнутая область D (рис. 89). Разобьем эту область на частичные области D_1, D_2, \dots, D_n .

Во внутренней точке каждой из этих областей построим касательную плоскость и спроектируем на нее соответствующую частичную область. Пусть площадь плоской области, получившейся проектированием области D_i , есть Δs_i . Составим сумму всех этих площадей

$$s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

Предел этой суммы при неограниченном возрастании числа частичных областей и при стягивании каждой области к точке называется площадью области D на поверхности.

Наметим теперь в общих чертах ход рассуждений, сводящих вычисление площади s к интегралу.

Параметризуем поверхность в области D и выберем границы частичных областей так, чтобы они совпадали с координатными линиями. Рассмотрим одну из этих областей, предположив, что ограничивающие ее линии пересекаются в точках

$$A(u, v); A_1(u + \Delta u, v); \\ A_2(u, v + \Delta v); A_3(u + \Delta u; v + \Delta v).$$

Будем проектировать ее на касательную плоскость в точке A (рис. 90).

Радиусы-векторы угловых точек A_1 и A_2 равны

$$\vec{OA}_1 = \mathbf{r}(u + \Delta u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{r}_u \Delta u + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \Delta u, \\ \vec{OA}_2 = \mathbf{r}(u, v + \Delta v) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{r}_v \Delta v + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \Delta v,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ стремятся к нулю вместе с Δu и Δv (рис. 91).

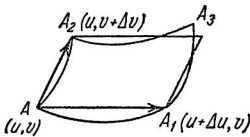


Рис. 91.

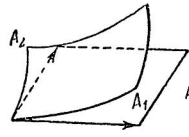


Рис. 92.

Отсюда следует, что, пренебрегая малым более высокого порядка, мы можем принять проекции векторов \vec{AA}_1 и \vec{AA}_2 на касательную плоскость равными векторам

$$\mathbf{r}_u \Delta u \text{ и } \mathbf{r}_v \Delta v.$$

Наконец, снова отбросив малые высшего порядка, заменим площадь проекции площадью параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_u \Delta u$ и $\mathbf{r}_v \Delta v$, как на сторонах (рис. 92), и получим

$$\Delta s_i = |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| \Delta u \Delta v + \varepsilon.$$

Имея в виду, что ε есть бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь проекции частичной области, получим, наконец,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty; \\ \Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} s_n = \lim \sum_{i=1}^n |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]|_i \Delta u_i \Delta v_i.$$

Таким образом, площадь области D поверхности выражается двойным интегралом

$$s = \iint_D |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| du dv \quad (1)$$

или так как

$$[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

то

$$s = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2)$$

Последнее выражение площади показывает, что для ее вычисления достаточно знания линейного элемента поверхности.

*Покажем, что интеграл (1) не зависит от выбора параметризации.

Допустим, что на поверхности введена новая система криволинейных координат α, β , связанных со старыми координатами зависимостями

$$\alpha = \alpha(u, v); \quad \beta = \beta(u, v).$$

Новые координатные векторы выразятся через старые так:

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \quad \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \beta} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \beta},$$

а их векторные произведения будут связаны зависимостью

$$[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta] = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right).$$

Вычисляя интеграл (1) в новых координатах, получим

$$\iint_D |[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta]| d\alpha d\beta = \iint_D |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| \left| \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right| d\alpha d\beta.$$

Однако из интегрального исчисления известно, что переменные под знаком кратного интеграла можно преобразовать так, что при этом подынтегральные дифференциалы умножаются на якобиан или определитель преобразования, который как раз и появился в первой части последнего равенства.

Таким образом,

$$\iint |[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta]| d\alpha d\beta = \iint |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| du dv$$

и интеграл не зависит от того, в каких параметрах он вычисляется.

УПРАЖНЕНИЕ

142. Найти выражение площади для поверхности $z = f(x, y)$.

Ответ: $s = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$

§ 82. Поверхности вращения. Поверхность, образованная вращением плоской кривой вокруг прямой, расположенной в ее плоскости, называется *поверхностью вращения*. Эта прямая называется *осью вращения* поверхности. Сечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются *меридианами*. Все меридианы — плоские кривые, конгруэнтные кривой, вращением которой образована данная поверхность. Линии пересечения поверхности плоскостями, ортогональными оси вращения, называются *параллелями*. Все параллели — окружности с центрами на оси вращения, расположенные в параллельных плоскостях.

Чтобы получить уравнение поверхности вращения, допустим, что ось вращения совпадает с осью Oz (рис. 93). Введем в подвижной плоскости систему координат с осью $O\xi$, совпадающей с Oz , и осью $O\eta$, ей перпендикулярной. Координатный вектор оси $O\xi$ совпадает с вектором \mathbf{k} оси Oz , а единичный вектор подвижной оси \mathbf{e} выразится так:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\varphi).$$

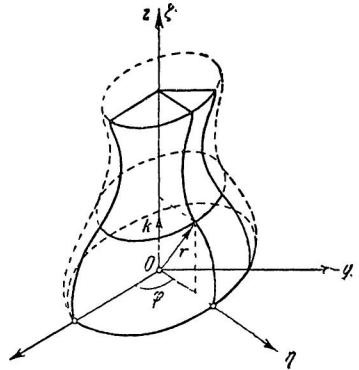


Рис. 93.

Образующую кривую поверхности зададим параметрическим уравнением по отношению к осям $O\eta\xi$ так, что радиус-вектор ее точки будет

$$\mathbf{r} = \eta(t) \mathbf{e}(\varphi) + \xi(t) \mathbf{k}. \quad (1)$$

Уравнение (1) дает зависимость радиуса-вектора точки поверхности от двух параметров и является искомым. Легко видеть, что параметрические линии $\varphi = \text{const}$ будут меридианами, а линии $t = \text{const}$ параллелями поверхности.

Нормаль поверхности вращения должна быть прямой пересечения нормальной плоскости меридиана и параллели, откуда следует, что она совпадает с главной нормалью меридиана.

Таким образом, вдоль меридиана все нормали поверхности лежат в одной плоскости, а вдоль параллели они принадлежат одному круговому конусу с вершиной на оси вращения.

Чтобы вычислить линейный элемент поверхности вращения, найдем дифференциал радиуса-вектора (1):

$$d\mathbf{r} = \eta(t) \mathbf{g}(\varphi) + \{ \dot{\eta}(t) \mathbf{e}(\varphi) + \dot{\xi}(t) \mathbf{k} \} dt, \quad (2)$$

откуда

$$ds^2 = \eta^2 d\varphi^2 + (\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2) dt^2. \quad (3)$$

Отсутствие члена с произведением дифференциалов показывает, что координатная сеть, состоящая из меридианов и параллелей, ортогональна.

Выражение (3) принимает более простой вид, если за параметр вдоль меридианов принять длину его дуги l . В таком случае

$$\left(\frac{d\eta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dl}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$ds^2 = \eta^2 d\varphi^2 + dl^2. \quad (4)$$

Наконец, приведя линейный элемент к виду

$$ds^2 = \eta^2 \left[d\varphi^2 + \left(\frac{dl}{\eta}\right)^2 \right]$$

и полагая

$$\varphi = v; \quad \int \frac{dl}{\eta(l)} = u,$$

получим

$$ds^2 = \eta^2(u) (du^2 + dv^2). \quad (5)$$

Такой вид линейного элемента, когда он отличается от линейного элемента плоскости в прямоугольных координатах только множителем, называется *изотермически м.*

УПРАЖНЕНИЯ

143. Составить уравнения касательной плоскости и нормали поверхности вращения и уравнение конуса, образуемого нормальями, построенными в точках параллели.

О т в е т: Касательная плоскость

$$\{ \dot{\zeta} e(\varphi) - \dot{\eta} k \} \rho + \zeta \dot{\eta} - \eta \dot{\zeta} = 0.$$

Нормаль

$$\rho = \dot{\eta} e(\varphi) + \zeta k + \lambda (\dot{\zeta} e(\varphi) - \dot{\eta} k).$$

При $t = \text{const}$ последнее уравнение и есть уравнение конуса, образованного нормальями.

144. Составить параметрическое уравнение тора (см. упр. 107) и найти вид его линейного элемента.

О т в е т: $r = (a + b \cos \psi) e(\varphi) + b k \sin \psi,$

$$ds^2 = b^2 d\psi^2 + (a + b \cos \psi)^2 d\varphi^2.$$

145. Найти линейный элемент катеноида (поверхности вращения цепной линии вокруг ее базы) (рис. 94) и привести его к изотермическому виду.

О т в е т: Уравнение катеноида

$$r = a e(\varphi) \operatorname{ch} \frac{t}{a} + t k,$$

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{a} d\varphi^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{t}{a} dt^2$$

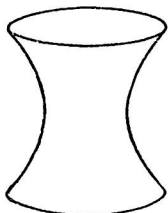


Рис. 94.

или

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 u (du^2 + dv^2).$$

146. Исключить параметры в уравнении поверхности вращения.

Решение. Параметрическое уравнение поверхности в координатах имеет вид

$$\begin{aligned}x &= \eta(t) \cos \varphi, \\y &= \eta(t) \sin \varphi, \\z &= \zeta(t).\end{aligned}$$

Из первых двух получаем

$$x^2 + y^2 = \eta^2(t)$$

или, исключив t ,

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

причем $z = f(x)$ есть уравнение меридиана, расположенного в плоскости Oxz .

147. Винтовая поверхность. Если плоская кривая вращается вокруг оси, расположенной в ее плоскости, и вместе с тем движется поступательно в направлении этой оси, так что расстояние, проходимое ею при этом поступательном движении, пропорционально углу поворота ее плоскости, то она описывает *винтовую поверхность*.

Уравнение винтовой поверхности имеет вид

$$\mathbf{r} = \eta(t) \mathbf{e}(\varphi) + \{\zeta(t) + a\varphi\} \mathbf{k}.$$

Линейный элемент винтовой поверхности

$$ds^2 = (\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) dt^2 + 2a\dot{\zeta} dt d\varphi + (\eta^2 + a^2) d\varphi^2;$$

при $a = 0$ винтовая поверхность обращается в поверхность вращения.

§ 83. Косая и развертывающаяся линейчатые поверхности. Поверхность называется *линейчатой*, если она описана движением прямой.

Чтобы получить уравнение линейчатой поверхности, выберем *направляющую*, т. е. такую кривую, которая пересекает все ее прямолинейные образующие.

Если уравнение направляющей кривой имеет вид

$$\rho = \rho(u),$$

а единичный вектор образующей, проходящей через точку, соответствующую данному значению параметра u , определяется зависимостью

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u),$$

то уравнение линейчатой поверхности имеет вид

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{m}(u), \quad (1)$$

где v — параметр, выражающий расстояние произвольной точки образующей от точки направляющей (рис. 95). Найдем нормальный вектор линейчатой поверхности. Для этого найдем координатные векторы

$$\mathbf{r}_u = \dot{\rho} + v\dot{\mathbf{m}}; \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{m} \quad (2)$$

и, перемножая их векторно, получим

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = [\dot{\rho} \mathbf{m}] + [v \dot{\mathbf{m}} \mathbf{m}]. \quad (3)$$

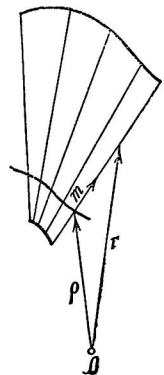


Рис. 95

При движении по образующей направление этого вектора изменяется, если векторы $[\dot{\rho}m]$ и $[m\dot{m}]$ неколлинеарны, а следовательно, изменяется и касательная плоскость.

Развертывающаяся поверхность есть частный случай линейчатой поверхности; она характеризуется тем, что ее касательная плоскость остается неизменной вдоль прямолинейной образующей. Таким образом, не всякая линейчатая поверхность — развертывающаяся. Неразвертывающаяся линейчатая поверхность называется кривой. Линейный элемент произвольной линейчатой поверхности

$$ds^2 = dr^2 = \{(\dot{\rho} + m\dot{v}) du + m\dot{v}\}^2$$

имеет вид

$$ds^2 = (\dot{\rho}^2 + 2\dot{\rho}m\dot{v} + m^2\dot{v}^2) du^2 + 2m\dot{\rho} du dv + dv^2. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь особо все три вида развертывающихся поверхностей.

1. Конус. Для конуса можно предположить, что радиус-вектор $\rho = \rho_0$ направлен к его вершине и, следовательно, постоянен. Тогда

$$N = [m\dot{m}]v$$

и направление вектора N остается неизменным вдоль образующей (рис. 96). Отсюда следует, что всякая коническая поверхность огибается однопараметрическим семейством плоскостей, т. е. является развертывающейся. Линейный элемент конуса вследствие $\rho = 0$ имеет вид

$$ds^2 = m^2\dot{v}^2 dv^2 + dv^2.$$

Его можно еще упростить, полагая, что параметр u совпадает с длиной дуги кривой, радиус-вектор которой

$$r = m(u).$$

В таком случае \dot{m} есть единичный вектор и

$$ds^2 = v^2 du^2 + dv^2. \quad (5)$$

Существенно заметить, что этот линейный элемент отличается от линейного элемента плоскости в полярных координатах только обозначениями параметров.

2. Цилиндрическая поверхность (рис. 97) характеризуется постоянством направления вектора образующей

$$m = \text{const.}$$

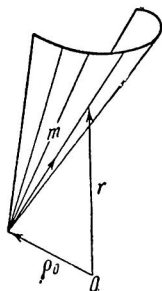


Рис. 96.

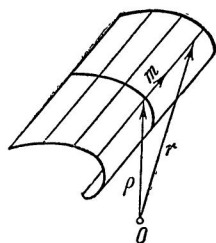


Рис. 97.

В таком случае нормальный вектор

$$N = [\dot{\rho} m]$$

и остается неизменным вдоль образующей. Итак: *всякая цилиндрическая поверхность — развертывающаяся.*

Чтобы получить вид линейного элемента, предположим, что направляющая кривая является ортогональной траекторией образующей, а параметр u является длиной дуги этой линии. Тогда $\dot{m} = 0$; $\dot{\rho} m = 0$, $\dot{\rho}^2 = 1$, откуда

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad (6)$$

и, очевидно, совпадает с линейным элементом плоскости в прямоугольных координатах.

3. Поверхность касательных. Примем за направляющую кривую ребро возврата, а параметр u за длину дуги этой линии.

В таком случае $\dot{\rho} = m = \tau$; $\dot{m} = \dot{\tau} = kv$, откуда

$$N = [m m] v = k [\nu \tau] v = -kv\beta.$$

Очевидно, что вдоль прямолинейной образующей касательная плоскость поверхности совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра возврата и, следовательно, остается неизменной. Таким образом, всякая поверхность, состоящая из касательных прямых некоторой кривой, является развертывающейся поверхностью¹⁾ (рис. 98).

Линейный элемент этой поверхности мы получим, приняв во внимание, что $\dot{\rho} = m = \tau$; $\dot{m} = kv$,

$$ds^2 = (1 + k^2 v) du^2 + 2du dv + dv^2. \quad (7)$$

УПРАЖНЕНИЯ

148. Найти условие, которому должна удовлетворять линейчатая поверхность

$$r = \rho + \tau m$$

для того, чтобы быть развертывающейся.

Решение. Нормальный вектор должен сохранить свое направление вдоль образующей, что возможно только при коллинеарности векторов

$$[\dot{\rho} m] \text{ и } [m m]$$

(см. формулу (3)).

¹⁾ До сих пор мы имели доказательства того, что всякая развертывающаяся поверхность является или цилиндрической, или конической, или состоит из касательных некоторой кривой. Теперь мы имеем доказательство обратной теоремы, состоящей в том, что всякая поверхность одного из этих типов — развертывающаяся.

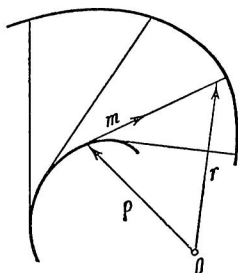


Рис. 98.

Это условие можно записать в виде

$$[[\rho m] \dot{m} m] = 0$$

или

$$(\rho m m) \dot{m} - (\dot{\rho} m m) m = 0,$$

откуда

$$(\dot{\rho} m m) = 0.$$

149. Найти линейные элементы поверхностей, образованных бинормальными и главными нормальными кривой $\rho = \rho(u)$, приняв u за натуральный параметр.

О т в е т: $ds^2 = (1 + \kappa^2 v^2) du^2 + dv^2,$
 $ds^2 = \{(1 - kv)^2 + \kappa^2 v^2\} du^2 + dv^2.$

150. Составить выражение линейного элемента развертывающейся поверхности, приняв за направляющую ортогональную траекторию ее образующих.

О т в е т: $ds^2 = (1 + vk \cos \theta)^2 du^2 + dv^2$, см. § 69,

где θ — угол, образуемый единичным вектором образующей с главной нормалью направляющей кривой.

151. *Геликоид* есть линейчатая поверхность, образованная главными нормальными винтовой линии (рис. 99).
Уравнение геликоида

$$r = e(\varphi) t + a\varphi k.$$

Геликоид можно рассматривать как винтовую поверхность, описываемую прямой, пересекающей ось вращения под прямым углом.

Линейный элемент геликоида

$$ds^2 = (a^2 + t^2) d\varphi^2 + dt^2.$$

Его можно привести к изотермическому виду, положив

$$t = a \operatorname{ch} u; \quad \varphi = v,$$

после чего он примет вид

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 u (du^2 + dv^2),$$

совпадая с линейным элементом катеноида (см. упр. 145).

§ 84. Криволинейные координаты в пространстве. Метод задания точки при помощи криволинейных координат может быть использован и для определения положения точки в пространстве трех измерений.

Если радиус-вектор этой точки задан в функции трех переменных

$$r = r(u, v, w), \quad (1)$$

и эта зависимость устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками некоторой области пространства и значениями параметров u, v, w , то задание этих значений определяет положение точки, а параметры называются ее *криволинейными координатами*.

Геометрическое место точек, для которых одна из координат сохраняет постоянное значение, есть, вообще говоря, некоторая поверхность, называемая координатой.

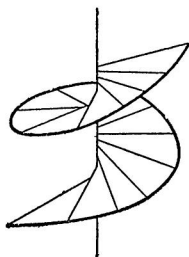


Рис. 99.

Действительно, если, например, $w = c = \text{const}$, то радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, c)$$

зависит от двух параметров, определяя точку координатной поверхности.

Координатные поверхности различных семейств пересекаются попарно по координатным линиям. Вдоль каждой из этих линий изменяется только одна координата, две же другие остаются постоянными (рис. 100).

Всякую кривую пространства можно задать уравнениями

$$u = u(t); \quad v = v(t); \quad w = w(t).$$

Касательный вектор этой линии определится по формуле

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} + \mathbf{r}_w \frac{dw}{dt}. \quad (2)$$

Из этой общей формулы можно, в частности, получить и касательные векторы к координатным линиям. Для этого достаточно считать две координаты постоянными, а третью принять за параметр t . Так мы получим, что векторы \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v , \mathbf{r}_w есть касательные векторы координатных линий.

Дифференциал длины дуги в криволинейных координатах получим, положив

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv + \mathbf{r}_w dw)^2.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{r}_u^2; & g_{22} &= \mathbf{r}_v^2; & g_{33} &= \mathbf{r}_w^2; \\ g_{12} &= \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v; & g_{23} &= \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w; & g_{31} &= \mathbf{r}_w \mathbf{r}_u, \end{aligned} \quad (3)$$

будем иметь

$$ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2 + g_{33} dw^2 + 2g_{12} du dv + 2g_{23} dv dw + 2g_{31} dw du. \quad (4)$$

Если координатные линии ортогональны между собой, то вид линейного элемента упрощается.

В этом случае $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$,

а

$$ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2 + g_{33} dw^2. \quad (5)$$

Ортогональные координаты наиболее употребительны.

Цилиндрические координаты. Положение точки определяется полярными координатами φ и ρ ее проекции на плоскость Oxy и ее аппликатой z (рис. 101).

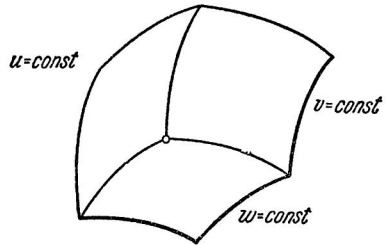


Рис. 100.

Радиус-вектор точки выражается через эти координаты так:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}(\varphi) + z \mathbf{k}. \quad (6)$$

Координатные поверхности $\rho = \text{const}$ — круговые цилиндры с осью Oz ; $\varphi = \text{const}$ — плоскости, проходящие через Oz ; $z = \text{const}$ — плоскости, параллельные Oxy .

Линейный элемент

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2. \quad (7)$$

Сферические координаты. Положение точки определяется ее географическими координатами φ и ψ на сфере, проходящей через

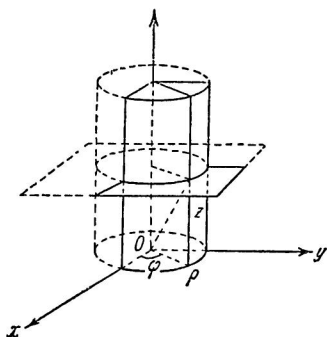


Рис. 101.

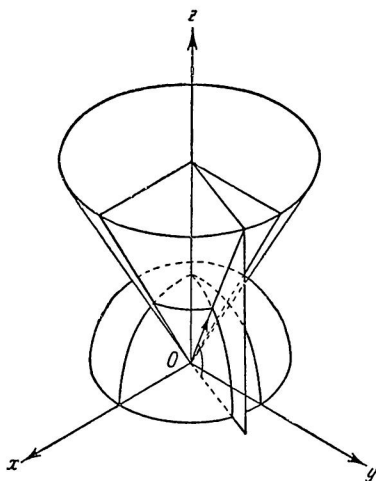


Рис. 102.

эту точку, имеющую центр в начале координат и радиусом r этой сферы (рис. 102). Радиус-вектор выражается через них так:

$$\mathbf{r} = r \{ \mathbf{e}(\varphi) \cos \psi + \mathbf{k} \sin \psi \}. \quad (8)$$

Координатные поверхности: $r = \text{const}$ — сферы с центром в начале координат; $\varphi = \text{const}$ — плоскости, содержащие Oz ; $\psi = \text{const}$ — конуса вращения, с вершиной в начале координат и с осью Oz . Линейный элемент

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \psi d\psi^2. \quad (9)$$

ГЛАВА VII

КРИВИЗНА ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 85. Нормальная кривизна. Кривизны линий, расположенных на поверхности, связаны рядом замечательных соотношений. Для того чтобы получить эти соотношения, следует изучить расположение сопровождающего трехгранника кривой по отношению к поверхности. При этом касательный вектор кривой τ всегда расположен в касательной плоскости поверхности, а векторы главной нормали и бинормали наклонены под некоторыми углами к этой плоскости. Рассмотрим вектор кривизны

$$\mathbf{r}'' = k\boldsymbol{\nu} \quad (1)$$

кривой, расположенной на поверхности. Проекция вектора кривизны линии на нормаль поверхности в точке, через которую проходит эта кривая, называется *нормальной кривизной* этой кривой.

При этом нормаль считается ориентированной при помощи заранее выбранного единичного вектора нормали \mathbf{n} . Нормальная кривизна обозначается через k_n , а обратная ей величина R называется радиусом нормальной кривизны. Так как нормаль считается ориентированной, то проекция \mathbf{r}'' на нее может быть положительной или отрицательной, так что радиус нормальной кривизны выражается относительным числом в противоположность существенно положительному радиусу кривизны кривой, рассматриваемой независимо от поверхности.

Таким образом, нормальная кривизна

$$k_n = n p_n \mathbf{r}'' \quad (2)$$

§ 86. Вторая квадратичная форма. Для вычисления нормальной кривизны будем дифференцировать выражение

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v' \quad (1)$$

единичного касательного вектора кривой, расположенной на поверхности. Пользуясь правилами дифференцирования сложной функции и зводя обозначения

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} = \mathbf{r}_{uu}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \mathbf{r}_{uv}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = \mathbf{r}_{vv} \quad (2)$$

получим

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_u u'' + \mathbf{r}_v v'' + \mathbf{r}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{r}_{uv} u'v' + \mathbf{r}_{vv} v'^2.$$

Чтобы найти проекцию вектора кривизны на нормаль, достаточно умножить \mathbf{r}'' скалярно на \mathbf{n} . При этом следует принять во внимание, что векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v расположены в касательной плоскости и, следовательно, перпендикулярны \mathbf{n} .

Таким образом,

$$k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{n} = n r_{uu} u'^2 + 2n r_{uv} u'v' + n r_{vv} v'^2.$$

Скалярные произведения единичного вектора нормали \mathbf{n} и вторых частных производных радиуса-вектора точки поверхности являются функциями точки. Введем для них особые обозначения, полагая:

$$D = n r_{uu}; \quad D' = n r_{uv}; \quad D'' = n r_{vv}. \quad (3)$$

После этого нормальная кривизна примет вид

$$k_n = D u'^2 + 2D' u'v' + D'' v'^2. \quad (4)$$

Форма

$$\varphi_2 = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \quad (5)$$

называется *второй квадратичной формой поверхности*.

Так как выражение (4), очевидно, можно переписать в следующем виде:

$$k_n = \frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{ds^2},$$

а

$$ds^2 = \varphi_1 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

то нормальная кривизна

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (6)$$

равна отношению второй и первой квадратичных форм, определенных для отношения дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, проходящей через ту точку поверхности, для которой подсчитаны коэффициенты обеих форм.

В заключение запишем выражение коэффициентов второй квадратичной формы в развернутом виде.

Единичный вектор нормали выражается так:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]|} = \frac{[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (7)$$

вследствие этого

$$D = \frac{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D' = \frac{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D'' = \frac{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (8)$$

Полезно отметить еще следующие выражения тех же коэффициентов:

$$D = -n_u r_u; \quad D' = -n_u r_v = -n_v r_u; \quad D'' = -n_v r_v. \quad (9)$$

Эти выражения легко получаются при дифференцировании тождеств

$$nr_u = 0; \quad nr_v = 0,$$

которое дает

$$\begin{aligned} r_u n_u + r_{uu} n &= 0; & r_u n_v + r_{uv} n &= 0, \\ r_v n_u + r_{vu} n &= 0; & r_v n_v + r_{vv} n &= 0. \end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями, легко получаем следующее выражение второй квадратичной формы

$$\varphi_2 = -dr dn. \quad (10)$$

УПРАЖНЕНИЕ

152. Составить выражение вторых квадратичных форм следующих поверхностей.

a) Поверхности вращения [§ 82, (1)].

$$\text{О т в е т: } \varphi_2 = \frac{(\ddot{\zeta} \dot{\eta} - \dot{\zeta} \ddot{\eta}) dt^2 + \dot{\zeta}^2 d\varphi^2}{\sqrt{\dot{\zeta}^2 + \dot{\eta}^2}}.$$

b) Для развертывающейся поверхности с ребром возврата $\rho = \rho(u)$ (§ 83).

$$\text{О т в е т: } \varphi_2 = -v k x du^2.$$

c) Геликоида (упр. 151).

$$\text{О т в е т: } \varphi_2 = \frac{a dt d\varphi}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

d) Поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

$$\text{О т в е т: } \varphi_2 = \frac{rdx^2 + 2s dx dy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\text{где } p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

в обозначениях Монжа.

e) Гиперболического параболоида $z = mxy$.

$$\text{О т в е т: } \varphi_2 = \frac{2m dx dy}{\sqrt{1 + m^2(x^2 + y^2)}}.$$

f) Сферы $r = a \{e\varphi \cos \phi + k \sin \phi\}$,

$$\varphi_2 = -a (d\phi^2 + \cos^2 \phi d\varphi^2).$$

Сравнивая с выражением линейного элемента сферы (см. упр. 131), получим

$$\varphi_2 = -a\varphi_1.$$

§ 87. Кривизна кривой и ее соприкасающаяся плоскость. Формула (6) § 86 показывает, что *нормальная кривизна линии, прохо-*

двущей через данную точку поверхности, зависит только от направления ее касательной. Действительно, коэффициенты обеих квадратичных форм можно вычислить, как только задано уравнение поверхности, а отношение дифференциалов определяется направлением касательной. Иначе можно также утверждать, что *все кривые поверхности, проходящие через данную точку и имеющие в ней общую касательную, имеют в этой точке равные между собой нормальные кривизны.*

Обратимся теперь к рассмотрению кривизны

$$k = \frac{1}{\rho}$$

кривой в обычном смысле этого слова, которую мы будем называть *полной кривизной*, чтобы подчеркнуть ее отличие от нормальной кривизны. Зависимость между полной и нормальной кривизной получим, вводя угол между нормальным вектором поверхности и вектором главной нормали кривой

$$\theta = \widehat{nv}. \quad (1)$$

По определению нормальной кривизны,

$$\frac{1}{R} = nr'' = knv = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

или

$$\rho = R \cos \theta. \quad (2)$$

Таким образом, полная кривизна зависит от нормальной кривизны и угла $\frac{\pi}{2} - \theta$, который совпадает с углом между касательной плоскостью поверхности и соприкасающейся плоскостью кривой.

Обратно, если соприкасающаяся плоскость кривой на поверхности, в данной ее точке, задана, то она определяет своим пересечением с касательной плоскостью поверхности и касательную прямую данной кривой. Но, зная направление касательной прямой, можно найти нормальную кривизну, и так как угол θ тоже известен, то полная кривизна определится.

Итак: *полная кривизна кривой, расположенной на поверхности, вполне определяется заданием положения ее соприкасающейся плоскости.*

Или, иначе: *все кривые поверхности, имеющие общую точку и общую соприкасающуюся плоскость в этой точке, имеют в ней одинаковые полные кривизны.*

Полученный результат позволяет свести рассмотрение кривых линий, принадлежащих поверхности, к рассмотрению кривизны ее плоских сечений. Действительно, желая рассмотреть произвольную кривую, пересечем поверхность ее соприкасающейся плоскостью. Полученная плос-

кая кривая будет по доказанному иметь в точке соприкосновения ту же кривизну, что и данная кривая, так как соприкасающиеся плоскости обеих линий, очевидно, совпадают.

§ 88. Нормальное сечение. Среди плоских сечений поверхности, проходящих через ее данную точку, *нормальными* называют те плоскости, которые содержат нормаль поверхности в этой точке. В этой же точке главная нормаль нормального сечения совпадает с нормалью к поверхности. При этом возможны два случая: 1) вектор ν главной нормали и вектор n нормали поверхности совпадают; 2) они отличаются знаком. Так как вектор главной нормали всегда указывает в сторону вогнутости плоской кривой, то в первом случае вектор нормали поверхности указывает в сторону вогнутости, а во втором — в сторону выпуклости нормального сечения. Мы будем называть в первом случае нормальное сечение *вогнутым*, а во втором случае *выпуклым*. Свойство вогнутости и выпуклости целиком зависит от выбора направления нормального вектора поверхности, которое, вообще говоря, зависит от нашего произвола и, следовательно, является свойством относительным (рис. 103).

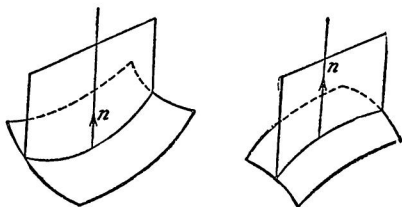


Рис. 103.

В противоположность этому абсолютным является различие или совпадение направлений выпуклости или вогнутости для двух различных нормальных сечений, проходящих через данную точку поверхности. Обозначим полную кривизну некоторого нормального сечения, соответствующего данной точке, через

$$k_n = \frac{1}{p_n}.$$

Ее значение в данной точке связано с нормальной кривизной поверхности того же направления формулой (2) § 87, где угол может иметь одно из двух значений 0 или π ; первое отвечает случаю вогнутости, а второе — случаю выпуклости.

Отсюда

$$p_n = \pm R. \quad (1)$$

Итак: *кривизна нормального сечения и нормальная кривизна поверхности, соответствующая направлению этого сечения, совпадают для вогнутых и отличаются только знаком для выпуклых нормальных сечений.*

§ 89. Теорема Менье. Формула (2) § 87 допускает простое геометрическое истолкование. Предположим, что в данной точке поверхности построены два плоских сечения с общей касательной в этой

точке, причем одно из них нормальное, а плоскость второго наклонена к плоскости первого под некоторым углом. Для удобства рассуждений предположим, что направление нормального вектора поверхности выбрано так, что это нормальное сечение вогнуто. В таком случае радиус нормальной кривизны равен радиусу кривизны нормального сечения, и формула (2) § 87 принимает вид

$$p = p_n \cos \theta.$$

Построив центры кривизны нормального и наклонного сечений, мы сейчас же получаем из этого соотношения так называемую *теорему Менье*.

Центр кривизны наклонного сечения поверхности совпадает с проекцией на его плоскость центра кривизны нормального сечения, имеющего ту же касательную, что и данное наклонное сечение (рис. 104).

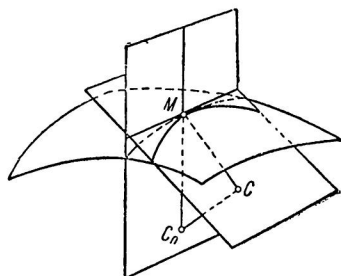


Рис. 104.

Если строить центры кривизны различных наклонных сечений, касающихся между собой в данной точке поверхности, то любой из них будет служить вершиной прямого угла, опирающегося на радиус кривизны нормального сечения, имеющего данную касательную.

Вследствие этого все центры кривизны будут располагаться на окружности, диаметр которой равен радиусу нормальной кривизны, соответствующей данному направлению (рис. 104).

Приняв, кроме того, во внимание, что кривизна любой кривой на поверхности равна кривизне плоского сечения, можно сформулировать следующий результат.

Приняв, кроме того, во внимание, что кривизна любой кривой на поверхности равна кривизне плоского сечения, можно сформулировать следующий результат.

Центры кривизны всех кривых поверхности, проходящих через данную точку и имеющих в ней общую касательную, расположены на окружности, которая лежит в общей нормальной плоскости этих кривых и имеет своим диаметром отрезок между точкой поверхности и центром кривизны нормального сечения.

Заметим, что прямая CC_n , которая соединяет центр кривизны наклонного сечения с центром кривизны соответствующего нормального сечения перпендикулярна соприкасающейся плоскости первого и, следовательно, является его осью кривизны. Поэтому теорема Менье равносильна следующему утверждению. *Оси кривизны всех линий, проходящих на поверхности через данную точку и имеющих в этой точке общую касательную, проходят через центр кривизны соответствующего нормального сечения.*

Наконец, в качестве следствия из приведенных соотношений отметим, что: *из всех кривых поверхности, проходящих через данную*

точку и имеющих в ней общую касательную, наименьшую кривизну имеют те, соприкасающаяся плоскость которых нормальна поверхности в данной точке. Кривизна других кривых тем больше, чем больше угол (в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$) между соприкасающейся плоскостью этой кривой и плоскостью нормального сечения.

Этот факт подтверждается и нашим представлением. На приведенных рисунках (105) построены радиусы кривизны нормального сечения и нескольких наклонных сечений поверхности и изображены сами сечения, кривизна этих сечений увеличивается по мере

увеличения угла их плоскости с плоскостью нормального сечения.

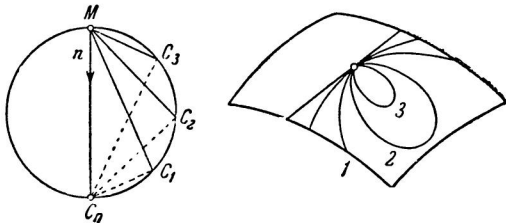


Рис. 105.

§ 90. Индикатриса Дюпена. В § 87 мы показали, что изучение кривизны всех линий на поверхности сводится к рассмотрению плоских сечений, а в предыдущем параграфе выяснили, что кривизна произвольного сечения весьма просто связана с кривизной нормального сечения. Таким образом, весь вопрос о кривизне линий на поверхности свелся к рассмотрению кривизны нормальных сечений.

Через данную точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Выясним теперь, как изменяется нормальная кривизна поверхности при переходе от одного такого сечения к другому. Для этого воспользуемся графическим методом, предложенным Дюпеном.

Возьмем на поверхности некоторую точку M и будем откладывать от нее на касательной к каждому нормальному сечению отрезок, равный корню квадратному из радиуса кривизны этого сечения. Геометрическое место концов этих отрезков есть некоторая плоская кривая, расположенная в касательной плоскости поверхности. Эта кривая называется *индикатрисой Дюпена*, соответствующей данной точке поверхности.

Чтобы найти уравнение индикатрисы Дюпена, предположим, что поверхность параметризована, и установим в касательной плоскости систему декартовых координат. За начало координат этой системы примем точку прикосновения M , а за масштабные векторы примем координатные векторы r_u и r_v , вычисленные для данной точки¹⁾. Обозна-

¹⁾ Эта система координат будет, вообще говоря, косоугольной, а ее масштабные векторы будут иметь различные длины,

чив координаты точки индикатрисы по отношению к этой системе через ξ и η , представим ее радиус-вектор в виде (рис. 106)

$$\rho = \xi r_u + \eta r_v.$$

С другой стороны, тот же радиус-вектор

$$\rho = \sqrt{p_n} \tau,$$

где τ — единичный вектор касательной некоторого нормального сечения, а p_n — радиус его кривизны в точке

M . Но единичный вектор касательной может быть получен дифференцированием радиуса-вектора точки нормального сечения по его натуральному параметру, так что

$$\tau = \frac{dr}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}.$$

Сравнивая оба выражения ρ , будем иметь

$$\xi = \sqrt{p_n} \frac{du}{ds}; \quad \eta = \sqrt{p_n} \frac{dv}{ds}.$$

Рассмотрим теперь выражение для нормальной кривизны

$$\frac{1}{R} = D \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2D' \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + D'' \left(\frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Умножив обе его части на радиус кривизны соответствующего нормального сечения, получим

$$\frac{p_n}{R} = D \left(\sqrt{p_n} \frac{du}{ds} \right)^2 + 2D' \left(\sqrt{p_n} \frac{du}{ds} \right) \left(\sqrt{p_n} \frac{dv}{ds} \right) + D'' \left(\sqrt{p_n} \frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Так как p_n и R отличаются самое большее знаком, то полученное соотношение можно переписать так:

$$D\xi^2 + 2D'\xi\eta + D''\eta^2 = \pm 1. \quad (1)$$

Знак плюс в правой части отвечает случаю вогнутого, а знак минус случаю выпуклого нормального сечения.

Это есть уравнение второго порядка, так как коэффициенты D , D' , D'' не зависят от направления сечения, т. е. для данной точки постоянны. Заметим также, что уравнение не содержит первых степеней

координат ξ и η . Таким образом: *индикатриса Дюпена есть центральная кривая второго порядка, центр которой совпадает с рассматриваемой точкой поверхности*¹⁾.

§ 91. Формула Эйлера. Уравнение индикатрисы Дюпена может быть упрощено обычными методами аналитической геометрии, т. е. за счет выбора системы координат. Однако в нашем случае система декартовых координат в касательной плоскости связана с системой криволинейных координат на поверхности. Выберем последнюю так, чтобы сделать возможным и указанное упрощение. Для этого поместим начало прямоугольных координат пространства в данную точку M поверхности и совместим плоскость Oxy с ее касательной плоскостью, оставляя пока за собой выбор направлений осей Ox и Oy . Предположив, что поверхность выражена уравнением $z = f(x, y)$, параметризуем ее, положив

$$x = u; \quad y = v; \quad z = f(u, v)^2.$$

Координатные векторы, соответствующие этой параметризации, будут иметь вид

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{k}; \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{k}.$$

В начале координат, совпадающем с данной точкой поверхности, эти векторы должны лежать в плоскости Oxy , которая касательна поверхности, так что для точки O

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 = 0,$$

а

$$(\mathbf{r}_u)_0 = \mathbf{i}; \quad (\mathbf{r}_v)_0 = \mathbf{j}. \quad (1)$$

Таким образом, декартова система, введенная в предыдущем параграфе в касательной плоскости данной точки, обращается в нашем случае в обычную прямоугольную систему, причем

$$\xi = x; \quad \eta = y.$$

Выберем теперь направление осей Ox и Oy , которое до сих пор оставалось произвольным. Мы совместим эти оси с *главными направлениями* индикатрисы Дюпена (рис. 107). Из аналитической геометрии известно, что если координатные оси идут по главным направлениям кривой второго порядка, то в ее уравнении отсутствует член с произведением координат. Значит, а

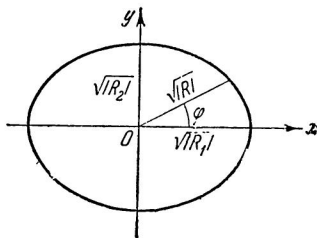


Рис. 107.

¹⁾ Известно, что отсутствие первых степеней координат в уравнении кривой второго порядка указывает на совпадение центра с началами координат.

²⁾ Введенную систему криволинейных координат будем называть *нормальной* в точке M .

нашем случае, для точки 0 коэффициент $D'_0 = 0$ и уравнение индикатрисы Дюпена имеет вид

$$D_0 x^2 + D'_0 y^2 = \pm 1. \quad (2)$$

Выведем теперь формулу Эйлера, дающую зависимость между нормальной кривизной любого направления и нормальными кривизнами главных направлений индикатрисы. Для этого обозначим угол между главным направлением и направлением произвольного сечения через φ . Тогда для координат точки индикатрисы будут, очевидно, иметь

$$x = \sqrt{p_n} \cos \varphi; \quad y = \sqrt{p_n} \sin \varphi,$$

где p_n — радиус кривизны, соответствующий этой точке нормального сечения. Подставив выражение координат в уравнение (2), получим

$$D_0 \cos^2 \varphi + D'_0 \sin^2 \varphi = \pm \frac{1}{p_n} = \frac{1}{R}.$$

Главными кривизнами $k_1 = \frac{1}{R_1}$, $k_2 = \frac{1}{R_2}$ поверхности в данной точке называются нормальные кривизны, соответствующие главным направлениям индикатрисы Дюпена.

Так как в нашем случае эти направления определяются значением 0 и $\frac{\pi}{2}$ угла φ , то

$$k_1 = D_0; \quad k_2 = D'_0.$$

Вследствие этого

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Это и есть формула Эйлера, которая дает выражение нормальной кривизны, соответствующей любому направлению, через главные кривизны и угол между одним из главных направлений индикатрисы Дюпена и данным направлением.

§ 92. Характеристическое уравнение поверхности. Полная и средняя кривизны. Для вычисления главных кривизн поверхности мы можем воспользоваться приемом, который, в сущности говоря, аналогичен приему вычисления коэффициентов упрощенного уравнения кривой второго порядка.

Предположим, что на поверхности заданы две системы криволинейных координат. Первая является нормальной в данной точке, а вторая произвольна, но такова, что по отношению к ней данная точка неособая.

Если координатные векторы нормальной системы i, j идут по главным направлениям поверхности в ее данной точке, то основные формы поверхности в этой же точке имеют следующий вид:

$$\varphi_1 = dx^2 + dy^2; \quad \varphi_2 = k_1 dx^2 + k_2 dy^2,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности.

Запишем выражения тех же форм в произвольной системе криволинейных координат и приравняем данным; получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 &= k_1 dx^2 + k_2 dy^2, \\ E du^2 + 2F du dv + G dv^2 &= dx^2 + dy^2. \end{aligned}$$

Умножая обе части второго тождества на k_1 и вычитая из первого, получим

$$(D - k_1 E) du^2 + 2(D' - k_1 F) du dv + (D'' - k_1 G) dv^2 = (k_2 - k_1) dy^2.$$

Но при переходе от произвольных координат к нормальным мы будем иметь

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = a du + b dv.$$

Подставив в правую часть предыдущего равенства и приравнявая коэффициенты при соответствующих комбинациях дифференциалов, мы получим соотношения

$$\begin{aligned} D - k_1 E &= (k_2 - k_1) a^2; & D' - k_1 F &= (k_2 - k_1) ab; \\ D'' - k_1 G &= (k_2 - k_1) b^2, \end{aligned}$$

из которых непосредственно следует

$$(D - k_1 E) (D'' - k_1 G) - (D' - k_1 F)^2 = 0.$$

К аналогичному условию, содержащему k_2 , мы пришли бы исключая подобным же образом dy^2 из правых частей.

Таким образом, главные кривизны поверхности в каждой ее точке являются корнями квадратного уравнения

$$(D - sE) (D'' - sG) - (D' - sF)^2 = 0. \quad (1)$$

Это уравнение называется *характеристическим*.

Преобразуя левую часть характеристического уравнения и деля ее на коэффициент при старшем члене, приведем его к следующему виду:

$$s^2 - 2Hs + K = 0, \quad (2)$$

где

$$2H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}; \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}. \quad (3)$$

Эти величины называются *полной* и *средней кривизнами* поверхности. Согласно теореме Виета

$$K = k_1 k_2, \quad (4)$$

т. е. полная кривизна поверхности есть произведение ее главных кривизн

$$2H = k_1 + k_2, \quad (5)$$

т. е. средняя кривизна есть сумма главных кривизн поверхности.

Средняя и полная кривизны связаны неравенством

$$H^2 - K = \frac{1}{4} (k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4} (k_1 - k_2)^2 \geq 0,$$

из которого следует, что корни характеристического уравнения всегда действительны.

УПРАЖНЕНИЯ

153. Найти главные кривизны развертывающейся поверхности с ребром возврата (см. § 83 и упр. 152)

О т в е т: $K=0$; $2H=-\frac{x}{\nu k}$;

$$k_1=0; k_2=-\frac{x}{\nu k}.$$

154. Найти главные кривизны геликоида (см. упр. 152).

О т в е т: $K=-\frac{a^2}{(a^2+t^2)^2}$; $2H=0$; $k_1=-k_2=\frac{a}{a^2+t^2}$.

155. Найти полную и среднюю кривизны поверхности (см. упр. 152).

$$z=f(x, y).$$

О т в е т: $K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$; $2H=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}$.

§ 93. Кривизны поверхности вращения. Плоскость всякого меридиана поверхности вращения есть ее плоскость симметрии. Отсюда следует, что индикатриса Дюпена, построенная для какой-либо точки поверхности вращения, должна быть симметрична относительно плоскости меридиана, проходящего через эту точку.

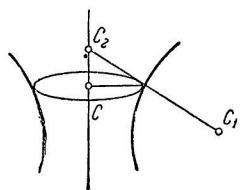


Рис. 108.

Но ось симметрии кривой второго порядка совпадает с одной из ее главных осей. Таким образом, одно из главных направлений поверхности вращения, в данной ее точке, совпадает с направлением меридиана, а другое, перпендикулярное первому, есть направление касательной к параллели. Установив это, выясним, чему будут равны радиусы главных кривизн. Так как меридиан является одним из главных сечений, то один из радиусов главной кривизны совпадает с радиусом кривизны меридиана.

Центр кривизны нормального сечения C_n , касающегося параллели, должен, по теореме Менье, проектироваться в центр кривизны самой параллели C , а последний, очевидно, лежит на оси вращения в плоскости параллели. Отсюда следует, что C_n лежит на оси вращения (рис. 108). Таким образом, второй радиус главной кривизны равен отрезку нормали между точкой поверхности и осью вращения.

Знаки главных кривизн определяются положением центра кривизны меридиана. Если он расположен по ту же сторону от точки меридиана,

что и ось вращения, т. е. если меридиан обращен вогнутостью к оси вращения, то обе главные кривизны имеют одинаковые знаки. В противном случае их знаки различны.

УПРАЖНЕНИЯ

156. Доказать, что полная кривизна *псевдосферы*, т. е. поверхности вращения трактрисы вокруг ее базы, постоянна и отрицательна.

Доказательство. Выше (упр. 93) мы показали, что произведение радиуса кривизны трактрисы (меридиана) на отрезок нормали между точкой кривой и базой постоянно и равно квадрату отрезка касательной. Трактриса обращена выпуклостью к своей базе. Отсюда следует, что главные кривизны имеют разные знаки:

$$K = k_1 k_2 = -\frac{1}{a^2} = \text{const.}$$

157. Доказать, что средняя кривизна катеноида равна нулю.

Доказательство. В § 48 было показано, что радиус кривизны цепной линии равен отрезку нормали между точкой кривой и базой. Цепная линия обращена выпуклостью к своей базе, так что главные кривизны равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$2H = k_1 + k_2 = 0.$$

§ 94. Кривизна линий на сфере. Всякое нормальное сечение сферы радиуса a есть круг того же радиуса. Поэтому радиус нормальной кривизны во всякой точке сферы и для всякого направления равен радиусу сферы. Чтобы получить индикатрису, нужно откладывать от данной точки отрезок, равный \sqrt{a} так, что индикатриса будет окружностью. Но всякий диаметр окружности есть ее главный диаметр, поэтому обе кривизны сферы следует считать обратными радиусу сферы. Отсюда следует, что и полная и средняя кривизны сферы постоянны:

$$K = \frac{1}{a^2}; \quad 2H = \frac{2}{a}.$$

Полная кривизна сферы будет положительной, так как центры кривизны всех нормальных сечений совпадают с центром сферы, т. е. расположены по одну сторону от касательной плоскости.

УПРАЖНЕНИЕ

158. Проверить все результаты этого параграфа вычислением, исходя из вида квадратичных форм сферы в географических координатах.

§ 95. Классификация точек поверхности. Мы видели, что каждой точке поверхности соответствует индикатриса Дюпена, т. е. некоторая кривая второго порядка. Как и всякая кривая второго порядка, она может принадлежать к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу. Ниже мы увидим, что эти возможности действительно могут иметь место для различных поверхностей или даже для

различных точек одной и той же поверхности. В связи с этим точки поверхностей распределяются на три класса и называются эллиптическими, гиперболическими и параболическими, в зависимости от того, к какому из этих трех типов принадлежит индикатриса Дюпена, соответствующая этим точкам. Чтобы определить, какому классу принадлежит данная точка поверхности, достаточно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы в этой точке и составить дискриминант этой формы

$$\delta = DD'' - D'^2. \quad (1)$$

Так как величина δ является дискриминантом старших членов уравнения индикатрисы Дюпена, заданной уравнением (1) § 90, то ее значение и решает вопрос о типе данной точки.

Если в данной точке $\delta > 0$, то точка эллиптическая, если $\delta < 0$, то точка гиперболическая, если же $\delta = 0$, то точка параболическая. Заметим, что знак δ совпадает со знаком полной кривизны, так как

$$K = \frac{\delta}{EG - F^2}, \quad (2)$$

а дискриминант первой квадратичной формы в знаменателе правой части всегда положителен.

Таким образом, *точка будет эллиптической, гиперболической или параболической, если полная кривизна положительна, отрицательна или равна нулю соответственно.*

Строго говоря, кроме этих трех возможностей, существует еще и четвертая. Может случиться, что в данной точке все коэффициенты

D, D', D'' обращаются в нуль одновременно. В таком случае все нормальные сечения имеют кривизну, равную нулю, и понятие индикатрисы Дюпена теряет смысл. Такие точки мы будем называть *точками уплощения*. Приняв во внимание возможность существования точек уплощения, будем называть точку параболической только в том случае, если $\delta = 0$, но при этом среди коэффициентов второй квадратичной

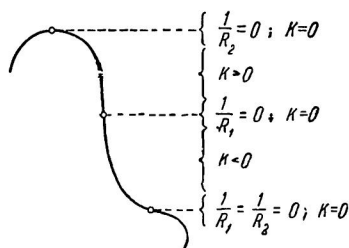


Рис. 109.

формы, соответствующей данной точке, есть отличные от нуля. Полная кривизна в точке уплощения, очевидно, равна нулю.

*Чтобы показать, что все отмеченные возможности могут иметь место, рассмотрим пример поверхности вращения.

Возьмем некоторую точку этой поверхности и рассмотрим проходящий через нее меридиан (рис. 109).

Если он обращен вогнутостью к оси вращения, то центры кривизны обоих главных сечений находятся по одну сторону от касательной плоскости, полная кривизна положительна и точка эллиптическая.

Наоборот, если меридиан обращен к оси вращения своей выпуклостью, то центры главных кривизн расположены по разные стороны от касательной плоскости, вследствие чего полная кривизна отрицательна, а точка гиперболическая.

Точка поверхности вращения будет параболической в двух следующих случаях.

1. Если точка меридиана будет точкой спрямления, то его кривизна, т. е. одна из главных кривизн поверхности, в этой точке равна нулю, а значит равна нулю и полная кривизна поверхности.

2. Если касательная к меридиану в данной точке перпендикулярна к оси вращения, то радиус главной кривизны, равный отрезку нормали, обратится в бесконечность, так как нормаль параллельна оси вращения. Таким образом, и в этой точке полная кривизна равна нулю, а точка параболическая.

Наконец, точка уплощения на поверхности вращения будет такой точкой меридиана, для которой имеют место оба последних условия, т. е. если она будет точкой спрямления с касательной, перпендикулярной к оси вращения.

Действительно, при этом по формуле Эйлера нормальная кривизна любого направления будет равна нулю, что возможно только в случае тождественного обращения в нуль второй квадратичной формы.

§ 96. Строение поверхности вблизи эллиптической точки. Если индикатриса Дюпена принадлежит эллиптическому типу, то в нормальной системе координат § 91 ее уравнение имеет вид

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1,$$

причем

$$\delta = k_1 k_2 > 0.$$

Итак, радиусы главных кривизн имеют один знак. Так как выбор направления нормального вектора зависит от нас, то его всегда можно направить таким образом, чтобы k_1 и k_2 были положительными.

Формула Эйлера

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

сейчас же показывает нам, что в рассматриваемой точке нормальные кривизны всех направлений положительны, т. е. все нормальные сечения вогнуты. Итак, вогнутость всех нормальных сечений, проходящих через эллиптическую точку поверхности, направлена в одну сторону. Отсюда следует, что все точки поверхности, достаточно близкие к эллиптической точке, расположены по одну сторону от касательной плоскости в этой точке (рис. 110).

Обратно, если все точки поверхности, достаточно близкие к данной, лежат по одну сторону касательной плоскости и кривизна нормального сечения не обращается в нуль, то все нормальные сечения, в том числе

и сечения главных направлений, имеют кривизну одного знака, так что

$$\delta = k_1 k_2 > 0$$

и данная точка эллиптическая.

При надлежащем выборе ориентации все сечения в эллиптической точке вогнуты. Поэтому в правой части уравнения индикатрисы следует удержать только $+1$ и ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{p_1} + \frac{y^2}{p_2} = 1, \quad (1)$$

где p_1 и p_2 — положительные числа.

Итак: в эллиптической точке индикатриса будет действительным эллипсом.

Если в некоторой точке поверхности индикатриса имеет форму

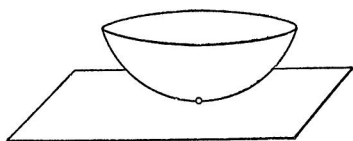


Рис. 110.

окружности, то эта точка называется *омбилической*. Так как это возможно только при условии равенства $k_1 = k_2$, то из формулы Эйлера

$$k_n = k_1 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1$$

следует, что все нормальные кривизны равны между собой.

В общей системе координат омбилическая точка характеризуется пропорциональностью соответственных коэффициентов обеих квадратичных форм

$$D = \lambda E; \quad D' = \lambda F; \quad D'' = \lambda G, \quad (2)$$

так как только при этом условии нормальная кривизна, выражаемая отношением обеих форм, не будет зависеть от направления.

Примером омбилической точки может служить всякая точка сферической поверхности.

УПРАЖНЕНИЕ

159. Доказать, что омбилическая точка характеризуется равенством

$$H^2 = K.$$

§ 97. Строение поверхности вблизи гиперболической точки.

Если точка гиперболическая, то в нормальной системе координат дискриминант ее индикатрисы Дюпена

$$\delta = k_1 k_2 < 0,$$

откуда следует, что главные нормальные кривизны имеют разные знаки. Выбрав направление нормального вектора, мы можем положить

$$R_1 = p_1 > 0, \quad R_2 = -p_2 < 0 \quad (1)$$

и записать формулу Эйлера в виде

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{p_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{p_2},$$

где p_1 и p_2 положительные числа. Нормальная кривизна в этом случае может принимать положительные и отрицательные значения. Выясним, для каких направлений сечений имеет место та и другая возможность. Из неравенства

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{p_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{p_2} > 0$$

следует

$$\operatorname{tg}^2 \varphi < \frac{p_2}{p_1} \quad \text{или} \quad |\operatorname{tg} \varphi| < + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}.$$

Обратно, для того чтобы нормальная кривизна была отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|\operatorname{tg} \varphi| > + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}.$$

Проведем в касательной плоскости через точку прикосновения две прямые с угловыми коэффициентами

$$k_1 = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}; \quad k_2 = - \sqrt{\frac{p_2}{p_1}},$$

которые, как легко видеть, совпадают с асимптотами индикатрисы Дюпена (рис. 111).

Эти прямые разделят касательную плоскость на четыре четверти, перенумерованные нами, как это показано на чертеже. Направление прямой, проходящей через точку O из первой в третью четверть, будет соответствовать положительным, а такой же прямой, проходящей из второй четверти в четвертую, — отрицательным значениям нормальной кривизны. Таким образом, все нормальные сечения, проведенные по направлению прямых, заключенных внутри вертикальных углов I и III , будут вогнуты, а нормальные сечения по направлению прямых, проходящих внутри вертикальных углов II , IV , — выпуклы.

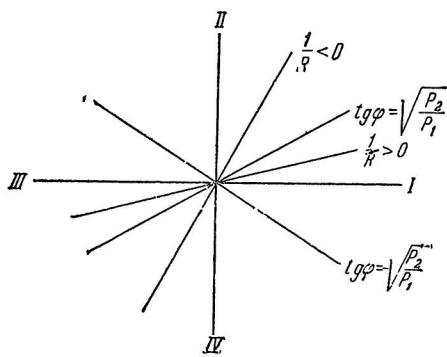


Рис. 111.

Отсюда видно, что, обходя по поверхности точку O по достаточно малому замкнутому контуру, мы должны будем два раза перейти из

верхней части пространства в его нижнюю часть и два раза совершить обратный переход, если считать, что пространство разделено на эти части касательной плоскостью в данной точке. Учитывая распределение выпуклых и вогнутых нормальных сечений, мы можем заключить, что вблизи гиперболической точки поверхность имеет *седлообразное строение* (рис. 112).

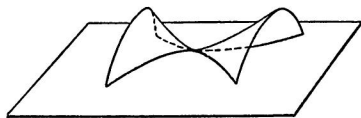


Рис. 112.

Переходя к рассмотрению вида индикатрисы Дюпена гиперболической точки, мы должны обратить внимание на то, что для направления с положительной нормальной кривизной ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{p_1} - \frac{y^2}{p_2} = 1, \quad (1)$$

а для сечений с отрицательной нормальной кривизной

$$\frac{x^2}{p_1} - \frac{y^2}{p_2} = -1. \quad (2)$$

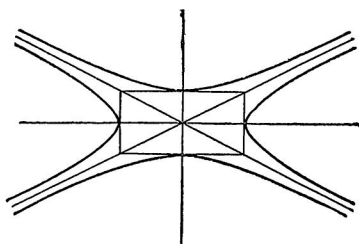


Рис. 113.

Таким образом, индикатриса в гиперболической точке имеет вид двух сопряженных гипербол, т. е. таких гипербол, которые имеют общие асимптоты, причем действительная ось одной совпадает с мнимой осью другой и наоборот (рис. 113).

УПРАЖНЕНИЕ

160. Доказать, что в точке с равным нулю значением средней кривизны, асимптотические направления индикатрисы Дюпена взаимно перпендикулярны.

§ 98. Строение поверхности вблизи параболической точки. Параболическая точка поверхности характеризуется равенством

$$\delta = DD'' - D'^2 = 0,$$

которое равносильно условию

$$K = k_1 k_2 = 0.$$

Предполагая, что нормальная кривизна $k_2 = 0$, выберем направление нормального вектора поверхности так, чтобы

$$R_1 = p_1 > 0.$$

В таком случае уравнение индикатрисы в нормальной системе координат примет вид

$$\frac{x^2}{p_1} = 1, \quad (1)$$

а формула Эйлера сведется к соотношению

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1}.$$

Отсюда следует, что нормальная кривизна обращается в нуль при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и отлична от нуля во всяком другом направлении.

Это положение вещей становится особенно ясным, если принять во внимание форму индикатрисы. Уравнение (1) показывает, что она распадается на пару параллельных прямых

$$x = \sqrt{\rho_1}; \quad x = -\sqrt{\rho_1} \quad (\text{рис. 114}).$$

Радиус-вектор любой точки этих прямых имеет конечное значение. Прямая же, совпадающая с осью Oy , параллельна обеим прямым, вследствие чего соответствующая ее направлению нормальная кривизна равна

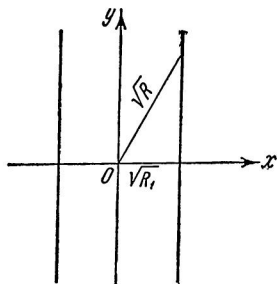


Рис. 114.

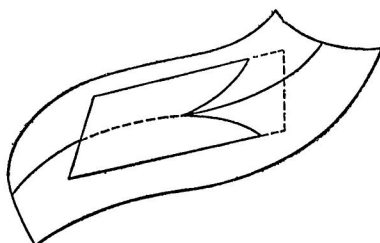


Рис. 115.

нулю. Направление оси Oy является одновременно и главным и асимптотическим направлением индикатрисы.

Чтобы выяснить строение поверхности вблизи параболической точки, заметим, что все нормальные сечения можно считать вогнутыми, за исключением сечения, касающегося асимптотического направления индикатрисы. Кривизна этого последнего в рассматриваемой точке равна нулю, так что она является точкой спрямления.

В простейшем случае это будет точка перегиба, и тогда поверхность имеет вблизи данной точки «полуседлообразное» строение, показанное на чертеже (рис. 115).

Однако и точка спрямления может быть точкой выпуклости или вогнутости. В этих случаях поверхность может иметь различное и довольно сложное строение, в рассмотрение которого мы не можем войти.

Отметим, наконец, одно существенное отличие между эллиптическими и гиперболическими точками, с одной стороны, и параболическими точками — с другой.

Первые два типа точек характеризуются неравенствами $\delta > 0$ или $\delta < 0$, последние же — равенством $\delta = 0$.

Это равенство можно рассматривать как соотношение между криволинейными координатами точек, и оно выражает, вообще говоря, некоторую линию, состоящую из параболических точек. Неравенство же определяют не линии, а целые области эллиптических и гиперболических точек.

Если на поверхности есть и та и другая область, то при условии непрерывности функций, определяющих уравнение поверхности и их производных, эти области разделяются линией $\delta = 0$, состоящей из параболических точек.

Ниже мы увидим, однако, что не исключена возможность существования и таких поверхностей, для которых условие $\delta = 0$ выполняется тождественно и которые, следовательно, состоят из одних параболических точек.

Что касается точек уплощения, то ввиду большого разнообразия возможностей в строении поверхностей вблизи этих точек мы его рассматривать не будем.

***§ 99. Линия пересечения поверхности с ее касательной плоскостью.** Предположим, что поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y)$$

и расположена так, что плоскость Oxy касается ее в начале координат. В таком случае линия, определяемая в этой плоскости уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

будет линией пересечения поверхности с этой плоскостью.

Координатные векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{k}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k}$$

в точке O должны располагаться в плоскости Oxy , вследствие чего

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

как мы это уже видели в § 91.

Отсюда следует, что начало координат будет особой точкой линии:

$$f(x, y) = 0.$$

Точка прикосновения поверхности и плоскости есть особая точка линии их пересечения.

Примем во внимание, что если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то ее вторая квадратичная форма имеет вид, приведенный в упр. 152, а в точке O просто равна

$$\psi_2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 dx^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 dx dy + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 dy^2.$$

Теперь нетрудно установить строение кривой пересечения касательной плоскости и поверхности в точке прикосновения — по знаку

$$\delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

1. Если точка эллиптическая, то она изолирована.
2. Если точка гиперболическая, то она узловая.
3. Если точка параболическая, то возможны различные случаи.

В частности, «полуседлообразное» строение поверхности соответствует точке возврата первого рода.

***§ 100. Точки поверхностей второго порядка.** В качестве примера приложения классификации точек поверхности рассмотрим различные типы поверхностей второго порядка.

Начнем с некоторых замечаний общего характера.

Всякое плоское сечение поверхности второго порядка есть кривая второго порядка.

Кривизна такой кривой может обратиться в нуль в какой-либо ее точке в том и только в том случае, если эта кривая распадается на пару прямых (упр. 79).

Таким образом, кривизна нормального сечения поверхности второго порядка равна нулю в том и только в том случае, если его плоскость содержит прямолинейную образующую этой поверхности. Отсюда следует, что нормальная кривизна поверхности второго порядка не обращается в нуль в точках нелинейчатых поверхностей и обращается в нуль для одного или двух сечений, если через точку проходит одна или две прямолинейные образующие соответственно.

Если принять, с другой стороны, во внимание, что в эллиптических точках нормальная кривизна не обращается в нуль, а в параболических точках она обращается в нуль для сечения одного направления, а для гиперболических точек для сечений двух направлений, то получаются следующие выводы.

1. *Эллипсоид, двуполостный гиперboloид и эллиптический параболоид не имеют прямолинейных образующих и, следовательно, состоят из эллиптических точек.*

2. *Через каждую точку двуполостного гиперboloида и гиперболического параболоида проходят две прямолинейные образующие, следовательно, они состоят из гиперболических точек.*

3. *Через каждую точку цилиндров и конусов второго порядка проходит одна прямолинейная образующая, вследствие чего они состоят из параболических точек.*

Так как всякая точка плоскости есть точка уплощения (все нормальные сечения — плоскости прямые), то к предыдущему можно еще добавить:

4. *Если поверхность второго порядка распадается на пару плоскостей, то она состоит из точек уплощения.*

***§ 101. Сферическое отображение.** Рассмотрим точку M поверхности и сферу единичного радиуса с центром в начале координат O .

Проводя через O луч, параллельный ориентированной нормали поверхности в точке M , до точки его пересечения с поверхностью сферы, получим на сфере некоторую точку M_0 (рис. 116).

Будем говорить, что точка M_0 соответствует точке M данной поверхности при ее сферическом отображении.

При помощи сферического отображения можно установить соответствие между любой областью точек на данной поверхности и областью точек на сфере единичного радиуса.

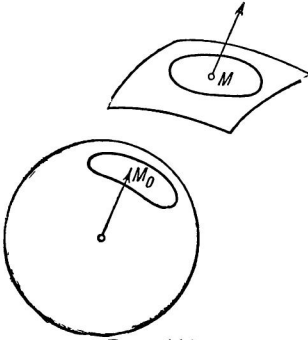


Рис. 116.

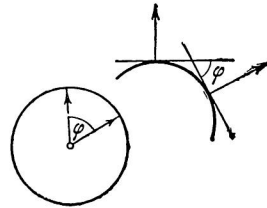


Рис. 117.

Чтобы получить это соответствие, зададим параметрическое уравнение поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (1)$$

и выразим единичный вектор ее нормали \mathbf{n} в функции криволинейных координат

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v). \quad (2)$$

Рассматривая его как радиус-вектор точки на сфере единичного радиуса, мы получим сферическое отображение поверхности, считая соответствующими точки, определенные радиусами-векторами \mathbf{r} и \mathbf{n} , взятыми при одинаковых значениях криволинейных координат.

При помощи сферического отображения можно определить «кривизну» поверхности по аналогии с тем, как она определяется для плоских кривых. Для этих кривых мы можем рассматривать *круговое отображение*, относя всякой их точке точку пересечения круга единичного радиуса с радиусом, параллельным ориентированной нормали кривой в данной ее точке (рис. 117).

Так как для плоской линии угол между касательными равен углу между нормальными, а последний равен дуге кругового отображения, то *кривизну плоской кривой можно определить как предел отношения длины дуги кругового отображения к соответствующей длине дуги кривой, когда эта дуга стягивается к данной точке.*

Возвращаясь к теории поверхностей, дадим аналогичное определение *кривизны поверхности*, называя эту *кривизну гауссовой*.

Учтем при этом переход от кривой к поверхности, заменив дуги площадями, а круговое отображение сферическим.

Итак, будем называть *гауссовой кривизной поверхности в данной ее точке предел отношения площади сферического отображения области, окружающей данную точку, к площади самой области, предполагая, что область стягивается к данной точке*.

Обозначая площади указанных областей Σ_0 и Σ через s_0 и s соответственно, будем иметь, таким образом, для гауссовой кривизны в точке M

$$G_M = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{s_0}{s}. \quad (3)$$

Обе площади мы можем выразить по формуле (1) § 81, применяя ее один раз к данной поверхности, а другой раз к единичной сфере, заданной уравнением (2),

$$s = \iint_{\Sigma} |[r_u r_v]| du dv; \quad s_0 = \iint_{\Sigma} |[n_u n_v]| du dv. \quad (4)$$

Рассматривая Σ как обозначение области изменения криволинейных координат u, v , которая будет одной и той же для обоих интегралов.

Чтобы установить связь между гауссовой кривизной и инвариантами поверхности, введенными ранее, сравним векторные произведения

$$[r_u r_v] \text{ и } [n_u n_v].$$

Оба они направлены соответственно по нормальям к данной поверхности и к поверхности сферы, а так как эти нормали в соответствующих точках параллельны, то и векторы коллинеарны:

$$[n_u n_v] = \lambda [r_u r_v].$$

Для вычисления λ , умножив обе части этой зависимости скалярно на $[r_u r_v]$ и воспользовавшись известным тождеством векторной алгебры, будем иметь

$$(n_u r_u) (n_v r_v) - (n_u r_v) (n_v r_u) = \lambda \{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2\}.$$

Заменив скалярные произведения коэффициентами основных квадратичных форм, получим

$$DD' - D'^2 = \lambda (EG - F^2),$$

откуда

$$\lambda = K,$$

где K — полная кривизна поверхности.

Итак,

$$[n_u n_v] = K[r_u r_v]. \quad (5)$$

На основании этой формулы площадь сферического отображения

$$s_0 = \iint_{\Sigma} |K| | [r_u r_v] | du dv, \quad (6)$$

а применение к интегралу теоремы о среднем позволяет получить

$$s_0 = |K|_c \iint_{\Sigma} |[r_u r_v]| du dv = |K|_c |s|,$$

причем индекс c указывает, что полная кривизна берется в некоторой внутренней точке области Σ .

Возвращаясь к выражению гауссовой кривизны, получим

$$G_M = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{s_0}{s} = \lim_{\Sigma \rightarrow M} |K|_c.$$

Однако если область Σ стягивается к точке M , то к той же точке стремится и точка c , откуда

$$G_M = |K|_M, \quad (7)$$

так что *гауссова кривизна совпадает с полной кривизной поверхности*.

Для того чтобы совпадение было полным, гауссовой кривизне приписывают тот же знак, что и полной кривизне.

***§ 102. Знак полной кривизны.** Знак полной кривизны тоже находится в связи с характером сферического отображения.

Чтобы выяснить эту связь, будем считать внешней стороной поверхности ту сторону, в которую направлен единичный вектор нормали \mathbf{n} , а внешней стороной сферы ту, в которую обращена ее выпуклость.

Будем также говорить, что обход замкнутого контура, ограничивающего некоторую область поверхности, совершается в *положительном направлении*, если наблюдатель, движущийся в этом направлении *по внешней стороне* поверхности, видит обходимую область *по левую руку*.

Обход замкнутого контура, происходящий в направлении, противоположном положительному, будем называть *отрицательным*.

Предположим теперь, что на поверхности задана область Σ , все точки которой имеют полную кривизну одного и того же знака. Рассмотрим некоторую точку M контура Γ , ограничивающего эту область. Не уменьшая общности рассмотрения, мы можем предположить, что система криволинейных координат выбрана так, чтобы вектор \mathbf{r}_u был направлен по касательной к Γ в направлении положительного обхода, а вектор \mathbf{r}_v внутрь области.

Согласно определению положительного обхода, мы должны считать, таким образом, что вектор r_v направлен влево от наблюдателя, находящегося на внешней стороне поверхности и смотрящего в направлении вектора r_u .

При той же параметризации вектор n_u направлен по касательной к контуру Γ_0 сферического отображения Γ , а n_v внутрь области Σ_0 , соответствующей на сфере области Σ .

Формула (5) § 101

$$K[r_u r_v] = [n_u n_v]$$

показывает, что тройки векторов

$$n, r_u, r_v \text{ и } n, n_u, n_v$$

имеют одинаковую ориентацию, если $K > 0$, и ориентированы противоположно, если $K < 0$.

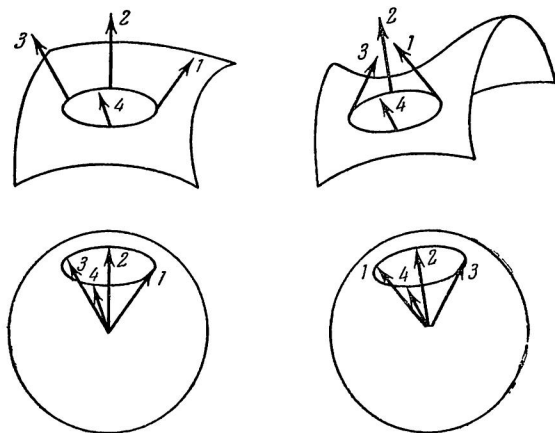


Рис. 118.

Это значит, что при $K > 0$ вектор n_v расположен по левую руку от наблюдателя, смотрящего по направлению вектора n_u и находящегося на внешней поверхности сферы, а при $K < 0$ — по правую руку того же наблюдателя.

Отсюда следует, что при положительном обходе контура Γ на данной поверхности обход соответствующего контура Γ на сфере совершается в положительном направлении при $K > 0$ и в отрицательном направлении при $K < 0$.

Наглядное представление о связи знака кривизны с направлениями обхода дают следующие чертежи (рис. 118).

Если приписать площади сферического отображения знак, соответствующий знаку полной кривизны отображаемой области, и назвать

интегральной кривизной области Σ интеграл

$$J = \iint_{\Sigma} K |[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| du dv = \iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (1)$$

то согласно (6) §101 будем иметь

$$s_0 = J, \quad (2)$$

так что *площадь сферического отображения области данной поверхности равна интегральной кривизне этой области.*

УПРАЖНЕНИЯ

161. Доказать, что полная кривизна развертывающейся поверхности равна нулю.

Доказательство. Приняв характеристики за координатные линии $\mathbf{v} = \text{const}$, будем иметь $n_u = 0$, так как нормальный вектор не меняется вдоль характеристики. Но из формулы (5) § 101 следует в таком случае

$$K = 0.$$

162. Третья квадратичная форма поверхности. Элемент дуги сферического отображения кривой определяется квадратичной формой

$$\varphi_3 = ds_0^2 = (n_u du + n_v dv)^2 = edu^2 + 2fdv du + gdv^2,$$

где

$$e = n_u^2; \quad f = n_u n_v; \quad g = n_v^2.$$

Эта форма называется третьей основной квадратичной формой поверхности.

163. Доказать, что при соответствующем выборе знака полная кривизна

$$K = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

164. Доказать, что дискриминант второй квадратичной формы будет средним пропорциональным дискриминантов первой и третьей формы

$$(DD'' - D'^2) = (EG - F^2)(eg - f^2).$$

ГЛАВА VIII

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СЕТИ И ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 103. Сопряженные направления. Рассмотрим семейство плоскостей, касающихся поверхности в точках некоторой кривой

$$r = r(t).$$

Это семейство будет однопараметрическим, так как каждая его плоскость определяется значением параметра t , соответствующего положению точки на кривой.

Характеристика семейства проходит через точку прикосновения соответствующей плоскости и поверхности, ее единичный направляющий вектор m определяется из условий (3) § 68

$$mn = 0; m\dot{n} = 0. \quad (1)$$

Обозначим через

$$dn = n_u du + n_v dv$$

дифференциал нормального вектора поверхности при движении по данной кривой, а через

$$\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v$$

касательный вектор, направленный по характеристике рассматриваемого семейства (рис. 119). В таком случае второе из условий (1) принимает вид уравнения

$$dn \delta r = 0, \quad (2)$$

из которого найдется отношение дифференциалов δu и δv , определяющее направление характеристики.

Запишем его в развернутом виде:

$$\begin{aligned} dn \delta r &= (n_u du + n_v dv) (r_u \delta u + r_v \delta v) = \\ &= n_u r_u du \delta u + n_u r_v du \delta v + n_v r_u dv \delta u + n_v r_v dv \delta v = 0. \end{aligned}$$

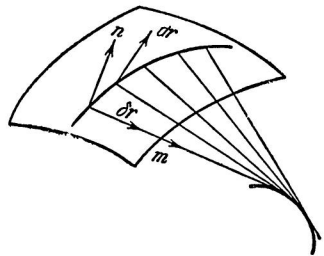


Рис. 119.

Приняв во внимание второе выражение коэффициентов второй квадратичной формы, получим окончательно

$$D du \delta u + D' (du \delta v + dv \delta u) + D'' dv \delta v = 0. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что определяемая условием (2) зависимость между двумя направлениями есть сопряженность относительно индикатрисы Дюпена.

Действительно, в нормальной системе координат условие принимает вид

$$D dx \delta x + D' (dx \delta y + dy \delta x) + D'' dy \delta y = 0.$$

Но отношения

$$\frac{dy}{dx} = q_1; \quad \frac{\delta y}{\delta x} = q_2$$

есть угловые коэффициенты направлений. Для них мы имеем

$$D + D' (q_1 + q_2) + D'' q_1 q_2 = 0,$$

а это и есть условие сопряженности.

Полученный результат мы можем сформулировать следующим образом: *для того чтобы прямые, касающиеся поверхности в точках некоторой кривой, были характеристиками семейства плоскостей, касающихся поверхности в тех же точках, необходимо и достаточно, чтобы направления этих прямых и направления касательных данной кривой были сопряжены относительно индикатрисы Дюпена в точках их пересечения.*

Характеристики семейства плоскостей всегда образуют развертывающуюся поверхность, что позволяет сформулировать предыдущий результат в следующем виде.

Для того чтобы прямые, касающиеся поверхности в точках некоторой кривой, составляли развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы их направления были сопряжены направлению касательных к этой кривой.

Применим полученные результаты к рассмотрению развертывающихся поверхностей.

Какую бы линию (отличную от образующей) мы ни брали на такой поверхности, огибающая семейства касательных плоскостей будет совпадать с самой поверхностью. Таким образом, в каждой точке развертывающейся поверхности любому направлению сопряжено направление ее прямолинейной образующей. Однако если всякому направлению относительно кривой второго порядка сопряжено одно и то же направление, то эта кривая принадлежит параболическому типу. Отсюда следует, что всякая развертывающаяся поверхность состоит из параболических точек, т. е. является поверхностью нулевой полной кривизны.

УПРАЖНЕНИЕ

165. Доказать, что для сопряженности двух направлений необходимо и достаточно, чтобы одно из них было ортогонально сферическому отображению другого.

§ 104. Сопряженная сеть. Сеть линий называется сопряженной, если направления касательных к линиям разных семейств сопряжены в точках их пересечения.

На всякой поверхности существует бесчисленное множество сопряженных сетей. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное семейство линий и соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{du} = f(u, v).$$

Будем искать другое семейство так, чтобы оно вместе с данным образовало сопряженную сеть. Предположим, что направление касательных линий искомого семейства определяется отношением дифференциалов δu и δv .

Поделив на $du \delta u$ левую часть условия сопряженности, которому должны удовлетворять данное и искомое направления, получим

$$D + D' \left(\frac{\delta v}{\delta u} + f(u, v) \right) + D'' f(u, v) \frac{\delta v}{\delta u} = 0$$

или

$$(D''f + D') \frac{\delta v}{\delta u} + D'f + D = 0.$$

Это дифференциальное уравнение и определяет искомое семейство, образующее сопряженную сеть вместе с данным. Оно разрешается всегда однозначно за исключением случая одновременного обращения в нуль выражений

$$\begin{aligned} D''f + D' &= 0, \\ D'f + D &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта возможность имеет место только в области параболических точек, так как условием совместности обоих уравнений будет обращение в нуль дискриминанта

$$\delta = \begin{vmatrix} D & D' \\ D' & D'' \end{vmatrix}.$$

Неопределенность решения объясняется в этом случае тем, что у параболической кривой второго порядка всякому направлению сопряжено ее единственное асимптотическое направление.

Таким образом, в области параболических точек семейство линий, касающихся асимптотических направлений индикатрисы, образует сопряженную сеть со всяким другим семейством.

Если принять сопряженную сеть за координатную, то условие (2) должно выполняться для линий $du=0$ и $dv=0$, откуда следует, что

$$D' dv \delta u = 0$$

или

$$D' = 0. \quad (1)$$

Таким образом, принимая сопряженную сеть за координатную, можно привести вторую квадратичную форму к виду

$$\varphi_2 = D du^2 + D' dv^2. \quad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ

166. Доказать, что координатные линии параболоида

$$z = Ax^2 + By^2$$

образуют сопряженную сеть.

167. На поверхности вращения

$$r = te(\varphi) + e^t k$$

найти семейство линий, образующее с семейством

$$t - \varphi = \text{const}$$

сопряженную сеть.

$$\text{Ответ: } t = ce^{-\varphi}.$$

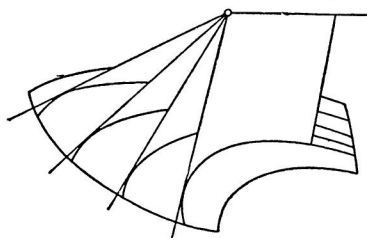


Рис. 120.

168. Сеть Кенигса. Сеть Кенигса называется сеть, образованная линиями пересечения поверхности плоскостями некоторого пучка и линиями прикосновения к этой же поверхности конусов с вершинами на оси того же пучка (рис. 120). Сеть Кенигса будет сопряженной, так как прямые, касающиеся линий второго семейства в точках

их пересечения с линиями первого семейства, являются образующими конусов, т. е. развертывающихся поверхностей.

***§ 105. Поверхности переноса.** Перемещение твердого тела называется параллельным, если все его точки перемещаются на отрезок, соответствующий одному и тому же вектору. Если вектор этого смещения является непрерывной функцией некоторого параметра, то по мере его изменения тело совершает непрерывное параллельное перемещение.

Если кривая линия перемещается параллельно, как твердое тело, то она описывает поверхность, которая называется *поверхностью переноса*.

Чтобы получить уравнение поверхности переноса, предположим, что радиус-вектор точки ее кривой задан в функции параметра u и равен

$$a = a(u).$$

Пусть, с другой стороны, вектор переноса каждой точки этой линии изменяется в зависимости от параметра v и равен

$$b = b(v).$$

В таком случае радиус-вектор всякой точки поверхности переноса может быть представлен в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(v) \quad (\text{рис. 121}). \quad (1)$$

В этом уравнении векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , очевидно, могут меняться ролями. Действительно, мы можем предположить, что кривая $\mathbf{b}(v)$ смещается на вектор $\mathbf{a}(u)$, и получим ту же поверхность.

Иными словами: если данная поверхность переноса может быть образована параллельным перенесением кривой $\mathbf{a}(u)$ по кривой $\mathbf{b}(v)$, то она же может быть образована переносом кривой $\mathbf{b}(v)$ по кривой $\mathbf{a}(u)$.

Линии переноса $\mathbf{a}(u)$ и $\mathbf{b}(v)$ образуют во всех своих последовательных положениях сеть, которая называется сетью переноса.

Эта сеть сопряженная. Действительно, касательная в некоторой точке линии переноса переносится параллельно по кривой другого семейства, а поверхность, образованная этими касательными, — цилиндрическая. Это и доказывает высказанное положение.

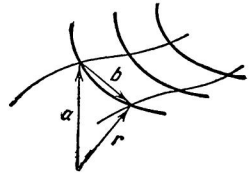


Рис. 121.

УПРАЖНЕНИЯ

169. Доказать, что параболоид

$$Z = Ax^2 + By^2$$

есть поверхность переноса параболы, скользящей своей вершиной по другой параболе, расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости первой.

170. Доказать, что сопряженная сеть линий, расположенных в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, есть сеть переноса.

§ 106. Асимптотические линии. Линия, расположенная на поверхности, называется *асимптотической*, если касательная плоскость поверхности совпадает в каждой ее точке с соприкасающейся плоскостью этой линии.

Если на поверхности расположена прямая линия, то ее тоже следует считать асимптотической, так как любая содержащая ее плоскость может рассматриваться как соприкасающаяся. В обоих случаях нормальная кривизна асимптотической линии равна нулю во всех ее точках, так как вектор ее кривизны или перпендикулярен нормали к поверхности, или равен нулю. Таким образом, *асимптотическая линия есть линия нулевой нормальной кривизны*.

Асимптотическая линия является ребром возврата для семейства плоскостей, касающихся поверхности в ее точках. Поэтому характеристики семейства этих плоскостей совпадают с касательными к самой линии. Вследствие этого направление касательной к асимптотической линии сопряжено самому себе. Но самосопряженное относительно кривой второго порядка направление есть асимптотическое направление этой кривой. Таким образом: *направление касательной к асимптотической*

линии в каждой точке совпадает с асимптотическим направлением индикатрисы Дюпена этой точки.

Так объясняется и название асимптотической линии.

Чтобы найти асимптотическую линию, достаточно использовать условие сопряженности, отождествив в нем направления du , dv и δu , δv .

Условие

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0 \quad (1)$$

и будет дифференциальным уравнением асимптотических линий. Его же можно получить, исходя и из равенства нулю нормальной кривизны этих линий.

Чтобы привести это уравнение к нормальному виду

$$\frac{dv}{du} = f(u, v),$$

нужно разрешить его как квадратное относительно $\frac{dv}{du}$. При этом могут представиться следующие случаи:

1. В области эллиптических точек

$$DD'' - D'^2 > 0,$$

и оба корня этого квадратного уравнения мнимы. Отсюда следует, что асимптотические линии не существуют в области эллиптических точек.

2. В области гиперболических точек

$$DD'' - D'^2 < 0$$

уравнение (1) имеет два действительных и различных корня. Оба уравнения

$$\frac{dv}{du} = f_1(u, v); \quad \frac{dv}{du} = f_2(u, v),$$

получающиеся в результате разрешения квадратного уравнения, определяют два семейства асимптотических линий, которые составляют асимптотическую сеть.

3. В области параболических точек

$$DD'' - D'^2 = 0,$$

и оба корня уравнения совпадают между собой и действительны. Из единственного уравнения

$$\frac{dv}{du} = f(u, v),$$

равносильного (1), определится одно семейство асимптотических линий. Это семейство мы уже рассматривали в § 104 и показали, что оно образует со всяким другим семейством сопряженную сеть.

4. В области точек уплощения

$$D = D' = D'' = 0$$

уравнение (1) удовлетворяется тождественно, и всякая линия в этой области асимптотическая.

Если асимптотическая линия принята за координатную, например $v = \text{const}$, то из условия (1) следует, что $D = 0$; таким же образом, если $u = \text{const}$ асимптотическая, то $D'' = 0$. В области гиперболических точек асимптотическая сеть может быть принята за координатную и тогда вторая квадратичная форма принимает вид

$$\varphi_2 = 2D' du dv. \quad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ

171. Доказать, что кривая есть асимптотическая линия на линейчатой поверхности, образованной главными ее нормальми.

172. Найти асимптотические линии поверхности вращения

$$r = te(\varphi) + \ln tk.$$

О т в е т: $t = ce^\varphi$; $t = ce^{-\varphi}$.

173. Доказать, что полная кривизна линейчатой поверхности не может быть положительной.

Доказательство. Через всякую точку поверхности проходит прямолинейная образующая, являющаяся асимптотической линией. Поэтому асимптотическое направление поверхности действительно во всякой точке, что было бы невозможным при $K > 0$.

174. Поверхность называется минимальной, если ее средняя кривизна равна нулю.

Доказать, что поверхность будет минимальной тогда и только тогда, если ее асимптотическая сеть ортогональна.

Доказательство. Для того чтобы средняя кривизна была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы индикатриса Дюпена была равносторонней гиперболой, асимптоты которой ортогональны.

175. Доказать, что единственная минимальная линейчатая поверхность есть геликоид.

Доказательство. Асимптотическая сеть минимальной линейчатой поверхности должна состоять из прямолинейных образующих и их ортогональных траекторий. Но для каждой из этих траекторий прямолинейная образующая является главной нормалью, так как она должна быть перпендикулярной нормали к поверхности, которая совпадает с бинормалью траектории.

Таким образом, все ортогональные траектории имеют общие главные нормали, т. е. являются кривыми Бертрана, допускающими существование бесчисленного множества сопряженных. Но в § 60 было доказано, что такая линия винтовая. Значит, поверхность образована главными нормальми винтовой линии, а это и есть геликоид.

176. Доказать, что сферическое отображение асимптотического направления перпендикулярно этому направлению.

§ 107. Линии кривизны. *Линией кривизны называется такая линия поверхности, вдоль которой нормали последней образуют разветвляющуюся поверхность.*

Если повернуть каждую из этих нормалей на прямой угол так, чтобы она осталась нормальной к линии кривизны, то она станет

касательной поверхности. Однако при этом поверхность, составленная из этих касательных, останется развертывающейся. А это значит, что каждая из этих прямых в своем новом положении станет характеристикой семейства плоскостей, касающихся поверхности в точках линии кривизны (рис. 122).

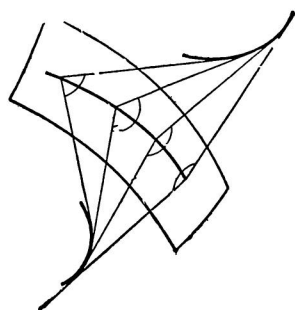


Рис. 122.

Отсюда следует, что направление, сопряженное направлению, касательному к линии кривизны, перпендикулярно ему.

Таким образом: *направление касательной к линии кривизны есть главное направление индикатрисы Дюпена.*

Обратно: *линия, касающаяся в каждой своей точке главной оси индикатрисы Дюпена, есть линия кривизны.* Действительно, прямая, касающаяся поверхности в точке этой линии и перпендикулярная

ее касательной, совпадает с другой главной осью индикатрисы, вследствие чего направления обеих прямых сопряжены. Но в таком случае поверхность, составленная из нормалей рассматриваемых линий, касающихся поверхности, — развертывающаяся. Повернув все эти прямые, расположенные в касательных плоскостях, на прямой угол, мы получим снова развертывающуюся поверхность, которая будет, однако, составлена уже из нормалей поверхности, вследствие чего рассматриваемая кривая есть линия кривизны.

Применяя эти общие рассуждения к случаю плоскости или сферы, мы приходим к заключению, что всякая линия, расположенная на этих поверхностях, является их линией кривизны. Это следует из того, что нормали поверхности, взятые вдоль этой линии, всегда образуют цилиндрическую поверхность в случае плоскости и коническую поверхность с вершиной в центре сферы, если линия лежит на сфере.

* Определим положение характеристической точки на развертывающейся поверхности нормалей, взятых вдоль линии кривизны. Мы знаем, что эта точка должна быть расположена на оси кривизны этой линии. Но согласно теореме Менье эта ось пересекает нормаль поверхности в центре кривизны нормального сечения, касающегося данной линии, т. е. соответствующего главного направления. Итак: *характеристическая точка развертывающейся поверхности нормалей совпадает с центром кривизны главного сечения, касающегося соответствующей линии кривизны*

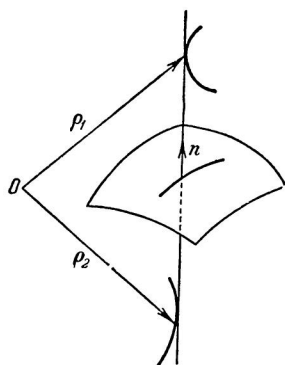


Рис. 123.

Раднусы-векторы обеих характеристических точек равны, таким образом (рис. 123),

$$\rho_1 = \dot{r} + R_1 n; \quad \rho_2 = r + R_2 n. \quad (1)$$

Если точка r пробегает данную поверхность, то точки ρ_1 и ρ_2 описывают поверхности центров. Все нормали данной поверхности касаются обеих поверхностей центров.

УПРАЖНЕНИЯ

177. Доказать, что меридианы и параллели поверхности вращения есть ее линии кривизны, выяснив, что нормали поверхности образуют вдоль них развертывающиеся поверхности.

178. Доказать, что одна из поверхностей центров поверхности вращения вырождается в ось вращения, а другая есть поверхность вращения с той же осью, что и у данной, и с меридианом, совпадающим с эволютой меридиана данной поверхности.

179. Доказать, что сферическое отображение главного направления параллельно этому направлению.

У к а з а н и е. Воспользоваться результатом упр. 165.

***§ 108. Теорема Иоахимстала.** Используем те же два факта, что и в предыдущем параграфе:

1) *Линия кривизны характеризуется тем, что ее нормали, касающиеся поверхности, образуют развертывающуюся поверхность.*

2) *Если нормали некоторой кривой образуют развертывающуюся поверхность, то они образуют такую же поверхность и после поворота на постоянный угол.*

Применим эти факты к рассмотрению двух поверхностей S_1 и S_2 , пересекающихся по линии Γ .

Если линия Γ является одновременно линией кривизны обеих поверхностей, то оба семейства ее нормалей, касающихся этих поверхностей, образуют развертывающиеся поверхности. Но это значит, что угол между обеими нормальями, т. е. угол между самими поверхностями, постоянен вдоль линии Γ .

Обратно, если этот угол постоянен вдоль кривой Γ , а эта кривая является линией кривизны первой поверхности, то она необходимо будет линией кривизны и второй поверхности. Действительно: по условию, нормали кривой Γ , касающиеся первой поверхности, образуют развертывающуюся поверхность. Но они переходят в касательные ко второй поверхности после поворота на постоянный угол, т. е. продолжают и после этого поворота образовывать развертывающуюся поверхность, а отсюда следует, что линия Γ есть линия кривизны второй поверхности.

Таким образом, мы приходим к формулировке теоремы Иоахимстала.

Для того чтобы линия кривизны некоторой поверхности, по которой она пересекает другую поверхность, была линией кривизны и этой последней, необходимо и достаточно, чтобы эти поверхности пересекались под постоянным углом.

Рассматривая случай соприкосновения поверхностей как случай их пересечения под углом равным нулю, отметим такое следствие: *если линия соприкосновения двух поверхностей будет линией кривизны на одной из них, то она будет линией кривизны и на другой поверхности.*

Учитывая, что всякая линия на сфере или на плоскости есть линия кривизны этих поверхностей, приходим также к такому выводу из теоремы Иохнмстала: *для того чтобы поверхность пересекалась со сферой или с плоскостью по своей линии кривизны, необходимо и достаточно, чтобы она пересекалась с ними под постоянным углом.*

Переходя еще раз к случаю касания, отметим, что характеристика огибающей семейства сфер или плоскостей есть линия кривизны огибающей поверхности.

§ 109. Уравнение линий кривизны. Чтобы получить дифференциальное уравнение линий кривизны, предположим, что дифференциалы du , dv и δu , δv соответствуют главным направлениям индикатрисы Дюпена. Для этого необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось условие перпендикулярности и условие сопряженности

$$\left. \begin{aligned} E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v &= 0, \\ D du \delta u + D'(du \delta v + dv \delta u) + D'' dv \delta v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Собрав коэффициенты при дифференциалах δu , δv , представим эти условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (E du + F dv) \delta u + (F du + G dv) \delta v &= 0, \\ (D du + D' dv) \delta u + (D' du + D'' dv) \delta v &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для того чтобы эта система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ D du + D' dv, & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Развертывая левую часть этого условия, представим его в виде

$$(ED' - FD) du^2 + (ED'' - GD) du dv + (FD'' - GD') dv^2 = 0. \quad (3)$$

Это уравнение можно решать как квадратное уравнение с неизвестным отношением $\frac{dv}{du}$. Так как оба корня должны соответствовать главным направлениям индикатрисы Дюпена, которые всегда действительны и взаимно перпендикулярны, то после решения уравнения (3), мы всегда придем к двум дифференциальным уравнениям с действительными правыми частями

$$\frac{dv}{du} = f_1(u, v); \quad \frac{dv}{du} = f_2(u, v).$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения, мы и получим два семейства взаимноортогональных линий кривизны.

Исключительное положение вещей будет в области омбилических точек и в области точек уплощения.

В этих областях или

$$D = \lambda E; D' = \lambda F; D'' = \lambda G, \quad (4)$$

или

$$D = D' = D'' = 0, \quad (5)$$

и уравнение (3), обращаясь в тождество, не определяет линий кривизны.

Однако, с другой стороны, условия (4) или (5) показывают, что из условия ортогональности вытекает условие сопряженности или же выполняется тождественно.

В том или ином случае всякие два взаимно перпендикулярные направления будут также и сопряженными, т. е. главными. Таким образом, всякое направление в области омбилических точек или в области точек уплощения будет главным, а значит, и всякая линия будет линией кривизны.

Так, всякая линия сферы и плоскости будет линией кривизны, так как первая состоит из омбилических точек, а вторая из точек уплощения. В этом можно убедиться и непосредственно, приняв во внимание, что нормали сферы образуют вдоль всякой кривой коническую, а нормали плоскости — цилиндрическую поверхность.

В заключение этого параграфа заметим, что если координатная сеть совпадает с сетью линий кривизны, то из ортогональности и сопряженности координатных векторов следует

$$F = 0; D' = 0, \quad (6)$$

так что основные квадратичные формы имеют вид

$$\varphi_1 = E du^2 + G dv^2; \varphi_2 = D du^2 + D' dv^2. \quad (7)$$

УПРАЖНЕНИЯ

180. Найти линии кривизны геликоида

$$r = te(\varphi) + a\varphi k.$$

Ответ: $t + \sqrt{t^2 + a^2} = ce^{\pm\varphi}$.

181. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают одну прямую, то это поверхность вращения.

Доказательство. Всякая линия сечения поверхности плоскостью, проходящей через эту прямую, есть линия кривизны, так как нормали вдоль нее лежат в этой плоскости. Второе семейство линий кривизны пересекает эти плоскости под прямым углом. Но ортогональные траектории пучка плоскостей есть окружности с центрами на оси пучка, расположенные в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Так как поверхность составлена из таких окружностей, то это поверхность вращения, ось которой совпадает с осью пучка.

182. Теорема Дюпена. *Поверхности трех семейств взаимно ортогональных поверхностей пересекаются по линиям кривизны.*

Доказательство. Введем в пространстве криволинейные координаты u, v, w так, чтобы координатные поверхности совпадали с поверхностями трех данных семейств.

Полагая

$$r = r(u, v, w)$$

и дифференцируя условия ортогональности

$$r_u r_v = 0; r_v r_w = 0; r_w r_u = 0,$$

получим

$$r_u r_{vw} + r_{uv} r_w = 0; r_v r_{wu} + r_{vu} r_w = 0;$$

$$r_w r_{uv} + r_{vw} r_u = 0.$$

Вычитая третье соотношение из первого и прикладывая ко второму, получим

$$r_{uv} r_w = 0.$$

Но r_w есть нормальный вектор поверхности

$$w = \text{const.}$$

Поэтому для этой поверхности

$$D' = 0.$$

С другой стороны, для нее же

$$F = 0,$$

откуда следует, что линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ есть линии кривизны этой поверхности. Аналогичным образом можем рассмотреть и другие поверхности.

183. Линии кривизны поверхностей второго порядка. Через каждую точку поверхности

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

проходят две поверхности, конфокальные с данной

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} = 1,$$

которые пересекают данную поверхность под прямым углом (Бюшгенс. Аналитическая геометрия, концентр 3, стр. 335, 1935г.). Так как конфокальные поверхности образуют триортогональную систему, то они пересекаются по линиям кривизны.

184. Формулы Родрига. Так как вдоль линии кривизны нормали образуют развертывающуюся поверхность, дифференциал единичного вектора поверхности должен быть коллинеарен дифференциалу радиуса-вектора гочки поверхности (§ 69)

$$dn = \lambda dr.$$

Умножая скалярно на dr , получим

$$dn dr = \lambda dr^2$$

или

$$-\varphi_2 = \lambda \varphi_1.$$

Так как формы φ_2 и φ_1 вычислены для направления линии кривизны, т. е. для главного направления, то

$$\lambda = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\frac{1}{R},$$

где R — радиус главной кривизны. Итак,

$$dn = -\frac{1}{R} dr.$$

185. Соотношение между тремя квадратичными формами поверхности. Принимая линии кривизны за координатные, получим из формулы Родрига

$$n_u = -\frac{1}{R_1} r_{uv}$$

$$n_v = -\frac{1}{R_2} r_{vu}.$$

Поэтому для любого направления

$$dn = -\frac{1}{R_1} r_u du - \frac{1}{R_2} r_v dv.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства

$$\frac{1}{R} dr = \frac{1}{R_1} r_u du + \frac{1}{R_2} r_v dv,$$

получим

$$dn + \frac{1}{R_1} dr = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) r_v dv = \lambda r_v.$$

Аналогично этому получим

$$dn + \frac{1}{R_2} dr = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) r_u du = \mu r_u.$$

Так как векторы r_u и r_v касаются линий кривизны, то они перпендикулярны между собой, откуда

$$\left(dn + \frac{1}{R_1} dr\right) \left(dn + \frac{1}{R_2} dr\right) = 0$$

или

$$K\varphi_1 - 2H\varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Это соотношение справедливо в любой системе координат, так как величина каждой из квадратичных форм не зависит от системы координат.

186. Крочение асимптотической линии. Так как нормальный вектор поверхности совпадает с вектором бинормали асимптотической линии, то при дифференцировании по длине дуги асимптотической линии имеем

$$\kappa^2 = \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \frac{dn^2}{ds^2} = \frac{\varphi_3}{\varphi_1}.$$

Но в асимптотическом направлении $\varphi_2 = 0$ и из соотношения упр. 185

$$K\varphi_1 + \varphi_3 = 0.$$

Таким образом,

$$\kappa = \sqrt{-K},$$

где K — полная кривизна.

§ 110. Поверхности нулевой кривизны. Развертывающиеся поверхности есть поверхности нулевой полной кривизны и состоят из параболических точек. Вследствие этого одно из главных направлений такой поверхности должно совпадать с асимптотическим направлением, т. е. с направлением прямолинейной образующей. То, что прямолинейные образующие развертывающейся поверхности суть ее линии кри-

визны, видно и потому, что нормали поверхности вдоль образующей все лежат в одной плоскости, т. е. образуют развертывающуюся поверхность.

Второе семейство линий кривизны, очевидно, будет состоять из ортогональных траекторий образующих.

Мы хотим теперь установить, существуют ли другие поверхности нулевой полной кривизны, кроме развертывающихся.

Для этого рассмотрим прежде всего асимптотическую линию, состоящую из параболических точек или точек уплощения. Так как в параболической точке одно из главных направлений должно совпадать с асимптотическим, а в точке уплощения оно неопределенно, то рассматриваемая асимптотическая линия есть вместе с тем и линия кривизны. Отсюда следует, что бинормали данной кривой, совпадающие с нормальми поверхности, образуют развертывающуюся поверхность. Но выше (§ 69) мы видели, что это возможно только у плоских кривых.

Таким образом: асимптотическая линия, состоящая из параболических точек или точек уплощения, есть плоская кривая, причем содержащая ее плоскость касается поверхности во всех точках этой линии.

Рассмотрим теперь поверхность нулевой полной кривизны.

Эта поверхность состоит из параболических точек или из точек уплощения.

1. Если поверхность состоит из параболических точек, то ее асимптотические по предыдущему образуют семейство плоских линий, зависящих от одного параметра, причем касательная плоскость поверхности остается неизменной вдоль каждой из линий этого семейства. Но вследствие этого поверхность огибает семейство плоскостей, зависящих от одного параметра. Таким образом, *поверхность, составленная из параболических точек, — развертывающаяся.*

2. Если поверхность состоит из точек уплощения, то всякая линия на ней является асимптотической. Взяв семейство линий, зависящих от одного параметра, докажем, как и в предыдущем случае, что вдоль каждой из линий этого семейства касательная плоскость поверхности остается неизменной. Возьмем теперь новую линию так, чтобы она пересекала все линии первого семейства. Так как для этой линии справедлив тот же результат, то значит все плоскости семейства совпадают между собой. Таким образом, все точки поверхности лежат в одной плоскости. Так что *поверхность, состоящая из точек уплощения, есть плоскость.*

***§ 111. Поверхность, состоящая из омбилических точек.** Возьмем на поверхности, состоящей из омбилических точек, некоторую точку A и проведем через нее нормальное сечение (рис. 124). Как всякая линия на рассматриваемой поверхности, полученная кривая будет линией кривизны, и нормали поверхности должны образовать вдоль нее развертывающуюся поверхность. Но в таком случае угол наклона всех этих нормалей к плоскости сечения должен быть постоянным (§ 69) и равен нулю,

как как нормаль в точке A заведомо лежит в этой плоскости. Таким образом, плоское сечение омбилической поверхности, нормальное в одной из своих точек, нормально и в любой другой своей точке. Проведем теперь общее нормальное сечение поверхности через две фиксированные точки A и B и рассмотрим произвольную точку C , не расположенную в плоскости этого сечения. Нормальные сечения, соединяющие точки A и B с точкой C , пересекутся по нормали в точке C . Если нормали в точках A и B пересекаются, то нормаль в точке C , очевидно, пройдет через точку их пересечения. Если же нормали в точках A и B будут параллельны, то им будет параллельна и нормаль в точке C .

Итак: *все нормали омбилической поверхности или пересекаются в одной точке, или параллельны между собой.*

Однако последний случай отпадает, потому что при его наличии вторая квадратичная форма обращается в нуль, и мы имеем дело с плоскостью, которая состоит не из омбилических точек, а из точек уплощения. Остается рассмотреть первый случай. Всякое нормальное сечение, проходящее через некоторую точку, есть плоская кривая, нормали которой пересекаются в одной точке, т. е. окружность. Все эти окружности имеют одну и ту же кривизну, так как точка омбилическая, откуда видно, что *омбилическая поверхность есть сфера.*

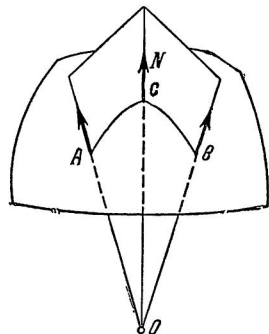


Рис. 124.

ГЛАВА IX

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 112. Изгибание и наложимость. Образы, рассматриваемые в геометрии, обычно наделяются свойствами твердого тела. Это значит, что при перемещении рассматриваемой фигуры предполагается, что все ее размеры, т. е. длины, углы, площади и объемы ее частей остаются неизменными. С этой же точки зрения мы рассматривали до сих пор и поверхности, наделяя их свойствами вполне твердых оболочек. Однако в отношении поверхностей можно встать и на другую точку зрения, наделив их свойствами нерастяжимой, но гибкой пленки. При этом возникает вопрос о том, какие свойства поверхности сохраняются при тех деформациях, которые не сопряжены с растяжениями, или, как говорят, *при изгибании* поверхности. Две поверхности, которые можно совместить всеми их точками, подвергая одну из них изгибанию, называются *наложимыми*. Наложение поверхностей может быть осуществлено при помощи изгибаний, протекающих весьма различными способами. Вследствие неопределенности и видимой сложности процесса изгибания отвлечемся от него и дадим строгое, пригодное для математических исследований, понятие наложимости.

Две поверхности называются наложимыми, если между их точками можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором длины соответствующих дуг линий, расположенных на этих поверхностях, равны между собой.

Это определение вполне согласуется с приведенным выше представлением об изгибании как о деформации без растяжения. Действительно, если после изгибания одна поверхность наложена на другую, то между их точками установилось взаимнооднозначное соответствие, при котором точки первой поверхности соответствуют тем, с которыми они совпадут после наложения. С другой стороны, очевидно, что после совмещения длины соответствующих дуг совпадают, однако эти длины не могли измениться при изгибании, так как такое изменение было бы сопряжено с растяжением или сжатием, которые исключаются при изгибании.

§ 113. Признак наложимости. Чтобы получить возможность дифференциально-геометрического изучения изгибания, следует дать анали-

тический признак наложимости. Предположим, что поверхности S_1 и S_2 наложимы. Первую из них параметризуем произвольным способом, отнеся всякой ее точке M_1 координаты u, v . Координацию на второй поверхности установим по соответствию, считая, что точка M_2 , совпадающая с точкой M_1 при наложении, имеет те же криволинейные координаты на второй поверхности, что и точка M_1 на первой.

Такую параметризацию двух поверхностей мы будем называть общей по отношению к наложимости.

Рассматривая соответствующие кривые на обеих поверхностях, параметризуем их обе при помощи параметра t и опять-таки так, чтобы соответствующие при наложении точки отвечали одним и тем же значениям этого параметра. В таком случае условие равенства длин двух соответствующих дуг запишется в следующем виде:

$$\int_{t_0}^t \sqrt{E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2}, \quad (1)$$

где E_1, F_1, G_1 и E_2, F_2, G_2 — коэффициенты линейного элемента первой и второй поверхностей соответственно.

Так как это равенство должно иметь место при любом значении t , то из него следует

$$E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 \equiv E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2. \quad (2)$$

Однако и это условие должно иметь место тождественно, т. е. должно выполняться при любых значениях du, dv , так как оно справедливо для соответственных кривых любых направлений, проходящих через соответствующие точки. Но две квадратичные формы равны тождественно только при условии равенства их коэффициентов. Таким образом,

$$E_1 = E_2; \quad F_1 = F_2; \quad G_1 = G_2. \quad (3)$$

Итак: для того чтобы две поверхности были наложимы, необходимо, чтобы эти поверхности допускали такие параметризации, при которых в точках этих двух поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами были равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм.

Обратно, если такие координации возможны, то наложимость очевидна, так как, считая соответствующими точки с одинаковыми координатами, мы получим равенство (1), обеспечивающее равенство соответствующих дуг, т. е. наложимость. Указанное свойство линейного элемента выражает, кратко говоря, то, что он сохраняется при изгибании. Поверхности, отличающиеся между собой только положением в пространстве, очевидно, наложимы, однако этот случай мало интересен. Важно, что существуют наложимые друг на друга поверхности,

различные по форме. Примером таких поверхностей могут служить катеноид и геликоид, для которых мы установили существование таких систем криволинейных координат, в которых их линейные элементы совпадают (см. упр. 151).

§ 114. Внутренняя геометрия поверхности. Свойства поверхности и ее частей принято разделять на две группы. Совокупность этих свойств, сохраняющихся при изгибании поверхности, образует ее *внутреннюю геометрию*, а все остальные свойства, которые существенно зависят от формы, принимаемой поверхностью во внешнем пространстве, называются *внешними*. Примером внешнего свойства линии, расположенной на поверхности, может служить ее нормальная кривизна. Рассмотрим хотя бы нормальные кривизны меридианов катеноида. Они не равны нулю, так как меридианы — цепные линии. Но эти линии переходят при наложении катеноида на геликоид в его прямолинейные образующие. Таким образом, нормальная кривизна рассматриваемых линий после изгибания становится равной нулю, т. е. не сохраняется и, значит, принадлежит к числу внешних свойств.

Отметим теперь основные свойства, принадлежащие внутренней геометрии поверхности.

1. *Длина дуги линии, расположенной на поверхности, принадлежит внутренней геометрии*, т. е. не меняется при ее изгибании по определению.

2. Угол между двумя линиями выражается по формуле

$$\cos \theta = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{ds \delta s},$$

которая содержит в своей правой части, кроме дифференциалов криволинейных координат, коэффициенты первой квадратичной формы.

Если ввести на поверхности, наложимой на данную, соответствующую систему координат и принять во внимание, что линейный элемент сохраняется при изгибании, то станет очевидным, что *угол между двумя линиями на поверхности сохраняется при изгибании и, следовательно, принадлежит ее внутренней геометрии*.

3. Формула

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv$$

для определения площади части поверхности содержит в виде подынтегральной функции выражение, зависящее только от коэффициентов первой квадратичной формы. Таким же рассуждением, как и для угла, убеждаемся, что: *площадь части поверхности сохраняется при изгибании и, следовательно, принадлежит внутренней геометрии поверхности*.

После сказанного мы видим, что содержание внутренней геометрии поверхности приближается к содержанию планиметрии, которая и

является внутренней геометрией плоскости. Для полноты аналогии недостает только определения линий, которые играли бы во внутренней геометрии ту же роль, которую прямые линии играют в планиметрии.

Однако в дальнейшем мы укажем (§ 119), как заполняется и этот пробел.

В заключение отметим общий прием, при помощи которого доказывается, что некоторое свойство принадлежит внутренней геометрии. Этот прием состоит в указании на то, что свойство выражается соотношением между коэффициентами первой квадратичной формы (и их производными). Так как это соотношение не может измениться при изгибании, то сохраняется и рассматриваемое свойство.

§ 115. Изгибание развертывающихся поверхностей. Покажем, что *все развертывающиеся поверхности наложимы на плоскость*. Для этого рассмотрим вид их линейных элементов, полученных в § 83,

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \quad (a)$$

$$ds^2 = v^2 du^2 + dv^2, \quad (b)$$

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2) du^2 + 2du dv + dv^2. \quad (c)$$

Первые два принадлежат цилиндру и конусу. Но тот же вид имеют линейные элементы плоскости в прямоугольных и полярных координатах. Таким образом, достаточно установить для точек цилиндра такое соответствие с точками плоскости, при котором u и v будут прямоугольными координатами точки плоскости, а для конуса принять, что соответствующая точка плоскости имеет полярные координаты $\varphi = u$; $\rho = v$, чтобы доказать нашу теорему.

Остается рассмотреть развертывающуюся поверхность с ребром возврата, которая имеет линейный элемент вида (c).

Мы видим, что его коэффициенты зависят только от кривизны ребра возврата, т. е. от вида функции,

$$k = k(u),$$

где k — кривизна, а u — длина дуги этой линии. Отсюда следует, что если деформировать ребро возврата так, чтобы при этом его кручение изменялось, а зависимость кривизны от длины дуги оставалась неизменной, то линейный элемент поверхности, составленной из касательных к этой линии, будет оставаться неизменным и, значит, поверхность будет изгибаться.

Но так как соотношения между кривизной, кручением и длиной дуги могут быть выбраны независимо, то, не меняя первое, мы можем выбрать кручение так, чтобы оно было тождественно равно нулю. При таком выборе ребро возврата станет плоской кривой, а все его касательные расположатся на плоскости. Следовательно, изгибая нашу поверхность, мы можем добиться, чтобы все ее точки расположились на плоскости. Таким образом, развертывающаяся поверхность с ребром возврата тоже наложима на плоскость.

УПРАЖНЕНИЕ

187. Найти поверхности вращения, наложимые на данную поверхность вращения так, что при этом меридианы соответствуют меридианам.

Решение. Предположим, что поверхность вращения задана уравнением (§ 82)

$$r = e(\varphi) \eta(l) + k\zeta(l),$$

где l — длина дуги меридиана, а наложимая на нее поверхность — уравнением

$$r_1 = e(\varphi_1) \eta_1(l_1) + k\zeta_1(l_1).$$

Так как меридианы соответствуют, то для наложимости длины их соответствующих дуг должны быть равны и следует положить

$$l_1 = l.$$

Так как параллели есть ортогональные траектории меридианов, а угол сохраняется, то параллели должны соответствовать.

Приравняв длины дуг параллелей, получим

$$\eta^2(l) d\varphi^2 = \eta_1^2(l) d\varphi_1^2.$$

Это равенство должно иметь место при всех значениях l и φ , что возможно только при условиях

$$\eta_1(l) = a\eta(l), \quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{a},$$

где

$$a = \text{const.}$$

Функция $\zeta_1(l)$ определяется из условия

$$\eta_1'^2(l) + \zeta_1'^2(l) = 1,$$

откуда

$$\zeta_1(l) = \int_{l_0}^l \sqrt{1 - a^2 \eta'^2} dl.$$

Итак,

$$r_1 = ae \left(\frac{\varphi}{a} \right) \eta(l) + k \int_{l_0}^l \sqrt{1 - a^2 \eta'^2} dl,$$

при $a = 1$ получаем исходную поверхность.

§ 116. Сопровождающий трехгранник поверхности. В ряде вопросов теории поверхностей с успехом может быть применен прямоугольный трехгранник, связанный с каждой точкой поверхности. Роль этого *сопровождающего трехгранника* аналогична роли трехгранника Френе в теории кривых.

Единичные векторы сопровождающего трехгранника выберем так, чтобы два из них n_1 и n_2 лежали в касательной плоскости, а третий n был направлен по нормали.

Если векторы сопровождающего трехгранника заданы в каждой точке поверхности, то они будут функциями криволинейных координат u и v .

Найдя частные производные этих векторов по параметрам u и v и разложив эти производные по осям трехгранника, получим две системы формул, аналогичных формулам Серре — Френе.

Не производя никаких вычислений, мы заранее можем заметить, что матрицы этих разложений будут кососимметричны, так как тройка векторов n_1 , n_2 и n нормальна (§ 35), и записать искомые разложения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} n_{1v} &= qn_2 + s_1n; & n_{1u} &= pn_2 + r_1n; \\ n_{2v} &= -qn_1 + s_2n; & n_{2u} &= -pn_1 + r_2n; \\ n_v &= -s_1n_1 - s_2n_2; & n_u &= -r_1n_1 - r_2n_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы подсчитать коэффициенты, следует сделать известные предположения о выборе направлений векторов n_1 и n_2 в касательной плоскости. Особенно удобно считать, что система криволинейных координат ортогональна и что векторы n_1 и n_2 касаются координатных линий, проходящих через соответствующую точку поверхности. Этому предположения мы и будем придерживаться во всем дальнейшем изложении.

Исходя из этого предположения, будем считать, что векторы n_1 и n_2 коллинеарны координатным векторам r_u и r_v , а линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2. \quad (2)$$

Так как абсолютные величины

$$\begin{aligned} |r_u| &= \sqrt{r_u^2} = A, \\ |r_v| &= \sqrt{r_v^2} = B, \end{aligned}$$

а n_1 и n_2 единичны, то

$$n_1 = \frac{r_u}{A}; \quad n_2 = \frac{r_v}{B}. \quad (3)$$

Найдем теперь выражения коэффициентов q и p , которые нам нужны в первую очередь¹⁾.

Умножая обе части первого из уравнений (1) на n_2 скалярно и имея в виду ортогональность его вектору нормали n , получим

$$q = +n_2 n_{1v},$$

но

$$n_{1v} = \left(\frac{r_u}{A} \right)_v = \frac{r_{uv}}{A} + \left(\frac{1}{A} \right)_v r_u,$$

¹⁾ Выражения остальных коэффициентов будут получены в § 123.

а r_u перпендикулярно n_2 , откуда

$$q = \frac{r_v r_{uv}}{AB} = \frac{1}{2AB} \frac{\partial}{\partial u} (r_v^2) = \frac{B_u}{A}.$$

Выражение для p можно написать по аналогии, приняв во внимание, что замена u на v и индекса 1 индексом 2 поставит p на место $-q$. Итак,

$$q = \frac{B_u}{A}; \quad p = -\frac{A_v}{B}. \quad (4)$$

Вводя обозначения

$$\omega = p du + q dv; \quad \omega_1 = r_1 du + s_1 dv; \quad \omega_2 = r_2 du + s_2 dv,$$

получим выражение для полных дифференциалов векторов сопровождающего трехгранника

$$\left. \begin{aligned} dn_1 &= +\omega n_2 + \omega_1 n, \\ dn_2 &= -\omega n_1 + \omega_2 n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Дифференциальную форму

$$\omega = \frac{B_u}{A} dv - \frac{A_v}{B} du \quad (6)$$

мы будем называть *коэффициентом вращения* сопровождающего трехгранника.

Заметим, что выражение коэффициента вращения зависит только от коэффициентов первой квадратичной формы и их производных.

§ 117. Дифференциал единичного касательного вектора поверхности. Предположим, что в точках некоторой линии

$$r = r(t)$$

поверхности задан единичный вектор

$$m = m(t),$$

касающийся поверхности в этих точках (рис. 125). Отнеся поверхность к ортогональной системе координат, мы можем выразить вектор m через векторы сопровождающего трехгранника, положив

$$m = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta. \quad (1)$$

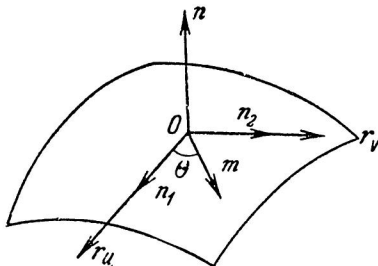


Рис. 125.

При перемещении точки вдоль кривой будем иметь

$$dm = dn_1 \cos \theta + dn_2 \sin \theta - n_1 \sin \theta d\theta + n_2 \cos \theta d\theta.$$

Принимая во внимание (5) § 116, получим

$$dm = (\omega n_2 + \omega_1 n) \cos \theta + (-\omega n_1 + \omega_2 n) \sin \theta - n_1 \sin \theta d\theta + n_2 \cos \theta d\theta = (d\theta + \omega) (-\sin \theta n_1 + \cos \theta n_2) + \mu n.$$

Вводя вектор

$$m_1 = -\sin \theta n_1 + \cos \theta n_2,$$

который, очевидно, касается поверхности и перпендикулярен вектору m , получим окончательно

$$dm = (d\theta + \omega) m_1 + \mu n. \quad (2)$$

При пользовании этой формулой следует помнить, что θ есть угол между вектором n_1 сопровождающего трехгранника и вектором m , а m_1 есть касательный вектор, перпендикулярный m , а ω — коэффициент вращения сопровождающего трехгранника.

§ 118. Геодезическая кривизна. *Геодезической кривизной линии на поверхности в некоторой ее точке называется модуль проекции вектора кривизны этой линии на плоскость, касающуюся поверхности в этой точке*

$$k_g = |\text{пр}_{\text{кас.пл}} r''|. \quad (1)$$

Чтобы получить выражение геодезической кривизны, введем на поверхности ортогональную систему криволинейных координат. Рассмотрим связанный с ней сопровождающий трехгранник и применим формулу предыдущего параграфа к единичному вектору, касающемуся данной кривой.

Вектор кривизны представится в виде

$$r'' = \frac{d\tau}{ds} = \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega}{ds} \right) \tau_1 + \lambda n, \quad (2)$$

где θ — угол, под которым данная кривая пересекает линию $v = \text{const}$, а τ_1 — нормальный вектор этой кривой, расположенный в касательной плоскости поверхности.

Проектируя вектор кривизны на касательную плоскость, получим

$$k_g = \left| \frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega}{ds} \right|. \quad (3)$$

Вид полученной формулы позволяет прийти к важному заключению. Ее правая часть содержит угол, длину дуги и коэффициенты первой квадратичной формы, т. е. только такие величины, которые не меняются при изгибании поверхности. Итак: *геодезическая кривизна линии на поверхности сохраняется при изгибании этой поверхности.*

В частности, если линия расположена на развертывающейся поверхности, то при наложении на плоскость ее геодезическая кривизна совпадает с полной кривизной, соответствующей плоской кривой, так

как вектор кривизны последней расположен в ее плоскости и совпадает со своей проекцией на эту плоскость.

В общем случае геодезическая кривизна играет ту же роль во внутренней геометрии поверхности, как полная кривизна в геометрии кривых на плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

188. Доказать, что геодезическая кривизна равна полной кривизне проекции кривой на плоскость, касающуюся поверхности в данной точке кривой.

Доказательство. Данная линия и ее проекция обе расположены на проектирующем цилиндре, причем проекция будет нормальным сечением этого цилиндра. Проектируя вектор кривизны на касательную плоскость данной поверхности, мы тем самым проектируем его на нормаль к проектирующему цилиндру. Значит, геодезическая кривизна линии на данной поверхности будет нормальной кривизной той же линии на проектирующем цилиндре, а последняя равна кривизне нормального сечения, т. е. кривизне проекции кривой на касательную плоскость данной поверхности.

189. Выразить полную кривизну линии через ее нормальную и геодезическую кривизну.

О т в е т:

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}.$$

190. Вычислить геодезическую кривизну круга радиуса r на сфере радиуса R .

О т в е т:

$$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}.$$

191. Вычислить геодезическую кривизну параллели поверхности вращения с меридианом $y = f(x)$, если Ox есть ось вращения.

О т в е т:

$$k_g = \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Радиус геодезической кривизны $\rho_g = \frac{1}{k_g}$ равен отрезку касательной к меридиану, ограниченному точкой пересечения с осью вращения.

192. Найти формулу для геодезической кривизны линий на сфере, отнесенной к географическим координатам.

О т в е т:

$$k_g = \frac{|d\theta + \sin\phi d\varphi|}{\sqrt{d\phi^2 + \cos^2\phi d\varphi^2}},$$

где θ — угол, под которым данная линия пересекает меридианы.

193. Найти геодезическую кривизну сферической локсодромы (см. упр. 141).

О т в е т:

$$k_g = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\phi}{R}.$$

194. Найти геодезическую кривизну координатных линий ортогональной системы.

О т в е т:

$$k_g = \left| \frac{A_v}{AB} \right| \quad \text{для линий } v = \text{const},$$

$$k_g = \left| \frac{B_u}{AB} \right| \quad \text{для линий } u = \text{const}.$$

§ 119. Геодезические линии. С точки зрения отмеченной аналогии между геодезической кривизной линий на поверхности и кривизной линий на плоскости, мы естественно приходим к представлению о линиях, которые во внутренней геометрии поверхности играют ту же роль, что и прямые линии на плоскости.

Линия называется геодезической, если ее геодезическая кривизна равна нулю во всех точках.

В согласии с этим определением очевидно, что если на поверхности расположена прямая линия, то она будет геодезической.

Что касается кривых линий, то для обращения в нуль их геодезической кривизны необходимо и достаточно, чтобы их вектор кривизны был направлен по нормали к поверхности.

Считая, что главная нормаль прямою неопределенна, мы можем сформулировать такое общее положение. *Для того чтобы линия была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее главные нормали совпадали с нормалью поверхности, на которой эта линия расположена.*

Чтобы получить дифференциальное уравнение геодезической линии, отнесем поверхность к ортогональной системе координат и обозначим через θ угол, под которым эта линия пересекает линии $v = \text{const}$.

В таком случае ее единичный касательный вектор может быть разложен по векторам сопровождающего трехгранника и представлен в следующем виде:

$$\tau = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta. \quad (1)$$

Пользуясь зависимостью (3) § 116 между координатными векторами и векторами сопровождающего трехгранника, получим из (1)

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{A}; \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{B}. \quad (2)$$

Так как геодезическая кривизна рассматриваемой линии равна нулю, то вследствие (3) § 118 и (6) § 116

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{A_v}{B} \frac{du}{ds} - \frac{B_u}{A} \frac{dv}{ds}. \quad (3)$$

Сравнение (2) и (3) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\cos \theta}{A}, \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\sin \theta}{B}, \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{A_v \cos \theta - B_u \sin \theta}{AB}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

интегрируя которые и определяем геодезические линии.

По основной теореме теории дифференциальных уравнений система (4) при условии дифференцируемости функций $A(u, v)$, $B(u, v)$ имеет решение

$$u = u(s); \quad v = v(s); \quad \theta = \theta(s),$$

удовлетворяющее произвольно заданным начальным условиям

$$u(s_0) = u_0; \quad v(s_0) = v_0; \quad \theta(s_0) = \theta_0.$$

Первые два определяют точку, через которую проходит геодезическая $u = u(s)$; $v = v(s)$, а последнее — ее направление в этой точке.

Таким образом: *через каждую неособую точку поверхности по любому направлению проходит геодезическая линия, и притом только одна.*

Этот результат показывает, что свобода выбора геодезической линии на произвольной поверхности такова же, как и свобода выбора прямой на плоскости.

Можно показать, что геодезические линии образуют семейство, зависящее от двух параметров.

УПРАЖНЕНИЯ

195. Доказать, что геодезическая линия является асимптотической тогда и только тогда, если она прямая.

196. Доказать, что геодезическая линия является линией кривизны тогда и только тогда, если она плоская кривая.

Доказательство. Главные нормали этой кривой, совпадая с нормальными поверхностями, должны образовывать развертывающуюся поверхность, а это возможно только у плоской кривой.

197. Доказать, что меридианы поверхности вращения есть геодезические линии.

198. Доказать, что параллель поверхности вращения будет геодезической тогда и только тогда, если касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

199. Доказать, что геодезическими на сфере будут большие круги.

200. Доказать, что геодезические цилиндрической поверхности есть линии откоса.

Доказательство. При развертывании цилиндрической поверхности на плоскость геодезические линии должны перейти в прямые, так как геодезическая кривизна сохраняется при изгибании и равна нулю для этих линий.

201. Доказать, что кривая будет геодезической линией на поверхности, которая является огибающей спрямляющих плоскостей этой кривой.

З а м е ч а н и е. Этот факт дает объяснение терминам: *спрямляющая плоскость* и *спрямляющая поверхность* (огибающая спрямляющих плоскостей), так как при разворачивании этой поверхности на плоскость кривая переходит в прямую линию.

202. Доказать, что эволюты данной кривой будут геодезическими линиями ее полярной поверхности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эволюта есть ребро возврата семейства плоскостей, касающихся данной кривой. Эти плоскости будут поэтому соприкасающимися плоскостями эволюты, а перпендикулярные им нормальные плоскости данной кривой спрямляющими плоскостями эволюты. Таким образом, полярная поверхность данной кривой будет спрямляющей поверхностью эволюты, что на основании упр. 201 и доказывает теорему.

203. *Геодезическим кручением*, соответствующим данному направлению, называется кручение геодезической линии, проходящей по этому направлению. Найти выражение геодезического кручения.

Р е ш е н и е. Вектор главной нормали геодезической линии

$$\mathbf{v} = \pm n,$$

где n — единичный нормальный вектор поверхности. Вектор бинормали

$$\beta = \tau \times \mathbf{v} = \pm \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} n \right].$$

Геодезическое кручение

$$\kappa_g = -\beta \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{(d\mathbf{r} \, dn \, n)}{ds^2}.$$

204. Доказать, что геодезическая, касающаяся главного направления, имеет точку уплощения.

У к а з а н и е: Воспользоваться формулой Родрига (см. упр. 184).

§ 120. Геодезические линии поверхности вращения. Предположим, что линейный элемент поверхности вращения приведен к изотермическому виду (5) § 82

$$ds^2 = \eta^2 (u) (du^2 + dv^2). \quad (1)$$

Уравнения (2) и (3) § 119, определяющие геодезические, принимают в таком случае вид

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{\eta}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{\eta},$$

$$d\theta = -\frac{\eta'}{\eta} dv,$$

где θ есть угол, под которым геодезические пересекают меридианы.

Из первых двух уравнений получаем

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \theta,$$

а третье приводим к виду

$$\sin \theta \, d\eta + \eta \cos \theta \, d\theta = 0,$$

откуда

$$\eta \sin \theta = h = \text{const.} \quad (2)$$

Приняв во внимание, что η есть расстояние точки поверхности от оси вращения, имеем теорему Клеро: *для того чтобы линия была геодезической поверхности вращения, необходимо и достаточно, чтобы произведение синуса угла, образуемого ею с меридианом, на расстояние ее точки от оси вращения было постоянным.*

Чтобы продолжить интегрирование, воспользуемся соотношением Клеро и получим

$$\frac{dv}{du} = \text{tg } \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{h}{\sqrt{\eta^2 - h^2}},$$

откуда

$$v = \int \frac{h du}{\sqrt{\eta^2 - h^2}}. \quad (3)$$

Чтобы получить уравнение геодезических в конечном виде, достаточно взять интеграл в правой части.

Это уравнение будет содержать постоянное h и постоянное интегрирования, так что семейство будет зависеть от двух параметров.

Заметим, что уравнения (1) — (3) характеризуют геодезические линии не только на поверхностях вращения, но и на всех поверхностях с линейным элементом, имеющим вид (1), т. е. на всех поверхностях, наложимых на поверхности вращения. Однако в общем случае η уже не будет, конечно, расстоянием от оси вращения.

§ 121. Полу геодезические координаты. *Координатная сеть называется полу геодезической, если она состоит из однопараметрического семейства геодезических и семейства их ортогональных траекторий.*

Мы уже неоднократно встречались с частными случаями таких сетей, так как координатные линии прямоугольной декартовой, полярной системы на плоскости и линии меридианов и параллелей будут, очевидно, образовывать полу геодезические сети.

Теперь установим вид линейного элемента произвольной поверхности в полу геодезической системе координат.

Обозначим через v параметр геодезического семейства, а через u параметр семейства ортогональных траекторий.

Параметр v мы оставим произвольным, а параметр u будем считать совпадающим с длиной дуги одной из геодезических, хотя бы той, которая отвечает значению параметра $v = 0$. Эту геодезическую мы будем называть начальной.

Примем теперь во внимание, что условие

$$d\theta = \frac{A_v}{B} du - \frac{B_u}{A} dv,$$

характеризующее геодезические линии, должно выполняться для линий $v = \text{const}$, т. е. при $\theta = 0$ и при $dv = 0$, откуда следует

$$A_v = 0. \quad (*)$$

Таким образом, коэффициент A оказывается не зависящим от параметра v и его значение не меняется при переходе с одной геодезической на другую.

Но на начальной геодезической линии $v = 0$

$$ds^2 = A^2 du^2,$$

а u по условию совпадает с длиной дуги этой траектории, вследствие чего в последнем равенстве $u = s$, что возможно только при $A = 1$.

Однако это равенство, справедливое в точках начальной геодезической, остается справедливым и в точках других геодезических координатного семейства, так как вследствие (*) значение A не может изменяться при переходе в эти точки. Таким образом, во всей области существования полугеодезической сети, линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + B^2 dv^2. \quad (1)$$

Полученный результат можно связать с простым геометрическим фактом. Из вида линейного элемента (1) следует, что для любой геодезической линии $v = \text{const}$

$$ds = du,$$

так что параметр u совпадает с натуральным параметром любой из этих линий. Длина дуги каждой из этих геодезических, заключенная между двумя ортогональными траекториями

$$s = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1,$$

не зависит от того, для какой геодезической она вычисляется.

Итак: две ортогональные траектории семейства геодезических линий отсекают на различных линиях этого семейства дуги равной длины.

Нам известно, что расстояние между точками ортогональных траекторий семейства прямых постоянно; очевидно, что эту теорему можно рассматривать как частный случай, только что доказанной, так как прямые линии являются геодезическими на образованной ими линейчатой поверхности.

УПРАЖНЕНИЕ

205. Доказать, что если на поверхности существует изогональная геодезическая сеть, то поверхность наложима на плоскость.

Доказательство. Приняв одно из геодезических семейств за координатное, отнесем поверхность к полугеодезической системе координат. Так как

линейный элемент примет вид (1), то для второго геодезического семейства будем иметь

$$d\theta + \frac{B_u}{A} dv = 0.$$

Но по условию $\theta = \text{const}$, откуда $B_u = 0$ и

$$B = f(v),$$

есть функция только v . Если мы введем новые параметры, положив

$$x = u, \quad y = \int f(v) dv,$$

то линейный элемент поверхности примет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

и совпадает с линейным элементом плоскости.

§ 122. Геодезическая линия как кратчайшая. Проведем сравнение между длиной дуги геодезической линии и других линий поверхности. Для этого предположим, что геодезическая линия соединяет две точки A и B поверхности. Включим эту линию в однопараметрическое семейство геодезических линий и построим полугеодезическую систему координат, приняв эти линии за координатные.

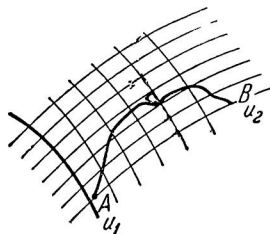


Рис. 126.

Наконец, проведем через те же точки A , B другие, негеодезические кривые так, чтобы они проходили в достаточной близости от геодезической (рис. 126).

Под достаточной близостью будем понимать следующее: мы будем предполагать, что всякая ортогональная траектория, пересекающая одну из дуг AB (в том числе и геодезическую), пересекает и все остальные.

Уравнение всякой дуги AB мы можем записать в виде

$$v = v(u),$$

а длину этой дуги определить интегралом

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + B^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du,$$

где u_1 и u_2 — значения параметра, соответствующие точкам A и B .

Подынтегральная функция этого интеграла не может быть отрицательной. Отсюда нетрудно заключить, что интеграл будет иметь свое наименьшее значение для такой кривой AB , в точках которой подынтегральная функция будет иметь свое наименьшее значение.

Но подкорненное выражение будет наименьшим при

$$\frac{dv}{du} = 0,$$

т. е. при

$$v = \text{const.},$$

а это есть уравнение геодезической линии AB .

Итак: дуга геодезической линии, соединяющей две точки поверхности, меньше дуг всех других линий, соединяющих те же точки и достаточно близких к данной геодезической.

Это же свойство делает очевидным то, что геодезические линии остаются геодезическими при изгибании, что непосредственно следует и из строения дифференциальных уравнений (4) § 119, не содержащих величин, изменяющихся при изгибании.

* Условие достаточной близости, которое мы здесь не уточняем, весьма существенно. Рассмотрим, например, простой кусок поверхности

сферы, из которой вырезан по параллели небольшой круг около одного из полюсов географической сети (рис. 127). Геодезическая линия, соединяющая две диаметрально противоположные точки окружности этого круга A и B , совпадает с меридианом, проходящим через другой полюс, оставшийся на поверхности. Длина дуги AB этого меридиана, по доказанному, будет короче дуги всякой другой кривой, соединяющей те же точки A и B , если все точки этой кривой находятся в достаточной близости от точек меридиана. Однако,

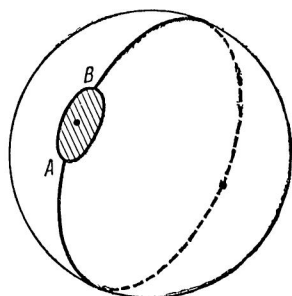


Рис. 127.

если кривая не удовлетворяет этому последнему условию и проходит не в окрестности данного меридиана, а, например, в окрестности параллели AB , то ее, очевидно, можно выбрать так, чтобы ее дуга, соединяющая точки A и B , была меньше дуги меридиана, соединяющей те же точки.

§ 123. Окончание подсчета коэффициентов сопровождающего трехгранника. Для дальнейшего нам потребуются выражения тех коэффициентов разложений производных векторов сопровождающего трехгранника, которые остались неподсчитанными в § 116. Умножая скалярно на n правые и левые части равенств

$$\begin{aligned} n_{1u} &= pn_2 + r_1 n, \\ n_{2u} &= -pn_1 + r_2 n, \end{aligned}$$

получим

$$r_1 = n_{1u} n; \quad r_2 = n_{2u} n.$$

Но согласно (3) § 116

$$n_{1u} = \frac{r_{un}}{A} + \left(\frac{1}{A}\right)_u r_u; \quad n_{2u} = \frac{r_{un}}{B} + \left(\frac{1}{B}\right)_u r_u$$

откуда следует, что

$$r_1 = \frac{D}{A}; \quad r_2 = \frac{D'}{B}. \quad (1)$$

Аналогично этому получим

$$s_1 = \frac{D'}{A}; \quad s_2 = \frac{D''}{B} \quad (2)$$

и, принимая во внимание выражение p и q , будем иметь окончательно

$$\left. \begin{aligned} n_{1u} &= -\frac{A_v}{B} n_2 + \frac{D'}{A} n; & n_{1v} &= \frac{B_u}{A} n_2 + \frac{D'}{A} n, \\ n_{2u} &= \frac{A_v}{B} n_1 + \frac{D'}{B} n; & n_{2v} &= -\frac{B_u}{A} n_1 + \frac{D''}{B} n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Таким образом, доказано, что коэффициенты этих разложений выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм и их производные.

*§ 124. Основные квадратичные формы определяют поверхность.

В теории кривых мы доказали, что форма кривой вполне определяется заданием ее натурального уравнения, т. е. зависимости кривизны и кручения от длины дуги. В теории поверхностей можно доказать аналогичную теорему, которая состоит в том, что поверхность вполне определяется заданием ее двух основных квадратичных форм, т. е. зависимости их коэффициентов от криволинейных координат. Более точная формулировка этой теоремы такова.

Если точки двух поверхностей можно привести во взаимно однозначное соответствие так, чтобы в общих для этого соответствия координатах коэффициенты основных квадратичных форм обеих поверхностей были равны в соответствующих точках, то эти поверхности отличаются самое большее положением в пространстве.

Приступая к доказательству, заметим прежде всего, что если указанное совпадение квадратичных форм имеет место в какой-либо системе координат, общей обеим поверхностям, то оно имеет место и во всякой другой такой системе.

Действительно: рассматриваемые поверхности наложимы вследствие совпадения первых форм. Но факт наложимости, очевидно, не зависит от преобразования координат, и, значит, тождественное равенство первых квадратичных форм и их коэффициентов сохранится во всякой системе координат, общей обеим поверхностям по отношению к установленному соответствию. Чтобы убедиться в равенстве вторых квадратичных форм, примем во внимание, что отношение

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad (1)$$

выражает нормальную кривизну поверхности в соответствующем направлении. Но если квадратичные формы совпадают, то, очевидно, совпадают

и нормальные кривизны обеих поверхностей в соответствующих точках и в соответствующих направлениях. Однако это равенство тоже не может нарушиться от преобразования координат, а отсюда следует, что в любой системе, общей обеим поверхностям, равны числители отношений (1), т. е. вторые квадратичные формы (знаменатели равны в силу наложимости).

Пользуясь доказанным произволом в выборе общей системы координат, допустим, что координатные линии ортогональны (эта ортогональность будет иметь место для обеих поверхностей, так как они наложимы), и свяжем с каждой из поверхностей сопровождающий трехгранник. Рассмотрим на наших поверхностях две соответствующие линии и сопровождающие трехгранники вдоль них. Если уравнение этих линий на обеих поверхностях одно и то же, то векторы сопровождающих трехгранников будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= \frac{\omega}{dt} n_2 + \frac{\omega_1}{dt} n, \\ \frac{dn_2}{dt} &= -\frac{\omega}{dt} n_1 + \frac{\omega_2}{dt} n, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{\omega_1}{dt} n_1 - \frac{\omega_2}{dt} n_2,\end{aligned}$$

причем вследствие совпадения основных форм коэффициенты правых частей этой системы будут одинаковы для обеих соответствующих кривых. Основываясь на приведенной в § 52 теореме о дифференциальных уравнениях, можем утверждать:

Если сопровождающие трехгранники совпадут в двух соответствующих точках наших поверхностей, то они совпадают и в любых соответствующих точках соответствующих кривых, проходящих через данные точки.

Однако, если векторы n_1 и n_2 , построенные в соответствующих точках рассматриваемых кривых, совпадают, то то же самое имеет место и для единичных касательных векторов этих кривых, которые можно представить в виде

$$\tau = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi,$$

где φ — угол между рассматриваемой кривой и координатными линиями (на обеих поверхностях эти углы одинаковы в силу наложимости).

Так как, с другой стороны, в силу этой же наложимости длины соответствующих дуг этих кривых равны между собой, то радиус-вектор точки каждой из них выражается одним и тем же интегралом

$$r = \int_{s_0}^s \tau ds.$$

Теперь очевидно, что при совмещении пары соответствующих точек (при $s = s_0$) и соответствующие кривые совместятся.

Итак: *если сопровождающие трехгранники пары соответствующих точек совпадают, то совпадают и соответствующие кривые, проходящие через эти точки.*

Выберем теперь на обеих поверхностях с совпавшими квадратичными формами пару соответствующих точек A_1 и A_2 и проведем через эти точки семейства соответствующих кривых так, чтобы через каждую точку каждой поверхности проходила одна кривая этих семейств.

Возьмем теперь одну из поверхностей и переместим ее в пространстве так, чтобы точка A_2 совпала с точкой A_1 и чтобы при этом совпали и сопровождающие трехгранники точек A_1 и A_2 . После этого по доказанному совпадут и все соответствующие точки кривых построенных нами семейств, т. е. обе поверхности совместятся всеми своими точками. Возможность же такого совмещения и является содержанием теоремы, которую мы хотели доказать.

Доказанная теорема позволяет нам проникнуть глубже в механизм изгибания поверхности.

Изгибание есть такая деформация, при которой сохраняется первая квадратичная форма. Если бы при этом сохранялась и вторая квадратичная форма, то мы имели бы дело с простым перемещением. Итак: *если поверхность изгибается, то первая квадратичная форма остается неизменной, а вторая квадратичная форма изменяется.*

§ 125. Теорема Гаусса. Формулы (3) § 92 выражают полную и среднюю кривизны поверхности через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Это может заставить нас предполагать, что они изменяются при изгибании. Что касается средней кривизны, то для нее это предположение будет справедливым. Например, при наложении развертывающейся поверхности на плоскость средняя кривизна, первоначально отличная от нуля, обращается в нуль. Иначе обстоит дело с полной кривизной, так как ее можно выразить через коэффициенты одной первой квадратичной формы. Чтобы получить это выражение, предположим, что поверхность отнесена к ортогональным криволинейным координатам, и рассмотрим ее сопровождающий трехгранник.

Для этого трехгранника будем иметь

$$\begin{aligned} n_{1u} &= pn_2 + \frac{D}{A} n; & n_{1v} &= qn_2 + \frac{D'}{A} n, \\ n_{2u} &= -pn_1 + \frac{D'}{B} n; & n_{2v} &= -qn_1 + \frac{D''}{B} n. \end{aligned}$$

Составим следующую комбинацию скалярных произведений

$$n_{1u}n_{2v} - n_{2u}n_{1v}.$$

Принимая во внимание состав правых частей и взаимную ортогональность векторов трехгранника, получим

$$n_{1u}n_{2v} - n_{2u}n_{1v} = \frac{DD'' - D'^2}{AB} = ABK,$$

с другой стороны,

$$n_{1u}n_{2v} - n_{2u}n_{1v} = \frac{\partial}{\partial v}(n_{1u}n_2) - \frac{\partial}{\partial u}(n_{1v}n_2) = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u},$$

но

$$p = -\frac{A_v}{B}, \quad q = \frac{B_u}{A},$$

откуда

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{B_u}{A} \right)_v + \left(\frac{A_v}{B} \right)_u \right]. \quad (1)$$

Правая часть полученного выражения зависит только от коэффициентов первой квадратичной формы и их производных. Отсюда и вытекает так называемая теорема Гаусса:

Полная кривизна поверхности остается неизменной при изгибании.

Теорема Гаусса имеет весьма большое значение в теории изгибания, давая необходимый признак наложимости. Поверхности не могут быть наложены друг на друга, если между их точками нельзя установить соответствие так, чтобы полные кривизны были равны в соответствующих точках. Например: ясно, что поверхность, состоящая из гиперболических точек, не может быть наложена на поверхности, состоящие из эллиптических или параболических точек.

В частности, отсюда следует, что *только развертывающиеся поверхности наложимы на плоскость*, так как необходимое для этого равенство нулю полной кривизны характеризует развертывающиеся поверхности.

Кроме того, теорема Гаусса показывает, что вторую квадратичную форму нельзя выбрать вполне произвольно, если задана первая квадратичная форма поверхности, так как ее дискриминант должен быть равен

$$DD'' - D'^2 = K(EG - F^2).$$

Форма φ_2 должна удовлетворять еще и другим условиям дифференциального вида, которых, однако, мы не будем касаться.

УПРАЖНЕНИЯ

206. Найти выражение полной кривизны поверхности, отнесенной к изотермическим координатам, в которых линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2).$$

Ответ:

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2} \right).$$

207. Найти выражение полной кривизны в полугеодезических координатах.

Ответ:

$$K = -\frac{B_{uu}}{B}.$$

208. Доказать, что полная кривизна поверхности с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 + c)^2}$$

постоянна.

Ответ: $K = 4c$.

209. Найти полную кривизну поверхности

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2.$$

Ответ: $K = -1$.

§ 126. Конформное отображение. Если между точками двух поверхностей установлено соответствие так, что угол между двумя кривыми на одной поверхности равен углу между соответствующими кривыми на другой поверхности, то соответствие называется *конформным*.

Как мы видели в § 114, наложимость дает пример конформного соответствия. При доказательстве этого мы опирались на равенство коэффициентов первых квадратичных форм обеих поверхностей, отнесенных к общей системе координат.

Однако конформность имеет место и при более общем условии. Действительно, достаточно предположить, что коэффициенты первых квадратичных форм в системе координат, общей по отношению к некоторому соответствию, были пропорциональны, чтобы показать, что такое соответствие будет конформным.

В самом деле, допустим, что

$$E_2 = \lambda^2 E_1; \quad F_2 = \lambda^2 F_1; \quad G_2 = \lambda^2 G_1, \quad (1)$$

и вычислим косинус угла между двумя линиями на второй поверхности:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\lambda^2 \{E_1 du \delta u + F_1 (du \delta v + dv \delta u) + G_1 dv \delta v\}}{\lambda \sqrt{E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2} \cdot \lambda \sqrt{E_1 \delta u^2 + 2F_1 \delta u \delta v + G_1 \delta v^2}} = \\ &= \frac{E_1 du \delta u + F_1 (du \delta v + dv \delta u) + G_1 dv \delta v}{\sqrt{E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2} \sqrt{E_1 \delta u^2 + 2F_1 \delta u \delta v + G_1 \delta v^2}}. \end{aligned}$$

Правая часть выражения, полученная после сокращения, очевидно, дает выражение косинуса угла между кривыми, соответствующими данным на первой поверхности, что и доказывает конформность соответствия.

Докажем теорему, обратную предыдущей: если две поверхности находятся в конформном соответствии, то коэффициенты их первых квадратичных форм, вычисленные в общей системе координат, соответственно пропорциональны между собой.

Для доказательства запишем условия перпендикулярности двух направлений, определяемых дифференциалами криволинейных координат du, dv и $\delta u, \delta v$. Эти условия должны выполняться одновременно на обеих поверхностях в силу конформности соответствия, так что

$$\begin{aligned} Edu \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v &= 0, \\ E_1 du \delta u + F_1 (du \delta v + dv \delta u) + G_1 dv \delta v &= 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения имеют вид системы двух однородных уравнений с коэффициентами E, F, G , и E_1, F_1, G_1 , причем всякое решение первого уравнения должно быть решением второго, что возможно только при условии пропорциональности коэффициентов.

Если линейный элемент поверхности приведен к виду

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \quad (2)$$

названному нами изотермическим (§ 82), то этим самым, очевидно, установлено конформное соответствие поверхности и плоскости, причем координаты, общие по отношению к соответствию, совпадают с прямоугольными координатами точек этой плоскости.

Так как линейный элемент всякой поверхности вращения может быть приведен к виду (2) § 82, то всякая такая поверхность отображается конформно на плоскость, причем меридианы и параллели соответствуют прямым, образующим на плоскости прямоугольную сеть.

§ 127. Стереοграфическая проекция. Конформное отображение играет особенно важную роль в картографии, основная задача которой состоит в нахождении отображений частей земной поверхности, принимаемой за сферу, на плоскость карты. Это отображение нельзя осуществить простым наложением, так как полная кривизна сферы положительна, а кривизна плоскости равна нулю. Вследствие этого широко пользуются конформным отображением. Примером такого отображения может служить так называемая стереοграфическая проекция, которой чаще всего пользуются при составлении карт полярных стран, т. е. областей земной поверхности, близких к географическим полюсам.

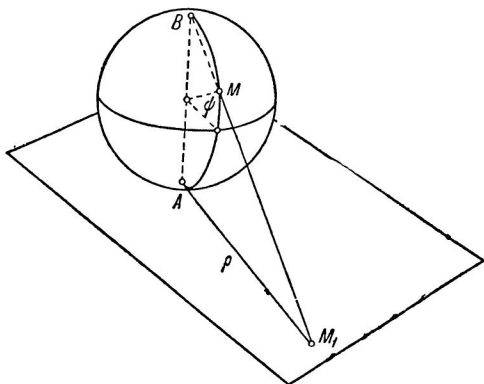


Рис. 128.

Предположим, что в Южном полюсе A земного шара построена касательная плоскость. Проектируя точки сферы из Северного полюса на эту плоскость, и получим стереοграфическое отображение сферической поверхности (рис. 128). Остается доказать, что это отображение конформно. Для этого предположим, что точка M поверхности сферы, имеющая долготу φ и широту ψ , переходит в точку M_1 плоскости. Положение этой последней точки определим полярными координатами, поместив полюс в общую точку плоскости и сферы A , а полярную ось в плоскости начального меридиана. В таком случае полярный угол

точки M_1 совпадает с долготой ψ точки M , а ее радиус-вектор ρ определится из прямоугольного треугольника ABM_1 , имеющего при вершине B угол

$$\alpha = \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{2}.$$

Таким образом,

$$\rho = 2a \operatorname{tg} \left(\frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{2} \right).$$

Линейный элемент плоскости в полярных координатах имеет вид

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 = \rho^2 \{ (d \ln \rho)^2 + d\psi^2 \}.$$

Заменяя ρ его выражением, получим

$$d \ln \rho = \frac{d\psi}{2 \sin \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{2}} = \frac{d\psi}{\sin \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{d\psi}{\cos \psi},$$

откуда

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \psi} (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\psi^2).$$

Сравнив полученное выражение линейного элемента плоскости с выражением линейного элемента сферы в географических координатах, видим, что их коэффициенты пропорциональны, что и доказывает конформность стереографического отображения.

УПРАЖНЕНИЕ

210. Доказать, что преобразование точек плоскости при помощи обратных радиусов-векторов (инверсия) конформно.

Доказательство. При инверсии точки считаются соответствующими, если их радиусы-векторы связаны соотношением

$$\rho = a \frac{r}{r^2}.$$

Дифференцируя, получим

$$d\rho = a \frac{r^2 dr - r^2 r dr}{r^4},$$

$$d\rho^2 = a^2 \frac{r^4 dr^2 - 4r^3 r dr dr + 4r^4 dr^2}{r^8},$$

но

$$r dr = r dr,$$

откуда

$$d\rho^2 = a^2 \frac{dr^2}{r^4}.$$

Линейные элементы пропорциональны, что и доказывает конформность.

§ 128. Линейный элемент поверхности постоянной гауссовой кривизны. Чтобы найти линейный элемент поверхности с постоянной гауссовой кривизной

$$K = \text{const}, \quad (1)$$

отнесем ее к системе полугеодезических координат, приняв за линии $v = \text{const}$ геодезические, пересекающие под прямым углом произвольную геодезическую Γ_0 , которую примем за линию $u = 0$. Параметр u , как обычно, будет равен длине дуги линии геодезического семейства, а за параметр v примем длину дуги линии Γ_0 .

Приведем линейный элемент к виду

$$ds^2 = du^2 + B^2 dv^2, \quad (2)$$

примем во внимание постоянство кривизны K .

Так как система координат ортогональна, то для кривизны можно воспользоваться выражением

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{B_u}{A} \right)_u + \left(\frac{A_v}{B} \right)_v \right],$$

откуда

$$K = -\frac{B_{uu}}{B}. \quad (3)$$

Общее решение уравнения

$$B_{uu} + KB = 0, \quad (4)$$

которому удовлетворяет B , известно из теории дифференциальных уравнений и имеет различный вид в зависимости от знака постоянного коэффициента K .

1. Если $K = \frac{1}{a^2} > 0$, то

$$B = f_1(v) \cos \frac{u}{a} + f_2(v) \sin \frac{u}{a}. \quad (5)$$

2. Если $K = -\frac{1}{a^2} < 0$, то

$$B = f_1(v) \text{ch} \frac{u}{a} + f_2(v) \text{sh} \frac{u}{a}. \quad (6)$$

3. Если $K = 0$, то

$$B = f_1(v) + f_2(v)u. \quad (7)$$

То, что приведенные выражения действительно удовлетворяют уравнению (4), легко проверить, в теории же дифференциальных уравнений доказывается, кроме того, что уравнение (4) не имеет никаких других решений.

Для полного определения B нужно принять еще во внимание начальные условия.

Мы считаем, что линия $u=0$ геодезическая, а параметр v совпадает с длиной ее дуги.

Вследствие этого

$$B_{u=0}^2 = r_v^2 = 1. \quad (8)$$

Кроме того, уравнения (3) § 119 геодезических линий приводят к соотношению

$$(B_u)_0 = 0. \quad (9)$$

Используя условия (8) и (9), мы приходим к заключению, что во всех трех случаях

$$f_1(v) = 1; \quad f_2(v) = 0,$$

так что линейные элементы поверхностей постоянной кривизны имеют следующий вид:

1. Если $K = \frac{1}{a^2} > 0$, то

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{a} dv^2. \quad (10)$$

2. Если $K = -\frac{1}{a^2} < 0$, то

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2. \quad (11)$$

3. Если $K = 0$, то

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \quad (12)$$

§ 129. Наложимость поверхностей постоянной кривизны. Результаты предыдущего параграфа показывают, что вид линейного элемента поверхности постоянной кривизны вполне определяется значением этой кривизны. Иными словами, если две поверхности имеют одинаковую постоянную кривизну, то их линейные элементы можно привести к одинаковому виду и, значит, они наложимы. С другой стороны, вследствие теоремы Гаусса, совпадение полных кривизн является необходимым признаком наложимости. Таким образом, *для того чтобы две поверхности постоянной гауссовой кривизны были наложимы, необходимо и достаточно, чтобы их кривизны совпадали.*

Общая, по отношению к наложимости, система координат на двух поверхностях постоянной кривизны устанавливается так, что за линии $u=0$ на каждой из этих поверхностей берутся две произвольные геодезические линии.

Кроме того, начальные точки этих линий, например точки $v=0$, тоже выбираются совершенно произвольно. Отсюда следует, что две поверхности с одинаковыми постоянными кривизнами могут быть наложены друг на друга бесчисленным множеством способов. Точнее говоря, соответствие можно установить так, что любые две точки и любые два,

исходящие из этих точек направления (например, направления геодезической $u = 0$) будут соответствовать друг другу.

На полученный результат можно смотреть еще и с другой точки зрения. Рассмотрим на поверхности постоянной кривизны точку A и некоторую ее окрестность. Отделив мысленно часть поверхности, состоящую из точек этой окрестности, мы можем ее изгибать и наложить на ту же самую поверхность, но так, чтобы при этом точка A совпала с другой, и притом вполне произвольной точкой B поверхности. В частности, мы можем вернуть точку A и на прежнее место, однако так, чтобы некоторое исходящее из нее направление заняло уже новое и совершенно произвольное направление.

Итак: *всякую фигуру, расположенную на поверхности постоянной кривизны, можно, изгибая, перемещать по этой поверхности*. Так как при этом любую точку этой фигуры можно совместить со всякой другой точкой поверхности и всякое направление, исходящее из этой точки, совместить с любым другим направлением, то можно считать, что для фигуры возможно и поступательное и вращательное перемещение. Таким образом, перемещение фигуры по поверхности постоянной кривизны происходит со столькими же степенями свободы, как и перемещение фигуры по плоскости. Свободная подвижность фигур, в указанном смысле, возможна только для поверхностей постоянной кривизны. Действительно, если окрестность точки A некоторой поверхности можно наложить на окрестность любой точки B той же поверхности так, чтобы эти точки соответствовали, то в силу теоремы Гаусса кривизна в этих точках должна иметь одинаковое значение и, следовательно, не меняется от точки к точке.

§ 130. Псевдосфера. Так как все поверхности с одинаковым значением постоянной гауссовой кривизны наложимы друг на друга, то для изучения их внутренней геометрии достаточно рассмотреть какую-нибудь одну из форм, которую эти поверхности принимают при изгибании. Так, внутренняя геометрия всякой поверхности нулевой кривизны совпадает с внутренней геометрией плоскости, а у поверхности постоянной положительной кривизны она такова же, как и на сфере.

Для изучения внутренней геометрии постоянной отрицательной кривизны удобнее всего рассмотреть *псевдосферу, т. е. поверхность вращения трактрисы вокруг ее базы*.

Свойства этой кривой, а также доказательство того, что полная кривизна псевдосферы постоянна и отрицательна, были приведены выше, но сейчас мы не будем опираться на изложенные там сведения.

В согласии с обозначениями § 82 предположим, что в плоскости $O\xi\eta$ задан меридиан, характеризующийся тем свойством, что отрезок его касательной, ограниченный точкой прикосновения M и точкой A ее пересечения с осью вращения $O\xi$, равен постоянному числу a .

Кривая, обладающая этим свойством, называется *трактрисой*, а соответствующая поверхность вращения — *псевдосферой* (рис. 129).

Обозначив угол наклона касательной AM к оси вращения через α , будем иметь для ординаты точки меридиана

$$\eta = a \sin \alpha.$$

С другой стороны, дифференциал дуги l меридиана связан с дифференциалом ординаты точки этого меридиана соотношением

$$d\eta = dl \sin \alpha,$$

откуда

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dl}{a}.$$

Линейный элемент поверхности вращения (4) § 82

$$ds^2 = dl^2 + \eta^2 d\varphi^2$$

принимает в нашем случае вид

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{d\eta}{\eta} \right)^2 + \eta^2 d\varphi^2 = a^2 \eta^2 \left[\left(\frac{d\eta}{\eta^2} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{a} \right)^2 \right].$$

Вводя новые параметры

$$x = \frac{\varphi}{a}; \quad y = \frac{1}{\eta}, \quad (1)$$

приведем ds^2 к изотермическому виду

$$ds^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (2)$$

Выражая гауссову кривизну по формуле (1) § 125, легко получим

$$K = -\frac{1}{a^2}, \quad (3)$$

так что псевдосфера действительно является поверхностью постоянной отрицательной кривизны. Так как абсолютная величина кривизны может, в зависимости от длины отрезка a , быть выбрана произвольно, то *всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны наложима на псевдосферу*.

***§ 131. Геодезические линии псевдосферы.** Вид (2) § 130 линейного элемента псевдосферы прямо показывает, что ее можно отобразить конформно на плоскость, причем параметры x и y совпадут с прямоугольными координатами точки этой плоскости, так что меридианы отобразятся на прямые, параллельные оси Oy , а параллели на прямые, параллельные оси Ox .

Выясним, в какие линии плоскости перейдут геодезические псевдосферы при таком конформном отображении.

Для этого воспользуемся теоремой Клеро (§ 120)

$$\eta \sin \theta = h = \text{const},$$

устанавливающей связь между углом θ , под которым геодезическая линия пересекает меридианы, и расстоянием η ее точки от оси вращения.

В нашем случае мы будем иметь вследствие (1) § 130

$$\frac{y}{\sin \theta} = b = \frac{1}{h}.$$

Но если геодезическая отображена на полуплоскость $y > 0$, то отношение

$$\frac{y}{\sin \theta} = N$$

равно отрезку ее нормали, ограниченному точкой B пересечения с осью Ox . Так как этот отрезок равен постоянному числу b во всех точках рассматриваемой линии, то она необходимо должна являться окружностью с центром на оси Ox (рис. 130) (см. упр. 99).

Итак: *поверхность постоянной отрицательной кривизны можно конформно отобразить на плоскость так, что при этом ее геодезические перейдут в окружности с центрами на одной прямой.*

Полученный результат позволяет сразу записать уравнение семейства геодезических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны, если линейный элемент этой поверхности приведен к виду (2) § 130.

Это уравнение, очевидно, будет

$$(x - c)^2 + y^2 = b^2. \quad (4)$$

Кроме того, геодезическими будут и линии $x = \text{const}$, так как это уравнение меридианов псевдосферы.

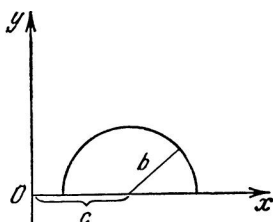


Рис. 130.

* ГЛАВА X

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ

§ 132. Векторы, принадлежащие поверхности. Направление кривой, расположенной на поверхности, определяется вектором, лежащим в ее касательной плоскости.

Будем говорить, что *вектор принадлежит поверхности в данной ее точке, если он лежит в плоскости, касающейся поверхности в этой точке.*

Векторы, принадлежащие двум наложимым поверхностям в двух соответствующих при наложении точках, будем называть соответствующими, если они имеют одинаковые длины и касаются поверхностей по соответствующим направлениям.

Про такие два вектора будем также говорить, что один из них переходит в другой при наложении поверхностей друг на друга. Все эти соглашения позволяют считать, что понятие вектора, принадлежащего поверхности, как бы включено в круг понятий внутренней геометрии поверхностей.

Если в каждой точке некоторой кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

задан вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t),$$

принадлежащий поверхности, то дифференциал этого вектора $d\mathbf{a}$ не лежит, вообще говоря, в соответствующей касательной плоскости, т. е. не принадлежит поверхности.

Будем называть *внутренним дифференциалом*¹⁾ вектора, принадлежащего поверхности, проекцию его полного дифференциала на касательную плоскость поверхности в точке, в которой задан вектор \mathbf{a} .

$$D\mathbf{a} = \text{пр } d\mathbf{a} \text{ на касательную плоскость.} \quad (1)$$

По самому определению внутренний дифференциал есть вектор, принадлежащий поверхности.

Выражение внутреннего дифференциала получим, предполагая, что на поверхности задана ортогональная система координат.

Обозначая орт вектора \mathbf{a} через α и дифференцируя соотношение $\mathbf{a} = a\alpha$, получим $d\mathbf{a} = da\alpha + a d\alpha$.

¹⁾ Он называется также *абсолютным* или *ковариантным* дифференциалом.

Воспользуемся теперь разложением дифференциала единичного вектора, принадлежащего поверхности, по векторам сопровождающего трехгранника n_1, n_2, n :

$$\alpha = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta,$$

и будем иметь

$$d\alpha = da\alpha + a(d\theta + \omega)\alpha_1 + \lambda n, \quad (2)$$

где α_1 — единичный вектор, касающийся поверхности и ортогональный α ; θ — угол между линией u и вектором α , а ω коэффициент вращения сопровождающего трехгранника.

Так как векторы α и α_1 лежат в касательной плоскости, а n ее нормальный вектор, то внутренний дифференциал вектора

$$D\alpha = da\alpha + a(d\theta + \omega)\alpha_1. \quad (3)$$

Так как абсолютная величина вектора α , угол θ и коэффициент вращения не меняются при изгибании поверхности, то внутренние дифференциалы векторов, соответствующих при изгибании, соответствуют.

§ 133. Внутреннее параллельное перенесение. Среди понятий внутренней геометрии, рассмотренных нами до сих пор, отсутствует всякий аналог понятия параллелизма. На первый взгляд представляется сомнительной и самая возможность такого понятия.

Действительно, если исходить, например, из представления о параллельных прямых как непересекающихся линиях плоскости и стараться найти непересекающиеся геодезические линии поверхности, то уже в случае сферы таких линий не существует, так как все большие круги пересекаются между собой.

Однако возможна и другая точка зрения. Будем исходить из представления о *параллельном перенесении отрезка*.

Если этот отрезок принадлежит плоскости, то при его параллельном перенесении соответствующий ему вектор α останется неизменным, так что условие параллельного перенесения состоит в равенстве нулю полного дифференциала вектора

$$d\alpha = 0. \quad (1)$$

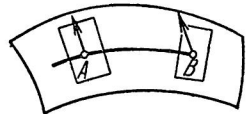


Рис. 131.

Рассмотрим теперь отрезок, соответствующий вектору α , принадлежащему произвольной поверхности в ее точке A (рис. 131).

Если мы перенесем его параллельно, в обычном смысле этого слова, в соседнюю точку B поверхности, то мы встретим там касательную плоскость, направленную иначе, чем в точке A . Наш отрезок не будет лежать в этой плоскости, а соответствующий ему вектор α перестанет принадлежать поверхности. Таким образом, равенство нулю полного дифференциала вектора, принадлежащего поверхности, несовместимо (вообще говоря) с его параллельным перенесением по поверхности.

Постараемся теперь видоизменить понятие о параллельном перенесении вектора, так чтобы его можно было приложить к вектору, остающемуся при этом перенесении принадлежащим данной поверхности.

Для этого заменим условие (1) более слабым условием равенства нулю внутреннего дифференциала вектора \mathbf{a} .

Будем говорить, что *вектор \mathbf{a} , принадлежащий поверхности в точках кривой $\mathbf{r}(t)$, переносится по поверхности параллельно вдоль этой кривой, если его внутренний дифференциал равен нулю при любом значении t*

$$D\mathbf{a} = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что из этого условия не вытекает неизменность вектора \mathbf{a} .

Его полный дифференциал может и не быть равным нулю. Он должен только быть направлен по нормали к поверхности.

Итак: *для параллельного перенесения вектора по поверхности необходимо и достаточно, чтобы его полный дифференциал был направлен по нормали этой поверхности в ее соответствующих точках*

$$d\mathbf{a} = \lambda \mathbf{n}. \quad (3)$$

Чтобы отличить параллельное перенесение вектора в обычном смысле слова от параллельного перенесения по поверхности, будем называть последнее также *внутренним перенесением*. Этот термин оправдывается еще и тем, что при изгибании поверхности условие обращения в нуль внутреннего дифференциала не нарушается, так как внутренние дифференциалы при наложении соответствуют.

Таким образом: *если вектор, принадлежащий данной поверхности, переносится по ней параллельно, то соответствующий ему вектор поверхности, наложимой на данную, тоже переносится параллельно*.

Заметим, наконец, что для векторов, принадлежащих плоскости, внутреннее параллельное перенесение совпадает с параллельным перенесением в обычном смысле этого слова, так как в этом случае полный дифференциал вектора не отличается от его внутреннего дифференциала.

УПРАЖНЕНИЯ

211. *Чебышевской сетью* называется такая сеть, которая, будучи принята за координатную, соответствует линейному элементу вида

$$ds^2 = du^2 + 2Fdu\,dv + dv^2.$$

Доказать, что координатные векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v чебышевской сети переносятся параллельно по линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответственно.

Доказательство. Координатные векторы единичны, так как $\mathbf{r}_u^2 = \mathbf{r}_v^2 = 1$. Дифференцируя эти соотношения, получим

$$\mathbf{r}_u \mathbf{r}_{uv} = 0; \quad \mathbf{r}_v \mathbf{r}_{vu} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{r}_u) = \lambda \mathbf{n}, \quad \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{r}_v) = \lambda \mathbf{n},$$

а это и есть условие (6) для параллельного перенесения векторов по координатным линиям.

212. Доказать, что сопряженная чебышевская сеть есть сеть переноса.

Доказательство. Присоединяя к условиям предыдущего упражнения условие сопряженности

$$D' = nr_{uv} = 0,$$

получим

$$r_{uv} = 0,$$

откуда

$$r = a(u) + b(v).$$

§ 134. Развертывание кривой на плоскость. Можно указать такой способ построения вектора, переносимого параллельно по поверхности, который еще больше сближает его с параллельным перенесением в обычном смысле этого слова.

Опишем развертывающуюся поверхность вдоль некоторой кривой Γ , расположенной на поверхности, т. е. построим огибающую плоскостей, касающихся поверхности в точках данной кривой.

Если в этих точках задан вектор a принадлежащий поверхности, то его, как и самую кривую, можно считать принадлежащим описанной развертывающейся поверхности.

Развернем последнюю на плоскость и предположим, что кривая Γ перейдет в плоскую линию Γ_0 ¹⁾, а вектор a в вектор a_0 , принадлежащий плоскости.

Так как касательные плоскости описанной развертывающейся поверхности совпадают с касательными плоскостями данной поверхности, то вектор a будет переноситься по ней параллельно тогда и только тогда, когда он переносится параллельно и по развертывающейся поверхности.

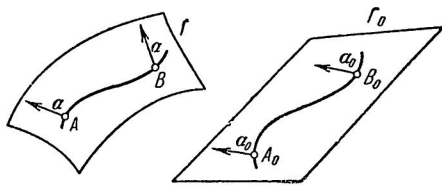


Рис. 132.

С другой стороны, при наложении на плоскость вектор, переносимый параллельно, перейдет в вектор, переносимый параллельно (рис. 132).

Сопоставляя эти факты, приходим к следующему условию параллельного перенесения: *для того, чтобы вектор переносился параллельно вдоль кривой на данной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы он переходил в вектор, переносимый параллельно по плоскости при развертывании на эту плоскость развертывающейся поверхности, описанной вдоль данной кривой.*

Развертывание на плоскость позволяет свести параллельное перенесение вектора по любой поверхности к перенесению по плоскости, т. е. к параллельному перенесению в обычном смысле этого слова.

Отсюда прежде всего следует возможность переносить принадлежащий поверхности вектор любого направления по любой линии Γ на этой поверхности.

¹⁾ Будем говорить, что кривая Γ развернута на плоскость и перешла при этом в кривую Γ_0 .

Действительно, если вектор \mathbf{a} задан в точке A кривой Γ , то для того, чтобы перенести его параллельно в некоторую точку B той же кривой, достаточно развернуть кривую Γ на плоскую кривую A_0B_0 , взять в точке A_0 вектор \mathbf{a}_0 , соответствующий вектору \mathbf{a} , и, возвращаясь на поверхность, взять в точке B вектор, соответствующий вектору \mathbf{a}_0 , перенесенному параллельно в обычном смысле этого слова в точку B_0 плоскости.

Так как длины векторов и углы сохраняются при разворачивании, то из свойств обычного параллельного перенесения следует, что длины векторов и углы между ними сохраняются при внутреннем параллельном перенесении этих векторов вдоль кривой любой поверхности.

Полезно отметить еще следующий очевидный результат: если вектор \mathbf{a} переносится параллельно вдоль некоторой кривой, а вектор \mathbf{b} , принадлежащий поверхности, в точках той же кривой имеет постоянную длину и образует постоянный угол с вектором \mathbf{a} , то он тоже переносится параллельно вдоль этой кривой.

§ 135. Геодезическая кривизна и геодезические линии. Геодезическая кривизна не меняется при изгибании, т.е. принадлежит внутренней геометрии. Однако это не следует непосредственно из ее определения, которое использует вектор кривизны, вообще говоря, меняющийся при изгибании.

При помощи понятия параллельного перенесения можно дать геодезической кривизне новое определение, не выводящее за пределы внутренней геометрии. Для вычисления геодезической кривизны кривой Γ , очевидно, безразлично, считаем ли мы кривую принадлежащей данной поверхности или описанной вдоль ее разворачивающейся поверхности. Развернув последнюю на плоскость, получим кривую Γ_0 , причем в соответствующих точках геодезическая кривизна Γ будет равна полной кривизне кривой Γ_0 , так как геодезическая кривизна кривой на плоскости и ее полная кривизна совпадают.

Но полная кривизна равна пределу отношения приращения угла, образованного касательной кривой Γ_0 с некоторым постоянным направлением, например направлением вектора \mathbf{a}_0 , к длине дуги

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Вернемся к кривой Γ и будем переносить вдоль нее параллельно вектор \mathbf{a} , соответствующий при наложении на плоскость вектору \mathbf{a}_0 . Касательная кривой образует с ним тот же угол φ , а так как длины соответствующих дуг s и s_0 равны, то из определения полной кривизны k следует определение геодезической кривизны k_g .

Таким образом: геодезической кривизной кривой называется предел отношения приращения угла, образованного касательной этой кривой и вектором, переносимым вдоль нее параллельно, к длине

дуги, соответствующей этому приращению, если она стремится к нулю

$$k_g = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (1)$$

Для геодезической линии угол между касательной и вектором, переносщимся параллельно, должен быть постоянным, так как для нее

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (2)$$

Но в таком случае единичный вектор касательной сам должен переноситься параллельно, и мы приходим к новому определению *геодезической линии* — как линии, вдоль которой переносится параллельно ее касательный вектор.

Для того чтобы переносить параллельно вдоль геодезической любой вектор постоянной длины и любого направления, очевидно, нужно только сохранять угол между этим вектором и касательной к данной геодезической линии.

УПРАЖНЕНИЕ

213. Доказать, что сеть, которая будет одновременно и геодезической и чебышевской, возможна только на поверхностях, наложимых на плоскость (декартова сеть).

Доказательство. Вектор, касающийся линии одного семейства, должен переноситься параллельно вдоль геодезической линии другого семейства, вследствие чего его угол с линией этого семейства должен оставаться неизменным. Но этот же угол сохраняется и при переносе вдоль линий другого семейства, и, значит, сеть будет изогональной, что и характеризует поверхности, наложимые на плоскость (см. упр. 205).

§ 136. Площадь сферического многоугольника. Для дальнейшего нам нужно вывести одну формулу геометрии на поверхности сферы. Замкнутая линия, образованная из отрезков больших кругов сферы с общими концами, называется сферическим многоугольником. Мы будем рассматривать только такие многоугольники, которые не имеют точек самопересечения. Простейшим сферическим многоугольником является двухугольник, т. е. фигура, образованная двумя дугами больших кругов, встречающимися в двух диаметрально противоположных точках. Двухугольник (как и всякий сферический многоугольник без точек самопересечения) делит поверхность сферы на две области, одну из которых условимся считать внутренней, а другую внешней (рис. 133). В зависимости от этого будем также различать внутренний и внешний углы между сторонами двухугольника.

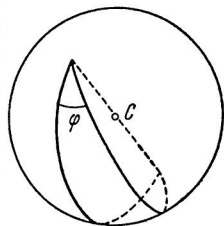


Рис. 133.

Площадь поверхности сферы, заключенную внутри двухугольника, легко подсчитать, приняв во внимание, что эта площадь так относится

к полной поверхности сферы, как внутренний угол двухугольника относится к углу 2π . Отсюда, полагая, что R радиус сферы, получим для искомой площади

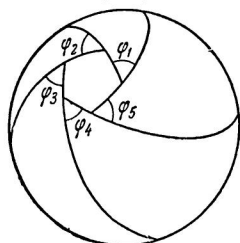


Рис. 134.

$$s_2 = 2\varphi R^2. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь выпуклый¹⁾ сферический n -угольник, предположив для простоты, что все его вершины уместятся на одной полусфере (рис. 134).

Построив для каждой из вершин диаметрально противоположную точку и соединив эти точки дугами больших кругов, получим на другой полусфере многоугольник, симметричный данному. Рассмотрим теперь n двухугольников с вершинами в диаметрально противоположных вершинах обоих многоугольников.

Внутренними углами этих двухугольников будем считать внешние углы данного многоугольника, т.е. углы между продолжением каждой из предыдущих его сторон с непосредственно за нею следующей стороной. Углы эти будем отсчитывать по направлению, противоположному движению часовой стрелки, если рассматривать это вращение с внешней стороны поверхности сферы.

Полная поверхность сферы будет покрыта:

- 1) площадью данного многоугольника;
- 2) площадью многоугольника, симметричного данному по отношению к центру;

3) площадями двухугольников с внутренними углами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, равными внешним углам многоугольника. Принимая во внимание, что площади симметричных многоугольников равны между собой, а также выражение площадей двухугольников, получим

$$2s + \sum_{i=1}^n 2\varphi_i R^2 = 4\pi R^2,$$

откуда площадь внутренней части сферического многоугольника

$$s = \left(2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i \right) R^2. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что формула остается справедливой и для невыпуклых многоугольников, если считать отрицательными углы, соответствующие вращениям по часовой стрелке.

¹⁾ Сферический многоугольник будем называть выпуклым, если все его вершины расположены по одну сторону каждой из диаметральных плоскостей сферы, соединяющей две смежные вершины.

§ 137. Параллельный обвод вектора по замкнутому сферическому контуру. До сих пор мы отмечали только те свойства внутреннего параллельного перенесения векторов, которые не отличаются от свойств параллельного перенесения в обычном смысле этого слова. Теперь отметим их наиболее существенное различие. Это различие состоит в следующем. Если переносить вектор параллельно по замкнутому контуру, в обычном смысле этого слова, то, вернувшись после такого обхода в исходную точку, вектор, очевидно, останется неизменным. Иначе обстоит дело при внутреннем параллельном обводе вектора по поверхности. Мы убедимся в этом замечательном факте прежде всего на примере сферической поверхности, а затем используем полученные результаты, рассматривая произвольную поверхность.

Итак, будем переносить параллельно вектор по контуру замкнутого выпуклого сферического многоугольника, обходя его в положительном направлении. Предположим, что в начальный момент вектор принадлежит поверхности в вершине A_1 многоугольника и направлен по продолжению стороны $A_n A_1$. Чтобы перенести его параллельно по стороне $A_1 A_2$, заметим, что она является отрезком геодезической линии, вследствие чего угол между этой стороной и переносимым вектором должен сохраняться. Отсчитав этот угол по направлению против часовой стрелки, убедимся, что в начале и в конце переноса он будет равен

$$2\pi - \varphi_1,$$

где φ_1 — внешний угол многоугольника при вершине A_1 . После переноса в точку A_2 вектор будет образовывать со стороной $A_2 A_3$ угол, равный

$$2\pi - \varphi_1 - \varphi_2,$$

и его значение сохранится таким же и в точке A_3 . Продолжая те же рассуждения, убедимся, наконец, что после переноса в точку A_n вектор будет образовывать со стороной $A_n A_1$ угол

$$\Delta\varphi = 2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Так как этот же угол сохранится и при переносе вектора из точки A_n в точку A_1 , то он и будет углом поворота вектора при его параллельном обводе по контуру замкнутого многоугольника. Подставляя значение суммы внешних углов многоугольника, получим для угла

$$\Delta\varphi = \frac{s}{R^2}, \quad (1)$$

где s — площадь внутренней области, ограниченной замкнутым контуром, а R радиус сферы.

Эта же формула сохранится и в случае параллельного обвода вектора по любому криволинейному замкнутому вектору сферической поверхности. Действительно, этот контур может быть с любой степенью точности аппроксимирован при помощи вписанного многоугольника.

При неограниченном увеличении числа сторон этого многоугольника угол $\Delta\varphi$ будет стремиться к углу поворота вектора при его обходе по криволинейному контуру, а площадь внутренней области многоугольника к площади, ограниченной криволинейным контуром.

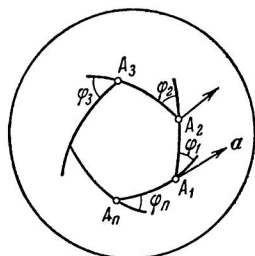


Рис. 135.

Так как площадь всегда положительна, то в силу формулы (1) угол поворота вектора, обнесенного параллельно по замкнутому контуру положительного направления, — положителен, т. е. вектор поворачивается при таком обходе против часовой стрелки (рис. 135).

Иной результат будем иметь при отрицательном обходе.

Действительно, если вектор \mathbf{a} переходит в вектор \mathbf{a}_1 при положительном обходе, то при обходе вектора \mathbf{a}_1 в отрицательном направлении он, очевидно, перейдет в вектор \mathbf{a} , т. е. повернется по часовой стрелке.

Таким образом: знак угла поворота вектора, обнесенного параллельно по замкнутому сферическому контуру, совпадает со знаком обхода этого контура.

§ 138. Параллельный обход вектора по произвольной поверхности. Переходя к произвольной поверхности, мы будем опираться на результаты, полученные при рассмотрении перенесения по сфере. Для этого заметим, что вектор \mathbf{a} , принадлежащий поверхности в точке A , может считаться также принадлежащим сфере в точке A_0 , соответствующей A при сферическом отображении, так как касательные плоскости в обеих точках параллельны.

Обратим внимание и на то, что условие (3) § 133 $d\mathbf{a} = \lambda \mathbf{n}$ будет условием его параллельного перенесения и по данной поверхности и по сфере, так как вектор \mathbf{n} является нормальным вектором обеих поверхностей в их соответствующих точках.

Итак, для того чтобы вектор переносился параллельно вдоль кривой на данной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы он переносился параллельно на сфере по кривой, соответствующей данной при отображении поверхности на эту сферу. Рассмотрим теперь на данной поверхности область Σ , выбрав ее настолько малой, чтобы было обеспечено однозначное соответствие между точками этой области и точками ее сферического отображения Σ_0 .

Будем также предполагать, что полная кривизна поверхности сохраняет свой знак во всей области ¹⁾.

¹⁾ Можно показать, что это требование тесно связано с требованием однозначности отображения. В силу непрерывности кривизна, меняя знак, обращается в нуль, а в таком случае параметрическая сеть на сфере имеет особую точку и перестает быть правильной, так как в силу формы (5) § 101 при $K = 0$

$$[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_v] = 0.$$

Так как параллельный обвод вектора по контуру Γ , ограничивающему область Σ , равносильно параллельному обводу того же вектора по контуру Γ_0 , ограничивающему область Σ_0 сферы, то абсолютная величина угла поворота при таком обводе $|\Delta\varphi| = s_0$, где s_0 есть площадь сферического отображения области.

Но эта площадь с точностью до знака равна интегральной кривизне области Σ .

Больше того, угол $\Delta\varphi$ и по знаку не отличается от этой интегральной кривизны. Действительно, если полная кривизна данной поверхности положительна, то положительному обходу на этой поверхности соответствует положительный обход на сфере, так что и $\Delta\varphi$ положителен. Наоборот, если кривизна отрицательна, то обход на сфере и угол $\Delta\varphi$ тоже отрицательны.

Таким образом: *угол поворота вектора при положительном параллельном обводе по замкнутому контуру равен интегральной кривизне части поверхности, ограниченной этим контуром*

$$\Delta\varphi = \iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (1)$$

Для области, которая не отображается однозначно на сферу или меняет знак своей кривизны, но может быть разбита на частичные области, для которых верна формула (1), она верна и для всей области в целом.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что результат обхода внешнего контура всей области можно получить, обходя последовательно каждую частичную область. Каждая внутренняя граница будет при этом проходиться дважды в противоположных направлениях (рис. 136), и перенесение вектора по этим границам не повлияет на окончательный результат.

Складывая левые и правые части равенств (1), записанных для каждой частичной области, мы и докажем ее справедливость для всей области в целом.

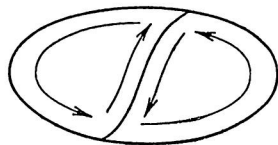


Рис. 136.

В заключение приведем новое определение полной кривизны, преимущество которого состоит в том, что оно опирается только на понятия внутренней геометрии.

Применив к области Σ теорему о среднем, будем иметь

$$\Delta\varphi = K_c \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv = K_c s,$$

где c — внутренняя точка области, а s — ее площадь.

Стягивая область к некоторой ее внутренней точке, получим

$$\lim K_c = \lim_{\Sigma \rightarrow A} \frac{\Delta\varphi}{s},$$

но при этом точка c стремится к данной точке A , поэтому

$$K_A = \lim_{r \rightarrow A} \frac{\Delta\varphi}{s}. \quad (2)$$

Итак, *полная кривизна поверхности в ее данной точке равна пределу отношения угла поворота вектора при параллельном обходе по контуру, стягивающемуся к данной точке, к площади, ограниченной этим контуром.*

Из этого определения непосредственно следует, что полная кривизна не меняется при изгибании поверхности.

§ 139. Теорема Гаусса — Бонне. Интегральная кривизна области Σ и геодезическая кривизна контура Γ , ограничивающего эту область, связаны замечательным соотношением, которое носит название формулы Гаусса — Бонне.

Чтобы вывести эту формулу, предположим, что контур Γ не имеет точек самопересечения и угловых точек и ограничивает односвязную область поверхности, т. е. такую область, которая может быть однозначно и непрерывно отображена на внутренность круга.

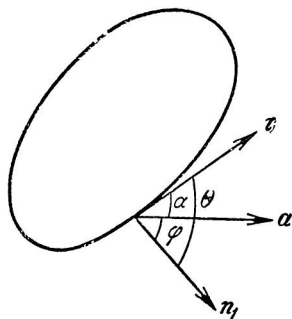


Рис. 137.

Зададим семейство линий, правильное в области Σ и на контуре Γ , и рассмотрим в точках этого контура единичный касательный вектор n_1 линий этого семейства. Кроме того, рассмотрим единичный касательный вектор τ контура и вектор a , переносимый вдоль него параллельно.

Обозначим углы между этими векторами

$$\hat{n}_1 a = \varphi; \quad \hat{a} \tau = \alpha; \quad \hat{n}_1 \tau = \theta,$$

считая их положительными, если предыдущий вектор произошел из последующего вращением, совершающимся против часовой стрелки, и отрицательными — в противоположном случае¹⁾ (рис. 137).

Эти углы будут связаны соотношением

$$\theta = \varphi + \alpha,$$

так же, как и их дифференциалы

$$d\theta = d\varphi + d\alpha.$$

После обхода контура, получим

$$\oint d\varphi = \Delta\varphi = \iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

¹⁾ Направление вращения, как и всегда, наблюдается со внешней стороны поверхности.

где $\Delta\varphi$ есть угол поворота вектора \mathbf{a} после обхода

$$\oint_{\Gamma} d\alpha = \oint_{\Gamma} \frac{d\alpha}{ds} ds = \oint_{\Gamma} k_g ds,$$

где k_g есть геодезическая кривизна, а s — длина дуги контура Γ

$$\int d\theta = 2\pi k.$$

Правая часть последней формулы выражает тот факт, что касательный вектор совершил k полных оборотов, вернувшись после обхода в свое первоначальное положение. Чтобы установить число этих оборотов, заметим, что оно, будучи целым, не может измениться при непрерывном отображении области на внутренность круга. Так как для окружности угол, на который повернется ее касательный вектор, равен 2π , то и в нашем случае следует считать, что $k=1$. Принимая во внимание соотношение между дифференциалами, получим окончательно

$$\iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \oint_{\Gamma} k_g ds = 2\pi. \quad (1)$$

Полученная формула может быть легко обобщена на тот случай, когда контур имеет конечное число угловых точек и ограничивает односвязную область.

Присутствие угловых точек не оказывает влияния на параллельное перенесение вектора \mathbf{a} и на число оборотов, совершаемых в итоге вектором $\boldsymbol{\tau}$. Однако его полный оборот складывается из главных поворотов, выражаемых на каждой дуге, ограниченной двумя угловыми точками, интегралами вида

$$\int_{\Gamma_i} k_g ds$$

и из скачкообразных изменений в этих угловых точках, равных внешним углам криволинейного многоугольника Γ (рис. 138).

Учитывая это, добавим к интегралу $\oint k_g ds$ сумму всех внешних

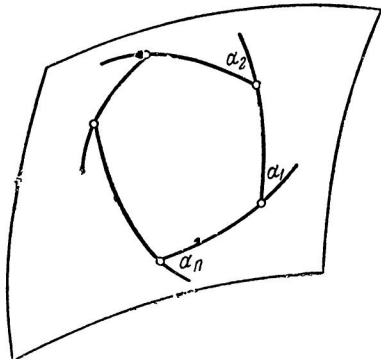


Рис. 138.

углов этого многоугольника и вместо формулы (1) получим формулу

$$\iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \int_{\Gamma} k_g ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi, \quad (2)$$

где α_i — внешние углы криволинейного многоугольника, а n — число его угловых точек.

В частности, для геодезического многоугольника вследствие $k_g = 0$ получаем соотношение

$$\iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi, \quad (3)$$

которое обобщает соотношение (2) § 136 для сферического многоугольника.

§ 140. Геодезический треугольник. Применим последнюю формулу для вычисления суммы внутренних углов геодезического треугольника. Эти углы связаны с его внешними углами, так

$$\alpha = \pi - \alpha_1; \quad \beta = \pi - \alpha_2; \quad \gamma = \pi - \alpha_3.$$

Подставляя в формулу (3) § 139, получим

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (1)$$

откуда следует, что сумма внутренних углов геодезического треугольника

- 1) меньше π на поверхностях отрицательной кривизны,
- 2) больше π на поверхностях положительной кривизны,
- 3) равна π на поверхностях нулевой кривизны.

Последнее очевидно, так как внутренняя геометрия поверхностей нулевой кривизны совпадает с геометрией плоскости.

Формула (1) для поверхностей постоянной кривизны, принимая вид

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + Ks, \quad (2)$$

показывает, что разность между суммой внутренних углов геодезического треугольника и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника и имеет тот же знак, что и кривизна поверхности (рис. 139).

В применении к псевдосфере (так для краткости мы будем называть всякую поверхность постоянной отрицательной кривизны) полученный результат позволяет установить связь между ее внутренней геометрией и геометрией Лобачевского.

Внутренняя геометрия псевдосферы настолько близка к геометрии плоскости, что для нее оказываются справедливыми целый ряд аксиом и теорем последней, если, конечно,

в этих аксиомах и теоремах заменить понятие прямой линии понятием геодезической. Так, например, для геодезической линии псевдосферы справедлива первая аксиома планиметрии, согласно которой через

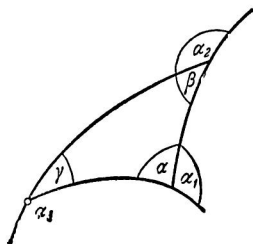


Рис. 139.

каждые две точки плоскости проходит прямая, и притом только одна. Чтобы убедиться в этом, достаточно отобразить псевдосферу на полуплоскость конформно, так, как мы это делали в § 131. При этом отображении геодезическая линия перейдет в полуокружность с центром на оси Ox , а такую полуокружность можно провести через любые две точки, и притом единственным образом.

Справедливыми остаются и положения, касающиеся равенства фигур.

Действительно, на псевдосфере возможно свободное передвижение фигур и все приемы планиметрии, сводящие доказательство равенства фигур к их наложению, остаются в силе и в псевдосферической геометрии. Проверку применимости к псевдосферической геометрии можно совершенно строго провести для всех теорем планиметрии, не зависящих от аксиомы о параллельных.

Как известно, эта аксиома равносильна утверждению о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым, а это, как мы видим, заведомо несправедливо для геодезического треугольника на псевдосфере.

Еще задолго до подробного изучения внутренней геометрии псевдосферы Лобачевский (1826) и Болиаи (1832) независимо друг от друга создали геометрию, которую теперь принято называть *неевклидовой*. Эта геометрия развивалась на основе тех же аксиом, что и обычная планиметрия, за исключением аксиомы о параллельных. Последняя заменяется другой аксиомой, равносильной утверждению о том, что сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Вследствие этого оказывается, что внутренняя геометрия псевдосферы совпадает с геометрией Лобачевского, конечно при том условии, если вместо прямых линий этой геометрии рассматривать геодезические линии псевдосферы.

Этот замечательный факт был открыт Бельтрами. Его огромное принципиальное значение состоит в том, что аксиомы неевклидовой геометрии оказались применимыми к образам евклидова пространства.

Установлением этой возможности был сделан важный шаг на пути к доказательству логической равноправности евклидовой и неевклидовой геометрий.

Внутренняя геометрия поверхностей постоянной положительной кривизны тоже соответствует неевклидовой геометрии, которая называется *римановой*, или *эллиптической*, геометрией.

§ 141. Теорема Гаусса — Бонне для многосвязной области. Рассмотрим односвязную область Σ_1 точек плоскости и внутри этой области тоже односвязные $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$, не имеющие между собой общих точек (рис. 140).

Будем говорить, что область Σ получена вычитанием областей $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$ из области Σ_1 , если она состоит из всех точек области Σ_1 , которые не принадлежат областям $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$.

Будем записывать это в виде равенства

$$\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3 - \dots - \Sigma_k.$$

кривизну многосвязной области Σ . Вторые слагаемые образуют алгебраическую сумму

$$\oint_{\Gamma_1} k_g ds - \int_{\Gamma_2} k_g ds - \dots - \int_{\Gamma_k} k_g ds.$$

Эту сумму можно считать интегралом от геодезической кривизны составного контура Γ , ограничивающего многосвязную область Σ , причем знак минус перед интегралами по $\Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ может быть получен за счет изменения направления обхода, так что каждый из участков

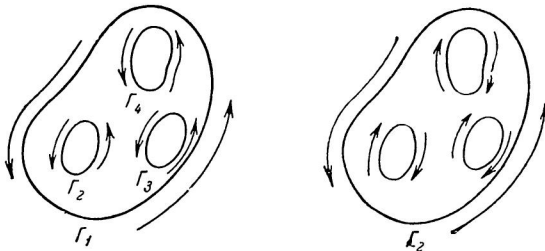


Рис. 141.

этого контура будет проходиться в том направлении, при котором наблюдатель, движущийся по внешней стороне поверхности, видит область Σ по свою левую руку (рис. 141). Установив такое соглашение относительно интеграла по составному контуру Γ , ограничивающему многосвязную область Σ , мы можем записать для этой области

$$\iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \oint_{\Gamma} k_g ds = 2\pi(2 - k). \quad (1)$$

§ 142. Интегральная кривизна замкнутой поверхности. Формы замкнутых поверхностей могут быть весьма разнообразны. Мы будем рассматривать только такие замкнутые поверхности, которые не имеют линий самопересечения. Такие поверхности могут быть получены путем

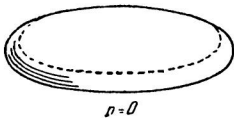


Рис. 142.

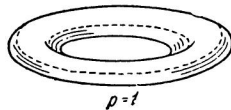


Рис. 143.

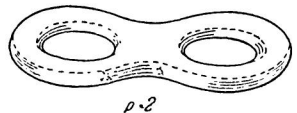


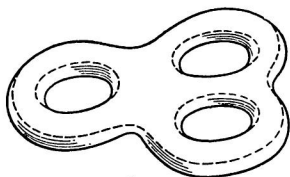
Рис. 144.

склеивания двух многосвязных областей одинаковой связности в соответствующих точках составных контуров, ограничивающих эти области.

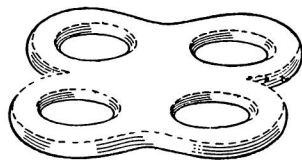
Если каждая из этих областей имеет связность $p + 1$, то образованная при их помощи замкнутая поверхность называется поверхностью рода p .

В частности, если $p=0$ (рис. 142), то поверхность может быть отображена взаимно однозначно на поверхность сферы, а при $p=1$ на поверхность тора (рис. 143).

Поверхности других родов изображены на прилагаемых чертежах (рис. 144, 145, 146).



$p=3$
Рис. 145.



$p=4$
Рис. 146.

Интегральную кривизну всей замкнутой поверхности рода p можно получить, применяя теорему Гаусса — Бонне к каждой из $p+1$ -связных областей Σ' и Σ'' , образующих эту поверхность. В соответствующих формулах

$$\iint_{\Sigma'} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \oint_{\Gamma'} k_g ds = 2\pi(1 - p),$$

$$\iint_{\Sigma''} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \oint_{\Gamma''} k_g ds = 2\pi(1 - p)$$

нужно учесть, что контуры Γ' и Γ'' совпадают между собой, но должны быть проходимы в противоположных направлениях, так как области Σ' и Σ'' лежат по разные стороны от этих контуров. Поэтому интегралы $\oint_{\Gamma'} k_g ds$ и $\oint_{\Gamma''} k_g ds$ отличаются знаком.

Складывая, получим, что интегральная кривизна всей замкнутой поверхности рода p

$$J = \iint K \sqrt{EG - F^2} du dv = 4\pi(1 - p). \quad (1)$$

В частности, для поверхности рода сферы

$$J = 4\pi, \quad (2)$$

а для поверхности рода тора

$$J = 0. \quad (3)$$