

В. Новаку

**ВВЕДЕНИЕ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ**

VALER NOVACU

Membru Corespondent al Academiei R. P. R.

**INTRODUCERE ÎN
ELECTRODINAMICĂ**

Teoriile Microscopică și Relativistă

Editura Academiei Republicii Populare Romine

В. НОВАКУ

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

Перевод с румынского

Н. М. ОСТИАНУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

Редактор
Р. Розман

Редакция литературы по физике

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящая книга написана одним из известных физиков-теоретиков Румынской Народной Республики проф. В. Новаку. В процессе редактирования перевода она была с участием автора существенным образом переработана и сейчас представляет собой фактически новое, второе издание.

Проф. В. Новаку внес много добавлений и исправлений, дал предисловие к русскому изданию и написал заново заключительную (восьмую) главу. Автор с большим вниманием отнесся и к предложениям редакции по уточнению и изменению ряда мест книги. Такое содружество в работе во многом способствовало улучшению книги в ее русском варианте. Издательство считает своим приятным долгом выразить автору искреннюю благодарность за проделанную им большую работу.

Настоящая книга, несомненно, может служить полезным дополнением к имеющейся учебной литературе по электродинамике.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В основе настоящей книги лежит часть курса электродинамики, который читается мною начиная с 1948 г. на физико-математическом факультете Бухарестского университета.

В ней излагаются основы микроскопической электродинамики, т. е. классическая электронная теория и специальная теория относительности, развиваемая на основе электродинамики движущихся тел. Рассматриваются также вопросы релятивистской микроскопической и макроскопической электродинамики.

Оригинальное (румынское) издание этой книги вышло в свет в 1955 г. В настоящем издании помимо исправления замеченных опечаток был внесен ряд изменений и дополнений, не нарушающих, впрочем, общий план книги, но улучшающих изложение курса. Поэтому это русское издание можно рассматривать как новое издание, имеющее вполне самостоятельное значение.

Автор надеется, что книга окажется полезной всем изучающим теоретическую физику и будет принята в Советском Союзе с тем же интересом, как и оригинальное издание в Румынии. Подготовка к изданию перевода книги вызвала весьма плодотворное сотрудничество автора и редакции, сделавшей интересные замечания и предложения, которые улучшили текст. Поэтому я хочу выразить свою благодарность физической редакции Издательства иностранной литературы за компетентный интерес и заботу об улучшении качества книги.

В. НОВАКУ

Март, 1963

Бухарест

АТОМИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

Введение

При феноменологическом изучении электричества¹⁾ систематически пренебрегают вопросом о строении вещества, так как одна из основных гипотез теории Максвелла состоит в непрерывности среды, которую характеризуют следующие «постоянные»: ϵ — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость и γ — проводимость. Такая точка зрения позволяет объединить *все электромагнитные явления*, которые *не зависят* от внутренней структуры вещества, в гармоническую систему, основанную на гипотезе *электромагнитного поля*, определяемого уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{i}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0, \\ \nabla \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

причем

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{i} = \gamma \mathbf{E}.$$

Границы применимости этой теории указывают, однако, на то, что феноменологическое исследование следует дополнить исследованием, проведенным с *микроскопической точки зрения* с учетом экспериментально выявленной *атомистической структуры* вещества.

Так, соотношение $n = \kappa_e^{1/2}$ (где n — показатель преломления и κ_e — относительная диэлектрическая проницаемость, $\kappa_e = \epsilon/\epsilon_0$) удовлетворяется только для электромагнитных волн, длина которых велика по сравнению с расстоянием между атомами. Экспериментальное исследование дисперсии света свидетельствует о том, что вообще показатель преломления n не постоянен. Исследование диэлектрических сред, находящихся под действием

¹⁾ Читателю рекомендуется книга И. Е. Тамма («Основы теории электричества», М., 1956). В дальнейшем она будет цитироваться как: Тамм, стр. 000. В книге используется рационализованная система единиц MKSQ (система Джорджи), в которой основными единицами являются метр (m), килограмм (kg), секунда ($сек$) и кулон ($к$), а вакуум наделяется проницаемостями $\epsilon_0 = = 8,854 \cdot 10^{-12}$ ф/м и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

переменного электромагнитного поля, показывает, что ε также нельзя считать постоянным. Из экспериментального исследования оптических и электрических свойств вещества следует, что и μ нельзя считать постоянным. А исследование магнитных свойств веществ, в особенности ферромагнетиков, приводит к такому же заключению и относительно μ . В случае переменных электромагнитных полей эти «постоянные» часто ведут себя совсем иначе, чем в случае статических полей, для которых они были определены.

С другой стороны, опыт *противоречит* теории Максвелла, в которой электричество рассматривается как *непрерывная субстанция*. Действительно, с точки зрения теории Максвелла электрический заряд не имеет реального существования, а рассматривается как вторичная величина, порожденная существованием электрического поля. Так как электрический заряд определяется уравнением

$$\nabla D = \rho,$$

то он связан с источниками силовых линий электростатического поля. Однако экспериментальные исследования привели к заключению, что *электричество имеет дискретную структуру*, так как оно состоит из «электрических атомов», называемых *электронами*, реальное существование которых следует учитывать в теории электрических явлений.

В заключение можно сказать, что уравнения Максвелла подтверждаются опытом, лишь если мы ограничиваемся электромагнитными явлениями в пустом пространстве. Параметры, при помощи которых описываются электрические и магнитные свойства веществ (такие, как спротивление, электрическая и магнитная поляризации и т. д.), подверглись подробному анализу для выяснения их значения и природы. Результатом этого анализа явилось создание микроскопической (атомистической) теории электричества, которая развилась на основе классической электронной теории благодаря трудам Г. А. Лоренца (1895 г.)

Прежде чем перейти к изложению основных принципов классической электронной теории, сделаем краткий исторический обзор важнейших открытий, приведших постепенно к концепции атомистической природы электричества и пониманию электрического строения атомов вещества.

§ 1. Экспериментальное доказательство атомистического строения электричества

Впервые связь между атомистическим строением вещества и электричества была установлена Гельмгольцем в 1881 г. при интерпретации законов электролиза, открытых Фарадеем (1833 г.). Систематически изучая электрическую проводимость электролитов,

Фарадей вывел хорошо известный закон, согласно которому *каждый грамм-атом одновалентного электролита переносит одно и то же количество электричества, называемое фарадеем (1 фарадей = = 96522 кл/моль)*. Так как один грамм-атом электролита содержит $N=6,02 \cdot 10^{23}$ одинаковых атомов, то, следовательно, *каждый ион одновалентного металла переносит и высвобождает у катода одно и то же минимальное количество электричества, равное*

$$e = \frac{F}{N} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ к.}$$

Любые заряды, переносимые при электролизе, являются *целыми кратными этого минимального заряда*.

Законы Фарадея вместе с гипотезой существования атомов привели Гельмгольца к заключению, что в случае электролиза *электричество имеет дискретную структуру* и состоит из единиц заряда, равных e .

Исследование электрических разрядов в разреженных газах привело Дж. Дж. Томсона к доказательству ионного характера проводимости газов. Путем измерения коэффициентов подвижности и диффузии ионов в газах было показано, что заряды этих ионов имеют тот же порядок величины, что и заряды ионов электролитов. И в этом случае было выявлено существование элементарных электрических зарядов.

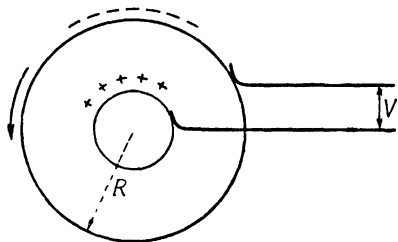
Исследование электрических разрядов в разреженных газах привело к открытию катодных лучей (1869 г.), которые, как следует из различных измерений [Дж. Дж. Томсон (1897 г.), Перрен (1905 г.)], представляют собой поток очень малых частиц, несущих отрицательный заряд, также равный элементарному заряду e . Эта элементарная частица по предложению Стони (1874 г.) была названа *электроном*¹⁾.

Прежде чем мы перейдем к изложению метода, использованного Томсоном для определения удельного заряда ионов и частиц из катодных лучей, продолжим для завершения этого краткого исторического обзора перечисление экспериментальных результатов, подтверждающих существование электронов.

Существование электронов постоянно подтверждалось впоследствии при экспериментальном изучении ряда вновь открываемых явлений: термоэлектронного эффекта (Ричардсон, 1884 г.), фотоэлектрического эффекта (Столетов, 1888 г.), β -излучения радиоактивных веществ (Гизель, 1899 г.) и т. д. Во всех этих случаях определение удельного заряда привело к значениям, которые оказались очень близкими к найденному в случае катодных лучей.

1) Название *электрон* было предложено Стони в 1891 г.—Прим. ред.

Упомянем также об экспериментальных определениях удельного заряда электронов, основанных на проявлениях инерции свободных электронов в металлах. Основная идея этих опытов состоит в том, что присутствие электронов в свободном состоянии внутри металлов может быть выявлено с помощью механических эффектов, возникающих благодаря инерции электрона, рассматриваемого как материальная частица.



Ф и г. 1.

Так, Никольс показал действие центробежной силы на электроны внутри быстро вращающегося металлического диска. А именно вследствие быстрого вращения диска электроны скопляются у его периферии, так что возникает разность потенциалов V между серединой и краем диска (фиг. 1). Вы-

ражение для разности потенциалов можно вывести, заметив, что при постоянной скорости вращения устанавливается равновесие; действие центробежной силы компенсируется возникшим электрическим полем. Будем иметь, следовательно,

$$m\omega^2 = eE(r),$$

где ω — угловая скорость; $E(r)$ — напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r от оси вращения; e — заряд и m — масса электрона. Интегрированием получим

$$V = - \int_0^R E(r) dr = - \frac{m R^2 \omega^2}{e} \cdot \frac{1}{2}.$$

Эта разность потенциалов может быть измерена с помощью гальванометра. Так, для $R=10$ см и $\omega \approx 100$ сек⁻¹ получаем $V=3 \cdot 10^{-10}$ в. Вычисленный при помощи этой формулы удельный заряд электрона подтверждает сделанное предположение.

Действие внезапного торможения металлического стержня на имеющиеся в нем свободные электроны было экспериментально изучено Толменом, а также Томсоном и Стюартом. При внезапном торможении концы стержня заряжаются электрическими зарядами противоположного знака благодаря инерции электронов. Этот эффект может быть обнаружен и измерен с помощью чувствительного баллистического гальванометра. Из формулы, которую можно вывести, получается величина e/m , хорошо согласующаяся с известным значением.

Кроме удельного заряда e/m , Томсон определил непосредственно из эксперимента и заряд e электрона, измерив средний заряд одного

иона в газе. Впоследствии Милликен (1911 г.) точно определил величину заряда электрона путем измерения заряда каждой частицы в отдельности¹⁾. Иоффе определил заряд электронов, испускаемых при фотоэлектрическом эффекте (1912 г.).

Дискретная структура электричества, иначе говоря, существование электронов (и позитронов, т. е. атомов положительного электричества, открытых позднее), ныне обнаруживается и прямыми методами, позволяющими наблюдать эффект, производимый отдельной элементарной частицей. Это достигается при помощи приборов, постоянно используемых в физических лабораториях: счетчиков Гейгера (1913 г.) и Мюллера (1928 г.) в усовершенствованных теперь формах и камеры Вильсона (1912 г.), а также при помощи фотографических пластинок со специальными эмульсиями, имеющими дифференцированную чувствительность, которые позволяют регистрировать путь, пробегаемый отдельным электроном под действием известного поля.

Таким образом, можно считать, что *дискретная структура электричества является достоверным фактом*, который подтвержден существованием электронов, т. е. отрицательных элементарных зарядов, свободных и неделимых.

§ 2. Определение удельного заряда электронов¹⁾

Если заряженные частицы, движущиеся прямолинейно, попадают в однородное электрическое или магнитное поле, направленное перпендикулярно их скорости, то такие частицы отклоняются от своего пути. Причем в электрическом поле частицы движутся так, что отклонение будет параллельно полю, а в магнитном поле — перпендикулярно как полю, так и скорости. Оба отклонения пропорциональны удельному заряду частицы, т. е. отношению заряда к массе.

Это — основная идея в проведенных Томсоном исследованиях катодных лучей, которые привели к определению удельного заряда электронов.

Для изучения действия однородного поля на движущийся электрон будем рассматривать электрон как очень маленькую сферическую частицу массы m , несущую отрицательный электрический заряд e и имеющую скорость v , которая предполагается постоянной и малой по сравнению со скоростью света.

Поведение электрона в электростатическом поле E можно легко определить, если учесть, что на него действует сила

$$F_e = eE. \quad (1.1)$$

¹⁾ Для справок см., например, [1].

Действие магнитного поля \mathbf{B} определяется, если допустить справедливость закона Лапласа

$$\mathbf{F}_m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) dv$$

(здесь \mathbf{F} — сила, действующая на проводник объемом \mathcal{V} , по которому течет ток плотностью \mathbf{i}) и учесть, что равномерно движущиеся электроны эквивалентны стационарному электрическому току проводимости. Вследствие тождественности магнитных свойств конвекционных токов и токов проводимости [Роулэнд (1875 г.) и Эйхенвальд (1903 г.)] силу этого тока можно вычислить, исходя из определения силы стационарного тока проводимости

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Здесь I — количество электрического заряда, проходящего через сечение линейного проводника за единицу времени. Так как число электронов, проходящих через площадку S за время dt со скоростью v , равно $nSvdt$, то имеем $dQ = nevSdt$, где n — число электронов в единице объема, или

$$I dt = nev S dt.$$

Это можно записать в виде

$$I dl = nevS dl = Nev,$$

где $N = nS dl$ — общее число электронов в объеме $S dl$.

Итак, для одного электрона имеем следующее векторное соотношение:

$$\frac{1}{N} I dl = ev,$$

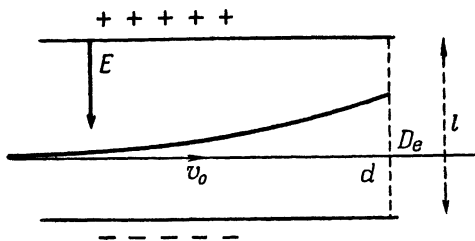
выражающее силу конвекционного тока.

Следовательно, сила, действующая на электрон, будет равна

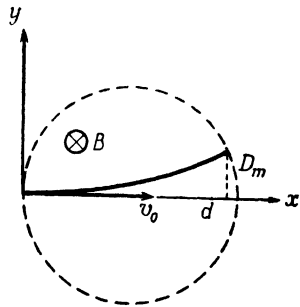
$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{N} I dl \times \mathbf{B} = ev \times \mathbf{B}. \quad (1.2)$$

Отметим, что прямым подтверждением этой формулы является эффект, открытый Холлом (1880 г.) и названный его именем. Он состоит в следующем. Если металлический проводник, через который течет ток, помещен в магнитное поле, то линии тока смещаются так, как если бы на них действовала электродвижущая сила, перпендикулярная одновременно к направлению тока и к направлению магнитного поля. То же явление наблюдается, впрочем, и в случае электролитов и разреженных газов.

Это явление противоречит классической теории Максвелла, согласно которой магнитное поле действует только на металлический проводник, через который проходит ток, а не на линии тока. Следовательно, если проводник находится в состоянии покоя, то линии тока должны были бы остаться неискаженными. Явление же, открытое Холлом, подтверждает электронную теорию, согласно которой линии тока должны быть смещены под действием магнитного поля, так как они на самом деле являются траекториями электронов.



Ф и г. 2.



Ф и г. 3.

1. При помощи формул (1.1) и (1.2) можно вычислить отклонение пучка электронов в однородном постоянном электрическом или магнитном поле. Так, в однородном поперечном электрическом поле конденсатора электроны описывают параболу (фиг. 2), определенную системой уравнений

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V}{l} t^2,$$

или уравнением

$$\frac{m}{e} v_0^2 = \frac{V}{l} \frac{x^2}{2y}, \quad (1.3)$$

где V — разность потенциалов, l — расстояние между обкладками конденсатора, $E = V/l$. Если определить экспериментальным путем x и y , то при известной скорости v_0 можно вычислить e/m . Итак, пучок электронов, прошедший путь $x = d$ в однородном электростатическом поле, отклонится на

$$D_e = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \left(\frac{d}{v_0} \right)^2. \quad (1.3')$$

2. В однородном поперечном магнитном поле электрон описывает окружность, радиус которой R определяется из равенства между центробежной силой и силой Лоренца (1.2) (фиг. 3):

$$e v_0 B = \frac{m v_0^2}{R}. \quad (1.4)$$

Уравнение круговой траектории имеет вид

$$x^2 + y^2 = 2Ry.$$

Для значений x , удовлетворяющих условию $x \ll R$, имеем

$$D_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B \frac{x^2}{v_0}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует равенство

$$\frac{m}{e} v_0 = \frac{1}{2} B \frac{x^2}{y}, \quad (1.6)$$

поэтому, если известны B , R и v_0 , можно вычислить значение e/m . К сожалению, скорость v_0 не может быть известна с достаточной точностью. Итак, пройдя путь $x=d$ в однородном магнитном поле, пучок электронов отклонится на

$$D_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B \frac{d^2}{v_0}. \quad (1.5')$$

3. Для определения удельного заряда e/m нужно, следовательно, измерить отклонения последовательно в поперечных электрическом и магнитном полях, исключая при вычислении скорость электронов (именно так сделал Дж. Дж. Томсон в 1897 г.). Находим

$$\frac{e}{m} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ к/кг.}$$

Неожиданным был тот результат, что удельный заряд катодных частиц оказался значительно больше удельного заряда самого легкого одновалентного иона электролита. В самом деле, для иона водорода

$$\frac{e}{m_{\text{H}}} = F = 96\,490 \text{ к/г} \approx 10^8 \text{ к/кг.}$$

Отсюда следует, что его удельный заряд приблизительно в 2000 раз меньше удельного заряда электронов. Предположив, что они несут одинаковые заряды, приходим к заключению, что масса электрона приблизительно в 2000 раз меньше массы атома водорода.

Заметим, что более точные результаты получаются, если подвергнуть электроны одновременному воздействию обоих полей, направленных параллельно.

4. Пусть электрон движется в однородных электрическом и магнитном полях, имеющих одно и то же направление. Примем это направление за ось Ox , а за ось Oz — направление пучка электронов. Если скорость электронов значительно меньше скорости света

($v \ll c$), то уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{eE}{m},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y = \frac{e}{m} v_z B,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = -\frac{e}{m} v_y B.$$

Полагая $v_z \approx v$ и считая, что величинами v_x и v_y можно пренебречь по сравнению с v для отклонения в момент $t = d/v$ (когда электроны попадают на фотопластинку), из первых двух уравнений при помощи интегрирования получаем выражения

$$x = \frac{eE}{m} \frac{d^2}{2v^2},$$

$$y = \frac{eB}{m} \frac{d^2}{2v}.$$

Таким образом, получаем параболы $y^2 = \pm Cx$, где $C = (eB^2 d^2)/(2mE)$, знак плюс соответствует случаю, когда электрическое поле антипараллельно магнитному. Эти параболы касаются друг друга в точке $x=y=0$, соответствующей скорости $v = \infty$.

Следовательно, электрическое и магнитное отклонения будут перпендикулярны друг другу и результирующее отклонение зависит от скорости электронов. Каждой точке фотографической пластинки или флуоресцентного экрана соответствует определенная скорость электрона. Если электронный пучок состоит из электронов с одинаковой скоростью, то на экране этот пучок попадет в одну точку. Таким образом можно провести анализ скоростей и удельных зарядов заряженных частиц (Кауфман, 1901 г.).

5. Пусть электроны движутся в однородных электрическом и магнитном полях, направленных взаимно перпендикулярно.

Выберем координатные оси так, чтобы $E = E_y$ и $B = B_z$. Для очень малых скоростей ($v \ll c$) уравнения движения имеют вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - e \frac{dy}{dt} B = 0,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + e \frac{dx}{dt} B = eE.$$

Умножив второе уравнение на j , положив $x + jy = \zeta$ и складывая оба уравнения, получим

$$\ddot{\zeta} + j\omega \dot{\zeta} = j \frac{e}{m} E,$$

где $\omega = (e/m)B$. Общий интеграл уравнения будет иметь вид

$$\zeta = Ae^{-j\omega t} + \frac{E}{B}t + C.$$

Если в начальный момент $t = 0$ мы имеем $dy/dt = 0$, то

$$\dot{\zeta}_0 = \dot{x}_0 = -j\omega A + \frac{E}{B}$$

и $\zeta_0 = A + C$; получаем, следовательно,

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{j}{\omega} \left(\dot{x}_0 - \frac{E}{B} \right) (-1 + e^{-j\omega t}) + \frac{E}{B}t.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a\varphi - b \sin \varphi, \\ y - y_0 &= b(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \omega t$, $a = (1/\omega)(E/B)$, $b = -(1/\omega)[\dot{x}_0 - (E/B)]$. Мы получили параметрическое уравнение циклоиды. Если $\dot{x}_0 = 0$ и, следовательно, $b = a$, получаем уравнение простой циклоиды.

В случае, если электрическое и магнитное поля действуют одновременно, а их направления перпендикулярны друг другу и направлению движения электронов, можно скомпенсировать оба отклонения. Таким способом осуществляется разделение пучков электронов на компоненты, состоящие из электронов с одинаковой скоростью (Бюхерер, 1909 г.; Гюйи и Лаванши, 1916 г.). Этим методом были получены очень точные определения, которые показали, что *масса электрона меняется с изменением скорости*.

6. Рассмотрим теперь движение электрона в произвольно направленных постоянных однородных электрическом и магнитном полях в случае, когда $v \ll c$. Если направление поля \mathbf{B} принять за ось Oz , а плоскость, образованную векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} , считать плоскостью yOz , то уравнением движения будет

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Его можно записать и в виде:

$$m\ddot{x} = eyB.$$

$$m\ddot{y} = eE_y - exB,$$

$$m\ddot{z} = eE_z.$$

Из третьего уравнения следует, что вдоль оси Oz заряд движется равномерно-ускоренно:

$$z = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_z t^2 + v_{0z} t.$$

Первые два уравнения можно легко проинтегрировать. Для этого умножим второе уравнение на j и сложим их. Получим

$$\ddot{\zeta} + j\omega\dot{\zeta} = j \frac{e}{m} E_y,$$

где $\omega = (e/m) B$, $\zeta = x + jy$. Интегрирование дает

$$\dot{\zeta} = ae^{-j\omega t} + \frac{E_y}{B},$$

где $a = be^{j\alpha}$ — комплексная постоянная. Из этого соотношения следует

$$\dot{x} = b \cos(\omega t - \alpha) + \frac{E_y}{B},$$

$$\dot{y} = -b \sin(\omega t - \alpha),$$

откуда видно, что скорость является периодической функцией t . Если предположить, что в момент $t=0$ скорость направлена по оси Ox , то можно положить $\alpha=0$, и тогда интегрирование дает

$$x = \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{E_y}{B} t,$$

$$y = \frac{b}{\omega} (\cos \omega t - 1).$$

Эти уравнения суть параметрическое уравнение трохоиды. В случае, когда $b = -E_y/B$ и $\varphi = \omega t$, мы имеем

$$x = \frac{E_y}{\omega B} (\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = \frac{E_y}{\omega B} (1 - \cos \varphi).$$

Следовательно, в этом случае проекция траектории на плоскость xOy является циклоидой.

Полученные формулы используются в теории магнетронов.

7. Непосредственное экспериментальное определение заряда электрона методом «уравновешенной капли», проведенное Милликемом (1909 г.), привело к значению

$$e = 1,60199 \cdot 10^{-19} \text{ к.}$$

По известному заряду электрона из величины удельного заряда была определена масса электрона

$$m = 9,1055 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9,1055 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

§ 3. Основные гипотезы теории Лоренца

Тот факт, что электричество имеет атомистическую структуру и что «атомы электричества» (которые, как оказалось впоследствии, являются настоящими материальными частицами), называемые электронами, могут высвобождаться различными способами из разных веществ, привел к гипотезе, сформулированной Резерфордом, что атомы состоят из электронов и положительно заряженного ядра. Эта гипотеза помогла объяснить образование ионов в электролитах и газах. Была поставлена, таким образом, проблема объяснить физические явления на основе существования элементарных зарядов и электромагнитных волн, порожденных этими зарядами в пустом пространстве. Это было осуществлено в ограниченных рамках классической физики Лоренцем [2, 3] (1885 г.) — создателем классической электронной теории. Ниже мы изложим эту теорию в общих чертах, учитывая и последующие достижения в области познания строения вещества. Сначала мы изложим кратко гипотезы, на основе которых пишутся уравнения электромагнитного поля электрона, и изучим свойства этих уравнений, затем рассмотрим связь, существующую между лоренцевым *микроскопическим* электронным полем и максвелловым *макроскопическим* полем.

В теории Лоренца в отличие от теории Максвелла (допускавшего существование различных сред, характеризующихся постоянными ϵ , μ и γ) допускается существование единой среды, а именно «непрерывного эфира», в котором происходят все явления, порожденные движением электронов или ионов.

Сам эфир, т. е. то, что сегодня мы понимаем под пустым пространством, играет роль диэлектрика в прямом максвелловом смысле этого слова, а тела представляют собой ассоциации движущихся положительных или отрицательных зарядов.

Концепция, что вещество состоит из движущихся заряженных частиц, не нова, так как и теории Вебера, Римана и Клаузиуса строились на ее основе. Совершенно новой, однако, является гипотеза Лоренца, что взаимодействие между заряженными частицами происходит в соответствии с концепцией Максвелла, т. е. через посредство поля, в то время как в предшествующих теориях в соответствии с концепцией Ньютона допускалось лишь мгновенное воздействие на расстоянии.

Отметим, что уравнения микроскопического электромагнитного поля электрона вытекают из соответствующим образом преобразованных уравнений Максвелла.

При осуществлении этих преобразований Лоренц исходил из следующих гипотез, сформулированных на основе экспериментальных данных:

1°. Электричество имеет атомистическую структуру. Оно состоит из неделимых элементарных зарядов e , которые можно считать микроскопическими частицами. Эти частицы были названы электронами и имеют вполне определенный удельный заряд.

2°. Уравнения Максвелла справедливы в пустом пространстве. Следовательно, допускается существование непрерывной среды (эфира), характеризующейся постоянными ϵ_0 и μ_0 , в которой распространяются электромагнитные возмущения и движутся электроны. Все электромагнитные явления должны объясняться движением электронов.

3°. В проводящих средах электроны предполагаются свободными и перемещающимися как в среде с сопротивлением. Следовательно, когда устанавливается разность потенциалов между двумя точками проводника, то электроны будут перемещаться в направлении электрической силы с постоянной скоростью, порождая электрический ток, т. е. перенос электричества. Ток проводимости, определенный в теории Максвелла соотношением $\mathbf{i} = \gamma \mathbf{E}$, заменяется конвекционным током. Следовательно, γ получает статистический смысл.

4°. В диэлектрических средах предполагается, что электроны связаны квазиупруго с положительно заряженными ядрами атомов или молекул. Поляризационные заряды, которые появляются под влиянием электрического поля, обусловлены движением этих связанных электронов под действием внешнего электрического поля. Таким образом, понятие «ток смещения» в диэлектрических средах становится конкретным, а гипотетичным в максвелловом смысле остается только «ток смещения в пустом пространстве» $\mathbf{i}_d = \dot{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$. Отсюда вытекает статистический смысл ϵ .

5°. Явление магнитной поляризации объясняется движением электронов по замкнутым орбитам (которые для простоты предполагаются круговыми) вокруг положительно заряженных ядер, находящихся внутри вещества.

Таким образом, гипотеза молекулярных токов Ампера конкретизируется. Магнитные массы, появившиеся в результате поляризации, находят свое объяснение в этих круговых конвекционных токах, магнитное поле которых тождественно полю, порожденному эквивалентным магнитным листком. Отсюда вытекает статистический смысл μ .

6°. В общем случае неидеальной среды мы сталкиваемся с двумя видами электронов: свободные электроны, которые порождают конвекционные токи, и связанные, или поляризационные, электроны,

которые порождают токи смещения и, следовательно, поляризационные заряды. Полный электрический ток обусловлен движением этих двух видов электронов, к которому следует добавить «ток смещения» Максвелла в пустом пространстве.

В согласии со сделанными гипотезами уравнения Лоренца пишутся в предположении, что справедливы уравнения типа Максвелла и что они применимы к микроскопическому электромагнитному полю движущихся электронов со следующими изменениями.

Во-первых, вместо макроскопического электромагнитного максвелловского поля, определенного векторами \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{B} , \mathbf{H} , вводится микроскопическое электромагнитное поле, определенное векторами \mathbf{e} и \mathbf{b} .

Микроскопическое электромагнитное поле связано со своим источником — движущимся электроном, поэтому следует считать, что оно быстро меняется в пространстве и времени. Так как это поле определено в точках, внешних по отношению к электрону, уравнениями Максвелла для пустого пространства, то для его описания достаточно знать два основных вектора: вектор напряженности электрического поля и вектор магнитной индукции, которые мы будем обозначать соответственно \mathbf{e} и \mathbf{b} . Очевидно, для векторов электрической индукции \mathbf{d} и напряженности магнитного поля \mathbf{h} имеем $\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}$, $\mathbf{h} = (1/\mu_0) \mathbf{b}$.

Так как, согласно концепции Лоренца, вещество, которое с макроскопической точки зрения представляет собой непрерывную среду, фактически является областью пустого пространства, в которой находится огромное количество элементарных заряженных (положительно или отрицательно) непрерывно движущихся частиц, то макроскопическое поле представляет собой усредненный в пространстве и времени результат наложения микроскопических электромагнитных полей всей совокупности этих элементарных частиц.

Во-вторых, вместо тока проводимости и тока смещения вводится конвекционный ток \mathbf{j} электронов (эквивалентный в соответствии с опытом Роуланда току проводимости) и ток смещения в эфире (пустом пространстве) $\epsilon_0 \dot{\mathbf{e}}$.

Плотность конвекционного тока равна, по определению,

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}, \quad (1.7)$$

где \mathbf{v} — скорость электрона, а q — плотность зарядов в рассматриваемой точке. Очевидно, $q \neq 0$ только внутри электрона. Она определяется соотношением

$$q = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{e}{\Delta v},$$

где предполагается, что элемент объема Δv стремится к нулю так, чтобы точка, в которой находится электрон, оставалась внутри него.

В случае протяженного электрона следует уточнить закон распределения электрических зарядов в нем, а в случае точечных электронов необходимо, вообще говоря, сделать специальные предположения относительно распределения электронов внутри конечного объема рассматриваемого вещества, чтобы узнать, каким образом плотность ρ зависит от переменных пространства и времени. Величины ρ и \mathbf{v} являются функциями пространства и времени и связаны между собой уравнением непрерывности.

Полный ток будет, следовательно, равен

$$\rho \mathbf{v} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{e}}.$$

Поэтому основные уравнения классической электронной теории имеют вид¹⁾

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{j}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\dot{\mathbf{b}},$$

и

$$\nabla \varepsilon_0 \mathbf{e} = \rho, \quad (1.9)$$

$$\nabla \mathbf{b} = 0,$$

к которым следует добавить еще выражение для плотности силы, действующей на заряд:

$$\mathbf{f}_{\text{микро}} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} = \rho (\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}). \quad (1.10)$$

Последнее уравнение постулирует выражение пондеромоторной силы, называемой силой Лоренца, которая действует на заряды в единичном объеме. Чтобы уточнить изменение скорости со временем, т. е. закон движения электронов, постулируется справедливость уравнений движения материальной точки классической механики.

Отсюда вытекает, что если в заданный начальный момент известны значения \mathbf{e} , \mathbf{b} , ρ и \mathbf{v} в некоторой области пространства, то вышеприведенные уравнения дают значения \mathbf{e} , \mathbf{b} и ρ в любой последующий момент, а значение скорости \mathbf{v} может быть выведено из уравнения движения одного (или соответственно нескольких) электрона, рассматриваемого как материальная точка массы m , на которую действует сила $\mathbf{f}_{\text{микро}}$, заданная формулой (1.10).

К этим уравнениям нужно добавить *уравнение непрерывности*

$$\nabla \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0, \quad (1.11)$$

¹⁾ В большинстве работ эти уравнения пишутся без постоянных ε_0 , μ_0 . Здесь они появляются из-за применяемой системы единиц (см. прим. на стр. 11).

сходное с аналогичным уравнением теории Максвелла, которое выражает закон сохранения количества электричества. Это уравнение легко выводится, если взять дивергенцию от обеих частей первого уравнения (1.8); получаем

$$\nabla (\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{e}}) = 0,$$

откуда, если учесть (1.9), немедленно следует уравнение (1.11).

Уравнение непрерывности выражает очевидный факт, что поток конвекционного тока, т. е. электронов, через замкнутую поверхность равен убыванию плотности электрических зарядов, т. е. электронов, в объеме, ограниченном рассматриваемой поверхностью.

1. Отметим, что в пустом пространстве имеем $\rho=0$, если предположить, что в нем нет ни одного электрона; следовательно, в пустом пространстве уравнения (1.8) и (1.9) совпадают с уравнениями Максвелла для пустого пространства ($\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $\gamma=0$).

В этом случае векторы \mathbf{e} и \mathbf{b} можно было бы отождествить с векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} теории Максвелла. В действительности же этого сделать нельзя, поскольку такое отождествление несправедливо в общем случае, когда $\rho \neq 0$. Следует различать, с одной стороны, микроскопическое поле \mathbf{e} и \mathbf{b} одного электрона или небольшого числа электронов, а с другой — макроскопическое поле \mathbf{E} и \mathbf{B} , которое определяется феноменологически для очень большого числа зарядов, содержащихся в теле конечных размеров.

2. Система уравнений Максвелла—Лоренца (1.8)—(1.10) получена из системы уравнений Максвелла надлежащим преобразованием последней на основе некоторых общих предположений. Справедливость системы не доказывается. Вытекающие из нее следствия нужно сопоставить с экспериментальными данными и выяснить, в какой мере они этими данными подтверждаются.

Так как эти уравнения относятся только к одному электрону или к небольшому числу электронов, то они не могут быть непосредственно использованы в реальных случаях, ибо здесь всегда приходится иметь дело с очень большим числом электронов. В приложениях к ним следует добавить некоторые соображения статистического характера относительно *распределения* электронов в веществе, уточнив значение плотности заряда ρ , входящей в эти уравнения.

3. Теория представляет собой оригинальный синтез концепций, касающихся элементарной заряженной частицы и электромагнитного поля, непрерывным образом распределенного в пространстве, *заполненном покоящимся гипотетическим эфиром*. Эта тесная связь между частицей и полем является основной чертой теории Лоренца. Она выражается в допущении, что в пустом пространстве пригодны как уравнения Максвелла, так и уравнения ньютоновой механики, описывающие движение элементарных частиц.

4. Следует отметить, однако, что электронная теория Лоренца чрезвычайно непоследовательна в том, что связано с самой природой электрона, которая остается совершенно неуточненной. Можно сказать даже, что электрон является чем-то посторонним в классической теории электрона. Действительно, электрон как элементарный заряд в основные уравнения (1.7)—(1.10) не входит, что значительно снижает ценность этой теории, несмотря на пользу, которую она приносит в области познания электрических и магнитных явлений.

В эти уравнения входит только плотность заряда ρ , причем предполагается непрерывное распределение электричества. Из выражения (1.10) для лоренцевой силы следует, что она действует на единичный объем, в котором может содержаться большое количество электронов; однако при помощи этой силы отнюдь нельзя объяснить существование самого электрона, которое предполагает наличие определенного электростатического равновесия электрических зарядов одинакового знака.

Тем не менее заметим, что этот недостаток можно до некоторой степени устранить, введя функцию Дирака, позволяющую учесть существенную разрывность, связанную с реальным существованием неделимых электронов. А именно если считать электроны точечными зарядами, подобно тому как принято считать в механике материальные точки, то в случае одного электрона, имеющего координаты $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, можно записать

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= e\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= ev\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}),\end{aligned}\tag{1.12}$$

где

$$\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) = \delta(x_0 - x)\delta(y_0 - y)\delta(z_0 - z)\tag{1.13}$$

есть функция Дирака, которая фактически является пределом функции с резко выраженным максимумом в одной точке и такими значениями в остальных точках, которыми можно пренебречь. Функция $\delta(x_0 - x)$ определяется следующим образом:

$$\delta(x_0 - x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x_0 = x, \\ 0 & \text{при } x_0 \neq x, \end{cases}\tag{1.14}$$

причем

$$\int \delta(x_0 - x) dx = 1.\tag{1.14'}$$

Из этого определения следует, что для произвольной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x_0 - x) dx = f(x_0).\tag{1.14''}$$

Безусловно, операция введения δ -функции не помогает решить основную задачу выяснения природы электрона и влечет за собой неудобство, что электрон нужно предполагать точечным. А именно в отличие от обычной механики в теории микроскопических полей, как следует из уравнения (1.10), ускорение электрона определяется не непосредственно положением остальных электронов или заряженных частиц, а значением микроскопического поля в окрестности рассматриваемого электрона.

Но рассматриваемый электрон также участвует в создании этого поля своим собственным полем, причем это поле является бесконечным в точке, в которой находится частица, в силу того что она предполагалась точечной. Кроме того, из уравнения (1.10) следует, что в случае, когда рассматривается полное микроскопическое поле, частица воздействует сама на себя. Это противоречит первому закону Ньютона. Чтобы устранить эту трудность, необходимо разложить полное микроскопическое поле на «собственное» и «внешнее» поля и ввести в (1.10) только последнее из них. Но без дополнительных условий собственное поле не определяется однозначно уравнениями микроскопического поля.

5. Отправляясь от уравнений движения электронов и учитывая основные уравнения теории (1.8) и (1.9), можно показать, что законы сохранения энергии и импульса формулируются так же, как и в макроскопической электродинамике.

Так, в случае системы движущихся заряженных частиц e_i ($i=1, 2, \dots, n$), имеющих соответственно скорости $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, где \mathbf{r}_i — радиус-вектор, можем записать

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = e_i [\mathbf{e}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i \times \mathbf{b}(\mathbf{r}_i)]. \quad (1.15)$$

Умножив скалярно на $\dot{\mathbf{r}}_i$ и сложив, получаем

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i e_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{e}(\mathbf{r}_i),$$

что можно представить в виде

$$\frac{dT}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{dT}{dt} = \sum_i e_i \mathbf{v}_i \mathbf{e}(\mathbf{r}_i),$$

где T — кинетическая энергия системы материальных точек. Пользуясь понятием плотности заряда ρ , суммирование можно заменить интегрированием по объему

$$\frac{dT}{dt} = \int \rho \mathbf{v} \mathbf{e} dv. \quad (1.16)$$

Так как из первого основного уравнения имеем

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} - \epsilon_0 \dot{\mathbf{e}},$$

то выражение (1.16) примет вид

$$\frac{dT}{dt} = \int \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \mathbf{e} dv - \int \epsilon_0 \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}} dv.$$

Учитывая соотношение

$$\nabla (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{b},$$

получаем

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) dv - \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{b} \dot{\mathbf{b}} dv - \epsilon_0 \int \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}} dv,$$

или

$$\frac{dT}{dt} = -\oint \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \mathbf{n} dS - \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{e}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}^2 \right) dv. \quad (1.17)$$

Предположим, что на границе S рассматриваемой области микроскопическое поле равно нулю. Это означает, что мы выбрали достаточно большую область, для того чтобы можно было полностью пренебречь действием электронов на ее границе. В этом случае соотношение (1.17) переписывается так:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{e}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}^2 \right) dv. \quad (1.18)$$

Из полученного соотношения следует, что, хотя система замкнута, механическая энергия системы не постоянна. Следовательно, для выполнения закона сохранения энергии необходимо постулировать существование *энергии поля*, локализованной в микроскопическом поле и имеющей плотность

$$W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{e}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}^2 \right) \quad (1.19)$$

Чтобы интерпретировать соотношение (1.17), справедливое и в общем случае, необходимо допустить, так же как и в макроскопическом случае, существование *потока энергии*, плотность которого определена вектором Умова—Пойнтинга микроскопического поля

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e} \times \mathbf{b}. \quad (1.20)$$

Таким образом, (1.17) можно переписать в виде

$$L = \frac{dT}{dt} = -\dot{W} - \oint \mathbf{Y} \mathbf{n} dS. \quad (1.21)$$

Следовательно, закон сохранения энергии в данном случае будет формулироваться так: выполнение механической работы системой электронов производится частично за счет электромагнитной энергии, аккумулированной в микроскопическом поле, и частично за счет переноса энергии, вызванной потоком энергии, проходящим через границу рассматриваемой области.

Чтобы вывести закон сохранения импульса, будем исходить из уравнений (1.15), которые в силу определения импульса $\mathbf{p}_i = m_i \cdot \mathbf{v}_i$ могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i e_i [\mathbf{e}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i \times \mathbf{b}(\mathbf{r}_i)],$$

или, в интегральной форме,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \mathbf{q}(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) dv, \quad (1.22)$$

где \mathbf{p} — полный импульс системы материальных точек.

Учитывая уравнения (1.8) и (1.9) микроскопического поля

$$\nabla \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{q} = \varepsilon_0 \nabla \mathbf{e}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{qv} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{e}},$$

можно переписать соотношения (1.22) следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \left[\varepsilon_0 \mathbf{e} \nabla \mathbf{e} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \nabla \mathbf{b} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{b} \right] dv.$$

С помощью равенства

$$\varepsilon_0 \mathbf{e} \times (\nabla \times \mathbf{e}) = -\varepsilon_0 \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{b}}$$

можно записать

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \left[\varepsilon_0 \mathbf{e} \nabla \mathbf{e} - \varepsilon_0 \mathbf{e} \times (\nabla \times \mathbf{e}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \nabla \mathbf{b} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \right] dv - \\ - \frac{d}{dt} \int \varepsilon_0 \mathbf{e} \times \mathbf{b} dv. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Легко проверить, что выражение, стоящее под знаком первого интеграла в (1.23), можно записать в виде дивергенции, если заметить, что, в частности,

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 [\mathbf{e} \nabla \mathbf{e} - \mathbf{e} \times (\nabla \times \mathbf{e})]_x = \\ & = \varepsilon_0 e_x \left(\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} \right) - \varepsilon_0 e_y \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) + \varepsilon_0 e_z \left(\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) = \\ & = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (e_x^2 - e_y^2 - e_z^2) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} (e_x e_y) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (e_x e_z). \end{aligned}$$

Мы получили компоненты максвеллова тензора натяжений микроскопического поля¹⁾

$$T_{ik}^{(e)} = \varepsilon_0 e_i e_k - \frac{\varepsilon_0}{2} \delta_{ik} (\mathbf{e})^2. \quad (1.24)$$

¹⁾ δ_{ik} называется символом Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Аналогично члены, содержащие магнитный вектор, приводят к компонентам тензора

$$T_{ik}^{(m)} = \frac{1}{\mu_0} b_i b_k - \frac{1}{2\mu_0} \delta_{ik} (b)^2. \quad (1.25)$$

Следовательно, выражение, стоящее под знаком интеграла, можно записать в виде дивергенции тензора

$$T_{ik} = T_{ik}^{(e)} + T_{ik}^{(m)}. \quad (1.26)$$

Отметим также, что выражение, стоящее под знаком второго интеграла в (1.23), может быть записано как вектор

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{e} \times \mathbf{b}. \quad (1.27)$$

Поэтому соотношение (1.23) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{g} dv = \int_{\mathcal{V}} \nabla T dv, \quad (1.28)$$

или

$$\frac{dp_e}{dt} + \frac{d}{dt} \int g_e dv = \oint T_{ek} n_k dS.$$

В случае, когда рассматриваемая область достаточно велика для того, чтобы на границе микроскопическое поле было пренебрежимо малым, интеграл по поверхности в выражении (1.28) обращается в нуль, и мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{g} dv = 0. \quad (1.29)$$

Отсюда следует, что закон сохранения импульса будет выполнен, только если мы постулируем вслед за Абрагамом [4], что вектор \mathbf{g} представляет собой *плотность электромагнитного импульса* микроскопического поля. Следовательно, микроскопическое поле является носителем импульса, и для того чтобы объяснить соотношение (1.28) нужно вообще допустить существование в поле потока импульса.

Учитывая, что пондеромоторные силы, действующие на систему частиц, определяются производной по времени механического импульса системы, можно записать

$$\mathbf{F}_{\text{микро}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{2} \int \left[2 \left(\varepsilon_0 e_n \mathbf{e} + \frac{1}{\mu_0} b_n \mathbf{b} \right) - n \left(\varepsilon_0 e^2 + \frac{1}{\mu_0} b^2 \right) \right] dS = \int T_{ik} n_k dS$$

здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности \mathcal{S} ; e_n и b_n — компоненты по нормали) и

$$\mathbf{F}_2 = -\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}'} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) dv = - \int_{\mathcal{V}'} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} dv = - \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{микроэлм}}}{\partial t}$$

(здесь $\mathbf{G}_{\text{микроэлм}}$ — электромагнитный импульс микроскопического поля).

Следовательно, сила $\mathbf{F}_{\text{микро}}$ разделяется на две составляющие: \mathbf{F}_1 — выражающую давление на поверхность S , порожденное полем \mathbf{e} и \mathbf{b} , и \mathbf{F}_2 — силу, действующую на объем \mathcal{V}' , которая в теории Максвелла представляет собой силу, действующую на эфир в случае пустого пространства. Если на поверхности \mathcal{S} поле $\mathbf{e} = 0$ и $\mathbf{b} = 0$, а значит $\mathbf{F}_1 = 0$, то

$$\mathbf{F}_{\text{микро}} = - \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{микроэлм}}}{\partial t}.$$

При стационарном режиме $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$. Отметим, что принцип действия и противодействия, по крайней мере в обычной для механики форме, не соблюдается в случае электрона Лоренца, так как электроны не оказывают никакого механического действия на электромагнитное поле. Однако, если ввести понятие микроскопического электромагнитного поля, данный принцип будет соблюден и в этом случае.

§ 4. Электромагнитное поле электрона, движущегося медленно и равномерно

Рассмотрим электрон, который движется равномерно с постоянной скоростью \mathbf{v} ($v \ll c$) по направлению оси Ox . Предположив, что в момент $t=0$ электрон находится в точке O , выбранной в качестве начала координатных осей (фиг. 4), вычислим электромагнитное поле, порожденное движущимся электроном в некоторой точке $P(x, y, z)$. Для этого предположим, что электрон несет с собой собственное поле — это математически выражается постоянством вектора \mathbf{e} относительно системы осей, жестко связанной с движущимся электроном. Следовательно, записав, что \mathbf{e} имеет одно и то же значение и в точке $P(x, y, z)$ в момент t и в точке $(x-vdt, y, z)$ в момент $t-dt$, получаем

$$\mathbf{e}(x, y, z, t) = \mathbf{e}(x-vdt, y, z, t-dt). \quad (1.30)$$

Разложение в ряд Тейлора дает соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0,$$

которое символически можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v_x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Следовательно, в общем случае, в предположении, что электрон движется в произвольном направлении, будем иметь символическое соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla = \\ &= -\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (1.31')$$

Таким образом, если отнести уравнения Максвелла — Лоренца (1.8), (1.9) к системе координат, жестко связанной с электроном, то они не будут зависеть от t . В самом деле, если учесть общее соотношение (1.31') и то, что \mathbf{v} — постоянный вектор, то уравнения (1.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} &= \rho \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \varepsilon_0 \mathbf{e} = \varepsilon_0 [\mathbf{v} (\nabla \mathbf{e}) - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{e}] = \varepsilon_0 \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e}), \\ \nabla \times \mathbf{e} &= (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{b} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Из первого уравнения получаем

$$\nabla \times (\mathbf{b} - \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{e}) = 0. \quad (1.33)$$

Из (1.33) \mathbf{b} определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции (которую мы обозначим через f)

$$\mathbf{b} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{e} + \nabla f = \frac{v}{c^2} \times \mathbf{e} + \nabla f. \quad (1.34)$$

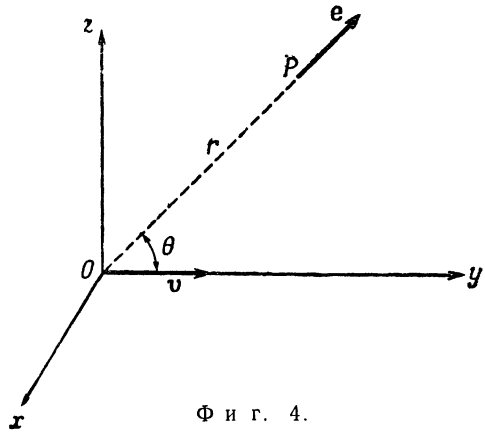
В силу (1.9) имеем

$$\nabla \mathbf{b} = \frac{1}{c^2} \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{e}) + \Delta f = 0,$$

или

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{e}). \quad (1.34')$$

Подставляя (1.34) в (1.32), легко убедиться, что все члены правой части второго уравнения (1.32) имеют порядок величины v^2/c^2 .



Ф и г. 4.

Так как $v \ll c$, то можно написать

$$\nabla \times \mathbf{e} = 0. \quad (1.35)$$

Итак, с точностью до членов порядка v^2/c^2 мы получим стационарное электрическое поле, тождественное полю одного заряда в состоянии покоя. Следовательно, в любой момент времени поле \mathbf{e} тождественно полю покоящегося электрона, расположенного в той же точке пространства, т. е.

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.36)$$

где e — заряд электрона.

Вектор магнитной индукции \mathbf{b} в точке $P(x, y, z)$ определяется из уравнения (1.34), если подставить в него выражение \mathbf{e} из (1.36), причем в силу (1.34') и (1.35) следует положить $\Delta f = 0$. Получаем, таким образом, для магнитного поля, порожденного движущимся электроном, следующее выражение:

$$\mathbf{b} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{e} = \frac{\mu_0 e v \times \mathbf{r}}{2\pi r^3}. \quad (1.37)$$

Силовые линии магнитного поля, как и в случае постоянного тока, представляют собой окружности, описанные вокруг траектории электрона. Сравнив полученное выражение (1.37) с законом Био—Савара (см. Тамм, стр. 206) и учитывая соотношение (1.7), отметим интересную аналогию. Если элемент электрической цепи dl , через которую проходит ток силы I , содержит Ndl электронов, движущихся с постоянной скоростью v , то имеем $I = Nev$. Магнитное поле, порожденное в некоторой точке на расстоянии r от этого элемента, будет равно

$$\frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2} = N dl \frac{\mu_0 e v \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

Этот результат подтверждается опытами Роуланда и Эйхенвальда.

1. Отметим, что решение (1.37) уравнения (1.33) только приближенное, так как мы предположили, что \mathbf{e} — электростатическое поле, что справедливо, лишь если мы рассматриваем мгновенное поле, поскольку из-за движения электрическое поле меняется.

2. При помощи выведенного приближенного значения поля одного электрона, движущегося медленно и равномерно, можно вычислить соответствующие электромагнитную энергию и количество электромагнитного движения.

В самом деле, благодаря тому, что электрон, рассматриваемый в какой-то момент как неподвижный, окружен электростатическим

полем \mathbf{e} , ему можно приписать энергию

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \epsilon_0 |\mathbf{e}|^2 dv, \quad (1.38)$$

где интеграл берется по всему пространству. Вычисление этого интеграла вызывает затруднение, так как выражение (1.36) для \mathbf{e} справедливо только для больших значений r . Так как поле статическое, имеем

$$\mathbf{e} = -\nabla V,$$

где $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho dv$; для больших значений r поле равно $e/4\pi\epsilon_0 r$. При малых значениях r существенно распределение заряда в электроде; следовательно, необходимо уточнить выражение плотности заряда ρ . Для простоты допустим, что распределение зарядов обладает сферической симметрией, т. е. электрон считается сплошной или полый сферой радиуса a . В последнем случае заряды распределены только по поверхности. Если учесть выражение (1.36), получим

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_a^\infty \epsilon_0 \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}. \quad (1.39)$$

Это дает приблизительное значение энергии покоя электрона с поверхностным распределением заряда. Для объемного распределения результат отличается от полученного на числовой множитель порядка единицы. Следовательно, можно сказать, что своим зарядом электрон создает электростатическое поле, энергия которого равна

$$W_0 = \alpha \frac{e^2}{a},$$

где коэффициент α зависит от закона распределения зарядов в электроде и от выбранной системы единиц.

К этой энергии покоя добавляется энергия магнитного поля, порожденного движением электрона

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}_0} |\mathbf{b}|^2 dv, \quad (1.40)$$

которую можно вычислить из соотношения (1.37)

$$W_m = \frac{\epsilon_0^2 \mu_0}{2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{e})^2 dv = \frac{\epsilon_0^2 \mu_0 v^2}{2} \int_{\mathcal{V}_0} |\mathbf{e}|^2 \sin^2(\mathbf{v}, \mathbf{r}) dv.$$

Если считать, в частности, что скорость \mathbf{v} параллельна оси Ox ($v_x = v$, $v_y = v_z = 0$), то получаем

$$W_m = \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0 v^2}{2} \frac{2}{3} \int |\mathbf{e}|^2 dv = \frac{2}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 W_0, \quad (1.41)$$

так как

$$|\mathbf{e}|^2 \sin^2(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = e_y^2 + e_z^2,$$

а в предположении сферической симметрии электрического поля имеем

$$\int_{\varphi=0} e_x^2 dv = \int_{\varphi=0} e_y^2 dv = \int_{\varphi=0} e_z^2 dv = \frac{1}{3} \int |\mathbf{e}|^2 dv. \quad (1.42)$$

Электромагнитный импульс поля, созданного движущимся электроном, вычисляется по выражению (1.27). А именно с учетом (1.37) находим, что плотность импульса задается соотношением

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{e} \times \mathbf{b} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \mathbf{e} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e}),$$

т. е.

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} [\mathbf{v} |\mathbf{e}|^2 - \mathbf{e} (\mathbf{v} \mathbf{e})]. \quad (1.43)$$

В случае, когда $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, получаем

$$g_x = \frac{\varepsilon_0 v}{c^2} (e_y^2 + e_z^2), \quad g_y = -\frac{\varepsilon_0 v}{c^2} e_y e_x, \quad g_z = -\frac{\varepsilon_0 v}{c^2} e_z e_x;$$

следовательно, полный импульс равен

$$G_x = \frac{\varepsilon_0 v}{c^2} \int (e_y^2 + e_z^2) dv, \quad G_y = G_z = 0, \quad (1.44)$$

где компоненты, нормальные к Ox , обращаются в нуль в силу симметрии.

Следовательно, если допустить сферическую симметрию распределения зарядов q электрона, то в этом приближении, согласно (1.38) и (1.42), имеем

$$G_x = \frac{4}{3} W_0 \frac{v}{c^2}. \quad (1.44')$$

Точное значение будет получено в следующем параграфе.

3. По аналогии с выражением для импульса материальной точки можем записать

$$\mathbf{G} = m^* \mathbf{v}, \quad (1.45)$$

где

$$m^* = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \quad (1.46)$$

есть приближенное значение массы электрона.

Выражение (1.41) может быть записано в виде кинетической энергии

$$W_m = \frac{1}{2} m^* v^2. \quad (1.47)$$

Обозначив через m_0 массу электрона, получаем для полной кинетической энергии электрона, движущегося медленно и равномерно, выражение

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{1}{2} (m_0 + m^*) v^2.$$

Следовательно, появление магнитного поля приводит к увеличению массы электрона, которая в предположении, что электрон представляет собой заряженную сферу радиусом a , и с учетом (1.39) и (1.46), равна

$$m = m_0 + \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} = m_0 + \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^2}{a}. \quad (1.48)$$

Член $4W_0/3c^2$ был назван Томсоном (1881 г.) «электромагнитной массой» [5]. Действительно, если бы маленькая заряженная электричеством сфера не обладала никакой инертной массой m_0 , то из вышеизложенного следовало бы, что она ведет себя таким образом, как будто ее инертная масса равна m^* , а импульс определен соотношениями (1.46) и (1.45). Эта электромагнитная масса тем больше, чем меньше радиус электрона. Следовательно, выбирая подходящее значение для радиуса a , можно было бы получить значение, равное наблюдаемой инертной массе тела, заряженного электричеством, считая таким образом всю массу электромагнитного происхождения. Эта гипотеза, предложенная Томсоном, была впоследствии развита Лоренцом, Абрагамом и Пуанкаре.

Гипотеза полевой массы, предложенная Томсоном, связана с его взглядами на природу электромагнитного поля, которому он приписывал, помимо энергии, также и механический импульс в смысле действительной величины. Он считал, что энергия и масса электрона полностью обусловлены энергией электромагнитного поля, связанного с электроном. Как мы увидим (см. § 5), экспериментальный факт зависимости массы электрона от скорости казался серьезным аргументом в пользу этой гипотезы. На самом деле в классической механике Ньютона глубоко укоренилась аксиома о неизменяемости массы, т. е. о ее независимости от условий движения, так что изменение массы со скоростью казалось подтверждением того, что у электрона нет другой инерции, кроме инерции, обусловленной его электрическим зарядом.

Специальная теория относительности показала необоснованность этого вывода, доказав существование общего соотношения между

массой любого тела (даже незаряженного) и его скоростью (см. гл. 6, § 8). Итак, тождественность законов изменения механической массы и электромагнитной массы со скоростью не позволяет сделать никаких выводов о природе массы электрона.

Но гипотеза полевой массы важна тем, что удалось эффективно показать, что часть массы электрона имеет явно электромагнитный (полевой) характер и прибавляется к механической массе.

Инертность, измеренная массой, осталась необъясненной в классической механике Ньютона. Понятие полевой массы явилось первым шагом на пути эффективного объяснения этого свойства.

Как мы увидим (см. гл. 6, § 9), в рамках классической теории поля не удалось объяснить механическое поведение электрона, так как его масса (соответственно энергия и импульс) не могли быть приведены в соответствие между собой.

Открытие этих новых свойств электрона (полевая масса, зависимость массы электрона от скорости) привело к провалу механицизма—мировоззрения, согласно которому задача физики сводится к объяснению явлений природы на основе принципов классической механики. Этот провал рассматривался большинством физиков-механистов как кризис физики, как «провал материалистической интерпретации» физики вообще, как «исчезновение материи» (они сводили материю к одному из ее свойств: инертности). В действительности же, как показал В. И. Ленин [6] еще в 1908 г., это означало более глубокое проникновение в природу материи, замену механистического мировоззрения электромагнитной концепцией, которая в свою очередь оказалась недостаточной, неполной, приближенной. Физические теории становятся все более глубокими и более совершенными, оставаясь в то же время не всеохватывающими, не абсолютными. В. И. Ленин также показал, что для решения основного вопроса философии не имеет значения, похож ли электрон или нет по своим физическим свойствам на обычное вещество, постоянна ли его масса или нет. В. И. Ленин полностью устранил эту трудность, дав определение материи как объективной реальности. Разработка этого исключительно важного тезиса сыграла огромнейшую роль в развитии естественных наук.

Сокращение размеров равномерно движущегося электрона. Мы показали выше, что медленное прямолинейное равномерное движение электрона можно интерпретировать как стационарное явление.

Определим, как и в теории Максвелла, электродинамические потенциалы V и \mathbf{A} соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}, \\ \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где V и A удовлетворяют условию Лоренца

$$\nabla A + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (1.50)$$

Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям, которые аналогичны уравнениям для макроскопических потенциалов

$$\begin{aligned} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 \rho v. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Для электрона, равномерно движущегося по направлению оси Ox ($v_x = v$), с учетом соотношения (1.31) можно записать

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left(-v \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

т. е.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (1.52)$$

Следовательно, обозначив $v/c = \beta$, можно записать уравнения (1.51) в виде

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} &= -\frac{v}{c} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \rho, \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Производя замену переменных ¹⁾

$$x_0 = \frac{x}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z, \quad (1.54)$$

замечаем, что уравнение (1.53) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_0^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_0, \quad (1.55)$$

совпадающем с уравнением Пуассона электростатики. Следовательно, явление распространения в системе координат $Ox_0y_0z_0$ приобретает статический характер.

Система координат $Ox_0y_0z_0$ перемещается вместе с электроном. Следовательно, относительно этой системы электрон находится в состоянии покоя и все электромагнитные явления носят характер статических.

По отношению к этой движущейся системе $Ox_0y_0z_0$ система $Oxyz$ считается неподвижной, и электрон относительно нее перемещается с постоянной скоростью по направлению оси Ox .

¹⁾ Эта идея предложена Дж. Дж. Томсоном и Хевисайдом (1889 г.)

Из уравнений (1.53) следует соотношение

$$\mathbf{A} = \frac{v}{c^2} V. \quad (1.56)$$

В силу инвариантности полного заряда электрона

$$\int \varrho_0(x_0 y_0 z_0) dv_0 = \int \varrho(xyz) dv,$$

и, так как

$$dv_0 = dv(1 - \beta^2)^{-1/2},$$

получаем

$$\varrho_0 = \varrho(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (1.57)$$

Таким образом, учитывая, что решением уравнения (1.55) является электростатический потенциал

$$V_0(x'_0 y'_0 z'_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho_0 dv_0}{r(x_0 y_0 z_0; x'_0 y'_0 z'_0)}$$

и возвращаясь при помощи (1.54) к исходным переменным, получаем

$$V(x' y' z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho dv}{s(xyz; x' y' z')}. \quad (1.58)$$

где

$$s = \{(x - x')^2 + (1 - \beta^2)[(y - y')^2 + (z - z')^2]\}^{1/2}. \quad (1.59)$$

Следовательно, в случае точечного электрона имеем

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s}. \quad (1.60)$$

Вычисляя при помощи соотношений (1.49) поле равномерно движущегося электрона, получаем с учетом (1.31), (1.56) и (1.60)

$$\begin{aligned} e_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} (1 - \beta^2) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x'}{s^3} (1 - \beta^2), \\ e_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y'}{s^3} (1 - \beta^2), \\ e_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z'}{s^3} (1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Как видно из фиг. 5,

$$s^2 = r^2 [\cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta] = r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta). \quad (1.62)$$

Следовательно, выражение электрического поля в векторной форме может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (1.63)$$

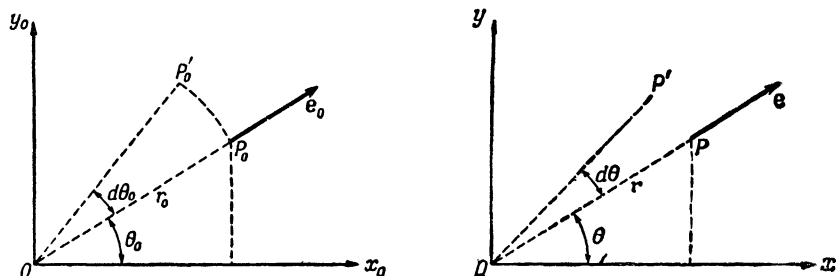
Аналогично магнитное поле имеет вид

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{s} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{v} \times \nabla \frac{1}{s},$$

или

$$\mathbf{b} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{s^3} (1 - \beta^2) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}. \quad (1.64)$$

Из соотношений (1.63) и (1.64) следует, что при малых скоростях поля сводятся к кулонову полю и к магнитному полю постоянного тока. При больших скоростях оба поля зависят от угла θ , образованного направлением движения электрона и радиус-вектором \mathbf{r} .



Ф и г. 5.

Из выражения (1.63) для электрического поля видно, что компонента электрического поля, перпендикулярная направлению движения, больше в $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ раз, а компонента по направлению движения меньше в $(1 - \beta^2)$ раз по сравнению с электростатическим полем. Следовательно, электрическое поле электрона сжимается в направлении движения. Магнитное поле также деформируется из-за быстрого движения электрона.

При очень больших скоростях, близких к скорости света, поле электрона будет все больше сжиматься в плоскости, перпендикулярной направлению движения, т. е. будет иметь вид поля плоской поперечной волны. Заметим, что движущийся равномерно электрон не излучает, т. е. его поле не теряет энергию. Это можно проверить, вычислив значение вектора Умова—Пойнтинга (1.20).

В случае, когда электрон предполагается протяженным в пространстве, поле можно вычислить, заметив, что из (1.57) вытекает следующее соотношение между скалярными потенциалами:

$$V_0 = V(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (1.65)$$

Компоненты электрического и магнитного полей можно вычислить, как и в предшествующем случае, пользуясь соотношениями (1.31), (1.56) и (1.65). Легко проверить, что энергии

электрического и магнитного полей могут быть записаны соответственно в виде

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{e}|^2 dv = \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \left\{ (1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z_0} \right)^2 \right] \right\} dv_0, \\
 W_m &= \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{b}|^2 dv = \frac{\epsilon_0 \beta^2}{2(1 - \beta^2)^{1/2}} \int \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z_0} \right)^2 \right] dv_0. \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

Следовательно, если известен потенциал V_0 , то можно легко вычислить W_e и W_m , а также \mathbf{A} , т. е. \mathbf{e} и \mathbf{b} . Имеем также

$$\begin{aligned}
 G_x &= \epsilon_0 \int (\mathbf{e} \times \mathbf{b})_x dv = \frac{\beta \epsilon_0}{c(1 - \beta^2)^{1/2}} \int \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z_0} \right)^2 \right] dv_0, \\
 G_y &= -\frac{\beta \epsilon_0}{c} \int \frac{\partial V_0}{\partial y_0} \frac{\partial V_0}{\partial x_0} dv_0, \\
 G_z &= -\frac{\beta \epsilon_0}{c} \int \frac{\partial V_0}{\partial z_0} \frac{\partial V_0}{\partial x_0} dv_0. \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

Итак, вычисление величин, связанных с электроном, сводится к вычислению скалярного потенциала V_0 . Для этого необходимо сделать некоторые предположения о форме электрона и распределении электрического заряда. Проще всего полагать, что электрон имеет форму шара радиуса a . При сферической симметрии заряд может быть равномерно распределен либо по объему, либо по поверхности.

Чтобы разработать теорию «электромагнитной массы» электрона, Абрагам предложил гипотезу жесткого электрона, рассматривая электрон как твердое сферическое тело, сохраняющее свою форму при движении. Эта гипотеза предполагает существование бесконечно больших внутренних сил неэлектромагнитной природы, способных обеспечить такую жесткость. Развитие теории относительности, а также сопоставление теории и экспериментальных данных привели к тому, что в настоящее время эта гипотеза полностью отвергнута. Из этого предположения следует, что в системе $Ox_0y_0z_0$ сферический электрон ведет себя как вытянутый эллипсоид вращения с полуосями $a_0 = a(1 - \beta^2)^{-1/2}$, a , a . В случае поверхностного распределения заряда при $\beta \ll 1$ для W_e и W_m находим в первом приближении выражения (1.39) и (1.41), а для \mathbf{G} получаем выражение (1.44').

Лоренц исходил из гипотезы, что электрон деформируется, и постулировал, что в системе координат $Ox_0y_0z_0$, движущейся вместе с электроном, электрон имеет шарообразную форму. Следовательно, относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ электрон во время движения деформируется согласно условиям (1.54), а именно его размеры уменьшаются в направлении движения. Итак,

в системе *Охуз* шар становится сплюснутым эллипсоидом вращения, так называемым эллипсоидом Хевисайда, с полуосями $a(1-\beta^2)^{1/2}$, a , a .

В этом случае V_0 является потенциалом электростатического поля со сферическим распределением заряда. Учитывая сферическую симметрию, можно записать

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_0} = \frac{\partial V_0}{\partial y_0} = \frac{\partial V_0}{\partial z_0} = 0,$$

и, согласно теореме Грина (см. Тамм, стр. 597) в предположении поверхностного распределения электронов на шаре радиуса a [см. (1.39)], имеем

$$\int \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z_0} \right)^2 \right] dv_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} = 2W_0.$$

Следовательно, принимая во внимание (1.67), получаем

$$G = G_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\beta}{c(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{e^2}{a} = \frac{4}{3} \frac{v}{c^2(1-\beta^2)^{1/2}} W_0. \quad (1.68)$$

При $\beta \ll 1$ это соотношение сводится к (1.44').

§ 5. Поле электрона, движущегося ускоренно

Для вычисления поля ускоренно движущегося электрона используем уравнения (1.49), где электромагнитные потенциалы V и A определены уравнениями (1.51) и удовлетворяют условию Лоренца (1.50). В отличие от случая равномерного движения здесь упростить уравнения оказывается невозможным. Приходится рассматривать решения этих уравнений, записанные в общем виде для запаздывающих потенциалов

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[qv']}{r} dv', \quad V(xyzt) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[q]}{r} dv', \quad (1.69)$$

где

$$[q] = q \left(x', y', z', t - \frac{r}{c} \right),$$

$$[qv] = q \left(x', y', z', t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{v} \left(x', y', z', t - \frac{r}{c} \right), \quad (1.70)$$

причем $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ — расстояние некоторой точки внутри электрона в данный момент времени t от точки $P(x, y, z)$, в которой вычисляется потенциал, а $\tau = t - r/c$ — запаздывающее время, время вычисления потенциала.

Вообще говоря, вычислить поле ускоренно движущегося электрона сложно. Для простоты ниже мы ограничимся случаем точечного электрона.

1. Для точечного электрона выражения потенциалов (1.69) могут быть записаны в более простой форме, называемой потенциалом Льенара — Вихерта. Для этого полезно воспользоваться функцией Дирака. А именно с учетом свойства (1.14'') скалярный потенциал можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varphi=0} \frac{\varrho(x'y'z'\xi)}{r} \delta\left(\xi - t + \frac{r}{c}\right) dv d\xi,$$

где ξ — вспомогательный параметр. Обозначим через $\mathbf{r}(\xi)$ вектор, соединяющий точку, в которой находится электрон в момент ξ , с точкой $P(x, y, z)$. Тогда в силу точечности электрона

$$\varrho(x', y', z', t) = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)],$$

где

$$\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)] = \delta[x - x' - r_x(s)] \delta[y - y' - r_y(s)] \delta[z - z' - r_z(s)].$$

Интегрируя по x' , y' и z' , получаем

$$V(x, y, z, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r(\xi)} \delta\left(\xi - t + \frac{r(\xi)}{c}\right) d\xi.$$

Введем новую переменную $u = \xi - t + r/c$. Заметим, что

$$\frac{du}{d\xi} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{d\xi} = 1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{cr},$$

где \mathbf{v} — скорость электрона в момент ξ . Выражение для $dr/d\xi$ получается, если учесть, что $r = (\mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}$; знак минус связан с выбранным нами направлением вектора \mathbf{r} от электрона к точке наблюдения $P(x, y, z)$. Теперь имеем

$$4\pi\epsilon_0 V(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e}{r} \delta(u) \frac{d\xi}{du} du = \int \frac{e}{r(1 - \mathbf{v}\mathbf{r}/cr)} \delta(u) du,$$

следовательно,

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r(1 - \mathbf{v}\mathbf{r}/cr)} \right]_{t - \frac{r}{c}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s} \right]_{t - \frac{r}{c}}. \quad (1.71)$$

Аналогично,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{r(1 - \mathbf{v}\mathbf{r}/cr)} \right]_{t - \frac{r}{c}} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{s} \right]_{t - \frac{r}{c}}. \quad (1.72)$$

Эта более простая форма записи запаздывающих потенциалов, справедливая для точечного электрона, и известна под названием потенциалов Льенара — Вихерта.

Заметим, что в случае равномерно движущегося точечного электрона эти потенциалы эквивалентны потенциалам, полученным нами в § 4, п. 1. В самом деле, если \mathbf{r}_0 — радиус-вектор, начало которого совпадает с положением электрона в момент t , а конец — с точкой наблюдения $P(xyz)$, и \mathbf{r} — радиус-вектор, начало которого совпадает с положением электрона в запаздывающий момент $\tau = t - r/c$, а конец — с точкой наблюдения, то имеем соотношения

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v} \frac{r}{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Следовательно, выражение

$$s = r - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{c}$$

может быть записано в виде

$$s^2 = r_0^2 - \left(\frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}}{c} \right)^2,$$

или

$$\begin{aligned} s^2 &= (x'_0 - x)^2 + (y'_0 - y)^2 + (z'_0 - z)^2 - \frac{v^2}{c^2} [(y'_0 - y)^2 + (z'_0 - z)^2] = \\ &= r_0^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Последняя форма записи совпадает с (1.62).

2. Чтобы упростить вычисление поля ускоренно движущегося электрона при помощи потенциалов (1.71) и (1.72), заметим, что выражение, стоящее в знаменателе, имеет вид

$$s = s(x, y, z; x', y', z'),$$

где

$$x' = x'(\tau), \quad y' = y'(\tau), \quad z' = z'(\tau)$$

есть заданные функции от $\tau = t - r/c$, а

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

В уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}, \\ \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{1.73}$$

входит оператор ∇ , означающий частное дифференцирование по x , y и z при $t = \text{const}$, и оператор $\partial/\partial t$, который предполагает дифференцирование при x , y , $z = \text{const}$. Так как в выражение потенциалов непосредственно входит запаздывающее время $\tau = t - r/c$, то удобно предварительно выразить $\partial/\partial t$ и ∇ как функции от $\partial/\partial \tau$ при x , y , $z = \text{const}$.

С этой целью заметим, что из соотношения $r = (\mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}$ следует

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)_{xyz} = -\frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{r},$$

где

$$\mathbf{v} = -\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}.$$

Аналогично, из соотношения

$$r = c(t - \tau) \quad (1.74)$$

получаем

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{r} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(1 - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{rc}\right)^{-1} = \frac{r}{s}.$$

Из последних двух соотношений следует

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{r}{s},$$

т. е. можно вообще записать

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.75)$$

Применяя оператор ∇ к (1.74), получаем

$$\nabla r = -c \nabla \tau. \quad (1.76)$$

В то же время замечаем, что можно записать

$$\nabla r = (\nabla_{\mathbf{t}} r)_{\mathbf{t}} + \frac{\partial r}{\partial \tau} \nabla \tau, \quad (1.77)$$

где $\nabla_{\mathbf{t}}$ означает дифференцирование по x , y , z при постоянном τ . Таким образом, имеем

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{r} \nabla \tau. \quad (1.78)$$

Из сравнения соотношений (1.76) и (1.78) следует

$$\nabla \tau = -\frac{\mathbf{r}}{cs}.$$

Подставив это в (1.77), получаем

$$\nabla r = \nabla_{\mathbf{t}} r - \frac{\mathbf{r}}{cs} \frac{\partial r}{\partial \tau}. \quad (1.79)$$

Следовательно, в общем виде можно записать

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{\mathbf{r}}{cs} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.79')$$

3. Поле ускоренно движущегося точечного электрона можно легко вычислить, подставив потенциалы (1.71) и (1.72) в уравнения (1.73) и воспользовавшись соотношениями (1.75), (1.79'). Получаем

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{e} = \frac{1}{s^2} \left(\nabla_1 s - \frac{\mathbf{r}}{cs} \frac{\partial s}{\partial \tau} \right) - \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{v}}{sc^2} \right).$$

Так как

$$\nabla_1 s = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} = -\frac{r\mathbf{v}}{r} - \frac{r}{c} \dot{\mathbf{v}} - \frac{v^2}{c},$$

имеем

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{e} = \frac{1}{s^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) + \left(\frac{r\mathbf{v}}{c^2 s^3} - \frac{r}{cs^3} \right) \left(-\frac{r\mathbf{v}}{r} - \frac{r}{c} \dot{\mathbf{v}} - \frac{v^2}{c} \right) - \frac{r}{c^2 s^2} \dot{\mathbf{v}}.$$

Группируя члены подходящим образом, получаем

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c} \right) (1 - \beta^2) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}.$$

Это выражение может быть записано в виде

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - \beta^2) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{v}}). \quad (1.80)$$

Аналогично,

$$\frac{4\pi}{\mu_0 e} \mathbf{b} = \frac{1}{s} \left(\nabla_1 \times \mathbf{v} - \frac{\mathbf{r}}{sc} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right) + \mathbf{v} \times \left[\nabla_1 \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{\mathbf{r}}{sc} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{s} \right) \right],$$

или

$$\mathbf{b} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} (1 - \beta^2) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}. \quad (1.81)$$

Из сравнения выражений (1.81) и (1.80) следует равенство

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}}{rc}, \quad (1.82)$$

т. е. магнитное поле всегда перпендикулярно электрическому полю и радиус-вектору \mathbf{r} .

Из выражений (1.80) и (1.81) видно, что каждое из полей ускоренно движущегося электрона состоит из двух частей. Так, в выражении электрического поля первый член пропорционален скорости, направлен по движению и убывает с расстоянием как $1/r^2$. Он совпадает с выражением для поля равномерно движущегося электрона (см. § 4, п. 1), т. е. первый член соответствует квазистатическому неизлучательному полю. Второй член пропорционален ускорению,

направлен перпендикулярно движению и убывает как $1/r$. Этот член выражает поле излучения ускоренного электрона.

4. Когда скорость ускоренно движущегося электрона мала ($v \ll c$, $\beta \ll 1$), то $\mathbf{r}_0 \approx \mathbf{r}$ и $s \approx r$. В этом случае поле излучения может быть записано в виде

$$\mathbf{e}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{b}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{rc} \times \mathbf{e}_r. \quad (1.83)$$

Формально это поле тождественно полю излучения осциллирующего диполя. Соответствующий вектор Умова — Пойнтинга будет

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_r \times \mathbf{b}_r = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{\mathbf{r}}{r} |\mathbf{e}_r|^2 = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c^5} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \theta}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.84)$$

Следовательно, энергия излучения распределяется симметрично относительно направления движения. Энергия, излучаемая за единицу времени через сферу радиуса r , равна

$$J = -\frac{dW}{d\tau} = \oint \mathbf{Y} \mathbf{n} dS = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (1.85)$$

5. В частном случае, когда ускорение параллельно скорости ($\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$), поле излучения может быть записано в виде

$$\mathbf{e}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{b}_r = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}. \quad (1.86)$$

Замечаем, что в отличие от выражения (1.83) сюда входит множитель $(r/s)^3 = (1 - \beta \cos \theta)^{-3}$. Наличие этого множителя в выражении вектора Умова — Пойнтинга показывает, что энергия излучается преимущественно по направлению движения.

При вычислении излученной энергии в этом случае следует учитывать, что вектор Умова — Пойнтинга выражает поток энергии за единицу времени, измеренного в масштабе t , а интенсивность излученной энергии равна потоку энергии, отнесенному к интервалу времени $d\tau$ — продолжительности излучения электромагнитной волны. Следовательно, интенсивность энергии, излученной в элемент телесного угла $d\Omega$, равна

$$dJ = -\frac{dW}{d\tau} d\Omega = |\mathbf{Y}| \frac{dt}{d\tau} r^2 d\Omega = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{e} \times \mathbf{b}| \frac{dt}{d\tau} r^2 d\Omega = \epsilon_0 c |\mathbf{e}_r|^2 \frac{s}{r} r^2 d\Omega,$$

а энергия, излученная в направлении θ , будет такова:

$$J(\theta) = \frac{\dot{v}^2}{c^3} \left(\frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \right) \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}.$$

Полученное выражение полезно при вычислении излучения электрона при торможении, так называемого тормозного излучения (*Bremsstrahlung*), возникающего, например, в рентгеновской трубке.

§ 6. Динамика электронов, совершающих квазистациональное движение

Рассмотрим электрон, совершающий переменное движение, ограничиваясь, однако, случаем квазистационарного движения, т. е. такого движения, при котором в каждый момент времени поле электрона может считаться эквивалентным полю равномерно движущегося электрона. Это всегда возможно, когда ускорение электрона достаточно мало. В первом приближении в окрестности электрона его поле можно тогда представить как стационарное поле, чтобы при вычислении обратного действия поля на электрон учитывать только это стационарное поле.

Для вычисления обратного действия поля на электрон, создавший это поле, используем основное соотношение

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

в которое входит полное поле электрона, т. е. $\mathbf{F}_1 = 0$ (см. § 3).

Это уравнение можно разложить на две составляющие: одна из них соответствует движению по направлению скорости \mathbf{v}_1 — это прямолинейное ускоренное движение, а вторая соответствует движению по направлению нормали \mathbf{n}_1 к траектории и в первом приближении описывает равномерное криволинейное движение¹⁾.

Так как на основании формулы Френе имеем

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{v}{R} \mathbf{n}_1,$$

где R — радиус кривизны траектории, то можно записать

$$\mathbf{G} = G\mathbf{v}_1, \quad \dot{\mathbf{G}} = \frac{dG}{dv} \dot{v}\mathbf{v}_1 + \frac{v}{R} G\mathbf{n}_1,$$

в силу чего получаем

$$\begin{aligned} F_v &= m\dot{v} + \frac{dG}{dv} \dot{v} = \left(m + \frac{dG}{dv} \right) \dot{v}, \\ F_n &= m \frac{v^2}{R} + \frac{G}{v} \frac{v^2}{R} = \left(m + \frac{G}{v} \right) \frac{v^2}{R}. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Поскольку импульс электромагнитного поля растет со скоростью электрона, то эти уравнения показывают, что из-за реакции поля

¹⁾ \mathbf{v}_1 и \mathbf{n}_1 — единичные векторы: $\mathbf{v} = v\mathbf{v}_1$.

инерция электрона растет и, следовательно, можно рассматривать dG/dv и G/v как электромагнитные массы электрона. Однако так как, вообще говоря, G не является линейной функцией скорости v , эти два выражения различны и называются продольной массой

$$m_l = \frac{dG}{dv} = -\frac{1}{c} \frac{dG}{d\beta} \quad (1.88)$$

и поперечной массой

$$m_t = \frac{G}{v} = \frac{1}{c} \frac{G}{\beta}. \quad (1.89)$$

Создавая механику электронов на основе уравнений (1.87), Абрагам [4] разработал механику, которая отличалась от ньютоновой. Это отличие становится еще более четким, если заметить, что массы m_l и m_t изменяются со скоростью.

Зависимость этих электромагнитных масс от скорости обусловлена предположениями, сделанными о структуре электронов. А именно в случае деформируемого электрона Лоренца, приняв во внимание значение G , полученное из (1.68), имеем

$$m_l = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} (1 - \beta^2)^{-3/2} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} \left(1 + \frac{3}{2} \beta^2 + \dots \right), \quad (1.90)$$

$$m_t = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right).$$

Следовательно, согласно (1.48), можно записать

$$m_l = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (1.91)$$

В случае твердого электрона Абрагама выражения для масс отличаются от (1.90), а именно:

$$\begin{aligned} m_l &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} \left(1 + \frac{6}{5} \beta^2 + \dots \right), \\ m_t &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} \left(1 + \frac{6}{3,5} \beta^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Найденные формулы основаны в обоих случаях на предположении о поверхностном распределении заряда. Можно показать, что в случае объемного распределения каждое из вышеприведенных выражений следует умножить на $6/5$.

Вообще, первый вывод, который можно сделать, следующий: $m_l > m_t$ и в случае $v \ll c$ электромагнитные массы становятся равными

$$m = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2}.$$

До появления теории относительности экспериментальной проверке закона зависимости массы от скорости придавали большое

значение, ибо, как мы видели, казалось, что это приведет к важным выводам относительно структуры электрона, которая определяет величину его электромагнитной массы. Экспериментальное исследование изменения массы со скоростью было проведено Кауфманом, но точность определения не была достаточной, чтобы можно было прийти к окончательному заключению о справедливости формул (1.90) или (1.92). Многочисленные последующие исследования катодных лучей большой скорости и β -лучей позволили дать удовлетворительный ответ, а именно подтвердились формулы (1.91), установленные Лоренцом. Впрочем, формулы Лоренца согласуются с формулами, полученными в специальной теории относительности.

Следовательно, напрашивается вывод, что электрон имеет форму шара и может деформироваться, а заряд его распределен по поверхности. Но эта модель электрона не позволяет устранить все трудности, ибо, как показал Пуанкаре, для того чтобы считать такое распределение стабильным, нужно допустить существование очень больших сил сцепления.

Проблема внутреннего строения электрона и ее согласование с классической теорией электромагнитного поля не нашли удовлетворительного решения. В современной физике эти трудности иногда можно обойти, если считать электрон точечным, т. е. лишенным структуры, но в этом нельзя видеть решение вопроса, так как это предположение влечет за собой другие затруднения. В частности, собственная энергия такого электрона становится *бесконечной*, а это лишено всякого смысла. Во всяком случае, приходим к выводу, что электрон — *материальная* частица, которой следует приписывать объем и, следовательно, радиус, имеющий важное физическое значение¹⁾. Величину радиуса электрона, если бы вся его масса оказалась полевой, можно оценить из соотношения

$$m = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ac^2}, \quad (1.93)$$

¹⁾ При данном уровне знаний нельзя еще дать окончательный ответ на вопрос о способах преодоления затруднений, с которыми сталкивается современная теория элементарных частиц. Отказ от концепции точечных элементарных частиц является лишь одним из возможных путей решения этой проблемы, причем приходится учитывать квантовую природу взаимодействий.

Опыты по рассеянию электронов на нуклонах действительно показали сложную структуру последних. Весьма вероятно, что вскоре можно будет поставить опыты по рассеянию сверхбыстрых электронов на электронах, которые дадут сведения и о структуре электронов. Интересующимся этим вопросом рекомендуем прочитать книги С. Д. Дрелл и Ф. Захаризен, «Электромагнитная структура нуклонов», ИЛ, 1962; А. А. Соколов, Д. Д. Иваненко, «Квантовая теория поля», М., 1952.—*Прим. ред.*

откуда

$$a = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e}{m} e = \alpha \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^2}{m} = \alpha r_0. \quad (1.94)$$

Зная из результатов эксперимента значения удельного заряда и величину заряда e в предположении поверхностного распределения заряда, получаем ($e^2/mc^2 = r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см)

$$a = \alpha \cdot 10^{-13} \text{ см} \pm 30\%,$$

где α — числовой множитель порядка единицы.

§ 7. Атомистические основы теории Максвелла в случае стационарных полей

Основная проблема электронной теории состоит в переходе от уравнений Лоренца (1.8), (1.9), определяющих *микроскопическое* поле, к уравнениям Максвелла, описывающим *макроскопическое* поле.

Микроскопическое поле является сложной функцией пространства и времени, меняющейся быстро и нерегулярно даже внутри одного атома. Поэтому применять его в обычных практических задачах электродинамики очень трудно. Следовательно, необходимо вывести из уравнений (1.8), (1.9) уравнения, которым удовлетворяли бы средние статистические величины микроскопического поля, и затем выяснить связь между этими статистическими средними и максвелловым электромагнитным полем. Такое рассуждение основывается на том, что величины, определяющие макроскопическое поле, являются *средними* соответствующих величин микроскопического поля, относящимися к пространственным и временным интервалам, большим по сравнению с характерными для атома размерами и промежутками времени.

Среднее значение некоторой функции от координат и времени $f(x, y, z, t) = f(P, t)$ определяется следующим образом. Проведем вокруг точки P как центра шар радиусом r и ограничимся промежутком времени τ . По определению, средняя по пространству и времени внутри шара радиусом r и для промежутка времени $-\tau < \theta < \tau$ равна

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{v \cdot 2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \int_{\mathcal{V}_0} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \theta) d\xi d\eta d\zeta d\theta, \quad (1.95)$$

где $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ — объем рассматриваемого шара. Из этого определения следуют, если положить r и τ постоянными, важные

соотношения

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad (1.96)$$

которые не зависят от r и τ .

Отметим, что для того, чтобы определение (1.95) можно было использовать в физике, оно не должно зависеть от выбора r и τ ; математически это эквивалентно требованию, чтобы средняя $\bar{f}(x, y, z, t)$ была пределом выражения, стоящего в правой части, при $r \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, ибо только в этом случае она может быть определена как непрерывная функция. Следовательно,

$$\bar{f}(P, t) = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{v \cdot 2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \int_{\sigma} f(P', t') dv' dt'. \quad (1.95')$$

Однако необходимо, как это сделал Лоренц, уточнить различие между понятием «физической бесконечно малой» и «математической бесконечно малой», которые имеют совершенно различный смысл.

Так, малые области, подобные шару радиуса r , которые могут содержать очень большое количество атомов, должны предполагаться достаточно малыми, чтобы их можно было рассматривать с микроскопической точки зрения как бесконечно малые, т. е. как интервалы, внутри которых макроскопические величины не изменяются. Только при этом условии средние значения микроскопических величин, вычисленные для таких бесконечно малых с точки зрения физики областей, могут рассматриваться как непрерывные функции.

Усредняя члены уравнений (1.8) и (1.9), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{\mathbf{b}} &= \bar{\mathbf{j}} + \epsilon_0 \bar{\mathbf{e}}, & \nabla \epsilon_0 \bar{\mathbf{e}} &= \bar{\mathbf{q}}, \\ \nabla \times \bar{\mathbf{e}} &= -\dot{\bar{\mathbf{b}}}, & \nabla \bar{\mathbf{b}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Так как в уравнения, стоящие во второй строке, не входят плотность заряда и плотность тока, то их можно сопоставить с соответствующими уравнениями теории Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0$$

и, следовательно, установить тождества

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}. \quad (1.98)$$

Для сравнения уравнений (1.97), записанных в первой строке, нужно подставить в максвелловы уравнения векторы электрической индукции \mathbf{D} и напряженности магнитного поля \mathbf{H} , определен-

ные соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (1.99)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{P}} + \nabla \times \mathbf{M}, \\ \nabla \varepsilon_0 \mathbf{E} &= \mathbf{q}_l - \nabla \mathbf{P} \end{aligned} \quad (1.100)$$

(где \mathbf{q}_l — плотность свободных зарядов). Следовательно, уравнения будут совпадать, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}_l - \nabla \mathbf{P}, \\ \bar{\mathbf{j}} &= \dot{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{P}} + \nabla \times \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Итак, доказательство этих соотношений сводится к оценке средней плотности заряда и тока.

Для простоты ограничимся случаем стационарных полей, т. е. полей, не зависящих от времени, или полей квазистационарных, т. е. медленно меняющихся со временем.

Поскольку вещество состоит из нейтральных атомов (или молекул), ионов, т. е. заряженных атомов (или молекул), и свободных электронов, при оценке средних статистических $\bar{\mathbf{q}}$ и $\bar{\mathbf{j}}$ нужно принимать во внимание каждую из этих составляющих.

1. Самый простой вид переноса электрических зарядов состоит в движении ионов или свободных электронов, которое имеет место в электролитах или металлах соответственно под влиянием электрического поля. Это случай конвекционного тока¹⁾. Чтобы определить его среднее значение, предположим, что в единице объема рассматриваемого вещества имеем

n_1 ионов с зарядом e_1 и скоростью \mathbf{v}_1 ,

n_2 ионов с зарядом e_2 и скоростью \mathbf{v}_2 и т. д.

Рассмотрим элемент поверхности dS . Тогда, по определению, сила конвекционного тока равна суммарному заряду ионов различных видов, которые проходят через поверхность dS за интервал времени dt , т. е. суммарному заряду ионов, находящихся в цилиндре, основание которого dS , а высота $v_{1n} dt$ или $v_{2n} dt$ и т. д. Так как электрический заряд, который проходит через dS за время dt , равен

$$dS dt (e_1 n_1 v_{1n} + e_2 n_2 v_{2n} + \dots),$$

¹⁾ Автор пользуется названием «конвекционный ток» для обозначения суммы тока проводимости (движение свободных электронов) и собственно конвекционного тока (движение среды вместе с содержащимися в ней зарядами). — *Прим. ред.*

то плотность конвекционного тока будет

$$\mathbf{i} = n_1 e_1 \mathbf{v}_1 + n_2 e_2 \mathbf{v}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i, \quad (1.102)$$

где $N = n_1 + n_2 + \dots$ общее число ионов или электронов в единице объема. Аналогично, плотность свободных (или истинных) зарядов, по определению, будет

$$q_l = n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots = \sum_{i=1}^N e_i. \quad (1.103)$$

2. Кроме того, под влиянием электрического поля молекулы вещества поляризуются, так что каждому атому или молекуле можно приписать дипольный момент \mathbf{p}_i . Дипольный момент единицы объема рассматриваемого вещества, в котором содержится N атомов или молекул, равен

$$\mathbf{P} = n_1 \mathbf{p}_1 + n_2 \mathbf{p}_2 + \dots \quad (1.104)$$

Дипольному моменту \mathbf{p} атома или молекулы соответствует потенциал

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \nabla \left(\frac{1}{r} \right).$$

С другой стороны, атом или молекулу можно рассматривать как систему электрических зарядов e_1, e_2, \dots , положение которых относительно центра атома или молекулы определяется векторами $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots$. Потенциал в некоторой точке (x, y, z) , расположенной на расстоянии r_0 от центра атома (или молекулы) и на расстоянии r_i от i -го заряда, будет

$$4\pi\epsilon_0 V = \sum_i \frac{e_i}{r_i} = \frac{1}{r_0} \sum_i e_i - \sum_i e_i \mathbf{s}_i \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)_0,$$

так как для $r_0 \gg s$ имеем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \mathbf{s} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)_0.$$

В силу того что атом или молекула нейтральны, $\sum_i e_i = 0$, и, сравнивая два выражения потенциала, получаем

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{s}_i, \quad \dot{\mathbf{p}} = \sum_i e_i \mathbf{v}_i. \quad (1.105)$$

Но атом или молекула могут характеризоваться с макроскопической точки зрения непрерывным распределением зарядов с плотностью $\rho(\xi, \pi, \zeta)$, и в этом случае суммы из (1.105) заме-

няются интегралами

$$\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{s} d\xi d\eta d\zeta, \quad (1.106)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \int \rho \mathbf{v} d\xi d\eta d\zeta. \quad (1.106')$$

Выражение для поляризационного тока получается при помощи аналогичных рассуждений. Обозначим через $\delta \mathbf{s}_1, \delta \mathbf{s}_2, \dots$ смещения составляющих заряда атома e_1, e_2, \dots под влиянием электрического поля. Следовательно, через поверхность dS пройдет количество электричества

$$dS(e_1 \delta s_{1n} + e_2 \delta s_{2n} + \dots),$$

где $\delta \mathbf{s}_i = \mathbf{v}_i dt$. Если в 1 см^3 находятся n одинаковых атомов, то они вызывают поляризационный ток [см. (1.105)]

$$\mathbf{i}_p = n \sum_i e_i \mathbf{v}_i = n \dot{\mathbf{p}}. \quad (1.107)$$

Следовательно, учитывая соотношения (1.107) и (1.104), получаем выражение для поляризационного тока

$$\mathbf{i}_p = n_1 \dot{\mathbf{p}}_1 + n_2 \dot{\mathbf{p}}_2 + \dots = \dot{\mathbf{P}}. \quad (1.108)$$

С помощью уравнения непрерывности можно вывести выражение для плотности поляризационных зарядов. Отметим, что проведенные рассуждения справедливы, когда атомы или молекулы имеют произвольное расположение. Однако в случае кристаллических сред, где молекулы расположены симметрично, найденное значение для \mathbf{i}_p зависит от ориентации поверхности dS , поэтому необходимо провести усреднение по различным ориентациям поверхности:

$$\dot{\mathbf{P}} = (\bar{\rho \mathbf{v}})_p.$$

Изменение величины поляризации связано с появлением поляризационных зарядов, плотность которых может быть определена при помощи нижеследующих более строгих рассуждений [7].

Согласно макроскопической теории Максвелла, поляризационные заряды появляются в областях неоднородности на поверхности, соединяющей два разных диэлектрика. Следовательно, в атомистической концепции они возникают при различной плотности распределения атомов (или молекул) с обеих сторон общей поверхности двух соседних элементарных объемов. Тогда при перемещении межатомных зарядов под влиянием внешнего поля часть из них перейдет из рассматриваемого элементарного объема в соседний. Когда атомы распределены однородно, число зарядов, переходящих из одного объема в другой, будет одинаково и средний поляризационный

заряд будет равен нулю. В случае же неоднородного распределения атомов средняя величина поляризационных зарядов отлична от нуля.

Пусть атом находится в некоторой внутренней точке P . Выразим распределение заряда относительно точки P : в некоторой точке P_a , отстоящей от P на расстоянии \mathbf{r}_a , плотность (переменная) будет иметь вид $\varrho(P, \mathbf{r}_a)$, поскольку она зависит от положения атома.

Разберем частный случай, когда все атомы, находящиеся в рассматриваемом элементарном объеме, одинаково ориентированы в пространстве. Пусть $N(P)$ — плотность распределения атомов в элементарном объеме. Мы будем считать ее непрерывной, медленно меняющейся функцией. Пусть P' — точка соседнего элементарного объема, расположенного вблизи элемента dS поверхности рассматриваемого объема. Предполагается, что эта поверхность проходит через точку P . Под влиянием внешнего поля заряд перемещается на расстояние \mathbf{r}_a . Если этот вектор пересекает поверхность dS , то через нее пройдет заряд $\varrho(P', \mathbf{r}_a)$ атома P' . То же самое будет иметь место и для других атомов, находящихся вблизи поверхности элемента объема. Так, в направлении \mathbf{r}_a пересекут элемент dS заряды $\varrho(P', \mathbf{r}_a) dv_a$ всех атомов, которые находятся внутри цилиндра с основанием dS и высотой $(\mathbf{r}_a \mathbf{n}) = r'(\mathbf{n} \mathbf{r}_a^0)$, где \mathbf{r}_a^0 — единичный вектор направления \mathbf{r}_a .

Следовательно, полный заряд, проходящий через элемент dS , будет равен

$$\sigma_p dS = dS \int_{\text{АТОМ}} dv_a \mathbf{n} \mathbf{r}_a^0 \int_0^{r_a} dr' \varrho(P', \mathbf{r}_a) N(P').$$

Разлагая функцию ϱN в ряд Тейлора, получаем

$$\varrho(P', \mathbf{r}_a) N(P') = \varrho(P, \mathbf{r}_a) N(P) - r'(\mathbf{r}_a^0 \cdot \nabla_P \varrho N),$$

поэтому

$$\sigma_p dS = dS \left[\mathbf{n} \int_{\text{АТОМ}} dv_a \mathbf{r}_a \varrho(P, \mathbf{r}_a) N(P) - \frac{1}{2} \mathbf{n} \int_{\text{АТОМ}} dv_a \mathbf{r}_a (\mathbf{r}_a \cdot \nabla_P \varrho N) \right].$$

Первый интеграл в квадратных скобках есть дипольный момент атома [см. (1.106)], а второй — квадрупольный момент атома, которым в первом приближении можно пренебречь. Следовательно,

$$\sigma_p dS = dS \mathbf{n} p N.$$

Если поступить аналогичным образом для атомов, имеющих разную ориентацию, то с учетом соотношения (1.104) получаем

$$\sigma_p dS = \mathbf{n} \mathbf{P} dS.$$

Этот заряд, пересекающий элемент dS в направлении вектора \mathbf{n} , в случае когда dS принадлежит поверхности физического разрыва

между двумя диэлектрическими средами, будет представлять собой поляризационный заряд этой поверхности.

В общем случае неоднородной среды будем иметь и объемные поляризационные заряды. Чтобы вычислить их плотность ϱ_p , заметим, что поляризационный заряд, содержащийся в элементарном объеме dv , получается интегрированием вышеприведенного выражения по поверхности элементарного объема (мы учитываем, что нормаль \mathbf{n} направлена внутрь, и применяем теорему Гаусса):

$$\varrho_p = -\frac{1}{dv} \int \sigma_p dS = -\nabla \mathbf{P}. \quad (1.109)$$

Полученный результат согласуется с результатом, выведенным феноменологическим путем. Поляризационный ток вычисляется из уравнения непрерывности.

3. Чтобы вычислить силу тока, обусловленную магнитной поляризацией, будем учитывать, что электроны атома, перемещающиеся по замкнутой орбите, эквивалентны магнитному диполю. Обозначив через m дипольный магнитный момент атома и предположив, что в единице объема находятся n_1 атомов с моментом \mathbf{m}_1 , n_2 атомов с моментом \mathbf{m}_2 и т. д., получаем, что намагниченность

$$\mathbf{M} = n_1 \mathbf{m}_1 + n_2 \mathbf{m}_2 + \dots = \sum_i n_i \mathbf{m}_i. \quad (1.110)$$

Выражение дипольного магнитного момента атома вычисляется просто, если учесть, что векторный потенциал, соответствующий плотности тока \mathbf{j} в атоме, имеет вид

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta; \quad (1.111)$$

с другой стороны, векторный потенциал \mathbf{A} связан с дипольным моментом соотношением

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla_0 \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.112)$$

где \mathbf{m} — выражение соответствующего дипольного магнитного момента

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\dot{v}} (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) dv. \quad (1.113)$$

Если вместо плотности тока \mathbf{j} непрерывного распределения атомов рассмотреть ток, порожденный различными электронами, то соотношение (1.113), выражающее среднюю величину, переписется следующим образом:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i e_i \overline{(\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i)}. \quad (1.114)$$

Выражение тока, обусловленного намагничиванием, или молекулярный ток \mathbf{i}_m , можно получить, рассуждая, как и выше, путем вычисления плотности поляризационных зарядов, а именно замечая, что этот ток обусловлен неоднородностью пространственного распределения атомов. Так, заменив ρ на $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, получаем

$$\mathbf{i}_m = -\frac{1}{dv} \int dSN(P) \int_{\text{Атом}} \mathbf{j}(P, t, \mathbf{r}_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) dv_a, \quad (1.115)$$

что в первом приближении дает

$$\mathbf{i}_m = \frac{1}{dv} \int dS (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) N,$$

или с учетом (1.110)

$$\mathbf{i}_m = \frac{1}{dv} \int (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS.$$

Применяя формулу (56*) из приложения к книге Тамма (стр. 599), имеем

$$\int (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS = \int dv \nabla \times \mathbf{M}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{i}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.116)$$

Это соотношение совпадает с соотношением, полученным феноменологическим путем для молекулярных токов Ампера.

В заключение заметим, что основной результат проведенного анализа состоит в том, что мы выявили зависимость между макроскопическими величинами, входящими в уравнения Максвелла, и структурными свойствами атома (соответственно молекулы), выраженными в первом приближении через дипольные моменты.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Введение

Для дополнения макроскопической теории Максвелла рассмотрением электрических и магнитных свойств различных веществ в духе теории Лоренца необходимо изучать эти свойства с учетом дискретности структуры вещества и факта существования электронов. Изложение последовательной микроскопической теории свойств проводящих, диэлектрических и магнитных сред увлекло бы нас слишком далеко, ибо в настоящий момент эти теории вышли далеко за рамки классической физики. Поэтому в последующем мы ограничимся изложением некоторых основных результатов, в особенности касающихся интерпретации постоянных γ , ϵ и μ на основе рассуждений классической статистики. Такого типа теории предшествовали развитию квантовой теории, и в общих чертах их можно считать окончательно установленными. Их можно вывести и на основе новых квантовых теорий. Отметим, однако, что электронная теория металлов, а также теория магнитных явлений — это существенно квантовые теории, и их изложение не входит в задачи, которые мы перед собой поставили в настоящей книге.

§ 1. Электронная теория проводимости металлов

С точки зрения теории Максвелла все проводящие электричество тела эквивалентны. Они отличаются друг от друга только числовым значением γ , которое определяется экспериментально. В действительности же существует большая разница между металлами, удельное сопротивление которых имеет порядок 10^{-8} ом·м, и изоляторами, удельное сопротивление которых очень велико, например в случае парафина оно равно 10^{16} ом·м. Как следует из опыта, из всех твердых тел только металлы обладают очень большой электропроводностью, причем ионы совершенно не участвуют в образовании тока; последние составляют кристаллическую решетку металлов.

Кинетическая теория электропроводности металлов основывается на гипотезе, что электроны перемещаются свободно между атомами или ионами кристаллической решетки. Эта гипотеза основывается

на результатах опытов Толмена, Холла и других исследователей.

Чтобы вывести закон Ома, Друде (1898 г.) выдвинул простую гипотезу «электронного газа». В этой гипотезе пренебрегается сложным взаимодействием между электронами и ионами, а при вычислениях допускается, что по отношению к решетке металла «свободные» электроны ведут себя как «газ», находящийся в тепловом равновесии с соответствующим металлом. Когда потенциал различных областей металла одинаков, свободные электроны находятся в беспорядочном тепловом движении, подобно молекулам идеального газа. Следовательно, к ним применим закон Максвелла из кинетической теории газов о распределении скоростей. Электроны будут характеризоваться средним свободным пробегом l .

В момент приложения электродвижущей силы под влиянием возникшего электрического поля на хаотическое тепловое движение накладывается упорядоченное движение по направлению электрического поля. Это направленное движение электронов сопровождается множеством их столкновений с ионами металлической решетки. Для простоты Друде предположил, что электроны, ускоренные электрическим полем, движутся как бы между молекулами некоторого газа, что, безусловно, является грубым приближением.

Для упрощения вычислений допустим, пренебрегая хаотичностью теплового движения, что все электроны имеют одну и ту же скорость и один и тот же свободный пробег l (т. е. что пути, пройденные между двумя столкновениями, одинаковы). Время τ между двумя столкновениями задается соотношением

$$\tau = \frac{l}{v_t}, \quad (2.1)$$

где v_t — скорость теплового движения электронов. Это соотношение справедливо, только пока скорость движения под действием электрического поля E очень мала по сравнению с v_t .

Под действием постоянного электрического поля E в интервале времени τ между двумя столкновениями электроны получают ускорение eE/m ; следовательно, к скорости v_t прибавляется скорость v_c , задаваемая соотношением

$$v_c = \frac{eE}{m} \tau,$$

средняя величина которой равна

$$\bar{v}_c = \frac{eE}{2m} \tau = \frac{eE}{2v_t m} l. \quad (2.2)$$

Так как при обычной температуре эта скорость мала по сравнению с v_t , допускают, что она не меняет закон распределения скоростей.

В расчет удельной проводимости входит только эта скорость, обусловленная действием поля, так как тепловое движение в силу хаотичности в среднем ничем не способствует переносу электрических зарядов. Предположив, что число свободных электронов в единице объема металла равно N , находим следующее выражение для плотности электрического тока:

$$i = Ne\bar{v}_c = \frac{e^2 N l E}{2 m v_t};$$

отсюда видно, что ток i пропорционален полю E . Из сравнения с законом Ома $i = \gamma E$ для удельной проводимости γ получаем выражение

$$\gamma = \frac{e^2 N l}{2 m v_t}. \quad (2.3)$$

Применяя к электронному газу закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы из кинетической теории газов, получаем

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_t^2 = \frac{3}{2} k T,$$

следовательно, выражение (2.3) можно записать в виде

$$\gamma = \frac{e^2 N l}{2 \sqrt{3 k m T}}, \quad (2.3')$$

откуда следует закон изменения удельной проводимости в зависимости от температуры. В полученное выражение, помимо универсальных постоянных, входят еще две характеристики рассматриваемого металла, а именно N и l .

С помощью электронной теории можно дать также объяснение явлений, наблюдаемых на поверхности металлов. Легко понять, что на поверхности металлов образуется двойной электрический слой. В самом деле, электроны, которые вследствие теплового движения выходят из металлической решетки, остаются тем не менее в сфере электростатического влияния ионов и образуют поверхностный слой. Для того чтобы электрон мог покинуть металл, он должен обладать, согласно гипотезе Ричардсона (1903 г.), кинетической энергией, достаточной для преодоления разности потенциалов V двойного слоя. Допуская справедливость закона распределения Максвелла для скоростей электронов в металле, получаем для числа dn электронов, имеющих компоненту скорости по оси Ox в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, следующее выражение:

$$dn = n \left(\frac{3m}{4\pi k T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{3m}{4kT} v_x^2 \right) dv_x. \quad (2.4)$$

Через двойной слой могут пройти лишь те электроны, у которых нормальная к поверхности компонента скорости будет

больше $[2V(e/m)]^{1/2}$. Следовательно, умножив число электронов, проходящих через поверхность металла за 1 сек, на заряд e , получаем плотность электронного тока эмиссии

$$i = ne \left(\frac{3m}{4\pi kT} \right)^{1/2} \int_{(2eV/m)^{1/2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{3m}{4kT} v_x^2\right) v_x dv_x,$$

откуда

$$i = ne \left(\frac{kT}{3m\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{3eV}{2kT}\right). \quad (2.5)$$

Полученная формула хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Эта теория разъясняет также и появление разности потенциалов при соприкосновении двух металлов. Обозначив через N_1 и соответственно через N_2 число свободных электронов в единице объема соприкасающихся металлов, получаем, согласно кинетической теории газов, что давление электронного газа в первом металле будет $\frac{2}{3} N_1 kT$, а во втором $\frac{2}{3} N_2 kT$. Следовательно, электроны будут стремиться переходить из металла с большим N (меньшей работой выхода) во второй металл. Этот переход будет продолжаться до тех пор, пока силы электрического поля свободных зарядов, появившихся из-за диффузии электронов, не уравновесят разность давлений электронного газа. В случае этого термодинамического равновесия будем иметь, следовательно,

$$eEN = -\nabla p,$$

где p — давление электронного газа. Отсюда следует

$$\mathbf{E} = -\frac{2}{3} \frac{k}{eN} \nabla (NT).$$

Контактная разность потенциалов получается путем интегрирования по толщине переходного слоя между этими двумя металлами

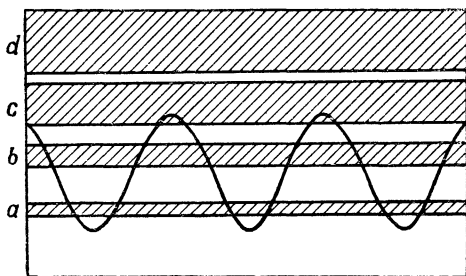
$$V_{12} = -\frac{2kT}{3e} \int_1^2 \frac{1}{N} \frac{dN}{ds} ds = \frac{2kT}{3e} \ln \frac{N_1}{N_2}.$$

Из этой формулы следует закон Вольта о контактной разности потенциалов:

$$V_{13} + V_{32} = \frac{2kT}{3e} \left(\ln \frac{N_1}{N_3} + \ln \frac{N_3}{N_2} \right) = V_{12}.$$

Аналогичным образом легко объясняются термоэлектрические эффекты Пельтье и Томсона, которые наблюдаются в нагретых металлах.

Как мы видим, хотя классическая электронная теория и основана на очень простых гипотезах, она оказалась в состоянии дать удовлетворительное в первом приближении толкование ряда явлений, наблюдаемых в металлах. Вместе с тем, теория Друде, развитая Лоренцем, встретилась с серьезными трудностями. Одна из них связана с вопросом о теплоемкости металлов. Если электроны ведут себя внутри металла как молекулы идеального газа, то, согласно кинетической теории, этот электронный газ должен был бы увеличить удельную теплоемкость металла, подчиняющуюся правилу Дюлонга и Пти, по крайней мере на $3 \text{ кал/град} \cdot \text{моль}$, что однако



Ф и г. 6.

не обнаруживается экспериментально. Зоммерфельд (1928 г.) нашел выход из этого тупика классической теории, приняв вместо статистики Максвелла—Больцмана квантовую статистику Ферми¹⁾.

Применив эту статистику к электронному газу, приходим к заключению, что так как последний является «вырожденным» газом, он почти не меняет удельную теплоемкость соответствующего металла вплоть до температур порядка 1000°K .

Электронная теория металлов была впоследствии развита Блохом, Пайерлсом, Бриллюэном и Френкелем²⁾. Согласно этим современным теориям, поскольку атомы твердых тел образуют решетчатую структуру (теория Борна и Кармана), допускается, что внутри металлов существует периодическое в пространстве электрическое поле, создаваемое положительными ионами, расположенными в узлах кристаллической решетки. В поперечном сечении это поле имеет вид, представленный на фиг. 6. Кривая показывает изменение потенциала с расстоянием; в окрестности ионов решетки потенциал максимален, а между двумя ионами минимален. В этом смысле говорят о «горах» и «долинах» потенциала внутри металлов и твердых тел вообще. Электроны скапливаются естественным образом в «долинах» потенциала, заполняя их до определенного уровня.

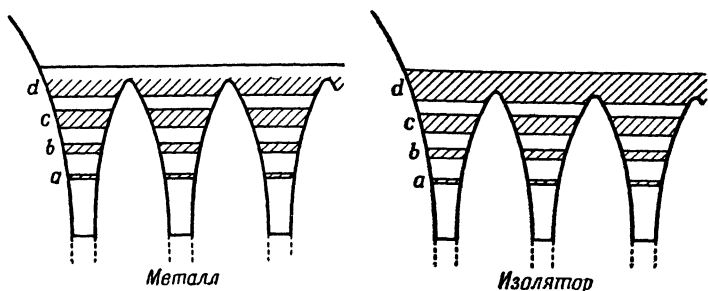
¹⁾ См. [1], гл. 5 и [2], § 39.

²⁾ См. [3].

Чтобы электрон мог свободно перемещаться внутри металла в смысле, принятом в первоначальной классической теории электронного газа, он должен быть в состоянии пройти через «гору» потенциала. С точки зрения классической физики это возможно, только если кинетическая энергия электронов, обусловленная тепловым движением, достаточно велика. С точки зрения квантовой теории благодаря «туннельному эффекту» электрон может пройти через такой «потенциальный барьер» и при меньшей кинетической энергии. Квантовая теория приводит также к заключению, что, как и в изолированных атомах, энергия электронов в твердых телах не может быть любой. Напротив, допустимы только определенные значения энергии, так что электроны в металлах распределяются по определенным уровням энергии, образующим так называемые энергетические полосы (a , b , c на фиг. 6). Эти полосы разделены интервалами, в которых нахождение электронов запрещено. Согласно статистике Ферми, электроны занимают энергетические полосы последовательно, начиная с наименьших значений энергии. Внутри каждой полосы существует одинаковое число состояний, соответствующих движению электронов в заданном и в противоположном направлениях, причем энергии электронов в отсутствие внешней разности потенциалов в обоих случаях одинаковы. Следовательно, когда не наложено электрическое поле, число электронов, движущихся в противоположных направлениях, одинаково, так что фактически через твердое тело не проходит никакой ток. Однако если к кристаллу приложить извне разность потенциалов, то состояния, соответствующие движению по полю и против поля, приобретут разные энергии. В этом случае возникает следующая альтернатива: если все занятые энергетические полосы заполнены электронами до отказа, то не произойдет никакого изменения по сравнению со случаем, когда разность потенциалов не приложена; если же наиболее высокая из занятых полос не полностью заполнена, то электроны перераспределятся по состояниям данной полосы таким образом, что станут преобладать состояния, соответствующие движению электронов по полю, т. е. возникнет электрический ток. Эта теория приводит к установлению различия между металлом и изолятором (фиг. 7). А именно в металлах верхняя полоса не полностью заполнена электронами, в то время как в изоляторах все полосы, содержащие электроны, полностью заполнены, и, следовательно, электроны в них не могут свободно перемещаться. Существует и промежуточная категория веществ, называемых полупроводниками, в изучении которых большую роль сыграли советские физики¹⁾. Полупроводники при низких температурах ведут себя как изоляторы. Но в отличие от изоляторов у них расстояние между последней

¹⁾ См., например, [4].

полосой, заполненной электронами, и следующей незанятой полосой настолько мало, что при повышении температуры благодаря



Ф и г. 7.

тепловому движению некоторое число электронов оказывается переброшенным в незанятую полосу. Вследствие этого электропроводность полупроводников растет с температурой.

§ 2. Теория электрической поляризации

В отличие от феноменологической теории поляризации диэлектриков, основанной на гипотезе непрерывности среды, в которой используется вектор индукции $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ — определяемая из опыта постоянная, в атомистической теории, основанной на гипотезе прерывности вещества и электричества, величина \mathbf{D} утрачивает свой интуитивный смысл и вместо нее рассматривается *поляризация* \mathbf{P} , играющая фундаментальную роль.

Чтобы вычислить поляризацию \mathbf{P} , т. е. суммарный дипольный электрический момент единицы объема диэлектрика, нужно знать строение данного вещества. Появление суммарного дипольного электрического момента при наложении внешнего электрического поля можно объяснить двумя способами, поскольку молекулы вещества могут либо иметь собственный дипольный электрический момент, либо быть неполярными.

Так, двухатомные молекулы (N_2 , H_2 и т. п.), состоящие из одинаковых атомов, молекулы с линейной симметрией (CO_2 , C_2H_4 и т. п.) или молекулы с тетраэдральной структурой (CH_4 , CCl_4 и т. п.) не обладают дипольным моментом.

Так как структура молекул HCl , HBr , HI нелинейная, то они обладают дипольным моментом, так же как и молекулы H_2O , CO . Дипольный момент этих двухатомных молекул очень мал, а именно это величина порядка 10^{-18} электростатических единиц. В случае многоатомных молекул дипольный момент может быть в 2—3 раза больше.

В первом приближении можно развить формальную теорию, если допустить, что каждая молекула имеет средний электрический момент \mathbf{p} (который первоначально может быть равен нулю или может иметь определенное значение, отличное от нуля), и не входить в подробности относительно структуры молекул и внутренних сил взаимодействия.

В случае когда молекулы соответствующего вещества и в отсутствие поля имеют собственный электрический момент, отличный от нуля, естественно допустить, что в отсутствие внешнего электрического поля оси полярных молекул направлены произвольно, так что суммарный дипольный электрический момент равен нулю. При наличии внешнего электрического поля эти молекулы будут стремиться расположиться так, чтобы их дипольные электрические моменты были направлены по полю. Этому стремлению к ориентации противодействует тепловое движение молекул. Следовательно, идеальное упорядочение всех полярных молекул может иметь место либо при бесконечно большой силе внешнего поля, либо при температуре абсолютного нуля. Если допустить, что \mathbf{P} зависит линейно от \mathbf{E} , то коэффициент пропорциональности между \mathbf{P} и \mathbf{E} , т. е. диэлектрическая восприимчивость χ_e , будет зависеть от температуры.

Если молекулярный электрический момент возникает при поляризации молекулы под влиянием внешнего электрического поля, то естественно допустить, что поляризация происходит из-за деформации молекулы в электрическом поле вследствие перемещения электронов, так что центр масс электрического заряда электронной оболочки не совпадает более с центром масс положительного электрического заряда ядра. Дипольный электрический момент, который в результате возникает, направлен по электрическому полю и предполагается пропорциональным напряженности поля.

1. Теория индуцированной поляризации. Предположим, что соответствующее вещество содержит в единице объема N молекул (или атомов), которые не обладают собственным дипольным электрическим моментом.

Если пренебречь взаимным влиянием между индуцированными диполями, то в первом приближении можно рассматривать диполь как квазидуэту:

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

т. е. можно допустить, что индуцированный дипольный электрический момент \mathbf{p} одной молекулы пропорционален индуцирующему электрическому полю. Коэффициент пропорциональности α называется *поляризуемостью* молекулы; это постоянная, зависящая от особенностей структуры рассматриваемой молекулы.

Поляризуемость атомов и ионов есть *скалярная* величина размерности L^3 . Для молекул, не обладающих сферической симметрией,

поляризуемость может зависеть от направления, т. е. может быть *тензорной* величиной, так что индуцированный момент \mathbf{p} может иметь направление, отличное от направления внешнего электрического поля \mathbf{E} (при условии, что свободное вращение молекул запрещено). В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда поляризуемость есть скалярная величина.

Предположение (2.6) справедливо лишь, когда напряженность постоянного внешнего электрического поля мала по сравнению с напряженностью внутреннего электрического поля молекулы (или атома), что и имеет место при обычных экспериментальных условиях. В этом случае очевидно, что смещение, которое испытывает электронная оболочка, мало, и, следовательно, смещение электронов из положения равновесия можно рассматривать как квазиупругое, предположив, что электроны связаны квазиупруго, и допустив, что на них действует пропорциональная смещению квазиупругая сила, уравнивающая действие электрического поля.

Дипольный электрический момент единицы объема, т. е. поляризация, будет равен

$$\mathbf{P} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E} = \chi_e\epsilon_0\mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Однако полученное выражение справедливо, только если расстояние между молекулами достаточно велико, чтобы можно было пренебречь взаимодействием между диполями. В случае твердых тел и жидкостей это приближение несправедливо, так как расстояния между молекулами малы, и, следовательно, взаимодействием нельзя пренебрегать. Здесь нужно ввести понятие внутреннего электрического поля или эффективного поля \mathbf{E}^* , которое, как показал Лоренц, отличается от внешнего электрического поля \mathbf{E} .

По определению, внутренним электрическим полем называется электрическое поле, действующее в точке¹⁾, в которой находится рассматриваемая молекула или атом, т. е. поле, которое эффективно порождает поляризацию. Соотношение (2.6) нужно, следовательно, заменить соотношением

$$\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}^*. \quad (2.6')$$

Для вычисления \mathbf{E}^* предположим, что рассматриваемая точка окружена маленькой сферой. Можно считать, что \mathbf{E}^* состоит из трех членов: поля \mathbf{E}_1^* , обусловленного действием диполей, находящихся внутри рассматриваемой сферы, которым можно пренебречь, предполагая, что в случае изотропной среды имеет место взаимная

¹⁾ То есть, по определению, в \mathbf{E}^* не входит электрическое поле, созданное самой молекулой (или атомом). Далее, такое определение предполагает, что \mathbf{E}^* приблизительно однородно во всей области, занятой молекулой (атомом), иными словами, что расстояние между молекулами достаточно большое.

компенсация¹⁾); поля \mathbf{E}_2^* , обусловленного действием диполей, находящихся вне рассматриваемой сферы, и поляризующего внешнего поля \mathbf{E} .

Выясним роль диполей, находящихся вне сферы и предполагаемых точечными, в создании поля \mathbf{E}^* в центре. Действие внешних диполей эквивалентно полю, созданному фиктивными зарядами, распределенными на поверхности сферы

$$\sigma' = P_n = P \cos \theta.$$

На самом деле, на границе двух сред вектор индукции удовлетворяет граничному условию

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

где σ — плотность поверхностного заряда. Но, по определению,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

следовательно,

$$\epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma - (P_{2n} - P_{1n}).$$

Итак, равномерная поляризация среды эквивалентна появлению поверхностного заряда

$$\sigma' = -(P_{2n} - P_{1n}),$$

или, если вторая среда — вакуум,

$$\sigma' = P_n.$$

Следовательно, проекция напряженности электрического поля на направление P в центре сферы будет

$$E_{2p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma' \cos \theta}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{P \cos^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3\epsilon_0} P.$$

Таким образом, можно записать

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (2.8)$$

Поэтому соотношение (2.7) заменяется соотношением

$$\mathbf{P} = N\alpha\epsilon_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right), \quad (2.9)$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - 1/3N\alpha} \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.10)$$

¹⁾ Можно доказать, что поле \mathbf{E}_1^* строго равно нулю для кубической решетки, состоящей из молекул, каждая из которых эквивалентна в электростатическом отношении диполю. Для изотропного вещества, например для жидкости, равенство $\mathbf{E}_1^* = 0$ получается только если пренебречь поляризующим действием рассматриваемой молекулы на молекулы, окружающие ее.

Так как диэлектрическая восприимчивость χ_e определяется соотношением (2.7)

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

а диэлектрическая проницаемость $\kappa_e = \chi_e + 1 = \varepsilon/\varepsilon_0$, то имеем

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\kappa_e - 1) \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) получаем

$$\frac{N\alpha}{1 - 1/3 N\alpha} = \kappa_e - 1,$$

или

$$\frac{1}{3} N\alpha = \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2}. \quad (2.12)$$

Эта формула известна под названием формулы Клаузиуса — Мосотти. Она была выведена для частного случая электростатического поля.

Обычно формулы (2.8) и (2.12) называются формулами Лоренца — Лоренца по именам датского (L. Lorentz) и голландского (H. A. Lorentz) физиков, которые в 1880 г. независимо вывели их на основе изложенных рассуждений, учтя разницу между средним макроскопическим полем \mathbf{E} и эффективным полем \mathbf{E}^* .

Согласно формуле (2.12), для заданного вещества величина $(\kappa_e - 1)/(\kappa_e + 2)$ пропорциональна N и, следовательно, плотности d . Рассматривая α как инвариантную молекулярную постоянную, получаем

$$\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} = Cd. \quad (2.12')$$

Эта формула определяет зависимость диэлектрической проницаемости от плотности рассматриваемого вещества¹⁾. При ее помощи можно определить диэлектрическую проницаемость смеси, если предположить, что при смешивании структура молекул не меняется. Пусть κ_{ei} — диэлектрическая проницаемость некоторого вещества с плотностью D_i , а d_i — концентрация этого вещества в смеси; можно показать, что

$$\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} = \sum_i \frac{d_i}{D_i} \frac{\kappa_{ei} - 1}{\kappa_{ei} + 2}.$$

Определим также и так называемую «молярную поляризацию». Если обозначить через μ молекулярный вес, то имеем $N\mu/d = N_0$, где N_0 — число Авогадро ($N_0 = 6,06 \cdot 10^{23}$). Молярная поляризация \mathcal{P} определяется соотношением

¹⁾ Это соотношение было экспериментально проверено в 1899 г. русским физиком П. Н. Лебедевым для паров ряда органических соединений.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} N_0 \alpha = 2,02 \cdot 10^{23} \alpha, \quad (2.13)$$

так что (2.12) принимает вид

$$\mathcal{F} = \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \frac{\mu}{d}. \quad (2.14)$$

Молярная поляризация — это величина, определяемая экспериментально, так как величины κ_e , μ и d могут быть получены из эксперимента; она имеет размерность объема и принимает значения от нескольких единиц до нескольких сот кубических сантиметров. Следовательно, зная \mathcal{F} , по соотношению (2.13) можно вычислить значение α .

В случае газообразных веществ можно положить $\kappa_e + 2 \approx 3$ (это означает, что в этом случае $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$); следовательно,

$$\mathcal{F} = \frac{\kappa_e - 1}{3} \frac{\mu}{d}. \quad (2.14')$$

При выводе формулы (2.8) мы предположили, что можно пренебречь полем, порожденным молекулами, находящимися внутри сферы, описанной вокруг точки, в которой мы вычисляем \mathbf{E}^* . Это справедливо для кристаллов с кубической решеткой или аморфных веществ, а вообще следует считать, что созданию поля \mathbf{E}^* способствует и поле этих поляризованных молекул; в таком случае нужно писать

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \left(\frac{1}{3\epsilon_0} + s \right) \mathbf{P}. \quad (2.8')$$

где s — поправочный коэффициент, зависящий от характера распределения молекул.

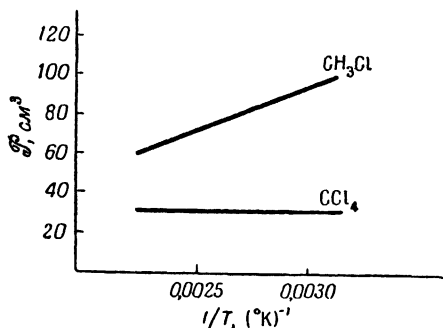
Отметим также, что при выводе формулы (2.6') мы предположили, что молекулы *изотропны*. Из этого предположения следовало, что поляризуемость есть скалярная величина. Однако в случае кристаллов ни молекулы, ни их распределение не изотропны. Поэтому соотношение (2.6') заменяется здесь тензорным соотношением, а соответственно и диэлектрическая проницаемость принимает тензорный характер.

Итак, резюмируем. В поляризационной среде каждой молекуле (или атому) приписывается момент \mathbf{p} , который пропорционален эффективному полю \mathbf{E}^* и определен соотношением (2.6'). Следовательно, основная величина, к определению которой сводятся наши вычисления, это коэффициент пропорциональности α , который можно определить как средний *электрический момент*, приобретаемый молекулами под влиянием поляризующего электрического поля единичной напряженности.

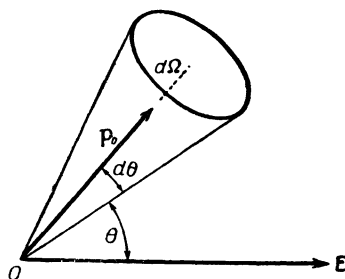
Отметим, что частицы (молекулы, ионы, атомы), которые испытывают полярную индукцию, находятся в постоянном тепловом движении. Когда поляризуемость частицы есть скалярная величина,

т. е. не зависит от ориентации частицы, индуцированная поляризация не влияет на тепловое движение. Если же поляризуемость — тензорная величина и молекулы имеют возможность свободно вращаться (жидкость или газ), то они будут ориентироваться преимущественно таким образом, чтобы ось максимальной поляризуемости была направлена по полю. Однако такой ориентации будет противодействовать тепловое движение. Этот случай значительно более сложный и мы его рассматривать не будем.

2. Молекулы с постоянным дипольным моментом. Экспериментальное исследование соотношения между χ_e , соответственно \mathcal{P} , и температурой показывает, что вещества делятся на две категории, а именно: у одних молярная поляризация не зависит от температуры, а у других она линейно зависит от $1/T$ (фиг. 8). В первом



Ф и г. 8.



Ф и г. 9.

случае очевидно, что мы имеем дело с неполярными молекулами, а во втором вещество (например, хлористый метил CH_3Cl) состоит из полярных молекул.

Для вывода закона изменения \mathcal{P} с температурой предположим, что каждая молекула имеет собственный постоянный электрический момент p_0 , который в первом приближении может рассматриваться как дипольный.

В отсутствие внешнего поля оси этих элементарных диполей будут направлены произвольно, так что средний результирующий момент единицы объема P будет равен нулю. Когда рассматриваемое вещество будет находиться во внешнем электрическом поле, оси диполей ориентируются по полю. Этому стремлению к ориентации будет противодействовать беспорядочное тепловое движение молекул.

В среднем поляризация единицы объема окажется отличной от нуля, причем вклад p каждой молекулы в поляризацию будет составлять дробную часть от p_0 . Необходимым условием этого яв-

ляется подвижность молекул, т. е. вещество должно быть газом или по крайней мере жидкостью.

Для простоты рассмотрим газ, состоящий из полярных молекул, находящихся в электрическом поле E^* . Подсчет степени ориентации молекул, т. е. среднего значения проекции электрического момента молекулы на направление поля, в зависимости от температуры и от напряженности поля является статистической задачей. Мы будем основываться на законе распределения Больцмана из кинетической теории газов. Согласно этому закону, в условиях термодинамического равновесия число n частиц газа, которые при температуре T в рассматриваемом поле сил имеют потенциальную энергию w , задается соотношением

$$n = Ae^{-w/kT}, \quad (2.15)$$

где A — постоянный коэффициент пропорциональности, а k — постоянная Больцмана. Эта формула известна под названием барометрической, так как она дает распределение по вертикали молекул воздуха под влиянием тяжести.

В настоящем случае потенциальная энергия w диполя с моментом p_0 в поле E^* будет

$$w = -p_0 E^* \cos \theta.$$

Изображая «следы» осей диполей точками на сфере единичного радиуса, получаем для числа dN точек, лежащих в шаровом поясе, образованном пересечением конусов с углами раскрытия θ и $\theta + d\theta$ с поверхностью сферы ($R = 1$), следующее соотношение:

$$dN = A \exp\left(\frac{p_0 E^* \cos \theta}{kT}\right) dS, \quad (2.16)$$

где $dS = 2\pi \sin \theta d\theta$ — поверхность сферического пояса, θ — угол между осью диполя и направлением поля E^* (фиг. 9) (заметим, что телесный угол $d\Omega = dS = 2\pi \sin \theta d\theta$). Число диполей, оси которых находятся в телесном угле $d\Omega$, равно

$$dN = A \exp\left(\frac{p_0 E^* \cos \theta}{kT}\right) d\Omega. \quad (2.17)$$

Для определения коэффициента A заметим, что число диполей в единичном объеме равно числу молекул в единичном объеме, т. е.

$$N = 2\pi A \int_0^\pi \exp\left(\frac{p_0 E^* \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta.$$

Производя замену переменных

$$x = \frac{p_0 E^*}{kT} \cos \theta, \quad (2.18)$$

получаем

$$N = 2\pi A \frac{kT}{\rho_0 E^*} \int_{-\rho_0 E^*/kT}^{+\rho_0 E^*/kT} e^x dx = 4\pi A \frac{kT}{\rho_0 E^*} \operatorname{sh} \frac{\rho_0 E^*}{kT}, \quad (2.19)$$

где гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

Учитывая, что элементарный диполь, ось которого образует угол θ с направлением поля, увеличивает результирующий момент \mathbf{P} на величину $p = \rho_0 \cos \theta$, получаем, что среднее значение момента молекулы равно

$$\bar{p} = \frac{\int A \exp [(\rho_0 E^*/kT) \cos \theta] \rho_0 \cos \theta d\Omega}{\int A \exp [(\rho_0 E^*/kT) \cos \theta] d\Omega}. \quad (2.20)$$

Используя замену переменных (2.18) и принимая во внимание (2.19), имеем

$$\bar{p} = \frac{2\pi A \rho_0 \left(\frac{kT}{\rho_0 E^*} \right)^2 \int_{-\rho_0 E^*/kT}^{+\rho_0 E^*/kT} x e^x dx}{4\pi A \frac{kT}{\rho_0 E^*} \operatorname{sh} \frac{\rho_0 E^*}{kT}},$$

или

$$\bar{p} = \rho_0 \left(\operatorname{cth} \frac{\rho_0 E^*}{kT} - \frac{kT}{\rho_0 E^*} \right). \quad (2.21)$$

Это соотношение было выведено Ланжевеном (1905 г.) для случая магнетизма. Функция, заключенная в скобки, — функция Ланжевена — обычно обозначается

$$L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x},$$

так что можно записать

$$\bar{p} = \rho_0 L \left(\frac{\rho_0 E^*}{kT} \right). \quad (2.21')$$

При больших значениях x функция $L(x)$ стремится к 1, а при малых значениях ведет себя как $x/3$ (фиг. 10). Так как ρ_0 очень мал, то в первом приближении можно записать

$$L \left(\frac{\rho_0 E^*}{kT} \right) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0 E^*}{kT},$$

откуда

$$\bar{p} = \frac{1}{3} \frac{p_0^2 E^*}{kT}. \quad (2.21'')$$

В силу основного соотношения (2.6')

$$\bar{p} = \alpha \epsilon_0 E^*$$

имеем

$$\alpha = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^2}{kT}. \quad (2.22)$$

Следовательно, в силу соотношения (2.13) молярная поляризация будет

$$\mathcal{P} = \frac{1}{9\epsilon_0} N_0 \frac{p_0^2}{kT}. \quad (2.23)$$

Учитывая также (2.11), вместо соотношения (2.12) получаем

$$\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} = \frac{1}{9\epsilon_0} N \frac{p_0^2}{kT}. \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что в первом приближении можно считать диэлектрическую проницаемость не зависящей от поля.

Итак, в случае разреженных газов точное выражение, учитывающее как индуцированный, так и постоянный моменты молекул, будет иметь вид

$$\mathbf{P} = N_0 \left(\epsilon_0 \alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \right) \mathbf{E},$$

а поскольку

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

то

$$\chi_e = N_0 \left(\alpha_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^2}{kT} \right).$$

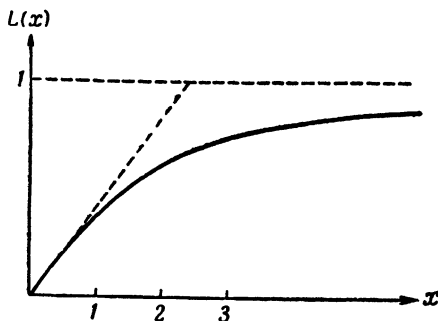
Из вышеизложенного следует, что точным выражением для молярной поляризации является

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} N_0 \left(\alpha_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^2}{kT} \right), \quad (2.25)$$

где α_0 не зависит от температуры (что соответствует неполярным молекулам).

Для жидкостей и твердых тел будем иметь

$$\mathbf{P} = N_0 \left(\epsilon_0 \alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \right) \mathbf{E}^* = N_0 \left(\epsilon_0 \alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \right) \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right);$$



Ф и г. 10.

следовательно,

$$\mathbf{P} \left[1 - \frac{1}{3\epsilon_0} N_0 \left(\epsilon_0 \alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \right) \right] = N_0 \left(\epsilon_0 \alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \right) \mathbf{E},$$

откуда

$$\chi_e = N_0 \frac{\alpha_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^2}{kT}}{1 - \frac{1}{3} N_0 \left(\alpha_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^2}{kT} \right)}.$$

Из соотношений (2.23) и (2.24) можно вычислить дипольный момент молекулы p_0 . Для большинства полярных молекул находим величину порядка 10^{-29} к·м, что оправдывает принятое приближение.

Если известно строение молекулы, то можно вычислить значение ее дипольного момента. Можно найти зависимость между диэлектрической проницаемостью и химическими свойствами веществ, т. е. их молекулярной структурой. Таким образом, определение диэлектрической проницаемости позволяет выяснить структуру молекул, в особенности органических веществ, из сопоставления полученных результатов с данными спектроскопических измерений. Исследования такого рода были проведены в основном Дебаем [5], которому мы обязаны теорией полярных молекул, развитой, в частности, в исследованиях Иоффе, Курчатова, Кобеко, Сканави¹⁾.

Если бы вышеизложенная теория была строго верной, то вообще при одной и той же температуре молярная поляризация не должна была бы зависеть от агрегатного состояния вещества. В частности, она не должна была бы меняться при испарении или при плавлении. В действительности же в случае воды, например, имеем $\chi_e = 80$ для жидкого состояния и $\chi_e = 4$ для твердого состояния.

Это объясняется тем, что у жидкостей в отличие от газов мы не можем предполагать, что макроскопическая поляризация получается простым сложением элементарных дипольных моментов, так как образуются ассоциации молекул, причем дипольный момент такой ассоциации отличен от суммы моментов составляющих ее молекул. Наконец, в случае твердых тел молекулы не могут свободно двигаться.

Из формулы (2.21) следует, что вообще среднее значение проекции момента молекулы не пропорционально полю, а представляет собой более сложную функцию. Следовательно, и диэлектрическая проницаемость зависит от поля, чем объясняются диэлектрические аномалии, обнаруженные в опытах с сегнетоэлектриками (явления гистерезиса и т. д.).

Для сильных полей χ_e уменьшается, а \mathbf{P} не растет линейно с \mathbf{E} , а изменяется более медленно.

¹⁾ См., в частности, книгу Г. И. Сканави [6].

§ 3. Теория намагничивания

Согласно современным представлениям, диамагнетизм и парамагнетизм считаются атомными свойствами. Ланжевен (1905 г.) показал, что их можно объяснить движением электронов внутри атома. А именно изолированный, т. е. свободный от влияния какого-либо внешнего магнитного поля, атом может иметь либо не иметь собственный магнитный момент. Это зависит от его внутренней структуры (от конфигурации электронных орбит, согласно теории атома Бора — Резерфорда). Однако в обоих случаях под влиянием внешнего магнитного поля атом приобретает индуцированный магнитный момент (диамагнитный), ось которого ориентирована в направлении, противоположном направлению поля. Диамагнетизм является общим свойством вещества. Когда собственный момент атома равен нулю, имеем дело с диамагнитными веществами в обычном смысле слова. Если же собственный момент атома отличен от нуля и превышает индуцированный момент, что, как правило, и имеет место, то происходит наложение этих двух моментов и вещество ведет себя как парамагнитное. По аналогии с теорией электрической поляризации в случае намагничивания будем допускать, что в первом приближении образуются магнитные диполи и что имеет место наложение полей этих диполей. Намагниченность \mathbf{M} и магнитная восприимчивость χ_m приобретают, таким образом, реальный смысл вместо \mathbf{H} и μ .

1. Теория диамагнетизма. Опыты, проведенные П. Кюри, показали, что восприимчивость диамагнетика не зависит от температуры (за исключением висмута); поэтому диамагнетизм можно приписывать электронам атома, которые эквивалентны круговым токам. Как показал Ланжевен, диамагнетизм можно объяснить на основе индуктивного действия внешнего магнитного поля на атомные электроны.

Для упрощения изложения этой теории примем упрощенную модель атома, предположив, что электроны движутся вокруг атомного ядра по круговым траекториям. Пусть r — радиус такой траектории и ω — постоянная угловая скорость. Линейная скорость электрона будет, следовательно, $v = r\omega$. Электрон, который описывает круговую траекторию со скоростью \mathbf{v} , эквивалентен круговому току. Согласно теореме Ампера, круговой ток эквивалентен с точки зрения магнитного действия магнитному листку с моментом $\mathbf{m}_0 = S\mathbf{J}$, где $S = \pi r^2$ — поверхность, ограниченная круговой траекторией, $\mathbf{J} = e/\tau$ — сила тока и $\tau = 2\pi r/v$ — время оборота электрона по орбите. Следовательно, $m_0 = \frac{1}{2}erv$, или в векторной форме¹⁾

$$\mathbf{m}_0 = -\frac{e}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\frac{e}{2m} \mathbf{g} = -\eta \mathbf{g}, \quad (2.26)$$

¹⁾ Знак минус обусловлен тем, что заряд электрона равен $-e$ ($e > 0$).

где $\mathbf{g} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ — момент количества движения, или механический момент. Это соотношение проверяется экспериментально. А именно оно доказывается тем, что намагничивание железного цилиндра вызывает его вращение (Эйнштейн — де Гааз, 1915 г.) и, наоборот, вращение цилиндра намагничивает его (Барнетт, 1917 г.)

Полный магнитный момент атома будет, следовательно, равен

$$\mathbf{m}_0 = -\frac{e}{2} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

(суммирование по всем электронам атома).

Вообще $\mathbf{m}_0 \neq 0$ для парамагнитных веществ. Если же атом имеет симметричную структуру, то может случиться, что будет $\mathbf{m}_0 = 0$. Этот случай соответствует диамагнитным веществам.

Атом с симметричной структурой получает под влиянием внешнего магнитного поля магнитный момент, направленный против поля (диамагнитный).

Предположим для простоты, что внешнее магнитное поле перпендикулярно плоскости траектории электрона. В отсутствие внешнего магнитного поля имеем

$$F = m\omega^2 r, \quad (2.27)$$

где F — сила, действующая на электрон во внутриатомном поле. Внешнее магнитное поле \mathbf{B} , перпендикулярное траектории, проявится в дополнительной лоренцевой силе Bev , направленной по радиусу круговой траектории от центра или к центру в зависимости от направления движения электрона. Из-за этой дополнительной силы угловая скорость меняется на $\Delta\omega$, так что имеем

$$F - Bev = mr(\omega + \Delta\omega)^2. \quad (2.27')$$

Когда $\Delta\omega$ очень мала по сравнению с ω , можно пренебречь $\Delta\omega^2$. Исключая F из (2.27) и (2.27'), получаем

$$\Delta\omega = -\frac{e}{2m} B = -\eta B. \quad (2.28)$$

Это соотношение известно под названием теоремы Лармора (1897 г.) Из этой теоремы следует, что под действием поля электроны атома приобретают дополнительную угловую скорость, совершая равномерную прецессию вокруг направления поля.

Точнее, пусть \mathbf{v}_a — скорость электрона, движущегося под действием силы \mathbf{F}_a , обусловленной внутриатомным полем, и силы Лоренца, обусловленной внешним магнитным полем. Уравнение движения будет иметь вид

$$m\dot{\mathbf{v}}_a = \mathbf{F}_a + e\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}. \quad (a)$$

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω_L , имеем

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \omega_L \times \mathbf{r},$$

где $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Учитывая, что производные по времени от векторов во вращающейся и покоящейся системах координат связаны соотношением $(\dot{\mathbf{a}})_{\text{пок}} = (\dot{\mathbf{a}})_{\text{вращ}} + \omega \times \mathbf{a}$, получаем

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \dot{\mathbf{v}} + 2\omega_L \times \mathbf{v} + \omega_L \times (\omega_L \times \mathbf{r}). \quad (6)$$

Из соотношений (а) и (б) с точностью до членов второго порядка по B при учете [согласно (2.28)]

$$\Delta\omega = \omega_L = -\frac{e}{2m}B = -\eta B$$

следует, что сила Лоренца уравнивается силой Кориолиса $-2m\omega_L \times \mathbf{v}$, так что уравнение движения во вращающейся системе координат сводится к

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_a.$$

Следовательно, при наличии магнитного поля в рассматриваемом приближении движение электрона представляет собой наложение прецессии Лармора с частотой ω_L на движение под действием силы \mathbf{F}_a .

Следовательно, можно сказать, что атом в целом ведет себя под влиянием поля как волчок, вращающийся вокруг направления поля со скоростью $\Delta\omega$.

Прецессия Лармора порождает дополнительный механический момент $\mathcal{J}\omega_L$, где $\mathcal{J} = \sum_k m_k d_k^2$ — момент инерции атома относительно оси, проходящей через ядро и параллельной ω_L . Тогда, согласно (2.26) и (2.28), индуцируется атомный магнитный момент

$$\mathbf{m}_d = -\eta\mathcal{J}\omega_L = -\eta^2\mathcal{J}B. \quad (2.29)$$

Направление этого момента всегда противоположно направлению поля, следовательно, он объясняет существование диамагнетизма. Обозначая через N число атомов в единице объема, получаем для средней плотности диамагнитного момента следующее выражение:

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{m}_d N = -N\eta^2\overline{\mathcal{J}}B. \quad (2.30)$$

Так как из-за прецессии

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0 + \omega_L \times \mathbf{r}_i,$$

то магнитный момент атома будет

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2} \sum_i \overline{\mathbf{r}_i \times [\mathbf{v}_i^0 + \omega_L \times \mathbf{r}_i]} = -\frac{e}{2} \sum_i \overline{\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i^0} - \frac{e}{2} \sum_i \overline{\mathbf{r}_i \times (\omega_L \times \mathbf{r}_i)}.$$

Первый член справа равен нулю, так как он представляет собой магнитный момент \mathbf{m}_0 атома в отсутствие внешнего поля. Следовательно,

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2} \sum_i \overline{\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_i)} = -\frac{e}{2} \sum_i [\overline{r_i^2 \boldsymbol{\omega}_L} - \overline{(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}_L) \mathbf{r}_i}].$$

Заметив, что $\boldsymbol{\omega}_L = \omega(0, 0, \omega_L)$, $\mathbf{r}_i = r(x_i, y_i, z_i)$, имеем

$$m_x = -\frac{e}{2} \omega_L \sum_i \overline{x_i z_i}, \quad m_y = -\frac{e}{2} \omega_L \sum_i \overline{y_i z_i},$$

$$m_z = -\frac{e}{2} \omega_L \sum_i \overline{(x_i^2 + y_i^2)}.$$

Считая распределение электронов в атоме сферически симметричным, имеем

$$\sum_i \overline{x_i z_i} = 0, \quad \sum_i \overline{y_i z_i} = 0, \quad \sum_i \overline{x_i^2} = \sum_i \overline{y_i^2} = \sum_i \overline{z_i^2} = \frac{1}{3} \sum_i \overline{r_i^2};$$

следовательно,

$$m_x = m_y = 0, \quad m_z = -\frac{2}{6} e \omega_L \sum_i \overline{r_i^2},$$

а среднее значение момента инерции равно

$$\overline{J} = \frac{2}{3} m \sum_i \overline{r_i^2}.$$

Итак,

$$\mathbf{M}_d = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.30')$$

откуда следует, что восприимчивость диамагнетика равна

$$\chi_m = -\frac{e^2 N}{6m} \mu_0 \sum_i \overline{r_i^2}. \quad (2.31)$$

Отметим, что в формулу (2.31), строго говоря, входит μ , а не μ_0 . Но у диамагнетиков разница между μ и μ_0 настолько мала, что практически ею можно пренебречь. Из этого соотношения видно, что χ_m не зависит от температуры и зависит от структуры атома, т. е. от распределения электронов в атоме, что согласуется с экспериментальными результатами.

Отметим, что формула (2.31) дает правильное значение (10^{-6}) порядка величины восприимчивости диамагнетиков, согласующееся с экспериментальными данными. Чтобы получить восприимчивость одного атома, следует разделить χ_m на число Авогадро ($\sim 10^{23}$).

При выводе формулы (2.30) мы предполагали, что индуцированные в атомах магнитные моменты не влияют друг на друга. Для учета этого взаимодействия, как и в случае электрического поля, следует ввести понятие эффективного магнитного поля Лоренца.

По аналогии имеем

$$\mathbf{B}^* \approx \mathbf{B} + \frac{\mu_0}{3} \mathbf{M}.$$

По определению,

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_M}{\mu_0} \mathbf{B},$$

где χ_M — диамагнитная восприимчивость единицы объема вещества. С другой стороны,

$$\mathbf{M} = \frac{\chi'_m}{\mu_0} \mathbf{B}^*,$$

где χ'_m определяется формулой (2.31). Следовательно,

$$\chi_M \mathbf{B} = \chi'_m \left(\mathbf{B} + \frac{\chi_m}{3} \mathbf{B} \right),$$

откуда

$$\chi_M = \frac{\chi'_m}{1 - 1/3\chi'_m}. \quad (2.32)$$

Это точное выражение для восприимчивости единицы объема вещества в зависимости от восприимчивости атома или молекулы. В действительности же (2.32) мало отличается от (2.31), так как в отличие от случая электрической поляризации выражение, стоящее в знаменателе, близко к единице.

Однако следует отметить парадоксальный факт, что с точки зрения классической теории диамагнетизма полученный результат, хотя и согласуется с экспериментальными результатами, является совершенно ошибочным. В формуле (2.31) предполагается, что тепловое движение не влияет на результат статистического усреднения. Правильнее при вычислении статистической средней магнитного момента атомов из заданного объема учитывать и тепловое равновесие этих атомов, т. е. пользоваться законом распределения Больцмана.

Как показали Ван-Левин и Терлецкий, в рамках классической статистики магнитный момент единицы объема газа, состоящего из атомов в стационарном состоянии, находящихся под влиянием постоянного магнитного поля, равен нулю. Формула (2.31) оправдана только при допущении существования стационарных орбит внутри атома в согласии с квантовой теорией атома. Строгая теория, основанная на результатах квантовой механики, была развита Ван Флеком [7]¹⁾.

В случае атомов и ионов, а также молекул, обладающих сферической симметрией, диамагнитная восприимчивость есть скалярная величина. Восприимчивость молекул, не обладающих сферической симметрией, меняется в зависимости от направления оси молекулы, как и в случае электрической поляризации. Диамагнитная

¹⁾ Для справок см. также [8].

анизотропия, наблюдаемая у некоторых молекул, позволила сделать важные выводы относительно их строения (например, бензола, нафталина).

2. Теория парамагнетизма. Теория парамагнетизма была разработана Ланжевеном и будучи совершенно аналогичной теории поляризации веществ, состоящих из полярных молекул, послужила Дебаю в качестве модели для объяснения электрической поляризации. Как и в случае электрической поляризации, теория строго справедлива для газов, но применяется и для разбавленных растворов парамагнитных солей или даже для некоторых твердых веществ всякий раз, когда удовлетворяется закон Кюри, т. е. когда $\chi_m T = \text{const}$.

Будем считать, что молекулы (или атомы) имеют собственный дипольный магнитный момент m_0 . В случае внешнего поля \mathbf{B} на эти диполи эффективно будет действовать внутреннее магнитное поле \mathbf{B}^* , вообще говоря, отличное от \mathbf{B} . Для среднего магнитного момента, который устанавливается вследствие равновесия между тепловым движением и стремлением диполей к ориентации, будет справедливо выражение, аналогичное выражению (2.21), а именно

$$\bar{m} = m_0 \left(\text{cth} \frac{m_0 B^*}{kT} - \frac{kT}{m_0 B^*} \right), \quad (2.32')$$

или

$$\bar{m} = m_0 L \left(\frac{m_0 B^*}{kT} \right). \quad (2.33)$$

Для малых значений $m_0 B^*/kT$ и в случае, когда можно заметить \mathbf{B}^* на \mathbf{B} , имеем в первом приближении аналогично (2.21')

$$\bar{m} = \frac{1}{3} \frac{m_0^2}{kT} \mu_0 H. \quad (2.33')$$

Следовательно, вектор намагниченности равен

$$\mathbf{M} = \frac{Nm_0^2}{3kT} \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.34)$$

а магнитная восприимчивость есть

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{1}{3} \frac{Nm_0^2}{kT} \mu_0. \quad (2.35)$$

Если $N = N_0$ (число Авогадро), то получим молярную восприимчивость

$$\chi_M = \frac{1}{3} \frac{N_0 m_0^2}{kT} \mu_0 = \frac{C}{T}. \quad (2.36)$$

Это соотношение выражает закон Кюри, установленный экспериментально еще до разработки теории.

Формула (2.35) была выведена в предположении, что магнитное поле B не слишком сильное и температура T не слишком низкая.

Как показывает опыт, при очень низких температурах обнаруживаются заметные отклонения от значений, которые получаются по формуле (2.35). Замена поля B внутренним полем Лоренца приводит, как и в случае диамагнетизма, лишь к незначительной поправке.

Следует отметить, что последовательная электронная теория не укладывается в рамки классической физики, ибо решающую роль играет тот факт, что числовые значения магнитного момента атомов образуют *дискретную совокупность*, т. е. что магнитный момент *квантован*, как это было показано впервые Прокопиу и Бором (1912 г.). Кроме того, согласно гипотезе Гоудсмита и Уленбека (1925 г.), следует учесть спин электронов, который порождает дополнительный магнитный момент. Учет спина не меняет выведенные основные соотношения, но дает возможность правильно истолковать магнитомеханические или гиромагнитные явления, о которых мы вскользь упомянули. Строгой парамагнитной теорией, построенной на основе квантовой механики, мы обязаны Ван Флеку.

3. Элементарная теория ферромагнетизма. Некоторые вещества, такие, как железо, кобальт, никель и их сплавы, железные руды (магнетит и пирит), так называемые сплавы Гейслера, а также гадолиний (из группы редких земель), характеризуются с магнитной точки зрения очень большой намагниченностью и называются *ферромагнетиками*. Существенной характеристикой ферромагнитных веществ является способность намагничиваться до *насыщения* даже при относительно слабой напряженности внешнего магнитного поля. При этом намагниченность перестает линейно зависеть от напряженности внешнего поля: оно растет медленнее, чем увеличивается напряженность, и снижается с повышением температуры. При температуре, превышающей определенную критическую температуру, называемую *точкой Кюри*, вещество утрачивает свои ферромагнитные свойства и становится парамагнитным. В этом состоянии восприимчивость удовлетворяет так называемому *закону Кюри—Вейсса* (аналогичному закону Кюри)

$$\chi_m = \frac{C}{T - \Theta},$$

где Θ — температура Кюри. Ферромагнетизм существует только ниже этой критической температуры. Так, железо утрачивает свои ферромагнитные свойства при 770°C , никель — при 358°C , а кобальт — при 1120°C . Экспериментальные исследования показали, что различие между ферромагнетизмом и парамагнетизмом отнюдь не сводится к количественной разнице. В самом деле, большие значения магнитной восприимчивости, а также ее характерная зависимость от напряженности внешнего поля отмечаются при

низких температурах у определенных типично парамагнитных веществ. Да и явление гистерезиса не является характерным для ферромагнетиков, представляя собой больше структурное свойство второго степенного порядка.

Тщательные экспериментальные исследования, проведенные в основном школой Вейсса, позволили установить неопровержимым образом, что между ферромагнетизмом и парамагнетизмом существует качественное различие, а точка Кюри является узловой точкой качественного скачка, свойственного определенным веществам. В то время как диа- и парамагнетизм являются атомными свойствами, относящимися к одному атому или молекуле, ферромагнетизм есть свойство определенных множеств атомов, т. е. относится к целой совокупности атомов, между которыми существует определенная связь. Доказательством правильности этой концепции является тот факт, что атом ферромагнитного вещества ничем не отличается с точки зрения магнитных свойств от атомов парамагнитных веществ; так, укажем, например, что компоненты ферромагнитных сплавов Гейслера (Al, Mn, Cu, Zn) сами не являются ферромагнетиками.

Эта новая точка зрения на ферромагнетизм привела к современным теориям, которые дали возможность объяснить это сложное явление. А именно, по Вейссу (1907 г.), ферромагнетик представляет собой агрегат элементарных областей, намагниченных «до насыщения» спонтанным образом так, что направления намагничивания этих областей направлены в разные стороны (размер таких областей составляет 100—10 000 диаметров атома¹). Как и в случае парамагнитных веществ, эти элементарные области состоят из полярных молекул, которые ориентируются под влиянием их взаимодействия; условно можно заменить это взаимодействие внутренним микроскопическим полем, называемым молекулярным. Введенное Вейссом понятие молекулярного поля, ответственного за «спонтанное намагничивание», играет основную роль в теории ферромагнетизма. Зоны спонтанного намагничивания у ферромагнитных веществ могут быть выявлены методом Акулова.

Сложный характер ферромагнитных явлений обусловлен большими силами взаимодействия между соседними атомами ферромагнетика, зависящими от относительной ориентации магнитных осей атомов. Парамагнитными силами взаимодействия можно пренебречь по сравнению с этими силами; так объясняется с помощью понятия молекулярного поля отсутствие пропорциональности между намагничиванием ферромагнетика и внешним магнитным полем, а также

¹ Последующие исследования Я. Г. Дорфмана и Я. И. Френкеля (1930 г.) показали, что линейные размеры этих областей зависят от линейных размеров всего тела.

остаточное и спонтанное намагничивания, характерные для ферромагнетизма.

Предположив, что молекулярное поле пропорционально среднему молекулярному моменту \bar{m} , можно записать соотношение

$$\mathbf{B}^* = \mu_0 (\mathbf{H} + n\bar{m}), \quad (2.37)$$

где n — эмпирическая постоянная, а \bar{m} задан законом Ланжевена для парамагнетизма (2.33'), который мы предполагаем справедливым и в данном случае.

Следовательно, в первом приближении можно записать

$$\bar{m} = \frac{m_0^2 \mu_0}{3kT} (H + n\bar{m}). \quad (2.38)$$

Относя все к одному молю вещества и обозначая через $\mathcal{M} = mN_0$ молярный момент, через $\mathcal{M}_\infty = m_0 N_0$ значение насыщения молярного момента (при низких температурах или сильных полях), вместо соотношения (2.33) получаем

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\infty} = L \left(\frac{\mu_0 \mathcal{M}_\infty}{N_0} \left(H + \frac{n}{N_0} \mathcal{M} \right) \right). \quad (2.39)$$

Отсюда в первом приближении получаем

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3kT} \frac{\mu_0 \mathcal{M}_\infty^2}{N_0} \left(H + \frac{n}{N_0} \mathcal{M} \right), \quad (2.40)$$

что соответствует (2.38). Из (2.40) выводим

$$\frac{\mathcal{M}}{H} = \chi_M = \frac{C_m}{T - \Theta}, \quad (2.41)$$

где

$$C_m = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_\infty^2}{3kN_0} = \frac{N_0 \mu_0}{3k} m_0^2,$$

$$\Theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_\infty^2 n}{3kN_0^2} = \frac{n\mu_0}{3k} m_0^2.$$

Соотношение (2.41) представляет собой закон Кюри—Вейсса, который проверяется экспериментально для большинства ферромагнитных веществ, а Θ — критическая температура Кюри, выше которой спонтанное намагничивание исчезает.

Обозначив

$$a = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_\infty}{N_0 kT} \left(H + \frac{n}{N_0} \mathcal{M} \right), \quad (2.42)$$

можно переписать соотношение (2.39) следующим образом:

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\infty} = L(a) = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a}. \quad (2.39')$$

Когда внешнее магнитное поле равно нулю ($H=0$), имеем

$$a = \frac{\mu_0 M_\infty n}{N_0^2 k T} \mathcal{M}. \quad (2.42')$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{M}}{M_\infty} = \frac{N_0^2 k T}{\mu_0 M_\infty^2 n} a. \quad (2.43)$$

Отложив на графике зависимость \mathcal{M}/M_∞ от a (фиг. 11), замечаем, что (2.43) представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат. Пересечение этой прямой с кривой (2.39') (точка 2 на фиг. 11) дает величину спонтанного намагничивания ($H=0$). Чтобы это пересечение существовало, угол наклона прямой должен быть меньше угла наклона касательной к кривой $L(a)$ в начале координат. Но, как мы указывали, для малых значений аргумента $L(a)=a/3$; следовательно, это условие имеет вид

$$\frac{N_0^2 k T}{\mu_0 M_\infty^2 n} < \frac{1}{3},$$

Ф и г. 11.

откуда $T < \Theta$. Строго говоря, прямая (2.43) пересекает кривую (2.39') в двух точках: в начале координат (что соответствует $\mathcal{M}=0$, отсутствию намагничивания) и в точке 2 (соответствующей конечной намагниченности). Для того чтобы выяснить, какое из этих состояний фактически осуществляется, необходимо установить, какое из них наиболее устойчивое. Квантовомеханический расчет показывает, что точка 2 соответствует минимуму свободной энергии и, следовательно, является наиболее устойчивой. Когда $H \neq 0$, вместо (2.42') справедливо (2.42), которое можно записать в виде

$$\frac{\mathcal{M}}{M_\infty} = n_1 a - n_2 H, \quad (2.44)$$

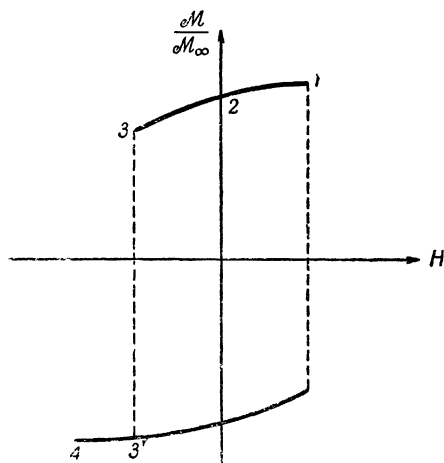
где n_1 и n_2 — постоянные. Следовательно, намагниченность \mathcal{M} в поле H задается пересечением прямой (2.44) с кривой $L(a)$. Эта прямая параллельна прямой, проведенной через начало координат O и точку 2 (фиг. 12).

Когда $H > 0$, пересечение произойдет в точке 1, а когда $H < 0$, точка пересечения будет лежать между точками 2 и 3, которые

являются точками пересечения кривой $L(a)$ с этими параллельными прямыми, соответствующими некоторому частному значению $-H_n$. При $H < H_n$ точка пересечения может лежать только на отрицательной ветви кривой $L(a)$, за точкой $3'$. Отсюда следует, что кривая намагничивания разрывна. Результат этих рассуждений может быть представлен графически (фиг. 12).

Таким образом, теория Вейсса позволяет просто истолковать явление намагничивания через ориентирование в направлении внешнего поля элементарных, самопроизвольно намагниченных областей — доменов и объяснить основные особенности ферромагнетизма.

Баркгаузен в своем классическом опыте (1919 г.) показал, что изменением направления внешнего магнитного поля \mathbf{B} можно обнаружить внезапные повороты элементарных областей ферромагнетика, и тем самым подтвердил гипотезу Вейсса.



Ф и г. 12.

Отметим, что хотя теория Вейсса и дает простое феноменологическое объяснение поведению ферромагнитных веществ в магнитном поле, она приводит к слишком большим значениям для молекулярных полей и не дает никакого объяснения механизму образования областей спонтанного намагничивания.

Объяснить возникновение молекулярного поля оказалось возможным только на основе квантовой механики, а именно с помощью учета сил обменного взаимодействия между электронами соседних атомов ферромагнитного тела (Гейзенберг). Большой вклад в развитие квантовой теории ферромагнетизма сделан советскими физиками¹⁾.

Сравнивая электрическую поляризацию веществ с магнитной, интересно отметить, что, поскольку электрическая поляризуемость всегда положительна, среди диэлектриков нет аналога диамагнетикам, восприимчивость которых всегда отрицательна. Напротив, ферромагнетики имеют электрический аналог в виде сегнетоэлектриков, исследование которых представляет большой интерес.

¹⁾ См. для справок [8, 9].

ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

Введение

В этой главе мы предполагаем изложить вводные, элементарные понятия молекулярной оптики вообще и явлений дисперсии в диэлектрических и проводящих средах в частности. Это является необходимым дополнением в духе микроскопической теории к электромагнитной оптике, построенной на основе макроскопической теории Максвелла (см., например, Тамм, гл. VII). В вопросе о дисперсии электромагнитных волн мы ограничимся классической элементарной теорией, в свое время послужившей отправной точкой для развития строгой квантовомеханической теории, изложение которой выходит за рамки настоящей книги.

§ 1. Теория дисперсии в диэлектрических средах

Теория дисперсии электромагнитных волн основана на представлении о молекулярном строении вещества. Молекулы рассматриваются как динамические системы, состоящие из электронных осцилляторов, которые, по Лоренцу, подчиняются законам классической механики.

Действие монохроматической электромагнитной волны на молекулы проявляется (если пренебречь магнитным действием) в индуцировании электрической поляризации, периодически меняющейся с частотой, равной частоте падающей волны. В свою очередь эти осциллирующие диполи излучают вторичные волны, т. е. приводят к рассеянию падающей волны. Эти вторичные волны интерferируют между собой и с падающей волной, вследствие чего в случае изотропной среды образуется единственная результирующая волна, распространяющаяся в среде с той же частотой, что и падающая волна, но с измененной (зависящей от частоты) фазовой скоростью. Этим и объясняется явление дисперсии. А именно показатель преломления среды, будучи равен отношению скорости распространения в свободном пространстве к скорости распространения в рассматриваемой среде, очевидно, будет изменяться с частотой. В этом и состоит дисперсионное действие диэлектрических сред. При про-

хождении волны через диэлектрическую среду энергия, которую несет волна, теряется либо в силу рассеяния, либо в силу поглощения, т. е. переходит в тепловое движение молекул.

Следовательно, теория этих явлений тесно связана с атомистической теорией диэлектрической поляризации. Связующим звеном является соотношение Максвелла, справедливое для низких частот, которое в предположении, что среда не магнитная, приводится к виду

$$n^2 = \kappa_e.$$

Следовательно, согласно (2.12), имеем

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} N\alpha \quad (3.1)$$

и с помощью равенства (2.12') получаем формулу

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = Cd, \quad (3.2)$$

известную под названием формулы Лоренца — Лоренца (1909 г.). В элементарной теории дисперсии предполагается, что это соотношение справедливо для любых частот.

1. Классическая теория дисперсии света получится из этих соотношений, если вычислить постоянную α , основываясь на структуре атома или молекулы. Лоренц и Друде предположили, что каждый атом содержит некоторое число электронных осцилляторов, равное числу «электронов валентности». Под влиянием излучения осцилляторы совершают вынужденные колебания и становятся эквивалентными электрическим диполям, моменты которых пропорциональны напряженности электрического поля падающей волны.

Рассмотрим один электронный осциллятор и для простоты предположим его колебания незатухающими и квазиупругую силу одинаковой во всех направлениях (т. е. осциллятор — изотропным). Уравнение свободного осциллятора имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = 0. \quad (3.3)$$

Пользуясь комплексными величинами, можно записать свободные колебания электрона в следующей форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{j\omega_0 t}, \quad (3.4)$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = (k/m)^{1/2}$ — частота свободного колебания, т. е. собственная частота электрона.

Если предположить, что на осциллятор действует плоская монохроматическая электромагнитная волна, которую мы можем считать линейно поляризованной, то, выбирая в качестве оси Oz

направление распространения волны, а в качестве оси Ox направление электрического поля, имеем

$$E_x = E_0 e^{j\omega(t-z/c)}, \quad E_y = E_z = 0. \quad (3.5)$$

Предположим, что магнитное поле волны (с компонентами $H = H_y$, $H_x = H_z = 0$) не влияет существенным образом на колебания вдоль оси Ox . Тогда для вынужденных колебаний получаем следующее уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} = -\frac{e}{m} E_x. \quad (3.6)$$

Если искать решение в виде

$$x = x_0 e^{j\omega t}, \quad (3.7)$$

то с помощью (3.5) имеем

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.7')$$

Отсутствие затухания приводит к парадоксальному заключению, что в случае резонанса ($\omega = \omega_0$) амплитуда вынужденных колебаний становится бесконечной. На самом деле колебания всегда являются затухающими. В рамках классической теории были сделаны многочисленные, впрочем, безуспешные попытки ввести различные причины затухания. При этом уравнение (3.6) заменилось уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{b}{m} \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}^*, \quad (3.8)$$

где \mathbf{E}^* — внутреннее поле, заданное соотношением (2.8').

Поскольку введение затухания позволяет избежать «катастрофы резонанса», в дальнейшем при вычислениях мы будем ограничиваться выражениями (3.7) и (3.7'). Следовательно, можно сказать, что под влиянием плоской падающей волны колебания электрона пропорциональны амплитуде E_0 падающей волны и происходят в фазе с ней, за исключением случая, когда ω очень близко к ω_0 . Этим вынужденным колебаниям соответствует электрический момент

$$p_x = -ex = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{j\omega t}, \quad p_y = p_z = 0;$$

следовательно, осциллятор может быть представлен осциллирующим диполем с моментом

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.9)$$

Чтобы вывести выражение для поляризуемости атома, достаточно заметить, что вообще в атоме могут быть N_1 электронов

с собственной частотой ν_1 , N_2 электронов с частотой ν_2 и т. д., т. е. осцилляторы с различными периодами. В этом случае будем иметь

$$\alpha = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (3.10)$$

Следовательно, соотношение (3.1) принимает вид

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (3.11)$$

В случаях, когда значение n близко к 1, можно заменить $n^2 + 2$ на 3; следовательно,

$$\kappa_e = n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (3.12)$$

Эта классическая формула дисперсии справедлива, когда частота ω не близка ни к одной из собственных частот ω_i .

Так как, вообще говоря, собственные частоты ν_i принадлежат ультрафиолетовой части спектра, то, когда ν находится в видимом спектре, можно записать

$$\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_i^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\omega_i^2} + \frac{\omega^2}{\omega_i^4} + \dots;$$

следовательно,

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{4\pi^2 m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\nu_i^2} + \frac{e^2 N}{4\pi^2 m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\nu_i^4} \nu^2 + \dots$$

Для одного осциллятора можно записать ($\omega = 2\pi c/\lambda$)

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots \quad (3.13)$$

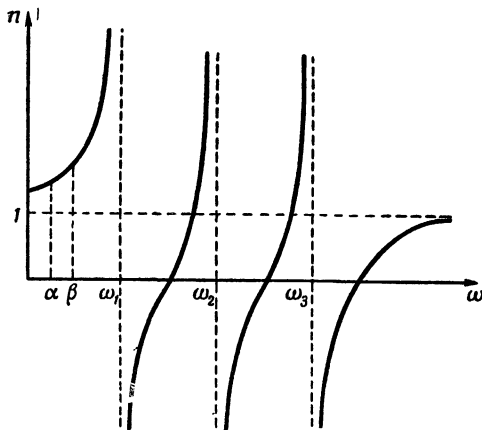
Эта формула выведена Коши (1830 г.). Она справедлива для видимого спектра.

В случае, когда $n \approx 1$, можно заменить $n^2 - 1$ на $2(n - 1)$ и, следовательно, вместо (3.12) записать

$$n = 1 + \frac{e^2 N}{2m\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (3.14)$$

Кривая дисперсии имеет характерный вид, приведенный на фиг. 13. Заметим, что в видимой части спектра (от α до β) показатель преломления n растет с частотой падающей волны. Безусловно, n не обращается в бесконечность для критических частот, так как, если учесть затухание вынужденных колебаний, легко убедиться, что n остается конечным.

Итак, формула (3.12) поясняет зависимость n_e и n от частоты ν падающей электромагнитной волны (что самое существенное для явления дисперсии); она справедлива, когда частота ν достаточно далека от собственных частот — это так называемый случай *нормальной дисперсии*. Вблизи же значений собственных частот n_e и n резко возрастают и наблюдается *аномальная дисперсия* (как она называется в оптике), замеченная впервые Христиансенем и Рождественским. Характерным для аномальной дисперсии является убывание показателя преломления с ростом частоты: $dn/d\omega < 0$.



Ф и г. 13.

2. Вышеприведенные формулы могут быть непосредственно выведены из уравнений Максвелла макроскопического поля. Рассмотрим изотропную и прозрачную диэлектрическую среду. Оптическое поле будет описываться векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} световой волны:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3.15)$$

где \mathbf{P} — поляризация, вызванная тем, что под влиянием поля \mathbf{E} электроны выведены из положения равновесия, и равная

$$\mathbf{P} = -Ner, \quad (3.16)$$

где N — число электронов, принимающих участие в явлении дисперсии, в единичном объеме, а r — смещение электронов из положения равновесия.

Если предположить, следуя Лоренцу, что электроны связаны «квазиупруго» со своим состоянием равновесия, то уравнение движения электронного осциллятора примет вид¹⁾

1) Строго говоря, вместо \mathbf{E} следовало бы писать поле \mathbf{E}^* , заданное соотношением (2.8); см. также [1].

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (3.17)$$

Предположим, что собственная частота ω_0 электрона принадлежит далекой части ультрафиолетового спектра (как, например, в случае газов H_2 , O_2 и т. д.). С учетом (3.16) уравнение (3.17) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E}. \quad (3.18)$$

Для определения векторов \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{P} следует присоединить сюда и уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Исключая \mathbf{H} , запишем

$$\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{E}} + \mu_0 \dot{\mathbf{P}} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E}, \quad (3.20)$$

ибо $\nabla \mathbf{E} = 0$. Исключая \mathbf{P} из (3.18) и (3.20), получаем уравнение для определения \mathbf{E} :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \left(\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} \right) + \frac{\mu_0 Ne^2}{m} \mathbf{E} = 0. \quad (3.21)$$

В частном случае монохроматической плоской волны, поляризованной линейно, которая распространяется по направлению оси Ox :

$$E_x = E_0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad (3.22)$$

имеем

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 \right) \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) = \frac{\mu_0 Ne^2}{m} \omega^2,$$

откуда следует

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\mu_0 c^2 Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]. \quad (3.23)$$

Так как фазовая скорость плоской волны $v = \omega/k$, то, по определению, показатель преломления будет

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega};$$

следовательно, из (3.23) вытекает соотношение

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3.24)$$

полученное уже нами ранее [см. (3.12)], согласно которому показатель преломления есть функция частоты.

Поскольку для видимого спектра $\omega < \omega_0$, то знаменатель $\omega_0^2 - \omega^2$ положителен, и для красных лучей больше, чем для синих; следовательно, для синей области спектра дисперсия сильнее, чем для красной, и, значит, дисперсия нормальная.

Так как мы предположили, что ω_0 очень велико, то можно воспользоваться разложением в ряд по степеням ω/ω_0 ; при этом в первом приближении из (3.24) получаем формулу (3.13), выведенную Коши на основе упругой теории света. Эта формула проверяется в видимой части спектра для идеальных газов, если считать, по эмпирическому правилу Друде, что число «дисперсионных» электронов равно валентности соответствующего атома. Однако эта элементарная теория является неудовлетворительной при современном уровне знаний структуры атомов и молекул.

3. Выше предполагалось, что поляризация молекул \mathbf{P} определяется только внешним полем \mathbf{E} . В действительности же при ее определении следует учитывать и влияние электрических моментов соседних молекул. Таким образом, учитывая соотношение Клаузиуса — Мосотти [см. (2.12)], получаем соотношение (3.1), из которого, если вместо $N\alpha$ подставить

$$\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

получаем

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.25)$$

Это соотношение совпадает с (3.11) при $N_i = 1$ и $\omega_i = \omega_0$. Оно справедливо для жидких и твердых тел.

4. Заметное различие между показателем преломления для видимого света и для радиоволн заставляет нас предполагать, что, когда тело прозрачное, т. е. когда его собственные частоты не лежат в видимой части спектра, играют роль не только собственные частоты электронов (лежащие в ультрафиолетовой части спектра), но и собственные частоты вращения молекул (лежащие в инфракрасной части спектра). Очевидно, эти инфракрасные собственные частоты следует приписывать не электронам, а ионам, масса которых значительно больше.

Следовательно, в этом случае поляризация \mathbf{P} будет состоять из двух частей, обусловленных электронами и соответственно ионами:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2. \quad (3.26)$$

Пусть ω_0' — собственная частота электронов и ω_0'' — собственная частота ионов. Согласно соотношению (3.18), дифференциальное уравнение вынужденных колебаний электронов в переменном поле \mathbf{E} имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0'^2 \right) \mathbf{P}_1 = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E}. \quad (3.27)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний ионов под действием переменного поля \mathbf{E} таково:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0'^2 \right) \mathbf{P}_2 = \frac{Npe^2}{M} \mathbf{E}, \quad (3.28)$$

где M — «приведенная масса», соответствующая системе из двух колеблющихся ионов противоположных знаков, определенная соотношением

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}, \quad (3.29)$$

а p — валентность ионов. Ввиду нейтральности вещества число ионов в единичном объеме равно N/p , а заряд их будет равен p зарядам электрона [следовательно, для перехода от (3.27) к (3.28) надо заменить N на N/p и e^2 на p^2e^2].

Согласно (3.20), связь между \mathbf{P} и \mathbf{E} , выраженная уравнениями Максвелла, имеет вид

$$\epsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{E}} + \mu_0 (\ddot{\mathbf{P}}_1 + \ddot{\mathbf{P}}_2) = \Delta \mathbf{E}. \quad (3.30)$$

Исключая \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 из уравнений (3.27), (3.28) и (3.30), мы получаем для \mathbf{E} сложное дифференциальное уравнение шестого порядка. Не выписывая этого уравнения, заметим, что для плоских монохроматических и линейно поляризованных волн типа (3.22), согласно уравнениям (3.27) и (3.28), величина

$$\ddot{\mathbf{P}}_1 \text{ пропорциональна } - \frac{\omega^2}{\omega_0'^2 - \omega^2},$$

а величина

$$\ddot{\mathbf{P}}_2 \text{ пропорциональна } - \frac{\omega^2}{\omega_0''^2 - \omega^2}.$$

Величина же k^2 , согласно (3.30), определяется через ω^2 из алгебраического соотношения

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \omega^2 \left(\frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0'^2 - \omega^2} + p \frac{Ne^2}{M} \frac{1}{\omega_0''^2 - \omega^2} \right).$$

Если ввести коэффициент преломления, то отсюда получим

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0'^2 - \omega^2} + p \frac{Ne^2}{M\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0''^2 - \omega^2}. \quad (3.31)$$

Это соотношение можно переписать в более удобной форме, если перейти к длинам волн

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}, \quad \omega_0' = 2\pi \frac{c}{\lambda_0'}, \quad \omega_0'' = 2\pi \frac{c}{\lambda_0''}.$$

Тогда

$$n^2 = 1 + C_1 \frac{\lambda^2 \lambda_0'^2}{\lambda^2 - \lambda_0'^2} + C_2 \frac{\lambda^2 \lambda_0''^2}{\lambda^2 - \lambda_0''^2},$$

или

$$n^2 = 1 + \lambda_0'^2 C_1 + \lambda_0''^2 C_2 + \frac{\lambda_0'^4 C_1}{\lambda^2 - \lambda_0'^2} + \frac{\lambda_0''^4 C_2}{\lambda^2 - \lambda_0''^2}, \quad (3.32)$$

где

$$C_1 = \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m}, \quad C_2 = \frac{pNe^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 M}.$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ получаем

$$n_\infty^2 = 1 + \lambda_0'^2 C_1 + \lambda_0''^2 C_2.$$

Отсюда видно, что соотношение Максвелла ($n = \kappa_e^{1/2}$) справедливо только в этом предельном случае ($\lambda_0' \ll \lambda_0''$).

Формула (3.32) проверяется экспериментально и позволяет определить значения λ_0' и λ_0'' для заданных веществ.

§ 2. Аномальная дисперсия

Рассмотрим, как протекает дисперсия в окрестности собственной частоты $\omega = \omega_0$. Будем предполагать, что ω_0 принадлежит видимой части спектра, в которой можно сделать точные измерения. Следовательно, мы уже не будем предполагать рассматриваемое вещество прозрачным, а его окраска будет определяться значением ω_0 .

Поскольку, согласно (3.3'), при $\omega = \omega_0$ амплитуда колебаний должна была бы быть бесконечно большой, мы должны предположить, что в уравнение осциллятора входит член вида $g\dot{r}$, связанный с затуханием, т. е.

$$\ddot{r} + \frac{g}{m} \dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} \dot{E}.$$

Следовательно, вместо (3.18) будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g' \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2 \right) \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E},$$

где m — масса колеблющихся частиц, а $g' = g/m$.

Нужно учитывать, что, как правило, аномальная дисперсия в видимой области обуславливается электронами. И лишь в тех случаях, когда в видимой области лежат колебательные спектры (например, в случае молекулы воды), аномальная дисперсия может вызываться колебаниями ионов. Тогда под m следует понимать приведенную массу ионов. Для монохроматической плоской волны

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega g'}.$$

Следовательно, поляризация, индуцированная в единичном объеме, будет приблизительно выражаться действительной частью

выражения

$$\mathbf{P} = \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega g'} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.33)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-j\omega t]$, а константа a^2 прямо пропорциональна числу осцилляторов в единице объема, имеющих собственную частоту ω_0 ¹⁾. Константа g' характеризует затухание осциллятора, а именно она зависит от диссипативных сил, вызванных столкновением молекул.

Для низких частот падающей волны поляризация \mathbf{P} близка по значению к постоянной

$$\mathbf{P} = \frac{a^2}{\omega_0^2} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.34)$$

и поскольку $\mathbf{P} = (\kappa_e - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}$ [см. (2.11)], то

$$\kappa_e = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2}. \quad (3.35)$$

При возрастании ω нужно использовать выражение (3.33) полностью. В этом случае по аналогии с предыдущим необходимо ввести, по определению, *комплексную диэлектрическую проницаемость* κ'_e при помощи уравнений

$$\mathbf{P} = (\kappa'_e - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \kappa'_e \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.36)$$

где, учитывая (3.33),

$$\kappa'_e = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega g'}. \quad (3.37)$$

В этом случае уравнения Максвелла записываются следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \kappa'_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

а волновое уравнение имеет вид

$$\Delta \psi - \varepsilon_0 \mu_0 \kappa'_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.38)$$

Это уравнение допускает в качестве решения плоскую волну

$$\psi = \psi_0 e^{j(k'z - \omega t)}, \quad (3.39)$$

где

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\kappa'_e} = k + js. \quad (3.40)$$

Следовательно,

$$\kappa'_e = \frac{c^2}{\omega^2} (k + js)^2. \quad (3.41)$$

¹⁾ Точнее, амплитуда поляризации равна модулю выражения (3.33), а отношение вещественной части к мнимой характеризует запаздывание по фазе поляризации относительно электрического поля.

Фазовая скорость волны будет

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \quad (3.42)$$

где в соответствии с соотношениями (3.41) и (3.37) k и n — функции частоты.

Полученный результат позволяет проанализировать различные возможные случаи.

Для паров и газов плотность поляризованных молекул мала, так что $a \ll 1$, а поскольку κ'_e приблизительно равна 1, можно разложить $(\kappa'_e)^{1/2}$ в биномиальный ряд. Согласно соотношению (3.40), будем иметь

$$\frac{c}{\omega} (k + js) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega g'}. \quad (3.43)$$

1°. Когда частота падающей волны достаточно низка, можно записать

$$\frac{kc}{\omega} = n = 1 + \frac{a^2}{2\omega_0^2}. \quad (3.44)$$

Итак, в этом случае коэффициент преломления, а следовательно, и фазовая скорость не зависят от частоты — дисперсии нет.

2°. Если частота падающей волны велика по сравнению с ω_0 , то $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega g'$, и можно записать

$$\frac{kc}{\omega} = n = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.45)$$

Коэффициент затухания $s=0$; следовательно, среда прозрачна и диссипативна. При $\omega < \omega_0$ показатель преломления $n > 1$ и возрастание ω приводит к увеличению n и уменьшению фазовой скорости v . При $\omega > \omega_0$ показатель преломления $n < 1$, но возрастанию ω опять соответствует увеличение n . В этом случае имеем так называемую нормальную дисперсию.

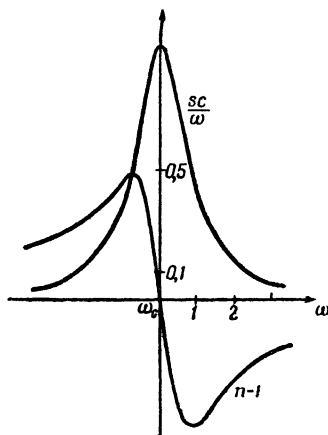
3°. Если же значение частоты падающей волны ω приближается к частоте резонанса ω_0 , то из (3.43) получаем

$$\begin{aligned} n &= \frac{kc}{\omega} = 1 + \frac{a^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g'^2}, \\ s &= \frac{a^2}{2c} \frac{g' \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g'^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Строя график изменения $n-1$ и коэффициента поглощения sc/ω в зависимости от ω вблизи резонансной частоты ω_0 (фиг. 14), получаем для коэффициента поглощения резкий максимум при $\omega = \omega_0$. Таким образом, для падающей волны с частотой, близкой к ω_0 , среда непрозрачна. В области значений ω , лежащих за ω_0 , показатель преломления ведет себя аномально, т. е. убывает с ростом

частоты. Принято говорить, что дисперсия аномальна. Следует отметить, что это «аномальное» поведение — общее свойство веществ.

В случае *жидких и твердых тел* полученные выше результаты несколько меняются, поскольку отпадает предположение, что плотность вещества мала. Вообще же говоря, кривая дисперсии, т. е. зависимость n от частоты ω , остается той же.



Ф и г. 14.

Отметим, что мы ограничились анализом поведения константы распространения k' , заданной соотношением (3.40), в окрестности одной только частоты резонанса. В действительности же молекула представляет собой сложную динамическую систему, обладающую бесконечной последовательностью собственных частот, влияющих на взаимодействие между молекулой и электромагнитным полем падающей волны. Каждой частоте будет соответствовать выражение вида (3.37), причем константы, входящие в эти выражения, обычно выбираются с таким расчетом, чтобы получить соответствие с экспериментальными данными.

Итак, теория дисперсии в диэлектрических средах показывает, что совершенные диэлектрики, вообще говоря, имеют ограниченную область прозрачности, зависящую от частоты падающей волны. Этим она отличается от феноменологической теории Максвелла, согласно которой поглощающими являются только проводящие среды, а диэлектрические среды совершенно прозрачны. Полученные нами выводы согласуются с экспериментальными данными, и это придает теории дисперсии твердую основу, несмотря на все неизбежные ограничения.

Элементарная теория, развитая выше, фактически применима лишь к случаю идеальных газов. Следует, однако, отметить трудно-

сти, возникающие при анализе тонкого механизма поляризации диэлектрической среды, связанной с интерференцией падающей волны и вторичных волн, излученных молекулами.

Строгая теория дисперсии требует внимательного анализа образования волн, распространяющихся путем поляризации среды, с одной стороны, и влияния распределения молекул на интенсивности проходящего и рассеянного излучения — с другой. Полное исследование вопроса требует в случае твердых тел учета кристаллической структуры среды.

Затухание атомных осцилляторов, которым объясняется поглощение излучения, было введено формально безотносительно к механизму, порождающему его. В действительности же основная причина заключается во влиянии на гармонические колебания столкновений между молекулами вследствие их теплового движения. Наряду с затуханием, обусловленным столкновениями, существует и диссипативная реакция атомных осцилляторов, обусловленная рассеянием падающей волны и испусканием вторичных волн. Как показал Лоренц, этот механизм рассеяния излучения способствует поглощению падающей волны в диэлектрической среде.

Наконец, следует отметить тот факт, что при сравнении формулы нормальной дисперсии (3.14) с экспериментальными данными обнаруживается, что числа N_i не являются целыми, несмотря на то что они выражают число электронных осцилляторов. Следовательно, классическая концепция электронных осцилляторов не точна, хотя она и дает правильную форму кривой дисперсии. Поскольку критические частоты ω_i , входящие в формулу дисперсии, должны совпадать с собственными частотами спектра излучения атома или молекулы, то отсюда следует, что электронных осцилляторов должно быть по меньшей мере столько же, сколько спектральных линий содержит спектр излучения, что неприемлемо. Эти трудности были разрешены квантовой механикой, на основе которой Крамерс и Гейзенберг разработали квантовую теорию дисперсии.

§ 3. Дисперсия в металлах

Элементарная теория дисперсии, хотя и является очень схематичной, приводит к поразительно точной теории оптических свойств металлов. Рассмотрим «газ» свободных электронов, который находится в статистическом равновесии с положительными ионами, образующими решетку металлического проводника. Электрическое поле падающей волны вызовет перемещение этих электронов по направлению поля. Этому перемещению противодействует взаимодействие электронов с решеткой положительных ионов, приводящее к затуханию движения электронов. В первом приближении пренебрегаем влиянием связанных электронов.

Рассмотрим уравнение электронных осцилляторов вида

$$m\ddot{\mathbf{r}} + mg'\dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_0e^{-j\omega t}. \quad (3.47)$$

Частный интеграл, соответствующий равновесию осцилляторов в отсутствие поля, будет

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{g' - j\omega} \frac{ej}{\omega m} \mathbf{E}_0e^{-j\omega t}.$$

Отсюда следует, что если в единичном объеме содержится N электронов, то плотность тока равна

$$\mathbf{i} = -Ne\dot{\mathbf{r}} = \frac{Ne^2/m}{g' - j\omega} \mathbf{E}. \quad (3.48)$$

Следовательно, по аналогии с законом Ома для постоянных токов можно определить комплексную проводимость γ' соотношением

$$\gamma' = \frac{Ne^2/m}{g' - j\omega}, \quad (3.49)$$

а комплексный волновой вектор будет задаваться соотношением

$$k'^2 = \mu\epsilon\omega^2 + j\gamma'\mu\omega.$$

Поскольку резонансные частоты связанных электронов атомов металла лежат в ультрафиолетовой части спектра, то для области, которая начинается с видимого красного света и распространяется в сторону инфракрасного и радиоволн, можно предполагать, что $\epsilon = \epsilon_0$ и $\mu \approx \mu_0$, если металл не является ферромагнитным. Тогда

$$k'^2 = (k + js)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j\frac{\gamma'}{\omega\epsilon_0} \right). \quad (3.50)$$

Учитывая (3.49) и отделяя действительную часть от мнимой, получаем

$$\begin{aligned} k^2 - s^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + g'^2} \right), \\ 2ks &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega} \frac{g'}{\omega^2 + g'^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Поскольку при низких частотах в (3.47) можно пренебречь силой инерции $m\ddot{\mathbf{r}}$ по сравнению с силой $mg'\dot{\mathbf{r}}$, выражение (3.49) приводит к постоянной величине

$$\gamma' = \frac{Ne^2}{mg'}, \quad (3.52)$$

которая должна быть тождественна значению проводимости γ для статического случая. Экспериментальные исследования, проведен-

ные Рубенсом и Хагеном (1903 г.), доказали, что статическим значением проводимости можно успешно пользоваться в инфракрасной части спектра. Однако для длин волн $\lambda < 25 \text{ мк}$ проводимость зависит существенным образом от частоты, и обнаруживаемую дисперсию можно объяснить при помощи соотношений (3.51).

Итак, соотношения (3.49) — (3.51) позволяют расширить область справедливости классической электромагнитной теории за пределы, произвольно установленные феноменологической теорией.

Следует отметить важное открытие Аркадьева о зависимости μ от частоты падающей волны. А именно, исследуя поглощение электромагнитных волн, распространяющихся вдоль металлических проводников, и их отражение в кристаллической решетке ферромагнитных металлов, Аркадьев установил (1908—1911 гг.), что при переходе от волн длиной $\lambda = 70 \text{ см}$ к волнам с $\lambda = 1,3 \text{ см}$ происходит почти полное исчезновение ферромагнитных свойств соответствующего металла, выражающееся понижением проницаемости μ до значений, близких к единице. Аркадьев считал, что это явление вызвано «магнитной вязкостью» среды, т. е. является результатом влияния изменения вязкости на ориентацию элементарных диполей (областей спонтанного намагничивания). Вводя «время релаксации» диполей, он показал, что, когда частота волны намного превышает частоту релаксации диполей, изменение их ориентации становится незначительным, так что $\mu \rightarrow 1$. Эти исследования Аркадьева положили основу исследования «магнитного резонанса» и магнитной спектроскопии¹⁾.

§ 4. Распространение электромагнитных волн в ионосфере

Недавние исследования по распространению радиоволн в высоких ионизированных слоях атмосферы²⁾ открыли новое поле приложения теории дисперсии, в которой используются формулы, установленные в предыдущем параграфе.

В высоких слоях атмосферы из-за низкого давления средний свободный пробег электронов чрезвычайно велик, и, следовательно, в (3.49) можно пренебрегать коэффициентом затухания. Тогда кажущаяся проводимость есть чисто мнимая величина:

$$\gamma' = j \frac{Ne^2}{m\omega} . \quad (3.53)$$

Следовательно, имеем

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega r} = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \omega^2} , \quad s = 0 . \quad (3.54)$$

¹⁾ Для справок см. [2].

²⁾ Для справок см. [3].

Итак, электромагнитная волна распространяется в атмосфере электронного газа без затухания и с фазовой скоростью, большей скорости света в пустом пространстве.

Для частот, меньших критической, значение которой определяется соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0},$$

из (3.54) следует, что показатель преломления становится мнимым. Можно проверить, что на граничной поверхности такой среды волна полностью отражается.

Проблема распространения электромагнитных волн в ионосфере сложна из-за необходимости учета влияния земного магнетизма. Она была исследована советскими физиками Шулейкиным и Жекулиным (1930 г.).

Предположим, что плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси Oz . Для простоты рассмотрим случай газа, состоящего из одного компонента (электронов), и примем, что число частиц в единичном объеме равно N . Постоянное магнитное поле может быть разложено на две составляющие: продольную (по направлению распространения волны) и поперечную. В первом приближении можно учитывать только продольную составляющую H_0 . С учетом выражения силы Лоренца (1.10) уравнения движения электронов будут в этом случае иметь вид

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E_x - \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{e}{m} E_y + \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (3.55)$$

Поскольку движение происходит в плоскости xOy , которая содержит и векторы падающей волны, предпочтительнее использовать комплексные величины

$$u = x + jy, \quad E = E_x + jE_y, \quad H = H_x + jH_y. \quad (3.56)$$

При этом уравнения (3.55) можно записать в следующей более сжатой форме:

$$\ddot{u} - j \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{u} = -\frac{e}{m} E. \quad (3.57)$$

Уравнения электромагнитной волны в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} - j\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} + j\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = +jNeu. \quad (3.58)$$

Чтобы найти решение, одновременно удовлетворяющее уравнениям (3.57) и (3.58), положим

$$E = A'e^{\pm j(hz - \omega t)}, \quad H = A''e^{\pm j(hz - \omega t)}, \quad u = Ce^{\pm j(hz - \omega t)}. \quad (3.59)$$

Эти выражения представляют собой гармонические волны, распространяющиеся в направлении оси Oz с волновым вектором h .

Подставляя их в (3.57) и (3.58), получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} A' + \left(-\omega^2 \pm \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m} \right) C &= 0, \\ hA' + j\mu_0 \omega A'' &= 0, \\ \epsilon_0 \omega A' + jhA'' + Ne\omega C &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Чтобы для A' , A'' , C получить ненулевые значения, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Это условие позволяет определить значение h :

$$\frac{c^2 h^2}{\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega^2 \mp (e\mu_0 H_0 \omega/m)}. \quad (3.61)$$

Поскольку фазовая скорость равна $v = \omega/h$, для показателя преломления среды получаем

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2 h^2}{\omega^2}. \quad (3.62)$$

Итак, приходим к интересному заключению, что электронный газ, на который действует постоянное магнитное поле, ведет себя как анизотропный двоякопреломляющий кристалл, в котором возможны два вида бегущих волн с различными скоростями:

$$n_{\mp}^2 = n_{e\mp} = 1 - \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega^2 \mp (e\mu_0 H_0 \omega/m)}. \quad (3.63)$$

Видно, что при подходящем выборе ω показатель преломления n_- может стать бесконечным, а при другом значении частоты n_+ становится равным нулю.

Эти формулы позволяют объяснить замечательные оптические свойства слоев Кеннелли — Хевисайда. Так, линейно поляризованная падающая волна разлагается в этой среде на две составляющие, поляризованные по кругу в противоположных направлениях, которые распространяются со скоростью v_+ и v_- соответственно. Поскольку полное отражение волны определяется коэффициентом преломления среды, то при отражении в ионосфере поляризация волны может быть искажена, так что волна, возвращающаяся на Землю, может содержать поляризованную по кругу компоненту, которая способствует наблюдаемому нерегулярному изменению условий приема коротких радиоволн, так называемому «замиранию».

§ 5. Классическая теория когерентного рассеяния

Теория Максвелла — Лоренца позволяет дать простое объяснение принципу, на котором основывается явление когерентного рассеяния света. А именно предполагается, что электронные осцил-

ляторы атомов под влиянием электромагнитной волны совершают вынужденные колебания с частотой падающей волны. Поскольку электрический момент колеблющегося электрона меняется во времени, то электрон будет излучать вторичные электромагнитные волны, имеющие частоту вынужденных колебаний, т. е. частоту падающей волны. Существование этих вторичных волн порождает явление когерентного рассеяния.

Для простоты рассмотрим случай линейного осциллятора, колеблющегося под действием плоской монохроматической электромагнитной волны, которая предполагается поляризованной линейно и распространяется по направлению оси Oz . Электрическое поле волны будет иметь вид

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad E_y = E_z = 0. \quad (3.64)$$

Поскольку магнитное поле очень мало влияет на движение электрона по направлению оси Ox , в первом приближении можно пренебречь магнитным действием, и вынужденное колебание электрона будет определяться уравнением

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{e}{m} E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z_0}{c} \right),$$

откуда

$$x = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega \left(t - \frac{z_0}{c} \right), \quad (3.65)$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ — собственная частота осциллятора.

Мы опустили член затухания, но в действительности движение осциллятора всегда затухает вследствие реакции излученного света, не говоря уже об остальных возможных причинах затухания, которые, однако, в классической теории не приводят к удовлетворительным результатам. Полагая, что частота падающей волны отлична от резонансной частоты, мы можем ограничиться выражением (3.65) без введения затухания. Этому вынужденному колебанию соответствует [см. (3.9)] электрический момент

$$p_x = -ex = \frac{e^2 E_x}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad p_y = p_z = 0. \quad (3.66)$$

Излучение этого осциллятора может быть выражено через поток энергии осциллирующего диполя за единицу времени на единицу площади:

$$\bar{Y}_r = \frac{1}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta |p_x^0|^2,$$

где \bar{Y}_r — среднее значение во времени, т. е. средний поток в направ-

влении радиус-вектора \mathbf{r} , а p_x^0 — амплитуда p_x . Следовательно,

$$\bar{Y}_r = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (3.67)$$

По определению, это есть интенсивность рассеянной волны в направлении θ на расстоянии r .

В случае, когда падающий свет не поляризован, имеем

$$p_x^0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = p_y^0, \quad p_z^0 = 0; \quad (3.66')$$

следовательно,

$$\bar{Y}_r = \frac{e^4}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{E_0^2}{r^2} (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y).$$

Или, поскольку

$$\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y = 1 + \cos^2 \theta_z,$$

$$\bar{Y}_r = \frac{e^4}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{E_0^2}{r^2} (1 + \cos^2 \theta_z). \quad (3.67')$$

Полный поток получается интегрированием вышеприведенного выражения по шару радиусом r . В случае неполяризованного света имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \bar{Y}_r 2\pi r^2 \sin \theta_z d\theta_z &= \frac{e^4 E_0^2}{16\pi c^3 \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta_z) \sin \theta_z d\theta_z = \\ &= \frac{8}{3} \frac{e^4 E_0^2}{16\pi c^3 \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Обозначив через I_0 поток энергии падающей волны за единицу времени на единицу площади, получаем

$$I_0 = c \varepsilon_0 E_0^2. \quad (3.68)$$

Энергия, рассеянная осциллятором за единицу времени, будет равна

$$I_d = \frac{e^4}{6\pi \varepsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} I_0. \quad (3.69)$$

Коэффициент рассеяния (или эффективное сечение рассеяния) σ вещества, по определению, равен отношению энергии, излученной электронами за единицу времени, к энергии, падающей за единицу времени на единицу площади. Следовательно, молярный коэффициент рассеяния будет

$$\sigma_M = \frac{I_d}{I_0} = \frac{e^4 N}{6\pi \varepsilon_0^2 m^2 c^4} \sum_i \frac{N_i \omega^4}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2}.$$

В случае рассеяния света $\omega_0 \gg \omega$, поскольку собственные частоты электронов обычно принадлежат ультрафиолетовой области. Следовательно, формула (3.69) указывает, что рассеяние света пропорционально четвертой степени частоты, или λ^{-4} . Это знаменитый закон Релея (1871 г.), который хорошо выполняется для видимой области спектра. Между прочим, этот закон позволяет объяснить голубой цвет неба. А именно в соответствии с ним при рассеянии белого света солнца на молекулах воздуха больше всего будут рассеиваться коротковолновые компоненты (фиолетовые, синие, голубые), которые и определяют цвет неба. Хотя такое объяснение позволяет качественно интерпретировать ряд явлений природы, но количественно оно противоречит экспериментальным данным. Как показал Мандельштам, для правильного объяснения нужно принимать во внимание флуктуации плотности атмосферы.

Рассмотрим объем V рассеивающей среды, который мы разобъем на маленькие ячейки. В каждой такой ячейке центры рассеяния распределены произвольно, но фазу рассеянной волны можно отнести к фазе рассеянной волны, исходящей из центра O объема. Следовательно, будем считать, что фазы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_e$ есть разности фаз вторичной волны, испускаемой молекулой, которая находится в определенной точке ячейки, и рассеянной волны, исходящей из центра O . Пусть N_i — число молекул, на которых рассеянные волны получают фазу φ_i . Результирующее поле рассеянных волн в некоторой точке, внешней по отношению к объему V , будет пропорционально величине

$$\Phi = \sum_i N_i e^{j\varphi_i}.$$

Следовательно, в выражение вектора Умова — Пойнтинга войдет Φ^2 . В выражение интенсивности рассеянного излучения будет входить тот же множитель. Сразу же замечаем, что если распределение молекул однородное, то Φ обращается в нуль; поэтому свет совершенно не будет рассеиваться. Таким образом, рассеяние света в газе представляет собой явление, зависящее существенным образом от неоднородности распределения молекул газа, т. е. от термодинамических флуктуаций. Если обозначить через δN_i отклонение числа соответствующих молекул от средней статистической \bar{N}_i , то интенсивность рассеянного света будет пропорциональна величине

$$|\Phi|^2 = \left| \sum e^{j\varphi_i} \delta N_i \right|^2 = \sum_i (\delta N_i)^2 + \sum_{i \neq k} e^{j(\varphi_i - \varphi_k)} \delta N_i \delta N_k.$$

Чтобы провести сравнение с экспериментальными данными, необходимо взять статистическое среднее этой величины. В случае разреженного газа можно пренебречь корреляцией между различными

элементарными объемами, тогда будем иметь

$$\delta \bar{N}_h \delta \bar{N}_i = 0, \quad (\delta \bar{N}_i)^2 = \bar{N}_i.$$

Следовательно, полное рассеяние пропорционально среднему числу центров рассеяния в рассматриваемом объеме:

$$|\bar{\Phi}|^2 = \sum_i \bar{N}_i = N.$$

В этом состоит правильное объяснение явления когерентного рассеяния света в атмосфере. Отметим, что Араго открыл явление деполяризации света при рассеянии в атмосфере. Для объяснения его нужно учесть, что в случае несимметричных молекул поляризуемость является тензорной величиной (см. Борн [4]).

В случае рассеяния света на свободных электронах в формуле (3.69) следует положить $\omega_0 \approx 0$. При рассеянии на атомах то же приближение справедливо в случае рассеяния рентгеновских лучей, когда $\omega_0 \ll \omega$ и, следовательно, величиной ω_0 можно пренебречь. При этом формула (3.69) принимает вид

$$I_d = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} I_0, \quad \sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}.$$

Поскольку эффективное сечение σ имеет размерность площади, с учетом (1.37) можно записать

$$\sigma = \pi (\alpha r_0)^2.$$

Следовательно, в этом случае рассеяние не зависит от ω и обусловлено электронами, которые ведут себя как сферические частицы радиусом $a = \alpha r_0$, если положить, что $\alpha = \sqrt{8/3}$. Эта формула получена Дж. Дж. Томсоном.

Отметим, однако, что для случая рентгеновских лучей эффективное сечение может быть точно вычислено только с помощью квантовой механики или соответственно квантовой электродинамики.

Рассеяние электромагнитных волн системой электронов отличается от рассеяния волн одним покоящимся электроном прежде всего тем, что вследствие движения электронов внутри системы частота рассеянного излучения отличается от частоты падающих волн. А именно в спектральное разложение рассеянного излучения вместе с частотой ω падающей волны входят и частоты

$$\omega' = \omega + \sum_i \omega^{(i)} n^{(i)},$$

где $\omega^{(i)}$ — основные частоты вынужденного периодического движения электронов внутри системы и $n^{(i)}$ — произвольные целые числа. Это дает так называемое комбинационное рассеяние, открытое Раманом и независимо от него для случая кристаллов — Мандельштамом и Ландсбергом (1928 г.).

§ 6. Молекулярная теория распространения света

Ниже мы изложим, следуя Борну [4], строгую статистическую теорию распространения света в *изотропных* макроскопических средах (в газах, жидкостях и стекле или других аморфных телах). Для этих сред характерно, что в среднем молекулы ориентированы одинаково для всех направлений пространства; следовательно,

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}', \quad (3.70)$$

где α — средняя поляризуемость молекулы. Предположим, что молекулы распределены в пространстве равномерно со статистической точки зрения и что плотность N молекул постоянна.

Падающая световая волна действует на диполи-молекулы, и, следовательно, каждый возбужденный диполь будет излучать вторичную световую волну сферической формы. Эти сферические волны будут интерферировать между собой, что приведет к явлениям, описываемым в макроскопической теории Максвелла формулами Френеля. Покажем это.

Поле диполей может быть представлено вектором Герца (Тамм, стр. 466)

$$\mathbf{Z} = \frac{[\mathbf{p}]}{4\pi\epsilon r}. \quad (3.71)$$

Мы предположили, что в нормальном состоянии атомы среды не имеют магнитных моментов или что в случае видимого света их влиянием можно пренебречь.

Полное электрическое поле \mathbf{E}'_j , действующее на j -й диполь внутри среды, будет состоять из поля падающей волны $\mathbf{E}^{(0)}$ и полей, порожденных остальными диполями

$$\mathbf{E}'_j = \mathbf{E}^{(0)} + \sum'_l \mathbf{E}_{jl}. \quad (3.72)$$

Поле диполя l в точке, в которой находится диполь j , будет

$$\mathbf{E}_{jl} = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{[\mathbf{p}_0]}{R_{jl}} \right), \quad (3.73)$$

где R_{jl} — расстояние между диполями, а запаздывающее время равно $t - R_{jl}/c$.

Если статистическое распределение диполей, которое в среднем предполагается однородным, заменить непрерывным распределением, т. е. если считать дипольный момент $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ функцией вектора положения \mathbf{r} и времени t , а плотность $N = N(\mathbf{r})$, то можно записать

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[\nabla \times \int N \frac{\mathbf{p}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv' \right], \quad (3.74)$$

где

$$dv' = dx' dy' dz', \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

а интеграл распространяется по всему полупространству $z < 0$ рассматриваемой среды, за исключением маленькой сферы радиусом a , заключающей точку, в которой находится диполь j .

Чтобы вычислить этот интеграл, предположим, согласно (3.70), что полный дипольный электрический момент равен

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E}' &= \mathbf{P}^{(0)} \exp[(2\pi/\lambda)j\mathbf{s}\mathbf{r}] \exp[-j\omega t] = \\ &= \mathbf{F} \exp[-j\omega t]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Это сводится к предположению, что в рассматриваемой среде распространяется плоская волна, которая отличается по направлению и длине волны от падающей волны $\mathbf{E}^{(0)}$. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}^{(0)} \exp[(2\pi/\lambda)j\mathbf{s}\mathbf{r}]. \quad (3.76)$$

Следуя методу, указанному Озееном [6], можно записать

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}^{(0)} + \nabla \times (\nabla \times \mathcal{J}), \quad (3.77)$$

где

$$4\pi\epsilon_0\mathcal{J} = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t-R/c)}{R} dv' = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\omega(t-R/c)}}{R} dv'. \quad (3.78)$$

Замечаем, что функция \mathbf{F} удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{F} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\mathbf{F} = -n^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{F}. \quad (3.79)$$

Так как дивергенция \mathbf{E}' равна нулю, то из (3.77) следует

$$\nabla\mathbf{F} = 0. \quad (3.80)$$

Соотношение (3.78) можно переписать следующим образом:

$$4\pi\epsilon_0\mathcal{J} = e^{-j\omega t} \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') \varphi(R) dS', \quad (3.81)$$

где

$$\varphi(R) = \frac{e^{j\omega R/c}}{R}, \quad \Delta\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2}\varphi. \quad (3.82)$$

Применяя формулу Грина и учитывая (3.79), можно показать, что (3.81) переписывается и так:

$$4\pi\epsilon_0\mathcal{J} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{e^{-j\omega t}}{n^2-1} \int_{(\Sigma)+(\sigma)} \left[\mathbf{F} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}'} - \varphi \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{v}'} \right] dS', \quad (3.83)$$

где интеграл берется по внешней граничной поверхности среды (Σ) и по сфере (σ) , описанной вокруг выделенной точки, которую мы полагаем внутренней по отношению к среде.

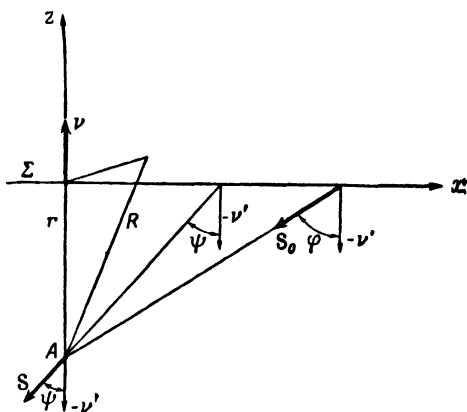
Таким образом, переменное поле диполей из (3.77) заменено фиктивным распределением диполей на граничных поверхностях.

Следовательно, интеграл (3.83) может быть разбит на две части \mathcal{J}_σ и \mathcal{J}_Σ ; первый из них обращается в нуль, когда выделенная точка лежит вне рассматриваемой среды. Эти два интеграла могут быть вычислены путем разложения в ряд. Что касается первого интеграла, не приводя непосредственных вычислений, которые довольно трудоемки¹⁾, заметим, что

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{J}_\sigma) = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathbf{P}. \quad (3.84)$$

Действительно, пусть рассматриваемая среда предполагается неограниченной, т. е. поверхность (Σ) лежит в бесконечности. Тогда, чтобы дипольная волна сохранялась под действием излучения других диполей, мы должны просто отбросить в (3.77) падающую волну $\mathbf{E}^{(0)}$ и положить

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \nabla \times (\nabla \times \mathcal{J}_\sigma) = \\ &= \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathbf{P}. \end{aligned}$$



Фиг. 15.

В последующем мы дадим оправдание этой гипотезы выводом соотношения (3.96).

Из написанного выражения с учетом (3.75) имеем

$$\frac{1}{3} \alpha N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}, \quad (3.84')$$

что дает известную формулу Лоренца — Лоренца (2.12) и тем самым обосновывает соотношение (3.84).

Возвратимся к соотношению (3.83) и предположим, что границей (Σ) среды является плоскость $z=0$ и что падающая волна приходит из пустого пространства ($z>0$) к телу, которое находится в области $z<0$. Нужно вычислить интеграл

$$4\pi\epsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{c^2 e^{-j\omega t}}{\omega^2 (n^2 - 1)} \int_{(\Sigma)} \left(\mathbf{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} - \varphi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \nu'} \right) dS', \quad (3.85)$$

распространенный по плоскости $z=0$. Предположим, что выделенная точка A находится на таком расстоянии r от (Σ) (фиг. 15),

¹⁾ См. [4], стр. 426—432 перевода.

которое значительно превосходит длину волны λ_0 ; следовательно,

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} r = r \frac{\omega}{c} \gg 1. \quad (3.86)$$

В этом случае, согласно (3.76) и (3.82),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \mathbf{P}^{(\omega)} e^{j(\omega/c)(nr's)} = j \frac{\omega}{c} n \left(\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{v}'} \right) \mathbf{F}(\mathbf{r}'), \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \varphi(R) &= j \frac{\omega}{c} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}'} \varphi + \dots \end{aligned}$$

Подставляя в (3.85), получаем

$$4\pi \varepsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{c \mathbf{P}^{(\omega)} e^{-j\omega t}}{j\omega (n^2 - 1)} \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}'} - n \left(\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{v}'} \right) \right\} \frac{e^{j(\omega/c)[R+n(\mathbf{r}'\mathbf{s})]}}{R} dS'. \quad (3.85')$$

Выберем в плоскости $z=0$ ось Ox так, чтобы единичный вектор \mathbf{s} нормали к дипольной волне лежал в плоскости xOz и выделенная точка находилась бы на оси Oz . Имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}'} = -\frac{z-z'}{R} = \frac{r}{R},$$

и, поскольку вектор \mathbf{r}' имеет компоненты $(x', y', 0)$, а вектор \mathbf{s} — компоненты $(\sin \psi, 0, -\cos \psi)$, где ψ — угол между \mathbf{s} и внутренней нормалью $-\mathbf{v}'$ к (Σ) , то

$$\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{v}'} = s_z = -\cos \psi,$$

$$\mathbf{r}'\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{s} - R\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{s} - x' \sin \psi - r \cos \psi;$$

следовательно,

$$4\pi \varepsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{c \mathbf{P}^{(\omega)} e^{-j\omega \left(t - \frac{n}{c} \mathbf{r}\mathbf{s} \right)}}{j\omega (n^2 - 1)} \int_{(\Sigma)} \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R} + n \cos \psi \right) e^{j(\omega/c)K} dx' dy', \quad (3.87)$$

где

$$K = R - n (r \cos \psi + x' \sin \psi). \quad (3.88)$$

Интеграл вычисляется просто, если выбрать подходящую систему криволинейных координат в плоскости (Σ) . В качестве координатных линий удобно выбрать кривые $K = \text{const}$ и полярный угол ω исходящего из точки A_0 [определенной вектором $\mathbf{r}_0(x', y', 0)$] радиус-вектора с осью Ox . Легко проверить, что уравнение (3.88) описывает семейство эллипсов с центрами в точках

$$\mathbf{r}'_0(x'_0 = r \operatorname{tg} \varphi, y'_0 = 0, z'_0 = 0),$$

где

$$\sin \varphi = n \sin \psi$$

и минимальное значение K (определяемое из условия $\nabla K = 0$) равно $K_0 = r(\cos \varphi - n \cos \psi)$. (3.88')

Итак, полагая

$$dS = dx' dy' = f(K, \omega) dK d\omega,$$

$$g(K, \omega) = \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R} + n \cos \psi \right),$$

переписываем интеграл (3.87) в виде

$$4\pi \varepsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{c}{j\omega(n^2-1)} \mathbf{P}^{(\omega)} e^{-j\omega t} e^{j(\omega/c)n(rs)} \times$$

$$\times \int_{K_0}^{\infty} e^{j(\omega/c)K} dK \int_0^{2\pi} g(K, \omega) f(K, \omega) d\omega. \quad (3.89)$$

Учитывая (3.86) и применяя теорему о среднем к последнему интегралу, получаем

$$\int_0^{2\pi} g(K, \omega) f(K, \omega) d\omega = g(K, \bar{\omega}) \int_0^{2\pi} f(K, \omega) d\omega, \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq 2\pi. \quad (3.90)$$

Интеграл (3.90), умноженный на dK , описывает кольцевую область, заключенную между двумя эллипсами K и $K + dK$; поэтому

$$\int F(K) dK = \int \int_0^{2\pi} f(K, \omega) d\omega dK = \pi ab,$$

где a, b — полуоси эллипса $K = \text{const}$. Следовательно, имеем

$$4\pi \varepsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{c}{j\omega(n^2-1)} \mathbf{P}^{(\omega)} e^{-j\omega t} e^{j(\omega/c)n(rs)} \int_{K_0}^{\infty} g(K, \bar{\omega}) F(K) e^{j(\omega/c)K} dK. \quad (3.91)$$

Интеграл можно взять по частям, заметив, что величина K_0 , согласно (3.88'), пропорциональна r ; получаем следующее разложение в ряд:

$$\int_{K_0}^{\infty} g F e^{j(\omega/c)K} dK = \frac{c}{j\omega} [g F e^{j(\omega/c)K}]_{K_0}^{\infty} +$$

$$+ \frac{c^2}{\omega^2} \left[\frac{\partial g F}{\partial K} e^{j(\omega/c)K} \right]_{K_0}^{\infty} + \dots \quad (3.91')$$

Для вычислений ограничимся первым членом разложения. Заметим, что при $K = \infty$ можно положить $(Fg)_{K=\infty} = 0$, поскольку

можно пренебречь влиянием остальных граничных поверхностей тела, а также бесконечно удаленной части поверхности (Σ).

Чтобы вычислить значение, соответствующее $K_0 = 0$, заметим, что при $K \rightarrow K_0$ эллипсы окружают точку с координатами $x'_0 = r \operatorname{tg} \varphi$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$, в которой вектор $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ имеет компоненты $(-r \operatorname{tg} \varphi, 0, -r)$; следовательно,

$$R = (r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + r^2)^{1/2} = \frac{r}{\cos \varphi}$$

и

$$g = \frac{\cos \varphi}{r} (\cos \varphi + n \cos \psi),$$

$$F(K_0) = \frac{2\pi r}{\cos^2 \varphi}.$$

Последнее выражение получается, если заметить, что

$$F(K) = \frac{d}{dK} (\pi ab).$$

Запишем уравнение семейства эллипсов $K = \text{const}$ в канонической форме:

$$\frac{(x' - \xi)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

где

$$b^2 = (1 - n^2 \sin^2 \psi) a^2 = \frac{K^2 + 2Krn \cos \psi + r^2 (n^2 - 1)}{1 - n^2 \sin^2 \psi},$$

$$\xi = \frac{n \sin \psi (K + nr \cos \psi)}{1 - n^2 \sin^2 \psi}.$$

Тогда

$$F(K) = 2\pi \frac{K + rn \cos \psi}{\cos^3 \varphi}$$

или с учетом (3.88')

$$F(K_0) = \frac{2\pi r}{\cos^2 \varphi}.$$

При этом

$$gF = 2\pi \frac{\cos \varphi + n \cos \psi}{\cos \varphi} = 2\pi \frac{\sin(\psi + \varphi)}{\sin \psi \cos \varphi}.$$

Аналогично,

$$n(\mathbf{rs}) + K_0 = nr \cos \psi + r(\cos \varphi - n \cos \psi) = r \cos \varphi = \mathbf{rs}^0,$$

где единичный вектор \mathbf{s}^0 имеет компоненты $(\sin \varphi, 0, -\cos \varphi)$. Наконец из (3.91') и (3.91) получаем

$$4\pi \epsilon_0 \mathcal{J}_\Sigma = \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (n^2 - 1)} \mathbf{p}^{(\ast)} \frac{\sin(\psi + \varphi)}{\sin \psi \cos \varphi} e^{-j\omega(t - \frac{1}{c} \mathbf{rs}^0)}; \quad (3.92)$$

это выражение волны, распространяющейся со скоростью c в направлении \mathbf{s}^0 , отличной от падающей волны по направлению и интенсивности.

Возвращаясь к основному соотношению (3.77), замечаем, что

$$\nabla \times \mathbf{P}^{(0)} e^{-j\omega(t - \frac{1}{c} r s^0)} = j \frac{\omega}{c} (\mathbf{s}^0 \times \mathbf{P}^{(0)}) e^{-j\omega(t - \frac{1}{c} r s^0)} \quad (3.93)$$

и

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{J}_\Sigma) = -\frac{1}{2\epsilon_0(n^2-1)} \frac{\sin(\psi+\varphi)}{\sin\psi \cos\varphi} [\mathbf{s}^0 \times (\mathbf{s}^0 \times \mathbf{P}^{(0)})] e^{-j\omega(t - \frac{1}{c} r s^0)}, \quad (3.94)$$

где

$$\mathbf{s}^0 \times (\mathbf{s}^0 \times \mathbf{P}^{(0)}) = \mathbf{s}^0 (\mathbf{s}^0 \mathbf{P}^{(0)}) - \mathbf{P}^{(0)}. \quad (3.95)$$

Следовательно, дипольную волну можно разложить на две составляющие \mathcal{J}_Σ и \mathcal{J}_σ . Напишем теперь условие, чтобы эти дипольные волны компенсировали падающую волну, а именно чтобы, согласно (3.77), выполнялось соотношение

$$\mathbf{E}^{(0)} + \nabla \times (\nabla \times \mathcal{J}_\Sigma) = 0. \quad (3.96)$$

Разложим падающую волну и дипольную волну на две составляющие: одну — параллельную плоскости падения, а вторую — перпендикулярную, поскольку плоскость падения содержит векторы \mathbf{s} и \mathbf{s}^0 , образующие угол $\varphi - \psi$ (см. фиг. 15). Тогда компонентой $P_{\parallel}^{(0)}$ будет $P^{(0)}$, а компонента $P_{\perp}^{(0)}$ будет перпендикулярна вектору $\mathbf{s}^{(0)}$ и равна $P^{(0)} \cos(\varphi - \psi)$. Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} A_{\perp}^{(0)} &= \frac{1}{2\epsilon_0(n^2-1)} P_{\perp}^{(0)} \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi \sin\psi}, \\ A_{\parallel}^{(0)} &= \frac{1}{2\epsilon_0(n^2-1)} P_{\parallel}^{(0)} \frac{\sin(\psi+\varphi) \cos(\varphi-\psi)}{\cos\varphi \sin\psi}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

где $A_{\perp}^{(0)}$, $A_{\parallel}^{(0)}$ — компоненты амплитуды волны $\mathbf{E}^{(0)}$.

В силу соотношения (3.84') имеем уравнение

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (n^2 - 1) \mathbf{E}, \quad (3.98)$$

которое определяет «макроскопическое поле» \mathbf{E}^d внутри рассматриваемой среды. Следовательно,

$$A_{\perp}^{(d)} = \frac{1}{2\epsilon_0(n^2-1)} P_{\perp}^{(0)}, \quad A_{\parallel}^{(d)} = \frac{1}{2\epsilon_0(n^2-1)} P_{\parallel}^{(0)}. \quad (3.99)$$

Подставляя в (3.97), получаем формулы Френеля для преломленной волны.

Вычисляя аналогичным образом интеграл \mathcal{J}_Σ для пространства, внешнего по отношению к среде ($z > 0$), получаем аналогичный результат с той лишь разницей, что вместо r , s_z и φ нужно взять

соответственно $-r$, $-s_z$ и $\pi - \varphi$. Вводя вместо вектора \mathbf{s}^0 вектор \mathbf{s}' с компонентами $(\sin \varphi, 0, \cos \varphi)$, получаем по аналогии с (3.97) соотношения

$$\begin{aligned} A_{\perp}^{(r)} &= \frac{1}{2\varepsilon_0(n^2-1)} P_{\perp}^{(r)} \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi \cos\varphi}, \\ A_{\parallel}^{(r)} &= \frac{1}{2\varepsilon_0(n^2-1)} P_{\parallel}^{(r)} \frac{\sin(\varphi-\psi) \cos(\varphi+\psi)}{\sin\psi \cos\varphi}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Исключая $P_{\perp}^{(r)}$ и $P_{\parallel}^{(r)}$ из соотношений (3.97) и (3.100), получаем формулы Френеля для отраженной волны.

Таким образом, мы показали, что для изотропных тел влияние среды на распространение света может быть истолковано при помощи рассмотрения излучения диполей в пустом пространстве. Эта молекулярная теория света шире феноменологической теории Максвелла, поскольку она, помимо обычного распространения света, охватывает и *рассеяние* его. Действительно, в выражении (3.74) под знак интеграла входит плотность N молекул. Выше мы предположили, что N постоянно, на самом же деле плотность молекул флуктуирует. Следовательно, разработанная теория дает представление о распространении света статистически в среднем. Кроме того, должно существовать и нерегулярное распространение света, обусловленное флуктуациями. Таким образом, мы пришли к истолкованию явления молекулярного рассеяния света.

§ 7. Явление Фарадея, магнитное вращение плоскости поляризации

Возвратимся к уравнениям колебания электрона (3.6) и рассмотрим электрон, находящийся во внешнем магнитном поле \mathbf{B} . На электрон будет действовать сила Лоренца

$$m\ddot{\mathbf{r}} + b\dot{\mathbf{r}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{B}). \quad (3.101)$$

Если принять направление поля \mathbf{B} за ось Oz и предположить, что световая волна распространяется в том же направлении, то векторы \mathbf{E} и \mathbf{r} будут лежать в плоскости xOy . Уравнение (3.101) можно записать при помощи проекций на оси координат

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{e}{m} B\dot{y} + \omega_0^2 x &= -\frac{e}{m} E_x, \\ \ddot{y} - \frac{e}{m} B\dot{x} + \omega_0^2 y &= -\frac{e}{m} E_y, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = b/m$. Умножив второе уравнение на $\pm j$ и сложив с первым, получаем

$$\ddot{R} \mp \frac{e}{m} jB\dot{R} + \omega_0^2 R = -\frac{e}{m} E, \quad (3.102)$$

где использованы обозначения

$$R = x \pm jy, \quad E = E_x \pm jE_y. \quad (3.103)$$

Введение комплексной величины E вместо прямоугольных компонент означает, что мы перешли от линейной поляризации к круговой. Следовательно, если падающая волна будет линейно поляризованной:

$$E = E_x = A \cos \omega t, \quad E_y = 0, \quad (3.104)$$

то это означает, что мы разложили ее на две поляризованные по кругу волны: правовращающуюся (E_+) и левовращающуюся (E_-), так что

$$E_x = \frac{1}{2} (E_+ + E_-), \quad E_y = \frac{1}{2j} (E_+ - E_-). \quad (3.105)$$

Теперь мы при помощи величин E_{\pm} выразим поле световой волны в магнитном поле, а после того как волна пройдет область магнитного поля, мы опять возвратимся к описанию поляризации колебаний как линейной и вычислим угол поляризации с направлением исходного колебания E_x .

Допустив, что световое колебание монохроматично, положим

$$E_{\pm} = A \exp [j(k_{\pm}z - \omega t)]. \quad (3.106)$$

Предположим теперь, что R_{\pm} имеет такую же периодическую форму. Из (3.102) следует

$$R_{\pm} = \frac{-e/m}{-\omega^2 \mp (e/m) B\omega + \omega_0^2} E_{\pm}. \quad (3.107)$$

Для вектора поляризации, пропорционального \mathbf{r} , будем иметь

$$P_{\pm} = P_x \pm jP_y; \quad (3.108')$$

следовательно,

$$P_{\pm} = \frac{N(e^2/m)}{-\omega^2 \mp (e/m) B\omega + \omega_0^2} E_{\pm}. \quad (3.108)$$

В этом случае из дифференциального уравнения (3.20) получаем соотношение

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\mu_0 c^2 (Ne^2/m)}{\omega_0^2 \mp (e/m) B\omega - \omega^2} \right). \quad (3.109)$$

Соответственно будем иметь два различных показателя преломления

$$n_{\pm} = \frac{c}{\omega} k_{\pm},$$

определенных соотношением

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 \mp (e/m) B\omega - \omega^2}. \quad (3.110)$$

Различие между этими двумя показателями невелико, ибо из вышеприведенного соотношения в первом приближении получаем

$$n_+^2 - n_-^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} 2 \frac{e}{m} \frac{B\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2},$$

или если определить средний показатель преломления $n = \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$, то

$$n_+ - n_- = \frac{Ne^3}{nm^2\epsilon_0} \frac{B\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (3.111)$$

Заметим, что можно записать

$$k_{\pm} = \frac{1}{2}(k_+ + k_-) \pm \frac{1}{2}(k_+ - k_-). \quad (3.112)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{l}{2}(k_+ + k_-) - \omega t \quad (3.113)$$

для разности фаз, соответствующей пути, пройденному светом в магнитном поле от $z=0$ к $z=l$, и

$$\chi = \frac{l}{2}(k_+ - k_-), \quad (3.114)$$

выражающее угол вращения. Таким образом, согласно соотношениям (3.106) и (3.112), имеем

$$E_{\pm} = Ae^{j\varphi} e^{\pm j\chi}, \quad (3.115)$$

откуда, согласно (3.105), следует

$$E_x = Ae^{j\varphi} \cos \chi, \quad E_y = Ae^{j\varphi} \sin \chi. \quad (3.116)$$

Поскольку E_x и E_y имеют одну и ту же фазу, их можно представить в виде суммы. Это даст линейно поляризованную волну, направление поляризации которой относительно первоначального направления поляризации будет повернуто на угол χ в положительном направлении относительно поля \mathbf{B} . Фаза волны изменяется на $\frac{1}{2}l(k_+ + k_-)$.

Заметим, что в выражение (3.110) входит частота Лармора (см. гл. II, § 3, п. 2)

$$\omega_L = -\frac{e}{2m} B,$$

которая мала, так как мы предположили, что магнитное поле слабое. В этом случае можно пренебречь величиной ω_L^2 по сравнению с ω_0^2 и записать

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - (\omega \mp \omega_L)^2}.$$

Это значит, что можно рассматривать n_- как функцию $\omega + \omega_L$ и соответственно n_+ как функцию $\omega - \omega_L$. Поскольку $\omega_L \ll \omega$, то их разность может быть записана следующим образом:

$$n_- - n_+ = \frac{dn}{d\omega} 2\omega_L.$$

Поэтому можно переписать (3.114) в виде

$$\chi = -\frac{\omega}{2c} l \frac{dn}{d\omega} \frac{e}{m} B. \quad (3.114')$$

Эта формула впервые была выведена Беккерелем. Она удовлетворительно выполняется в случае диамагнитных веществ. Однако, как показал Ладенбург, в случае парамагнитных веществ формулу (3.114') следует дополнить членом, в знаменатель которого входит абсолютная температура. Эта формула была выведена Кронигом.

Угол поворота плоскости поляризации χ может быть измерен очень точно при помощи формулы

$$\chi = V l B, \quad (3.117)$$

где V — постоянная Верде — согласно (3.114) и (3.111) равна

$$V = \frac{\omega}{2c} \frac{n_+ - n_-}{B} = \frac{N e^3}{2 n m^2 c \epsilon_0} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (3.118)$$

Угол χ зависит от частоты; следовательно, магнитное вращение плоскости поляризации связано с дисперсией. Формула (3.117) проверяется экспериментально для газов (H_2 , O_2 , N_2). Используя последовательное отражение световой волны, как делал Фарадей, можно усилить этот эффект, поскольку это приводит к увеличению пути волны в магнитном поле.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ

Введение

В электромагнитной теории Максвелла допускается, что электромагнитные волны распространяются в гипотетической среде, названной эфиром, который рассматривается как материальная основа распространения этих волн. Под действием электромагнитного поля в эфире происходят квазиупругие изменения. До сих пор при выводе системы основных уравнений поля мы считали, что тела находятся в состоянии покоя. Теперь мы обсудим вопросы, возникающие в случае движущихся тел. Этот более общий случай представляет большой интерес, поскольку чаще всего мы имеем дело с электромагнитными явлениями, порожденными заряженными телами, которые находятся в движении, а понятие абсолютного покоя является всего лишь теоретической фикцией.

В основе электродинамики движущихся тел лежит установленный экспериментально факт, что явления индукции возникают независимо от того, происходят изменения магнитного потока в движущейся или неподвижной цепи. Этот факт может быть объяснен двумя способами:

1°. Если принять, что эфир подвижен, т. е. увлекается движущимся телом, как полагал Герц, то нужно считать, что электродвижущая сила индукции зависит только от относительной скорости тела и эфира.

2°. Если же считать, что эфир неподвижен, как полагал Лоренц, то нужно принимать во внимание абсолютное движение тела по отношению к эфиру.

В свете экспериментальных данных гипотеза движущегося эфира оказалась неприемлемой. Достаточно напомнить опыт Физо (1851 г.), который опровергает ее, допуская объяснение, как показал Френель, на основе предположения о неподвижном или частично увлеченном эфире. Отметим также, что в системе, находящейся в равновесии по отношению к Земле, никаких явлений индукции не возникает.

С другой стороны, гипотеза неподвижного эфира требует существования абсолютной системы отсчета, жестко связанной с эфиром.

Это означает, что если отнести экспериментальные измерения к системе отсчета, находящейся в относительном покое, то должны иметь место эффекты, связанные с относительным движением. В частности, согласно этой гипотезе, возможно выявить абсолютное движение Земли по отношению к эфиру, наблюдая явления распространения электромагнитных волн (так называемый «эфирный ветер»). Обсуждение результатов, полученных в многочисленных опытах, представляет исключительный интерес. Оно привело к новой постановке задачи. Для этого обсуждения необходимо кратко изложить обе теории¹⁾, предложенные в классической физике, в предположении, что скорость движения тел мала по сравнению со скоростью света.

§ 1. Уравнения Максвелла — Герца

Распространение теории Максвелла для покоящихся сред на случай движущихся сред было сложной задачей для классической электродинамики. Герц [3, 4] попытался осуществить это обобщение в рамках классической теории, предположив, что эфир полностью увлекается движущимися телами. Постановка задачи в формулировке Герца аналогична с постановкой, предложенной позже Эйнштейном в теории относительности. А именно ставятся следующие задачи:

1°. Какой вид имеют в неподвижной системе координат уравнения Максвелла, характеризующие электромагнитные явления, которые происходят в движущихся телах?

2°. Если известны уравнения Максвелла в неподвижной системе координат, то какой вид примут они в подвижной системе?

Чтобы найти ответ на вторую задачу, Герц, который предполагал, что эта задача просто вычислительная, молчаливо допустил гипотезы, которые считались очевидными, а именно что можно использовать так называемое преобразование Галилея из классической механики и что евклидово пространство изотропно и однородно, т. е. что можно допускать относительность положения и ориентации.

Будем исходить из интегральной формы уравнений Максвелла

$$\int_{(\Gamma)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} i_n dS + \frac{d}{dt} \int_{(S)} D_n dS, \quad (4.1)$$

$$\int_{(\Gamma)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{(S)} B_n dS,$$

¹⁾ Для справок см. работы Мандельштама [1] и Лауэ [2].

которые мы будем считать справедливыми для тел, находящихся в состоянии покоя. В случае движущихся тел, как и раньше, можно считать, что контур (Γ), вдоль которого берется интеграл из первого уравнения, *неподвижен*, а поверхность (\mathcal{S}), которая опирается в момент t на этот контур (Γ), *движется*; она перемещается и деформируется со скоростью \mathbf{v} , меняющейся от точки к точке. Символ d/dt означает, что производная берется по движущейся поверхности (\mathcal{S}). Изменения потока, пронизывающего соответственно неподвижный контур, движущийся контур или движущуюся поверхность, опирающуюся на неподвижный контур, имеют различный смысл. Запишем векторное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(\mathcal{J})} D_n dS &= \\ &= \int_{(\mathcal{J})} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \mathbf{D} \right] \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (4.2)$$

которое получается, если заметить, что *полное изменение* потока вектора \mathbf{D} складывается из изменения потока, которое наблюдалось бы, если бы поверхность оставалась неподвижной, и из изменения, возникающего в силу движения поверхности. Чтобы вычислить изменение, вызванное движением поверхности, заметим, что каждый элемент $d\mathbf{l}$ движущегося контура описывает за время dt параллелограмм (фиг. 16), площадь которого можно выразить векторным произведением

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt.$$

С другой стороны, изменение потока, вызванного перемещением поверхности (\mathcal{S}) в бесконечно близкое положение, равно

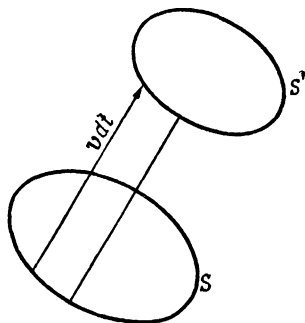
$$d\Phi = \int_{(\mathcal{J}')} D_{n_t} dS' - \int_{(\mathcal{J})} D_{n_{t-dt}} dS.$$

Следовательно, если применить теорему Гаусса к объему, замеченному этим движением, получаем

$$\int_{(\mathcal{J}')} D_{n_t} dS' - \int_{(\mathcal{J})} D_{n_t} dS + dt \int_{(\Gamma)} \mathbf{D} (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = \int_{(\mathcal{V}')} \nabla \mathbf{D} dv;$$

следовательно,

$$\int_{(\mathcal{J}')} D_{n_t} dS' - \int_{(\mathcal{J})} D_{n_t} dS = dt \int_{(\Gamma)} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) d\mathbf{l} + dt \int_{(\mathcal{J})} v_n \nabla \mathbf{D} dS.$$



Фиг. 16.

Преобразуя в правой части криволинейный интеграл в интеграл по поверхности при помощи теоремы Стокса и принимая во внимание разложение в ряд Тейлора $D_{n_{t-dt}}$, получаем

$$\int_{(j')} D_{n_t} dS' - \int_{(j)} D_{n_{t-dt}} dS = dt \int_{(j)} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \mathbf{D} \right] dS.$$

Следовательно, формула (4.2) доказана¹⁾.

С учетом соотношения (4.2) первое уравнение (4.1) принимает вид

$$\int_{(\Gamma)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(j)} i_n dS + \int_{(j)} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \mathbf{D} \right] dS.$$

Применяя формулу Стокса к левой части, получаем дифференциальное уравнение, отнесенное к неподвижной системе координат:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \mathbf{qv} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (4.3)$$

в котором мы положили

$$\nabla \mathbf{D} = \mathbf{q}. \quad (4.4)$$

В (4.3) \mathbf{v} представляет собой скорость среды в точке, где мы рассматриваем электромагнитные поля относительно неподвижной системы координат.

Путем аналогичных рассуждений и применяя формулу, аналогичную формуле (4.2), можно привести второе уравнение (4.1) к виду

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right], \quad (4.5)$$

где принято во внимание условие

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Система уравнений (4.3)—(4.6) образует систему Максвелла — Герца, которая в случае $\mathbf{v}=0$ сводится к системе Максвелла.

Скорость \mathbf{v} относится не только к телам, но и к пустому пространству, поэтому, для того чтобы уравнения имели смысл, следует допустить, что эфир полностью увлекается со скоростью \mathbf{v} .

Относительно поведения электромагнитных уравнений при преобразовании Галилея

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - u_i t, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

¹⁾ Можно легко показать, что мы получим тот же результат, если предположим, что контур движется, а поверхность жестко связана с контуром, и будем учитывать зависимость поля от времени.

где \mathbf{u} — скорость равномерного перемещения осей x'_i относительно осей x_i , Герц предполагает электромагнитное поле абсолютным, т. е.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}.$$

При таком предположении можно сразу показать, что уравнения инвариантны относительно преобразования Галилея. Таким образом,

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = - \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \nabla' \times [\mathbf{B}' \times (\mathbf{v} - \mathbf{u})] \right\}.$$

Отметим, что в отличие от механики эти уравнения не зависят от выбора частной системы координат, так как они инвариантны относительно любого вращения вообще или относительно любого движения системы координат.

Следовательно, ни движение Земли по орбите, ни вращение ее не влияют на электромагнитные явления.

Согласно этой теории, электромагнитные явления, происходящие в теле, находящемся в состоянии покоя или движения, не претерпевают никакого изменения, когда к имеющемуся движению добавляется движение всей системы в целом. Следовательно, электромагнитными измерениями нельзя обнаружить никакого абсолютного движения. Таким образом, Герц установил принцип относительности электродинамики, более общий, чем принцип относительности классической механики Ньютона.

§ 2. Уравнения Максвелла — Лоренца в случае движущихся тел

Чтобы написать уравнения электромагнитной теории в случае движущихся тел, Лоренц (1895 г.; см. [6, 7]) исходил из системы уравнений (1.8), представляющей микроскопическое поле электронов, в предположении, что макроскопическое поле получается усреднением этих микроскопических полей (1.72), т. е. что

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{b}}. \quad (4.7)$$

Чтобы получить уравнения для движущихся тел в случае немагнитных сред, заметим, что если обозначить через \mathbf{u} скорость среды по отношению к эфиру и через \mathbf{v}' скорость электронов по отношению к среде, то абсолютная скорость (по отношению к эфиру) будет выражаться следующим образом:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}', \quad (4.8)$$

\mathbf{a} конвекционный ток, обусловленный движущимися электронами, равен

$$q\mathbf{v} = q\mathbf{u} + q\mathbf{v}';$$

следовательно, мы получим полный ток, если возьмем среднюю величину

$$\overline{\mathbf{q}\mathbf{v}} = \mathbf{q}\mathbf{u} + \overline{\mathbf{q}\mathbf{v}'}. \quad (4.9)$$

Но полный ток по отношению к среде складывается из тока \mathbf{i} , обусловленного свободными электронами, и поляризационного тока $\dot{\mathbf{P}}$, обусловленного связанными электронами. Заметив, что для \mathbf{P} можно записать уравнение, аналогичное уравнению (4.2), а именно

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{P} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}), \quad (4.10)$$

с учетом (4.10) и выражения $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_l - \nabla\mathbf{P}$ [см. (1.101)] уравнение (4.9) можно переписать следующим образом:

$$\overline{\mathbf{q}\mathbf{v}} = \mathbf{q}_l\mathbf{u} + \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}). \quad (4.11)$$

Следовательно, учитывая соотношение $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, получаем уравнение, справедливое для движущихся немагнитных тел:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i} + \mathbf{q}\mathbf{u} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}), \quad (4.12)$$

где \mathbf{q}_l заменено на обычное макроскопическое \mathbf{q} . Уравнение (4.12) может быть записано также в виде

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{i} + \mathbf{q}\mathbf{u} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}). \quad (4.12')$$

Второе уравнение

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (4.13)$$

переписывается для движущихся тел без всяких изменений. Действительно, заметим, что сила, действующая на единичный заряд, движущийся со скоростью \mathbf{v} , равна не \mathbf{e} , а

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}.$$

Переходя путем усреднения к макроскопическим величинам, т. е. учитывая (4.7) и (4.9), получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}^* + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}, \quad (4.14)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (4.15)$$

есть эффективное поле, действующее на заряды тела, которые находятся в относительном покое. Следовательно, закон Ома

для движущихся тел должен иметь вид

$$\mathbf{i} = \gamma \mathbf{E}^*. \quad (4.16)$$

Заметим, что аналогично (4.10) имеем

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}), \quad (4.17)$$

где $\nabla \mathbf{B} = 0$. Следовательно, для движущихся тел второе уравнение принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{E}^* = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}). \quad (4.13')$$

Оно тождественно уравнению (4.13), если учесть (4.15).

Перемещение связанных, т. е. поляризационных, электронов происходит под действием той же силы \mathbf{E}^* ; следовательно, в предположении квазиупругой связи будем иметь

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}^*. \quad (4.18)$$

Поэтому, ввиду того что $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, вместо соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ вводится соотношение

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}^*, \quad (4.19)$$

или

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \varepsilon \mathbf{E}^* - \varepsilon_0 \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (4.20)$$

Итак, сравнивая уравнения Герца (4.3), (4.5) с уравнениями Лоренца (4.6'), (4.7'), замечаем, что эти уравнения являются однотипными, но отличаются видом некоторых слагаемых.

А именно по сравнению с правой частью первого уравнения Максвелла (обобщение соотношения Ампера) к электрическому току $\mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}}$ добавляются новые члены, обусловленные движением тела: конвекционный ток, или ток Роуланда, который в теории Герца равен $q\mathbf{v}$, а в теории Лоренца $q\mathbf{u}$, и ток Рентгена, который в теории Герца равен $\nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v})$, а в теории Лоренца $\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u})$.

Ток Рентгена равен ротору вектора $\mathbf{D} \times \mathbf{u}$ или $\mathbf{P} \times \mathbf{u}$, что означает, что он может быть порожден вращением диэлектрического диска ($u = \omega r$).

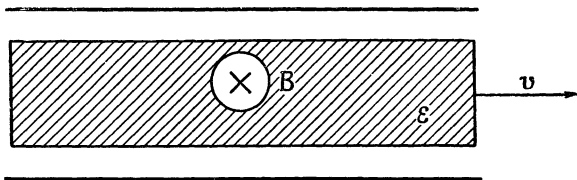
Аналогично в правой части второго уравнения Максвелла (обобщенное соотношение Фарадея) прибавляется, помимо магнитного тока смещения, магнитный ток Рентгена $\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$ или $\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u})$, который появляется всякий раз, когда отличен от нуля ротор вектора $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ или $\mathbf{B} \times \mathbf{u}$.

Отметим, что уравнение, полученное Лоренцем, не приводит к удовлетворительному результату в том, что касается намагниченности \mathbf{M} , и не дает общего выражения поляризации \mathbf{P} .

§ 3. Электромагнитные явления в телах, движущихся относительно Земли

Ниже мы хотим кратко описать опыты, проведенные для обнаружения явлений, вызванных движением тел относительно Земли. В зависимости от постановки опыта можно наблюдать электрические, магнитные и оптические эффекты.

Электрические эффекты были изучены на следующих опытах, которые стали классическими:



Ф и г. 17.

а) Опыты Вильсона (1904 г.). В этих опытах цилиндр из диэлектрического вещества вращается в магнитном поле, параллельном оси цилиндра. При вращении этот диэлектрический цилиндр приобретает объемную поляризацию, вызванную перемещением связанных электронов под действием магнитного поля.

Следовательно, согласно (4.18), в этом случае

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) vB. \quad (4.21)$$

Поэтому на поверхности диэлектрика появляются поляризационные заряды, плотность распределения которых выражается равенством

$$\sigma' = \pm P = \pm (\varepsilon - \varepsilon_0) vB. \quad (4.22)$$

Заряд цилиндра можно измерить при помощи электрометра. Итак, при вращении незаряженного диэлектрического цилиндра в магнитном поле, направленном по оси цилиндра, подключая электрометр к металлическим пластинкам, находящимся на поверхности диэлектрика, можно выявить существование разности потенциалов.

Чтобы провести сравнение двух рассматриваемых теорий, для упрощения вычислений заменим вращение параллельным переносом, предположив, что диэлектрическая пластинка движется между двумя металлическими пластинками в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости чертежа (фиг. 17). Теория Герца приводит к неправильному заключению, так как, поскольку магнитное поле стационарно ($\partial B/\partial t=0$), мы имеем

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0,$$

откуда с точностью до градиента

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B} \times \mathbf{v}.$$

Следовательно,

$$\sigma' = |D_n| = \varepsilon |E_n| = \varepsilon |(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \mathbf{n}| = \varepsilon B |v|.$$

Измеряемая разность потенциалов равна

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sigma'}{\varepsilon} d.$$

Согласно теории Герца, мы должны были бы иметь

$$V = |B| v d.$$

Однако Вильсон показал экспериментальным путем, что

$$V = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) |\mathbf{B} \times \mathbf{v}| d \quad (4.23)$$

в согласии с предсказаниями теории Лоренца, откуда следует непригодность теории Герца для объяснения этого явления.

б) Опыт Вина (1914 г.). Появление электрического поля при движении тел в магнитном поле (эффект Вильсона) может быть обнаружено, как показал Вин, и тогда, когда соответствующим телом является атом водорода. А именно, для того чтобы выявить электрическую поляризацию, возникающую в поперечном магнитном поле, Вин воспользовался эффектом Штарка, который состоит в расщеплении спектральных линий атома водорода в электрическом поле на ряд компонентов. И этот опыт подтверждает формулы, установленные для опыта Вильсона, так как поле оказывается пропорциональным vB .

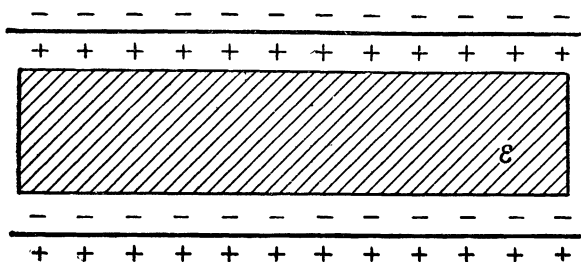
Магнитные эффекты были выявлены путем следующих опытов:

а) Опыт Роуланда (1876 г.). Роуланд показал, что свойство электрического тока порождать магнитное поле может быть выявлено и в случае конвекционных токов.

Опыт состоял во вращении эбонитовой пластинки, покрытой металлической фольгой, между двумя стеклянными дисками, также покрытыми металлической фольгой. Металлическая фольга диска (фиг. 18) заряжалась электричеством, так что вместе со стеклянными дисками она образовывала конденсатор, заряженный до высокого напряжения. Конвекционные токи возникали в результате быстрого вращения диска. Магнитное поле, порожденное этими токами, обнаруживается при помощи астатической магнитной стрелки, подвешенной над стеклянным колпаком, в котором помещалась установка.

Для простоты рассмотрим параллельный перенос эбонитового диска со скоростью v . Из уравнений Герца (4.3) следует, что

движущийся заряд эквивалентен с магнитной точки зрения току $\mathbf{i} = q\mathbf{v} = v\nabla\mathbf{P}$, так как слагаемое $\dot{\mathbf{D}}$ равно нулю вследствие стационарности электрического поля и $\nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) = 0$. Таким образом, этот эффект объясняется как теорией Герца, так и теорией Лоренца.



Ф и г. 18.

Магнитное поле, порожденное движущимися зарядами, выводится из закона Био — Савара (см. Тамм, стр. 206), если учесть, что в этом случае мы имеем дело с конвекционным током $q\mathbf{v}$:

$$H = \frac{1}{4\pi} q \frac{v \sin \theta}{r^2}. \quad (4.24)$$

б) Опыты Рентгена (1888 г.) и Эйхенвальда (1903 г.) [7, 8]. Эти опыты аналогичны опытам Роуланда с той лишь разницей, что в этом случае использовались поляризационные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика, вращающегося между обкладками заряженного конденсатора. Как следует из теории, возникает электрический ток, называемый током Рентгена, магнитное поле которого определяется соотношением

$$|\mathbf{H}| \approx |\mathbf{P} \times \mathbf{v}|.$$

Однородное поле конденсатора вызывает поляризацию \mathbf{P} диска в направлении, нормальном к его поверхности. Так как поляризация однородна, связанные заряды возникнут лишь на поверхности диска $\sigma_{св} = \pm |\mathbf{P}|$. Ток Рентгена, который возникает благодаря вращению этих связанных зарядов, выражается через ротор вектора $\mathbf{P} \times \mathbf{v}$, и, следовательно, можно считать, что он возникает в переходном слое между диэлектриком и воздухом. Поскольку скорость направлена тангенциально, ротор

$$\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v} (\nabla \mathbf{P}) = -\mathbf{v} \sigma_{св} \quad (4.25)$$

будет также тангенциальным и его значение будет $-\mathbf{P} |v$. Этот ток Рентгена на каждой стороне диска имеет направление, противоположное направлению конвекционного тока Роуланда, который

мы получили бы, вращая металлические обкладки конденсатора, создающего то электрическое поле, которое поляризует вращающийся диэлектрический диск.

В отличие от выведенного выше по теории Лоренца выражения для плотности тока Рентгена теория Герца приводит к выражению — $|\mathbf{D}|\mathbf{v}$. Если иметь в виду, что на поверхности диска $|\mathbf{D}| = \sigma$, это предположение означает, что ток Рентгена мог бы быть компенсирован током Роуланда, вызванным одновременным вращением металлической обкладки, и, следовательно, мы не получили бы никакого магнитного эффекта. Опыт Эйхенвальда опровергает этот вывод теории Герца, основанный на гипотезе движущегося эфира, и подтверждает вычисления, проведенные на основе теории Лоренца, согласно которой плотность тока Рентгена равна

$$k = (\epsilon - \epsilon_0) |\mathbf{v} \times \mathbf{E}|.$$

Эйхенвальд проверил экспериментально это соотношение и доказал также, что вращение как диэлектрика, так и металлических дисков приводит к тому же магнитному эффекту. Магнитное действие в этом случае не зависит от природы диэлектрика, поскольку сила тока зависит от

$$\mathbf{D} - \mathbf{P}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0.$$

Оптические эффекты при распространении света в движущихся средах были выявлены путем следующих опытов:

а) Опыт Физо (1851 г.). Исходя из явления, обнаруженного еще Френелем путем измерения скорости распространения света, исследовался эффект увлечения движущейся оптической средой (текущей водой) распространяющихся в ней световых волн. Опыт показывает, что в среде, движущейся со скоростью v , относительная скорость света получается не путем простого векторного сложения

$$c_r = \frac{c}{n} \pm v,$$

где n — показатель преломления среды, а задается формулой

$$c_r = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (4.26)$$

которая была выведена Френелем в предположении, что эфир частично увлечен [коэффициент увлечения равен $(1 - n^{-2})$]. Этот результат в корне опровергает теорию Герца, согласно которой $c_r = c/n \pm v$. Лоренц показал, что наблюдаемый эффект может быть объяснен при помощи гипотезы неподвижного эфира.

Электромагнитное поле в свободном от зарядов диэлектрике, движущемся со скоростью \mathbf{v} , определено, согласно (4.12), (4.13)

и (4.18), соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{D}} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}), & \nabla \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, & \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, & \mathbf{P} &= (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

По сравнению с уравнениями поля в покоящейся среде сюда дополнительно входит ток Рентгена, т. е. конвективное увлечение поляризационных зарядов. Поэтому магнитная индукция отличается от $\mu_0 \mathbf{H}$; магнитная поляризация также зависит от магнитной индукции.

Запишем выражения для поля плоской волны

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{rn}{u}\right)}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{rn}{u}\right)}; \quad (4.28)$$

здесь u — скорость волны в движущейся среде:

$$u = c_r = u_0 \pm kv, \quad (4.29)$$

а $u_0 = c/n$ — скорость волны в покоящейся среде и k — коэффициент увлечения. В случае плоской волны (4.28) будем также иметь

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{rn}{u}\right)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{rn}{u}\right)} \quad (4.30)$$

Подставив (4.28) и (4.30) в (4.27), получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 &= u \mathbf{D}_0 - \mathbf{n} \times (\mathbf{P}_0 \times \mathbf{v}), & \mathbf{n} \mathbf{D}_0 &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 &= u \mathbf{B}_0, & \mathbf{n} \mathbf{B}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{P}_0 = (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon \mathbf{E}_0 + (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0.$$

Очевидно, удобно выразить \mathbf{E}_0 и \mathbf{P}_0 как функции \mathbf{B}_0 , \mathbf{D}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}_0 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0, \\ \mathbf{P}_0 &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\mathbf{D}_0 + \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (4.32)$$

После подстановки в уравнения (4.31) имеем

$$\begin{aligned} -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 &= \mu_0 \left(u - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} n v \right) \mathbf{D}_0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{D}_0 &= \left(u - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} n v \right) \mathbf{B}_0, \end{aligned}$$

где мы пренебрегли членами порядка $\beta^2 = v^2/c^2$, поскольку, по предположению, скорость v мала. Исключая \mathbf{B}_0 или \mathbf{D}_0 , получаем

$$\left(\frac{u}{c} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{nv}{c} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

Учет соотношения $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$, или

$$u = \frac{c}{(\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} nv, \quad (4.33)$$

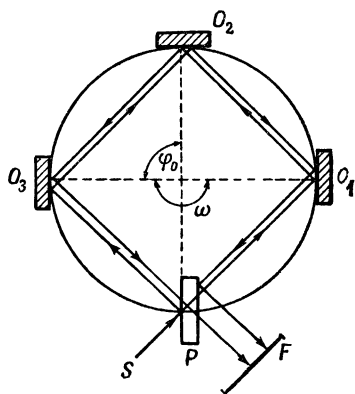
поскольку $n = \kappa_e^{1/2} = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}$ — показатель преломления среды, дает

$$u = c_r = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) nv. \quad (4.34)$$

Следовательно, теория Лоренца приводит к такому же «коэффициенту увлечения», на который умножается v , какой был получен Френелем [см. (4.26)].

б) Опыт Саньяка — Харреса (1912 г.¹⁾). В этом опыте как источник света, так и прибор, состоящий из ряда зеркал и фоторегистрирующего устройства, заменяющего наблюдателя, скреплены с круглым равномерно вращающимся диском. И хотя все части системы сами участвуют во вращении, все же влияние этого вращения на свет не пропадает.

Схема экспериментального устройства изображена на фиг. 19. Световой луч, исходящий от источника S , разделяется на два луча в результате отражения и преломления полупрозрачной пластинкой P . Образовавшиеся два луча, отражаясь от зеркал O_1, O_2 и O_3 , пробегают стороны квадрата в противоположных друг другу направлениях. После этого они интерферируют перед объективом фотографического аппарата F , регистрирующего полосы интерференции, которые можно регулировать при помощи стеклянной пластинки P . Опыт показывает, что при вращении диска интерференционные полосы смещаются. Допуская гипотезу неподвижного эфира Лоренца, можно вычислить это смещение полос. Для этого учтем, что из-за вращения диска световой



Фиг. 19.

¹⁾ В радиофизике аналог этого опыта был осуществлен советским физиком Бернштейном, который измерил изменение скорости распространения радиоволн в коаксиальном кабеле, заполненном диэлектриком и намотанном на вал, который можно вращать (см. [8]).

луч, пробегающий по направлению вращения путь $PO_3O_2O_1P$, должен пройти большее расстояние, чем луч, который пробегает этот же путь в противоположном направлении. (Можно предварительно отрегулировать устройство так, чтобы эти расстояния в состоянии покоя были строго равны между собой.) Находим соотношение

$$\Delta l = 4 \frac{v}{c} \frac{S}{r\lambda} = \frac{4}{c\lambda} \omega S, \quad (4.35)$$

где ω — угловая скорость, r — радиус диска, S — площадь, ограниченная световым путем (т. е. $PO_1O_2O_3P$), и λ — длина волны монохроматического луча.

Для доказательства соотношения (4.35) заметим, что угол, образованный двумя зеркалами в состоянии покоя, равен $\varphi_0 = \pi/2$. Заметим далее, что в силу законов отражения для движущихся зеркал, плоскость которых параллельна направлению движения, этот угол будет

$$\varphi_{\pm} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{4} \omega \tau_{\pm},$$

где знак «+» относится к случаю, когда направление лучей совпадает с направлением вращения, а τ_+ есть интервал времени, за который соответствующий световой луч пробегает путь от S до F . Этот путь для обоих лучей один и тот же (фиг. 19). Если пренебречь расстояниями SP и PF , то он равен $c \tau_{\pm}$, т. е. учетверенной стороне квадрата, удлиненной или соответственно укороченной из-за вращения. Следовательно, имеем

$$c\tau_{\pm} = 4 \times 2r \sin \frac{\varphi_{\pm}}{2} = 8r \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\omega}{8} \tau_{\pm} \right).$$

Разность времен представим в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\tau = \tau_+ - \tau_- &= \frac{8r}{c} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{8} \tau_+ \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{8} \tau_- \right) \right] = \\ &= \frac{16r}{c} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{16} \Delta\tau \right) \sin \frac{\omega}{16} (\tau_+ + \tau_-). \end{aligned}$$

Приближенно имеем

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{16} \Delta\tau \right) &\approx \cos \frac{\pi}{4}, \\ \sin \frac{\omega}{16} (\tau_+ + \tau_-) &\approx \sin \frac{\omega}{8} \tau_0 \approx \frac{\omega}{8} \tau_0, \end{aligned}$$

где τ_0 — время пробега в случае, когда диск покоится:

$$\tau_0 = \frac{8r}{c} \sin \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует

$$\Delta\tau = \frac{8\omega}{c^2} r^2.$$

Учитывая, что

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad S = (r\sqrt{2})^2,$$

можно записать

$$\Delta\tau = 4 \frac{v}{c} \frac{S}{rc},$$

откуда сразу получается формула (4.35), если от разности времен перейти к смещению полс.

Формулу можно проверить экспериментально. Этот опыт подтверждает оптическим путем тот известный из механики факт, согласно которому явления, отнесенные к вращающейся системе координат, отличаются от отнесенных к покоящейся системе. Отметим, что в этом случае замеченный эффект будет первого порядка по отношению к $\beta = v/c$.

Итак, все рассмотренные явления, вызванные относительным движением тел, суть первого порядка по $\beta = v/c$ и могут быть истолкованы при помощи гипотезы неподвижного эфира Лоренца; некоторые из них решительно опровергают гипотезу движущегося эфира Герца.

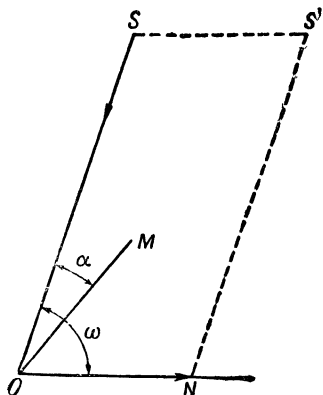
Отметим, что во всех этих опытах скорость v очень мала по сравнению со скоростью света c в пустом пространстве ($\beta \ll 1$); поэтому вызванные ею эффекты очень малы и их трудно обнаружить. Но скорость, с которой вращается Земля вокруг Солнца (30 км/сек), значительно больше скоростей, полученных в этих опытах; и поэтому какие-либо явления, порожденные этим движением относительно эфира, значительно легче обнаружить экспериментально.

§ 4. Влияние движения Земли на электромагнитные явления

Основная идея экспериментальных исследований, проведенных для выявления оптических или электрических явлений, вызванных движением Земли в эфире, следующая. Наблюдается оптическое или электрическое явление, которое распространяется в определенном направлении (чаще всего принимается направление движения Земли), и то же явление, распространяющееся в обратном или в перпендикулярном направлении. Если эфир неподвижен и, следовательно, если можно говорить об абсолютном движении Земли по отношению к эфиру, то числовые значения, определенные при этих двух наблюдениях, должны быть различными.

Оптические эффекты, вызванные движением Земли, наблюдались давно. Среди них:

1°. Аберрация света. Это оптическое явление, открытое еще астрономом Бредли (1727 г.), состоит в кажущемся изменении положения звезд, вызванном движением земных наблюдателей, увлеченных вращением Земли вокруг Солнца.



Ф и г. 20.

Пусть ON — направление движения наблюдателя и v — скорость этого движения. Пусть SO — направление луча, исходящего от рассматриваемой звезды к наблюдателю, и ω — угол образованный ON и OS (фиг. 20). Если бы наблюдатель оставался неподвижным в точке O , то, для того чтобы звезда была ему видна, он должен направить подзорную трубу по направлению OS . Поскольку он движется со скоростью v в направлении ON , то, для того чтобы видеть звезду, он должен отклонить трубу OM на угол α .

При этом ему будет казаться, что он видит звезду в положении S' . Угол α , называемый углом аберрации, задается соотношением

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \omega, \quad (4.36)$$

согласно корпускулярной теории света, или соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c} \sin \omega, \quad (4.36')$$

согласно волновой теории.

Угол аберрации имеет максимальное значение при $\omega = 90^\circ$, когда

$$\sin \alpha_m = \frac{v}{c}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_m = \frac{v}{c}. \quad (4.36'')$$

Следовательно, для звезд, находящихся вблизи полюса эклиптики, α_m одно и то же, и его расчетное значение совпадает с тем, которое получается из определений, т. е. $\alpha_m = 20'', 47$. Эйри (1871 г.) доказал экспериментально, что величина аберрации не зависит от природы среды, в которой распространяется свет.

Итак, это объяснение явления аберрации опровергает гипотезу, что среда, в которой передается свет, оказывает влияние на скорость его распространения. Явление аберрации не может дать никаких сведений о движении Земли относительно предполагаемого неподвижным эфира.

Возможность наблюдения аберрации обусловлена различием направления движения Земли в течение года. Если бы движение Земли происходило по прямой линии, аберрация ускользнула бы от наблюдения.

2°. Эффект Доплера (1845 г.) заключается в изменении частоты, вызванном движением источника световых волн или движением наблюдателя относительно среды, в которой распространяются волны. Важно заметить, что в теории Лоренца эффекты, обусловленные движением источника и наблюдателя, не одинаковы (первое изменяет длину волны, а второе — кажущуюся скорость). Они совпадают, лишь когда радиальная скорость источника, а также и скорость наблюдателя малы по сравнению со скоростью света в пустоте.

В этом последнем случае имеем

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_r}{c} \right), \quad (4.37)$$

где ν — частота источника, ν' — кажущаяся частота, а v_r — относительная радиальная скорость приближения источника к наблюдателю.

Рассматривая эфир как среду, в которой распространяются электромагнитные явления, и как абсолютную систему отсчета, исследуем, каким образом распространяются световые волны в системе отсчета, движущейся относительно эфира.

Пусть (S) — декартова система координат, покоящаяся относительно эфира, и (S') — система, совершающая равномерное движение со скоростью \mathbf{v} вдоль оси Ox . Для простоты рассмотрим плоскую электромагнитную волну, нормаль которой лежит в плоскости xOy . Она будет описываться функцией вида

$$\psi = \psi_0 e^{2\pi j\Phi},$$

где

$$\Phi = \mathbf{v} \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{c} \right) = \mathbf{v} \left(t - \frac{l}{c} \right). \quad (4.38)$$

Фаза имеет простой физический смысл, а именно в системе (S) она выражает общее число колебаний, проходящих через точку $P(x, y)$, отстоящую на расстояние l от начала координат O , за интервал времени $t - l/c$. По определению, в системе координат (S')

$$\Phi = \mathbf{v}' \left(t' - \frac{l'}{c'} \right) = \mathbf{v}' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c'} \right), \quad (4.39)$$

если при $t = t'$ точка $P'(x', y')$ совпадает с точкой $P(x, y)$.

Учитывая, что переход от системы (S) к системе (S') осуществляется при помощи преобразования Галилея

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad t' = t,$$

приравнивая выражения (4.38) и (4.39) и считая, что это справедливо при любых x' и y' , получаем

$$v \left(t' - \frac{(x' + vt') \cos \alpha + y' \sin \alpha}{c} \right) = v' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c'} \right).$$

Отсюда следует

$$v' = v \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right) = v \left(1 - \frac{vn}{c} \right), \quad (4.40)$$

$$\frac{v'}{c'} \sin \alpha' = \frac{v}{c} \sin \alpha, \quad \frac{v'}{c'} \cos \alpha' = \frac{v}{c} \cos \alpha. \quad (4.41)$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{т. е. } \alpha' = \alpha, \quad (4.42)$$

и

$$c' = c - v \cos \alpha = c - vn. \quad (4.43)$$

Из соотношения (4.42) следует, что направление нормали к волне не меняется, а соотношение (4.40) выражает частоту v' в подвижной системе координат через частоту v в системе, находящейся в абсолютном покое.

Так как эффект Допплера проявляется при определении частоты движущегося источника, то, чтобы получить формулу (4.37), исключим частоту v и введем собственную частоту v^0 источника, записав

$$v^0 = v \left(1 - \frac{nv^0}{c} \right), \quad (4.44)$$

где v^0 — скорость источника относительно эфира. Из (4.40) и (4.44) имеем

$$v' = v^0 \frac{1 - \frac{nv}{c}}{1 - \frac{nv^0}{c}} = v^0 \left[1 - \frac{nv_r}{c} - \frac{(nv^0)(nv_r)}{c^2} \right],$$

где $v_r = v - v^0$ — относительная скорость. Следовательно, в первом приближении ($v \ll c$) эффект Допплера зависит только от относительного движения источника и наблюдателя.

Эта формула проверяется измерением смещения линий поглощения и излучения в спектрах звезд. На основе этого эффекта в астрофизике определяются в настоящее время радиальные скорости звезд.

Следовательно, и этот эффект первого порядка относительно $\beta = v/c$ не дает никаких сведений об абсолютном движении Земли относительно эфира.

3°. Отметим также опыты Кетлера (1872 г.), который пытался выявить движение Земли относительно эфира, наблюдая интерференцию двух лучей, пересекающих в противоположных направлениях две трубки, наполненные водой и ориентированные по направлению движения Земли. Хотя теоретически можно было ожидать смещение полос, экспериментально оно не было установлено. Опыты, связанные с оптическими явлениями, обусловленными движением Земли, многочисленны и все приводят к отрицательному ответу.

Аналогичный отрицательный результат был получен и при исследовании электрических эффектов. Отметим опыты Де-Кудра (1889 г.), касающиеся влияния движения Земли на явления электромагнитной индукции.

Итак, все попытки выявить экспериментальным путем абсолютное трансляционное движение Земли привели к отрицательному результату, ибо измеренные величины настолько мало отличаются от оценки вероятных ошибок, что можно предположить отсутствие искомого эффекта.

В предположении неподвижного эфира Лоренца, которое, как мы видели, дает удовлетворительное объяснение перечисленным опытам, абсолютное равномерное и прямолинейное движение некоторого тела, например Земли, теоретически должно проявляться в «эфирном ветре», который изменяет электромагнитные явления. В самом деле, на короткий отрезок времени движение Земли можно считать равномерным и прямолинейным, происходящим со скоростью $v = 30$ км/час. Вычисления, проведенные на основе теории Лоренца, приводят к заключению, что электромагнитные явления должны претерпевать изменение, которое является функцией от $\beta = v/c$ (для Земли $\beta = 10^{-4}$). Разлагая в ряд относительно β , будем говорить, что порядок эффекта равен единице или двум в зависимости от того, будет ли изменение пропорциональным β или β^2 .

Опыты, приведенные выше, как мы заметили, соответствуют эффектам первого порядка. Этот факт привел Лоренца к формулированию принципа относительности равномерного прямолинейного движения: абсолютное равномерное движение не может быть обнаружено в приближении ниже второго порядка.

Иными словами, согласно этому принципу, можно сказать, что не существует такого эффекта первого порядка, в силу которого можно было бы решить, неподвижно тело или оно движется относительно эфира.

В отличие от этого абсолютное движение вращения Земли можно выявить. Опыт был проведен Майкельсоном и Гэйлом (1925 г.) при помощи метода Саньяка. Поскольку угловая скорость Земли очень

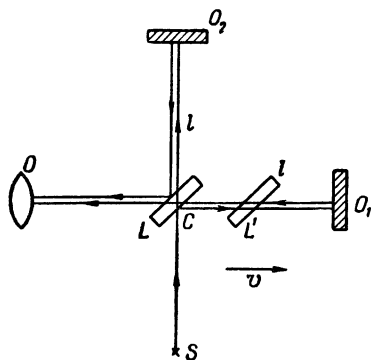
мала, то, для того чтобы эффект стал измеримым [см. (4.35)], необходимо, чтобы площадь (S), ограниченная контуром, который описывают световые лучи, была бы очень велика (несколько гектаров). Это можно осуществить, если считать диском саму поверхность Земли. Этот опыт является оптическим аналогом опыта с маятником Фуко.

§ 5. Экспериментальное исследование эффектов второго порядка

Еще в 1878 г. Максвелл заметил, что если эфир не увлекается движением Земли, то должен существовать эффект второго порядка. Однако измерительные приборы в то время не были способны обнаружить этот эффект, учитывая порядок величины β^2 (10^{-8}). Майкельсон возвратился в 1881 г. к идее Максвелла и построил интерферометр нужной точности с целью обнаружения оптического эффекта второго порядка, который следовал из гипотезы Лоренца.

Принцип измерения заключается в интерференции двух взаимно перпендикулярных световых пучков, которые могут быть ориентированы в различных направлениях путем вращения установки. Вот краткое описание этой установки (фиг. 21). Параллельный пучок света (монокроматический) от источника S падает под углом 45° на полупрозрачную

грань стеклянной плоско-параллельной пластинки L , которая отражает часть лучей в сторону зеркала O_1 и пропускает через себя другую часть в сторону зеркала O_2 . Эти плоские зеркала расположены перпендикулярно к направлению лучей на одинаковом расстоянии от L . Соответствующей регулировкой, установив на пути отраженных лучей прозрачную пластинку L' , параллельную L и имеющую ту же толщину, можно в контрольном опыте добиться равенства оптических путей LO_1L и LO_2L . Отраженные от зеркал O_1 и O_2 световые пучки попадают тогда в объектив O зрительной трубы наблюдателя, так что фазы их совпадают и получается впечатление оптического контакта зеркал O_1 и O_2 . Если одно из зеркал несколько смещено, в поле трубы появятся интерференционные полосы. Аналогично любое изменение продолжительности пробега луча будет проявляться в смещении полос. Плита, на которой установлены приборы, должна быть очень жесткой, чтобы устра-



Ф и г. 21.

ную грань стеклянной плоско-параллельной пластинки L , которая отражает часть лучей в сторону зеркала O_1 и пропускает через себя другую часть в сторону зеркала O_2 . Эти плоские зеркала расположены перпендикулярно к направлению лучей на одинаковом расстоянии от L . Соответствующей регулировкой, установив на пути отраженных лучей прозрачную пластинку L' , параллельную L и имеющую ту же толщину, можно в контрольном опыте добиться равенства оптических путей LO_1L и LO_2L . Отраженные от зеркал O_1 и O_2 световые пучки попадают тогда в объектив O зрительной трубы наблюдателя, так что фазы их совпадают и получается впечатление оптического контакта зеркал O_1 и O_2 . Если одно из зеркал несколько смещено, в поле трубы появятся интерференционные полосы. Аналогично любое изменение продолжительности пробега луча будет проявляться в смещении полос. Плита, на которой установлены приборы, должна быть очень жесткой, чтобы устра-

нить любую упругую деформацию, которая могла бы стать источником систематических ошибок. В опытах Майкельсона приборы устанавливались на базальтовой плите, плавающей на ртути. Все устройство заключается в хороший термостат, обеспечивающий постоянство температуры с точностью до 10^{-5} град. Чтобы построить теорию интерферометра Майкельсона, предположим, что плечо с зеркалом O_1 направлено по движению Земли. В этом случае в предположении неподвижного эфира относительная скорость света (в лабораторной системе координат) в направлении от L к O_1 равна $c-v$, а при возвращении ее величина будет $c+v$. Следовательно, время, за которое свет проходит вдоль этого плеча между L и O_1 , равно

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c(1-\beta^2)},$$

где l — длина оптического пути LO_1 . Разлагая в ряд по степеням β , получаем

$$t_1 = \frac{2l}{c} (1 + \beta^2 + \dots). \quad (4.45)$$

Скорость света в перпендикулярном направлении, вдоль плеча с зеркалом O_2 , равна $(c^2-v^2)^{1/2}$. Следовательно, время, за которое свет проходит путь в прямом и обратном направлении между L и O_2 , равно

$$t_2 = \frac{2l}{(c^2-v^2)^{1/2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad (4.46)$$

или, разлагая в ряд,

$$t_2 = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right). \quad (4.47)$$

Следовательно, разность времен для этих двух путей будет равна

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \beta^2. \quad (4.48)$$

Итак, допуская существование неподвижного эфира, мы приходим к заключению, что из-за движения всей системы свет пробегает этот путь в разных направлениях за различное время.

Разности Δt соответствует разность оптических путей, равная стольким длинам волн, сколько раз период колебаний света τ содержится в Δt . Например, при $\Delta t = \tau$ интерференционная картина сместится на целую полосу. Иными словами, разность фаз можно наблюдать по поведению интерференционных полос.

Если повернуть интерферометр на 90° , эти два плеча поменяются ролями и легко заметить, что изменится знак Δt . Следовательно,

вращение установки приводит к удвоению разности оптических путей. Число интерференционных полос, на которое сместится система полос в результате вращения системы, будет

$$2N = \frac{2\Delta t}{\tau} = \frac{2l}{ct} \beta^2 = \frac{2l}{\lambda} \beta^2, \quad (4.49)$$

ибо $\lambda = ct$. Следовательно, смещение полос — эффект второго порядка. Чтобы выявить такое смещение, следует выбрать большое расстояние l и подходящую длину волны λ (желтый свет натрия).

В первых своих опытах Майкельсон не обнаружил никакого смещения полос. Опыт был повторен Майкельсоном и Морли (1887 г.), причем оптический путь лучей был удлинен при помощи многократных отражений так, что l стало равно 22 м; следовательно, согласно (4.49), смещение должно было быть равным $N = 0,037$. В действительности же оказалось, что $N < 0,02$, т. е. порядок его равен порядку ошибок считывания. Опыт был повторен Морли и Миллером (1904 г.) при помощи интерферометра, в котором оптический путь был равен 68 м, так что теоретически смещение должно было составить $N = 1,5$; измерения показали, однако, что $N < 0,0076$. Опыт был повторен также Йоосом (1930 г.), который увеличил точность измерений: он получил $N < 0,001$.

Итак, эффект, вызванный, согласно теории, движением Земли в неподвижном эфире, не может быть обнаружен экспериментально, хотя аналогичный опыт в области акустики указал бы с уверенностью на существование ветра, порожденного движением тел в воздухе.

Отрицательный результат опыта Майкельсона, который так и не был объяснен, привел к кризису в электромагнитной теории, которая впервые пришла к явному противоречию с экспериментальными фактами.

Чтобы объяснить отсутствие эффектов второго порядка, физики Фитцджералд (1891 г.) и затем Лоренц выдвинули гипотезу, что все тела, движущиеся относительно эфира, испытывают сокращение линейных размеров в направлении движения, причем это сокращение происходит в отношении $\alpha = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, которое зависит только от линейной скорости v . Допуская эту гипотезу, можно легко объяснить отрицательный результат опытов Майкельсона. В самом деле, размеры плеча LO_1 будут сокращаться и длина его станет равна $l' = (1/\alpha)l$; следовательно,

$$t_1 = \frac{2l'}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{2l'}{c} \alpha^2 = \frac{2l}{c} \alpha, \quad (4.45')$$

а, значит, $t_1 = t_2$ и $\Delta t = 0$.

Лоренц пытался оправдать эту странную гипотезу предположением о деформации электрического и магнитного полей электронов,

движущихся равномерно. Эта деформация, по мнению Лоренца, приводит к изменению сил сцепления внутри движущегося тела.

Троутон и Нобл (1903 г.) попытались выявить эффект второго порядка, подвесив на нити заряженный проводник. Этот проводник должен вращаться из-за движения Земли, причем момент вращения есть величина порядка β^2 , а именно

$$N = \frac{W_e v^2}{c^2} \sin^2 2\varphi,$$

где φ — угол между силовыми линиями и скоростью v , а W_e — электростатическая энергия конденсатора. Однако вопреки предсказаниям теории Лоренца никакого эффекта не наблюдалось. Позже Томашек повторил этот опыт с большей точностью, но также ничего не получил.

Релей и Брейс (1904 г.) попытались выявить сокращение Лоренца при помощи двойного лучепреломления, возникающего вследствие изменения оптических свойств (изотропии) тел. Проведенные ими опыты показали, что ожидавшийся эффект порядка 10^{-8} не может быть больше $7 \cdot 10^{-13}$.

Ренкин и Троутон (1908 г.) также изучали возможность выявления сокращения Лоренца — Фитцджералда, вызванного движением Земли, надеясь зарегистрировать изменение электрического сопротивления металлической нити в мостике Уитстона. Проведенные опыты показали, что нельзя обнаружить изменение сопротивления даже порядка 10^{-10} ом.

Кеннеди и Торндайк (1932 г.) возобновили опыт с интерферометром Майкельсона с неравными плечами и показали, что эффект равен нулю, даже если учесть гипотезу сокращения Лоренца — Фитцджералда.

Итак, классическая физика зашла в тупик, так как никакая последовательная теория не могла дать единого толкования этих опытов, в частности объяснить результаты опытов Физо, Майкельсона — Морли и аберрацию света.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Введение

Как мы видели в предыдущей главе, все опыты, поставленные для того, чтобы выявить влияние движения Земли на электромагнитные явления (оптические эффекты, электрические и т. д.), привели к отрицательному результату. Итак, можно сказать, что относительно системы координат, связанной с Землей (т. е. движущейся), свет (или электромагнитные возмущения вообще) распространяется с одинаковой скоростью во всех направлениях. Следовательно, принцип относительности справедлив не только для механических явлений, а также и для электромагнитных.

Поскольку принцип относительности впервые был сформулирован в классической механике, мы попытаемся в дальнейшем проанализировать основные понятия, которые используются в формулировке этого принципа.

Ньютон основал классическую механику, которая делится на кинематику и динамику, на понятиях абсолютного пространства, которое предполагалось изотропным и однородным, т. е. евклидовым, и абсолютного времени, которое предполагалось универсальным.

В классической кинематике предполагается справедливым так называемый принцип относительного движения. Этот принцип основан на существовании привилегированной системы отсчета в пространстве. С одной стороны, постулат универсального времени означает, что движение идеального твердого тела не влияет на ход событий. С другой стороны, так как пространство предполагается евклидовым, а теоремы евклидовой геометрии инвариантны относительно группы движений идеального твердого тела, то существуют привилегированные системы координат (декартова система координат), получающиеся одна из другой при помощи линейных ортогональных преобразований координат. Следовательно, независимость пространства, которое предполагалось евклидовым, от течения времени предполагает существование в пространстве привилегированной системы отсчета. Предполагалось, что принцип относительности движения, основанный на этом постулате, хорошо

согласуется с опытом, и поэтому этот принцип классической кинематики был распространен на всю физику.

В классической динамике предполагается справедливость так называемого принципа относительности Галилея. Этот принцип основан на том, что основное уравнение динамики материальной точки

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

является характеристическим инвариантом группы равномерных параллельных переносов декартовой системы отсчета

$$x'_k = x_k - v_k t \quad (k = 1, 2, 3), \quad t' = t,$$

которые были названы Эйнштейном преобразованиями Галилея. Действительно, эти преобразования оставляют инвариантными ускорения, и вдобавок постулируется инвариантность масс и сил.

Отметим, что принцип относительности классической динамики ограничивает в значительной степени справедливость принципа относительного движения классической кинематики. В самом деле, законы классической динамики выделяют бесконечное множество привилегированных систем отсчета, называемых инерциальными системами, которые совершают относительное поступательное движение. Эти системы образуют отдельную группу по отношению к системам отсчета, совершающим ускоренное поступательное движение или вращение, в которых действуют инерциальные силы, позволяющие путем опытов, проведенных внутри рассматриваемой системы, определить ее ускорение.

Распространение классической кинематики на оптические явления означало отождествление эфира, т. е. гипотетической среды, через которую распространяются электромагнитные волны, с абсолютным пространством, постулированным классической механикой. Эфир считался упругой средой и по аналогии с изотропным распространением упругих волн предполагалось, что и распространение электромагнитных волн изотропно в пустом пространстве. Это означает, однако, что распространение волн относительно некоторой инерциальной системы не может уже быть изотропным. Если обозначить через c скорость распространения электромагнитных волн в пустом пространстве, т. е. в эфире, то скорость распространения относительно некоторой инерциальной системы, движущейся со скоростью v в направлении распространения электромагнитных волн, будет $c - v$. Таким образом, мы пришли к заключению, что можно обнаружить эфирный ветер, т. е. движение относительно эфира, находящегося в абсолютном покое. Но гипотеза частичного увлечения эфира, сформулированная Френелем, фактически эквивалентна компенсации любых эффектов первого порядка, связанных с эфирным ветром. Этот факт был распространен Лоренцем на все электромагнитные явления. Гипотеза Фитцджералда — Лоренца

утверждает в одно и то же время и существование эфира и невозможность его экспериментального обнаружения при помощи эффекта второго порядка. Опыты показали, что любая попытка обнаружить оптически существование такой абсолютной системы отсчета обречена на неудачу. Следовательно, в электродинамике инерциальные системы обладают такой же привилегированной эквивалентностью, как и в классической динамике. Иными словами, принцип относительности Галилея распространяется и на электромагнитные явления вообще.

Но в то же время следует отметить, что уравнения распространения электромагнитных волн, а также и уравнения Максвелла — Лоренца не инвариантны относительно преобразования Галилея.

Применив это преобразование к основным электромагнитным уравнениям и к уравнениям Максвелла — Лоренца (1.8), (1.9), мы видим, что их вид не сохраняется, ибо в выражения входит скорость v . Следовательно, электромагнитная теория Максвелла — Лоренца противоречит классическому принципу относительности.

Этот факт легко понять, если заметить, что в пустом пространстве свет распространяется в виде сферических волн; следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (5.1)$$

т. е. радиус сферы равен $r = ct$. Однако уравнение (5.1) не инвариантно относительно преобразования

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z = z',$$

ибо

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \neq x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Распространение принципа относительности на электромагнитные явления приводит к проблеме отыскания общего преобразования, которое оставляло бы инвариантной систему уравнений Максвелла — Лоренца при любом равномерном параллельном переносе. Это преобразование было найдено Лоренцем (1904 г.) [1]; оно содержит в качестве предельного случая ($c \rightarrow \infty$) преобразование Галилея.

Отметим, что один из важных выводов, который был окончательно утвержден теорией относительности, это ненужность «эфира» как основы электромагнитного поля, и даже невозможность его существования вследствие опытов, упомянутых в предыдущей главе. Эфир, который был необходимым для механистических теорий света и рассматривался как среда, обладающая всеми качествами действительных упругих сред, с появлением электромагнитной теории света стал тормозом при объяснении явлений, ибо у него было лишь единственное свойство — опоры или локализации поля. Если отказаться от существования эфира, то остаются только уравнения электродинамики, но уже без возможности их интуи-

тивного истолкования. Некоторые физики, не подготовленные в области философии и склонные колебаться в сторону идеализма, сделали из этого вывод, что эти уравнения совсем не отражают объективной реальности. В связи с этим обычно цитируют знаменитое высказывание Герца: «Основное в теории электромагнетизма — это система уравнений Максвелла».

В действительности же электромагнитные явления существуют вне нас и независимо от нас. Что касается вопроса, могут ли быть представлены эти явления в виде интуитивных механических моделей или же они не поддаются интуитивной интерпретации, то его решение не может служить аргументом за или против объективного характера самих явлений. Правильная точка зрения состоит в том, что следует считать электромагнитное поле особой формой материи.

§ 1. Пространственно-временная симметрия электромагнитного поля

Если вместо старых переменных x, y, z и t ввести независимые переменные

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = jct, \quad (5.2)$$

где c — скорость света в пустом пространстве, можно обнаружить замечательную симметрию уравнений Максвелла.

В самом деле, при таких обозначениях уравнения, которым удовлетворяют электродинамические потенциалы, могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_4^2} = -\mu_0 i_k, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где $k = 1, 2, 3$; а условие Лоренца — в виде

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{j}{c} \frac{\partial V}{\partial x_4} = 0. \quad (5.4)$$

Так как в эти соотношения входят компоненты четырехмерного оператора «набла» $\partial/\partial x_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$), то, вводя обозначения

$$\Phi_k = A_k, \quad \Phi_4 = \frac{j}{c} V, \quad (5.5)$$

можем переписать соотношение (5.4) в более сжатой форме

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \Phi_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (5.6)$$

Аналогично уравнения (5.3) могут быть записаны в виде

$$\square \Phi_\lambda = \sum \frac{\partial^2 \Phi_\lambda}{\partial x_\lambda^2} = -\mu_0 J_\lambda, \quad (5.7)$$

где $\lambda = 1, 2, 3, 4$ и

$$J_k = i_k, \quad J_4 = jc. \quad (5.8)$$

Соотношения между векторами электромагнитного поля и потенциалами

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

могут быть записаны следующим образом:

$$E_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{c}{j} \frac{\partial A_k}{\partial x_4} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5.9)$$

$$B_j = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \quad (j, k, l = 1, 2, 3).$$

В последнем уравнении индексы j, k, l переставляются циклически. С учетом обозначений (5.5) эти соотношения могут быть записаны в виде

$$-\frac{j}{c} E_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5.9')$$

$$B_j = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} \quad (j, k, l = 1, 2, 3).$$

Учитывая правую часть этих соотношений, можно определить $F_{\mu\nu}$ при помощи таблицы

$\mu \backslash \nu$	1	2	3	4
1	0	B_3	$-B_2$	$-(j/c) E_1$
2	$-B_3$	0	B_1	$-(j/c) E_2$
3	B_2	$-B_1$	0	$-(j/c) E_3$
4	$(j/c) E_1$	$(j/c) E_2$	$(j/c) E_3$	0

(5.10)

Следовательно, имеем

$$F_{12} = B_3, \quad F_{13} = -B_2, \quad F_{23} = B_1, \\ F_{14} = -\frac{j}{c} E_1, \quad F_{24} = -\frac{j}{c} E_2, \quad F_{34} = -\frac{j}{c} E_3;$$

сразу убеждаемся в справедливости условия

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

В этих обозначениях соотношения (5.9) запишутся в следующей симметричной форме:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \quad (5.11)$$

Уравнения Максвелла в случае пустого пространства также примут чрезвычайно простой вид. Так, первая группа уравнений

$$0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - j c \epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x_4} = i_1, \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_3}{\partial x_1} + 0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - j c \epsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial x_4} = i_2, \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + 0 - j c \epsilon_0 \frac{\partial E_3}{\partial x_4} = i_3, \\ j c \epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + j c \epsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + j c \epsilon_0 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

при учете обозначений (5.8) и таблицы (5.10) может быть записана в следующей сокращенной форме:

$$\frac{\partial F_{\lambda 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{\lambda 2}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{\lambda 3}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{\lambda 4}}{\partial x_4} = \mu_0 J_\lambda,$$

которую в свою очередь можно привести к виду

$$\sum_\nu \frac{F_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\lambda. \quad (5.12)$$

Из соотношения (5.11) следует

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial^2\Phi_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2\Phi_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu}, \\ \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2\Phi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2\Phi_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}, \\ \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2\Phi_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2\Phi_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda},$$

откуда после суммирования получаем соотношения

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (5.13)$$

где $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Отметим, что в каждом из членов индексы должны быть различными, чтобы результат был отличным от нуля.

Легко проверить, что вторая группа уравнений Максвелла эквивалентна соотношениям (5.13), если учесть таблицу (5.10). В самом деле, заметив, что перестановка индексов λ, μ, ν в (5.13) приводит к тому же результату, имеем

$$\begin{aligned} \mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3 \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} &= \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 0, \\ \mu = 1, \nu = 3, \lambda = 4 \quad \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} &= -\frac{1}{jc} \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{j}{c} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \\ &\quad - \frac{j}{c} \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0, \\ \mu = 2, \nu = 3, \lambda = 4 \quad \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} &= \frac{1}{jc} \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{j}{c} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \\ &\quad - \frac{j}{c} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0, \\ \mu = 1, \nu = 2, \lambda = 4 \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= \frac{1}{jc} \frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{j}{c} \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{j}{c} \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

1. Ковариантность уравнений Максвелла в четырехмерном пространстве. Результаты, полученные выше при приведении уравнений Максвелла к симметричной форме относительно прямоугольной системы отсчета в четырехмерном многообразии, весьма просто позволяют выяснить условия инвариантности уравнений Максвелла относительно ортогонального преобразования.

В самом деле, мы видели, что уравнения Максвелла сводятся к уравнениям 4-потенциала (5.6) и (5.7). В последнем случае эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\square \Phi = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.14)$$

и

$$\nabla \Phi = \text{div } \Phi = 0, \quad (5.15)$$

где мы использовали четырехмерный оператор Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}, \quad (5.16)$$

который является аналогом трехмерного оператора Лапласа Δ , и четырехмерный оператор «набла», определенный соотношениями

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \nabla_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{jc} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (5.17)$$

так что скалярное произведение (5.15) есть дивергенция четырехмерного векторного потенциала.

Чтобы выяснить поведение этих величин при ортогональных преобразованиях в четырехмерном пространстве, заметим, что при ортогональном преобразовании

$$x'_\nu = \sum \alpha_{\nu\mu} x_\mu, \quad \sum \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$$

четырёхмерный оператор «набла» ведет себя как 4-вектор, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Чтобы вывести законы, по которым меняются величины Φ_μ , $F_{\mu\nu}$ и J_μ в случае ортогонального преобразования координат пространства — времени, предположим, что уравнения Максвелла ковариантны относительно этого преобразования. Такое предположение имеет глубокий физический смысл. Ведь если ковариантность относительно ортогонального преобразования 3-мерного пространства означает изотропность пространства, т. е. эквивалентность разных направлений, ковариантность в четырехмерном пространстве означает также инвариантность законов электродинамики в системах, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью.

Для того чтобы уравнение (5.6) оставалось инвариантным относительно ортогонального преобразования, должны выполняться соотношения

$$\sum_\mu \frac{\partial \Phi'_\mu}{\partial x'_\mu} = \sum_\mu \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi'_\mu}{\partial x_\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sum_\mu \alpha_{\mu\nu} \Phi'_\mu \right),$$

следовательно,

$$\sum_\mu \alpha_{\mu\nu} \Phi'_\mu = \Phi_\nu, \quad \text{или} \quad \Phi'_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \Phi_\nu,$$

откуда следует, что четырехмерный потенциал Φ_μ , определенный соотношением (5.5), есть 4-вектор.

Так как оператор Даламбера

$$\square = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$$

инвариантен относительно ортогонального преобразования, то из уравнения (5.7) следует, что величины J_μ , определенные соотношениями (5.8), суть компоненты 4-вектора. А из соотношения (5.11), в котором в правую часть входят компоненты четырехмерного ротора 4-вектора Φ_μ , следует, что $F_{\mu\nu}$, которые определяются из таблицы (5.10), являются компонентами антисимметричного тензора второго

порядка. В самом деле, имеем

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial\Phi'_\nu}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial\Phi'_\mu}{\partial x'_\nu} = \sum_\rho \sum_\sigma \alpha_{\rho\lambda\sigma} \left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\rho} - \frac{\partial\Phi_\rho}{\partial x_\sigma} \right) = \sum_\rho \sum_\sigma \alpha_{\mu\rho\lambda\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Уравнение (5.15) также инвариантно, так как четырехмерная дивергенция 4-вектора есть инвариант, выражающий изотропность четырехмерного мира.

Следовательно, общее значение уравнений Максвелла, не зависящее от выбора системы координат, выявлено. Это инвариантное значение уравнений электромагнитного поля и выражает принцип относительности в электродинамической концепции.

Теперь инвариантная форма уравнений Максвелла (5.12) и (5.13) становится очевидной, если заметить, что в (5.12) входит дивергенция антисимметричного тензора ${}^2F_{\mu\nu}$, который эквивалентен 4-вектору; следовательно, можно записать

$$\operatorname{div} {}^2F = \mu_0 J_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, 4), \quad (5.18)$$

или

$$\operatorname{div} {}^2F = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.18')$$

Что касается уравнения (5.13), то оно является обобщением трехмерного векторного уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

выражающего тот факт, что индукция \mathbf{B} определяется векторным потенциалом \mathbf{A} . А именно (5.13) выражает то, что 6-вектор 2F может быть получен из 4-потенциала Φ согласно соотношению (5.11).

К этим уравнениям добавляется уравнение непрерывности, которое может быть записано в виде четырехмерной дивергенции от четырехмерной плотности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.19)$$

Итак, в четырехмерном представлении интерпретация уравнений Максвелла в случае пустого пространства очень проста. Они выражают следующие общие свойства, не зависящие от выбора координат:

а) 4-вектор плотности тока есть векторная дивергенция 6-вектора поля;

б) 6-вектор поля есть ротор 4-потенциала.

1. Отметим, что это четырехмерное представление уравнений Максвелла приводит нас к выявлению некоторых инвариантов, поскольку любой 4-вектор обладает одним инвариантом и любой 6-вектор обладает двумя инвариантами.

Итак, из того, что плотность тока \mathbf{J} и 4-потенциал Φ являются 4-векторами, следует, что величины

$$\begin{aligned} J^2 &= i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 - c^2 Q^2, \\ \Phi^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - \frac{V^2}{c^2}, \\ \Phi \mathbf{J} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} - V Q \end{aligned} \quad (5.20)$$

являются скалярными инвариантами в четырехмерном пространственно-временном континууме.

Шестивекторы ${}^2\mathbf{F}$ и дуальный ему ${}^2\mathbf{F}^*$ также приводят к инвариантам:

$$\begin{aligned} ({}^2\mathbf{F} \cdot {}^2\mathbf{F}) &= F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 \right), \\ ({}^2\mathbf{F} \cdot {}^2\mathbf{F}^*) &= F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = -4 \frac{j}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

2. Интересно отметить, что можно рассмотреть 6-вектор, дуальный самому себе, например

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^* = F_{\mu\nu} + F_{\kappa\lambda}, \quad (5.22)$$

который, как легко проверить, эквивалентен трехмерному вектору, имеющему только три компоненты

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{F}_{14} = \tilde{F}_{23} = F_{14} + F_{23} = B_1 - \frac{j}{c} E_1, \\ a_2 &= \tilde{F}_{24} = \tilde{F}_{31} = F_{24} + F_{31} = B_2 - \frac{j}{c} E_2, \\ a_3 &= \tilde{F}_{34} = \tilde{F}_{12} = F_{34} + F_{12} = B_3 - \frac{j}{c} E_3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Таким 6-вектором будет

$$(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & a_1 \\ -a_3 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23')$$

Следовательно, в четырехмерном пространстве комплексный вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} - \frac{j}{c} \mathbf{E} \quad (5.24)$$

можно рассматривать как самодуальный тензор вида (5.22). Можно рассмотреть также антидуальный 6-вектор

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}^*, \quad (5.25)$$

который приводит нас к вектору

$$-\mathbf{b} = \mathbf{V} + \frac{j}{c} \mathbf{E}. \quad (5.26)$$

При интегрировании уравнений Максвелла удобно пользоваться комплексным вектором $\mathbf{V} \pm (j/c)\mathbf{E}$.

§ 2. Постулаты специальной теории относительности

Положение дел перед созданием теории относительности можно охарактеризовать следующим образом: хотя большинство выводов теории Максвелла и было подтверждено опытом, все опыты, поставленные с целью обнаружения системы отсчета, находящейся в абсолютном покое, существование которой, казалось, следовало из теории, потерпели неудачу. С другой стороны, как показали еще Лоренц (1904 г.) и Пуанкаре (1905 г.), уравнения Максвелла согласуются с принципом относительности, так как они инвариантны относительно преобразования, которое теперь носит название преобразования Лоренца. Впрочем, мы уже видели, что они ковариантны относительно группы линейных ортогональных преобразований 4-мерного пространства, определенного в предыдущих параграфах, которое, как показал Минковский (1908 г.) в своей ставшей классической работе, является представлением группы Лоренца.

Физическая интерпретация этих результатов, имевшая очень большое значение для последующего развития физических наук, была дана Эйнштейном (1905 г.), который показал, что все трудности, о которых мы говорили в гл. IV, § 5, в принципе могут быть устранены. Эйнштейн пошел по пути, отличному от указанного в предыдущем параграфе, хотя теперь этот путь кажется нам самым логичным, ибо он может непосредственно привести к теории относительности и естественным образом вытекает из свойства ковариантности уравнений Максвелла. В своей работе, ныне классической, Эйнштейн [2]¹⁾ установил принцип относительности электродинамики, отправляясь от критического анализа значения классических понятий пространства и времени, введенных в механику Ньютоном, и которые он нашел несовместными с теорией электромагнетизма.

Для Эйнштейна относительность движения означает, во-первых, что движение тел происходит одно относительно другого и не может быть отнесено к абсолютно неподвижным телам или к неподвижной среде (эфиру), так как таковых в действительности нет. Здесь

¹⁾ Для справок см. также [3]

вспоминаются слова Ф. Энгельса [4]: «Движения отдельного тела не существует,— о нем можно говорить только в относительном смысле».

Таким образом, Эйнштейн приходит к заключению, что отрицательный результат опытов Майкельсона вызван самой природой вещей. Отправляясь от этой аксиомы, Эйнштейн разработал новую концепцию пространства и времени, которая была облечена в конкретную геометрическую форму Минковским при посредстве 4-мерного пространственно-временного абсолютного мира как единства понятий пространства и времени — форм существования материи.

Специальная теория относительности Эйнштейна основывается на двух постулатах, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1°. Невозможно обнаружить или выявить экспериментально равномерное прямолинейное движение некоторой системы в пустом пространстве или в среде вроде эфира.

2°. Скорость распространения электромагнитного возмущения в пустом пространстве есть универсальная постоянная, не зависящая от относительной скорости источника или инерциальной системы отсчета.

Первый постулат устанавливает, следовательно, отсутствие физического смысла понятия абсолютной скорости изолированной системы в пустом пространстве. Этот постулат может быть сформулирован и следующим образом.

Существует кубическая бесконечность (∞^3) инерциальных систем отсчета, совершающих одна по отношению к другой равномерное прямолинейное движение, относительно которых физические явления протекают абсолютно одинаково.

Постулируя универсальную справедливость принципа относительности, т. е. привилегированной эквивалентности инерциальных систем отсчета, Эйнштейн тем самым отрицает справедливость принципа относительного движения классической кинематики как слишком широкого и в то же время отрицает постулат абсолютного пространства, т. е. существование упругого эфира, с которым связана идея абсолютно покоящейся системы отсчета, как слишком ограниченного. При этом он основывался на том, что оба эти принципа противоречили экспериментальным данным.

Следуя Эйнштейну, будем называть эти системы отсчета галилеевыми системами, так как для них предполагается справедливым закон инерции Галилея. Отсюда следует, что общие законы, описывающие физические явления, не должны зависеть от неускоренного движения системы координат, к которой отнесено явление. Следовательно, математическая форма законов физики, в частности законов электромагнетизма, инвариантна относительно преобразований, переводящих одну галилееву систему отсчета в другую.

В этом виде обычно и формулируется принцип специальной относительности. Эта точка зрения составляет обобщение ньютонова принципа относительности классической механики. Кажется ненужным лишний раз подчеркивать, что этот постулат обоснован многочисленными опытами. Следует однако отметить, что из сформулированного выше принципа относительности еще не вытекает ковариантность законов природы, и в частности электромагнетизма, относительно группы Лоренца. Так, например, уравнения классической механики согласуются с принципом относительности, не являясь ковариантными относительно преобразования Лоренца. Отсюда следует необходимость второго постулата, сформулированного Эйнштейном.

Второй постулат можно рассматривать как результат сочетания принципа Френеля из теории светового эфира, согласно которому скорость света не зависит от скорости источника, с основной идеей первого постулата, согласно которой невозможно придать никакого практического смысла абсолютной скорости и можно лишь говорить об относительной скорости источника и системы отсчета.

Этот постулат характерен для теории поля, ибо он неявно содержится в уравнениях Максвелла.

Когда Эйнштейн сформулировал свою гипотезу, с экспериментальной точки зрения независимость скорости света от скорости его источника еще не была доказана; это позволило Ритцу усомниться в справедливости этого постулата. Однако теперь результаты, полученные экспериментально, достаточны для того, чтобы исключить возможность аддитивности скорости света со скоростью его источника. Напомним исследования Комптока (1910 г.) [5] и де Ситтера (1913 г.) [6] по орбитам двойных звезд и опыты Толмена (1910 г.), Ла Роза (1912 г.) и Томашека (1924 г.), поставленные при помощи интерферометра Майкельсона, в которых использовались лучи Солнца вместо земного источника света.

В самом деле, если бы скорость света зависела от скорости источника, то в случае двойных звезд мы должны были бы заметить особое явление: появление и исчезновение так называемых «звезд-духов». Дело в том, что двойные звезды постоянно меняют свою радиальную скорость относительно Земли, и, следовательно, в определенных условиях к Земле могли бы прийти одновременно лучи, испущенные двойными звездами в разные моменты времени с разных точек их орбит. Иными словами, наблюдатель на Земле должен был бы заметить периодическое появление и исчезновение добавочных звезд — «звезд-духов». Пусть v — изменение скорости света ($\Delta c = v$), тогда $t = d/c$; следовательно, $\Delta t/\Delta c \approx -d/c^2$, $\Delta t \approx -vd/c^2$, где t — время, за которое свет пробегает расстояние d от двойной звезды до Земли. Так как $c^2 \sim 10^{21} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$, $v \sim 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$,

$d > 10^{18}$ см, то

$$\Delta t > 10^3 \text{ сек.}$$

Итак, это явление вполне наблюдаемо, однако оно не обнаружено. Следовательно, оба постулата достаточно обоснованы с экспериментальной точки зрения. Однако их значимость нужно оценивать с точки зрения области приложения теории, которая строится на базе этих постулатов, и экспериментальной проверки следствий, вытекающих из этой теории.

В связи с тем что в пустом пространстве скорость света есть универсальная постоянная, отметим, что это означает возможность произвольного выбора спектральной линии (например, из спектра кадмия) в качестве эталона длины и времени. Самые недавние измерения скорости света в пустоте, проведенные Андерсоном [7], и выполненный Бирджем [8] критический анализ множества измерений за последние 50 лет, приводят к заключению, что скорость света в пустоте действительно есть универсальная постоянная.

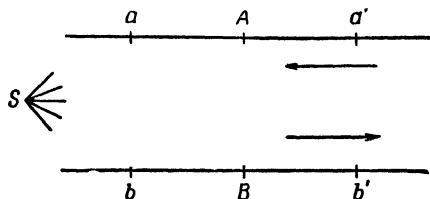
Заслуга Эйнштейна, как отмечает академик Мандельштам [9], состоит в том, что он заметил, что допущение принципа относительности и независимости скорости света от движения источника вынуждает нас отказаться от преобразования Галилея, от которого формально (с математической точки зрения) уже давно отказались Лармор (1900 г.), Лоренц и Пуанкаре при введении гипотезы сокращения.

Следует сделать еще одно замечание, касающееся вышеприведенных постулатов. Так как первый постулат является следствием точки зрения Ньютона, допускающей пустое пространство, а второй — естественным следствием противоположной идеи о пространстве, заполненном эфиром, нужно ждать, что при сочетании этих двух постулатов мы придем к выводам, которые не согласуются с классическими понятиями о пространстве и времени. Соединение этих постулатов нужно рассматривать как диалектический синтез, превосходящий каждый из принципов богатством и глубиной содержания.

Сказанное выше можно проиллюстрировать следующим примером. Рассмотрим источник света S и два тела A и B , движущихся равномерно в противоположных направлениях (фиг. 22). Предположим, что с каждым из тел связана система отсчета, относительно которой насечками соответственно a , a' и b , b' отмечается одно и то же постоянное расстояние (например, 1 км), причем скорость света определяется интервалом времени, за которое свет пробегает это расстояние.

Согласно первому постулату, мы не можем приписать никакого реального смысла абсолютным скоростям этих двух систем, но можем говорить о их скоростях относительно источника. Из вто-

рого постулата следует, что измеряемая скорость света не зависит от относительной скорости источника по отношению к наблюдателю. Следовательно, мы приходим к заключению, что время, необходимое для того, чтобы свет прошел путь от a до a' , должно быть равным времени, за которое свет пройдет путь от b до b' , несмотря на то что



Ф и г. 22.

A и B движутся в противоположных направлениях относительно источника. Этот результат кажется противоречивым из-за пространственно-временных соотношений, принятых в классической физике. Итак, допущение обоих постулатов теории относительности приводит к пересмотру понятий пространства и времени классической механики Ньютона.

§ 3. Преобразование Лоренца

Рассмотрим две системы координат (S) и (S') и предположим, что система (S') движется равномерно и прямолинейно относительно системы (S) со скоростью v , которую для простоты будем предполагать направленной по оси Oz , соответственно Oz' (фиг. 23). Будем также предполагать, что с каждой системой связаны часы, отмечающие время t и соответственно t' . Для простоты предположим, что, когда O совпадает с O' , время $t = t' = 0$.

Для того чтобы охарактеризовать какое-нибудь физическое явление, нужно уточнить его положение в пространстве и времени. Место, в котором протекает явление, определяется координатами x, y, z рассматриваемой точки в системе (S) или x', y', z' в системе (S'). Время, в которое наблюдается явление, отсчитывается по часам, а именно оно будет t в системе (S) или соответственно t' в системе (S').

Ставится задача отыскания общих формул, выражающих принцип относительности, т. е. отыскания формул, связывающих величины x, y, z, t системы (S) с величинами x', y', z', t' системы (S') в случае, когда считаются справедливыми оба постулата Эйнштейна. Эти формулы преобразования должны оставлять инвариантным уравнение распространения света в пустом пространстве, т. е. вол-

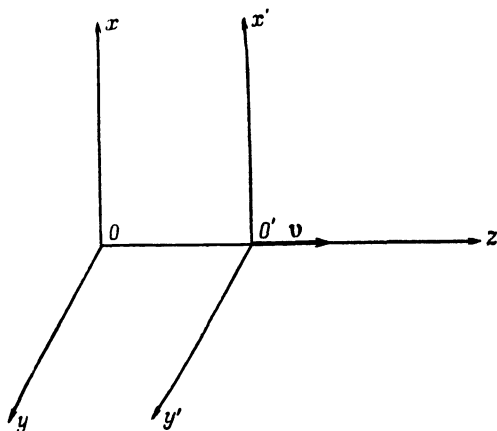
новое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (5.27)$$

В частности, должно оставаться инвариантным уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (5.28)$$

описывающее равномерное распространение фронта сферических



Ф и г. 23.

световых волн, испускаемых точечным источником в пустом пространстве. Это можно проиллюстрировать фиг. 24. Предположим, что в начальный момент $t = t' = 0$ в точке O испускается световая волна. Фронт волны в последующие моменты можно представить в виде сферы радиуса $r = ct$. С точки зрения классической теории Ньютона, в которой время считается абсолютным ($t = t'$), в двух системах (S) и (S') , движущихся равномерно одна относительно другой, световую волну можно представить как сферу радиуса $r = ct$ с центром в точке O (фиг. 24). Напротив, согласно постулатам теории относительности Эйнштейна, поверхность волны будет представлять собой сферу с центром в точке O относительно системы (S) и сферу с центром в точке O' относительно системы (S') (фиг. 25), так как уравнение (5.28) остается инвариантным.

1. Математическое выражение искомого преобразования было дано в частной форме Лоренцем, поэтому оно и называется преобразованием Лоренца¹⁾.

¹⁾ В отличие от Эйнштейна Лоренц интерпретирует время t' не как истинное время в другой системе координат, а как фиктивную величину, которую он называет «локальным» или «эффективным» временем. Отметим также, что идея этого преобразования сформулирована еще Фойгтом [10].

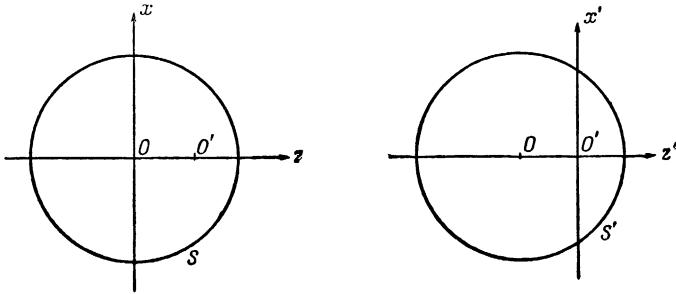
Пусть

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = jct \quad (5.29)$$

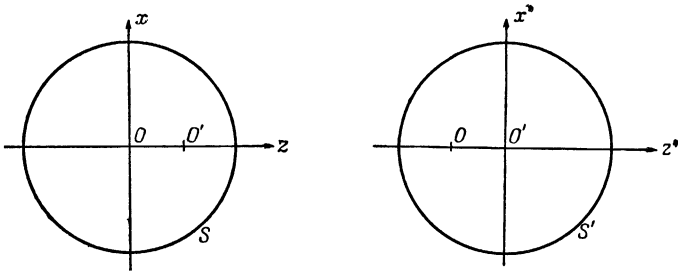
будут компонентами вектора \mathbf{R} в четырехмерном многообразии (x_1, x_2, x_3, x_4) , следовательно,

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (5.30)$$

Постулат постоянства скорости распространения света будет удовлетворяться группой линейных преобразований, оставляющих инвариантной эту длину.



Ф и г 24



Ф и г 25.

Кроме параллельных переносов, наиболее общим линейным однородным преобразованием, оставляющим инвариантной квадратичную форму (5.30), которая выражает расстояние в четырехмерном многообразии, будет группа ортогональных преобразований, называемая группой преобразований Лоренца:

$$x'_\nu = a_{\nu\mu} x_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \quad (5.31)$$

где

$$a_{\nu\lambda} a_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4). \quad (5.32)$$

Так как определитель $|a_{\mu\nu}|$ может быть равен ± 1 , причем значение -1 соответствует инверсиям (или отражениям), будем различать *полную группу Лоренца* и *собственную группу Лоренца*, которая содержит только преобразования, для которых $|a_{\mu\nu}| = +1$.

Поскольку компоненты $x_{\bar{k}}$ ($k = 1, 2, 3$) вещественные, а $x_4 = jct$ мнимая, то это значит, что $a_{\bar{k}i}$ вещественные, $a_{\bar{k}4}$ ($k = 1, 2, 3$) мнимые, в то время как a_{44} вещественный. Из условий ортогональности ($\nu = 4, \mu = 4$) следует, что

$$(a_{44})^2 = 1 - \sum_k a_{4\bar{k}} a_{4\bar{k}}. \quad (5.33)$$

Так как

$$\sum a_{4\bar{k}} a_{4\bar{k}} < 0,$$

то

$$(a_{44})^2 \geq 1;$$

следовательно

$$a_{44} \geq +1 \quad \text{или} \quad a_{44} \leq -1. \quad (5.34)$$

Таким образом, собственная группа Лоренца разбивается на две. Случай отрицательного a_{44} соответствует инверсии во времени. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай положительного a_{44} , соответствующий собственным *ортохронным* преобразованиям Лоренца, которые также образуют группу, ибо содержат тождественное преобразование.

Если $a_{44} = 1$, то из (5.33) следует

$$a_{\bar{k}4} = 0, \quad a_{4\bar{k}} = 0,$$

а, значит,

$$x'_4 = x_4, \quad x'_k = a_{\bar{k}i} x_i \quad (k, i = 1, 2, 3),$$

что соответствует простому вращению триедра в пространстве. Отсюда следует простая интерпретация девяти коэффициентов $a_{\bar{k}i}$.

Если $a_{44} > 1$, то, чтобы выразить движение начала координат O системы (S) относительно системы (S') , положим $x_{\bar{k}} = 0$ ($k = 1, 2, 3$), тогда (5.31) принимает вид

$$x'_k = a_{\bar{k}4} x_4, \quad x'_4 = a_{44} x_4,$$

откуда

$$x'_k = \frac{a_{\bar{k}4}}{a_{44}} x'_4.$$

Следовательно, $j c(a_{\bar{k}4}/a_{44})$ ($k = 1, 2, 3$) — компоненты скорости \mathbf{v}^0 начала координат O системы (S) , движущейся относительно (S') .

Так как

$$(v^0)^2 = -\frac{c^2}{a_{44}^2} (a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2),$$

из условий ортогональности следует, что

$$\left(\frac{v^0}{c}\right)^2 = \frac{(a_{44})^2 - 1}{a_{44}^2}, \quad \text{т. е.} \quad a_{44} = \left[1 - \left(\frac{v^0}{c}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Поскольку a_{44} вещественный, то получаем важное неравенство

$$\left|\frac{v^0}{c}\right| \leq 1, \quad \text{или} \quad (v^0)^2 \leq c^2.$$

Следовательно, относительная скорость двух инерциальных систем всегда меньше универсальной постоянной c , которую можно рассматривать как предел скорости.

Специальное преобразование Лоренца соответствует частному случаю, когда равномерный параллельный перенос системы (S) происходит в направлении одной из осей системы (S'), например $Oz \parallel O'z'$. Чтобы найти выражение коэффициентов, заметим, что $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$; следовательно, матрица коэффициентов имеет вид

	x_1	x_2	x_3	x_4
x'_1	1	0	0	0
x'_2	0	1	0	0
x'_3	0	0	a_{33}	a_{34}
x'_4	0	0	a_{43}	a_{44}

Условия ортогональности запишутся следующим образом:

$$a_{33}^2 + a_{43}^2 = 1, \quad a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} = 0, \quad a_{34}^2 + a_{44}^2 = 1. \quad (5.35)$$

Так как при

$$x'_3 = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \quad (5.36)$$

имеем

$$x_3 = vt = -j\beta x_4 \quad (5.37)$$

[где $\beta = v/c$], то из (5.36) и (5.37) следует

$$a_{34} = j\beta a_{33}. \quad (5.38)$$

Подставляя это значение в (5.35), получаем

$$a_{33}^2 - \beta^2 a_{33}^2 = 1, \quad a_{33} = \alpha, \quad a_{34} = j\beta\alpha.$$

Подставляя найденные значения во второе равенство из (5.35), получаем

$$a_{43} = -a_{44} \frac{a_{34}}{a_{33}} = -j\beta a_{44}$$

и, наконец,

$$a_{44}^2 (1 - \beta^2) = 1, \quad a_{44} = \alpha.$$

Матрица преобразования будет иметь вид

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & j\beta\alpha \\ 0 & 0 & -j\beta\alpha & \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Таким образом, преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, & x'_3 &= \alpha(x_3 + j\beta x_4), \\ x'_2 &= x_2, & x'_4 &= \alpha(x_4 - j\beta x_3), \end{aligned} \quad (5.40)$$

откуда следует, что система $Ox_1x_2x_3$ смещается относительно $Ox'_1x'_2x'_3$ вдоль Ox_3 со скоростью $dx_3/dt = \beta c$.

Возвращаясь к исходному пространственно-временному многообразию, имеем

$$\begin{aligned} x' &= x, & z' &= \alpha(z - vt), \\ y' &= y, & t' &= \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}z\right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

или, обратно,

$$\begin{aligned} x &= x', & z &= \alpha(z' + vt'), \\ y &= y', & t &= \alpha\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Эти уравнения составляют основу специальной теории относительности Эйнштейна и известны под названием специального преобразования Лоренца. Легко проверить, что эти преобразования образуют группу.

Преобразование Лоренца (5.41) зависит от одного параметра v . Преобразование (5.42) есть обратное преобразование, которое получается из (5.41) заменой v на $-v$. Два последовательных применения преобразования Лоренца (L_1) и (L_2) с параметрами $v = v_1$, $v = v_2$ дают преобразование Лоренца, причем соответствующие матрицы для переменных z и t имеют вид

$$\left\| \begin{array}{cc} \alpha_2 & -\alpha_2\beta_2c \\ -\frac{\alpha_2\beta_2}{c} & \alpha_2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & -\alpha_1\beta_1c \\ -\frac{\alpha_1\beta_1}{c} & \alpha_1 \end{array} \right\|,$$

где $\alpha_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2}$, $\alpha_2 = (1 - \beta_2^2)^{-1/2}$ и $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$. Перемножив матрицы, получаем

$$\alpha_1 \alpha_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1 + \beta_1 \beta_2} \\ -\frac{\beta_1}{c} + \frac{\beta_2}{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

Принимая обозначение

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (5.43)$$

и замечая, что

$$\alpha_1 \alpha_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) = \alpha_3, \quad \alpha_3 = (1 - \beta_3^2)^{-1/2}, \quad \beta_3 = \frac{v_3}{c},$$

получаем следующий результат:

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & -\alpha_3 \beta_3 c \\ -\alpha_3 \frac{\beta_3}{c} & \alpha_3 \end{vmatrix},$$

который также выражает преобразование Лоренца.

2. Рассмотрим случай, когда равномерный параллельный перенос осуществляется в некотором произвольном направлении \mathbf{v} , образующем угол φ с осью Ox фиксированной системы. Предположим, что \mathbf{v} лежит в плоскости xOy . Можно рассмотреть промежуточную систему отсчета $Ox_1 y_1 z_1 t_1$, полученную в результате операции поворота (R) на угол φ в плоскости xOy и определенную уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & z_1 &= z, \\ y_1 &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, & t_1 &= t. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Если в момент времени $t = 0$, $t' = 0$ система $O'x'_1 y'_1 z'_1 t'_1$, движущаяся равномерно относительно системы $Ox_1 y_1 z_1 t_1$ в направлении Ox_1 , совпадает с последней, то, согласно специальному преобразованию Лоренца, имеем

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha (x_1 - vt_1), & y'_1 &= y_1, \\ t'_1 &= \alpha \left(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1 \right), & z'_1 &= z_1. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Наконец, если повернуть систему $O'x'_1 y'_1 z'_1 t'_1$ на угол $-\varphi$ в плоскости $x'_1 O' y'_1$, то получим систему $O'x' y' z' t'$ при помощи преобразования (R^{-1}), определенного соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= x'_1 \cos \varphi - y'_1 \sin \varphi, & z' &= z'_1, \\ y' &= x'_1 \sin \varphi + y'_1 \cos \varphi, & t' &= t'_1. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Следовательно, переход от неподвижной системы $Oxyz$ к системе $O'x'y'z't'$, равномерно движущейся в направлении \mathbf{v} , может быть определен четырехмерным ортогональным преобразованием, которое можно записать в следующей символической форме:

$$L' = R^{-1}LR, \quad (5.47)$$

или при помощи матрицы

	x	y	z	ict
x'	$1 + (\alpha - 1) \cos^2 \varphi$	$(\alpha - 1) \cos \varphi \sin \varphi$	0	$j\beta\alpha \cos \varphi$
y'	$-(\alpha - 1) \cos \varphi \sin \varphi$	$1 + (\alpha - 1) \sin^2 \varphi$	0	$j\beta\alpha \sin \varphi$
z'	0	0	1	0
ict'	$-j\beta\alpha \cos \varphi$	$-j\beta\alpha \sin \varphi$	0	α

Преобразование (5.47) может быть записано в трехмерной векторной форме при помощи векторов $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $\mathbf{r}'(x', y', z')$ (Герглотц, 1911 г.)¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{v} \left[(\alpha - 1) \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{r} - \beta\alpha ct \right], \\ t' &= \alpha \left(t - \frac{\beta}{c} \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{r} \right). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Если разложить вектор \mathbf{r} так, чтобы одна из компонент \mathbf{r}_{\parallel} была направлена по скорости \mathbf{v} , а вторая \mathbf{r}_{\perp} — перпендикулярно направлению \mathbf{v} , то получим следующие соотношения:

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \alpha (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad t' = \alpha \left(t - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{r}_{\parallel} \right), \quad (5.49)$$

так как

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} \right) \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}.$$

3. В случае $\beta \ll 1$, т. е. $v \ll c$, уравнения (5.41) приводятся к формулам преобразования Галилея классической механики

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t.$$

¹⁾ См. также [11].

Следовательно, преобразование Галилея нужно рассматривать как первое приближение, как предельный случай; его можно интерпретировать как принцип относительности, соответствующий миру, в котором электромагнитное поле распространяется с бесконечной скоростью.

4. Инвариантность уравнений (5.27) относительно преобразования (5.42) можно легко проверить непосредственным вычислением. Так, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{v}{c^2} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\alpha^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \alpha^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

А поскольку

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = v^2 \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2v\alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

то

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2}.$$

1. Геометрическое представление преобразований Лоренца. Как показал Минковский, преобразование Лоренца является переводом на геометрический язык привилегированной эквивалентности инерциальных систем как эквивалентности декартовых систем координат в четырехмерном псевдоевклидовом¹⁾ многообразии. Этот факт приводит, однако, к новой кинематике, отличной от классической кинематики, которая основана на эквивалентности декартовых систем координат в трехмерном евклидовом пространстве. Следовательно, классическое понятие пространства и времени как двух континуумов, существующих независимо друг от друга, должно быть заменено концепцией единого пространственно-временного многообразия, согласно группе преобразований Лоренца.

Пуанкаре (1906 г.) и особенно Минковский (1908 г.) [12] предложили ввести понятие пространства — времени как четырехмерного многообразия, называемого «миром». Геометрически это означает введение четырехмерного гиперпространства, в котором время играет роль четвертого измерения.

Идеи Минковского о четырехмерном пространственно-временном многообразии и его соображения о системах отсчета, рассматриваемых им как способ для представления пространства и времени, позволяют обойти трудности, которые появляются при интерпре-

¹⁾ Такое многообразие называют также несобственно евклидовым — *Прим. ред.*

тации так называемой «относительности» длины, продолжительности и одновременности. Что касается смысла основного элемента геометрии мира, Минковский настаивал на том, что никто никогда не видел точек в неопределенный момент времени и не имел дела со временем в неопределенных точках — в физике все происходит в определенный момент времени, в некоторой определенной точке пространства. Поэтому основным элементом пространственно-временных соотношений являются не точка пространства и время, как таковые, а *событие*, которое определено четырьмя величинами: тремя пространственными координатами и временем; это приводит к выводу, что мир имеет четырехмерный характер.

Следовательно, явления определяются четырьмя величинами, которые можно рассматривать, как это делал Минковский, по аналогии с аналитической геометрией как координаты. Мы получаем *мировую точку*, и множество этих точек образует псевдоевклидово четырехмерное многообразие Минковского. Основной характеристикой «мира» является закон, по которому преобразуются пространственные четырехмерные величины, которые мы считаем координатами мировой точки, представляющей событие.

Мировая точка — событие в системе координат, состоящей из четырех взаимноперпендикулярных осей, на которых откладываются величины x , y , z и t , — имеет, следовательно, четыре координаты x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , необходимые для описания пространственно-временных событий.

При использовании этого геометрического языка необходимо предостеречь от ошибки рассматривать все четыре направления этого гиперпространства как эквивалентные. Протяженность во времени не имеет ту же природу, что и протяженность в пространстве, хотя мы считаем их направленными по сходным взаимноперпендикулярным осям. Аналогично было бы ошибочным считать эквивалентными давление и объем только потому, что они откладываются по двум взаимноперпендикулярным осям на диаграмме Клапейрона. С другой стороны, достаточно отметить, что нельзя смешивать эталон длины с часами, т. е. с инструментом, измеряющим длительность во времени. Чтобы подчеркнуть это различие, отметим, что время следует рассматривать не как четвертое измерение пространственно-временного континуума, а скорее как специальное измерение мира Минковского, который, следовательно, никоим образом не изотропен, так как метрика его псевдоевклидова.

Геометрический характер мира Минковского определен инвариантностью относительно преобразования Лоренца (5.31) выражений

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \quad (5.50)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (5.51)$$

Вводя обозначения

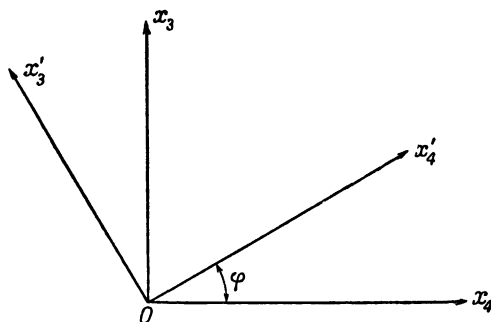
$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = jct, \quad (5.52)$$

эти соотношения можем переписать в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad (5.50')$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (5.51')$$

Соотношения (5.50) и (5.51) можно интерпретировать как соотношения, выражающие квадрат расстояния от начала координат до мировой точки, имеющей координаты x_1, x_2, x_3 и x_4 , и соответственно



Ф и г. 26.

инфинитезимальное расстояние между двумя мировыми точками с координатами x_1, x_2, x_3, x_4 и $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4$, т. е. «элемент длины» ds мировой линии.

Отсюда вытекает следующая геометрическая интерпретация преобразования Лоренца.

Так как выражения (5.50) и (5.51) должны оставаться инвариантными, то по аналогии с трехмерным пространством можно сказать, что преобразование Лоренца должно быть четырехмерным вращением вокруг начала системы координат.

В случае специального преобразования Лоренца (5.41) это можно доказать очень просто, ибо $x' = x, y' = y$, а значит, в этом случае должно оставаться инвариантным выражение

$$z^2 - c^2t^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

Следовательно, вращение осей $x_3 = z$ и $x_4 = jct$ в плоскости x_3Ox_4 должно быть эквивалентным специальному преобразованию Лоренца (фиг. 26). Этот поворот осей на угол φ выражается соотношениями

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_3 \cos \varphi + x_4 \sin \varphi, \\ x'_4 &= -x_3 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Легко проверить, что, если

$$\operatorname{tg} \varphi = j \frac{v}{c} = j\beta, \quad (5.54)$$

т. е.

$$\cos \varphi = \alpha, \quad \sin \varphi = j\beta\alpha, \quad (5.55)$$

соотношения (5.53) приводятся к соотношениям (5.40).

Из соотношения (5.55) следует, что угол вращения φ мнимый и пропорционален скорости v поступательного движения системы (S') относительно системы (S). Можно, следовательно, записать

$$\psi = j\varphi, \quad (5.56)$$

где ψ вещественное и задано соотношением

$$\operatorname{th} \psi = -\beta, \quad (5.57)$$

а (5.55) принимает вид

$$\operatorname{ch} \psi = \alpha, \quad \operatorname{sh} \psi = -\beta\alpha. \quad (5.55')$$

Специальное преобразование Лоренца может быть записано в эквивалентной форме в виде вращения (в плоскости)

$$\begin{aligned} z' &= z \operatorname{ch} \psi + ct \operatorname{sh} \psi, \\ ct' &= ct \operatorname{ch} \psi + z \operatorname{sh} \psi; \end{aligned} \quad (5.58)$$

это мнимое вращение в плоскости (x_3, x_4) .

Такое символическое представление преобразования Лоренца значительно упрощает вычисления благодаря замечательной симметрии, которой оно обладает.

1. В качестве приложения этого геометрического представления можно вывести *релятивистский закон сложения скоростей*. Пусть \mathbf{v} — скорость системы (S') относительно системы (S) и \mathbf{v}' — скорость тела, движущегося относительно (S'). Для простоты предположим, что обе скорости параллельны оси Oz . Согласно (5.54), равномерное движение со скоростью \mathbf{v} соответствует повороту на угол φ , а движение со скоростью \mathbf{v}' — повороту на угол φ' . Чтобы вычислить скорость \mathbf{v}'' тела, движущегося относительно (S), необходимо осуществить поворот на угол $\varphi + \varphi'$. Согласно (5.54), будем иметь

$$v'' = -jc \operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = -jc \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}.$$

Следовательно, формула сложения одинаково направленных скоростей имеет вид

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}. \quad (5.59)$$

Ее можно сравнить с формулой (5.43).

Из релятивистской формулы сложения скоростей непосредственно видно

$$v'' < v + v',$$

т. е. результирующая скорость меньше суммы слагаемых скоростей. Из (5.59) также следует, что скорость света есть предельная скорость, которая не может быть превзойдена, т. е. она является верхним пределом скоростей, осуществляемых в природе.

В самом деле, разность $c - v''$ всегда положительна, ибо

$$c - v'' = \frac{c \left(1 + \frac{vv'}{c^2} \right) - (v + v')}{1 + \frac{vv'}{c^2}} = \frac{(c - v)(c - v')}{c \left(1 + \frac{vv'}{c^2} \right)};$$

так как по предположению $v < c$ и $v' < c$, то

$$c - v'' > 0,$$

а если $v = c$, то $v'' = c$ при любом v' .

2. Из релятивистского закона сложения параллельных скоростей (5.59) следует

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = (v_1 + v_2) (1 - \beta_1 \beta_2 + \dots),$$

где $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$. Если предположить, что скорость v_2 — это скорость распространения света в покоящейся изотропной среде с показателем преломления n , то

$$v_2 = \frac{c}{n}.$$

Тогда если $v_1 = v$ есть скорость трансляционного движения этой среды по отношению к любой системе отсчета, то значение скорости света относительно рассматриваемой системы будет

$$c' = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{cn}} = \left(\frac{c}{n} \pm v \right) \left(1 \mp \frac{v}{nc} + \dots \right).$$

В первом приближении находим знаменитый закон Френеля, который экспериментально был проверен Физо:

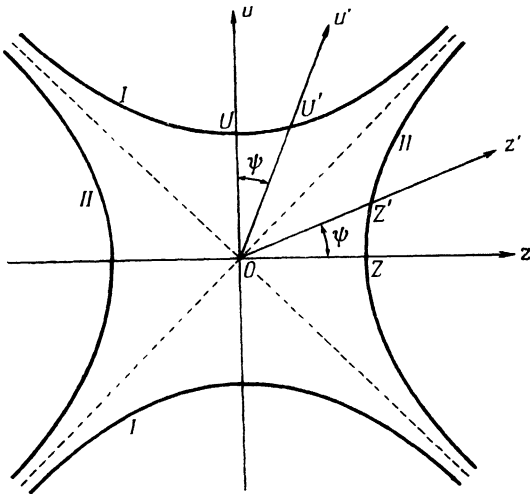
$$c' = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

3. Минковский показал, что преобразованию Лоренца можно дать и другую геометрическую интерпретацию, если рассматривать мир как четырехмерное гиперпространство, в котором вместо мнимой величины $x_4 = jct$ берется вещественная величина $u = ct$.

Каждой движущейся точке, у которой координаты, определяющие положение в пространстве (x, y, z) , суть функции времени, будет соответствовать кривая, которая называется *мировой линией*. Когда точка равномерно движется со скоростью v , мировая линия будет прямой, образующей с осью Ou угол ψ , заданный соотношением (5.57); следовательно,

$$\psi = \arctg \frac{v}{c}.$$

Так как $v < c$, то $\psi < \pi/4$. В случае специального преобразования Лоренца, когда во время параллельного переноса обе оси Oz и Oz' остаются параллельными, преобразование имеет место только



Ф и г. 27.

в плоскости zOu . Чтобы найти геометрическую интерпретацию и в этом случае, рассмотрим в плоскости zOu равнобочные гиперболы

$$z^2 - u^2 = \mp 1 \quad (5.60)$$

и их общие асимптоты

$$z^2 - u^2 = 0. \quad (5.61)$$

Рассмотрим на положительной ветви гиперболы *I* точку U' , а на положительной ветви гиперболы *II* точку Z' , выбранную так, чтобы асимптота $z = u$ была биссектрисой угла $z'Ou'$ (фиг. 27). Следовательно, Ou' и Oz' являются сопряженными диаметрами обеих гипербол. В случае, когда точка U' совпадает с точкой U , лежащей на оси Ou , точка Z' совпадает с точкой Z , лежащей на

оси Oz . Специальное преобразование Лоренца

$$\begin{aligned} z' &= \alpha (z - vt), \\ t' &= \alpha \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

может быть интерпретировано как замена осей Ou и Oz сопряженными диаметрами Ou' , Oz' .

В самом деле, прямые Ou' и Oz' задаются соответственно уравнениями

$$z = \frac{v}{c} u, \quad u = \frac{v}{c} z.$$

В системе zOu координатами точек U' и Z' будут

$$U' (\alpha, \beta\alpha), \quad Z' (\beta\alpha, \alpha),$$

а в системе $z'Ou'$

$$U' (1, 0), \quad Z' (0, 1).$$

Уравнения, определяющие преобразование системы $z'Ou'$ в систему zOu , имеют вид

$$\begin{aligned} z' &= \alpha z - \beta\alpha u, \\ u' &= \alpha u - \beta\alpha z; \end{aligned} \quad (5.63)$$

они тождественны уравнениям (5.62). Очевидно, выражения

$$z^2 - u^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2$$

инвариантны относительно этого преобразования.

В случае общего преобразования Лоренца приведенное выше построение следует перенести на четырехмерное пространство вместо двумерного.

В этом случае гиперболам (5.60) будут соответствовать гиперболические пространства

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \pm 1, \quad (5.60')$$

а их асимптотам (5.61)—коническое пространство

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0. \quad (5.61')$$

В рассматриваемом четырехмерном гиперпространстве гиперболическое пространство (5.60') играет роль сферической поверхности обычного трехмерного пространства.

В самом деле, в трехмерной геометрии, если отложить от начала координат O по всем исходящим из него направлениям единичный отрезок, получим сферическую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. В четырехмерном гиперпространстве для явлений, представленных мировыми точками, для которых интервал, определяющий их рас-

стояние от принимаемой за начало мировой точки O , равен единице, имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 1.$$

Это уравнение трехмерного гиперболоида.

Четырехмерное гиперпространство, т. е. мир Минковского, разделено трехмерным конусом

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$$

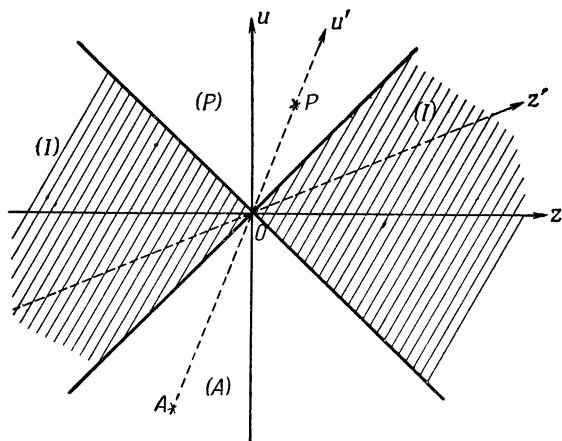
на три области

1°. Область прошедшего (A) (фиг. 28), для которой

$$u < 0,$$

$$u^2 > x^2 + y^2 + z^2.$$

Через каждую точку A этой области можно провести времениподобную ось Ou' (т. е. ось, которую при помощи подходящего преобразования Лоренца можно перевести в ось Ou), причем время растет



Ф и г. 28.

в направлении AO . Любое событие из этой области протекает до события, соответствующего точке O в любой системе отсчета.

2°. Область будущего (P), для которой

$$u > 0,$$

$$u^2 > x^2 + y^2 + z^2.$$

Через каждую точку этой области может проходить времениподобная ось Ou' ; время растет в направлении OP . Любое событие из этой области происходит после события, соответствующего точке O в любой системе отсчета.

3°. Промежуточная область (I), для которой

$$u^2 < x^2 + y^2 + z^2.$$

Все точки этой области представляют собой события, одновременные с событием O . В самом деле, оси, соединяющие начало O с некоторой точкой из этой области, являются пространственно-подобными осями (т. е. всегда можно подобрать такую инерциальную систему отсчета, в которой оси Oz' соответствует ось Oz).

Итак, мировая линия, соответствующая движущейся материальной точке, должна непременно лежать внутри конического пространства, а именно она проходит из конуса прошедшего в конус будущего через начало O . Конус будущего (P) содержит совокупность событий, которые могут быть предупреждены событием O , т. е. они могут получить световой сигнал из O . Следовательно, события из конуса прошедшего могут быть причиной события O , а события из конуса будущего могут быть вызваны событием O . В промежуточной области течение времени лишено смысла и между событием из этой области и событием из O не может быть причинной связи.

4. В трехмерном евклидовом пространстве элемент дуги задается следующим образом:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

По аналогии в неевклидовом четырехмерном многообразии за элемент дуги мировой линии принимается инвариант

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (5.64)$$

выражающий расстояние между двумя бесконечно близкими событиями.

Учитывая, что скорость v движущейся точки, которой соответствует мировая линия, задается соотношением

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

можно записать соотношение (5.64) в следующем виде:

$$ds^2 = (v^2 - c^2) dt^2. \quad (5.65)$$

Если, помимо системы координат (x, y, z, jct) , выбранной произвольно, выберем вторую систему координат (ξ, η, ζ, jct) так, чтобы ось $l' = jct$ была параллельна элементу рассматриваемой линии ds , то будем иметь $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$. Следовательно, относительно новой системы координат имеем

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2,$$

или

$$ds = icd\tau. \quad (5.66)$$

Поскольку скорость света, согласно теории относительности, является пределом для относительных скоростей, будем всегда иметь в силу соотношения (5.65)

$$ds^2 < 0, \text{ следовательно, } d\tau^2 > 0,$$

а так как ds^2 — инвариант, то и $d\tau^2$ — также инвариант.

Элемент $d\tau$ называется элементарной продолжительностью собственного времени, соответствующего рассматриваемой материальной точке. Из уравнения (5.65) вытекает связь между элементарной продолжительностью собственного времени и времени, измеренного в некоторой системе отсчета:

$$d\tau = \frac{1}{\alpha} dt = dt(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (5.67)$$

Согласно соотношению (5.66) часы, связанные с движущимся телом, отсчитывают длину дуги мировой линии, деленную на j_c , а мировая линия, соответствующая световому лучу, имеет, согласно соотношению (5.65), нулевую длину.

Так как

$$ds^2 = \sum_k dx_k^2 - c^2 dt^2 = (v^2 - c^2) dt^2 \leq 0,$$

то временная ось инерциальной системы координат в четырехмерном мире остается всегда времениподобной осью, а оси dx_k ($k = 1, 2, 3$) сохраняют всегда свой пространственноподобный характер. Вообще 4-вектор u_ν является пространственноподобным, времениподобным или изотропным в зависимости от того, будет ли $\sum u_\nu^2$ положительной, отрицательной или равной нулю. Характеристика времениподобных 4-векторов состоит в том, что всегда существует специальная система координат, называемая «собственной», в которой три пространственные компоненты вектора равны нулю.

5. Следует отметить, что при геометрической интерпретации преобразования Лоренца замечается стремление свести четырехмерный мир к простому математическому приему, в котором время сводится к «однородной координате». В действительности же четырехмерный мир нужно рассматривать как динамическое единство понятий пространства и времени, которые являются формами существования материи. Четырехмерный пространственно-временной мир является динамическим единством, относительно которого формально ньютоново трехмерное пространство представляет собой неполную, статическую проекцию. Это позволяет правильно объяснить поведение микрочастиц, движущихся с очень большими скоростями. Пространство — время носит абсолютный характер, а его деление на пространство и время в области физических процессов, происходящих со скоростями, сравнимыми со скоростью света, носит до некоторой степени относительный характер. Так же как и в обычной трехмерной геометрии, где выбор системы координат не влияет

на геометрическую форму и на размеры тел, в четырехмерной геометрии Минковского выбор системы отсчета не влияет на пространственно-временную форму физических процессов; она остается абсолютной для любой системы отсчета. Пространственная и временная формы меняются, только когда они взяты раздельно. Так, относительность одновременности некоторых пространственно изолированных событий можно понять по аналогии с геометрией. А именно аналогично тому, как проекции двух различных точек на некоторую плоскость могут совпасть или остаются различными в зависимости от выбора ориентации плоскости в пространстве, и временной интервал между событиями, различными в пространственном отношении, как проекция некоторого четырехмерного интервала, может варьировать в зависимости от выбора гиперповерхности, на которую его проектируют.

2. Физическая интерпретация преобразования Лоренца. Физический смысл преобразования Лоренца впервые был проанализирован Эйнштейном.

Дифференцируя уравнения (5.41), получаем

$$\begin{aligned} dx' &= dx, & dz' &= \alpha (dz - v dt), \\ dy' &= dy, & dt' &= \alpha \left(dt - \frac{v}{c^2} dz \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Заметим, что в этих уравнениях дифференциалы можно заменить конечными величинами, выражающими в соответствующей системе отсчета меру пространственного или временного интервала, соответствующего паре соседних физических событий.

Следовательно, при помощи этих уравнений можно сравнивать эталоны длины и часы, связанные с двумя системами (S) и (S').

а) Лоренцево сокращение длины. Рассмотрим в системе (S') стержень, находящийся в состоянии покоя и расположенный вдоль оси Oz' . Координаты его концов z'_1 и z'_2 не будут зависеть от t' и длина равна

$$l_0 = z'_2 - z'_1.$$

В системе (S) длина l стержня будет определена с учетом, что z_1 и z_2 суть функции t и что расстояние l между двумя концами стержня нужно измерять в один и тот же момент, т. е.

$$l = z_2(t) - z_1(t);$$

поскольку эти положения не одновременны в (S'), постольку l и l_0 не равны между собой. В самом деле, из (5.36) следует, что

$$z'_2 = \alpha [z_2(t) - vt], \quad z'_1 = \alpha [z_1(t) - vt];$$

ПОЭТОМУ

$$l_0 = \alpha l, \quad (5.69)$$

или

$$l = l_0 (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (5.70)$$

что, впрочем, следует и из (5.68), если учесть, что при $dt = 0$ имеем $dz' = \alpha dz$. Следовательно, линейные размеры движущегося тела сокращаются в направлении движения в $1/\alpha = (1 - \beta^2)^{1/2}$ раз.

Из эквивалентности систем отсчета немедленно следует тот же вывод и в обратном случае.

Размеры отрезков, перпендикулярных направлению движения, остаются без изменения. Поэтому если тело, отнесенное к некоторой системе координат, находящейся в относительном покое, есть сфера, то в движущейся системе отсчета оно становится эллипсоидом вращения, сплюснутым в направлении движения. Таким образом, теория относительности не допускает абсолютно инвариантных форм, а допускает только относительные формы.

Получаем как следствие из уравнений преобразования сокращения Лоренца — Фитцджералда, которое в гипотезе Лоренца рассматривалось как изменение длины эталона в зависимости от скорости его движения относительно неподвижного эфира, который считался реально существующим.

Итак, пространственные интервалы проявляются как относительные с точки зрения их измерения в различных движущихся системах, и лоренцево сокращение считается в принципе определенным.

б) *Увеличение промежутков времени.* Из уравнений (5.68) можно прийти к аналогичным выводам и при сравнении показаний двух часов, находящихся в относительном движении.

Рассмотрим сначала два события, происходящих в одной и той же точке, но в различное время. В этом случае временной интервал может быть измерен при помощи одних часов. Предположим, что часы, связанные с системой (S') , измеряют отрезок времени $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ между этими двумя событиями, происходящими в одной и той же точке относительно системы (S') . Рассмотрим, каков будет результат измерения того же отрезка времени при помощи часов, связанных с системой (S) . Так как эти два события происходят в одной и той же точке относительно (S') , то

$$dz' = \alpha (dz - v dt) = 0.$$

Подставляя этот результат в (5.68), получаем

$$dt' = \frac{1}{\alpha} dt; \quad (5.71)$$

таким образом,

$$\Delta t = \alpha \Delta t', \quad (5.71')$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$. Имеем, следовательно, $\Delta t > \Delta t'$, т. е. отрезок времени между двумя событиями, рассматриваемыми относительно системы (S), кажется *более продолжительным*, чем если его рассматривать относительно движущейся системы (S').

Для эталонов времени, так же как и для эталонов длины, результат симметричен относительно этих двух систем.

Итак, относительно покоящейся системы отсчета равномерно перемещающиеся часы или осциллятор замедляются, причем степень замедления зависит от относительной скорости перемещения. Временные интервалы проявляются как относительные с точки зрения их измерения в различных движущихся системах отсчета.

Отметим, что подобно тому, как опыт Майкельсона — Морли можно рассматривать как непосредственную проверку сокращения Лоренца, опыт Кеннеди — Торндайка можно рассматривать как непосредственную проверку увеличения отрезков времени (см. гл. IV, § 5).

Найденный выше результат может быть немедленно установлен из фиг. 26. Пусть τ' — период осциллятора (или колебательного контура), покоящегося относительно системы (S') и движущегося равномерно относительно системы (S).

Отнесенный к системе (S) период осциллятора будет [см. (5.55)] следующий:

$$\tau = \tau' \cos \gamma = \frac{\tau'}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \alpha \tau'. \quad (5.72)$$

Такой осциллятор может быть осуществлен при помощи быстро движущегося атома, излучающего монохроматическую спектральную линию, например ионов водорода в каналových лучах. Так, Айвс и Стилуэлл (1938 г.) определили красное смещение спектральной линии H_{α} , излученной движущимся атомом водорода, и пришли к результатам, подтверждающим вышеприведенную формулу. В свою очередь Разетти (1941 г.) и Росси, сравнивая среднюю продолжительность жизни нестабильных μ -мезонов в поглощающей среде, т. е. практически покоящихся, и в космических лучах, при помощи измерений поглощения обнаружили огромное увеличение среднего времени жизни μ -мезонов:

$$\frac{\tau}{\tau'} \approx \frac{7 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 50.$$

Отсюда при помощи соотношения (5.72) можно получить скорость мезонов

$$\alpha = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = 50, \quad v = c \left(1 - \frac{1}{5000} \right).$$

Полученное значение согласуется с определениями энергии μ -мезонов [13—15]. Только таким образом можно, впрочем, объяснить то, что до поверхности Земли доходят μ -мезоны, время жизни которых составляет $\tau = 1,5 \cdot 10^{-6}$ сек и которые, следовательно, образовавшись на высоте 10—20 км, могли бы пролететь в атмосфере лишь несколько сот метров.

в) *Относительность одновременности.* Рассмотрим два события, происходящих в двух различных точках, и предположим, что относительно системы (S) они происходят одновременно в точках z_1, z_2 , т. е. $t_1 = t_2$. Из уравнений (5.41) следует, что относительно системы (S') имеем

$$t'_1 = \alpha \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1 \right), \quad t'_2 = \alpha \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2 \right);$$

значит, $t'_1 \neq t'_2$. А значит, два события, происходящих в двух различных точках P_1 и P_2 и одновременных относительно системы (S), относительно движущейся равномерно системы (S') не являются одновременными. В теории относительности одновременность, так же как и длительность, рассматривается как относительное понятие; это не означает, однако, что одновременность событий не всегда носит объективный характер.

Итак, интерпретируя преобразования Лоренца на основе постулатов Эйнштейна, приходим к заключению, что длительность во времени, так же как и пространственные интервалы, относительна.

В ньютоновой концепции, которая лежит в основе классической физики, пространство и время считаются абсолютными рамками, в которых разворачиваются физические явления. Так, понятие абсолютного времени основано на утверждении, что часы можно перенести с места на место без изменения их хода. Следовательно, если в пределах экспериментальных погрешностей показания двух часов, находящихся в одном и том же месте, совпадают, то это совпадение (синхронность) должно сохраниться и при любом расстоянии между часами. Для синхронизации допускается дополнительно теоретическая возможность мгновенно передавать сигналы на любое расстояние. Эти гипотезы лежали в основе понятия абсолютного и универсального времени. Естественно поэтому, что если мы отказываемся допускать возможность мгновенного действия на расстоянии, то понятия абсолютного пространства и абсолютного времени ньютоновой механики утрачивают свой физический смысл. В определении понятий пространства и времени нужно учитывать конечную скорость распространения сигналов, что приводит нас к противоречию с классическими (ньютоновыми) понятиями пространства и времени. Значение теории относительности именно и состоит в том, что она вскрыла конкретные формы связи пространства и времени, которые определены преобразованием Лоренца.

Выводы теории относительности, касающиеся относительности пространственного интервала и временной продолжительности, были извращены некоторыми физиками, попавшими под влияние идеалистической философии, тормозящей развитие физических наук. «Физический» идеализм махистского типа проявился в абсолютизации релятивизма и отрицании объективного характера движения, пространства и времени. Такой релятивизм восхваляет феноменологическое описание явлений и полностью отказывается от причинного истолкования.

В этой связи полезно привести слова Зоммерфельда: «Вопрос, является ли сокращение Лоренца «действительным» или «кажущимся», естественно считать столь же праздным, как и вопрос о том, движется ли тело «в действительности». Столь же беспредметным и произвольным является и различие между покоящейся и движущейся системами» [16].

Диалектический материализм рассматривает пространство и время как формы существования материи. Так, Ф. Энгельс [14], стр. 550) указывает, что «...обе эти формы существования материи без материи суть ничто, пустые представления, абстракции, существующие только в нашей голове». Пространство и время неразрывно связаны с движущейся материей, так как они являются, как указывал Энгельс [17], объективными формами ее существования: «...основные формы всякого бытия суть пространство и время; бытие вне времени есть такая же величайшая бессмыслица, как бытие вне пространства». Материальное единство мира, неразрывная связь пространства и времени с движением материи, определяет также их взаимную связь, которую теория относительности конкретизирует, полностью подтверждая предпосылки диалектического материализма.

Специальная теория относительности есть *физическая теория* пространства и времени, т. е. теория пространственных и временных связей между предметами и явлениями. Объективное содержание этой теории можно понять, только отходя от того, что пространственно-временные соотношения не существуют сами по себе, а определяются при посредстве *материальных связей* между предметами и явлениями.

Классическая теория пространства и времени основывалась на законах движения твердых тел и выражалась при помощи евклидовой геометрии и «классической» ньютоновой кинематики. Основными понятиями были евклидово пространство и абсолютное время.

Исследование электромагнитных явлений в движущихся телах привело к выводам, которые противоречат понятию абсолютного времени. Понятие абсолютного времени оказалось не соответствующим экспериментальной действительности. Основным выводом является закон постоянства скорости распространения электромаг-

нитных явлений, из которого следует существование универсального соотношения между пространственными и временными величинами.

Основной вывод теории относительности состоит в установлении взаимозависимости пространства и времени. Это означает, что разделение на пространство и время не имеет абсолютного характера. Все «парадоксы», обсуждаемые физиками, возникают именно при попытке отделить пространственную форму существования движущихся тел от временной формы. В геометрической интерпретации, данной Минковским (§ 3, п. 1), этот факт выражается существованием четырехмерного инварианта (пространственно-временного интервала) относительно преобразований Лоренца. Как мы увидим в гл. VI, § 8, другим важным выводом является изменение массы тел в зависимости от скорости и закон взаимозависимости массы и энергии. Итак, материя не может быть сведена, как в ньютоновой механике, к частицам, обладающим инвариантными массами.

Важно отметить, что принцип относительности не является произвольным постулатом, его нужно рассматривать как закон природы, носящий объективный характер. Следовательно, ошибочна интерпретация принципа относительности как принципа «зависимости явлений от точки зрения наблюдателя». Пространственная и временная форма физических процессов не результат выбора системы отсчета, а объективная форма пространственно-временного существования. Теория относительности единым образом отображает как абсолютное, так и относительное. Материалистическо-диалектическая концепция единства относительного и абсолютного, их особенностей и проявления в различных соотношениях противоположна метафизической концепции, которая противопоставляет относительное абсолютному, разрывая их объективное единство. Совершенно ошибочно отождествлять пространство и время с четырехмерной геометрией Минковского, которая фактически является только замечательной интерпретацией, математической формой теории.

Не следует смешивать относительное и субъективное (неправильно полагать, что только то, что абсолютно с физической точки зрения, может быть объективным), а, наоборот, следует выявлять объективное единство абсолютного и относительного. В специальной теории относительности основным является не принцип относительности, а взаимозависимость между пространством, временем и движением, которая определяет особенность этой теории. Эта физическая теория, которая, как мы увидим, была подтверждена целым рядом опытов, занимается реальными явлениями, а не «кажушимися» эффектами. Содержание ее нельзя понять, если рассматривать ее с идеалистической точки зрения или с точки зрения метафизического материализма. Выводы, к которым приводит специальная теория относительности, являются новым блестящим доказатель-

ством правильности материалистическо-диалектических концепций о мире. Следует отметить, что принцип зависимости свойств пространства от материи был высказан в общей форме задолго до появления теории относительности гениальными создателями неевклидовой геометрии русским Лобачевским и венгром Бойяи. Их можно считать предшественниками этой физической теории, в которой некоторые их тезисы приобретают конкретный характер.

§ 4. Преобразование векторных полей

В предыдущих параграфах мы изучали свойства преобразования Лоренца, которое было выведено, исходя из постулата о постоянстве скорости света, и показали, что оно эквивалентно вращению в четырехмерном пространстве Минковского. Мы видели также, что постулату относительности удовлетворяют уравнения Максвелла в силу их ковариантности относительно преобразования Лоренца. Для дополнения результатов, установленных в § 1, п. 1, остается вывести конкретное выражение преобразования компонент 4-вектора и 6-вектора электромагнитного поля относительно специального преобразования Лоренца (5.40). Это легко осуществить, если учесть общее правило преобразования векторов и тензоров при вращении четырехмерного пространства, в которое следует подставить специальные значения коэффициентов, определенных соотношением (5.39).

Так, для компонент 4-вектора плотности тока имеем общее соотношение

$$J'_\mu = a_{\mu\nu} J_\nu.$$

Подставляя частные значения коэффициентов, получаем

$$\begin{aligned} J'_x &= J_x, & J'_y &= J_y, \\ J'_z &= \alpha (J_z - vq), & q' &= \alpha \left(q - \frac{v}{c^2} J_z \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

и для обратного преобразования

$$\begin{aligned} J_x &= J'_x, & J_y &= J'_y, \\ J_z &= \alpha (J'_z + vq'), & q &= \alpha \left(q' + \frac{v}{c^2} J'_z \right). \end{aligned} \quad (5.73')$$

Аналогично для 6-вектора $F_{\mu\nu}$, учитывая общий закон преобразования антисимметричного тензора

$$T'_{\kappa\lambda} = \begin{vmatrix} a_{\kappa\mu} & a_{\kappa\nu} \\ a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix} T_{\mu\nu} \quad (\mu > \nu),$$

получаем с учетом частных значений коэффициентов

$$\begin{aligned}
 F'_{12} &= a_{11}a_{22}F_{12} = F_{12}, \\
 F'_{13} &= a_{11}a_{33}F_{13} + a_{11}a_{34}F_{14} = \alpha (F_{13} + j\beta F_{14}), \\
 F'_{14} &= a_{11}a_{43}F_{13} + a_{11}a_{44}F_{14} = \alpha (F_{14} - j\beta F_{13}), \\
 F'_{23} &= a_{22}a_{33}F_{23} + a_{22}a_{34}F_{24} = \alpha (F_{23} + j\beta F_{24}), \\
 F'_{24} &= a_{22}a_{43}F_{23} + a_{22}a_{44}F_{24} = \alpha (F_{24} - j\beta F_{23}), \\
 F'_{34} &= (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) F_{34} = F_{34}.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Следовательно, с учетом (5.10)

$$\begin{aligned}
 B'_x &= \alpha \left(B_x + \frac{v}{c^2} E_y \right), & E'_x &= \alpha (E_x - vB_y), \\
 B'_y &= \alpha \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_x \right), & E'_y &= \alpha (E_y + vB_x), \\
 B'_z &= B_z, & E'_z &= E_z.
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Мы рассматривали частный случай, когда система (S') движется без ускорения в направлении оси Ox системы (S), но это ограничение может быть отброшено, и под вектором \mathbf{v} можно понимать скорость движения системы отсчета (S') в любом направлении относительно неподвижной системы (S). В общем случае, обозначая индексами \parallel и \perp компоненты, соответственно параллельные и перпендикулярные к направлению относительного движения, представленного вектором \mathbf{v} , получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \\
 \mathbf{B}'_{\perp} &= \alpha \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)_{\perp}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}.
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Для случая $v \ll c$ можно отбросить члены, содержащие c^{-2} ; получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \\
 \mathbf{B}'_{\perp} &= \mathbf{B}_{\perp}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}.
 \end{aligned} \tag{5.76'}$$

4-потенциал Φ_{μ} преобразуется так же, как и 4-вектор плотности тока:

$$\begin{aligned}
 A'_x &= A_x, & A'_z &= \alpha \left(A_z - \frac{v}{c^2} V \right), \\
 A'_y &= A_y, & V' &= \alpha (V - vA_z).
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

§ 5. Релятивистское истолкование эффекта Доплера и aberrации света

Рассмотрим плоскую монохроматическую световую волну, распространяющуюся в направлении \mathbf{n} . Фазу волны можно записать

следующим образом:

$$\Phi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Так как Φ — скаляр, то это выражение может быть только релятивистским инвариантом, т. е. инвариантом относительно преобразования Лоренца. Если определить следующим образом четырехмерный волновой вектор:

$$k_i = \frac{\omega}{c} n_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad k_4 = j \frac{\omega}{c}, \quad (5.78)$$

который является нуль-вектором (изотропным вектором)

$$\sum k_\mu k_\mu = 0,$$

то фазу волны можно записать в следующей инвариантной форме:

$$\Phi = x_\mu k_\mu. \quad (5.79)$$

Очевидно, фазу можно назвать пространственно-временной пульсацией.

Если воспользоваться понятием 4-вектора k_μ , то релятивистское истолкование явления Допплера и явления аберрации света получится очень просто. Рассмотрим формулы преобразования компонент 4-вектора k_μ при специальном преобразовании Лоренца:

$$k_1 = k'_1, \quad k_2 = k'_2, \quad k_3 = \alpha \left(k'_3 - j \frac{v}{c} k'_4 \right), \quad k_4 = \alpha \left(k'_4 + j \frac{v}{c^2} k'_3 \right). \quad (5.80)$$

Из этих соотношений, учитывая определение (5.78) и соотношение $\omega = 2\pi\nu$, получаем

$$\nu = \alpha \nu' (1 + \beta n'_3) \quad (5.81)$$

и

$$n_1 = n'_1 \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 + \beta n'_3}, \quad n_2 = n'_2 \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 + \beta n'_3}, \quad n_3 = \frac{n'_3 + \beta}{1 + \beta n'_3}. \quad (5.82)$$

1. Соотношение (5.81) выражает релятивистский закон преобразования частот, т. е. релятивистский эффект Допплера

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right) (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (5.83)$$

где через φ обозначен угол между вектором \mathbf{n} и осью Oz .

Если $\beta \ll 1$, то это соотношение совпадает с классическим. Релятивистский множитель $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, входящий в это соотношение, выражает явление увеличения промежутков времени.

Если направление скорости источника перпендикулярно к направлению наблюдения, $\cos \varphi = 0$ и получаем поперечный эффект Допплера

$$\nu' = \nu (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (5.84)$$

Если же источник движется в направлении наблюдения, $\cos \varphi = 1$ и

$$v' = v (1 - \beta) (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (5.84')$$

Формулы (5.84) и (5.84') были экспериментально проверены соответственно Айвсом и Стилуэллом [18] и Оттингом [19], наблюдавшими излучение параллельного пучка каналовых лучей, движущихся с одинаковой скоростью.

2. Соотношения (5.82) дают релятивистское истолкование явления абберации. А именно в случае, когда направление светового луча лежит в плоскости yOz , имеем

$$n'_1 = 0, \quad n'_2 = n_2 \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta n_3}, \quad n'_3 = \frac{n_3 - \beta}{1 - \beta n_3};$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \beta} (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Эта формула существенно отличается от классической формулы релятивистским множителем $(1 - \beta^2)^{1/2}$.

Когда $n'_1 = n'_3 = 0$, $n'_2 = 1$, то

$$n_1 = 0, \quad n_3 = \beta, \quad n_2 = (1 - \beta^2)^{1/2};$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_3}{n_2} = \beta (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

откуда получаем, что в классическом случае

$$\operatorname{tg} \alpha = \beta \quad \text{или} \quad \sin \alpha = \beta.$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Введение

Специальная теория относительности позволяет представить уравнения микроскопического поля электронов, скорость которых близка к скорости света, в более симметричном и едином виде. Четырехмерной формулировкой основных уравнений теории электронов мы обязаны Минковскому. С учетом изложенного в предыдущей главе эта формулировка вытекает естественным образом из аналогии между уравнениями Лоренца и уравнениями Максвелла в пустом пространстве. Проблема ковариантности уравнений микроскопического поля ставит задачу отыскания группы более широкой, чем группа Лоренца, для которой эти уравнения ковариантны. Не входя в подробности этой проблемы, отметим, что Каннингхем и Бейтман (1910 г.) доказали, что наиболее общей группой является группа конформных преобразований, оставляющая инвариантным световой конус в многообразии Минковского.

Четырехмерная формулировка уравнений поля позволяет распространить все изложенное в гл. I на релятивистский случай и сделать важные уточнения в области классической теории Лоренца.

Мы будем изучать поле электрона, движущегося равномерно и ускоренно, а также открытый Черенковым и Вавиловым эффект, порожденный «сверхсветовым электроном», пользуясь методом, указанным Зоммерфельдом для интегрирования четырехмерного уравнения потенциалов.

Кроме того, мы будем заниматься проблемой обратного действия микроскопического поля электрона на сам электрон, а также проблемой массы электрона. Эти проблемы представляют особый интерес в свете современных исследований микроскопических полей, которые по-новому трактуют соотношение между частицей и ее полем.

§ 1. Ковариантность уравнений Максвелла — Лоренца. 4-вектор плотности силы

Уравнения Максвелла — Лоренца (1.8), (1.9) для микроскопического поля можно немедленно переписать для четырехмерного

случая, если учесть изложенное в гл. V, § 1, а также то, что эти уравнения сходны по форме с уравнениями Максвелла для пустого пространства.

Следовательно, обозначив 6-вектор микроскопического поля через

$${}^2\mathbf{f} = \left(\mathbf{b}, -\frac{j}{c} \mathbf{e} \right) \text{ и } {}^2\mathbf{g} = \frac{1}{\mu_0} {}^2\mathbf{f}, \quad (6.1)$$

или, иначе,

168

$$\begin{pmatrix} f_{23} & f_{31} & f_{12} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \\ -\frac{j}{c} e_x & -\frac{j}{c} e_y & -\frac{j}{c} e_z \end{bmatrix}, \quad f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}, \quad (6.2)$$

и определив 4-вектор плотности конвекционного тока соотношениями

$$j_1 = \rho v_x, \quad j_2 = \rho v_y, \quad j_3 = \rho v_z, \quad j_4 = jc, \quad (6.3)$$

получаем уравнения Максвелла — Лоренца в следующей форме:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = j_\mu \quad (6.4)$$

и

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (6.5)$$

или в эквивалентной форме

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (6.5')$$

где Φ_μ есть 4-вектор потенциала, определенный соотношениями (5.5) — (5.7), т. е.

$$\square \Phi_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 j_\mu \quad (6.6)$$

и

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (6.7)$$

Ковариантность 4-вектора плотности тока может быть просто установлена, если учесть инвариантность электрического заряда и четырехмерного элемента объема

$$(dx) = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Обозначив через Δq заряд электронов, содержащихся в элементарном объеме (dx) , получаем делением Δq на (dx) инвариант. Умножая его на 4-вектор с компонентами

$$dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 = jc dt,$$

получаем также 4-вектор, являющийся вектором плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{\Delta q}{dx_1 dx_2 dx_3} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, jc \right) = \rho(\mathbf{v}, jc), \quad (6.8)$$

где ρ — обычная плотность заряда.

Легко видно, что 4-вектор плотности тока имеет то же направление, что и 4-вектор скорости

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, jc \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} (\mathbf{v}, jc), \quad (6.9)$$

где τ — собственное время, определенное соотношением (5.67).

В самом деле, имеем соотношение

$$\mathbf{j} = \rho \frac{d\tau}{dt} \mathbf{u} = \rho (1 - \beta^2)^{1/2} \mathbf{u} = \rho_0 \mathbf{u}. \quad (6.10)$$

Легко проверить, что уравнение непрерывности может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \text{ или } \frac{\partial (\rho_0 u_\mu)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (6.10')$$

1. Умножая 4-вектор плотности тока на 6-вектор поля $f_{\nu\mu}$, получаем 4-вектор, который имеет размерность силы на единицу объема и называется плотностью силы

$$k_\nu = j_\mu f_{\nu\mu}, \quad (6.11)$$

или

$$\begin{aligned} k_1 &= j_2 f_{12} + j_3 f_{13} + j_4 f_{14}, \\ k_2 &= j_1 f_{21} + j_3 f_{23} + j_4 f_{24}, \\ k_3 &= j_1 f_{31} + j_2 f_{32} + j_4 f_{34}, \\ k_4 &= j_1 f_{41} + j_2 f_{42} + j_3 f_{43}, \end{aligned} \quad (6.11')$$

откуда следует

$$(k_1, k_2, k_3) = \rho(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}). \quad (6.12)$$

Мы получили плотность силы Лоренца (1.22). Компонента

$$k_4 = j \frac{\rho}{c} (\mathbf{v}\mathbf{e}) = \frac{j}{c} (v_x k_x + v_y k_y + v_z k_z) \quad (6.12')$$

выражает с точностью до мнимого множителя работу, произведенную за единицу времени. Легко проверить, что с учетом соотношений (6.10) и (6.11) имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (6.13)$$

Полная сила, действующая на конечный объем, содержащий определенное распределение зарядов, будет

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{k} dv, \quad (6.14)$$

где $dv = dx dy dz$. Но элемент трехмерного объема не является инвариантом, он меняется из-за сокращения Лоренца; так, относительно специального преобразования Лоренца (5.41) имеем

$$dv = dv^0 (1 - \beta^2)^{1/2} = \frac{1}{\alpha} dv^0, \quad (6.15)$$

где dv^0 — элемент рассматриваемого трехмерного объема в системе координат, относительно которой электрон неподвижен. Относительно этой системы, учитывая соотношения, задающие преобразование компонент 4-вектора [см. (5.73)], имеем

$$k_1 = k_x^0, \quad k_2 = k_y^0, \quad k_3 = \alpha k_z^0, \quad k_4^0 = 0. \quad (6.16)$$

Интегрируя с учетом (6.15), получаем

$$K_x = \frac{1}{\alpha} K_x^0, \quad K_y = \frac{1}{\alpha} K_y^0, \quad K_z = K_z^0. \quad (6.17)$$

2. Рассмотрим электрон, движущийся в электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{B} . Электрон, который неподвижен относительно системы (S^0), будет двигаться равномерно со скоростью \mathbf{v} относительно системы (S). Следовательно, если относительно системы (S^0) единственной силой, действующей на электрон, который мы полагаем неподвижным, будет

$$\mathbf{K}^0 = e\mathbf{E}^0,$$

то, поскольку относительно системы (S) согласно (5.75) имеем

$$\begin{aligned} E_x^0 &= \alpha (E_x - vB_y), \\ E_y^0 &= \alpha (E_y + vB_x), \\ E_z^0 &= E_z \end{aligned} \quad (6.18)$$

или [см. (5.76)]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{||}^0 &= (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{||}, \\ \mathbf{E}_{\perp}^0 &= \alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \end{aligned} \quad (6.18')$$

из (6.17) автоматически получается выражение $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ силы Лоренца.

Итак, для того чтобы из силы Лоренца составить 4-вектор, ее следует умножить на α . А именно

$$\int \alpha k dv = e\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{K}; \quad (6.19)$$

соответствующая четвертая компонента будет

$$\int \sigma k_4 dv = je \frac{\alpha}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}). \quad (6.19')$$

Согласно (5.75), имеем также

$$\begin{aligned} B_x^0 &= \alpha \left(B_x + \frac{v}{c^2} E_y \right), \\ B_y^0 &= \alpha \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_x \right), \\ B_z^0 &= B_z; \end{aligned} \quad (6.20)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\parallel}^0 &= \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)_{\parallel}, \\ \mathbf{B}_{\perp}^0 &= \alpha \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)_{\perp}. \end{aligned} \quad (6.20')$$

§ 2. Поле электрона, движущегося равномерно

Относительно системы (S^0), которая движется вместе с электроном, электрон находится в состоянии покоя, и, следовательно, поле его носит электростатический характер:

$$\mathbf{e}^0 = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}, \quad \mathbf{b}^0 = 0, \quad (6.21)$$

где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Рассмотрим систему (S), относительно которой электрон движется равномерно со скоростью \mathbf{v} в направлении оси Oz ; согласно соотношениям (6.1), имеем

$$\begin{aligned} e_x &= \alpha e_x^0, \\ e_y &= \alpha e_y^0, \\ e_z &= e_z^0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из соотношений (6.20) также следует

$$\begin{aligned} b_x &= -\alpha \frac{v}{c^2} e_y^0, \\ b_y &= \alpha \frac{v}{c^2} e_x^0, \quad \text{или } \mathbf{b} = \alpha \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{e}^0, \\ b_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Согласно (5.70), имеем

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ y &= y_0, \\ z &= \frac{1}{\alpha} z_0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Полагая $s(x, y, z) = r_0(x_0, y_0, z_0)$, имеем

$$s^2 = x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2. \quad (6.25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e_x, e_y, e_z &= -\alpha \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x, y, z}{s^3} \right), \\ b_x, b_y, b_z &= -\alpha \frac{\mu_0 e v}{4\pi} \left(\frac{-y, x, 0}{s^3} \right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

или

$$\mathbf{e} = -\alpha \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{s^3}, \quad \mathbf{b} = -\alpha \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{s^3}. \quad (6.26')$$

Таким образом, относительно неподвижной системы (S) движущийся электрон, помимо электрического поля, обладает и магнитным полем, напряженность которого равна

$$|\mathbf{b}| = \alpha \frac{\mu_0 e v}{4\pi} \frac{\sin(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{s^2}, \quad (6.27)$$

где $\sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (x^2 + y^2)^{1/2}/s$. Сравнивая это выражение с законом Био — Савара, замечаем, что соотношение (6.27) отличается только релятивистской поправкой $\alpha = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, которая будет второго порядка относительно $\beta = v/c$. Явление сокращения Лоренца, наблюдаемое у электрона, движущегося равномерно, а также его поле получаются естественным образом из преобразования Лоренца без вычислений, проведенных в гл. I, § 4. Это указывает на преимущества применения специальной теории относительности для изучения свойств электрона.

Отметим, что только благодаря специальной теории относительности ясно выражается тензорное единство электрического и магнитного полей в четырехмерном мире, которые могут быть разделены только относительно частной системы отсчета.

В случае движущегося равномерно электрона поле, связанное с электроном, движется вместе с ним, не «отделяясь» от электрона. Таким образом, можно понять известный факт, что движущийся равномерно электрон не излучает энергии.

§ 3. Интегрирование дифференциального уравнения 4-потенциала

Как мы видели в § 1, поле движущегося электрона может быть вычислено при помощи 4-потенциала, который удовлетворяет уравнению [см. (6.6)]

$$\square \Phi = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (6.28)$$

при условии

$$\nabla\Phi = 0, \quad (6.29)$$

где \square — оператор Даламбера:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad (6.30)$$

а ∇ — четырехмерный оператор «набла», т. е. символический 4-вектор:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \quad (6.31)$$

Заметим, что с формальной точки зрения проблема четырехмерного потенциала, определенного уравнением (6.28), тождественна проблеме трехмерного статического потенциала, заданного уравнением Пуассона. Следовательно, для интегрирования (6.28) можно попытаться (как показал Зоммерфельд [1]) распространить на четырехмерный случай метод, использованный для решения уравнения Пуассона (см. Тамм, стр. 64).

Рассмотрим в четырехмерном пространстве область (\mathcal{V}), ограниченную гиперсферой (Σ) (трехмерная «поверхность»), для которой \mathbf{n} — внешняя нормаль; как и в трехмерном случае, имеем

$$\int_{(\mathcal{V})} \nabla\Phi \, d\Omega = \int_{(\Sigma)} \Phi \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma. \quad (6.32)$$

Формуле Грина соответствует аналогичная четырехмерная формула

$$\int (\Phi \square \Psi - \Psi \square \Phi) \, d\Omega = \int_{\Sigma} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \, d\Sigma, \quad (6.33)$$

которая немедленно получается из соотношений

$$\begin{aligned} \int \nabla (\Phi \nabla \Psi) \, d\Omega &= \int \Phi \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma, \\ \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, d\Omega + \int \Phi \nabla^2 \Psi \, d\Omega &= \int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Пусть x_ν — координаты неподвижной точки наблюдения P , лежащей внутри области (\mathcal{V}), и ξ_ν — координаты переменной точки в области (\mathcal{V}), лежащей на (Σ), причем расстояние между ними равно R :

$$R^2 = \sum_{\nu=1}^4 (\xi_\nu - x_\nu)^2. \quad (6.34)$$

В трехмерном случае существенным при интегрировании уравнения Пуассона было применение формулы Грина, причем использовалось частное решение уравнения Лапласа вида $\psi = 1/r$. Посту-

тая аналогично, легко проверить, что

$$\Psi = \frac{1}{R^2} \quad (6.35)$$

есть решение уравнения

$$\square \Psi = 0. \quad (6.36)$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_v} \left(\frac{1}{R^2} \right) = -2 \frac{\xi_v - x_v}{R^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_v^2} \left(\frac{1}{R^2} \right) = -\frac{2}{R^4} + \frac{8}{R^6} (\xi_v - x_v)^2,$$

$$\square \Psi = \sum_v \frac{\partial^2}{\partial \xi_v^2} \left(\frac{1}{R^2} \right) = -\frac{8}{R^4} + \frac{8R^2}{R^6} = 0$$

во всех точках области (\mathcal{V}), кроме особой точки $R = 0$, которую мы исключаем, окружая ее гиперсферой (Σ_0) радиуса R_0 . отождествляя Φ с одной из компонент 4-потенциала Φ_v , получаем из соотношений (6.33) равенство

$$\int \frac{\square \Phi_v}{R^2} \Omega = d \int_{(\Sigma + \Sigma_0)} \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi_v}{\partial n} - \Phi_v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right] d\Sigma. \quad (6.37)$$

Аналогично интеграл по гиперсфере (Σ_0) может быть записан в более простой форме, если заметить, что нормаль совпадает с радиусом и направлена к центру (находящемуся вне области интегрирования). Тогда

$$\frac{\partial \Phi_v}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_v}{\partial R}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right]_{R=R_0} = \frac{2}{R_0^3}. \quad (6.38)$$

Определим далее площадь гиперсферы (Σ_0); для этого введем полярные координаты

$$\begin{aligned} \xi_1 &= R \cos \theta_1, & \xi_3 &= R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi, \\ \xi_2 &= R \sin \theta_1 \cos \theta_2, & \xi_4 &= R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.39)$$

В этом случае метрические коэффициенты (см., например, [2, стр. 338]), определяемые из выражения для квадрата элемента длины в новых координатах

$$ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2 = \sum_{i=1}^4 h_i^2 d\xi_i^2,$$

будут равны

$$h_i = \left[\sum_{l=1}^4 \left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Получаем

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R \sin \theta_1, \quad h_4 = R \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (6.40)$$

и элемент четырехмерного объема будет равен

$$d\Omega = h_1 h_2 h_3 h_4 dR d\theta_1 d\theta_2 d\varphi = R^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dR d\theta_1 d\theta_2 d\varphi. \quad (6.41)$$

Следовательно, «площадь» гиперсферы будет равна

$$\int_{(\Sigma_0)} d\Sigma = R_0^3 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi = 2\pi^2 R_0^3. \quad (6.42)$$

Итак,

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \int_{(\Sigma_0)} \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi_v}{\partial n} - \Phi_v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right] d\Sigma = -4\pi^2 \Phi_v(x). \quad (6.43)$$

В случае, когда мы предполагаем, что гиперповерхность (Σ) является гиперсферой бесконечно большого радиуса $R \rightarrow \infty$, интеграл по поверхности обращается в нуль, и если источники электричества находятся на конечном расстоянии, то с учетом (6.43) и (6.28) равенство (6.37) можно записать в виде

$$\Phi_v(x) = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int \frac{j_v(\xi)}{R^2} (d\xi) \quad (6.44)$$

где $(d\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$ — элемент четырехмерного объема. Полученное соотношение аналогично решению уравнения Пуассона. Однако в отличие от трехмерного случая, для которого потенциал имеет особую точку ($r = 0$), в четырехмерном случае R^2 обращается в нуль на конической трехмерной гиперповерхности

$$R^2 = r^2 + (\xi_4 - x_4)^2 = 0, \quad (6.45)$$

где r — трехмерное расстояние и $\xi_4 = jct$, $x_4 = jct$.

С другой стороны, в выражении интеграла (6.44) величины j_v заданы только для запаздывающих значений τ , предшествующих моменту наблюдения t ($\tau < t$). Так, если $t = 0$, то $\tau < 0$; следовательно, $\xi_4 = -jc|\tau|$ и интегрирование по ξ_4 будет осуществляться не вдоль вещественной оси $-\infty < \xi_4 < +\infty$, а вдоль пути (γ), получаемого из вещественной оси путем деформации. Путь интегрирования проходит вдоль мнимой оси из $-j\infty$ до точки, близкой к началу координат, и затем обратно к $-j\infty$ (фиг. 29).

Легко показать, что (6.44) удовлетворяет и условиям (6.29), если учесть, что j удовлетворяет условию

$$\nabla j = 0. \quad (6.46)$$

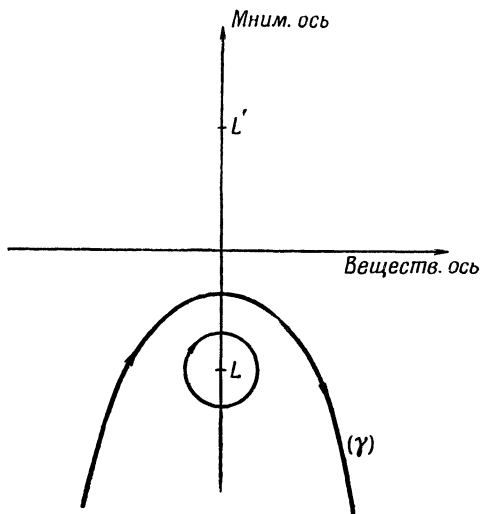
В самом деле, имеем

$$\nabla \Phi = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int j \nabla_0 \left(\frac{1}{R^2} \right) (d\xi) = -\frac{\mu_0}{4\pi^2} \int j \nabla \left(\frac{1}{R^2} \right) (d\xi),$$

что в результате интегрирования по частям дает

$$\nabla \Phi = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int \nabla j \cdot \frac{1}{R^2} (d\xi) = 0.$$

Если известен потенциал, то поле вычисляется при помощи компонент 6-вектора $f_{\mu\nu}$ из соотношения (6.5'). С учетом (6.44)



Ф и г. 29.

это соотношение принимает вид

$$f_{\mu\nu}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int \left[j_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{R^2} \right) - j_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right] (d\xi),$$

или

$$f_{\mu\nu}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \int \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{R})_{\mu\nu}}{R^4} (d\xi), \quad (6.47)$$

где $(\mathbf{j} \times \mathbf{R})_{\mu\nu} = j_\mu R_\nu - j_\nu R_\mu$ — векторное произведение двух 4-векторов, что эквивалентно шестивектору, или антисимметричному тензору.

1. Вычисление запаздывающих потенциалов. Потенциалы Лье-нара — Вихерта. Интегральное представление (6.44) компонент 4-потенциала может быть упрощено, если интегрировать либо по ξ_4 , либо по ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

В первом случае, как показал Герглотц [3], получаем запаздывающие потенциалы (см., например, Тамм, стр. 448). Для интегрирования по ξ_4 замечаем, что в комплексной плоскости, согласно (6.45), знаменатель R^2 обращается в нуль в точках L, L' , заданных соотношением

$$x_4 - \xi_4 = \pm jr, \quad (6.48)$$

которые являются полюсами подынтегрального выражения (6.44). В окрестности точки $L(\xi_4 = -jr + x_4)$ имеем

$$R^2 = (x_4 - \xi_4 - jr)(x_4 - \xi_4 + jr) \approx 2jr(x_4 - \xi_4 - jr).$$

Применяя метод вычетов, интеграл можно вычислить, если выбрать в качестве контура вместо кривой (γ) окружность вокруг точки L и бесконечно удаленную окружность. Будем иметь

$$\int \mathbf{j} \frac{d\xi_4}{R^2} = \frac{\mathbf{j}_L}{2jr} \oint \frac{d\xi_4}{x_4 - \xi_4 - jr} = \frac{\mathbf{j}_L}{2jr} (+2\pi j) = \frac{\pi}{r} \mathbf{j}_L,$$

где \mathbf{j}_L — значение \mathbf{j} в точке L . Мы учли, что окружность вокруг точки L проходится в отрицательном направлении и что бесконечно удаленная точка вклада не дает. Следовательно, (6.44) принимает вид

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_L}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (6.49)$$

Мы получили выражение для запаздывающего потенциала, так как \mathbf{j}_L эквивалентно запаздывающему значению $[\mathbf{j}]$, ибо $\tau = t - r/c$.

Заметим, что если вместо точки L рассматриваем точку $L'(\xi_4 = jr + x_4)$ и соответственно деформируем путь интегрирования таким образом, чтобы он охватывал эту точку, то вместо выражения (6.49) получаем формулу опережающего потенциала.

При вычислении потенциалов поля одного электрона удобно интегрировать (6.44) сначала по ξ_1, ξ_2, ξ_3 . По определению [см. (6.8)], для точечного электрона имеем

$$\int \mathbf{j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = e(\mathbf{v}, jc) = -e\dot{\mathbf{R}}, \quad (6.50)$$

где e — заряд электрона и

$$\dot{\mathbf{R}} = -\left(\frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\xi_2}{dt}, \frac{d\xi_3}{dt}, jc\right) = -(\mathbf{v}, jc), \quad (6.51)$$

так как траектория электрона определена уравнениями

$$\xi_1 = f_1(t), \quad \xi_2 = f_2(t), \quad \xi_3 = f_3(t), \quad \xi_4 = jct, \quad (6.52)$$

а \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный от электрона к точке наблюдения. Следовательно, уравнение (6.44) может быть записано в следующей форме:

$$\Phi = -e \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R^2} d\xi_4. \quad (6.53)$$

Чтобы применить метод вычетов, нужно разложить R^2 в ряд в окрестности точки L ; получаем

$$R^2 = R_L^2 + (\xi_4 - \xi_{4L}) \left(\frac{dR^2}{d\xi_4}\right)_L + \dots, \quad (6.54)$$

где

$$\frac{dR^2}{d\xi_4} = \frac{1}{jc} \frac{d}{dt} (\mathbf{R}\mathbf{R}) = \frac{2}{jc} \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}; \quad (6.55)$$

следовательно,

$$R^2 = R_L^2 + \frac{2}{jc} (\xi_4 - \xi_{4L}) (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L.$$

Учитывая соотношения (6.48) и (6.51), имеем

$$R_L^2 = 0, \quad \frac{2}{jc} (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L = \frac{2j}{c} (\mathbf{v}\mathbf{r} - cr)_L = 2j \left[r \left(\frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{cr} - 1 \right) \right]_L. \quad (6.55')$$

Следовательно, с учетом (6.55) и (6.55') интеграл (6.53) можно записать в виде

$$\Phi = -\frac{e\mu_0}{4\pi^2} \frac{j\dot{\mathbf{R}}_L}{2 \left[r \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{cr} \right) \right]_L} \int_{\xi_4 - \xi_{4L}}^{\xi_4} \frac{d\xi_4}{\xi_4 - \xi_{4L}}, \quad (6.56)$$

что дает

$$\Phi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{\left[r \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{cr} \right) \right]_L} \dot{\mathbf{R}}_L, \quad (6.57)$$

или

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{e\mathbf{v}}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)} \right]_{\tau}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)} \right]_{\tau}. \quad (6.57')$$

Эти выражения известны под названием *потенциалов Льенара — Вихерта* [4, 5]. В выражениях (6.57) и (6.57') значения r и v как значения, связанные с электроном, измерены в определенный момент τ , предшествующий моменту наблюдения на интервал r/c . Эти потенциалы характерны для *точечного* электрона; они вычисляются просто, если известны законы движения и траектория электрона.

Отметим, что потенциалы Льенара — Вихерта могут быть вычислены непосредственно при помощи следующих рассуждений (см. [6]). Рассмотрим 4-потенциал электрона, отнесенный к системе координат, относительно которой электрон находится в состоянии покоя:

$$\Phi_1^0 = \Phi_2^0 = \Phi_3^0 = 0, \quad \Phi_4^0 = \frac{j}{c} V^0 = \frac{j}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e}{r_0}. \quad (6.58)$$

Соответствующая скорость $u_v = d\xi_v/d\tau$ будет задана соотношениями

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0, \quad u_4^0 = jc. \quad (6.59)$$

Заметив, что R — расстояние между электроном и фиксированной точкой наблюдения — удовлетворяет условию

$$R^2 = r^2 - c^2(\tau - t)^2 = 0, \quad (6.60)$$

имеем

$$R_1 = r_x, \quad R_2 = r_y, \quad R_3 = r_z, \quad R_4 = jr. \quad (6.61)$$

Следовательно, с учетом (6.58) и (6.59) можно получить соотношение

$$\Phi_v = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{e u_v}{r_0 c}, \quad (6.62)$$

где e , c и r_0 — инварианты, причем r_0 — расстояние до электрона, вычисленное относительно собственной системы отсчета. Аналогично из (6.59) и (6.61) можно получить общее соотношение

$$r_0 c = - \sum_v R_v u_v. \quad (6.63)$$

Из (6.62) и (6.63) при условии (6.60) немедленно следует потенциал Льенара — Вихерта в форме, данной Минковским,

$$\Phi_v = - \frac{\mu_0 c e u_v}{4\pi \sum_v R_v u_v}. \quad (6.64)$$

Полученное выражение приводится к известному выражению (6.57), так как, если учесть (5.67), мы имеем

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{d\xi_1}{d\tau}, \frac{d\xi_2}{d\tau}, \frac{d\xi_3}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}, \quad (6.65)$$

$$u_4 = jc \frac{dt}{d\tau} = jca.$$

Следовательно,

$$\sum_v R_v u_v = \alpha (\mathbf{r}\mathbf{v} - rc). \quad (6.66)$$

§ 4. Поле ускоренного точечного электрона

Для вычисления этого поля воспользуемся соотношением (6.47). А именно применим к интегралу метод, использованный в § 3, п. 1. Интегрируя по ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 и полагая электрон точечным, получаем, согласно (6.50), следующее равенство:

$$f_{\mu\nu} = - \frac{e\mu_0}{2\pi^2} \int \frac{(\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{R})_{\mu\nu}}{R^4} d\xi_4, \quad (6.67)$$

где интеграл берется вдоль окружности, охватывающей точку комплексной плоскости ξ_4 (см. фиг. 29). Для применения метода вычетов можно разложить в ряд знаменатель с учетом, что мы имеем полюс второго порядка. Можно записать вместо (6.64) ряд

$$R^2 = 2\eta (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L + \eta^2 (\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}})_L + \dots, \quad (6.68)$$

где

$$\eta = \frac{\xi_4 - \xi_4 L}{jc}. \quad (6.69)$$

Следовательно,

$$R^4 = 4\eta^2 (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L^2 \left[1 + \eta \frac{\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}}{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}} + \dots \right]. \quad (6.70)$$

Кроме того,

$$\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})_L + \eta (\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}})_L + \dots, \quad (6.71)$$

поскольку $\dot{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{R}} = 0$.

С учетом соотношений (6.69) — (6.71) интеграл (6.67) принимает вид

$${}^2\mathbf{f} = \frac{ejc\mu_0}{8\pi^2 (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L^2} \int \frac{d\eta}{\eta^2} (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \eta \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}})_L \left(1 - \eta \frac{\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}}{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}} \right)_L.$$

При применении метода вычетов интерес представляет только член, содержащий η^{-1} ; следовательно,

$${}^2\mathbf{f} = \frac{ejc\mu_0}{8\pi^2 (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})_L^2} \int \frac{d\eta}{\eta} \left[\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \frac{\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}}{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}} \right]_L,$$

откуда получаем

$${}^2\mathbf{f} = \frac{ec\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}}{(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})^2} - (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) \frac{\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}}{(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})^3} \right]_L. \quad (6.72)$$

Отметим, что это выражение поля может быть выведено непосредственно без интегрирования из соотношения (6.44) при помощи (6.5'), если учесть (6.33) и (6.40), а также

$$-\frac{\partial R_{\nu}}{\partial \tau} = \frac{d\xi_{\nu}}{d\tau} = u_{\nu},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\sum_{\nu} R_{\nu}^2 \right) = 2 \left[R_{\nu} - \left(\sum_{\nu} R_{\nu} u_{\nu} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x_{\nu}} \right],$$

откуда

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_{\nu}} = \frac{R_{\nu}}{\sum_{\nu} R_{\nu} u_{\nu}}.$$

Кроме того, учитывая $\sum_{\nu} u_{\nu}^2 = -c^2$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\sum_{\nu} R_{\nu} u_{\nu} \right) = u_{\nu} + \frac{c^2 + \sum_{\nu} R_{\nu} \dot{u}_{\nu}}{\sum_{\nu} R_{\nu} u_{\nu}} R_{\nu}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{e\dot{u}_{\mu}R_{\nu}}{(\sum R_{\nu}u_{\nu})^2} + \frac{eu_{\nu}u_{\mu}}{(\sum R_{\nu}u_{\nu})^3} + \frac{e(c^2 + \sum R_{\nu}\dot{u}_{\nu})}{(\sum R_{\nu}u_{\nu})^3}u_{\mu}R_{\nu}.$$

Для вычисления выражения, стоящего в скобках, заметим, что с учетом (6.61) и (6.51) имеем

$$\mathbf{R} = (r, jr), \quad \dot{\mathbf{R}} = -(\mathbf{v}, jc), \quad \ddot{\mathbf{R}} = (-\dot{\mathbf{v}}, 0). \quad (6.73)$$

Выражение поля удобно разделить на две части: поле скорости и поле ускорения.

1°. Поле скорости представляет собой поле электрона, движущегося равномерно. Так как $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, имеем

$${}^2\mathbf{f} = -\frac{ec\mu_0}{4\pi} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \frac{\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}}{(\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}})^3}. \quad (6.74)$$

Поскольку

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}} = v^2 - c^2,$$

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R} = -(\mathbf{v}\mathbf{r} - rc) = rc \left(1 - \frac{v_r}{c}\right), \quad (6.75)$$

$$\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = -\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z & jr \\ v_x & v_y & v_z & jc \end{pmatrix},$$

то с учетом определения (6.1) получаем

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0 e \gamma^3}{4\pi \alpha^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r^2}, \quad (6.76)$$

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \frac{1}{r^3} \left(\mathbf{r} - r \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \frac{1}{r^2} \left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{v}}{c}\right),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v_r}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}_0}{c}} \quad (6.77)$$

и \mathbf{r}_0 — единичный вектор направления \mathbf{r} (от электрона к точке наблюдения P) в момент $t - r/c$, когда электрон находится в точке L (фиг. 30).

Отметим, что в частном случае, когда электрон движется в направлении оси Oz , выражения (6.76) эквивалентны (6.26). Они легко преобразуются друг в друга, если учесть, что отличие между ними

состоит в том, что формула (6.26) относится к моменту наблюдения t , когда электрон находится в точке O , и $LO = vt'$, где $t' = r/c$. Заметим, что

$$r^2 = r'^2 + (\beta r)^2 + 2r'\beta r \cos \theta';$$

следовательно,

$$r = \frac{\beta z'}{1 - \beta^2} + \alpha \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} z'^2} = \alpha s + \frac{\beta}{1 - \beta^2} z',$$

где

$$s = (x'^2 + y'^2 + \alpha^2 z'^2)^{1/2},$$

$$r \frac{v_r}{c} = \beta r \cos \theta = \beta z' + \beta^2 r, \quad r \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = (1 - \beta^2) \alpha s = \frac{r}{\gamma};$$

теперь получим

$$\frac{1}{r^3} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} = \frac{(1 - \beta^2)^{5/2}}{(1 - \beta^2)^3} \frac{1}{s^3} = \alpha \frac{1}{s^3}.$$

2°. Поле ускорения получается, если в выражении (6.72) опустить поле (6.74):

$$2\mathbf{f} = \frac{ec\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}}{(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})^2} - \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \frac{\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}}{(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R})^3} \right]. \quad (6.78)$$

Так как

$$\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = - \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z & jr' \\ \dot{v}_x & \dot{v}_y & \dot{v}_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.79)$$

с учетом (6.75) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= - \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\gamma^2 \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}}{cr^2} + \gamma^3 (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}}{c^2 r^3} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 e \gamma^2}{4\pi cr} \left[\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}_0 + \gamma \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{r}_0 \right) \mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}} \right], \quad (6.80) \\ \mathbf{e} &= - \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left[\gamma^2 \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}}{c^2 r^2} - \gamma^3 \frac{(cr - r\mathbf{v})\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}}{c^3 r^3} \right] = \\ &= \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\gamma^2}{c^2 r} \left[\gamma \left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}} \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что для обоих полей (6.76) и (6.80) имеем соотношение

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}. \quad (6.81)$$

В случае поля ускорения, кроме того, имеем

$$\mathbf{e} = c\mathbf{b} \times \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{e}\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}\mathbf{r}_0 = 0, \quad |\mathbf{b}| = \frac{1}{c} |\dot{\mathbf{e}}|, \quad (6.82)$$

т. е. выполняются условия, характерные для поперечного поля.

Отметим, что \mathbf{r}_0 указывает действительное положение электрона в момент $t - r/c$.

1. Когда скорость электрона значительно меньше скорости света ($v \ll c$), электромагнитное поле ускоренного электрона на больших расстояниях («волновая зона») может быть выражено приближенно соотношениями

$$\mathbf{e} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{rc^2} \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{v}}), \quad (6.83)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}_0,$$

которые аналогичны полю излучения (из «волновой зоны») осциллирующего диполя (см. Тамм, стр. 472).

2. При релятивистских скоростях, предполагая траекторию электрона прямолинейной и, следовательно, скорость \mathbf{v} и ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ электрона параллельными (продольное ускорение), имеем

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}});$$

следовательно,

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{r}\mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}). \quad (6.84)$$

Если учесть соотношение (6.77) и привести в выражении (6.80) скобки к общему знаменателю, то в силу равенства (6.84) некоторые члены сократятся. Тогда для «волновой зоны» получаем более простые выражения

$$\mathbf{b} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \gamma^3 \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}}{cr^2}, \quad (6.85)$$

$$\mathbf{e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \gamma^3 \frac{-\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r}(\mathbf{r}_0\mathbf{v})}{c^2 r^2}.$$

Выбирая систему сферических координат r, θ, φ так, чтобы направление \mathbf{v} совпадало с осью $\theta = 0$, получаем

$$v_r = v \cos \theta, \quad v_\theta = -v \sin \theta, \quad v_\varphi = 0,$$

$$\dot{v}_r = \dot{v} \cos \theta, \quad \dot{v}_\theta = -\dot{v} \sin \theta, \quad \dot{v}_\varphi = 0;$$

следовательно,

$$|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}| = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})_\varphi, \quad b = b_\varphi, \quad e = e_\theta.$$

Тогда (6.85) можно записать в виде

$$b_{\Phi} = \frac{\mu_0 \dot{e}v}{4\pi cr} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3}, \quad e_{\theta} = \frac{\mu_0 \dot{e}v}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3}. \quad (6.86)$$

Эти выражения отличаются от выражения поля излучения осциллирующего диполя релятивистским множителем $(1 - \beta \cos \theta)^{-3}$.

Так как значения множителя $\rho(t - r/c)$ и соответственно множителя $\dot{e}v$ в (6.85) отнесены к точке L , то они являются запаздывающими значениями (см. Тамм, стр. 472). Выражение вектора Умова — Пойнтинга имеет вид

$$|\mathbf{Y}| = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}. \quad (6.87)$$

Итак, максимальное излучение ускоренного электрона в отличие от случая осциллирующего диполя не происходит в направлении $\theta = \pi/2$ и зависит от скорости электрона (от β). Выражение (6.87) при малых β достигает максимума в направлении θ , заданном соотношениями

$$\cos \theta = 3\beta \quad \theta = \frac{\pi}{2} - 3\beta,$$

а для $\beta \approx 1$ — в направлении θ :

$$\cos \theta = 1 - \frac{1 - \beta^2}{10}, \quad \theta = \left(\frac{1 - \beta^2}{5} \right)^{1/2}.$$

Полученные выводы позволяют объяснить результаты опытов Куленкампа, который изучил направление распространения рентгеновских лучей, получаемых при торможении электронов в чрезвычайно тонких антикатадах. Преимуществом таких тонких антикатодов является то, что в отличие от массивных образцов, в которых торможение электронов происходит на «зигзагообразных» участках пути, в этом случае электроны не успевают отклоняться от своего первоначального направления. Максимум интенсивности проходящих рентгеновских лучей тем ближе к нормали к антикатоду, чем жестче катодные лучи, т. е. чем больше скорости электронов.

3. При больших расстояниях в волновой зоне, согласно (6.80), имеем

$$4\pi \epsilon_0 \mathbf{e} = \frac{e}{c^2 r} \gamma^3 \mathbf{r}_0 \times \left[\left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right],$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{e},$$

где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ указывает направление излучения, и все значения величин, входящих в правую часть, должны быть измерены в запаздывающий момент $t - r/c$.

Интенсивность излучения в телесный угол $d\omega$ равна

$$d\mathcal{Y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{e}|^2 r^2 d\omega;$$

следовательно,

$$d\mathcal{Y} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3} \left[\frac{2}{c} \gamma^5 (\mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}}) (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) + \gamma^4 \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{\gamma^6}{\alpha^2} (\mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}})^2 \right] d\omega.$$

Если мы хотим определить угловое распределение полного излучения на протяжении всего движения, нужно проинтегрировать по t . Для этого заметим, что выражение, которое нужно интегрировать, является функцией от t ; а именно

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \frac{1}{\gamma} dt'.$$

Следовательно, полное излучение в элементарный телесный угол $d\omega$ равно

$$dW_r = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3} d\omega \int \left[\frac{2}{c} \gamma^4 (\mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}}) (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) + \gamma^3 \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{\gamma^5}{\alpha^2} (\mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{v}})^2 \right] dt'.$$

§ 5. Излучение системы точечных зарядов¹⁾

В качестве примера использования выражений (6.83) рассмотрим излучение света системой точечных электронов e_k , которые мы предполагаем расположенными в окрестности некоторого центра O . Пусть \mathbf{R}_0 — расстояние от точки O до точки наблюдения P , в которой вычисляется поле излучения, и \mathbf{R}_k — расстояния от электронов e_k до этой точки. Следовательно,

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_k \quad (6.88)$$

будет выражать смещение электрона e_k относительно центра O .

Предположим, что смещения \mathbf{r}_k малы по сравнению с \mathbf{R}_0 и что скорость электронов мала по сравнению со скоростью света:

$$|\mathbf{r}_k| \ll R_0, \quad v_k \ll c. \quad (6.89)$$

Вместо запаздывающих времен электронов ($t'_k = t - R_k/c$) введем запаздывающее время центра инерции системы зарядов

$$T = t - \frac{R_0}{c}, \quad (6.90)$$

выразив входящие в (6.83) величины как функции T , так что имеем

$$\dot{\mathbf{v}}_k = \ddot{\mathbf{r}}_k = -\frac{\partial^2 \mathbf{R}_k}{\partial T^2}. \quad (6.91)$$

¹⁾ См. общий метод, предложенный Цицейкой [7].

Таким образом, если ввести вектор \mathbf{Z} дипольного момента системы

$$\mathbf{Z} = \sum_k e_k \mathbf{r}_k (T) \quad (6.92)$$

и обозначить через \mathbf{r}_0 единичный вектор направления \mathbf{R}_0 , ориентированный от O к P , можно записать

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{e}(t) = \frac{1}{R_0 c^2} \left[\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{Z}}) \right], \quad (6.93)$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{b}(t) = \frac{1}{R_0 c} \left[\mathbf{r}_0 \times \ddot{\mathbf{Z}} \right].$$

Значения величин, стоящих в квадратных скобках, рассматриваются при запаздывающем времени $T = t - R_0/c$ центра инерции системы.

Следовательно, в первом приближении излучение некоторой системы электронов может быть представлено в волновой зоне дипольным излучением.

1. Лучшее приближение получим, если учтем эффект запаздывания, связанного с тем, что времена t'_k не одинаковы для разных зарядов. Тогда вместо (6.92) имеем

$$\mathbf{Z} = \sum_k e_k \mathbf{r}_k (t'_k). \quad (6.92')$$

Разлагая в ряд функцию $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$ по степеням r и учитывая формулу

$$f(\mathbf{r}) \approx f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{r},$$

получаем

$$R = R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0. \quad (6.94)$$

Следовательно,

$$t' = t - \frac{R}{c} = t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{c} = T + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{c}. \quad (6.95)$$

Очевидно, времена t'_k мало отличаются от T , поэтому можно осуществить разложение в ряд:

$$\mathbf{r}_k(t'_k) = \mathbf{r}_k(T) + \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_0}{c}. \quad (6.96)$$

Таким образом, (6.92') можно записать в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2, \quad (6.97)$$

где

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_k e_k \mathbf{r}_k(T) = \mathbf{p}^{(1)} \quad (6.98)$$

и

$$\mathbf{Z}_2 = \sum_k e_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_0}{c}. \quad (6.99)$$

Вектор \mathbf{Z}_1 тождествен (6.92) и представляет собой дипольный момент системы зарядов. Смысл второго члена правой части уравнения (6.97) выявляется после незначительных преобразований. А именно, учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{r}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{r}_0) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_0, \end{aligned}$$

можно записать

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial T} \sum_k e_k \mathbf{r}_k (\mathbf{r}_k \mathbf{r}_0) + \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \mathbf{r}_0,$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_k e_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$$

есть магнитный момент системы [см. (1.113)].

В силу соотношений (6.93) к вектору \mathbf{Z}_2 можно добавить произвольный вектор, пропорциональный единичному вектору $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0/R_0$, и при этом поля \mathbf{e} и \mathbf{b} не изменятся. Учитывая выражение квадрупольного момента¹⁾, замечаем, что если к вектору \mathbf{Z}

¹⁾ Квадрупольный момент системы точечных зарядов e_k , расположенных на расстояниях \mathbf{r}_k от центра O , определяется из разложения потенциала $V(R)$ в некоторой точке P в ряд по степеням R_0^{-1} — обратного расстояния OP :

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\sum_k e_k}{R_0} - \sum_{\alpha} p_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left(\frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} \left(\frac{1}{R_0} \right) \dots \right\}.$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \sum_k e_k \mathbf{r}_k$$

есть дипольный момент системы, а тензор

$$p_{\alpha\beta}^{(2)} = \sum_k e_k (3x_{\alpha}^{(k)} x_{\beta}^{(k)} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta})$$

есть квадрупольный момент.

прибавить вектор $-(1/6c) \mathbf{r}_0 (\partial/\partial T) \sum_{\mathbf{k}} e_k r_k^2$, получаем

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{6c} \frac{\partial}{\partial T} \sum_k e_k [3\mathbf{r}_k (\mathbf{r}_k \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0 r_k^2] + \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \mathbf{r}_0,$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой произведение единичного вектора \mathbf{r}_0 на тензор квадрупольного момента $p_{\alpha\beta}^{(2)}$, т. е. не что иное, как вектор $\mathbf{p}^{(2)}$. Следовательно,

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{6c} \dot{\mathbf{p}}^{(2)} + \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \mathbf{r}_0. \quad (6.99')$$

Заменяя в соотношениях (6.93) \mathbf{Z} его значениями из (6.98) и (6.99'), получаем соответствующее поле излучения

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{b} = \frac{1}{cR_0} \left[\dot{\mathbf{p}}^{(1)} \times \mathbf{r}_0 + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{p}}^{(2)} \times \mathbf{r}_0 + \frac{1}{c} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0 \right], \quad (6.100)$$

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{e} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[(\dot{\mathbf{p}}^{(1)} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0 + \frac{1}{6c} (\ddot{\mathbf{p}}^{(2)} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{r}_0 \times \ddot{\mathbf{m}} \right].$$

2. В этом выражении основной эффект вызван первым членом, который содержит дипольный момент. Отметим, что выражение поля излучения системы точечных зарядов можно вывести и исходя непосредственно (см. [8]) из выражения запаздывающего потенциала (6.49). А именно с учетом соотношения (6.95) для больших расстояний $R_0 \gg r$ можем записать

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_0} \int (\varrho)_{T-r_0/c} dv, \quad (6.101)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R_0} \int (\varrho\mathbf{v})_{T-r_0/c} dv.$$

Так как на больших расстояниях от системы зарядов можно считать волны плоскими, то, согласно (6.82),

$$\mathbf{e} = c(\mathbf{b} \times \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.102)$$

Выражение поля легко вычисляется, если заметить, что в первом приближении

$$\mathbf{A} = \frac{1}{R_0} \mathbf{f}(T),$$

где $T = t - R_0/c$. Отбрасывая члены с R_0^{-2} по сравнению с членом, пропорциональным R_0^{-1} , имеем

$$\mathbf{b} = \nabla \times \frac{1}{R_0} \mathbf{f}(T) \approx \frac{1}{R_0} \nabla \times \mathbf{f}(T)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{f}(T) = \nabla T \times \frac{d\mathbf{f}}{dT} = -\frac{1}{c} \mathbf{r}_0 \times \frac{d\mathbf{f}}{dT},$$

так как

$$\nabla T = -\frac{1}{c} \nabla R_0 = -\frac{\mathbf{r}_0}{c}.$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{e} = (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0. \quad (6.103)$$

В рассматриваемом случае выражение (6.101) векторного потенциала может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R_0} \sum_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}^{(1)}}{4\pi R_0}, \quad (6.104)$$

где дипольный момент $\mathbf{p}^{(1)}$ рассматривается в запаздывающее время

$$t' = T - \frac{r\mathbf{r}_0}{c} = t - \frac{R_0}{c} - \frac{r\mathbf{r}_0}{c}.$$

Беря в первом приближении запаздывающее время T центра инерции системы зарядов, получаем поле (6.93), обусловленное дипольным излучением системы. Справедливость и смысл этого приближения вытекают из следующего простого рассуждения: если через a обозначить порядок величины линейного размера рассматриваемой системы, то время $r\mathbf{r}_0/c$, которым мы пренебрегаем, будет порядка a/c . Чтобы распределение зарядов не менялось заметно на протяжении этого интервала времени, нужно, чтобы $a/c \ll \tau$ или $a \ll c\tau = \lambda$ (τ характеризует порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов меняется существенным образом и, очевидно, совпадает с периодом излученной волны). Следовательно, размеры системы должны быть малыми по сравнению с длиной излученных волн. С другой стороны, так как $\tau \sim a/v$ и $\lambda \sim ca/v$, из условия $a \ll \lambda$ получаем, что $v \ll c$; следовательно, скорость частиц должна быть малой по сравнению со скоростью распространения света.

3. В следующем приближении, учитывая, что запаздывающие времена частиц t'_k не тождественны запаздывающему времени T центра инерции системы зарядов O , и используя выражение (6.96), получаем для векторного потенциала \mathbf{A} выражение, соответствующее вектору \mathbf{Z} , определенному соотношениями (6.97) — (6.99'). Итак, мы получили квадрупольный эффект в выражении излучения, определенного полем (6.100).

4. Так как вектор Умова — Пойнтинга, соответствующий плоской волне, равен

$$\mathbf{Y} = \varepsilon_0 c^3 |\mathbf{b}|^2 \mathbf{r}_0, \quad (6.105)$$

то интенсивность излучения системы зарядов в элементе телесного угла $d\omega$, т. е. энергия, излученная за единицу времени через элемент площади $dS = R_0^2 d\omega$ шара радиуса R_0 , будет

$$d\mathcal{Y} = \varepsilon_0 c^3 |\mathbf{b}|^2 R_0^2 d\omega. \quad (6.106)$$

В случае дипольного излучения, учитывая соотношения (6.93), имеем

$$d\mathcal{Y} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\mathbf{r}_0 \times \ddot{\mathbf{p}}^{(1)}]^2 d\omega. \quad (6.107)$$

Вводя сферические координаты и замечая, что угол между \mathbf{r}_0 и $\mathbf{p}^{(1)}$ равен θ , а $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, получаем

$$d\mathcal{Y} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} (\ddot{\mathbf{p}}^{(1)})^2 \sin^3\theta d\theta d\varphi. \quad (6.108)$$

Следовательно, полная интенсивность излучения за единицу времени равна

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^\pi (\ddot{\mathbf{p}}^{(1)})^2 \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{(\ddot{\mathbf{p}}^{(1)})^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}. \quad (6.109)$$

Если учитывать соотношение (6.100), которое включает и эффект квадрупольного излучения, то для полной интенсивности излучения получаем выражение

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{p}}^{(1)})^2 + \frac{1}{180c^5} (\ddot{\mathbf{p}}^{(2)})^2 + \frac{1}{3c^3} \dot{\mathbf{m}}^2 \right] \quad (6.110)$$

При вычислении среднего значения $d\mathcal{Y}$ по всем направлениям мы учли, что в выражении квадрата магнитного поля все произведения разных членов из (6.100) исчезают и остаются только их квадраты.

§ 6. Эффект Черенкова

Согласно теории относительности скорость материальных частиц не может превосходить скорости света в пустом пространстве ($v < c$). С другой стороны, фазовая скорость света в среде с показателем преломления n равна $(c/n) < c$. Следовательно, скорость движения электрона в среде v может превосходить фазовую скорость u , т. е. возможен случай

$$u < v < c. \quad (6.111)$$

В этом случае «сверхсветовой» электрон будет опережать во время движения свое поле, которое «оторвется» от электрона, иными словами, электрон будет излучать. Это излучение электрона, равно-

После появления работ Тамма и Франка стала ясной связь между вычислениями Зоммерфельда и действительностью, причем полученные формулы становятся справедливыми, если считать c скоростью света в диэлектрической среде. Ниже мы будем следовать методу Зоммерфельда, так как он органически связан с методом, использованным нами в § 3 этой главы при интегрировании волновых уравнений.

Рассмотрим электрон, движущийся с постоянной скоростью v вдоль оси Oz в диэлектрической среде с показателем преломления $n = \kappa_e^{1/2} > 1$. Предполагаем, что его скорость удовлетворяет условию (6.88).

Пусть O — положение электрона в момент $t=0$, которое мы выбираем в качестве начала системы координат (фиг. 31). Вычислим поле электрона в произвольной точке P (в момент $t=0$) с координатами

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= -r \cos \theta, \\ x_4 &= jct = 0. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Уравнение 4-потенциала имеет вид

$$\square \Phi = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (6.113)$$

где, однако, в отличие от (6.28) следует заменить скорость света c фазовой скоростью света в рассматриваемой диэлектрической среде $u = c/n$; итак,

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}, \quad (6.114)$$

поскольку

$$n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (6.114')$$

Вместо соотношений (5.5) и (6.3) будем иметь

$$\Phi = \left(\mathbf{A}, \frac{j}{u} V \right), \quad \mathbf{J} = (qv, ju_0). \quad (6.115)$$

Поступая так же, как и в § 3, для интегрирования уравнения (6.113) выберем частное решение уравнения

$$\square \psi = 0 \quad (6.116)$$

вида

$$\psi = \frac{1}{R^2},$$

где

$$R^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 + \frac{1}{n^2} (\xi_4 - x_4)^2. \quad (6.117)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (6.116) всюду, за исключением точки Q с координатами $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

При помощи формулы Грина (6.33) получаем результат, аналогичный (6.44) с той лишь разницей, что $\xi_4 = jct$ и $x_4 = jct$ умножаются на $1/n$, т. е.

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int \mathbf{J} \frac{(d\xi)}{nR^2}. \quad (6.118)$$

Предполагая электрон точечным, после интегрирования по ξ_1, ξ_2, ξ_3 получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 &= \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{ev}{n} \int \frac{d\xi}{R^2}, \\ \Phi_4 &= \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{j eu}{n} \int \frac{d\xi_4}{R^2}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Для интегрирования по ξ_4 поступим, как и в § 3, заметив, что, поскольку положение электрона задано только при $\tau < 0$, интеграл будет браться вдоль контура (γ), который обходит отрицательную часть мнимой оси (см. фиг. 29). Интегрирование приведет нас к результату, отличному от нуля, только если на этой полуоси существуют точки, в которых знаменатель R^2 обращается в нуль, т. е. полюсы. Выбирая в качестве точки Q точку, в которой находился электрон в предшествующий момент $\tau < 0$, имеем

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = v\tau < 0, \quad \xi_4 = jct. \quad (6.120)$$

С учетом (6.117), (6.112) и (6.120) получаем условие равенства R^2 нулю:

$$R^2 = (v^2 - u^2) \tau^2 + 2v\tau r \cos \theta + r^2 = 0; \quad (6.121)$$

здесь $x_4 = 0$, так как поле вычисляется в точке P в момент $t = 0$.

Решения этого уравнения имеют вид

$$\tau_{\pm} = -\frac{vr}{v^2 - u^2} \left[\cos \theta \pm \left(\frac{u^2}{v^2} - \sin^2 \theta \right)^{1/2} \right]. \quad (6.122)$$

Следовательно, если

$$\theta > \theta_M,$$

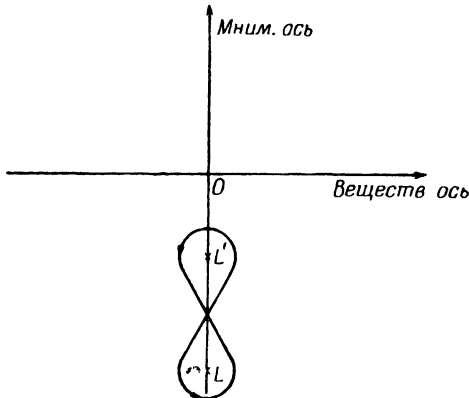
где

$$\sin \theta_M = \frac{u}{v} = \frac{1}{\beta n}, \quad (6.123)$$

уравнение (6.121) не имеет вещественных корней и, так как интеграл равен нулю, потенциалы будут равны 0. Таким образом,

в пространстве, лежащем вне кругового конуса с углом раскрытия θ_M , поле равно 0.

Напротив, если $\theta < \theta_M$, уравнение допускает два отрицательных вещественных корня (так как $v > u$); следовательно, обе точки



Ф и г. 32.

$R=0$ лежат на отрицательной части мнимой оси ξ_4 (в отличие от случая, рассмотренного в § 3, когда корни $R=0$ имели разные знаки). Тогда можно записать

$$R^2 = (v^2 - u^2) (\tau - \tau_+) (\tau - \tau_-).$$

Так как при интегрировании следует обходить полюсы в противоположных направлениях, выберем лемнискатообразный контур, изображенный на фиг. 32. Применяя метод вычетов, получаем для полюса $\tau = \tau_+$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi_4}{R^2} &= \frac{jc}{(v^2 - u^2) (\tau_+ - \tau_-)} \int \frac{d\tau}{\tau - \tau_+} = \frac{-2\pi c}{(v^2 - u^2) (\tau_+ - \tau_-)} = \\ &= \frac{\pi c}{vr} \left(\frac{u^2}{v^2} - \sin^2 \theta \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Для полюса $\tau = \tau_-$ из-за противоположного направления обхода получаем тот же результат. Следовательно, выражение потенциала в точке P имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{euv}{2\pi} \mu_0 \frac{1}{vr} \left(\frac{u^2}{v^2} - \sin^2 \theta \right)^{-1/2} = \frac{euv\mu_0}{2\pi} [(u^2 - v^2) (x_1^2 + x_2^2) + u^2 x_3^2]^{-1/2}, \\ \Phi_4 &= \frac{jeu^2}{2\pi} \mu_0 \frac{1}{vr} \left(\frac{u^2}{v^2} - \sin^2 \theta \right)^{-1/2} = \frac{jeu^2\mu_0}{2\pi} [(u^2 - v^2) (x_1^2 + x_2^2) + u^2 x_3^2]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{6.124}$$

или

$$\Phi_3 = \frac{ev\mu_0}{2\pi} [z^2 - \gamma^2(x^2 + y^2)]^{-1/2}, \quad (6.124')$$

$$\Phi_4 = \frac{jec\mu_0}{2\pi} [z^2 - \gamma^2(x^2 + y^2)]^{-1/2},$$

где

$$\gamma^2 = n^2\beta^2 - 1, \quad -z > \gamma(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (6.125)$$

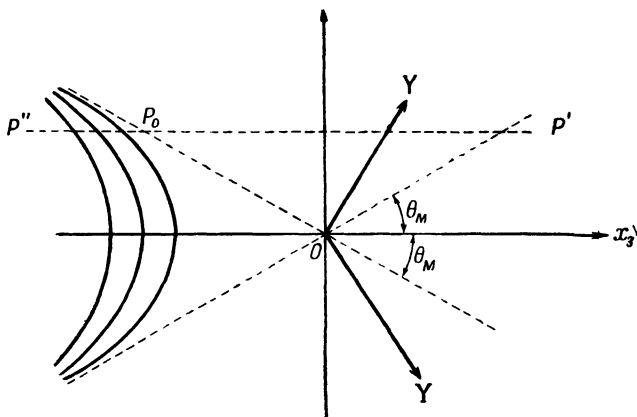
Эквипотенциальные поверхности имеют вид гиперболоидов вращения

$$z^2 - \gamma^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad (6.126)$$

которые лежат внутри конуса

$$-z = \gamma(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (6.127)$$

Потенциалы, а следовательно, и поле внутри этого конуса имеют конечное и отличное от нуля значение, а на поверхности конуса обращаются в бесконечность.



Ф и г. 33.

До сих пор мы вычисляли потенциалы в момент $t=0$, что привело нас к мгновенной картине поля, порожденного электроном. Чтобы учесть движение электрона, достаточно сделать подстановку

$$z \rightarrow z - vt,$$

полагая, что точка O движется вдоль оси Oz или что точка наблюдения P совершает фиктивное движение в обратном направлении, от P' к P'' (фиг. 33). Итак, в точке P' поле равно нулю, в точке P_0 поле достигает максимума и затем убывает по мере смещения в направлении P'' .

Из (6.124) находим

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 e v}{2\pi} [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-1/2}, \\ V &= \frac{\mu_0 e u^2}{2\pi} [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.128)$$

Для вычисления поля воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial}{\partial t} A_z = -\frac{v^2}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} V = -n^2 \beta^2 \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (6.129)$$

Для электрического поля, определенного выражением

$$\mathbf{e} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla V,$$

получаем

$$\begin{aligned} e_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mu_0 e u^2}{2\pi} \gamma^2 x [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}, \\ e_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mu_0 e u^2}{2\pi} \gamma^2 y [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}, \\ e_z &= (n^2 \beta^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma^2 \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\mu_0 e u^2}{2\pi} \gamma^2 (z - vt) [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}, \end{aligned} \quad (6.130)$$

следовательно, для $t = 0$ можно записать

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e\gamma^2}{n^2} \mathbf{r} [r^2 - \beta^2 n^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}. \quad (6.130')$$

Электрическое поле совпадает по направлению с вектором $\mathbf{r}(x, y, z)$, имеющим составляющие $(x, y, z - vt)$, который соединяет точку O , где находится электрон, с точкой наблюдения P .

Вычисляя магнитное поле с помощью соотношения $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$, получаем

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 e v}{2\pi} \gamma^2 y [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}, \\ b_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 e v}{2\pi} \gamma^2 x [(z - vt)^2 - \gamma^2 (x^2 + y^2)]^{-3/2}, \end{aligned} \quad (6.131)$$

следовательно, можно записать

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c} \beta n^2 \mathbf{v}^0 \times \mathbf{e}, \quad (6.131')$$

где \mathbf{v}^0 — единичный вектор скорости электрона. Силовые линии магнитного поля представляют собой окружности, проведенные вокруг траектории электрона, а вектор \mathbf{b} направлен по касательной к круговому сечению конуса (6.127) в точке P_0 .

Направление излучения определено вектором Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e} \times \mathbf{b}.$$

Из выражений (6.130) и (6.131) видно, что вектор \mathbf{Y} нормален к поверхности конуса (6.127), угол раскрытия которого определяется формулой (6.123). Излучаемый свет поляризован, так как электрический вектор лежит в плоскости, определенной направлением движения электрона.

Количественное выражение излучения Черенкова наиболее удобно получить путем разложения поля электрона в интегралы Фурье. С этой целью мы будем пользоваться функцией Дирака, при помощи которой плотность тока точечного электрона может быть записана в виде

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}, \quad \rho = e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt). \quad (6.132)$$

Разлагая в интеграл Фурье, имеем

$$\mathbf{j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega,$$

откуда следует

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt = \frac{ev}{2\pi} \delta(x)\delta(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z-vt) e^{i\omega t} dt;$$

т. е. фурье-образ плотности тока имеет вид

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{ev}{2\pi} \delta(x)\delta(y) e^{j(\omega/v)z} \quad (6.133)$$

и является вектором, направленным по оси Oz , так же как и \mathbf{v} .

Разлагая в интеграл Фурье векторный потенциал, получаем

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}\left(\frac{\mathbf{r}', t - \frac{nr}{c}}{r}\right) dv',$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'$. Заменяв \mathbf{j} его разложением в интеграл Фурье, получаем

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathbf{j}_{\omega'}(\mathbf{r}')}{r} e^{j(\omega'nr/c)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{j(\omega-\omega')t}.$$

Интегрирование по t и по ω' легко произвести, если заметить, что последний интеграл равен $2\pi \delta(\omega - \omega')$. Получаем

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')}{r} e^{j(\omega nr/c)} dv'.$$

На больших расстояниях от электрона, где вектор \mathbf{r}' намного меньше r_0 , можно положить

$$r = r_0 - \frac{r_0 \mathbf{r}'}{r_0}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{r_0} \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dv'$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{\omega n}{c} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}.$$

Итак,

$$\mathbf{b}_\omega = \nabla_{r_0} \times \mathbf{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{r_0} \right) \times \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dv',$$

или, пренебрегая членами порядка $1/r_0^2$, получаем окончательно

$$\mathbf{b}_\omega = -j \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{r_0} \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dv'. \quad (6.134)$$

Обозначая угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} через θ и подставляя (6.133) в (6.134), можно записать

$$\mathbf{b}_\omega = -j \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{r_0} \frac{ek \sin \theta}{2\pi} \int e^{j \left(\frac{\omega}{v} z' - kz' \cos \theta \right)} dz'.$$

Так как в волновой зоне аналогично (1.82)

$$|\mathbf{e}| = \frac{c}{n} |\mathbf{b}|,$$

то отсюда следует, что среднее значение вектора Умова—Пойнтинга равно

$$\mathbf{Y} = \frac{c}{2n\mu_0} |\mathbf{b}|^2,$$

поскольку \mathbf{e} и \mathbf{b} взаимно-перпендикулярны. Следовательно, излученная в интервале частот $d\omega$ энергия будет равна

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{4\pi c}{n\mu_0} \int |\mathbf{b}_\omega|^2 r_0^2 d\Omega d\omega = \\ &= \frac{e^2 n \omega^2 \mu_0}{16\pi^3 c} \int \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \left(\frac{\omega}{v} z' - kz' \cos \theta \right)} dz' \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega d\omega. \end{aligned}$$

В полученное выражение входит интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[j\omega z' \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos \theta \right) \right] dz' = \delta \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos \theta \right).$$

Поэтому для направления $\cos \theta = c/nv$ получим бесконечность.

Если же рассмотреть излучение электрона на конечном отрезке $2l$ траектории, то вместо этого интеграла можно записать интеграл

$$\int_{-l}^{+l} \exp \left[j\omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \frac{z'}{v} \right] dz' = \frac{2 \sin \left[\omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \frac{l}{v} \right]}{\frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right)}.$$

Таким образом, в выражение δW войдет интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \sin^2 \theta \frac{\sin^2 \left[\omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \frac{l}{v} \right]}{\frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right)^2} d(\cos \theta).$$

Так как дробь в подынтегральном выражении имеет четко выраженный максимум (типа δ -функции) при $\cos \theta = c/nv$, то для медленно меняющейся функции $\sin^2 \theta$ удобно использовать это значение, записав

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \left[\omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \frac{l}{v} \right]}{\frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right)^2} d(\cos \theta) &\approx \\ &\approx \frac{l^2 c}{\omega l n} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi l c}{\omega n} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, потери энергии на единицу длины траектории равны

$$\frac{\delta W}{\delta l} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon l^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \omega d\omega.$$

Это выражение было впервые получено Гаммом и Франком. Очевидно, излучение направлено перпендикулярно конической поверхности, образующей с направлением движения электрона угол θ_M , который определен соотношением (6.123). Если электрон внезапно остановить, то коническая волна будет свободно распространяться дальше сквозь диэлектрическую среду.

Изложенная теория, построенная на феноменологической основе, хотя и выявляет характерные особенности излучения «сверхсветового» электрона, обнаруженного Черенковым, но не достаточно строга. Самое сильное возражение, которое можно привести против нее, состоит в том, что при вычислении полной излученной энергии получаем бесконечную величину, что резко противоречит экспериментальным результатам. Это связано как с точечностью электрона, так главным образом и с тем, что показатель преломле-

ния среды n предполагался постоянным, что не соответствует действительности. Из опыта следует, что спектр излучения обрывается на определенной частоте, а именно при той, выше которой n начинает быстро убывать. Следовательно, проведенные выше вычисления следует дополнить, учитывая дисперсию диэлектрической среды. Для этого нужно разложить поле излучения в интеграл Фурье и каждой составляющей придать соответствующий показатель преломления $n(\omega)$. При этом можно показать, что эффект Черенкова обуславливают в основном компоненты Фурье из видимой части спектра, и в создании его почти не участвуют компоненты, соответствующие ультрафиолетовому спектру¹⁾. Следовательно, можно сказать, что эффект Черенкова делает электрон видимым, хотя такая характеристика соответствует скорее явлению излучения электронов, ускоренных в бетатронах и синхротронах (последнее известно под названием «светящегося» электрона [17]). Это очень слабое видимое излучение Черенкова можно наблюдать, пропуская через жидкости или твердые тела с большим показателем преломления (например, циклогексан, для которого $n=1,4367$, или тонкие коллоидные слои) даже электроны, возникающие за счет комптона и фотоэффекта от γ -излучения радиоактивных препаратов. На протяжении почти тридцати лет, прошедших после открытия и объяснения эффекта Черенкова, это явление было предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, и стало широко применяться в физике²⁾.

§ 7. Максвелловские натяжения и тензор энергии-импульса микроскопического поля

По аналогии с трехмерным случаем (см. гл. I, § 3) четырехмерное выражение плотности лоренцевой силы (6.11) может быть дано в виде четырехмерной дивергенции некоторого четырехмерного тензора второго порядка $t_{\nu\mu}$, а именно

$$k_{\nu} = j_{\mu} f_{\nu\mu} = \frac{\partial t_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}}. \quad (6.135)$$

Для доказательства этого тождества воспользуемся первым уравнением Максвелла — Лоренца (6.4). Так, подставляя j_{μ} , получаем

$$k_{\nu} = f_{\nu\mu} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\lambda}}. \quad (6.136)$$

¹⁾ Для справок см. [18].

²⁾ Интересующимся этим вопросом рекомендуем прочитать обзор Б. М. Болотовского [Успехи физич. наук, 62, вып. 3, 201 (1957); 75, вып. 2, 295 (1961)] и книгу Дж. Д ж е л л и, Черенковское излучение, ИЛ, 1960.— Прим. ред.

Это выражение может быть записано следующим образом:

$$k_\nu = \frac{\partial (f_{\nu\mu} g_{\mu\lambda})}{\partial x_\lambda} - g_{\mu\lambda} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}. \quad (6.136')$$

Меняя порядок суммирования и принимая во внимание, что оба тензора антисимметричны, получаем

$$k_\nu = - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (g_{\lambda\mu} f_{\nu\mu}) + g_{\lambda\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}. \quad (6.137)$$

Учитывая равенство

$$g_{\lambda\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} = g_{\lambda\mu} \frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu},$$

находим, что второй член равенства (6.137) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} \right) = \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu},$$

где мы учли также второе уравнение Максвелла — Лоренца (6.5). Следовательно, (6.137) можно записать в виде

$$k_\nu = - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (g_{\lambda\mu} f_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}. \quad (6.138)$$

Пользуясь инвариантом

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} g_{\sigma\tau} f_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_0} |\mathbf{b}|^2 - \varepsilon_0 |\mathbf{e}|^2 \right], \quad (6.139)$$

можно легко проверить, что

$$\delta_{\nu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x_\lambda},$$

где $\delta_{\nu\lambda} = 0$, если $\nu \neq \lambda$, и $\delta_{\nu\lambda} = 1$, если $\nu = \lambda$. Следовательно,

$$k_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (g_{\lambda\mu} f_{\mu\nu} + \delta_{\nu\lambda} \mathcal{L}_0). \quad (6.140)$$

Сравнение (6.140) с (6.135) дает

$$t_{\nu\lambda} = g_{\lambda\mu} f_{\mu\nu} + \delta_{\nu\lambda} \mathcal{L}_0. \quad (6.141)$$

Полученный тензор называется *микроскопическим тензором энергии-импульса*. Очевидно, это симметричный тензор второго ранга, так как между тензорами $g_{\lambda\mu}$ и $f_{\mu\nu}$ существует соотношение пропорциональности (6.1), т. е.

$$t_{\nu\lambda} = \frac{1}{\mu_0} f_{\lambda\mu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta_{\nu\lambda} f_{\sigma\tau} f_{\sigma\tau}. \quad (6.141')$$

С учетом выражения шестивектора $f_{\lambda\mu}$ [см. (6.2)] можно выяснить конкретный физический смысл тензора $t_{\nu\lambda}$ в зависимости

от величин микроскопического поля. Так, легко проверить, что он имеет 9 пространственных компонент t_{ik} вида

$$t_{ik} = \varepsilon_0 e_i e_k + \frac{1}{\mu_0} b_i b_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{e}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{b}|^2 \right),$$

совпадающих с компонентами максвелловского тензора натяжений микроскопического поля [см. (1.21)], а также 6 пространственно-временных компонент вида

$$t_{i4} = -\frac{j}{\mu_0 c} (\mathbf{e} \times \mathbf{b})_i = -\frac{j}{c} \mathbf{Y}_i^{(m)} = -j c \mathbf{g}_i^{(m)},$$

выражающих компоненты плотности импульса микроскопического поля (1.20), и вида

$$t_{4k} = -\frac{j}{\mu_0 c} (\mathbf{e} \times \mathbf{b})_k = -\frac{j}{c} \mathbf{Y}_k^{(m)},$$

представляющих собой компоненты вектора Умова—Пойнтинга микроскопического поля (1.17). И, наконец, компоненту

$$t_{44} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{e}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{b}|^2 \right) = \omega,$$

которая суть плотность энергии микроскопического поля. Следовательно, микроскопический тензор энергии-импульса имеет вид

$$t_{\nu\lambda} = \left(\begin{array}{c} \frac{t_{ik}}{-\frac{j}{c} \mathbf{Y}^{(m)}} \\ \frac{-j c \mathbf{g}^{(m)}}{\omega} \end{array} \right), \quad (6.142)$$

откуда следует его важное физическое значение.

Отметим, что трехмерный тензор натяжений t_{ik} сам по себе не представляет физическую величину, так как, согласно теории относительности, его следует дополнить энергией, импульсом и вектором Умова—Пойнтинга для того, чтобы он обрел тензорную ковариантность.

Чтобы уточнить физический смысл компонент тензора $t_{\nu\lambda}$, отметим, что уравнение (6.135) выражает закон сохранения энергии и импульса микроскопического поля. В самом деле, последнее уравнение ($\nu=4$) может быть записано и следующим образом:

$$\dot{k}_4 = -\frac{j}{c} \nabla \mathbf{Y}^{(m)} + \frac{\partial \omega}{\partial x_4} = -\frac{j}{c} \operatorname{div} \mathbf{Y}^{(m)} + \frac{\partial \omega}{\partial x_4}, \quad (6.143)$$

или с учетом соотношения (6.12) получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \mathbf{Y}^{(m)} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) = 0: \quad (6.144)$$

интегрирование по всему пространству дает

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int \mathbf{Y}_n^{(m)} dS + \int \mathbf{q}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) dv = 0. \quad (6.144')$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.16).

Первое уравнение ($\nu = 1$) (6.135) может быть записано в виде

$$k_1 = \operatorname{div}_1 \mathbf{t} - \frac{j}{c} \frac{\partial Y_1^{(m)}}{\partial x_4}, \quad (6.145)$$

или

$$k_x = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial Y_x^{(m)}}{\partial t}. \quad (6.145')$$

Кроме того, имеем еще два аналогичных уравнения ($\nu = 2, 3$).

Интегрируя по всему пространству, получаем

$$\int \mathbf{k} dv = \mathbf{K} = \int \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{d\mathbf{G}^{(m)}}{dt}. \quad (6.146)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (1.18). Релятивистская интерпретация закона сохранения импульса и энергии (6.135), которой мы обязаны Минковскому, приводит к новой точке зрения: в любой системе координат, в которой справедлив закон сохранения энергии, справедлив также и закон сохранения импульса. Эти два закона проявляются эквивалентно в описании явлений природы. Так как, согласно (6.144), $\mathbf{Y}^{(m)}$ представляет собой *поток энергии*, величины t_{ik} , согласно (6.145), можно рассматривать как *поток импульса*; таким образом, максвелловские натяжения, которые раньше имели преимущественно формальное значение, приобретают, согласно Планку, конкретный физический смысл. Интерпретация уравнения (6.145') состоит в том, что сила Лоренца, действующая на единицу объема в пустом пространстве, не может быть уравновешена упругими максвелловскими натяжениями без учета сопротивления, обусловленного инерцией поля, т. е. без учета вариации импульса микроскопического поля. Таким образом, оправдано отождествление компонент t_{i4} микроскопического тензора энергии-импульса с компонентами импульса микроскопического поля.

Отметим, что симметрия микроскопического тензора энергии-импульса следует из соотношения

$$\mathbf{g}^{(m)} = \frac{1}{c^2} \mathbf{Y}^{(m)}, \quad (6.147)$$

связывающего импульс микроскопического поля с соответствующим вектором Умова — Пойнтинга; она носит частный характер и характерна для максвелловского поля в пустом пространстве.

§ 8. Релятивистская динамика материальной точки. 4-вектор импульса-энергии

Ниже мы исследуем вкратце вопрос, как нужно изменить уравнения классической механики, чтобы их можно было бы записать в релятивистско-инвариантной форме. С этой целью начнем с определения основных понятий: масса, импульс и энергия, учитывая три закона сохранения. Относительно этих законов отметим, что в классической механике в отличие от закона сохранения массы, относящегося к каждому телу в отдельности, законы сохранения импульса и энергии относятся к изолированным системам тел.

Как показал Минковский, в случае материальной точки четырехмерный импульс можно определить как вектор, параллельный соответствующей 4-скорости

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}, \quad u_{\mu} = \alpha(\mathbf{v}, jc), \quad (6.148)$$

при помощи соотношения

$$p_{\mu} = m_0 u_{\mu}, \quad (6.149)$$

где m_0 — коэффициент пропорциональности, соответствующий рассматриваемому движущемуся телу, который для того, чтобы p_{μ} был 4-вектором, должен быть скалярной величиной. Следовательно, компоненты четырехмерного импульса будут

$$p_k = m_0 \alpha v_k, \quad p_4 = jm_0 \alpha c, \quad (6.150)$$

Следовательно, так же как в классической механике, пространственные компоненты 4-импульса p_k пропорциональны компонентам v_k скорости (трехмерной). Коэффициент пропорциональности

$$m = m_0 \alpha = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (6.151)$$

должен играть роль, аналогичную роли массы частицы в классической механике. Так как m_0 — постоянная величина, из (6.151) следует, что масса m имеет различную величину по отношению к разным инерциальным системам отсчета. В частности, относительно собственной системы отсчета, в которой $v=0$, имеем $m=m_0$, поэтому m_0 называется массой покоя частицы.

1. Изменение массы со скоростью является непосредственным следствием формулировки закона сохранения импульса в релятивистской форме.

Чтобы проиллюстрировать этот факт, рассмотрим простейший случай упругого столкновения двух одинаковых точечных частиц. Будем предполагать, что взаимодействие между ними существует только в момент столкновения, т. е. что они до столкновения и после столкновения перемещаются свободно. Предположим для

простоты, что движение происходит параллельно оси Oz . Будем также предполагать, что относительно системы отсчета (S') центр массы системы находится в покое, т. е. столкновение симметрично, и скорости частиц до столкновения равны соответственно $+u'$ и $-u'$. Относительно системы (S), равномерно движущейся в направлении Oz' со скоростью v , столкновение уже не будет симметрично. Согласно (5.59), скорости частиц будут следующие:

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}. \quad (6.152)$$

Поэтому относительно системы (S) закон сохранения массы и импульса записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 &= Mv, \end{aligned} \quad (6.153)$$

где M — приведенная масса в момент столкновения, а v — скорость центра массы. Исключая M из соотношений (6.153), в которые мы подставили выражения (6.152), получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + u'v/c^2}{1 - u'v/c^2} = \left(\frac{1 - u_2^2/c^2}{1 - u_1^2/c^2} \right)^{1/2}. \quad (6.153')$$

Очевидно, нужно допустить справедливость закона изменения массы со скоростью, выраженного соотношением (6.151).

Отметим, что этот пример, приведенный по Толмену [19], представляет собой идеализированный случай, далекий от действительности, так как речь идет о взаимодействии между двумя материальными частицами, и, следовательно, для полного описания процесса нужно было бы учитывать силовое поле, при посредстве которого передается импульс и энергия от одной частицы к другой. Полный импульс двух изолированных частиц в заданный момент не имеет смысла с точки зрения теории относительности. Каждая частица сохраняет импульс вместе с полем, действующим на нее.

2. Релятивистская форма закона сохранения импульса требует сохранения не только трех пространственных, но и временной компоненты.

Так, для изолированной частицы имеем

$$p_h = \text{const} \quad \text{и} \quad p_4 = \text{const}. \quad (6.154)$$

С учетом соотношения (6.150) из приведенных выше условий следует, что собственная масса изолированной частицы постоянна, если принимать во внимание экспериментальный факт, что изолированная частица всегда движется с постоянной скоростью.

Для физической интерпретации временной компоненты 4-импульса заменим определение Минковского 4-скорости следующим:

$$U_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds}, \quad U_{\mu} = \frac{1}{c} u_{\mu} = \alpha \left(\frac{\mathbf{v}}{c}, j \right), \quad (6.155)$$

а определение 4-импульса — определением

$$p_{\mu} = m_0 c^2 U_{\mu} = m_0 \alpha (c\mathbf{v}, jc^2), \quad (6.156)$$

где, поскольку $m_0 c^2$ — скалярная величина, p_{μ} — 4-вектор. Отметим, что различие определений (6.148), (6.149) и (6.155), (6.156) состоит в том, что в последние входит c в качестве множителя; если использовать систему единиц, в которой $c = 1$, как принято в теории относительности, эти два определения совпали бы.

Рассмотрим изменение во времени временной компоненты 4-импульса

$$\frac{dp_4}{dt} = j \frac{d}{dt} [m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}] = j\mathbf{v} \frac{d}{dt} [m_0 \mathbf{v} (1 - \beta^2)^{-1/2}].$$

Получаем соотношение

$$\frac{dp_4}{dt} = j\mathbf{v} \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = j\mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

которое можно истолковать при помощи уравнений движения классической механики, а именно имеем

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Последнее соотношение выражает изменение работы. Следовательно, если учитывать закон сохранения энергии, то относительно выбранной системы отсчета имеем

$$\frac{dp_4}{dt} = j \frac{dW}{dt}, \quad \text{откуда} \quad p_4 = jW + \text{const.} \quad (6.157)$$

Постоянную, входящую в это соотношение, можно положить равной 0, так как энергия проявляется только тогда, когда имеется изменение энергии; поэтому

$$p_4 = jW. \quad (6.158)$$

Учитывая определение (6.156), получаем важное соотношение

$$W = mc^2 = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (6.159)$$

которое, очевидно, обусловлено законом сохранения энергии.

Соотношение (6.159) было получено Эйнштейном. Оно устанавливает взаимозависимость между энергией некоторой частицы, определенной через работу, и массой или инерцией частицы, измеренной

при помощи ее импульса при заданной скорости. Согласно соотношению Эйнштейна, когда существует масса, то всегда существует и энергия. Заметим, что ни масса, ни энергия не являются релятивистскими инвариантами.

Обращаясь вновь к определению (6.149) 4-импульса, получаем из соотношения (6.158) интерпретацию временной компоненты. А именно из сравнения (6.156) с (6.150) следует

$$p_4 = \frac{i}{c} W. \quad (6.160)$$

Поэтому 4-импульс обычно называется 4-вектором энергии-импульса. Учитывая соотношения (6.150), (6.151) и (6.160), находим, что выражение

$$\sum p_\mu p_\mu = m^2 v^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (6.161)$$

есть релятивистский инвариант. Для специального преобразования Лоренца получаем

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = \alpha(p_3 + j\beta p_4), \quad p'_4 = \alpha(p_4 - j\beta p_3),$$

или

$$p'_3 = \alpha \left(p_3 + \frac{\beta}{c} W \right), \quad W' = \alpha (W - \beta c p_3). \quad (6.162)$$

Из этих соотношений следует, что любой перенос энергии влечет за собой и перенос массы и импульса.

3. Возвращаясь к случаю упругого столкновения двух частиц, из соотношения (6.153) с учетом (6.151) и (6.153') можно вычислить массу M в момент столкновения. Имеем

$$\begin{aligned} M &= m_0 \left[\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2} \right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] = \\ &= 2m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что M больше, чем

$$2m = 2m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

т. е. больше, чем должна была бы быть общая масса системы двух частиц с массой покоя m_0 , которые движутся со скоростью v (скорость центра массы). Это увеличение массы соответствует возрастанию энергии этих двух частиц в момент столкновения. Следовательно, в теории относительности различие между упругими и неупругими столкновениями исчезает, если мы ограничиваемся первым этапом столкновения; после столкновения возрастание энергии будет проявляться в виде кинетической энергии обеих частиц.

4. При определении 4-вектора энергии-импульса можно исходить из определения 4-вектора плотности силы Лоренца (6.11), допуская справедливость принципов сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим тело, несущее электрические заряды. Будем предполагать, что в промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ на него действует электромагнитное поле. В силу действия силы Лоренца импульс и энергия тела будут претерпевать изменения:

$$\Delta p_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{V}^0} f_i dv = \frac{1}{jc} \int k_i dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int (\mathbf{v} \mathbf{f}) dv = \frac{1}{jc} \int \frac{c}{j} k_4 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Так как элемент четырехмерного объема есть инвариант, а k_μ —4-вектор, то отсюда следует, что и Δp_i , $(j/c) \Delta W$ образует 4-вектор. Следовательно, и конечные величины p_1 , p_2 , p_3 , $(j/c)W$, относящиеся к мгновенному состоянию тела, также являются компонентами 4-вектора.

1. Релятивистское уравнение движения материальной точки.

Уравнение движения материальной точки в четырехмерном случае может быть записано при помощи обобщения теоремы импульса

$$\mathbf{f}_v = \dot{p}_v = \frac{dp_v}{d\tau}, \quad (6.163)$$

где 4-вектор f , называемый силой Минковского, аналогичен плотности силы k Лоренца (6.11). Это уравнение эквивалентно уравнению Ньютона

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (6.163')$$

А именно если учитывать (6.150) и (6.151), то первые три уравнения, в которые входят пространственные компоненты, совпадают с уравнением (6.163') при условии

$$\mathbf{f}_1 = \alpha F_x, \quad \mathbf{f}_2 = \alpha F_y, \quad \mathbf{f}_3 = \alpha F_z, \quad (6.164)$$

а последнее уравнение ($v = 4$) может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{f}_4 = j \frac{d}{d\tau} (\alpha m_0 c) = j \alpha \frac{d}{dt} (mc). \quad (6.165)$$

Чтобы найти смысл компоненты f_4 , умножим уравнения

$$\mathbf{f}_v = m_0 \frac{du_v}{d\tau} \quad (6.166)$$

на соответствующие компоненты u_ν и сложим их. При этом получим

$$f_\nu u_\nu = m_0 u_\nu \frac{du_\nu}{d\tau} = \frac{m_0}{2} \frac{d}{d\tau} (u_\nu u_\nu). \quad (6.167)$$

С учетом (6.148) получаем

$$u_\nu u_\nu = \alpha^2 (v^2 - c^2) = -c^2; \quad (6.168)$$

следовательно,

$$f_\nu u_\nu = 0. \quad (6.169)$$

Из этого соотношения следует, что сила Минковского перпендикулярна мировой линии материальной точки. Значение компоненты f_4 получается из (6.169):

$$f_4 = \frac{i}{c} \alpha (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}). \quad (6.170)$$

Поэтому уравнение (6.165) может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\alpha m_0 c^2) = \frac{d}{dt} (m c^2). \quad (6.165')$$

Сравнивая это уравнение с уравнением классической механики

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt}, \quad (6.163'')$$

где $T = mv^2/2$ — кинетическая энергия частицы, находим, что они совпадают, если кинетическая энергия определена соотношением

$$T = mc^2 + \text{const}. \quad (6.171)$$

Так как при $v \rightarrow 0$ имеем $T = 0$, то отсюда следует, что эта постоянная равна $-m_0 c^2$.

Так как релятивистские уравнения движения материальной точки (6.163) представляют собой обобщение ньютоновых уравнений (6.163') и (6.163''), то, когда скорость v мала, т. е. $\beta \ll 1$, или в предельном случае, когда $c \rightarrow \infty$, т. е. $\beta \rightarrow 0$, они должны сводиться к последним. Поскольку в этих случаях $\alpha \rightarrow 1$, то из (6.164) и (6.165), а также из разложений в ряд

$$m = \alpha m_0 = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} = m_0 + \frac{1}{2} \beta^2 m_0 + \dots, \quad (6.172)$$

$$T = (\alpha - 1) m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 \beta^2 c^2 + \dots = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

немедленно следует, что это условие выполнено, и мы получаем

$$m = m_0 \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Итак, уравнения движения материальной точки могут быть записаны в четырехмерной ковариантной форме (6.166) при помощи 4-вектора импульса (6.150) при условии, что вместо инвариантной массы ньютоновой механики пользуемся переменной массой, меняющейся согласно (6.151), и считаем, что кинетическая энергия определяется соотношением (6.171), а 4-вектор силы — соотношениями (6.164), (6.170).

В отличие от ньютоновой механики, в которой масса материальной точки может быть формально определена как отношение силы к ускорению, в релятивистской механике она может быть формально определена как отношение количества движения или импульса к скорости.

Это определение более удобно, так как, если считать, что масса есть отношение силы к ускорению, можно легко проверить, что в релятивистской механике это отношение имеет разные значения в зависимости от того, будет ли сила параллельна или перпендикулярна направлению движения. Таким образом, мы приходим к нежелательной необходимости различать продольную и поперечную массы [в случае электронов см. (1.70) и (1.71)], которые изменяются со скоростью. Применение релятивистских уравнений движения к электрону позволяет легко получить результаты, найденные Лоренцем для случая деформируемого электрона; эти результаты были проверены экспериментально. Согласно теории относительности, закон изменения массы (6.151) является общим свойством всех тел.

2. Закон эквивалентности массы и энергии. В теории относительности, помимо массы m движущегося тела, определяется и масса покоя m_0 и аналогично, помимо энергии W движущегося тела, определяется энергия покоя W_0 . Учитывая (6.159), получаем соотношение, выведенное впервые Эйнштейном [20],

$$W_0 = m_0 c^2 \text{ и } W = mc^2, \quad (6.173)$$

или

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2}. \quad (6.173')$$

Это соотношение, устанавливающее закон эквивалентности массы и энергии, выражает самый важный результат специальной теории относительности.

1. Соотношение $W = mc^2$, как показал С. И. Вавилов, представляет собой обобщение соотношения, установленного П. Н. Лебедевым в результате опытов по измерению давления света. А именно, согласно электромагнитной теории света, давление света на некоторую поверхность за единицу времени равно W/c , где W —энер-

гия световой волны. Если записать, что давление света равно изменению импульса mc , т. е. что $mc = W/c$, то получаем вышезаписанное соотношение, устанавливающее, что поток света обладает «электромагнитной энергией», т. е. массой, тесно связанной со световой энергией.

Общность выражения (6.173) дает возможность по-новому рассматривать массу покоя тел, которая определяется как мера инерции тела. А именно масса любого тела тесно связана с его энергией. Планк предложил считать эту связь основным законом природы и дал следующую формулировку:

«Каждой замкнутой системе, обладающей энергией покоя, соответствует, согласно соотношению Эйнштейна, одновременно и инертная масса покоя».

В интерпретации, данной Ланжевром (1913 г.), записав $\Delta W = c^2 \Delta m$, можно сказать, что любому заданному изменению энергии некоторого тела соответствует вполне определенное одновременное изменение его массы. Следовательно, определенное количество энергии любого вида связано с вполне определенным количеством массы.

В классической физике нельзя говорить о зависимости между массой тела и энергией, содержащейся в этом теле. Так, когда энергия тела возрастала, поскольку, согласно концепции Ньютона, тело являлось простым реципиентом последней, масса оставалась «индифферентной» к этим изменениям энергии. Энергия рассматривалась как нечто самостоятельное и воспринималась как нечто существующее отдельно от материальных предметов. Новый закон, который выражает неразрывную связь между массой и энергией, делает невозможными такие выводы, ибо любая энергия должна быть связана с материальным предметом.

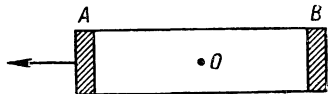
Вскрывая эквивалентность массы и энергии, соотношение Эйнштейна составляет большое завоевание науки, играя фундаментальную роль в современной физике. Оно позволило объяснить целый ряд экспериментальных фактов (дефект массы при ядерных реакциях, явление аннигиляции пары электрон — позитрон с образованием фотонов), открыло возможность глубокого исследования преобразования элементов и создало теоретическую основу использования ядерной энергии.

Соотношение между массой и энергией имеет особое философское и теоретическое значение. Это соотношение следует рассматривать как выражение глубокой взаимозависимости между основными физическими свойствами материи: массы, определенной как мера инерции относительно различных видов движения, являющегося общим свойством материи, и энергии, определенной как мера движения разных видов материи. Открытие этого закона еще раз подтверждает основной тезис диалектического материализма: не

существует движения без материи, так же как не существует материи без движения.

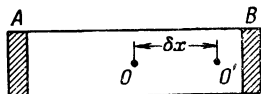
2. Что касается соотношения между кинетической энергией и количеством движения, отметим, что его можно рассматривать и с другой точки зрения, а именно исходя из хорошо известного в классической аналитической механике определения количества движения как производной кинетической энергии по скорости. Так, в случае материальной точки имеем

$$p_k = m\dot{x}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}, \quad (6.174)$$



где

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2). \quad (6.175)$$



Ф и г. 34.

Это соотношение несправедливо в релятивистской механике, так как кинетическая энергия определяется соотношением (6.171). Но, определяя «кинетический потенциал» соотношением

$$K = m_0 c^2 [1 - (1 - \beta^2)^{1/2}], \quad (6.176)$$

можно, как это легко проверить, сохранить соотношение (6.174), если заменить T на K и учесть (6.150).

3. Закон взаимозависимости массы и энергии является общим законом природы. Однако по тому, как он был выведен в § 8, могло показаться, что он относится только к механической энергии. Ниже мы дополним это доказательством, данным Эйнштейном для случая электромагнитной энергии. С этой целью Эйнштейн использовал следующий мысленный эксперимент.

Рассмотрим цилиндр (фиг. 34) длины L и массы M , в концах которого находятся тела A и B , имеющие равные массы m , и в котором создан высокий вакуум. Предположим, что $M \approx 2m$. Пусть эти тела обладают свойством излучения и полного поглощения излученной энергии.

Предположим, что в некоторый заданный момент тело A излучает цуг электромагнитных волн. Этот цуг достигнет тела B и будет полностью поглощен по истечении времени

$$\tau = \frac{L}{c}.$$

Так как волновой пакет переносит электромагнитную энергию δW и импульс δG , между которыми существует соотношение

$$\delta G = \frac{\delta W}{c},$$

то это означает, что в силу закона сохранения импульса цилиндрическая коробка получит в момент испускания волнового пакета равный и противоположно направленный импульс, благодаря чему она начнет двигаться со скоростью

$$v = \frac{\delta G}{M} = \frac{\delta W}{cM}.$$

За время распространения волнового потока цилиндр сместится на

$$\delta x = v\tau = \frac{L\delta W}{Mc^2}.$$

Поскольку весь процесс происходит под действием внутренних сил, то центр тяжести системы, который совпадает с геометрическим центром O цилиндра, должен оставаться неподвижным в пространстве. Однако это означает, что он должен переместиться относительно коробки на расстояние δx из O в O' . Но это возможно, только если в конце процесса масса тела B возросла, а масса тела A уменьшилась. Отсюда следует, что волновой пакет должен перенести из A в B массу δm . Следовательно, в результате поглощения волнового пакета масса тела B станет равна $m + \delta m$, а масса тела A будет равна $m - \delta m$.

Согласно законам статики, относительно O' должно выполняться соотношение

$$(m - \delta m) \left(\frac{L}{2} + \delta x \right) = (m + \delta m) \left(\frac{L}{2} - \delta x \right)$$

откуда следует

$$2m\delta x = L\delta m.$$

Таким образом,

$$\delta m = M \frac{\delta x}{L} = \frac{\delta W}{c^2}.$$

Итак, электромагнитной энергии δW соответствует масса δm , величина которой определяется соотношением Эйнштейна.

3. Релятивистская формулировка принципа минимального действия. В классической механике, согласно принципу Гамильтона, движение материальной частицы может характеризоваться условием стационарности ее действия $S = \int L dt$ вдоль описанной траектории. Следовательно, имеем

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (6.177)$$

где L — функция Лагранжа, определенная соотношением

$$L = T - V, \quad (6.178)$$

т. е. это разность между кинетической и потенциальной энергиями рассматриваемой частицы. Записывая условия Эйлера, необходимые для того, чтобы интеграл $S = \int L dt$ имел экстремальное значение, получаем уравнения Лагранжа. Если энергия сохраняется, т. е.

$$T + V = W = \text{const},$$

то вариационный принцип (5.177) может быть записан в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_2}^{t_1} 2T dt = \delta \int_{P_0}^{P_1} mv ds = 0, \quad (6.179)$$

известном под названием принципа минимального действия. В случае свободной частицы ($v = \text{const}$) уравнение (6.179) выражает известный факт, что траектория частицы есть геодезическая линия. При формулировке принципа минимального действия в релятивистской механике мы исходим из того, что выражение действия должно быть инвариантным относительно преобразования Лоренца.

В случае материальной частицы, движущейся свободно, выражение действия может быть записано следующим образом:

$$S = -a \int_{P_0}^{P_1} ds, \quad (6.180)$$

где интеграл берется вдоль мировой линии между «событиями» P_0 и P_1 , так как интервал ds является единственным инвариантом, который можно составить из дифференциалов координат заданной частицы, характеризующейся константой a . Учитывая соотношение (5.65), можно записать

$$S = - \int_{t_0}^{t_1} ac (1 - \beta^2)^{1/2} dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (6.181)$$

где

$$L = -ac (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (6.182)$$

есть функция Лагранжа, соответствующая свободной частице. Чтобы определить константу a , заметим, что при $c \rightarrow \infty$ функция Лагранжа должна сводиться к ньютоновскому выражению $L = T = mv^2/2$. Разлагая в ряд по степеням $\beta = v/c$, получаем

$$L = -ac (1 - \beta^2)^{1/2} = -ac + \frac{ac}{2} \beta^2 + \dots$$

Следовательно, $a = m_0 c$. Замечаем, что выражение функции Лагранжа совпадает с выражением для кинетического потенциала [см. (6.176)]

$$K = m_0 c^2 - m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{1/2};$$

но, поскольку моменты t_0 и t_1 считаются фиксированными, первый член не входит в вариацию интеграла (6.181). Таким образом, для свободной частицы релятивистское выражение действия имеет вид

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = -m_0 c \int_{P_0}^{P_1} ds, \quad (6.183)$$

где соответствующая релятивистская функция Лагранжа равна

$$L = -m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (6.184)$$

В случае, когда частица движется под действием силы, обладающей потенциалом V , функция Лагранжа имеет вид

$$L = -m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{1/2} - V. \quad (6.185)$$

Легко проверить, что уравнения движения (6.163) могут быть получены, исходя из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (6.186)$$

где L задано соотношением (6.185) и $\mathbf{f} = -\nabla V$. В самом деле, (6.186) эквивалентно уравнениям Лагранжа — Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0.$$

Учитывая (6.174), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_k} = P_k.$$

Аналогично

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k} = \dot{f}_k.$$

Отметим, что выражение (6.185) релятивистской функции Лагранжа материальной частицы может быть непосредственно получено из классического выражения (6.178), если заменить кинетическую энергию T кинетическим потенциалом K , определенным соотношением (6.176), и отбросить постоянный член $m_0 c^2$.

4. Вариационный принцип в релятивистской теории электронов.

Выше мы видели, что движение электронов под действием некоторой силы может быть описано в специальной теории относительности при помощи вариационного принципа (6.186), если определить выражение действия S и соответственно функции Лагранжа L соотношениями (6.185). Когда электрон движется под действием электромагнитного поля, определенного 4-вектором $\Phi[\mathbf{A}, (j/c)V]$, то для получения при помощи вариационного принципа релятивистских уравнений движения электронов, содержащих силу Лоренца (см. § 1), нужно прибавить к функции Лагранжа для свободного движения электрона (6.184) соответствующий инвариантный член, который содержал бы величины, связанные с полем, а также величины, характеризующие электрон.

Учитывая возможные инварианты, получаем следующее выражение плотности функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{j} \cdot \Phi = e(\mathbf{A}\mathbf{v} - V), \quad (6.187)$$

где выражение в скобках, взятое с противоположным знаком, известно под названием *электрокинетического потенциала Шварцшильда* [22]. Очевидно, оно представляет собой разность между кинетической и потенциальной энергиями, т. е. является обобщенной функцией Лагранжа.

1. В случае, когда электрон движется в электромагнитном поле, вариационный принцип может быть сформулирован при помощи функции Лагранжа

$$L = L_p + L_i = -m_0c^2(1 - \beta^2)^{1/2} + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - V) \quad (6.188)$$

в следующем виде:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0. \quad (6.189)$$

Легко проверить, что это уравнение эквивалентно уравнению движения электрона в поле. А именно, записав соответствующие уравнения Лагранжа, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (6.190)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \alpha m_0 \mathbf{v} + e\mathbf{A}, \quad (6.191)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = e\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\nabla V,$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla V. \quad (6.192)$$

Следовательно, уравнение (6.190) может быть записано в форме

$$\frac{d}{dt} (\alpha m_0 \mathbf{v} + e\mathbf{A}) = e (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + e \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e \nabla V. \quad (6.193)$$

Учитывая, что полный дифференциал $d\mathbf{A}$ складывается из изменения во времени векторного потенциала в некоторой точке и изменения, вызванного перемещением заряда на расстояние $d\mathbf{r}$, получаем

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (6.194)$$

Учитывая связь между потенциалом и полем, можно записать уравнение (6.193) в виде

$$\dot{p}_k = e [e_k + (\mathbf{v} \times \mathbf{b})_k], \quad (6.195)$$

где в правой части появляется сила Лоренца, а $p_k = \alpha m_0 v_k$. Следовательно, функция Лагранжа (6.187) выбрана подходящим образом.

2. Согласно определению, данному Лагранжем, производная $\partial L / \partial \mathbf{v}$ называется обобщенным импульсом электрона:

$$\pi_k = p_k + eA_k. \quad (6.196)$$

Гамильтониан электрона, по определению, равен

$$\mathcal{H} = \pi_k v_k - L = \alpha m_0 c^2 + eV. \quad (6.197)$$

С учетом соотношений (6.150) и (6.168), а также (6.196) легко проверить, что

$$(\mathcal{H} - eV)^2 = m_0^2 c^4 + c^2 (\mathbf{\Pi} - e\mathbf{A})^2; \quad (6.198)$$

следовательно,

$$\mathcal{H} = eV + c [m_0^2 c^2 + (\mathbf{\Pi} - e\mathbf{A})^2]^{1/2}. \quad (6.198')$$

Уравнение Гамильтона — Якоби электрона, движущегося в электромагнитном поле, получается заменой в соотношении (6.198) обобщенного импульса $\mathbf{\Pi}$ выражением $\partial S / \partial \mathbf{r}$, а \mathcal{H} выражением $-\partial S / \partial t$:

$$(\nabla S - e\mathbf{A})^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + eV \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (6.198'')$$

3. Записывая функцию Лагранжа в виде

$$L = m_0 c^2 [1 - (1 - \beta^2)^{1/2}] + \int \mathbf{j} \Phi dv \quad (6.199)$$

и учитывая (6.10) и (6.65), можно так записать функцию действия:

$$S = - \int m_0 c (-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu) d\tau + \int Q \dot{\xi}_\mu \Phi_\mu dv d\tau, \quad (6.200)$$

где $\dot{\xi}_\mu$ — компоненты 4-скорости электрона.

Уравнения Эйлера, соответствующие вариационному принципу $\delta S = 0$, имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) = 0. \quad (6.201)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{m_0 c \dot{\xi}_\mu}{(-\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho)^{1/2}} \right] + \int Q \dot{\xi}_\nu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \dot{\xi}_\nu} (dv), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} &= \int Q \dot{\xi}_\nu \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{\xi}_\mu} (dv), \end{aligned}$$

то с учетом (6.5'), (6.149) и (6.168) получаем

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int Q f_{\mu\nu} \dot{\xi}_\nu (dv) = f_{\mu\nu} j_\nu. \quad (6.202)$$

Это — четырехмерная форма релятивистского уравнения движения электрона во внешнем поле [см. (6.11)].

4. Аналогично можно сформулировать вариационный принцип и для уравнений Максвелла — Лоренца. Для этого достаточно добавить к функции Лагранжа, выражающей взаимодействие между электроном и его полем, функцию, выбранную так, чтобы она описывала поле, т. е. зависела от поля. Из рассмотрения инвариантов поля, вычисленных в гл. V, § 1, п. 1, видно, что можно записать

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} f_{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\mu_0} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} |\mathbf{b}|^2 - \varepsilon_0 |\mathbf{e}|^2 \right), \quad (6.203)$$

куда, очевидно, входит разность между энергией магнитного поля, которую мы считаем кинетической по природе, и энергией электрического поля, которую мы считаем потенциальной по природе; \mathcal{L}_0 — плотность функции Лагранжа L_0 .

Соответствующая функция действия имеет вид

$$S = \int (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0) (dx) = \int \left(-\frac{1}{4\mu_0} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + j_\mu \Phi_\mu \right) (dx), \quad (6.204)$$

где четырехкратный интеграл берется по гиперобъему четырехмерного мира.

Записывая вариационный принцип, известный под названием принципа Шварцшильда,

$$\delta S = 0$$

для случая, когда изменяются только компоненты Φ_μ 4-потенциала, и предполагая, что вариации $\delta\Phi_\mu$ обращаются в нуль на границах области интегрирования, получаем уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} = 0, \quad (6.205)$$

где мы учитывали, что Φ_μ — функции от x_ν . Так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} = j_\mu, \quad (6.206)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)} = - \frac{\partial L_0}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)} \quad (6.207)$$

представляет собой лагранжево количество движения поля, то из (6.205) следует уравнение

$$\frac{\partial \Pi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = j_\mu. \quad (6.208)$$

В частном случае микроскопического поля, если учитывать уравнение (6.5'), задающее тензор $\hat{f}_{\mu\nu}$ как функцию 4-потенциала, то из (6.207) следует

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} f_{\mu\nu}. \quad (6.209)$$

Таким образом, (6.208) совпадает с уравнением (6.4), представляющим собой первую группу уравнений Максвелла — Лоренца.

5. В заключение можно сказать, что принцип наименьшего действия, сформулированный Шварцшильдом, включает в себя в четырехмерной инвариантной форме электронную теорию Лоренца и электродинамику Максвелла.

Как мы видели, из этого принципа можно вывести не только уравнение микроскопического поля, но и уравнения движения электрона, включая и силу Лоренца, с которой поле действует на электрон. Этот вариационный принцип очень привлекателен в силу своей простоты, так что его можно считать отправной точкой в развитии как электронной теории Лоренца, так и электродинамики Максвелла, т. е. теории микроскопического поля и соответственно макроскопической электродинамики в пустом пространстве. Такая программа была с особым изяществом реализована Ландау и Лифшицем [8], а также Иваненко и Соколовым [17].

Приложение. а) Движение электрона в однородном электростатическом поле. Выбирая в качестве оси Ox направление поля и

обозначая начальную скорость электрона через \mathbf{v}_0 , можно записать уравнение движения в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}.$$

Электрон будет все время двигаться в плоскости, образованной векторами \mathbf{v}_0 и \mathbf{E} , которую мы можем принять за плоскость xOy . Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0;$$

следовательно,

$$p_x = eE \cdot t, \quad p_y = p_0,$$

если при $t=0$ имеем $p_x=0$ и $p_y=p_0$. Согласно (6.198') ($\mathbf{A}=0$), кинетическая энергия электрона равна $W = c(m_0^2c^2 + p^2)^{1/2}$, следовательно, имеем

$$W = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Аналогично, учитывая соотношения (6.173), можно записать

$$\mathbf{p} = \frac{W}{c^2} \mathbf{v}, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{v} = \frac{pc^2}{W}.$$

Итак,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{W} = \frac{c^2 e E t}{[W_0^2 + (ceEt)^2]^{1/2}},$$

где $W_0 = c[m_0^2c^2 + p_0^2]^{1/2}$.

Полагая постоянную интегрирования C равной 0, получаем после интегрирования

$$x = \frac{1}{eE} [W_0^2 + (ceEt)^2]^{1/2}.$$

Аналогично

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{W_0}.$$

Исключая t , получаем уравнение траектории

$$x = \frac{W_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c},$$

так называемую цепную линию.

Если $v \ll c$, можно положить $p_0 = m_0 v_0$, $W_0 = m_0 c^2$, и, разлагая правую часть в ряд по $1/c$, получаем в первом приближении классическую траекторию параболы

$$x = \frac{eE}{2m_0 v_0^2} y^2.$$

б) Движение электрона в кулоновском поле (центральное поле). Рассмотрим поле, порожденное положительно заряженным центром $Ze = e'$; следовательно, $V = -e'/r$.

С учетом выражения кинетической энергии (6.172) полная энергия равна

$$W = m_0 c^2 (\alpha - 1) + eV. \quad (6.210)$$

Так как на электрон действует кулоновская сила, то траектория будет плоской и закон площадей остается справедливым. Следовательно, в полярных координатах (r, φ) имеем

$$mr^2 \dot{\varphi} = p_\varphi = \text{const}. \quad (6.211)$$

Если ввести прямоугольные координаты x и y , определенные соотношением

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (6.212)$$

то уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt} m \dot{x} = -\frac{ee'}{r^2} \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} m \dot{y} = -\frac{ee'}{r^2} \sin \varphi. \quad (6.213)$$

Из (6.211) получаем

$$m \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{r^2},$$

откуда следует

$$\frac{d}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}. \quad (6.214)$$

Применяя этот оператор к первому равенству (6.212), получаем

$$\dot{x} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \frac{d(r \cos \varphi)}{d\varphi},$$

или

$$m \dot{x} = \frac{p_\varphi}{r^2} \frac{d(r \cos \varphi)}{d\varphi} = p_\varphi \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi \right).$$

При помощи новой переменной σ , где

$$r = \frac{1}{\sigma}, \quad dr = -\frac{1}{\sigma^2} d\sigma, \quad (6.215)$$

вышезаписанное соотношение можно переписать следующим образом:

$$m \dot{x} = -p_\varphi \left(\sigma \sin \varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi} \cos \varphi \right). \quad (6.216)$$

Аналогично

$$m \dot{y} = +p_\varphi \left(\sigma \cos \varphi - \frac{d\sigma}{d\varphi} \sin \varphi \right). \quad (6.216')$$

Применяя еще раз оператор (6.214), получаем

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\sigma \sin \varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi} \cos \varphi \right) = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2} \left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} \right) \cos \varphi, \quad (6.217)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2} \left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} \right) \sin \varphi.$$

Сравнивая соотношения (6.217) и (6.212), находим

$$\begin{aligned} \frac{p_\varphi^2}{m} \left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} \right) &= ee', \\ \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma &= \frac{ee'm}{p_\varphi^2} = \frac{ee'm_0}{p_\varphi^2} (1 - \beta^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения имеем

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{p_\varphi^2}{ee'm_0} \left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma \right). \quad (6.218)$$

Из выражения энергии (6.210) можем получить значение $(1 - \beta^2)^{-1/2}$. Деля подстановку (6.215), получаем

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{ee'}{m_0c^2} \sigma + \frac{W}{m_0c^2}. \quad (6.219)$$

Из (6.218) и (6.219) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma \left(1 - \frac{e^2e'^2}{p_\varphi^2c^2} \right) = \frac{ee'm_0}{p_\varphi^2} \left(1 + \frac{W}{m_0c^2} \right),$$

которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \gamma^2(\sigma - C) = 0, \quad (6.220)$$

где

$$\gamma^2 = 1 - \frac{e^2e'^2}{p_\varphi^2c^2}, \quad C = \frac{m_0ee'}{p_\varphi^2\gamma^2} \left(1 + \frac{W}{m_0c^2} \right). \quad (6.221)$$

Общий интеграл уравнения (6.220) имеет вид

$$\sigma = A \cos \gamma\varphi + B \sin \gamma\varphi + C. \quad (6.222)$$

Для определения постоянных интегрирования будем считать, что $\varphi = 0$ соответствует $r = r_{\text{мин}}$, следовательно, $\sigma = \sigma_{\text{макс}}$. В этом случае

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0,$$

значит, $B = 0$.

Таким образом,

$$\sigma = \frac{1}{r} = C + A \cos \gamma\varphi = C(1 + \varepsilon \cos \gamma\varphi). \quad (6.223)$$

Траектория электрона — розетка; она отличается от эллиптической траектории классической механики множителем $\gamma < 1$, причем если $c = \infty$, то $\gamma = 1$.

Из-за множителя γ перигелий после одного оборота перемещается по направлению движения на угол

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi.$$

Отметим, что задачу можно также решить, отправляясь от уравнения Гамильтона — Якоби (6.198"), которое в этом случае будет иметь вид

$$(\nabla S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{ee'}{r} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0,$$

или в полярных координатах

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{ee'}{r} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать методом разделения переменных. Получаем

$$S = -Wt + M\varphi + \int \left[\frac{\left(W - \frac{ee'}{r} \right)^2}{c^2} - \frac{M^2}{r^2} + m_0^2 c^2 \right]^{1/2} dr,$$

где

$$M = m |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|.$$

Для определения траектории нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const.}$$

Вычисления оказываются громоздкими, но не представляют трудности.

§ 9. Проблема определения массы электрона в электродинамике Максвелла — Лоренца

Как мы указывали в гл. I, в конце прошлого столетия Дж. Дж. Томсон высказал мысль, что инертная масса электрона может быть объяснена при помощи электромагнитных свойств его микроскопического поля, описанного уравнениями Максвелла — Лоренца.

Теория электромагнитной массы электрона была развита Лоренцем и Абрагамом. Согласно этой теории масса электрона обусловлена инерцией его поля, а импульс электрона — импульсом его поля. Масса электрона была определена несколькими путями.

Во-первых, отправляясь от импульса микроскопического электромагнитного поля, считали, что масса есть коэффициент пропорциональности между импульсом поля и скоростью частицы [см. (1.45)]. Если допустить, что заряд электрона распределен по поверхности сферы, то [см. (1.48)]

$$m_{\text{элм}} = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \quad \alpha = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (6.224)$$

Во-вторых, масса электрона может быть непосредственно вычислена из энергии поля согласно релятивистскому соотношению (6.159); следовательно,

$$m_{\text{элм}} = \frac{W_0}{c^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (6.225)$$

Несогласованность этих двух значений вызвана тем, что электромагнитная теория Максвелла — Лоренца не может объяснить механического поведения электрона, а именно импульс (количество движения) микроскопического поля связан неправильным соотношением с энергией поля, так как они не образуют вместе 4-вектор¹⁾. Иными словами, импульс $G^{(m)}$ и энергия микроскопического поля W ведут себя совершенно иначе, чем соответствующие величины в случае материальной частицы (p и кинетическая энергия K), которые образуют 4-вектор. Это можно обнаружить просто, так как компоненты импульса и энергия микроскопического поля являются компонентами тензора энергии-импульса и определяются (см. § 7) равенствами

$$G_k^{(m)} = -\frac{1}{jc} \int t_{k4} dv, \quad W = \int t_{44} dv. \quad (6.226)$$

Так, в собственной системе координат электрона имеем

$$\int t_{kk}^0 dv_0 = \int \left[\varepsilon_0 (e_k)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 |e|^2 \right] dv_0 = -\frac{1}{6} \int \varepsilon_0 |e|^2 dv_0 = -\frac{1}{3} W_0, \quad (6.227)$$

$$\int t_{\nu\mu}^0 dv_0 = 0 \quad (\mu \neq 4), \quad \int t_{44}^0 dv_0 = \frac{1}{2} \int \varepsilon_0 |e|^2 dv_0 = W_0,$$

где учтено, что электрическое поле покоящегося электрона обладает сферической симметрией, а магнитное поле равно нулю.

¹⁾ Более подробно в критическом аспекте эта проблема изложена в книге [17], § 30.

Если же считать, что импульс и энергия образуют 4-вектор и полагать

$$G_h^{(m)} = \frac{j}{c} \int t_{hk} dv, \quad (6.228)$$

то с учетом релятивистской ковариантности вектора $G_\mu^{(m)}$, переходя от системы координат, относительно которой электрон движется с постоянной скоростью v вдоль оси Oz , к собственной системе координат при помощи преобразования Лоренца [см. (5.40)]

$$x_1^0 = x_1, \quad x_2^0 = x_2, \quad x_3^0 = \alpha(x_3 - j\beta x_4), \quad x_4^0 = \alpha(x_4 + j\beta x_3), \quad (6.229)$$

получаем, поскольку $t_{34}^0 = t_{43}^0 = 0$,

$$\begin{aligned} t_{34} &= \frac{\partial x_3^0}{\partial x_3} \frac{\partial x_3^0}{\partial x_4} t_{33}^0 + \frac{\partial x_4^0}{\partial x_3} \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} t_{44}^0 = -j\beta\alpha^2 (t_{44}^0 - t_{33}^0), \\ t_{44} &= \frac{\partial x_3^0}{\partial x_4} \frac{\partial x_3^0}{\partial x_4} t_{33}^0 + \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} t_{44}^0 = \alpha^2 (t_{44}^0 - \beta^2 t_{33}^0), \\ dv &= \frac{1}{\alpha} dv_0. \end{aligned} \quad (6.230)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G_3^{(m)} &= \frac{\beta\alpha}{c} \int (t_{44}^0 - t_{33}^0) dv_0, \\ G_4^{(m)} &= \frac{\alpha}{jc} \int (t_{44}^0 - \beta^2 t_{33}^0) dv_0. \end{aligned} \quad (6.231)$$

Таким образом, с учетом (6.227) находим

$$\begin{aligned} G_3^{(m)} &= \frac{4}{3} \frac{\beta\alpha}{c} W_0 = \frac{4}{3} v\alpha \frac{W_0}{c^2}, \\ G_4^{(m)} &= \frac{\alpha}{jc} \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) W_0, \end{aligned} \quad (6.232)$$

или

$$W = \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) W_0 \alpha. \quad (6.233)$$

С другой стороны, если рассматривать ковариантность 4-вектора $G_\mu^{(m)}$ непосредственно, то, согласно теории относительности, мы должны были бы получить следующий закон преобразования:

$$G_\mu^{(m)} = \frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_\mu} G_\alpha^{(m)0} = \frac{\partial x_4^0}{\partial x_\mu} G_4^{(m)0}, \quad (6.234)$$

так как импульс покоящегося электрона равен нулю. Следовательно, компоненты $G_\mu^{(m)}$ не образуют 4-вектора в отличие от компонент количества движения электрона

$$p = m_0 \alpha v, \quad p_4 = \frac{j}{c} W = m_0 \alpha c, \quad (6.235)$$

а значит, эти величины не могут быть равны между собой.

Итак, электрон, определенный при помощи микроскопического поля, с точки зрения релятивистской ковариантности его энергии и импульса не обладает свойствами частицы.

Из (6.233) можно получить выражение массы электрона, считая, что она равна отношению между энергией микроскопического поля и c^2 :

$$m_{э.лм} = \frac{W_0 \alpha}{c^2} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right). \quad (6.224')$$

Очевидно, этот результат не совпадает ни с ошибочным результатом (6.224), ни с правильным релятивистским соотношением (6.225). Учитывая (6.231), (6.232), (6.234) и определение (6.228), из сказанного выше получаем, что появление множителя $4/3$ и члена $\beta^2/3$ вызвано тем, что

$$\int t_{33}^0 dv_0 = -\frac{1}{3} W_0 \neq 0!$$

Точнее, для того чтобы импульс $G_{\mu}^{(m)}$ образовывал 4-вектор согласно теореме Лауэ, нужно, чтобы в собственной системе отсчета (S^0) выполнялось равенство $\int t_{\mu\nu}^0 dv_0 = 0$ при всех значениях индексов, кроме $\mu = \nu = 4$.

Следовательно, масса электрона не может быть чисто электромагнитной природы. С точки зрения теории микроскопического поля это означает, что нужно ввести вспомогательное поле, отличное от максвелловского, чтобы компенсировать член, входящий в (6.231), который, очевидно, происходит от максвелловских натяжений. Пуанкаре изучал этот вопрос, связывая его с проблемой сферической модели электрона Лоренца. А именно, чтобы удержать в «равновесии» отрицательный заряд на поверхности шара, он ввел механические натяжения, так называемое давление Пуанкаре, которые компенсировали бы электростатические силы отталкивания. Это следует рассматривать как неудачу классической теории Лоренца, основанной на максвелловском микроскопическом поле.

Рассмотрим электрон в собственной инерциальной системе, относительно которой его поле будет кулоновским. Собственное поле будет действовать на заряды электрона с силой, плотность которой

$$k_{\nu}^0 = \frac{\partial t_{\nu\lambda}^0}{\partial x_{\lambda}}.$$

Эта сила должна быть компенсирована силой k_{ν}^* ; следовательно,

$$k_{\nu}^0 + k_{\nu}^* = 0.$$

Можно записать соотношение

$$k_v^* = \frac{\partial T_{v\lambda}}{\partial x_\lambda},$$

где $T_{v\lambda}$ — тензор энергии-импульса неэлектромагнитного поля, которое следует постулировать, чтобы обеспечить равновесие электрического заряда электрона. Очевидно, дивергенция тензора

$$\Theta_{v\lambda} = t_{v\lambda}^0 + T_{v\lambda}$$

равна нулю:

$$\frac{\partial \Theta_{v\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Так как максвелловские натяжения кулоновского поля равны

$$t_{ik}^0 = \varepsilon_0 e_i^0 e_k^0 - \delta_{ik} \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathbf{e}^0)^2 = \frac{e^2}{[(4\pi)^2 \varepsilon_0]} \left[\frac{y_i y_k}{r^6} - \delta_{ik} \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} \right],$$

то, если считать электрон сферическим, натяжение на его поверхности будет

$$t_{ik}^0 r_k = - \frac{e^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{r_i}{a^4}.$$

Поскольку $t_{ii}^0 = t_{ii}^0 = 0$, эти натяжения должны компенсироваться тензором T_{ik} вида

$$T_{ik} = p^0 \delta_{ik},$$

где

$$p^0 = \frac{e^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{1}{a^4} = \frac{1}{3} \frac{W_0}{(4\pi/3) a^3} = \frac{1}{3} \frac{W_0}{V}$$

выражает давление, которое удерживает в равновесии электрический заряд, распределенный по поверхности электрона. Это давление называется давлением Пуанкаре. Здесь W_0 — энергия электростатического поля электрона, а V — объем электрона.

1. Общее выражение тензора энергии-импульса. Рассмотрим произвольное поле, которое можно определить, как мы видели в § 8, п. 3, интегралом действия S и в котором конкретный вид функции Лагранжа не указан. А именно пусть

$$S = \int \mathcal{L} \left(q_\alpha, \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu} \right) dv dt = \frac{1}{ic} \int \mathcal{L} \cdot (dx), \quad (6.236)$$

где \mathcal{L} — произвольная функция величин q_α и их производных, которые представляют собой 4-потенциал [см. (6.197)]. Соответствующая функция Лагранжа L будет иметь вид

$$L = \int \mathcal{L} dv; \quad (6.237)$$

следовательно, \mathcal{L} — плотность функции Лагранжа. Уравнениями поля будут соответствующие эйлеровы уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (6.238)$$

где мы использовали обычные обозначения

$$q_{\alpha, \nu} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu}. \quad (6.239)$$

Эти уравнения следуют из вариации S согласно принципу минимального действия

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \nu}} \delta q_{\alpha, \nu} \right) (dx) = 0,$$

или

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \nu}} \delta q_\alpha \right) - \delta q_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \nu}} \right) \right] (dx) = 0.$$

Замечаем, что второе слагаемое под знаком последнего интеграла обращается в нуль, так как при помощи теоремы Гаусса, обобщенной на случай четырех переменных, его можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, распространенный по всему пространству.

Уравнение (6.238) можно записать в более сжатой эквивалентной форме, если заметить, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}} \frac{\partial q_{\alpha, \mu}}{\partial x_\nu}. \quad (6.240)$$

Учитывая (6.239) и (6.238), а также соотношение

$$\frac{\partial q_{\alpha, \mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial q_{\alpha, \nu}}{\partial x_\mu},$$

можно переписать (6.240) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}} \right) q_{\alpha, \nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}} \frac{\partial q_{\alpha, \nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(q_{\alpha, \nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}} \right). \quad (6.241)$$

Так как можно записать

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \delta_{\nu\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu},$$

то соотношение (6.241) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}} q_{\alpha, \nu} \right) = 0. \quad (6.242)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (6.238).

Вводя тензорные обозначения

$$T_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \mathcal{L} - q_{\alpha, \nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha, \mu}}, \quad (6.243)$$

равенство (6.242), а следовательно, и уравнение (6.238) можно записать в виде

$$\frac{\partial T_{\nu\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (6.244)$$

Это выражает равенство нулю четырехмерной дивергенции тензора (6.243). Оно эквивалентно утверждению, что 4-вектор G_{ν} , определенный соотношением

$$G_{\nu} = C \int T_{\nu\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad (6.245)$$

сохраняется. Здесь $d\Sigma_{\mu}$ — «площадь» проекции элемента гиперповерхности на гиперповерхность, перпендикулярную нормали. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial G_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0.$$

Постоянный множитель C определяется из требования, чтобы G_4 (т. е. компонента при $\nu=4$) равнялась энергии поля, умноженной на j/c [см. (6.228)], т. е. из отождествления G_{ν} с 4-вектором импульса поля. Тогда

$$G_4 = C \int T_{4\mu} d\Sigma_{\mu} = C \int T_{44} dv \quad (6.246)$$

(интегрирование производится по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$). Но, согласно (6.243),

$$T_{44} = -\dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} + \mathcal{L}, \quad (6.247)$$

где $\dot{q}_{\alpha} = \partial q_{\alpha} / \partial t$. Так как (6.247) выражает плотность энергии через плотность функции Лагранжа, то очевидно (см. § 7), что $C = -j/c$. Если отождествить G_{ν} с 4-импульсом поля, $T_{\nu\mu}$ будет тензором энергии-импульса поля, заданным в каноническом виде (6.243).

Отметим, что определение (6.243) тензора энергии-импульса при помощи функции Лагранжа *неоднозначно*, так как к тензору $T_{\nu\mu}$ можно прибавить величину вида

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \Psi_{\nu\mu\lambda}, \quad (6.248)$$

где $\Psi_{\nu\mu\lambda}$ — произвольный антисимметричный по индексам μ и λ тензор, таким образом, чтобы новый тензор тоже удовлетворял

уравнению (6.244). В силу тождества

$$\frac{\partial^2 \psi_{\nu\mu\lambda}}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} = 0$$

4-импульс, который получается из $T'_{\nu\mu}$, не изменится, так как можно записать

$$\int \frac{\partial \psi_{\nu\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} d\Sigma_\mu = \frac{1}{2} \int \left(d\Sigma_\mu \frac{\partial \psi_{\nu\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} - d\Sigma_\lambda \frac{\partial \psi_{\nu\mu\lambda}}{\partial x_\mu} \right) = \frac{1}{2} \int \psi_{\nu\mu\lambda} d\Sigma_{\mu\lambda},$$

где интеграл справа берется по (двумерной) поверхности, «огibaющей» на бесконечности гиперповерхность (трехмерное многообразие), по которой интеграл берется в левой части. Ясно, что этот интеграл равен нулю в общем случае, поскольку источники поля на бесконечности отсутствуют. Следовательно, 4-импульс является, как и должно быть, величиной, определенной однозначно.

Чтобы определить *однозначно* тензор энергии-импульса поля, можно потребовать, чтобы тензор момента импульса системы выражался через 4-импульс следующим образом:

$$M_{\nu\mu} = \int (x_\nu dG_\mu - x_\mu dG_\nu) = -\frac{i}{c} \int (x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\mu T_{\nu\lambda}) d\Sigma_\lambda, \quad (6.249)$$

где мы учитывали определение (6.245). А именно условие, которому должен удовлетворять тензор $T_{\nu\mu}$, следует из закона сохранения момента импульса

$$\frac{\partial M_{\nu\mu}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (6.250)$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} (x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\mu T_{\nu\lambda}) = 0. \quad (6.251)$$

Учитывая (6.244) и замечая, что можно записать

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\nu\lambda},$$

из (6.251) получаем

$$\delta_{\nu\lambda} T_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} T_{\nu\lambda} = T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = 0;$$

следовательно,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad (6.252)$$

т. е. тензор $T_{\nu\mu}$ должен быть *симметричным*. Действительно, как было замечено, тензор $T_{\nu\mu}$ можно сделать симметричным, если к нему прибавить соответственно выбранное выражение типа (6.248).

Существует метод, позволяющий непосредственно получить симметричный тензор $T_{\nu\mu}$, называемый *метрическим тензором*. Этот метод состоит в использовании криволинейных координат и вариации действия S относительно координат основного метриче-

ского тензора $g_{\nu\mu}$, которые мы затем выбираем в соответствии с псевдоевклидовым миром Минковского (см. [8]).

В отношении определения 4-импульса (6.245) замечаем, что если взять интеграл по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$, то G_ν можно записать в следующей форме:

$$G_\nu = -\frac{j}{c} \int T_{\nu 4} dv, \quad (6.245')$$

где интегрирование производится по всему трехмерному пространству. Следовательно, компоненты $-(j/c)T_{i4}$ ($i=1, 2, 3$) представляют собой компоненты так называемой плотности импульса, а компонента $-T_{44}$ есть плотность энергии поля.

Чтобы определить смысл остальных компонент тензора энергии импульса $T_{\nu\mu}$, перепишем уравнения (6.244) в трехмерной форме

$$\frac{1}{jc} \frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{1}{jc} \frac{\partial T_{k4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_i} = 0. \quad (6.244'')$$

Интегрируя эти уравнения по области (\mathcal{V}) в обычном пространстве, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{jc} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dv + \int \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} dv &= 0, \\ \frac{1}{jc} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{k4} dv + \int \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_i} dv &= 0. \end{aligned} \quad (6.244''')$$

Замечая, что во второй интеграл каждого равенства входит дивергенция, получаем после применения теоремы Гаусса уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dv &= jc \int T_{4k} dS_k, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int (-T_{k4}) dv &= -\int T_{ki} dS_i, \end{aligned} \quad (6.244''')$$

где интегралы по поверхности берутся по границе области (\mathcal{V}). Из (6.244''') вытекает, что первое соотношение выражает закон сохранения энергии (следовательно, jcT_{4k} означает плотность потока энергии), а второе соотношение — закон сохранения импульса (следовательно, T_{ki} означает плотность потока импульса).

В частном случае поля без зарядов с учетом (6.204) имеем

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4\mu_0} f_{\lambda\nu} f_{\lambda\nu}. \quad (6.253)$$

Уравнения Эйлера будут иметь вид (6.207). С учетом (6.5) их можно в этом случае переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Phi_{\lambda, \nu}} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (6.238')$$

а равенство (6.240) переписывается при этом в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x_\mu} = - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Phi_{\lambda, \mu}} \frac{\partial \Phi_{\lambda, \nu}}{\partial x_\mu} = - \frac{1}{\mu_0} f_{\lambda \nu} \frac{\partial \Phi_{\lambda \nu}}{\partial x_\nu}. \quad (6.240')$$

Соответствующий канонический тензор энергии-импульса, согласно соотношению (6.243), будет иметь вид

$$t_{\mu\nu}^{(\text{кан})} = - \frac{1}{\mu_0} \Phi_{\lambda, \mu} f_{\lambda \nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta_{\mu\nu} f_{\lambda\kappa} f_{\lambda\kappa}. \quad (6.243')$$

Это выражение можно симметризовать, прибавив член

$$+ \frac{1}{\mu_0} \Phi_{\mu, \lambda} f_{\nu\lambda},$$

который имеет вид (6.248). В самом деле,

$$\Phi_{\mu, \lambda} f_{\nu\lambda} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\lambda} f_{\nu\lambda} = \frac{\partial (\Phi_\mu f_{\nu\lambda})}{\partial x_\lambda} - \Phi_\mu \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial (\Phi_\mu f_{\nu\lambda})}{\partial x_\lambda},$$

так как, согласно (6.4), где $j_\mu = 0$, имеем

$$\frac{\partial f_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Следовательно, прибавляя член (6.253) и учитывая (6.5'), получаем

$$t_{\mu\nu} = - f_{\mu\lambda} g_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} f_{\lambda\kappa} g_{\lambda\kappa}. \quad (6.254)$$

Этот тензор тождествен микроскопическому тензору (6.141'), полученному при помощи выражения плотности лоренцевой силы. Этот тензор удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (6.255)$$

которое эквивалентно закону сохранения энергии ($\mu = 4$) и импульса ($\mu = 1, 2, 3$). Как показано в книге Иваненко и Соколова [17], физический смысл несимметричности канонического тензора связан с поляризацией или с существованием плотности собственного момента (спина) количества движения поля.

Когда рассматриваемое микроскопическое поле содержит заряды, то вместо (6.254) функция Лагранжа и соответственно действие имеет вид (6.205). В этом случае вместо (6.255) имеем соотношение

$$\frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = f_{\mu\lambda} j_\lambda. \quad (6.256)$$

Это было доказано в § 7.

В этом случае полная энергия и полный импульс равны сумме энергии и соответственно импульса поля и частиц, а уравнение (6.256) выражает закон сохранения полной энергии и полного импульса с учетом соотношения (6.203).

§ 10. Классическое уравнение движения электрона.

Противодействие собственного поля движению

Рассмотрим электрон, движущийся ускоренно вдоль оси Oz со скоростью v . Как мы видели, ускоренный электрон испускает излучение, и в результате этой потери энергии его кинетическая энергия убывает. В уравнении движения эта потеря энергии выражается эквивалентной силой торможения. Следовательно, чтобы удовлетворялся закон сохранения энергии, мы приходим к необходимости рассматривать противодействие микрокосмического поля электрона движению самого электрона.

Как впервые показал Лоренц [23], в уравнение движения электрона следует ввести силу противодействия или торможения излучением в качестве поправочного члена, поскольку, вообще говоря, она мала по сравнению с другими силами.

1. Когда скорость электрона мала по сравнению со скоростью света ($\beta = v/c \ll 1$), выражение силы торможения излучением можно вывести просто, записав, что в промежуток времени $t_2 - t_1$, достаточно короткий, чтобы скорость электрона не менялась, работа силы торможения K_r равна энергии, излученной электроном. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} K_r ds = - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J} dt, \quad (6.257)$$

где с учетом (6.109)

$$\mathcal{J} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (6.258)$$

Используя тождество

$$\dot{v}^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}$$

и сделанное предположение, что $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2) = 0$, при помощи интегрирования по частям получаем в уравнении (6.257)

$$\int K_r v dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int \mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}} dt.$$

Следовательно, в первом приближении

$$K_r = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{v}, \quad (6.259)$$

или в нерационализованной электростатической системе единиц

$$K_r = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (6.259')$$

Мы получили классическое выражение силы затухания, вызываемого излучением. Очевидно, в первом приближении она пропорциональна производной ускорения.

Эти феноменологические рассуждения справедливы, пока сила торможения (6.259) мала по сравнению с остальными силами. В случае гармонического осциллятора, например электрона, колеблющегося под действием некоторой квазиупругой силы $k_0 \xi$ (здесь ξ — расстояние электрона от положения покоя), имеем

$$\xi = \xi_0 e^{-j\omega t} \quad (6.260)$$

и

$$m_0 \ddot{\xi} + k_0 \xi = K_r. \quad (6.261)$$

Так как

$$k_0 = \omega_0^2 m_0, \quad \ddot{v} = -\omega^2 v, \quad (6.262)$$

имеем

$$K_r = -m_0 \frac{a}{c} \omega^2 v, \quad (6.263)$$

где a — радиус электрона [см. (1.76)]. Условие применимости формулы (6.259) можно записать в этом случае следующим образом:

$$m_0 \omega_0^2 \gg m_0 \frac{a}{c} \omega^3.$$

Если ввести длину волны $\lambda = a/v_0$, то оно переписется так:

$$\lambda \gg a \approx 10^{-13} \text{ см.} \quad (6.264)$$

Очевидно, что в случае гармонического осциллятора выражение (6.259) справедливо, так как длина волны излучения велика по сравнению с радиусом электрона (даже в случае рентгеновских лучей).

2. Выражение обратного действия микроскопического поля электрона на электрон можно также получить непосредственно, вычисляя, как это сделал Лоренц¹⁾, силу обратного действия K микроскопического поля на электрон.

Предположим, что электрический заряд сферического электрона, движущегося со скоростью $v \ll c$, распределен симметрично с плотностью ρ . Предположим также, что мы можем выбрать такую систему отсчета, относительно которой элементарный заряд de' , действующий

¹⁾ См. [23], а также [8], § 75 и [17], § 31.

на другой элементарный заряд de , будет неподвижен. В этом случае в выражение силы Лоренца входит только собственное электрическое поле e_p , т. е.

$$\mathbf{K} = \int de d\mathbf{e}_p, \quad (6.265)$$

где поле $d\mathbf{e}_p$, порожденное элементом заряда de' , может быть вычислено при помощи потенциалов Льюнара — Вихерта [см. (1.71) и (1.72)], хотя справедливость этих приближенных выражений при расстояниях порядка радиуса электрона вызывает сомнение; поэтому мы сохраним только члены, в которые не входит радиус электрона. Согласно (1.81) это поле имеет вид

$$4\pi\epsilon_0 d\mathbf{e}_p(t) = \frac{de'}{s^3} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{c^2} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}(t')r}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}}(t') \right] + \right. \\ \left. + \left[1 - \left(\frac{v(t')}{c} \right)^2 \right] \times \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}(t')r}{c} \right) \right\}.$$

Так как в выражение поля входит запаздывающее время $t' = t - r/c$, то вычисления принципиально невозможны, если неизвестна предистория электрона (в случае произвольного движения). Поэтому мы будем предполагать, что \mathbf{v} , $\dot{\mathbf{v}}$, $\ddot{\mathbf{v}}$ мало изменяются за отрезок времени, равный приблизительно a/c , за который электромагнитная волна проходит через электрон. Будем, следовательно, предполагать, что, помимо соотношения $v \ll c$, выполняются соотношения $\dot{v} \ll c^2/a$, $\ddot{v} \ll \dot{v}c/a$, где a — радиус электрона. В этом случае можно разложить в ряд по степеням r/c , учитывая тот факт, что $v(t) = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{v}(t') = -\frac{\dot{\mathbf{v}}(t)r}{c} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{v}}(t) \frac{r^2}{c^2} + \dots$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t') = \dot{\mathbf{v}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \dots,$$

$$s = r - \frac{r}{c} \mathbf{v}(t') = r \left[1 + \frac{1}{c^2} r \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2c^3} r (r \ddot{\mathbf{v}}) + \dots \right],$$

$$s^{-3} = r^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} r \dot{\mathbf{v}} + \frac{3}{2c^3} r (r \ddot{\mathbf{v}}) + \dots \right].$$

При подстановке этих значений в выражение поля сохраним только члены до порядка $(r/c)^3$. Следовательно, член $[v(t')/c]^2$ можно отбросить. Получаем

$$4\pi\epsilon_0 d\mathbf{e}_p = de' \left[-\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{v}r)}{r^3c^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{v}}r)}{r^2c^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\ddot{\mathbf{v}}}{2c^3} \right].$$

Результат может быть записан в тензорном виде

$$de_{p\alpha} = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2r_\alpha (\dot{v}_\beta r_\beta)}{r^3 c^2} + \frac{1}{2} \frac{r_\alpha (\ddot{v}_\beta r_\beta)}{r^2 c^3} + \frac{r_\alpha}{r^3} + \frac{\ddot{v}_\alpha}{2c^3} \right].$$

Так как в силу сферической симметрии имеем

$$r_\alpha = 0, \quad \overline{r_\alpha r_\beta} = \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta},$$

то

$$\overline{de_{p\alpha}} = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{3} \frac{\dot{v}_\alpha}{c^2 r} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{v}_\alpha}{c^3} \right).$$

Подставляя в выражение (6.265), имеем

$$\mathbf{K} = \int de de_p = \int \frac{de de'}{6\pi\epsilon_0} \left(\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{c^3} - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2 r} \right).$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{K} = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m^* \dot{\mathbf{v}}, \quad m^* = \frac{4}{3c^2} \int \frac{de de'}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2}, \quad (6.266)$$

где W_0 — электростатическая энергия электрона, т. е. его собственная энергия.

3. Итак, выражение силы, с которой микроскопическое поле электрона действует на электрон, состоит из ряда членов, из которых первый выражает эффект электромагнитной инерции электрона, а второй — силу торможения \mathbf{K}_r , которую мы вывели ранее другим путем. Видно, что этот второй член не зависит от распределения заряда в электроне и что эта сила затухания излучения электрона представляет собой второе приближение выражения силы, с которой электрон действует на самого себя при посредстве поля.

Следующие члены имеют вид

$$m_0 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \ddot{\mathbf{v}}, \quad m_0 \left(\frac{a}{c} \right)^3 \dddot{\mathbf{v}}, \dots$$

С учетом выражений (1.75) и (1.76) силу торможения \mathbf{K}_r (6.259) можно записать в виде

$$m_0 \left(\frac{a}{c} \right) \ddot{\mathbf{v}}.$$

Отметим еще раз, что a/c (где a — радиус электрона) — это время, за которое свет пробегает расстояние, равное радиусу электрона. Очевидно, при больших значениях ускорения или при значительных изменениях ускорения нельзя ограничиваться в выражении (6.266) первыми двумя членами. Сравнивая между собой члены разложения, обнаруживаем, что в случае гармонического осциллятора

(6.262) отношение двух последовательных членов будет порядка a/λ , где λ — соответствующая длина волны гармонического осциллятора. Это разложение справедливо при ограничении (6.264); оно справедливо, следовательно, для нерелятивистских скоростей ($v \ll c$) и взаимодействий с полями неслишком высокой частоты ($\lambda \gg a$).

Во всяком случае следующие члены разложения (2.266) не имеют физического смысла, так как мы ничего не можем сказать о внутренней структуре электрона. Эти члены можно отбросить только в случае точечного электрона ($a \rightarrow 0$). Однако в этом случае $W_0 \rightarrow \infty$; это означает, что и $m^* \rightarrow \infty$. Но в уравнение движения входит не m^* , а эмпирическая масса m электрона, которая равна сумме инертной массы m_0 и электромагнитной (полевой) массы. Так как измеряемая на опыте масса электрона m — явно конечная величина, то следует предположить, что $m_0 \rightarrow -\infty$. Следовательно, для точечного электрона справедливо уравнение движения вида¹⁾

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (6.267)$$

В случае свободного электрона имеем

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}},$$

или

$$k\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}} = 0, \quad (6.268)$$

где

$$k \approx \tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^2};$$

следовательно,

$$\mathbf{v} = v_0 \exp \frac{t}{\tau_0} + \text{const.}$$

Поскольку $\tau_0 \approx 10^{-29}$ сек, то свободный электрон, согласно (6.268), должен был бы, неограниченно ускоряясь, исчезнуть, как пуля, в бесконечности. Бессмысленность такого результата указывает на ограниченную применимость формулы для силы торможения излучением (6.259). Она является следствием противоречивости классической теории точечного электрона, приводящей к бесконечным значениям собственной энергии и электромагнитной массы электрона.

4. Чтобы вывести выражение силы реакции \mathbf{K}_r микроскопического поля при релятивистских скоростях электрона ($v \approx c$), заметим, что эта сила будет 4-вектором $f_{\mathbf{v}}^{(r)}$, удовлетворяющим урав-

¹⁾ Решение этого уравнения было исследовано Фрадкным [24].

нению движения электрона, записанному в релятивистской форме [см. (6.164)]:

$$m_0 \dot{u}_\nu = f_\nu + f_\nu^{(r)}, \quad (6.269)$$

где u_ν есть 4-вектор скорости, $\dot{u}_\nu = du_\nu/d\tau$, а f_ν — сила, с которой внешнее поле действует на электрон: ее пространственные компоненты связаны с силой Лоренца соотношениями [см. (6.165)]

$$f_1 = \alpha F_x, \quad f_2 = \alpha F_y, \quad f_3 = \alpha F_z.$$

Согласно (6.13) и (6.169), имеем

$$f_\nu u_\nu = 0, \quad u_\nu \dot{u}_\nu = 0; \quad (6.270)$$

следовательно, 4-векторы \dot{u}_ν и f_ν перпендикулярны мировой линии электрона; а значит, должно выполняться соотношение

$$f_\nu^{(r)} u_\nu = 0. \quad (6.271)$$

Отметим, что в нерелятивистском случае ($v \ll c$) пространственные компоненты 4-вектора $f_\nu^{(r)}$ в частной системе отсчета, связанной с электроном, должны совпадать с (6.259). Учитывая это условие и соотношение (6.271), получаем, что 4-вектор может быть определен в следующем виде:

$$f_\nu^{(r)} = b (\ddot{u}_\nu + \gamma u_\nu), \quad (6.272)$$

где $b = e^2/6\pi\epsilon_0 c^3$, а γ — константа, которую можно определить при помощи (6.271) условием

$$\ddot{u}_\nu u_\nu + \gamma (u_\nu u_\nu) = 0, \quad \gamma = -\frac{\ddot{u}_\nu u_\nu}{u_\nu u_\nu}. \quad (6.273)$$

Так как, согласно (6.168), имеем

$$u_\nu u_\nu = -c^2,$$

а из второго соотношения (6.270) следует, что

$$u_\nu \ddot{u}_\nu + \dot{u}_\nu \dot{u}_\nu = 0, \quad u_\nu \ddot{u}_\nu = -\dot{u}_\nu \dot{u}_\nu,$$

закключаем, что константа γ из (6.273) может быть записана следующим образом:

$$\gamma = -\frac{1}{c^2} (\dot{u}_\nu \dot{u}_\nu). \quad (6.274)$$

Окончательно

$$f_\nu^{(r)} = b \left(\ddot{u}_\nu - \frac{\dot{u}_\lambda \dot{u}_\lambda}{c^2} u_\nu \right). \quad (6.275)$$

Это есть релятивистское выражение силы противодействия¹⁾. Для сравнения с другими полученными выражениями нужно перейти к трехмерному представлению, учитывая соотношение (6.65):

$$(u_1, u_2, u_3) = \alpha v, \quad u_4 = jca. \quad (6.276)$$

Отсюда находим

$$(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) = \dot{\alpha} v + \alpha \dot{v}, \quad \dot{u}_4 = j\dot{c}a,$$

где

$$\alpha^2 = (1 - \beta^2)^{-1}, \quad \alpha \dot{\alpha} = (1 - \beta^2)^{-2} \cdot \frac{v\dot{v}}{c^2} = \frac{\alpha^4}{c^2} v\dot{v}, \quad \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{c^2} v\dot{v},$$

или

$$(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) = \alpha \left[\frac{\alpha^2}{c^2} (v\dot{v}) v + \dot{v} \right], \quad \dot{u}_4 = j \frac{\alpha^3}{c} v\dot{v}. \quad (6.277)$$

Получаем

$$\dot{u}_v \dot{u}_v = \alpha^2 \left[\frac{\alpha^2}{c^2} (v\dot{v})^2 + \dot{v}^2 \right]. \quad (6.278)$$

Учитывая соотношения (6.276) — (6.278), можно вычислить выражение пространственных компонент вектора $f_v^{(r)}$, заданного соотношением (6.275). Имеем

$$\frac{\dot{u}_v \dot{u}_v}{c^2} u_k = \frac{\alpha^3}{c^2} \left[\frac{\alpha^2}{c^2} (v\dot{v})^2 + \dot{v}^2 \right] v_k,$$

а также

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \ddot{u}_3) &= \frac{3\alpha^2 \dot{\alpha}}{c^2} (v\dot{v}) v + \frac{\alpha^3}{c^2} [\dot{v}^2 v + (v\ddot{v}) v + (v\dot{v}) \dot{v}] + \dot{\alpha} \dot{v} + \alpha \ddot{v} = \\ &= \frac{3\alpha^5}{c^4} (v\dot{v})^2 v + \frac{\alpha^3}{c^2} [\dot{v}^2 v + (v\ddot{v}) v + 2(v\dot{v}) \dot{v}] + \alpha \ddot{v}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b} (f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, f_3^{(r)}) = \frac{2\alpha^5}{c^4} (v\dot{v})^2 v + \frac{\alpha^3}{c^2} [(\dot{v}^2) v + 2(v\dot{v}) \dot{v}] + \alpha \ddot{v}. \quad (6.279)$$

Переходя от собственного времени электрона τ к времени t , получаем

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dv}{dt} = \alpha v', \quad \dot{\alpha} = \frac{\alpha^4}{c^2} (v v'), \\ \ddot{v} &= \frac{d}{d\tau} (\alpha v') = \dot{\alpha} v' + \alpha^2 v'' = \frac{\alpha^4}{c^2} (v v') v' + \alpha^2 v''. \end{aligned}$$

¹⁾ В работе [17] это выражение получено менее непосредственным путем при помощи теории би-поля, разработанной Соколовым [25, 26].

Теперь (6.279) с учетом (6.142) можно переписать так:

$$\mathbf{K}_r^* = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \alpha^2 \left\{ \mathbf{v}'' + \mathbf{v}' \frac{3\alpha^2}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{v}') + \frac{\alpha^2}{c^2} \mathbf{v} \left[(\mathbf{v}\mathbf{v}'') + \frac{3\alpha^2}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{v}')^2 \right] \right\}. \quad (6.280)$$

В нерелятивистском случае ($\beta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 1$), пренебрегая членами, содержащими $\beta^2 = v^2/c^2$, находим, что полученное выражение сводится к (6.259). Отметим, что последнее выражение справедливо при любых скоростях в случае, когда ускорение не «слишком велико». Оно является приближенным, так как представляет собой начало ряда, в котором мы, как и в нерелятивистском случае, отбросили все последующие члены.

1. Естественная ширина линий спектра излучения. В случае линейного гармонического осциллятора, как мы видели выше, испускаемое излучение действует как сила затухания, выражение которой задается соотношениями (6.259) и (6.259'). Рассмотрим более подробно действие этой силы на движение осциллятора, т. е. на излучение, испускаемое электроном. В пренебрежении силой торможения осциллятор может колебаться бесконечное время. Следовательно, действие этой силы проявляется в затухании колебаний осциллятора. Так, принимая выражение (6.259'), получаем для уравнения движения осциллятора [см. (6.261) и (6.262)] следующее выражение:

$$m_0 \ddot{\xi} = -m_0 \omega_0^2 \xi + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\xi}. \quad (6.281)$$

Поскольку сила затухания мала, в первом приближении можно заменить $\ddot{\xi}$ значением $-\omega_0^2 \xi$ (движение без затухания). Тогда вместо (6.281) можно записать

$$\dot{\xi} = -\omega_0^2 \xi - \gamma \dot{\xi}, \quad (6.282)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_0^2}{m} = \frac{\omega_0^2}{c} a \ll \omega_0. \quad (6.283)$$

Приближенным решением уравнения (6.282) будет

$$\xi = \xi_0 e^{-\gamma t/2} e^{j\omega_0 t}.$$

Средняя энергия осциллятора за время одного периода равна

$$W = \frac{1}{2} m_0 (\dot{\xi}^2 + \omega_0^2 \xi^2) = W_0 e^{-\gamma t}. \quad (6.284)$$

Следовательно, энергия убывает по экспоненциальному закону, уменьшаясь в e раз за время $1/\gamma$. Поскольку $\gamma \ll \omega_0$, это время велико по сравнению с периодом колебаний, так как в противном случае движение осциллятора не могло бы быть квазипериодическим.

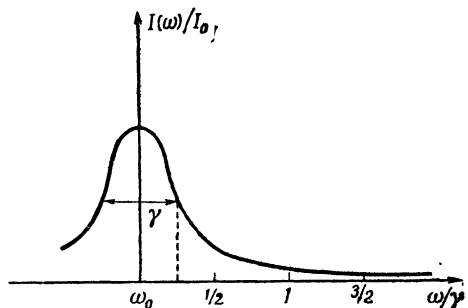
Амплитуда излучения, испускаемого таким осциллятором, пропорциональна $\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi$; следовательно, излучение затухает так же, как амплитуда колебаний осциллятора, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma t/2} e^{j\omega_0 t}. \quad (6.285)$$

Это означает, что вместо монохроматических волн осциллятор будет излучать волновой пакет с частотами в окрестности частоты ω_0 . Отсюда следует, что излучение не будет сосредоточено на частоте ω_0 , а будет распределено около этой частоты. Ширина спектра равна γ ; согласно (6.283), имеем

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = 2\pi c \frac{\gamma}{\omega_0^2} = 2\pi a. \quad (6.286)$$

Ширина спектральной линии не зависит от частоты и пропорциональна радиусу электрона — универсальной постоянной.



Ф и г. 35.

Чтобы найти распределение интенсивности в излученном волновом пакете, разложим (6.285) в ряд Фурье

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_0 \int_0^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} e^{-\gamma t/2} dt;$$

или

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{E}_0}{j(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}.$$

Поэтому

$$I(\omega) \approx |E(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} I_0 \gamma \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (6.287)$$

где I_0 означает интегральную интенсивность $I_0 = \int I(\omega) d\omega$. Максимум спектральной линии (6.287) приходится на ω_0 — частоту незатухающих колебаний осциллятора. Для $\omega - \omega_0 = \gamma/2$ интенсивность равна половине максимальной интенсивности (фиг. 35). Следовательно, γ — ширина в середине максимума.

§ 11. Гамильтонова форма уравнений поля

Система уравнений Максвелла — Лоренца может быть записана в виде уравнения Гамильтона, известного из механики, если представить поле как суперпозицию плоских волн.

1. Рассмотрим частный случай — электромагнитное поле в области пространства без зарядов. Такое поле можно описать с помощью векторного потенциала. Пользуясь системой единиц Гаусса (рационализованной), можно записать

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6.288)$$

так как мы можем выбрать скалярный потенциал $V = 0$ (см., например, Тамм, стр. 454). Векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0 \quad (6.289)$$

при условии

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \quad (6.290)$$

Так как электромагнитное поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы, то при его описании необходимо бесконечное число канонических переменных. Чтобы избежать этой трудности, рассмотрим случай, когда электромагнитное поле заключено в конечный объем \mathcal{V} , который для простоты можно считать кубом с ребром L . Такое поле может быть представлено при помощи ряда Фурье как суперпозиция плоских волн. А именно если \mathbf{A} вместе со своими производными удовлетворяет на поверхности куба некоторым условиям периодичности, которые мы считаем граничными условиями уравнения (6.289), то общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (6.291)$$

где плоские волны характеризуются волновым вектором \mathbf{k} , компоненты которого являются целыми кратными $2\pi/L$, т. е.

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad (6.292)$$

где n_x, n_y, n_z — целые положительные или отрицательные числа. Следовательно, наложенные условия периодичности заменяют непрерывное пространство, характеризующееся значением \mathbf{k} , кубическим решеточным пространством с постоянной решетки $2\pi/L$ и объемом ячейки, равным $(2\pi/L)^3$. Сумма (6.291) берется по всем точкам кубической решетки объема (\mathcal{V}), заданным соотношениями (6.292).

Коэффициенты \mathbf{A}_k являются функциями времени и удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathbf{A}}_k + c^2 k^2 \mathbf{A}_k = 0 \quad (6.293)$$

и

$$\mathbf{k} \mathbf{A}_k = 0; \quad (6.294)$$

следовательно, \mathbf{A}_k перпендикулярен \mathbf{k} и $\mathbf{A}_{-k} = \mathbf{A}_k^*$, так как \mathbf{A} — вещественный вектор.

Если предположить, что ребро куба L достаточно большое, то его объем (V) можно разделить на элементарные объемы, соответствующие Δk_x , Δk_y , Δk_z . Поскольку соседние значения k_x , k_y , k_z соответствуют значениям n_x , n_y , n_z , отличающимся на единицу, то число возможных значений k_x , k_y , k_z в интервале Δk_x , Δk_y , Δk_z будет таково:

$$\Delta n_x = \frac{L}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{L}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{L}{2\pi} \Delta k_z.$$

Общее число Δn возможных значений вектора \mathbf{k} , компоненты которого заключены в интервале Δk_x , Δk_y , Δk_z , равно

$$\Delta n = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (6.295)$$

Число возможных значений волнового вектора \mathbf{k} , длина которого k заключена в интервале k и $k + \Delta k$, а направление — в телесном угле $d\Omega$, можно найти, переходя к сферическим координатам и записывая, что Δn пропорционально элементу объема, т. е.

$$\Delta n = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 k^2 \Delta k \Delta \Omega. \quad (6.296)$$

Если \mathbf{k} может иметь всевозможные направления ($\Omega = 4\pi$), то

$$\Delta n = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \quad (6.297)$$

Учитывая вещественность вектора \mathbf{A} , вместо (6.291) запишем

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad (6.291')$$

где \mathbf{a}_k зависят экспоненциально от времени. Окончательно

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}_{0k} e^{j(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} + \mathbf{a}_{0k}^* e^{j(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega_k t)}], \quad (6.291'')$$

где $\omega_k = ck$, а перпендикулярный к \mathbf{k} вектор \mathbf{a}_{0k} определяет направление поляризации волны.

Пользуясь представлением (6.291'), можно вычислить векторы поля при помощи соотношения (6.288); имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}) = \\ &= j \sum_{\mathbf{k}} k (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (6.298)$$

$$\mathbf{h} = j \sum_{\mathbf{k}} [(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}]. \quad (6.299)$$

При вычислении энергии поля

$$W = \frac{1}{2} \int [|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{h}|^2] dv$$

заметим, что при возведении в квадрат следует учесть, что произведения членов, в которые входят разные волновые векторы ($\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$), обращаются в нуль при интегрировании по объему (\mathcal{V}), так как они содержат множители вида

$$e^{\pm j(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}},$$

а интегралы типа

$$\int_0^L e^{j(2\pi/L)n_x x} dx$$

равны нулю при $n_x \neq 0$.

В результате находим

$$W = L^3 \sum_{\mathbf{k}} [k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*)].$$

Поскольку $\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0$, то

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*.$$

Можно поэтому записать

$$W = \sum_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}, \quad W_{\mathbf{k}} = 2k^2 L^3 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*, \quad (6.300)$$

откуда следует, что энергия поля равна сумме энергии плоских волн. Аналогично полный электромагнитный импульс поля равен

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c} \int \mathbf{e} \times \mathbf{h} dv = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{W_{\mathbf{k}}}{c}. \quad (6.301)$$

Следовательно, при помощи разложения (6.291') поля по плоским волнам оно может быть описано при помощи дискретного ряда переменных $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, а не при помощи потенциала $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, представляющего по существу непрерывное множество переменных. Для того чтобы это описание стало аналогичным гамильтонову описанию

механической системы, можно ввести «канонические переменные» путем подстановки

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \alpha (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= -j\omega_k \alpha (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k, \end{aligned} \quad (6.302)$$

где α — константа, которую нужно определить.

При помощи этих канонических переменных получаем гамильтониан поля, подставив (6.302) в выражение энергии (6.300):

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{L^3}{2c^2\alpha^2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2).$$

Константа α определяется, если заметить, что, согласно каноническим уравнениям,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}},$$

по следующей формуле:

$$\alpha = \left(\frac{L^3}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что если в разложении (6.291') нормировать коэффициенты, то α будет нормирующим множителем, и в этом случае она не входит в (6.302).

Следовательно, гамильтониан электромагнитного поля в пустом пространстве имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2). \quad (6.303)$$

«Канонические уравнения движения»

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}} = -\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} \quad (6.304)$$

эквивалентны уравнениям поля, т. е. уравнениям (6.293). В самом деле, легко проверить, что они приводят к уравнениям

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} + \omega_k^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.305)$$

Отметим, что аналогично вектору $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ векторы $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} и имеют две независимые компоненты $Q_{kj}, P_{kj} (j = 1, 2)$, соответствующие двум направлениям поляризации соответствующей плоской волны, так что

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2 = \sum_j Q_{kj}^2, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 = \sum_j P_{kj}^2, \quad (6.306)$$

и вследствие этого

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_j \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_h^2 Q_{\mathbf{k}j}^2). \quad (6.303')$$

Гамильтониан электромагнитного поля в пустом пространстве может быть представлен как сумма гамильтонианов линейных гармонических осцилляторов $\mathcal{H}_{\mathbf{k}j}$. Поэтому при помощи разложения (6.291) [соответственно (6.291')] поле можно считать эквивалентным системе линейных гармонических осцилляторов.

Представление поля в виде линейных осцилляторов может быть осуществлено или при помощи переменных $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$, или при помощи $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$. В последнем случае

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} &= \frac{j}{2kL^{3/2}} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}} - j\omega_h \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}), \\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* &= -\frac{j}{2kL^{3/2}} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}} + j\omega_h \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (6.307)$$

и

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (ck\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cos kr - \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \sin kr). \quad (6.308)$$

2. При рассмотрении электромагнитного поля в некоторой области пространства, в которой имеются заряды, т. е. поля, определенного уравнениями Максвелла — Лоренца в виде функции электродинамических потенциалов, его можно представить уравнениями (6.21) (записанными в рационализованных гауссовых единицах):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} &= -\frac{\mathbf{qv}}{c}, \\ \Delta V - \frac{1}{c^2} \ddot{V} &= -\rho, \\ \nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{V} &= 0. \end{aligned} \quad (6.309)$$

Чтобы записать эти уравнения в каноническом виде, предположим, как и в предыдущем случае, что поле заключено в некотором объеме L^3 , и потребуем в качестве граничных условий, чтобы потенциалы \mathbf{A} и V были периодическими на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. В этом случае потенциал можно разложить в ряд Фурье.

В общем случае, когда $\nabla \mathbf{A} \neq 0$, пользуемся свойством, что любое векторное поле может быть представлено в виде суммы поля с источниками, т. е. потенциального поля, и поля без источников, т. е. вихревого поля:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t + \mathbf{A}_l, \quad (6.310)$$

где

$$\nabla \mathbf{A}_l = 0, \quad \mathbf{A}_l = -\nabla \psi. \quad (6.311)$$

Очевидно, потенциал \mathbf{A}_l совпадает с потенциалом *поперечного* электромагнитного поля в пустом пространстве. Потенциал \mathbf{A}_l представляет собой *продольное* поле типа электростатического.

Аналогично разложению (6.291) можем записать для \mathbf{A}_l

$$\mathbf{A}_l = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}l} e^{j\mathbf{k}l\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{A}_{\mathbf{k}l}$ удовлетворяют волновому уравнению и граничным условиям (функция $\mathbf{A}_{\mathbf{k}l}$ периодична на границах)

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}l} + c^2 k_l^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}l} = 0.$$

Можно показать¹⁾, что $\mathbf{A}_{\mathbf{k}l}$ образует ряд решений волнового уравнения, которые ортогональны ко всем решениям поперечного поля $\mathbf{A}_{\mathbf{k}i}$; следовательно, $\mathbf{A}_{\mathbf{k}i}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{k}l}$ образуют полную систему ортогональных решений волновых уравнений с указанным граничным условием. Можно также разложить в ряд Фурье и потенциал V и доказать, что это разложение совпадает с разложением ψ [см. (6.311)], так как оно удовлетворяет тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Можно выбрать электродинамические потенциалы таким образом, чтобы $V = 0$. В этом случае вместо (6.309) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \nabla \dot{\mathbf{A}} + \rho &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} + \nabla (\nabla \mathbf{A}) &= \frac{1}{c} \rho \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.309')$$

Разлагая в ряд векторный потенциал \mathbf{A} по функциям $\mathbf{a}_{\mathbf{k}i} e^{j\mathbf{k}i\mathbf{r}}$, которые мы предполагаем нормированными, можно записать по аналогии с (6.291)

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}i} q_{\mathbf{k}i} \mathbf{u}_{\mathbf{k}i}, \quad (6.312)$$

где

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}i} = \left(\frac{c^2}{L^3} \right)^{1/2} \mathbf{a}_{\mathbf{k}i} e^{j\mathbf{k}i\mathbf{r}}, \quad (6.312')$$

$$\int \mathbf{u}_{\mathbf{k}i} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'i'} dv = c^2 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ii'}. \quad (6.312'')$$

Здесь k относится к направлению распространения плоской волны, i определяет направление поляризации ($i=1, 2$ соответствует поперечной волне, а $i=3$ — продольной волне), вектор $\mathbf{a}_{\mathbf{k}3}$ направлен по вектору \mathbf{k} ; следовательно, $\mathbf{a}_{\mathbf{k}3} \times \mathbf{k} = 0$, $\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}3} = 0$. Так

¹⁾ См., например, [27].

как поле можно разложить на продольное и поперечное, то можно записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_t = \sum_l (q_l \mathbf{u}_l + q_l^* \mathbf{u}_l^*) + \sum_l (q_l \mathbf{u}_t + q_l^* \mathbf{u}_t^*), \quad (6.313)$$

где

$$\nabla \times \mathbf{u}_l = 0, \quad \nabla \mathbf{u}_t = 0.$$

Из уравнений (6.309') с учетом соотношений

$$\Delta \mathbf{u}_{ki} = -\omega_k^2 \mathbf{u}_{ki}$$

и

$$\nabla (\nabla \mathbf{u}_l) = \Delta \mathbf{u}_l$$

следует

$$\frac{1}{c^2} \sum_t (\ddot{q}_t + \omega^2 q_t) \mathbf{u}_t + \frac{1}{c^2} \sum_l \ddot{q}_l \mathbf{u}_l = \frac{1}{c} \mathbf{e} \mathbf{v}.$$

Умножая это соотношение на \mathbf{u}_{ki}^* , интегрируя по всему пространству и учитывая ортогональность функций, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{q}_t + \omega_t^2 q_t &= \frac{1}{c} \int \mathbf{u}_t^* \mathbf{e} \mathbf{v} dv, \\ \ddot{q}_l &= \frac{1}{c} \int \mathbf{u}_l^* \mathbf{e} \mathbf{v} dv. \end{aligned} \quad (6.314)$$

Если предположить, что в поле имеются точечные заряды, то интеграл можно заменить суммой

$$\int \mathbf{u}^* \mathbf{e} \mathbf{v} dv = \sum_i e \mathbf{v}_i \mathbf{u}^*(P_i),$$

где \mathbf{v}_i — скорость i -й частицы, находящейся в точке P_i . Если учесть выражение гамильтониана поля в пустом пространстве (6.300) и гамильтониана электрона (6.198'), то выражение гамильтониана в общем случае будет иметь вид

$$\mathcal{H} = \sum_t (p_t^* p_t + \omega_t^2 q_t q_t^*) + \sum_l p_l p_l^* + \sum_i c \left[m^2 c^2 + \left(\mathbf{\Pi}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.315)$$

где первая сумма берется по значениям $t > 0$ и, так как $q_{-t} = q^*$ и $p_t = \dot{q}_t^* = j \omega_t q_t^*$, эквивалентна (6.300), а значит, выражает энергию поперечного поля; вторая сумма представляет собой энергию продольного поля. Следовательно, первые две суммы представляют собой энергию электромагнитного поля. В этом можно убедиться, заметив, что

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int (|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{h}|^2) dv = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] dv = \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\sum (\dot{q} \mathbf{u} + \dot{q}^* \mathbf{u}^*)^2 \right] + \left[\sum (q \nabla \times \mathbf{u} + q^* \nabla \times \mathbf{u}^*)^2 \right] \right\} dv. \end{aligned}$$

С учетом ортогональности функций u , u^* [см. (6.312'')] первый член дает

$$\sum \dot{q}\dot{q}^* = \sum_i \dot{q}_i \dot{q}_i^* + \sum_i \dot{q}_i \dot{q}_i^* = \sum_i p_i^* p_i + \sum_i p_i^* p_i,$$

а второй член преобразуется в

$$\sum_i \omega_i^2 q_i q_i^*,$$

если учесть

$$\int (\nabla \times \mathbf{u}_i) (\nabla \times \mathbf{u}_k) dv = \int [\mathbf{u}_i \times (\nabla \times \mathbf{u}_k)]_n dS + \int [\mathbf{u}_i \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_k)] dv$$

и

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_i) = -\Delta \mathbf{u}_i = \omega_i^2 \mathbf{u}_i,$$

поскольку поверхностный интеграл, записанный выше, обращается в нуль из-за периодичности на границе функции \mathbf{u} и ее производных.

Записав канонические уравнения, вытекающие из гамильтониана (6.315):

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_t}, & \dot{p}_t &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_t}, \\ \dot{q}_l &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l}, & \dot{p}_l &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_l}, \end{aligned}$$

можно легко проверить, что эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= p_t^*, & \dot{p}_t &= -\omega_t^2 q_t^* + \sum_i \frac{e}{c} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_t(P_i), \\ \dot{q}_l &= p_l^*, & \dot{p}_l &= \sum_i \frac{e}{c} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_l(P_i); \end{aligned}$$

эти уравнения эквивалентны уравнениям (6.314).

Важно заметить, что энергия продольной части поля представляет собой энергию кулоновского взаимодействия (статического) между рассматриваемыми частицами. Чтобы доказать это, воспользуемся первым уравнением из (6.309'). А именно, учитывая, что $\nabla \mathbf{u}_l = 0$, можно записать

$$\nabla \dot{A} = \sum_l \dot{q}_l \nabla \mathbf{u}_l = \sum_l p_l^* \nabla \mathbf{u}_l.$$

С другой стороны, имеем

$$\nabla \mathbf{u}_l = j_k \left(\frac{c^2}{L^3} \right)^{1/2} e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}} = j^k f_k,$$

где функции f_k образуют ортогональную систему

$$\int f_k^* f_k dv = \delta_{kk} c^2.$$

Следовательно, уравнение (6.309') принимает вид

$$\nabla \dot{A} = \sum_k j^k p_k^* f_k = -\rho c.$$

Умножая на f_k^* и интегрируя, получаем

$$\omega_k p_k^* = - \int \rho f_k^* dv = - \sum_i e f_k^*(P_i),$$

где $f_k^*(P_i)$ — значение f_k^* , соответствующее положению P_i i -й частицы. Аналогично получаем

$$\sum_l p_l^* p_l = \frac{e^2}{c^2} \sum_l \sum_{i, i'} \frac{f_l^*(P_i) f_l(P_{i'})}{\omega_l^2}.$$

В этом выражении при суммировании по i и i' сочетание ii' встречается дважды ($i \neq i'$). Следовательно, две частицы дают член

$$\mathcal{H}_{ii'} = \frac{e^2}{c^2} \sum_l \frac{f_l^*(P_i) f_l(P_{i'})}{\omega_l^2},$$

где $\mathcal{H}_{ii'}$ — функция координат точек P_i и $P_{i'}$. Считая точку $P_{i'}$ фиксированной, имеем, поскольку $\Delta f = -\omega^2 f$, уравнение

$$\Delta \mathcal{H}_{ii'} = -\frac{e^2}{c^2} \sum_l f_l^*(P_i) f_l(P_{i'}) = -e^2 \delta(P_i - P_{i'}),$$

где $\delta(P_i - P_{i'}) = 0$, за исключением случая, когда P_i совпадает с $P_{i'}$. Следовательно, гамильтониан $\mathcal{H}_{ii'}$ как функция положения точки P_i , которую мы считаем переменной, удовлетворяет уравнению Пуассона с единственной особенностью в точке $P_{i'}$, а значит,

$$\mathcal{H}_{ii'} = \frac{e^2}{r_{ii'}},$$

где $r_{ii'}$ — расстояние между двумя рассматриваемыми частицами. Поэтому

$$\sum_l p_l^* p_l = \sum_{i < i'} \frac{e^2}{r_{ii'}}.$$

Следовательно, $\mathcal{H}_{ii'}$ тождествен кулоновской энергии точечных зарядов, находящихся в поле.

Итак, гамильтониан (6.315) можно записать в окончательном виде, в который уже не входит компонента продольного поля

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{i}} (p_{\mathbf{i}}^* p_{\mathbf{i}} + \omega_{\mathbf{i}}^2 q_{\mathbf{i}}^* q_{\mathbf{i}}) + \sum_{\mathbf{i} < \mathbf{i}'} \frac{e^2}{r_{\mathbf{i}\mathbf{i}'}} + \sum_{\mathbf{i}} c \left[m^2 c^2 + \left(\Pi_{\mathbf{i}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_{\mathbf{i}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.315')$$

Легко проверить, что канонические уравнения

$$\frac{dx_{\mathbf{i}}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{\mathbf{x}}^{(\mathbf{i})}}, \quad \frac{d\pi^{(\mathbf{i})}}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{\mathbf{i}}}, \quad \dots$$

представляют собой уравнение движения электрона

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} = e \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{h} \right).$$

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Введение

В гл. V мы показали, каким образом Лоренц (1890 г.), исходя из микроскопического поля электронов, вывел уравнения макроскопического поля для медленно движущихся тел в предположении, что эти тела не являются магнетиками. Хотя выведенные Лоренцем уравнения и объясняют эффекты первого порядка лучше, чем уравнения, полученные Герцем, который основывался на галилеевых преобразованиях, последовательно оставаясь в рамках классической теории, все же они не являются удовлетворительными, поскольку теория Лоренца не учитывает основных положений теории относительности и неприменима к магнетикам.

Эйнштейн в работе, опубликованной в 1905 г. [1], попытался решить эту проблему, полагая ее основной целью своей специальной теории относительности, но ему не удалось получить общий вид электромагнитных уравнений для движущихся сред. Он ограничился в основном уравнениями микроскопического поля одного электрона. Впервые эта проблема была решена вполне удовлетворительно с *феноменологической точки зрения* Минковским [2] на основе специальной теории относительности.

Впоследствии Делленбах показал, что эти релятивистские уравнения макроскопического поля для движущихся тел могут быть получены усреднением релятивистских уравнений микроскопического поля, если изменить подходящим образом рассуждения Лоренца.

Метод, использованный Делленбахом, был подвергнут критическому разбору Виглиным, который указал правильный метод усреднения микроскопических уравнений, записанных в четырехмерном виде.

Таким образом, в настоящее время макроскопическая релятивистская электродинамика представляет собой хорошо обоснованную теорию, разбор которой позволяет рассмотреть с общих позиций многие проблемы, изложенные в предыдущих главах.

§ 1. Ковариантная формулировка уравнений электромагнитного поля в общем случае произвольной материальной среды. Уравнения Минковского

Как мы видели в гл. V, § 1, уравнения электромагнитного поля в случае пустого пространства могут быть записаны в ковариантной форме [см. (5.12) и (5.13)] при помощи понятий тензора электромагнитного поля и 4-вектора плотности тока-заряда:

$$F_{\mu\nu} = \left(\mathbf{B}, -\frac{j}{c} \mathbf{E} \right), \quad J_\mu = (\mathbf{i}, j c \mathbf{q}).$$

В данном случае (движущаяся среда) оказывается, что 4-вектор плотности тока-заряда J_μ в собственной инерциальной системе, связанной с рассматриваемым телом, может иметь отличную от нуля пространственную компоненту

$$J_\mu^0 = (i^0, j c q^0),$$

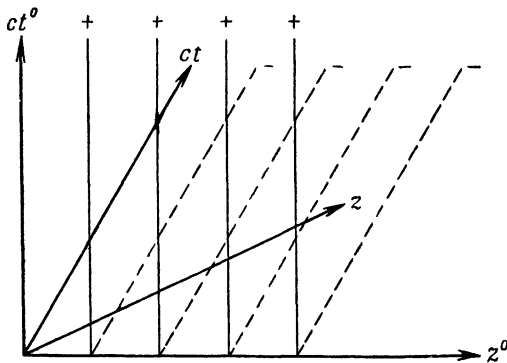
где i^0 — плотность тока рассматриваемого тела, находящегося в относительном покое. Переходя от собственной системы (S^0) к инерциальной системе (S), движущейся по направлению оси Oz^0 , имеем

$$i_3 = \alpha (i_3^0 - v q^0), \quad q = \alpha \left(q^0 - \frac{v}{c^2} i_3^0 \right). \quad (7.1)$$

Первое соотношение допускает простую физическую интерпретацию, поскольку в правой части появляется конвекционный ток Роуланда, вызванный переносом заряда q^0 со скоростью v . Интерпретация второго соотношения несколько сложнее, ибо если в собственной системе тело нейтрально ($q^0 = 0$), то относительно системы (S) оно оказывается заряженным электричеством с плотностью $q \neq 0$. Таким образом, контур, через который проходит ток плотностью \mathbf{i} , помещенный параллельно плоскости $x^0 O y^0$, окажется заряженным в системе (S) электрическими зарядами, т. е., помимо магнитного момента, будет обладать и электрическим моментом. Чтобы понять появление этого электрического заряда, обратимся к одномерной микроскопической модели металла. Предположим, что электроны движутся вдоль цепочки положительных ионов, которые мы предполагаем неподвижными и расположенными вдоль оси Oz^0 . Равенство $q^0 = 0$ означает, что в некоторый момент t^0 вдоль оси Oz^0 плотности положительных и отрицательных зарядов равны друг другу.

Проведем в плоскости (ct, z) мировые линии ионов и электронов (фиг. 36). Первые будут прямыми, параллельными оси ct^0 (так как ионы предполагаются неподвижными), в то время как мировые линии электронов будут наклонены к ct^0 , ибо электроны движутся относительно решетки ионов. Строя чертеж в предположении, что

при $t^0 = 0$ каждый электрон находится против иона, замечаем, что в системе (S) расстояние между мгновенными положениями двух соседних электронов не равно уже расстоянию между двумя соседними ионами. Следовательно, можно заключить, что относительно



Ф и г. 36.

системы (S) появляются нескомпенсированные положительные заряды, которые по отношению к системе (S⁰) соответствуют отрицательному току в металле.

Рассмотрим уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}}, \quad \nabla \mathbf{D} = \rho, \quad (7.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0. \quad (7.3)$$

С учетом соотношений

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (7.4)$$

уравнения (7.2) переписутся следующим образом:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{i} + \mathbf{i}', \quad (7.2')$$

$$\epsilon_0 \nabla \mathbf{E} = \rho - \nabla \mathbf{P} = \rho + \rho',$$

где

$$\mathbf{i}' = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}}, \quad \rho' = -\nabla \mathbf{P} \quad (7.5)$$

суть соответственно плотности фиктивного поляризационного тока и заряда. Определяя 4-вектор плотности поляризационного тока

$$J_{\mu}^{(M)} = \frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad (7.6)$$

где

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 & jcP_1 \\ -M_3 & 0 & M_1 & jcP_2 \\ M_2 & -M_1 & 0 & jcP_3 \\ -jcP_1 & -jcP_2 & -jcP_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

есть тензор электрической и магнитной поляризаций, можно переписать уравнения (7.2') в ковариантной форме аналогично уравнениям (5.12):

$$\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 (J_\lambda + J_\lambda^{(M)}). \quad (7.8)$$

Поскольку соотношения (7.4) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (7.4')$$

то, помимо тензора электромагнитного поля $F_{\lambda\nu}$, определенного соотношениями (5.10), следует определить второй тензор $G_{\lambda\nu}$, называемый тензором возбуждения электромагнитного поля, соотношением

$$G_{\lambda\nu} = \frac{1}{\mu_0} F_{\lambda\nu} - M_{\lambda\nu}, \quad (7.9)$$

так что

$$G_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -jcD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -jcD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -jcD_3 \\ jcD_1 & jcD_2 & jcD_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

В этом случае с учетом (7.6) и (7.9) уравнение (7.8) переписывается в виде

$$\frac{\partial G_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} = J_\lambda. \quad (7.11)$$

Это уравнение является ковариантной формой записи группы уравнений (7.2) с источниками. Ковариантная форма уравнений без источников имеет прежний вид [см. (5.13)]:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7.12)$$

Следовательно, для записи в ковариантной форме уравнений макроскопического электромагнитного поля в материальных средах необходимы два тензора.

1. Ковариантная форма записи уравнений, характеризующих материальную среду. В случае свободного пространства в собствен-

ной системе отсчета имеем

$$\mathbf{D}^0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{B}^0 = \mu_0 \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{i}^0 = 0. \quad (7.13)$$

Эти уравнения просто записываются в ковариантной форме, так как, согласно (7.9), имеем

$$G_{\lambda\nu} = \frac{1}{\mu_0} F_{\lambda\nu}.$$

В материальной среде

$$\mathbf{D}^0 = \varepsilon \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{B}^0 = \mu \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{i}^0 = \gamma \mathbf{E}^0, \quad (7.14)$$

и, переходя при помощи специального преобразования Лоренца к системе (S), с учетом соотношений (5.76) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\parallel} &= \varepsilon \mathbf{E}_{\parallel}, & \left(\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp} &= \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \\ \mathbf{B}_{\parallel} &= \mu \mathbf{H}_{\parallel}, & \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)_{\perp} &= \mu (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Замечаем, что форма уравнений (7.14) не сохраняется.

Как показал Минковский, можно записать уравнения (7.14) в ковариантной форме. С этой целью для упрощения выкладок используем следующие две леммы, доказательство которых получается немедленно.

Лемма 1. Если компоненты тензора равны нулю в некоторой инерциальной системе отсчета, то они будут равны нулю и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Лемма 2. Если компоненты двух тензоров равны (совпадают) в некоторой инерциальной системе отсчета, то они остаются равными и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим соотношение

$$\mathbf{D}^0 = \varepsilon \mathbf{E}^0. \quad (7.16)$$

С учетом (5.10) и (7.10) его можно записать в виде

$$\frac{1}{c^2} G_{k4}^0 = \varepsilon F_{k4}^0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Учитывая, что 4-вектор скорости в системе (S⁰) имеет вид

$$u_{\mu}^0 = (0, j c)$$

и, следовательно, можно записать

$$\frac{1}{c^2} G_{k\sigma}^0 u_{\sigma}^0 = \varepsilon F_{k\sigma}^0 u_{\sigma}^0,$$

получаем, согласно лемме 2,

$$\frac{1}{c^2} G_{\rho\sigma} u_{\sigma} = \varepsilon F_{\rho\sigma} u_{\sigma}. \quad (7.16')$$

Это — ковариантная форма соотношения (7.16).

Аналогично для проекции векторов, входящих во второе соотношение (7.14), на ось Ox_1

$$B_1^0 = \mu H_1^0, \quad (7.17)$$

получим

$$F_{23}^0 = \mu G_{23}^0, \quad \text{или} \quad F_{23}^0 u_4^0 = \mu G_{23}^0 u_4^0. \quad (7.17')$$

Дополняя это соотношение нулевыми членами, перепишем его в виде

$$F_{23}^0 u_4^0 + F_{34}^0 u_2^0 + F_{42}^0 u_3^0 = \mu (G_{23}^0 u_4^0 + G_{34}^0 u_2^0 + G_{42}^0 u_3^0).$$

Аналогично проекции на остальные две оси можно записать следующим образом:

$$F_{31}^0 u_4^0 + F_{14}^0 u_3^0 + F_{43}^0 u_1^0 = \mu (G_{31}^0 u_4^0 + G_{14}^0 u_3^0 + G_{43}^0 u_1^0),$$

$$F_{12}^0 u_4^0 + F_{24}^0 u_1^0 + F_{41}^0 u_2^0 = \mu (G_{12}^0 u_4^0 + G_{24}^0 u_1^0 + G_{41}^0 u_2^0).$$

Эти соотношения дополним тождеством

$$F_{12}^0 u_3^0 + F_{23}^0 u_1^0 + F_{31}^0 u_2^0 = \mu (G_{12}^0 u_3^0 + G_{23}^0 u_1^0 + G_{31}^0 u_2^0).$$

Согласно сформулированным леммам, относительно некоторой системы (S) можно записать соотношение

$$F_{\rho\sigma} u_\lambda + F_{\sigma\lambda} u_\rho + F_{\lambda\rho} u_\sigma = \mu (G_{\rho\sigma} u_\lambda + G_{\sigma\lambda} u_\rho + G_{\lambda\rho} u_\sigma). \quad (7.17'')$$

Это и есть искомая ковариантная форма.

Третье соотношение (7.14), если взять проекцию векторов, входящих в него, на ось Ox_1

$$i_1^0 = \gamma E_1^0,$$

запишется в виде

$$J_1^0 = \gamma j c F_{14}^0 = \gamma F_{14}^0 u_4^0.$$

Дополняя его нулевыми членами, получаем

$$J_k^0 = \gamma F_{k\sigma}^0 u_\sigma^0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7.18)$$

Заметим, что для четвертой компоненты $J_4^0 = j c Q^0$ уже нельзя записать аналогичного соотношения, так как $F_{4\sigma}^0 u_\sigma^0 \equiv 0$. Но поскольку можно записать

$$J_4^0 = -\frac{1}{c^2} (u_4^0 J_4^0) u_4^0 = -\frac{1}{c^2} (u_\lambda^0 J_\lambda^0) u_4^0, \quad (7.19)$$

то, дополняя нулевыми членами (7.18), получаем вообще соотношение

$$J_\mu^0 = \gamma F_{\mu\sigma}^0 u_\sigma^0 - \frac{1}{c^2} (u_\lambda^0 J_\lambda^0) u_\mu^0. \quad (7.20)$$

Согласно сформулированным леммам, это выражение ковариантно.

Отметим, что из (7.20) следует ковариантное разложение 4-тока на 4-ток проводимости и конвекционный 4-ток

$$J_{\mu} = J_{\mu}^c + J_{\mu}^v, \quad (7.21)$$

где

$$J_{\mu}^c = \gamma F_{\mu\sigma} u_{\sigma}, \quad J_{\mu}^v = (i^0, 0),$$

следовательно,

$$J_{\mu}^v = -\frac{1}{c^2} (u_{\lambda}^0 J_{\lambda}^0) u_{\mu}, \quad J_{\mu}^0 = (0, jc^0).$$

Поэтому ковариантное выражение закона Ома имеет вид

$$J_{\mu} + \frac{1}{c^2} (u_{\sigma} J_{\sigma}) u_{\mu} = \gamma F_{\mu\sigma} u_{\sigma}. \quad (7.20')$$

1. Отметим, что в соотношение (7.16') входят следующие векторные величины:

$$F_{\rho} = F_{\rho\sigma} u_{\sigma}, \quad (7.22)$$

$$G_{\rho} = \frac{1}{c^2} G_{\rho\sigma} u_{\sigma}, \quad (7.23)$$

компоненты которых суть

$$F_{\rho}^0 = (E^0, 0), \quad F_{\rho} = \left(\alpha E^*, \frac{i}{c} \alpha E^* \cdot v \right) \quad (7.22')$$

и соответственно

$$G_{\rho}^0 = (D^0, 0), \quad G_{\rho} = \left(\alpha D^*, \frac{i}{c} \alpha D^* \cdot v \right), \quad (7.23')$$

где

$$E^* = E + v \times B, \quad D^* = D + \frac{1}{c^2} v \times H \quad (7.24)$$

представляют эффективное поле.

Отсюда следует, что соотношение (7.16') может быть записано в виде соотношения между векторами эффективного поля

$$D^* = \varepsilon E^*.$$

Интерпретация 4-векторов (7.22) и (7.23) простая: они представляют собой 4-силу, действующую на единичные заряды, которые находились бы в полости, вырезанной внутри равномерно движущейся среды так, чтобы эта полость имела соответственно вид тонкого цилиндра (для E^*) и плоского диска (для D^*), оси которых параллельны направлению движения.

2. Используя дуальные тензорам $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ псевдотензоры, определенные соотношениями

$$F_{\kappa\lambda}^* = \frac{1}{2j} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad G_{\kappa\lambda}^* = \frac{1}{2j} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} G_{\mu\nu},$$

где $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — единичный тензор четвертого порядка, антисимметричный по всем индексам, можно образовать величины

$$F_{\rho}^* = \frac{1}{c} F_{\rho\sigma}^* u_{\sigma}, \quad G_{\rho}^* = \frac{1}{c} G_{\rho\sigma}^* u_{\sigma}, \quad (7.25)$$

компоненты которых суть

$$\begin{aligned} F_{\rho}^{*0} &= (\mathbf{B}^0, 0), & F_{\rho}^* &= \left(\alpha \mathbf{B}^*, \frac{i}{c} \alpha \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{v} \right), \\ G_{\rho}^{*0} &= (\mathbf{H}^0, 0), & G_{\rho}^* &= \left(\alpha \mathbf{H}^*, \frac{i}{c} \alpha \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{v} \right), \end{aligned} \quad (7.25')$$

где

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H} - (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad (7.26)$$

представляют эффективное поле.

Отсюда следует, что соотношение (7.17) может быть записано и в следующей ковариантной форме:

$$F_{\rho}^* = \mu G_{\rho}^*, \quad \text{или} \quad F_{\rho\nu}^* u_{\nu} = \mu G_{\rho\nu}^* u_{\nu}, \quad (7.27)$$

которая эквивалентна (7.17'); следовательно, соотношение типа (7.17) может быть записано и для магнитного эффективного поля

$$\mathbf{B}^* = \mu \mathbf{H}^*. \quad (7.28)$$

3. Отметим, наконец, что тензоры электромагнитного поля могут быть выражены при помощи 4-векторов (7.22), (7.23) и (7.26):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} (u_{\mu} F_{\nu} - u_{\nu} F_{\mu}) + \frac{1}{jc} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa}^* u_{\lambda}, \\ G_{\mu\nu} &= (u_{\mu} G_{\nu} - u_{\nu} G_{\mu}) + \frac{1}{jc} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} G_{\kappa}^* u_{\lambda}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Легко проверить, что соотношение (7.28) с учетом (7.29) и (7.16') можно записать в виде

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} [F_{\mu\nu} + (\varepsilon_{\mu} - \varepsilon_0 \mu_0) (u_{\mu} F_{\nu} - u_{\nu} F_{\mu})]. \quad (7.30)$$

Это ковариантное выражение содержит оба соотношения (7.16) и (7.17).

2. Лоренцева форма уравнений электродинамического поля для равномерно движущихся сред. Отметим, что, используя эффективные поля \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* , определенные соотношениями (7.24) и (7.26), можно переписать векторные уравнения макроскопического поля в форме, которой мы обязаны Лоренцу. А именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}^* + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i} &= \nabla \times \mathbf{H}^* + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Учитывая условия

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \mathbf{D} = \rho, \quad (7.31')$$

а также соотношения (4.2) и вводя обозначения Лоренца [3]

$$\underline{\dot{\mathbf{A}}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{A} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A}), \quad (7.32)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\mathbf{B}}} &= -\nabla \times \mathbf{E}^*, \\ \underline{\dot{\mathbf{D}}} + \mathbf{i} - \rho \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{H}^*, \end{aligned} \quad (7.32')$$

или в интегральной форме

$$\begin{aligned} \int \underline{\dot{\mathbf{B}}}_n dS &= - \int \mathbf{E}^* dl, \\ \int \underline{\dot{\mathbf{C}}}_n dS &= \int \mathbf{H}^* dl, \end{aligned} \quad (7.32'')$$

где, если учесть (7.1), полный ток будет выражаться следующим образом:

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\dot{\mathbf{D}}} + \mathbf{i} - \rho \mathbf{v} = \underline{\dot{\mathbf{D}}} + \mathbf{i}_c. \quad (7.33)$$

В левую часть уравнений (7.32'') входит интеграл по поверхности, которая движется со скоростью \mathbf{v} , а в правую часть — интеграл, который берется по контуру этой поверхности.

Уравнения (7.32'') обобщают уравнения Максвелла, записанные в интегральной форме, на случай движущихся тел. Отметим, что первое уравнение (7.32'') дает точное выражение для явления электромагнитной индукции в случае движущегося проводника или движущегося магнита.

Из этих уравнений вытекают граничные условия на поверхности раздела двух различных сред, в случае когда эти среды движутся. Они оказываются аналогичны условиям для случая покоящихся сред, из которых могут быть получены при помощи преобразования Лоренца. А именно на граничной поверхности движущихся тел тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* , а также и нормальная компонента вектора \mathbf{B} непрерывны, а нормальная компонента вектора \mathbf{D} разрывна, если предполагать скорость \mathbf{v} непрерывной, т. е. одинаковой на обеих сторонах рассматриваемой граничной поверхности. Если вектор \mathbf{v} разрывен, т. е. при пересечении границы имеет место скачок от 0 к \mathbf{v} , как, например, в случае униполярной индукции, где фигурирует тангенциальная скорость ($v = v_t$), то непрерывными будут тангенциальные компоненты не векторов \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* , а векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Это можно показать, повторяя рассуждения, проведенные, например, в книге Тамма на стр. 427, если учесть (7.32) и помнить, что мы рассматриваем квазистационарный

случай, а именно

$$\underline{\dot{\mathbf{B}}} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \underline{\mathbf{C}} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) + \dot{\mathbf{i}}$$

и имеем

$$-\int [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_n dS = -\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl.$$

Из (7.32'') следует

$$-\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl = -\int \mathbf{E} dl - \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl,$$

значит,

$$\int \mathbf{E} dl = 0,$$

т. е. тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} непрерывна.

Аналогично

$$-\int (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{D}) dl + \int i_n dS = \int \mathbf{H} dl - \int (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) dl,$$

откуда следует, в случае когда можно пренебречь интегралом, относящимся к току $\dot{\mathbf{i}}$,

$$\int \mathbf{H} dl = 0,$$

т. е. непрерывность тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} .

Итак, уравнения Минковского макроскопического электромагнитного поля для движущихся тел получаются из уравнений Максвелла для покоящихся тел при помощи преобразования Лоренца. Как показал Франк [4], уравнения Герца для движущихся тел получаются при помощи преобразования Галилея из уравнений Максвелла для покоящихся тел.

§ 2. Переход от микроскопических уравнений к макроскопическим в релятивистском случае

Поскольку микроскопические уравнения релятивистской теории электрона ковариантны относительно группы Лоренца и в случае покоящихся тел приводят к уравнениям Максвелла (в результате усреднения), естественно ожидать, что в случае движущихся тел они обязательно приведут к уравнениям Минковского. Как мы видели (см. гл. V, § 1), осуществляя этот переход, Лоренц пришел к макроскопическим уравнениям, отличным от уравнений Минковского, справедливых только для нерелятивистских скоростей ($v \ll c$) и ненамагничиваемых тел.

Применение метода Лоренца в четырехмерном случае для релятивистских скоростей было осуществлено Делленбахом [5]. Задача состоит в вычислении средних от величин, входящих в ковариант-

ные уравнения микроскопического поля (см. гл. VI, § 1), по четырехмерным объемам, которые значительно больше объема атомов, но в то же время достаточно малы, чтобы их можно было рассматривать как бесконечно малые с макроскопической точки зрения. Как показал Виглин [6], который проанализировал с критической точки зрения четырехмерное обобщение метода Лоренца, сделанное Делленбахом, одним из недостатков этого обобщения является то, что при определении тензора возбуждения $G_{\mu\nu}$ (макроскопического), которое сводится к определению макроскопического тензора момента $M_{\mu\nu}$, не соблюдается строго определенное условие единственности, ибо метод определения средней плотности заряда и плотности тока Лоренцем имеет частный характер. Устраняя отмеченные недостатки, Виглин указывает строгий метод вычисления средних в четырехмерном случае. Для этого рассматриваются четырехмерные элементарные микроскопические объемы ω , центры которых определены координатами $x_\nu(\mathbf{r}, x_4 = jct)$ и внутри которых каждая точка задана координатами $\xi_\nu(\xi, \xi_4 = jct)$ относительно центра, так что $d\xi_\nu$ — бесконечно малый элемент, а

$$d\omega = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = (d\xi),$$

и макроскопические четырехмерные элементарные объемы $d\Omega$, точки в которых определены координатами $X_\nu(\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi, X_4 = x_4 + \xi_4 = jct)$, так что $dx_\nu \approx \xi_\nu$ — элемент бесконечно малой длины и $d\Omega = (dx) = \omega$.

Как и в трехмерном случае (см. гл. I, § 7), тензор поля определен как среднее микроскопического тензорного поля $j_{\mu\nu}$. Микроскопический 4-вектор плотности тока может быть также представлен в виде суммы двух слагаемых: конвекционного тока, порожденного свободными электронами $(j_{\text{микро}}^{\text{своб}})_\nu$, и тока, порожденного связанными электронами $(j_{\text{микро}}^{\text{связ}})_\nu$. Макроскопический 4-вектор плотности тока J_ν , по определению, есть средняя

$$J_\nu = \overline{\left(j_{\text{микро}}^{\text{своб}} \right)_\nu}, \quad (7.34)$$

а среднее значение 4-плотности тока связанных зарядов

$$\overline{\left(j_{\text{микро}}^{\text{связ}} \right)_\nu} = \frac{\partial M_{\nu\mu}}{\partial x_\mu}, \quad (7.35)$$

где тензор плотности момента системы зарядов определяется из соотношения

$$M_{\nu\mu} = \frac{1}{2V} \sum_i e_i \overline{(\xi_{i\nu} u_{i\mu} - \xi_{i\mu} u_{i\nu})} \quad (7.36)$$

вычислением средней во времени. Пространственная часть $M_{\mu\nu}$ представляет собой антисимметричный тензор второго порядка,

который дуален некоторому аксиальному вектору

$$M_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{klj} M_{kl} = \frac{1}{2V} \left(\sum_i e_i \overline{\xi_i \times \mathbf{u}_i} \right)_j; \quad (7.37)$$

следовательно, он выражает намагниченность, а временная часть

$$M_{k4} = \frac{jc}{v} \sum_i e_i \overline{\xi_{ik}} = jcP_k \quad (7.38)$$

представляет электрическую поляризацию.

Тензор $M_{\nu\mu}$ имеет вид (7.7):

$M_{\nu\mu}$	$\nu \backslash \mu$	1	2	3	4
	1	0	M_3	$-M_2$	jcP_1
	2	$-M_3$	0	M_1	jcP_2
	3	M_2	$-M_1$	0	jcP_3
	4	$-jcP_1$	$-jcP_2$	$-jcP_3$	0

Доказательство соотношения (7.35) проводится с учетом, что

$$j_v^{свнз}(\mathbf{R}, \theta) = \sum_i e_i \frac{dX_i}{d\theta} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i),$$

где e_i — значение i -го элементарного заряда; точно так же

$$\int_{\omega} j_v^{свнз} d\omega = \sum_i \int_{\omega} e_i \frac{d\xi_{iv}}{d\theta} \delta(\xi - \xi_i) (d\xi) = jc \sum_i e_i \int_{\theta'}^{\theta''} u_{iv} d\theta.$$

Беря 4-мерное среднее¹⁾, можно записать

$$\overline{j_v^{свнз}} = -\frac{jc}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_i e_i \int_{\theta'}^{\theta''} \xi_{i\mu} u_{iv} d\theta,$$

где $\omega = jc\theta V$. Это последнее тензорное выражение можно разложить на симметричную составляющую, которая равна нулю, и антисимметричную составляющую, в которую входит выражение (7.36).

Определив тензор индукции макроскопического поля следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \overline{f}_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}, \quad (7.39)$$

что эквивалентно записи $[\mathbf{H} = (1/\mu_0) \mathbf{B} - \mathbf{M}, \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}]$, замечаем, что, беря среднее от микроскопических уравнений (6.4), (6.5), получаем макроскопические уравнения (7.11), (7.12).

¹⁾ Доказательство этого свойства, основанное на теореме Делленбаха, см. в работе [6].

§ 3. Интерпретация уравнений Минковского

Из полученных уравнений вытекают следующие важные выводы: деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля имеет, согласно формулам (5.76), *относительный* характер, зависящий от выбранной системы отсчета. С этой точки зрения эффективное значение векторов электрического поля (7.24) выражает истинное значение этой величины в рассматриваемой системе координат. Видно также, что с физической точки зрения аналогом напряженности электрического поля \mathbf{E} является магнитная индукция \mathbf{B} , а не напряженность магнитного поля \mathbf{H} [см. (7.26)].

Аналогично и деление тока на ток проводимости и конвекционный ток имеет относительный характер. Даже если по отношению к системе отсчета (S'), связанной с движущимся телом, мы имеем только ток проводимости, так как плотность зарядов равна нулю, то по отношению к системе (S), помимо тока проводимости, будем иметь и конвекционный ток, так как плотность зарядов отлична от нуля, согласно (5.73) и (5.73').

Точно так же существует специальная связь между векторами \mathbf{P} и \mathbf{M} . Так, если относительно собственной системы отсчета тело оказывается электрически поляризованным и не намагничено, то относительно другой системы (S), согласно формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\parallel} &= \mathbf{P}_{\parallel}^0, & \mathbf{P}_{\perp} &= \alpha \left(\mathbf{P}^0 + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{M}^0 \right)_{\perp}, \\ \mathbf{M}_{\parallel} &= \mathbf{M}_{\parallel}^0, & \mathbf{M}_{\perp} &= \alpha (\mathbf{M}^0 - \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0)_{\perp}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

оно будет и намагничено. Если $\mathbf{M}^0 = 0$, то

$$\mathbf{M}_{\perp} = -\alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}^0), \quad (7.41)$$

где при $\beta \ll 1$ будем полагать $\alpha = 1$. Следовательно, равномерно движущееся электрически поляризованное тело имеет магнитный момент, т. е. намагничено. Конвекционный ток в поляризованном диэлектрике эквивалентен циркуляции зарядов по поверхности.

Аналогично если $\mathbf{P}^0 = 0$, то

$$\mathbf{P}_{\perp} = \alpha \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{M}_{\perp}^0; \quad (7.42)$$

следовательно, равномерно движущееся намагниченное тело становится электрически поляризованным.

Феноменологическая теория Минковского дает возможность объяснить с единой точки зрения все экспериментальные наблюдения, проведенные над электромагнитными явлениями в движущихся телах (см. гл. IV, § 3). Так, объяснение опыта Роуланда следует из формул преобразования 4-вектора тока и из вышеприведенного замечания о том, что конвекционный ток порождает магнитное поле

такое же, как и ток проводимости, и отличие между ними лишь относительное.

Для объяснения эффектов первого порядка, т. е. тех, для которых $\beta \ll 1$, отбросим члены с β^2 и положим $\alpha = 1$.

В дальнейшем будет удобно пользоваться соотношением (7.27), в котором

$$u_k = v_k, \quad u_4 = jc.$$

Ввиду наличия множителя $\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0$ в выражении F_ρ [см. (7.22)] сохраним лишь члены, в которые входит множителем скорость c :

$$F_\rho \approx F_{\rho 4} jc.$$

Следовательно,

$$G_{ik} \approx \frac{1}{\mu} [F_{ik} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)(v_i F_{i4} - v_k F_{k4}) jc]$$

или

$$\mathbf{B} \approx \mu \mathbf{H} - (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)(\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad (7.43)$$

$$\mathbf{D} \approx \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)(\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (7.44)$$

При помощи соотношения (7.43) можно дать удовлетворительное объяснение опыту Рентгена — Эйхенвальда (см. гл. IV, § 3). В условиях опыта, если электрическое поле перпендикулярно скорости \mathbf{v} поступательного движения в диэлектрической среде ($\mu = \mu_0$), будем иметь

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_\parallel = 0,$$

а $\mathbf{H} = 0$; таким образом, магнитное поле в диэлектрике будет равно

$$\mathbf{B} = \mu_0(\varepsilon_0 - \varepsilon)(\mathbf{v} \times \mathbf{E}).$$

Плотность тока на поверхности будет, следовательно, такова:

$$\mathbf{k}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{M} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}),$$

т. е.

$$\mathbf{k}_m = (\varepsilon - \varepsilon_0) v |\mathbf{E}|. \quad (7.45)$$

а это и есть выражение плотности тока Рентгена.

Для объяснения обратного явления, изученного Вильсоном (см. гл. IV, § 3), будем пользоваться соотношением (7.44), принимая во внимание, что в данном опыте электрическое поле равно нулю, а магнитное поле перпендикулярно скорости поступательного движения. Следовательно, в диэлектрике ($\mu = \mu_0$) будем иметь

$$\mathbf{D} = \mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = (\varepsilon - \varepsilon_0)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Плотность зарядов, появившихся в результате поляризации, будет

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) v |\mathbf{B}|, \quad (7.46)$$

или

$$\sigma = -(\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) v |\mathbf{H}|.$$

Как мы видели, опыт Эйхенвальда показывает, что при движении поляризованного диэлектрика возникает магнитное поле, обусловленное намагниченностью \mathbf{M} , полученной диэлектриком вследствие вращения, ибо в состоянии покоя $\mathbf{M}^0 = 0$, что немедленно получается из соотношений (7.41). Обратное явление, т. е. возникновение электрической поляризации при вращении, наблюдается в случае так называемой униполярной индукции, которая широко используется в технике. Этот эффект также следует из формул (7.40). Заметим, однако, что релятивистский эффект не проявляется в чистом виде в случае вращения магнита, а проявляется только в случае равномерного поступательного движения перпендикулярно магнитному полю (ср. Тамм, стр. 546).

Явление униполярной индукции, которое на первый взгляд кажется парадоксальным, может быть легко объяснено при помощи формул (7.40), поскольку в поступательно движущемся магните возникает электрический момент. Что касается электромагнитной индукции, то экспериментально установлено, что на концах проводника, движущегося в поперечном магнитном поле, появляется разность потенциалов. Когда источник магнитного поля внешний, объяснение получается очень просто. Явление кажется парадоксальным, когда магнитное поле создается постоянной намагниченностью \mathbf{M} движущегося стержня, ибо такой стержень эквивалентен с точки зрения магнитного действия системе молекулярных токов. Индукцию, называемую униполярной, нужно рассматривать как *релятивистский эффект* в том смысле, что электрическое поле, возникающее в движущемся стержне, вызвано поляризацией \mathbf{P} , заданной соотношением (7.42). Принимая во внимание соотношения (7.32"), т. е. уравнение

$$\mathcal{E}^* = \oint \mathbf{E}^* d\mathbf{l} = - \int \mathbf{B} \mathbf{n} dS,$$

где \mathbf{E}^* — эффективное поле, а \mathcal{E}^* — электродвижущая сила, в случае униполярной индукции замечаем, что

$$\mathcal{E}^* = \int [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \mathbf{n} dS = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l}.$$

Поскольку поле \mathbf{B} уже не однородно, то электрическое поле не будет безвихревым.

Практически униполярная индукция реализуется путем равномерного вращения намагниченного стержня. Вообще рассмотрение такого случая вращающейся системы выходит за рамки специальной теории относительности. Тем не менее в случае равномерного вращения остаются справедливыми вышеприведенные формулы, если

учесть, что речь идет об эффекте первого порядка и что для электромагнитных явлений поверхность Земли представляет собой лоренцеву систему отсчета, а в этом приближении она инерциальна.

§ 4. Тензор энергии-импульса в релятивистской феноменологической электродинамике

Чтобы дополнить уравнения макроскопического поля (7.3), Минковский определил тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ так, чтобы в случае покоящихся сред он совпал с тензором, введенным в теории Максвелла, т. е. так, чтобы он давал правильные выражения для максвеллова тензора натяжений T_{ik} , вектора Умова — Пойнтинга \mathbf{Y} , плотности электромагнитного импульса \mathbf{g} и плотности энергии ω . С другой стороны, в случае пустого пространства 4-тензор энергии-импульса должен совпадать с аналогичным тензором микроскопического поля. Легко проверить, что 4-тензор энергии-импульса выражается следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}G_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}G_{\lambda\kappa}. \quad (7.47)$$

Так как вместо соотношения (6.1) имеем соотношения (7.9), связывающие эти два тензора, то в отличие от микроскопического тензора энергии-импульса свободного пространства тензор $T_{\mu\nu}$ оказывается *несимметричным*, а именно

$${}^2T = \left(\begin{array}{c|c} T_{ik} & \frac{j}{c} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{Y} \\ \hline -\frac{j}{c} \mathbf{Y} & \omega \end{array} \right), \quad (7.48)$$

что приводит к правильному выражению для плотности электромагнитного импульса

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{Y} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (7.49)$$

Как и в случае микроскопического поля, 4-мерная пондеромоторная сила равна 4-мерной дивергенции тензора энергии-импульса, что выражает закон сохранения импульса и энергии [см. (6.244')], т. е. теорему Умова — Пойнтинга.

Как показал Минковский, плотность силы Лоренца будет записываться в следующем виде:

$$K_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{4} \left(G_{\sigma\nu} \frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_{\mu}} - F_{\sigma\nu} \frac{\partial G_{\sigma\nu}}{\partial x_{\mu}} \right).$$

Заметим, что выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль в случае однородных и изотропных сред, а также в случае пустого пространства. Тензор $T_{\mu\nu}$ определен только с точностью до дивер-

генции по ν , т. е. к нему можно добавить член типа $(\partial/\partial x_\sigma) \chi_{\mu\nu\sigma}$, где $\chi_{\mu\nu\sigma}$ — произвольный тензор, антисимметричный по индексам $\nu\sigma$. Этот факт тесно связан с тем, что плотность энергии поля определена с точностью до аддитивной постоянной.

Несимметричность тензора энергии-импульса Минковского (7.47) вызвала продолжительные дискуссии. Считали, что этот факт создает реальные затруднения в теории Минковского. С другой стороны, Абрагам [7, 8] построил симметричное выражение этого тензора, которое в случае изотропных сред в собственной системе отсчета совпадает с тензором Минковского. Основной аргумент в пользу симметричного выражения тензора энергии-импульса макроскопического поля состоял в том, что он должен получаться усреднением по некоторой пространственно-временной области соответствующего выражения для случая микроскопического поля. Однако тензор энергии-импульса микроскопического поля симметричен. Против этого аргумента следует возразить, как это сделал Мёллер [9], что электрон вместе со своим микроскопическим электромагнитным полем образует замкнутую систему, макроскопическое же электромагнитное поле в материальных средах образует замкнутую систему, только если принимать во внимание присутствие соответствующего тела, т. е. к тензору энергии-импульса поля добавить механический тензор энергии-импульса тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классическая теория электронов Лоренца открыла новую главу теоретической физики, которую мы сегодня называем физикой элементарных частиц. Так как мы представляем себе вещество состоящим из различных элементарных частиц, знание их свойств и характера их взаимодействия имеет первостепенное значение. В настоящее время уже ясно, что такая теория не может быть построена в рамках классической электродинамики. К элементарным частицам, кроме электронов, относят еще около 30 частиц с сильно различающимися массами, либо однократно заряженных положительно или отрицательно, либо нейтральных. Для того чтобы объяснить их свойства, пришлось ввести различные поля: мезонное, нейтринное и т. д., не сводящиеся к электромагнитному полю. С другой стороны, открытие ряда свойств квантового характера и тот факт, что даже в случае электрона квантовые эффекты играют роль во взаимодействиях, имеющих место на расстояниях больше классического электронного радиуса, заставили отказаться от слишком узких рамок классической физики. Теория элементарных частиц основана прежде всего на квантовой теории поля.

Не намереваясь вдаваться в подробности, мы считаем все-таки интересным рассмотреть трудности, встречающиеся при объяснении классических свойств электрона в рамках классической электродинамики, и в связи с этим попытки раздвинуть основы классической электродинамики с целью устранения этих трудностей.

1. Как мы уже видели, теория Максвелла — Лоренца не может объяснить существование электронов. При анализе этой теории Эйнштейн подчеркнул противоречивость сочетания понятий непрерывного поля и материальной точки и пришел к выводу, что теорию Лоренца нельзя считать полной. Эйнштейн, между прочим, всегда считал, что частица не может быть посторонним элементом, который присоединяется к полю извне, а должна принадлежать самой структуре поля, образуя локальную аномалию поля, характеризующую очень большими значениями поля.

В теории Лоренца фактически мы различаем, с одной стороны, электромагнитное поле, описанное уравнениями Максвелла, а с дру-

гой стороны, электрон, рассматриваемый как элементарная частица, несущая либо точечный, либо протяженный заряд. Взаимодействие поля и частицы определяется силой Лоренца, а движение описывается классическими или релятивистскими уравнениями движения.

Серьезнейшие трудности появились при выборе модели электрона. Например, в случае протяженного электрона мы должны выбрать модель Лоренца, согласно которой электрон является маленьким шариком, несущим на своей поверхности отрицательный электрический заряд. В связи с этой моделью возникают вопросы устойчивости и реакции излучения. Из-за кулоновского отталкивания зарядов устойчивость сферического электрона не может быть обеспечена в рамках электродинамики, если не постулировать существование давления неэлектродинамического происхождения (давление Пуанкаре). Иными словами, нужно соответствующим образом дополнить тензор энергии-импульса, чтобы привести законы сохранения энергии и импульса в соответствие с существованием зарядов на шаре. При вычислении действия поля электрона на сам электрон получаем, кроме силы торможения Лоренца, еще ряд членов, содержащих высшие производные скорости, которые зависят от радиуса электрона и от принятого распределения заряда. Поскольку эти члены совершенно неопределенны, то их присутствие в уравнениях движения ведет к тому, что движение такого электрона также оказывается совершенно неопределенным. Как показал Лоренц, чтобы избежать этих трудностей, нужно отказаться от модели протяженной частицы и принять модель точечной частицы.

Однако теория точечного электрона также не лишена трудностей. Одна из главных трудностей связана с бесконечной собственной энергией. Опять хотя в уравнение движения входит на сей раз только сила торможения Лоренца, но, так как она пропорциональна производной ускорения по времени, уравнение движения является дифференциальным уравнением третьего порядка. Чтобы его проинтегрировать, помимо начальных значений координат точки и скорости нужно знать начальное ускорение. В частном случае небольших скоростей и колебательного движения электрона эту трудность можно обойти, записав реакцию излучения в виде силы затухания. В общем же случае уравнение движения приводит к возможности самоускорения электрона, даже когда последний свободен, в силу самодействия собственного поля.

Для устранения этих трудностей намечалось несколько возможных путей.

2. Одна из возможностей заключается в попытке обойти трудности путем такого обобщения уравнений микроскопического поля электрона, чтобы привести их к нелинейному виду. Так как в случае точечного электрона общая энергия поля, связанного с зарядом, становится бесконечной, то для получения конечного результата

Лоренц предложил осуществить «обрезание» путем введения классического радиуса электрона. Но вышеупомянутую трудность можно устранить и не прибегая к такому формальному приему, а именно путем построения единой теории, оправдывающей существование радиуса электрона. Первая попытка принадлежит Ми [1], сформулировавшему программу создания теории электромагнитного поля, в которой свойства элементарной частицы должны вытекать из свойств поля, подчиняющегося нелинейным уравнениям, которые получаются с помощью вариационного принципа из релятивистско-инвариантной функции Лагранжа. В этой теории масса электрона считается чисто электромагнитного происхождения, а электрон рассматривается как сгусток поля, т. е. сингулярная область электромагнитного поля. Исследования Ми указали на необходимость отказаться от линейных уравнений поля, если мы хотим выявить структуру электрона через посредство поля. Метод Ми был усовершенствован Борном и Инфельдом [2]. Нелинейная электродинамика, полученная таким путем, ведет к конечной полной энергии точечного электрона. Точечный заряд представляется как сингулярность поля, а отклонения от линейности ограничиваются областью порядка радиуса электрона. Вследствие открытия новых различных элементарных частиц, заряженных или нейтральных, интерес к единой электромагнитной теории сильно уменьшился, ибо стало очевидно, что массу и энергию электрона нельзя считать чисто электромагнитного происхождения. С другой стороны, в этой нелинейной классической теории электромагнитное поле с особенностью оказывается квазистационарным; этот явный недостаток удалось устранить только путем создания квантовой единой теории основного спинорного поля, как в нелинейной теории Гейзенберга [3], открывающей новые перспективы развития нелинейной теории полей.

3. Работы Дирака [4]¹⁾ привели к выводу, что можно получить конечную энергию и протяженность электрона, не меняя максвелловых уравнений поля, т. е. оставаясь в рамках классической линейной электродинамики. Метод Дирака заключается во введении способа релятивистски-инвариантного «вычитания» бесконечных величин, входящих в теорию точечного электрона Лоренца. В отличие от метода Лоренца, где поле излучения вычисляется с помощью запаздывающего потенциала, Дирак использует как запаздывающий, так и опережающий потенциалы, полагая, что поле излучения получается из вычитания полей, вычисленных на основе запаздывающего и опережающего потенциалов. Впоследствии Элизер [6] обобщил этот метод, положив

$$f_{\mu\nu}^{\text{нрл}} = k (f_{\mu\nu}^{\text{зап}} - f_{\mu\nu}^{\text{опер}}),$$

¹⁾ См. также работу Уилера и Фейнмана [5].

где k — произвольная постоянная, равная в случае, рассмотренном Дираком, $1/2$. Определенное таким путем поле излучения удовлетворяет однородному волновому уравнению и остается конечным вдоль мировой линии; в отличие от поля теории Лоренца оно не смешивается с кулоновым полем. Уравнение движения электрона получается из законов сохранения энергии-импульса. Оно имеет форму уравнения Лоренца для случая протяженного электрона. Конечность массы электрона объясняется существованием отрицательной энергии в конечной области вокруг особой точки поля; эта энергия компенсирует положительную кулонову энергию. Конечные размеры электрона объясняются по-новому, а именно допускается, что внутри электрона свойства пространства-времени не справедливы, так как поле излучения распространяется со сверхсветовой скоростью.

Уравнение движения электрона является дифференциальным уравнением третьего порядка. Элизер [6] изучил это уравнение и показал, что при произвольном ускорении движение может быть определено, если учесть, что не все возможные математические решения соответствуют физически возможным движениям. Физически возможные движения характеризуются тем, что в конце достаточно длительного интервала времени устанавливается равновесие между испусканием и поглощением поля излучения.

4. Другая попытка устранить трудности, возникающие в классической теории электрона, заключается в так называемой теории «вычитательного поля», развитой Боппом [7] и Подольским [8] на основе идеи, сформулированной Штюкельбергом и обобщенной затем де Бройлем [9]. Укажем также на один вариант этой теории, известный под названием теории би-поля [10]. Гипотеза вычитательного поля состоит в предположении, что любая точечная частица с таким же зарядом, как и электрон, взаимодействует, кроме электромагнитного поля, еще с одним или несколькими полями мезонного типа. Тензор поля $f_{\mu\nu}$ определяется следующим образом:

$$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu},$$

где $g_{\mu\nu}$ и $m_{\mu\nu}$ — соответственно тензоры максвелловского и мезонного полей; эти поля имеют общий точечный источник, а поле $f_{\mu\nu}$ лишено особенностей. Таким образом, для собственной энергии электрона получается конечное значение. Хотя частица предполагается точечной, получается, что ее заряд распределен в пространстве; поэтому можно ввести понятие «радиуса» частицы. Присутствие мезонного поля обеспечивает устойчивость частицы, так как условие Лауэ выполнено.

Как показал Бопп, если требовать, чтобы только поле, а не особенность было носителем энергии и импульса, то можно написать уравнение движения электрона при условии равновесия лоренцевых

сил внутреннего и внешнего полей. Это исчезновение лоренцевых сил в особых точках получается, если записать выражение силы излучения по методу, указанному Дираком.

Эта теория знаменательна тем, что она, хотя и линейна, все же приводит к конечной массе электрона путем введения компенсирующего поля и в то же время описывает «протяженную» частицу. Как отмечает Соколов [11], она позволяет получить самым прямым путем уравнение движения точечного электрона. Несмотря на это, в силу произвольного характера теории ее надо считать лишь временной теорией, указывающей возможный путь, но приводящей к ряду затруднений в квантовой области.

5. Другой метод устранения бесконечностей дает так называемая теория нелокальных полей, в которой частица или область взаимодействия поля и частицы считаются неточечными, т. е. размытыми. Не предполагая дать систематическое изложение этой теории, укажем на то, что была развита релятивистски-инвариантная теория протяженных особенностей [12]. В этой теории плотность тока-заряда считается распределенной в пространстве-времени и не связанной жестко с движением центра электрона вдоль своей мировой линии. Как показал Бопп [13], этого можно добиться, если в выражении плотности 4-мерного тока и потенциала в дираковском варианте классической теории точечного электрона заменить функцию $\delta[(x_\mu - \xi_\mu)^2]$ произвольным формфактором $F[(x_\mu - \xi_\mu)^2]$, выбранным так, чтобы значения его существенно отличались от нуля только внутри области порядка классического радиуса электрона: $|(x_\mu - \xi_\mu)^2| < r_0^2$. По этому пути можно развивать теорию поля, очень близкую к теории Лоренца, с тем преимуществом, что собственная энергия электрона конечна и что обеспечивается его устойчивость. При этом можно устранить вышеупомянутые трудности (присущие дираковскому варианту классической теории электрона), связанные с его массой и уравнением движения. А именно уравнение движения пишется при условии, что особенность, представляющая электрон, не участвует в обмене энергии; другими словами, поток энергии или импульса через сферу вокруг особенности равен нулю, т. е. средняя сила Лоренца внутри этой сферы равна нулю. Но вопрос нахождения решений уравнения движения еще не полностью выяснен.

Дальнейшие исследования Мак-Мануса [14] и Блоха [15] показали, что формфактор должен быть подчинен более точным ограничениям. Если формфактор все же остается произвольным, то это связано с тем, что он описывает структуру элементарной частицы. Этот произвол в определении формфактора связан также с несовершенным характером классической теории электрона.

Другой путь развития нелокальной теории заключается в том, что поле считается локальным, а нелокальность вводится во взаимодействие частицы с полем. Этот вариант теории изучался Блохин-

цевым [16], Мак-Манусом [14] и Пайерлсом [17]. Несмотря на интерес, который представляла эта теория, ее развитие вызвало еще не устраненные значительные трудности (см. Блохинцев [18]).

б. В заключение можно утверждать, что проблема массы электрона гораздо сложнее, чем казалась вначале, так как она связана с его внутренней структурой. Во всяком случае стало ясно, что только меньшая часть массы электрона, так называемая полевая масса, может иметь электромагнитное происхождение. Существующие теории структуры частиц, как классические, так и квантовые, имеют пока еще незавершенный характер. Исследования приводят к открытию все новых и новых свойств электрона, а также других элементарных частиц. Таким образом подтверждается гениальное, являющееся образцом методологического предвидения положение о «неисчерпаемости электрона», высказанное В. И. Лениным еще в 1908 г. в работе «Материализм и эмпириокритицизм» [19].

ЛИТЕРАТУРА

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Абрахам М., Веккер Р., Theorie der Electricität, Leipzig, 1933, Bd. II. (См. перевод: Беккер, Электронная теория, М., 1936.)
- Вогп М., Optik, Berlin, 1933. (См. перевод: М. Борн, Оптика, Харьков — Киев, 1937.)
- Вогп М., Atomic Physics, London, 1935.
- Вавилов С. И., Микроструктура света, М., 1950.
- Вонсовский С. В., Современное учение о магнетизме, М., 1953.
- Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М., 1951.
- Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1949. (См. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
- Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, М., 1962.
- Laue M., Die Relativitätstheorie, Braunschweig, 1952.
- Livens G. H., The Theory of Electricity, Cambridge, 1918.
- Logentz H. A., The Theory of Electrons, Leipzig, 1916. (См. перевод: Г. А. Лорентц, Теория электронов, М., 1953.)
- Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 1—3, 5, Изд-во АН СССР, 1947—1950.
- Pauli W., Die Relativitätstheorie, Berlin, 1921. (См. перевод: В. Паули, Теория относительности, М., 1947.)
- Riemann — Weber, Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1925.
- Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., 1953.
- Rosenfeld L., Theory of Electrons, Amsterdam, 1951.
- Sommerfeld A., Vorlesungen über Theoretische Physik, Wiesbaden, 1948, Bd. III, IV. (См. перевод: т. III, Электродинамика, ИЛ, 1958; т. IV, Оптика, ИЛ, 1953.)
- Тамм И. Е., Основы теории электричества, М., 1956.
- Thirring H., Handbuch der Physik, Bd. XIII, Berlin, 1927.
- Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934.
- Weiss P., Föex G., Le magnétisme, Paris, 1926.
- Weiss P., в монографии «Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften», Bd. 5, Leipzig, 1905.
- Френкель Я. И., Электродинамика, т. I, М., 1934.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Шпольский Э. В., Атомная физика, М., 1951.
2. Logentz Н. А., в монографии «Enzyklopedie der Mathematischen Wissenschaften», Leipzig, 1904.
3. Logentz Н. А., The Theory of Electrons, Leipzig, 1916. (См. перевод: Г. А. Лорентц, Теория электронов, М., 1953.)
4. Абрахам М., Ann. d. Phys., 10, 105 (1903).
5. Thomson J. J., Phil. Mag., 11, 227 (1881).
6. Ленин В. И., Материализм и эмпириокритицизм, Полное собрание сочинений, изд. 5, т. 18, Госполитиздат, М., 1961.
7. Rosenfeld L., Theory of Electrons, Amsterdam, 1951.

К главе II

1. Ландау Л., Лифшиц Е., Статистическая физика, М., 1951.
2. Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, 1955.
3. Френкель Я. И., Введение в теорию металлов, 2-е изд., М., 1958.
4. Волькенштейн Ф. Ф., Электропроводность полупроводников, М., 1947.
5. Debye P., Polar molecules, New York, 1929. (См. перевод: П. Дебай, Полярные молекулы, М., 1931.)
6. Сканави Г. И., Физика диэлектриков, М., 1949.
7. van Vleck J., Theory of electric and magnetic susceptibilities, Oxford, 1932.
8. Вонсовский С. В., Современное учение о магнетизме, М., 1953.
9. Вонсовский С. В., Шур И. С., Ферромагнетизм, М., 1948.

К главе III

1. Сканави Г. И., Физика диэлектриков, М., 1949.
2. Аркадьев В. К., Магнитная спектроскопия, М., 1924.
3. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн, М., 1953.
4. Vogt M., Optic, Berlin, 1933. (См. перевод: М. Борн, Оптика, Харьков — Киев, 1937.)
5. Esmagch W., Ann. d. Phys., 42, 1257 (1913).
6. Oseen C. W., Ann. d. Phys., 48, 1 (1915).
7. Vothe M., Ann. d. Phys., 64, 693 (1921).

К главе IV

1. Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 5, Изд-во АН СССР, М., 1950, стр. 90.
2. Laue M., Die Relativitätstheorie, Braunschweig, 1952.

3. Hertz H., Wied. Annalen, 41, 369 (1890).
4. Hertz H., Ges. Werke, 2, 256 (1894).
6. Lorentz H. A., Versuch einer Theorie der electrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körper, Leiden, 1895.
6. Lorentz H. A., La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leiden, 1892.
7. Эйхенвальд А. А., Ann. d. Phys., 11, 421 (1903); см. также Эйхенвальд А. А., О магнитном действии тел, движущихся в электромагнитном поле, М., 1904.
8. Бернштейн И. Л., ДАН СССР, 75, № 5 (1950).

К главе V

1. Lorentz H. A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, Amsterdam, 1904.
2. Einstein A., Ann. d. Phys., 17, 891 (1905).
3. Pauli W., Die Relativitätstheorie, Berlin, 1921. (См. перевод: В. Паули, Теория относительности, М., 1947).
4. Энгельс Ф., Диалектика природы, Маркс — Энгельс, Собрание сочинений, изд. 2, т. 20, Госполитиздат, М., 1959, стр. 564.
5. Comstock G. C., Phys. Rev., 30, 267 (1910).
6. de Sitter W., Phys. Zs., 14, 429, 1267 (1913).
7. Anderson W. C., Journ. Opt. Soc. America, 31, 187 (1941).
8. Birge R. T., Nature, 771 (1934).
9. Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 5, Изд-во АН СССР, 1950.
10. Voigt W., Göttinger Nachrichten, 41 (1887).
11. Drăganu M., Bul. științ. Acad. R. P. R., 11, 561 (1950).
12. Minkowski H., Göttinger Nachrichten, 53 (1908); Ges. Werke, Leipzig, 352, 11.
13. Файнберг Е. Л., в сборнике «Мезон», М., 1947.
14. Ross V., Hall, Phys. Rev., 54, 223 (1941).
15. Nereson N., Rossi B., Phys. Rev., 64, 199 (1943).
16. Sommerfeld A., Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. III, 228, Wiesbaden, 1948. (См. перевод: Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958.)
17. Энгельс Ф., Анти-Дюринг, Маркс — Энгельс, Собрание сочинений, изд. 2, т. 20, Госполитиздат, М., 1959, стр. 51.
18. Ives H. E., Stilwell G. R., Journ. Opt. Soc. Amer., 28, 215 (1938).
19. Otting G., Phys. Zs., 40, 681 (1939).

К главе VI

1. Sommerfeld A., Ann. d. Phys., 32, 749; 33, 649 (1910).
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М., 1950

3. H e r g l o t z G., Göttinger Nachrichten, 549 (1904).
4. L i é n a r d A., L'éclairage électrique, 16, 5 (1898).
5. W i e c h e r t E., Arch. Néerland, 5, 549 (1900).
6. В е с к е р R., Theorie der Elektrizität, Bd. II, Leipzig, 1932. (См. перевод: Р. Беккер, Электронная теория, М., 1936)
7. Т і ț e i c a Ș., Studii și cercetări de fizică, 1, № 1, 51 (1950).
8. Л а н д а у Л., Л и ф ш и ц Е., Теория поля, М., 1962.
9. В а в и л о в С. И., ДАН СССР, 2, 457 (1934).
10. Ч е р е н к о в П. А., ДАН СССР, 2, 451 (1934).
11. Ч е р е н к о в П. А., Труды Физического института им. Лебедева АН СССР, 2, № 2 (1944).
12. В а в и л о в С. И., Микроструктура света, М., 1950.
13. S o m m e r f e l d A., Göttinger Nachrichten, 363 (1904); 201 (1905).
14. Т а м м И. Е., Ф р а н к И. М., ДАН СССР, 14, 107 (1937).
15. Т а м м И. Е., Journ. of Phys. USSR, 1, 439 (1939).
16. Ф р а н к И. М., Успехи физич. наук, 30, 149 (1946).
17. И в а н е н к о Д., С о к о л о в А., Классическая теория поля, М., 1951.
18. «Проблемы современной физики», сборник статей, вып. 7, ИЛ, 1953.
19. T o l m a n R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934.
20. E i n s t e i n A., Nature, 106 (1921).
21. E i n s t e i n A., I n f e l d L., Evolution of Physics, 1948. (См. перевод: А. Эйнштейн, Л. Инфельд. Эволюция физики, М., 1956.)
22. S c h w a r z s c h i l d K., Göttinger Nachrichten, 125 (1903).
23. L o r e n t z H. A., Theou of Electrons, Leipzig, 1916. (См. перевод: Г. А. Лорентц, Теория электронов, М., 1953.)
24. Ф р а д к и н Е. С., ЖЭТФ, 30, 211 (1950).
25. С о к о л о в А. А., Вестник МГУ, вып. 2, 33 (1947).
26. С о к о л о в А. А., ЖЭТФ, 18, 280 (1948).
27. H e i t l e r W., The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1949. (См. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)

К главе VII

1. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., 17 (1905).
2. M i n k o w s k i H., Göttinger Nachrichten, 53 (1908).
3. L o r e n t z H. A., в монографии «Enzyklopedie der Mathematischen Wissenschaften», Leipzig, Bd. V, 275, 1905.
4. F r a n k P h., Ann. d. Phys., 27, 897 (1908).
5. D ä l l e n b a c h, Ann. d. Phys., 58, 523 (1919).
6. В и г л и н А. С., ЖЭТФ, 21, 795 (1951).
7. A b r a h a m M., Ann. d. Phys., 44, 537 (1914).
8. A b r a h a m M., Rend. Pal., 28 (1909).
9. M ö l l e r C., The Theory of Relativity, Oxford, 1955.

К главе VIII

1. Mie G., Ann. of Phys., **37**, 511; **39**, 1; **40**, 7 (1912).
2. Born M., Proc. Roy. Soc., **A143**, 410; **A144**, 425 (1934); Ann. de l'Inst. H. Poincaré, VII (1937).
3. Heisenberg W., Dürer H., Mitter H., Schlieder S., Yamazaki K., Zs. Naturforsch., **14a**, H. 5/6 (1959). (См. перевод в сборнике: «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959.)
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A167**, 148 (1938).
5. Wheeler J. A., Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **17**, 157 (1945).
6. Eliaser C. J., Rev. Mod. Phys., **19**, 147 (1947).
7. Борр F., Ann. of Phys., **38**, 345 (1940).
8. Podolsky B., Phys. Rev., **62**, 68 (1941); Rev. Mod. Phys., **20**, 20 (1948).
9. de Broglie L., Compt. Rend., **229**, 401 (1949); **232**, 1269, 1271 (1951); **234**, 20 (1951).
10. Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля, М., 1951.
11. Соколов А. А., Вестник МГУ, вып. 2, 33 (1947); ЖЭТФ, **18**, 280 (1948).
12. Rzewuski I., Field Theory, Warszawa, 1958.
13. Борр F., Ann. of Phys., **42**, 573 (1943).
14. McManus H., Proc. Roy. Soc., **A195**, 323 (1948).
15. Bloch C., König. Danske Vidensk. Selskab. Math. Phys. Medd., **22**, No. 8 (1952).
61. Блохинцев Д., Вестник МГУ, вып. 3, 77 (1946); вып. 1, 83 (1948).
17. Peierls R., Proc. Roy. Soc., **A214**, 143 (1952).
18. Блохинцев Д. И., Успехи физич. наук, **61**, 137 (1957).
19. Ленин В. И., Материализм и эмпириокритицизм, Полное собрание сочинений, изд. 5, т. 18, Госполитиздат, М., 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
Предисловие к русскому изданию	7
АТОМИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА	
Глава I. Основы классической электронной теории	11
Введение	11
§ 1. Экспериментальное доказательство атомистического строения электричества	12
§ 2. Определение удельного заряда электронов	15
§ 3. Основные гипотезы теории Лоренца	22
§ 4. Электромагнитное поле электрона, движущегося медленно и равномерно	32
§ 5. Поле электрона, движущегося ускоренно	43
§ 6. Динамика электронов, совершающих квазистационарное движение	49
§ 7. Атомистические основы теории Максвелла в случае стационарных полей	52
Глава II. Теория электрических и магнитных явлений	60
Введение	60
§ 1. Электронная теория проводимости металлов	60
§ 2. Теория электрической поляризации	66
§ 3. Теория намагничивания	77
Глава III. Теория дисперсии. Молекулярная оптика	88
Введение	88
§ 1. Теория дисперсии в диэлектрических средах	88
§ 2. Аномальная дисперсия	96
§ 3. Дисперсия в металлах	100
§ 4. Распространение электромагнитных волн в ионосфере	102
§ 5. Классическая теория когерентного рассеяния	104
§ 6. Молекулярная теория распространения света	109
§ 7. Явление Фарадея, магнитное вращение плоскости поляризации	116

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава IV. Электромагнитные явления в медленно движущихся телах	123
Введение	123
§ 1. Уравнения Максвелла — Герца	124
§ 2. Уравнения Максвелла — Лоренца в случае движущихся тел	127
§ 3. Электромагнитные явления в телах, движущихся относительно Земли	130
§ 4. Влияние движения Земли на электромагнитные явления	137
§ 5. Экспериментальное исследование эффектов второго порядка	142
Глава V. Релятивистская электродинамика	146
Введение	146
§ 1. Пространственно-временная симметрия электромагнитного поля	149
§ 2. Постулаты специальной теории относительности	156
§ 3. Преобразование Лоренца	160
§ 4. Преобразование векторных полей	184
§ 5. Релятивистское истолкование эффекта Допплера и абerrации света	185
Глава VI. Релятивистская теория электронов	188
Введение	188
§ 1. Ковариантность уравнений Максвелла — Лоренца. 4-вектор плотности силы	188
§ 2. Поле электрофа, движущегося равномерно	192
§ 3. Интегрирование дифференциального уравнения 4-потенциала	193
§ 4. Поле ускоренного точечного электрона	200
§ 5. Излучение системы точечных зарядов	206
§ 6. Эффект Черенкова	211
§ 7. Максвелловские натяжения и тензор энергии-импульса микроскопического поля	221
§ 8. Релятивистская динамика материальной точки. 4-вектор импульса-энергии	225
§ 9. Проблема определения массы электрона в электродинамике Максвелла — Лоренца	244
§ 10. Классическое уравнение движения электрона. Противодействие собственного поля движению	254
§ 11. Гамильтонова форма уравнений поля	263

Глава VII. Феноменологическая релятивистская электродинамика	273
Введение	273
§ 1. Ковариантная формулировка уравнений электромагнитного поля в общем случае произвольной материальной среды. Уравнения Минковского	274
§ 2. Переход от микроскопических уравнений к макроскопическим в релятивистском случае	282
§ 3. Интерпретация уравнений Минковского	285
§ 4. Тензор энергии-импульса в релятивистской феноменологической электродинамике	288
Глава VIII. Заключение	290
Литература	296

В. НОВАКУ

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

Редактор *А. К. Бурцев*

Художник *К. П. Сиротов*

Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*

Технический редактор *А. В. Грушин*

Корректор *Т. С. Бухтина*

Сдано в производство 3/VII 1963 г.

Подписано к печати 10/X 1963 г.

Бумага 60×90, 9,5 бум. л.

19 9 печ. л.

Уч.-изд. л. 15,2. Изд. № 2/09

Цена 1 р. 26 к. Зак. 887

ИЗДАТЕЛЬСТВО

ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5

Мосгорсовнархоза.

Москва, Трехпрудный пер., 9