С. И. НОВОСЕЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

С. И. НОВОСЕЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для педагогических
институтов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Москва — 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначается в качестве учебника для физико-математических факультетов педагогических институтов по разделу «Алгебра» специального курса элементарной математики. Книга содержит весь учебный материал, предусмотренный программой указанного раздела.

Работа студента педвуза над элементарной математикой (как одной из профилирующих дисциплин) не ограничивается изучением курса, предусмотренного программой. Успешное прохождение методики преподавания математики и педагогической практики, занятия в спецсеминарах, а также выполнение курсовых работ немыслимы в отрыве от углубленного изучения элементарной математики. Это понятно, так как от будущего учителя требуется безупречное знание тех дисциплин, которые он станет преподавать по окончании института.

Указанные обстоятельства определили структуру настоящей книги, в ней в систематическом изложении представлены все разделы школьного курса алгебры, за исключением учения о числе, которое отнесено программой к разделу «Арифметика» и должно войти в учебник по этому разделу.

При рассмотрении курса элементарной математики в педагогических институтах могут иметь место две в равной мере недопустимые крайности.

Первая крайность заключается в *отрыве курса элементарной математики от нужд школы*. Сюда относятся такие тенденции, как пересказ (в упрощенном виде) в «элементарной» математике того, что было пройдено в «высшей», как отнесение за счет «элементарной» математики ряда вопросов из «высшей» математики, которые почему-либо не вошли в соответствующие курсы, или как превращение курса «элементарной» математики в несистематический набор отдельных «изящных математических этюдов», «избранных» вопросов, «эвристических откровений», «неэлементарных задач в элементарном изложении» и т. д. и т. п.

Вторая крайность заключается *в пересказе школьного курса* *математики на научно-идейном уровне, немногим возвышающемся над школьным.*

В настоящей книге автор старался избегать обеих указанных крайностей.

Как мы полагаем, предвузовскому курсу элементарной алгебры должны быть присущи следующие черты:

1. *В этом курсе должно быть дано научное обоснование ряда важных теоретических вопросов элементарной алгебры, которые в школьном курсе с надлежащей полнотой и строгостью изложены быть не могут, а в высшей математике считаются известными.*

К числу таких вопросов относится, например, общее учение об эквивалентности уравнений и систем уравнений (а также неравенств), обоснование учения об элементарных функциях, ряд вопросов комбинаторики.

2. *Должно быть дано обоснование ряда методов, широко применяющихся в элементарной математике.*

Так, например, в высшей алгебре излагаются общие методы исследования линейных систем и устанавливаются общие формулы для их решения (все это, разумеется, будущий учитель должен знать). Однако в практике (и не только школьной) решение и исследование конкретной линейной системы часто бывает проще выполнить непосредственно «элементарными» методами, которые применяются в школе. Очевидно, что научное обоснование этих методов должно быть известно учителю.

3. *Элементарная алгебра должна воспитывать умение выполнять математическое исследование «прямыми методами» (там, где это, разумеется, целесообразно) непосредственно на основе определения и известных свойств исследуемых объектов.*

Мы весьма сомневаемся, чтобы без этого умения можно было успешно применять методы современной науки. Так, например, вряд ли будут полезны формулы и теоремы дифференциального исчисления человеку, «не видящему» непосредственно наименьшего значения функции x^2 или оказывающемуся беспомощным при необходимости непосредственно установить несложное неравенство.

В частности, в воспитании навыков непосредственного исследования функций элементарная математика имеет огромные возможности.

4. *Специальный курс элементарной алгебры должен способствовать выработке твердых навыков в выполнении тождественных преобразований.*

Пренебрежительное отношение к тождественным преобразованиям, как к чему-то «безыдейному», заслуживает решительного осуждения. Выработка твердых математических навыков есть одна из задач обучения математике в школе.

В самом деле, по меньшей мере легкомысленно считать, что достаточно одного «понимания идей», а навыки в их реализации есть дело несущественное. Из сказанного ясно, что учитель школы должен обладать известным мастерством в выполнении тождественных преобразований.

5. *Педвузовский курс элементарной алгебры не должен обходить и отдельные вопросы, важные (с точки зрения педагогической или по другим причинам) для школьной практики.* Мы подразумеваем такие вопросы, как, например, решение текстовых задач, рассмотрение отдельных частных приемов решения уравнений, рациональных способов решения задач и т. п.

Все перечисленные условия могут быть удовлетворены лишь при систематическом изложении основных разделов элементарной алгебры. Однако система расположения материала в настоящей книге отлична от школьной. Настоящий учебник рассчитан на лиц, прошедших школьный курс математики. Студент педагогического института, уже изучавший ряд серьезных математических дисциплин и обладающий достаточной математической культурой, сможет подойти к вопросам элементарной математики с более высокой точки зрения. Указанные обстоятельства позволяют в специальном курсе в систематическом изложении всесторонне подойти к каждой теме и отказаться от элементов концентризма, который, в силу возрастных особенностей учащихся, в известной мере неизбежен для курса алгебры средней школы. Мы должны стремиться к тому, чтобы научно-идейное содержание курса элементарной математики гармонировало с высоким уровнем, предъявляемым программными требованиями к дисциплинам «высшей» математики, значение которых в образовании учителя невозможно недооценивать.

В настоящем курсе приведено большое число до конца решенных примеров и задач. Задачи, примеры и их решение напечатаны в книге мелким шрифтом, чтобы отделить их от теоретического материала.

При изучении элементарной математики невозможно ограничиться изучением теории, и приобретение твердых навыков в решении примеров и задач является совершенно необходимым. Поэтому напечатанные петитом примеры ни в коей мере нельзя рассматривать как необязательный материал. Исходя из потребностей будущего учителя, автор старался представить в настоящей книге по возможности полно все основные виды упражнений по элементарной алгебре. Исключение представляют лишь такие упражнения, как, например, «комбинированные» задачи, небезызвестные искусственные задачи «на бином», на прогрессии и т. п. Преувеличение значимости подобных упражнений неоднократно подвергалось критике со стороны передовой педагогической мысли.

В четвертом издании книга подверглась переработке. В целях разгрузки текста от материала, знакомого учащимся из прочих математических дисциплин, а также от материала, не имеющего принципиального значения, опущен ряд вопросов, как, например: интерполяционные формулы, конечные разности, общее понятие о линейной зависимости, результат двух квадратных трехчленов, общее выражение симметрических функций от корней квадратного трехчлена, возвратные последовательности и т. п. Существенно упрощено изложение теории рациональных функций, упрощено изложение теории радикалов. Систематически изложены теоремы о средних величинах. Мною тщательно просмотрено решение всех примеров, при этом я стремился к тому, чтобы максимально упростить исследования и без ущерба для полноты сделать их по возможности удобообозримыми.

Считаю своим приятным долгом отметить большую работу, выполненную кафедрой алгебры Московского областного педагогического института, выразившуюся в детальном просмотре книги в рукописи и в серьезном ее критическом обсуждении.

С чувством глубокой признательности я вспоминаю моего покойного учителя академика Николая Николаевича Лузина, который принял живое участие в разработке проспекта первого издания настоящей книги и оказал мне неоценимую помощь своими советами.

Пользуюсь случаем выразить мою глубокую благодарность И. К. Андронову, Б. В. Кутузову, П. А. Ларичеву, П. С. Моденову, чьи критические замечания и дружеские советы оказали мне помощь и поддержку в работе над книгой. Выражаю благораность Н. А. Меделяновскому за образцовое выполнение иллюстраций.

1 ноября 1961 г. *С. Новоселов*

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. О содержании курса элементарной алгебры

Современная алгебра как наука представляет собой обширный раздел математики, состоящий из большого числа различных дисциплин (теория групп, колец, полей, линейная алгебра и т. д.), находящихся в состоянии развития. В весьма общем виде содержание современной алгебры можно характеризовать следующим образом: основной (объединяющей различные алгебраические дисциплины) задачей алгебры является изучение алгебраических операций над элементами множеств произвольной природы. При этом, *под операцией определенной в данном множестве* $\mathfrak{M}$, *понимается соответствие, в силу которого произвольным двум элементам* a *и* b *(взятым в определенном порядке) множества* $\mathfrak{M}$ *ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент* c *того же множества.* Предметом изучения современной алгебры являются операции, обладающие некоторыми вполне определенными, точно описанными (посредством аксиом) свойствами, и множества (произвольной природы), над элементами которых установлены эти операции (кольца, поля, группы). Представление, разумеется, не исчерпывающее, о задачах современной алгебры дается в курсе высшей алгебры.

Курс элементарной алгебры по своему содержанию значительно отличается от алгебры как науки (в собственном смысле). Содержание элементарной алгебры определяется содержанием школьного курса алгебры. В средней школе под названием «алгебра» понимается учебный предмет, неоднородный по своему содержанию, в котором излагаются основные сведения, относящиеся не только к алгебре (в собственном смысле), но и к ряду других математических дисциплин. Известно, что в школьную алгебру входят различные вопросы, как-то: развитие учения о числе, учение об алгебраических выражениях (многочлены, рациональные выражения, иррациональные выражения), учение об уравнениях, элементы учения о функциях, изучение некоторых трансцендентных функций (показательная, логарифмическая), понятие о методе координат и его применение к исследованию функций, понятие о пределе (предел последовательности), суммирование простейших рядов (в частности прогрессий), элементы приближенных вычислений и т. д. Некоторые из этих вопросов относятся собственно к алгебре (учение о многочленах, тождественные преобразования, алгебраические уравнения), некоторые получают свое дальнейшее развитие в других математических дисциплинах. Например, понятие предела, а также изучение простейших трансцендентных функций относятся не к алгебре, а к математическому анализу. Такая неоднородность школьного курса неизбежна, поскольку школьная математика призвана дать необходимый комплекс общеобразовательных сведений и навыков, не ограничиваясь рамками какой-либо одной математической дисциплины.

Курс элементарной математики педагогических институтов ставит своей целью углубленное изучение, развитие и обоснование тех вопросов, которые входят в школьный курс математики, и тех методов исследования, которые характерны для школьного курса. Следует отметить также, что ряд важнейших вопросов (как, например, общее учение о равносильности уравнений и неравенств) «высшая» математика не затрагивает, считая их известными из «элементарной» математики, а школьный курс не в состоянии изложить их с надлежащей строгостью и полнотой.

Указанные причины обусловливают необходимость изучения «элементарной математики» в педвузах в виде самостоятельной учебной дисциплины, весьма важной с точки зрения профессиональной подготовки учителя школы.

Настоящий курс охватывает (в углубленном и научно обоснованном изложении) вопросы школьной алгебры, за исключением учения о числе и о приближенных вычислениях, что отнесено программой к курсу арифметики.

В настоящей вводной главе указаны те сведения, которые будут считаться известными из других дисциплин (изучающихся в педагогических институтах) и которые послужат основанием для изложения курса элементарной алгебры в последующих главах.

§ 2. Понятия кольца и поля

В элементарной алгебре рассматриваются различные конкретные множества, над элементами которых можно производить «арифметические действия». Так, например, действия могут производиться над числами, над многочленами, над алгебраическими дробями и т. д. Соответствующие общие определения и аксиомы формулируются в современной алгебре следующим образом.

Определение. *Кольцом называется множество* $\boldsymbol{R}$, *в котором определены две операции (действия):*
операция сложения, ставящая в соответствие всяким двум элементам $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *элемент* c, *называемый их суммой:*

$$c = a + b$$

и операция умножения, ставящая в соответствие всяким двум элементам $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *элемент* $\boldsymbol{d}$, *называемый их произведением*

$$d = ab.$$

Операции сложения и умножения характеризуются следующими свойствами.

Аксиомы сложения

1. Аксиома ассоциативности: *для любых трех элементов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеем:*

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Аксиома коммутативности: *для любых элементов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеем:*

$$a + b = b + a.$$

3. Аксиома обратного действия (для сложения): *для любых двух элементов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *существует единственный элемент* $\boldsymbol{x}$, *удовлетворяющий условию:*

$$a + x = b.$$

Элемент x называется разностью элементов b и a и обозначается так

$$x = b - a.$$

Аксиомы умножения

4. Аксиома ассоциативности: *для любых трех элементов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеем:*

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Аксиома коммутативности: *для любых двух элементов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеем:*

$$ab = ba.$$

6. Аксиома дистрибутивности: *для любых трех элементов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеем:*

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Примечания: I. В настоящем списке аксиом мы не имели в виду сформулировать минимальное число требований, определяющих понятие кольца, так например, в аксиоме 3 можно не требовать однозначности вычитания.

Из условия существования хотя бы одного элемента x, удовлетворяющего уравнению $a + x = b$, и из прочих аксиом кольца можно доказать его единственность.

II. Мы ограничиваемся лишь коммутативными кольцами, тогда как в современной алгебре изучаются некоммутативные кольца, для которых аксиома 5 не имеет места.

Определение. *Полем называется такое кольцо, содержащее хотя бы один элемент, отличный от нуля, в котором выполняется следующая аксиома обратного действия для умножения.*

7. Для произвольных двух элементов a *и* b, *из которых* $a \neq 0$, *существует единственный элемент* x, *удовлетворяющий условию:*

$$ax = b.$$

Элемент x называется частным от деления b на a и обозначается так: $x = \frac{b}{a}$.

В арифметике аксиомы 1, 2, 4, 5 и 6 сложения и умножения называются основными законами действий. Из этих законов выводятся правила действий с любым числом компонентов (правила умножения произведения на сумму, суммы на сумму и т. д.)*.

Из аксиом кольца и поля выводятся следующие положения (доказательства см. в курсе высшей алгебры).

Во всяком кольце существует единственный элемент: «нуль» данного кольца, сумма которого с любым элементом a *кольца равна* a*:*

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Для всякого элемента a *кольца существует единственный элемент* $-a$, *называемый противоположным относительно* a, *удовлетворяющий условию:*

$$a + (-a) = 0.$$

Во всяком поле существует единственный элемент «единица» данного поля, удовлетворяющий следующему условию:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

где a *— произвольный элемент поля.*

Для всякого элемента $a \neq 0$ *поля существует единственный элемент* a^{-1}, *называемый обратным относительно* a, *удовлетворяющий условию:*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

---

* При определениях действий с любым числом компонентов и при доказательствах правил действий применяется принцип математической индукции как средство, необходимое при установлении общих свойств конечных множеств.

Произведение двух элементов поля равно нулю в том и только в том случае, если по крайней мере один из сомножителей равен нулю.

§ 3. Основные числовые множества, рассматриваемые в элементарной алгебре

Натуральный ряд чисел. Аксиомы, характеризующие натуральный ряд чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

формулируются в арифметике, там же устанавливаются посредством соответствующих определений действия сложения и умножения в множестве натуральных чисел. Множество натуральных чисел не является кольцом (а следовательно, и полем), так как не выполнена аксиома обратного действия для сложения, а именно, не для всяких двух натуральных чисел a и b существует число x, удовлетворяющее условию

$$a + x = b.$$

Иными словами, в множестве натуральных чисел не всегда выполнимо вычитание.

Аксиома обратного действия для умножения также не выполняется.

В курсе элементарной алгебры широкое применение имеет метод доказательства, называемый принципом математической индукции. Принцип полной индукции основан на следующей аксиоме натурального ряда.

Любое множество $\mathfrak{M}$ *натуральных чисел, обладающее свойствами:*

1° *число* 1 *принадлежит* $\mathfrak{M}$,

2° *если число* n *принадлежит* $\mathfrak{M}$, *то и непосредственно следующее за ним число также принадлежит* $\mathfrak{M}$,

совпадает с множеством всех натуральных чисел.

Обычно принципом математической индукции пользуются в следующем виде:

если некоторое утверждение, относящееся к натуральным числам, справедливо для числа 1 (п. 1°) *и если из справедливости этого утверждения для числа* n *следует его справедливость для числа* $n+1$, *следующему за* n (п. 2°), *то утверждение справедливо для произвольного натурального числа.*

Принцип математической индукции вытекает из сформулированной аксиомы: под множеством $\mathfrak{M}$ следует подразумевать множество всех натуральных чисел, для которых справедливо данное утверждение; при соблюдении условий принципа множество $\mathfrak{M}$ совпадает с множеством всех натуральных чисел, т. е. данное утверждение справедливо для произвольного натурального числа.

Доказательства общих предложений, имеющих место для всех натуральных чисел, путем непосредственной проверки осуществить невозможно. В самом деле, натуральный ряд есть бесконечное множество и нельзя выполнить бесконечное множество испытаний (для каждого числа в отдельности). *Принцип математической индукции позволяет осуществлять доказательства общих предложений, имеющих место для произвольного натурального числа.*

Кольцо целых чисел. В множестве всех целых чисел

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

выполнимы действия сложения и умножения, причем для сложения выполняется аксиома обратного действия, а именно: *разность двух целых чисел также является целым числом.* Следовательно, *множество всех целых чисел есть кольцо.*

Кольцо целых чисел не является полем, так как для умножения не выполняется аксиома обратного действия, а именно, не всегда одно целое число делится (нацело) на другое.

Поле рациональных чисел. Множество всех рациональных чисел состоит из всех целых и дробных чисел (положительных, отрицательных чисел и числа 0). Всякое рациональное число r может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$ (число n можно считать положительным). *Множество всех рациональных чисел является полем, так как в нем всегда выполнимы действия сложения и умножения, а также обратные действия: вычитание и деление* (кроме деления на нуль).

Поле действительных чисел. Числа рациональные и иррациональные образуют все вместе множество действительных чисел.

Всякая бесконечная десятичная дробь

$$p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots,$$

где p — целое неотрицательное число (целая часть), а q_1, q_2, ..., q_n, ... — десятичные знаки (т. е. $q_n = 0, 1, 2, \ldots, 9$), изображает положительное действительное число. Обратно, всякое положительное действительное число может быть представлено посредством бесконечной десятичной дроби.

Всякое положительное рациональное число может быть представлено в виде конечной, либо бесконечной периодической десятичной дроби. Обратно, всякая конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь изображает рациональное число. Всякое рациональное число, изображающееся конечной десятичной дробью, можно представить в виде бесконечной периодической дроби с периодом 0 и с периодом 9. Так, например:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000\ldots = 0{,}1999\ldots$$

Всякая непериодическая (бесконечная) десятичная дробь изображает иррациональное число.

Всякое отрицательное действительное число можно представить двояким образом: с отрицательной, либо с положительной мантиссой (дробной частью), так, например:

$$-2{,}79183\ldots = -2 - 0{,}79183\ldots = -3 + (1 - 0{,}79183\ldots) =$$

$$= -3 + 0{,}20816\ldots = \overline{3}{,}20816\ldots$$

В множестве всех действительных чисел выполнимы четыре арифметические действия (кроме деления на нуль), поэтому множество всех действительных чисел является полем.

В поле действительных чисел выполнимо действие извлечения корня из неотрицательных чисел: каково бы ни было неотрицательное число a, существует единственное неотрицательное число $x = \sqrt[n]{a}$, удовлетворяющее условию $x^n = a$.

Поле комплексных чисел. Всякое комплексное число можно представить в виде

$$a + bi,$$

где a и b — действительные числа.

Два комплексные числа $a+bi$ и a_1+b_1i считаются равными в том и только в том случае, если

$$a = a_1, \; b = b_1.$$

Если $b=0$, то комплексное число считается равным действительному числу a:

$$a + 0i = a.$$

Таким образом, действительные числа включаются в множество комплексных чисел.

Если $b \neq 0$, то комплексное число называется мнимым. Мнимое число называется чисто мнимым, если $a = 0$.

В множестве комплексных чисел выполнимы четыре арифметических действия (кроме деления на нуль), т. е. множество комплексных чисел есть поле.

Число i, называемое мнимой единицей, обладает следующим свойством:

$$i^2 = -1.$$

Действия над комплексными числами выполняются по обычным правилам с заменой i^2 на -1. Степени числа i находятся по формулам:

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\ldots i^{4n+k} = i^k$ (где n и k — целые числа.)

Число $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ называется **модулем** комплексного числа $z=a+bi$; если $z\neq 0$, то всякое число φ, определенное из условий

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

называется **аргументом** комплексного числа z.

Всякие два значения аргумента φ_1 и φ_2 данного числа связаны соотношением $\varphi_2=\varphi_1+2k\pi$ (где k — целое число).

Всякое комплексное число z можно представить в тригонометрической форме:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

Числу 0 в качестве аргумента не приписывается никакого числа, при $z=0$ в формуле (1) следует положить $\rho=0$, а в качестве φ можно взять любое число.

§ 4. Расположенные числовые поля

Поле рациональных и поле действительных чисел являются расположенными полями:

числа этих полей связаны соотношениями взаимного расположения «равно», «больше», «меньше». Соотношения взаимного расположения обладают следующими свойствами:

I. *Для произвольных чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений:*

$$a=b,\ a>b,\ a<b.$$

II. Свойство необратимости неравенств:

если $a<b$, о $b>a$, если жэ $a>b$, то $b<a$.

III. Свойство транзитивности неравенств:

если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

IV. Свойство транзитивности равенства:

если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

V. Свойство рефлексивности равенства:

всегда $a=a$.

Прочие известные из арифметики свойства равенств и неравенств можно вывести из основных соотношений I—V.

Арифметические действия и соотношения взаимного расположения связаны между собой следующим образом:

1°. **Закон монотонности сложения:**

если $a<b$, то $a+c<b+c$.

2°. Закон монотонности умножения:

если $a < b$, *то* $ac < bc$ *при* $c > 0$ *и* $ac > bc$ *при* $c < 0$.

Числа положительные являются бóльшими нуля, а отрицательные — меньшими нуля.

Число a больше числа b в том и только в том случае, если разность $a—b$ положительна:

$$a - b\begin{cases} > 0, & \text{если } a > b, \\ = 0, & \text{если } a = b, \\ < 0, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Если $a < b < c$, то говорят, что число b расположено между числами a и c.

Поле рациональных и поле действительных чисел обладают следующим свойством плотности:

каковы бы ни были два различные действительные (или рациональные) числа, существует бесконечное множество действительных (рациональных) чисел, содержащихся между данными числами.

В множестве всех действительных чисел рациональные и иррациональные числа расположены всюду плотно, а именно, *между произвольными двумя различными действительными числами расположено бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел.*

Поле действительных чисел обладает следующим свойством непрерывности (принцип стягивающихся сегментов):

если две последовательности действительных чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots \qquad \{a_n\}$$

и

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \ldots \qquad \{b_n\}$$

обладают следующими свойствами:

1° *последовательность* $\{a_n\}$ *не убывает:*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots;$$

2° *последовательность* $\{b_n\}$ *не возрастает:*

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots;$$

3° *при всех значениях* n *имеет место неравенство*

$$_n < b_n;$$

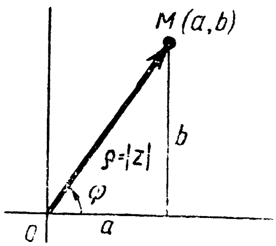
4° *каково бы ни было заданное (как угодно малое) число* $\varepsilon > 0$ *при всех достаточно больших значениях* n *имеет место неравенство:*

$$| b_n - a_n | < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim (b_n - a_n) = 0,$$

то (при выполнении перечисленных условий) существует единственное действительное число ξ, заключенное при (произвольном $\boldsymbol{n}$) *между числами* a_n *и* b_n:

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n.$$

Поле рациональных чисел свойством непрерывности не обладает, а именно, для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ (рациональных чисел) могут быть выполнены все перечисленные условия 1° — 4°, однако, в поле рациональных чисел может не существовать числа ξ (рационального), удовлетворяющего неравенствам $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$. В этом случае в поле действительных чисел ξ является иррациональным числом.



Черт. 1

Множество рациональных чисел является недостаточным для измерения непрерывных величин. Так, например, известно, что не всякий отрезок соизмерим с отрезком, выбранным за единицу длины. Величины отрезков, несоизмеримых с единичным отрезком, не могут быть выражены рациональными числами. *Множество всех действительных чисел является достаточным для измерения непрерывных (скалярных) величин.* Так, например, всякому отрезку (при произвольно выбранном единичном отрезке) можно поставить в соответствие вполне определенное положительное число — его длину, при этом длина отрезка, соизмеримого с единичным, есть рациональное число, а несоизмеримого с единичным — иррациональное. Обратно, каково бы ни было положительное действительное число, существует единственный отрезок, длина которого (при данной единице измерения) выражается данным числом. *Между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой линии можно установить взаимно однозначное соответствие.* Простейшим способом установления этого соответствия является введение координат на прямой линии.

При введении координат на прямой выбирается начальная точка (на прямой), выбирается единичный отрезок и устанавливается положительное направление (или направление «вправо»). При этом способе изображения действительных чисел точками прямой линии сохраняется порядок следования элементов, а именно, из двух различных действительных чисел большему числу соответствует точка, расположенная (на прямой) «правее».

Если $a < b < c$, то число b изображается точкой, расположенной внутри отрезка, концами которого служат точки, изображающие числа a и c.

Поле комплексных чисел не является расположенным: а именно, для двух различных комплексных чисел (из которых хотя бы одно не является действительным) понятия «больше», «меньше» не устанавливаются никак. Как известно, *эти понятия нельзя распространить на комплексные числа так, чтобы сохранились все те свойства, которые присущи этим понятиям в поле действительных чисел.*

Множество всех комплексных чисел и множество точек плоскости можно поставить во взаимно однозначное соответствие. Обычно это соответствие устанавливается следующим образом. На плоскости устанавливается прямоугольная декартова система координат, тогда число $z=a+bi$ изображается точкой M с абсциссой равной a и с ординатой равной b (черт. 1). Геометрическим изображением числа $z=a+bi$ можно также считать вектор (направленный отрезок) **OM**, начало которого находится в начале координат, а конец в точке M, изображающей число z. Модуль комплексного числа $\rho=|z|$ есть расстояние точки M, изображающей число z, до начала координат, иначе говоря, $|z|$ есть длина вектора **OM**. Аргумент φ комплексного числа z есть величина угла, образованного вектором **OM** с действительной осью (т. е. с осью Ox), аргумент определяется не однозначно, а с точностью до целого числа «полных оборотов», т. е. до слагаемого вида $2k\pi$. Значение φ, взятое при условии $0\leqslant\varphi<2\pi$ (в пределах «первого оборота»), обычно называют главным значением аргумента.

§ 5. Числовые промежутки

Пусть a и b — произвольные действительные числа, взятые при условии $a<b$.

Определения. 1°. *Интервалом (a, b) называется множество всех действительных чисел x: удовлетворяющих неравенствам:*

$$a<x<b,$$

2°. *Сегментом $[a, b]$ называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам:*

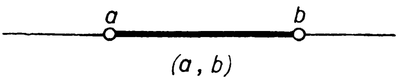
$$a\leqslant x\leqslant b.$$

Геометрически интервал (a, b) изображается на числовой прямой множеством точек, лежащих между точками a и b, т. е. отрезком с концами в точках a и b, при этом сами концы исключаются (черт. 2). Сегмент $[a, b]$ изображается отрезком с концами в точках a и b, причем сами концы a и b включаются в отрезок (черт. 3).

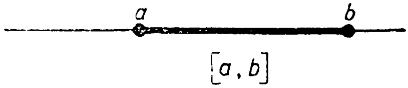
В целях единообразия терминологии и обозначений вводятся в рассмотрение «бесконечные» интервалы, посредством следующих определений.

1°. *Множество всех действительных чисел называется интервалом от* $-\infty$ *(минус бесконечности) до* $+\infty$ *(плюс бесконечности) и обозначается символом* $(-\infty, +\infty)$.

2°. *Множество всех действительных чисел бóльших (меньших) числа* a *называется интервалом от* a *до* $+\infty$ *(или от* $-\infty$ *до* a*) и обозначается символом* $(a, +\infty)$ *или* $(-\infty, a)$ (черт. 4).



Черт. 2



Черт. 3

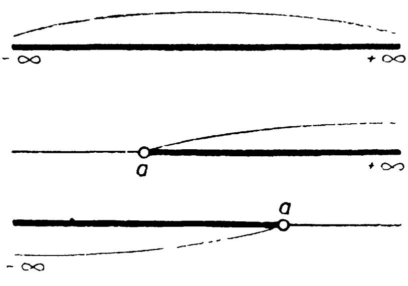
Принято символы $+\infty$ и $-\infty$ считать связанными с действительными числами и между собой соотношениями неравенств, именно: всякое действительное число a считается меньшим, чем $+\infty$, и бóльшим, чем $-\infty$, а символ $-\infty$ считается меньшим, чем $+\infty$·

$$-\infty < a < +\infty.$$

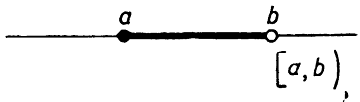
Множества чисел x, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$-\infty < x < +\infty, \quad a < x < +\infty, \quad -\infty < x < a$$

соответственно суть: множество всех действительных чисел, т. е. $(-\infty, +\infty)$, множество всех действительных чисел больших a, т. е. $(a, +\infty)$ и множество всех действительных чисел меньших a, т. е. $(-\infty, a)$ (черт. 4).



Черт. 4



Черт. 5

Черт. 6

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, называется **полусегментом** $[a, b)$ (черт. 5), а множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$, называется **полуинтервалом** $(a, b]$ (черт. 6).

Все рассмотренные виды интервалов, сегментов, полусегментов и полуинтервалов (конечных и бесконечных) объединяются общим термином **«промежуток»**.

§ 6. Основные понятия учения о функциях

В настоящем параграфе дается краткое (конспективное) перечисление основных понятий и положений, относящихся к общему учению о функциях. Систематическое изложение общего учения о функциях содержится в пособиях по математическому анализу.

Общее понятие функции. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два множества, элементами которых могут быть любые объекты. *Если каждому элементу* x *множества* $\mathfrak{M}$ *ставится в соответствие некоторый элемент* y *множества* $\mathfrak{N}$, *то говорят, что задана функция*

$$y = f(x).$$

Элементы x множества $\mathfrak{M}$ называются значениями аргумента, а соответствующие элементы y множества $\mathfrak{N}$ — значениями функции. Множество $\mathfrak{M}$ называется областью определения функции или множеством значений (допустимых) аргумента. Множество соответствующих значений $y = f(x)$ называется множеством значений функции.

Так, например, процесс измерения отрезков (или углов) ставит в соответствие (по определенному правилу) всякому отрезку (углу) число — его меру. Следовательно, длина отрезка (мера угла) есть функция отрезка (угла). Здесь значения аргумента суть отрезки (углы), а значения функции — числа.

Если (в частности) областью определения функции является натуральный ряд чисел, то такая функция называется последовательностью (о последовательностях см. гл. VIII настоящей книги).

Для числовых функций от числового аргумента множество $\mathfrak{M}$ — область определения, есть некоторое множество чисел, значения функции суть числа, а потому и множество значений функции есть также некоторое множество чисел.

Применительно к числовым функциям общее определение понятия функции, в его современном понимании, впервые было дано великим русским ученым Н. И. Лобачевским.

Ниже сформулирован ряд определений, относящихся к действительным функциям от действительного аргумента.

Ограниченные функции. *Функция* $f(x)$ *называется ограниченной на данном числовом промежутке (содержащемся в области ее определения), если существует такое число* $M > 0$, *что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство*

$$|f(x)| < M.$$

Если числа M, *удовлетворяющего этому условию, не существует, то функция* $f(x)$ *называется неограниченной.*

Если в данном промежутке выполняется неравенство

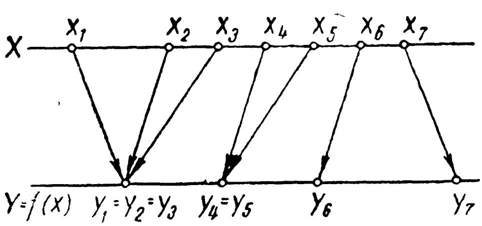
$$f(x) < M \quad (\text{или } f(x) > M),$$

где M — некоторое число (не обязательно положительное), то функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) в данном промежутке.

Четные и нечетные функции. *Функция $f(x)$ называется четной (нечетной), если ее значения равны (противоположны) при произвольных двух противоположных значениях аргумента:*

$$f(x) = f(-x), \quad \text{для четной функции;}$$
$$f(x) = -f(-x), \quad \text{для нечетной функции.}$$

График четной функции симметричен относительно оси OY, а нечетной функции относительно начала координат.



Черт. 7

Взаимно обратные функции. Соответствие между значениями аргумента и значениями функции может не быть взаимно однозначным, именно всякому значению аргумента соответствует единственное значение функции, тогда как всякое данное значение функция может иметь при нескольких (быть может, при бесконечном множестве) значениях аргумента (черт. 7). Если всякому данному значению функции y поставить в соответствие все значения аргумента x, при которых $y=f(x)$, то в общем случае такое соответствие не определяет функцию. В самом деле, в общем случае нарушается основное требование: данному значению y соответствует не одно, а некоторое множество значений x *.

В частных случаях функция $y = f(x)$ может быть такой, что всяким двум различным значениям аргумента соответствуют два различных значения функции, тогда каждому значению y функции можно поставить в соответствие одно единственное число x, то самое, при котором значение функции $f(x)$ равно y. В рассматриваемом случае между множествами значений аргумента и значений функции устанавливается взаимно однозначное

* При изучении действительных функций от действительного аргумента мы считаем правильным ограничиться лишь однозначными функциями. Понятие многозначной функции встретится в данной книге лишь в § 46, где речь идет о функциях комплексного аргумента.

соответствие. Следовательно, x можно рассматривать как функцию от аргумента y:

$$x = \bar{f}(y).$$

Областью определения функции $\bar{f}(y)$ является множество значений функции $f(x)$.

Определение. *Функции*

$$y = f(x) \text{ и } x = \bar{f}(y),$$

устанавливающие взаимно однозначное соответствие между множествами значений x и y, называются взаимно обратными.

Понятие предела функции. Понятие предела функции $f(x)$ в данной точке $\boldsymbol{a}$ имеет смысл лишь в том случае, когда *в любой окрестности точки $\boldsymbol{a}$ содержатся точки, принадлежащие области определения функции $f(x)$, отличные от $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{a}$ есть предельная точка для области определения функции $f(x)$.*

В математическом анализе принимаются следующие определения:

1°. *Число $\boldsymbol{b}$ называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $\boldsymbol{a}$, если при произвольном заданном числе $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon \tag{1}$$

выполняется для всех значений аргумента, отличных от a (т. е. $x \neq a$) и удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta. \tag{2}$$

Для обозначения предела пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

2°. *Число $\boldsymbol{b}$ называется пределом функции $f(x)$ в бесконечности (в минус бесконечности):*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ (или соответственно } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b),$$

если при произвольном заданном $\varepsilon < 0$ существует такое число $N > 0$, что неравенство (1) выполняется для всех значений аргумента, удовлетворяющих неравенству $x > N$ (или соответственно $x < -N$).

3°. *Функция $f(x)$ имеет в точке $\boldsymbol{a}$ бесконечный предел, равный $+\infty$ (или $-\infty$):*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ (или } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty),$$

если при любом заданном $M > 0$ существует такое число δ, что неравенство

$$f(x) > M \text{ (или } f(x) < -M)$$

выполняется при всех значениях аргумента $x \neq a$, удовлетворяющих условию (2).

4°. *Функция $f(x)$ имеет в бесконечности предел, равный бесконечности (минус бесконечности):*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ (или } \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty),$$

если при любом заданном $M > 0$ существует такое число N, что неравенство

$$f(x) > M \text{ (или } f(x) < -M) \qquad (3)$$

выполняется при всех значениях аргумента, удовлетворяющих условию

$$x > N.$$

5°. *Аналогично*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ (*или* } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty)$$

означает выполнение неравенства (3) *при условии* $x < -N$.

Понятие предела распространяется на функции от **любого** числа аргументов. Пусть A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — данная точка. Запись

$$\lim_{X \to A} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon$$

выполняется в произвольной точке X $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удаленной от точки A на расстояние меньшее δ, т. е.

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

Если предел функции в данной точке является **числом**, т. е. этот предел отличен от $\pm\infty$, то говорят, что функция имеет **конечный** предел.

6°. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если ее предел в точке a равен ее значению в точке a;*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Это определение применимо к функциям с произвольным числом аргументов.

В элементарной математике обычно рассматриваются функции в числовых промежутках. Исключение составляют последовательности, для которых областью определения служит бесконечное множество дискретных точек $1, 2, \ldots, n, \ldots$ (см. ниже, § 112).

Принцип продолжения по непрерывности. Пусть $y = f(x)$ — данная функция. *Если при $x = a$ функция $f(x)$ не определена и, таким образом, $f(a)$ не имеет смысла, но предел* *(конечный)* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *существует, то принято значение* $x = a$ *включать в область определения функции, при этом считается:*

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Это дополнительное определение называется принципом продолжения по непрерывности, так как при данном соглашении мы получим функцию, непрерывную в точке a.

Так, например $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при подстановке $x = 0$ теряет смысл, но $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, поэтому следует считать $f(0) = 1$.

Принцип продолжения по непрерывности применяется к функциям с любым числом аргументов.

Принцип продолжения по непрерывности является соглашением, которое можно принять, а можно и не принимать. Математический анализ широко пользуется этим принципом, тогда как элементарная математика обычно его не принимает. Отказ элементарной математики от принципа продолжения по непрерывности обусловлен тем, что школьный курс математики не содержит достаточных сведений по теории пределов и не располагает соответствующим аппаратом.

§ 7. Монотонные функции

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется возрастающей (убывающей) на данном промежутке, если при произвольных двух различных значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, бо́льшему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:*

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2,$$

для возрастающей функции и

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2,$$

для убывающей функции.

Функция возрастающая или убывающая в некотором промежутке называется монотонной (строго) в этом промежутке.

К монотонным функциям относятся также функции неубывающая и возрастающая. Первая характеризуется условием:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad \text{если} \quad x_1 < x_2,$$

а вторая условием:

$$f(x_1) \geqslant f(x_2), \quad \text{если} \quad x_1 < x_2.$$

Можно рассматривать ограниченные и монотонные функции не только в промежутке, но на любом числовом множестве, содержащемся в области определения.

Теорема. *Всякая возрастающая (или убывающая) функция имеет обратную функцию. При этом обратная функция также возрастает (убывает).*

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ возрастает, тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует: $f(x_1) < f(x_2)$, а потому двум различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Следовательно, обратная функция $x = \bar{f}(y)$ существует. Докажем, что обратная функция возрастает. Пусть $y_1 < y_2$ и $x_1 = \bar{f}(y_1)$ и $x_2 = \bar{f}(y_2)$ — соответствующие значения функции $\bar{f}(y)$. По условию

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2),$$

но это возможно лишь, если

$$\bar{f}(y_1) = x_1 < x_2 = \bar{f}(y_2),$$

так как, предположив противное: $x_1 \geqslant x_2$, мы (в силу возрастания $f(x)$ получили бы $y_1 \geqslant y_2$.

Определение. *Функция $f(x)$ на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ возрастает (убывает)* от ***m*** *до* ***M***, *если*

1° *функция* $f(x)$ *возрастает (убывает) на сегменте* $[a, b]$;

2° *в концах сегмента* ***a*** *и* ***b*** *имеет значения, равные (соответственно)* m и M;

3° *всякое значение* ***c***, *промежуточное между* ***m*** *и* ***M***,

$$m < c < M \text{ (для возрастающей функции)},$$
$$m > c > M \text{ (для убывающей функции)}$$

функция $f(x)$ имеет при некотором значении $x = \xi$ в интервале (a, b):

$$f(\xi) = c, \textit{ где } a < \xi < b.$$

В силу монотонности функции значение $x = \xi$ единственно.

Из математического анализа известно, что *если функция $f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она возрастает (убывает) на этом сегменте от $f(a)$ до $f(b)$.*

Аналогично определяется понятие функции, возрастающей (убывающей) от m до M в интервале (a, b); в этом случае условие 2° заменяется следующим условием:

$$\lim_{x \to a} f(x) = m, \quad \lim_{x \to b} f(x) = M.$$

§ 8. Понятие аналитического выражения

Под аналитическим выражением подразумевается символическая запись ряда математических операций, которые следует произвести в определенном порядке над числами, обозначенными буквами (аргументами) или цифрами, чтобы получить численное значение данного выражения.

Примерами аналитических выражений могут служить:

$$x^2 + 2y^2, \quad \frac{(x+a)^3 + (y+b)^3}{2} - 3ab,$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} - \frac{x+y}{x^2-y^2}.$$

В элементарной математике обычно считают, что все входящие в состав аналитического выражения числа и значения аргументов принадлежат данному числовому полю, а именно либо полю рациональных, либо полю действительных, либо полю комплексных чисел.

При этом говорят, что *аналитическое выражение рассматривается над данным числовым полем.*

Аналитические выражения могут быть предметом содержательного исследования, если точно указано, какие именно математические операции над числами и аргументами считаются допустимыми.

В курсе элементарной математики рассматриваются следующие алгебраические операции: четыре арифметические действия (в частности, возведение в целую степень), извлечение корня, а также следующие простейшие трансцендентные операции: x^α (где α — данное иррациональное число), a^x, $\log_a x$ (где a — данное число), $\sin x$, $\cos x$ и т. д., $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д.

Аналитические выражения, рассматриваемые в элементарной математике, строятся посредством последовательного применения указанных простейших операций в любых комбинациях, однако, в конечном числе раз *.

Примерами таких выражений могут служить:

$$x^3 + y^3 - xy, \quad \sqrt[3]{x + \operatorname{arctg} 10^4}, \quad x^x - \sin\sqrt{xy};$$

$$\lg(1 + \sqrt{x-y}) + x^2 + y^2 + z^2 \text{ и т. п.}$$

Если в аналитическом выражении $U(x, y, ..., z)$, содержащем аргументы $x, y, ..., z$, придать каждому из этих аргументов некоторое вполне определенное численное значение: $x = a$, $y = b, ..., z = c$ (из того поля, над которым данное выражение рассматривается), то возможен один из следующих случаев.

* Это значит, что операции, связанные с предельными переходами, как, например: суммирование бесконечных рядов, вычисление бесконечных произведений и т п., элементарной математикой (как правило) не рассматриваются.

С л у ч а й 1°. При системе значений аргументов $x = a$, $y = b, \dots, z = c$ в результате выполнения всех указанных в данном выражении математических операций получается некоторое определенное число из того поля, над которым выражение $U(x, y, \dots, z)$ рассматривается.

Определение. *Система чисел $a, b, \dots, c$ называется допустимой системой значений аргументов, если при $x = a$, $y = b, \dots, z = c$ все математические операции, указанные в данном аналитическом выражении, выполнимы (в данном поле).*

Соответствующее значение выражения $U(x, y, \dots, z)$ обозначается символом $U(a, b, \dots, c)$ и называется его значением в т о ч к е $(a, b, \dots, c)$.

С л у ч а й 2°. При $x = a$, $y = b, \dots, z = c$ всех операций указанных выражений $U(x, y, \dots, z)$ в данном числовом поле выполнить невозможно.

В этом случае значение $U(a, b, \dots, c)$ (в данном числовом поле) не имеет смысла.

Выражения, не имеющие смысла ни при каких системах значений аргументов, в дальнейшем рассматриваться не будут.

П р и м е ч а н и е. В некоторых разделах математики рассматриваются многозначные выражения, т. е. такие выражения, для которых при данной (допустимой) системе значений аргументов получается не одно, а (вообще говоря) несколько (или даже бесконечное множество) значений. Как правило многозначные выражения в настоящем курсе рассматриваться не будут, за исключением лишь иррациональных выражений над полем комплексных чисел (см. гл. III, § 46).

Примеры

1. Для выражения $\dfrac{1}{x-y}$ допустимой является любая система неравных чисел x и y (например, $x = 2$, $y = 3$ или $x = 1$, $y = 5$ и т. д.), при $x = y$ деление невыполнимо, и выражение теряет смысл.

2. Для выражения

$$\sqrt{-1 - x^2 - y^2 - z^2},$$

рассматриваемого над полем действительных чисел, ни одна система чисел (действительных) x, y, z не является допустимой; над полем комплексных чисел это выражение можно рассматривать при любых x, y и z.

3. Значение выражения $x^2 + y^2 - z^2$ в точке $(1, 2, -2)$ равно

$$1 + 2^2 - (-2)^2 = 1, \text{ в точке } \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right) \text{ равно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 - (\sqrt{2})^2 = -\frac{7}{4}.$$

4. Выражение $\dfrac{1}{(x+y)^2 - x^2 - 2xy - y^2}$ не имеет смысла ни при каких

системах значений аргументов x и y, а потому, как лишенное смысла, оно должно быть исключено из рассмотрения.

5. Выражение $x^2+\lg x$ имеет смысл при всех положительных значениях x.

Определение. *Областью определения аналитического выражения называется множество всех допустимых систем значений аргументов.*

Иными словами, *область определения есть множество всех точек, в которых данное выражение имеет смысл.*

Иногда, согласно специальному указанию или в соответствии с конкретным смыслом аргументов, на допустимые значения аргументов налагаются дополнительные условия. Именно *допустимыми считаются не все, а лишь некоторые системы значений аргументов, при которых данное выражение имеет смысл.* Так, например, если при решении текстовой задачи через x обозначено количество людей, то для аргумента x допустимыми являются лишь целые неотрицательные значения.

Примеры

1. Областью определения выражения $\frac{x^2+1}{x(x-1)}$ служит множество всех чисел, отличных от 0 и 1. В поле действительных чисел это есть совокупность трех интервалов $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ и $(1, +\infty)$.

2. Областью определения выражения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ служит множество всех систем трех чисел (x, y, z), ни одного из которых не равно 0.

3. В поле действительных чисел область определения выражения $\sqrt{1-x^2}$ находится из условия $1-x^2 \geqslant 0$, при котором значение корня действительно; это есть сегмент $[-1, 1]$.

4. В формуле для площади круга πr^2 буква π обозначает определенное число, а r — длина радиуса — есть аргумент: для r допустимым является произвольное положительное значение.

5. В выражении для произвольного двузначного числа в десятичной системе: $10x+y$ допустимые системы значений аргументов суть пары чисел x и y, где x — любое целое число не меньше 1 и не больше 9, т. е. $x=1, 2, 3, ..., 9$, а y — любое целое неотрицательное число не больше 9, т. е.

$$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9.$$

§ 9. Элементарные функции

Так как всякой допустимой системе значений аргументов соответствует некоторое значение аналитического выражения $U(x, y, ..., z)$, то это выражение определяет функцию от аргументов $x, y, ..., z$. Областью определения этой функции является область определений данного выражения. Выражение, не имеющее смысла ни при каких системах значений аргументов, не определяет никакой функции.

Функция, определяемая посредством аналитического выражения, называется также функцией, заданной формулой.

Не следует отождествлять понятия функции и аналитического выражения. Как известно, *U есть функция от аргументов x, y, ..., z, если каждой допустимой системе значений аргументов соответствует некоторое определенное значение U.* Это определение не предполагает, что закон соответствия функции задается формулой. Так, например, поставим в соответствие всякому действительному числу x число y, положив:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Здесь функция задается не формулой, а непосредственным описанием закона соответствия.

Определение. *Функция называется элементарной, если ее можно задать выражением, составленным посредством последовательного выполнения простейших операций элементарной математики* (эти операции перечислены на стр. 25).

Примеры

Примерами элементарных функций могут служить:

$$x^3 + 3x^2 + 1, \quad \sqrt{\frac{1}{x} - 2x + 3},$$

$$\sin\sqrt{xy} + 2^{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}, \quad \lg(1 + \sqrt{x-y}) + x^2y^2z^2 \text{ и т. п.}$$

§ 10. Тождественные преобразования, действия над аналитическими выражениями

При совместном рассмотрении двух или нескольких аналитических выражений от данных аргументов допустимыми считаются все те системы значений аргументов, при которых каждое из рассматриваемых выражений имеет смысл. Иными словами, *при совместном задании нескольких аналитических выражений они рассматриваются в общей части их областей определения.*

Примеры

1. Выражение $\frac{x}{x-y}$ имеет смысл, если $x \neq y$; выражение $\frac{y}{x+y}$ имеет смысл, если $x \neq -y$. При совместном рассмотрении этих выражений считается, что $x \neq \pm y$.

2. Выражение $\lg(x+1)$ имеет смысл при $x > -1$, а выражение $\lg(x-1)$ — при $x > 1$; совместно эти выражения можно рассматривать при $x > 1$.

3. Выражения $\lg x$ и $\lg(-x)$ рассматривать совместно не имеет смысла, так как области их определения т. е. множество положительных чисел (для первого выражения) и множество отрицательных чисел (для второго выражения) не имеют общей части.

Определение. *Два аналитических выражения $U(x, y, ..., z)$ и $V(x, y, .., z)$ от данных аргументов, рассматриваемые совместно, называются тождественными, если их значения равны при произвольной допустимой системе значений аргументов.*

Равенство

$$U(x, y, \ldots, z) = V(x, y, \ldots, z),$$

имеющее место при всех допустимых системах значений аргументов, называется тождеством.

Следовательно, два тождественных выражения определяют в общей части их областей определения одну и ту же функцию.

Примеры

1. Выражения $1+2x+x^2$ и $(1+x)^2$ тождественны, их значения равны при произвольных значениях x.

2. Для выражения $2\lg x$ областью определения служит интервал $0<x<\infty$. Выражение $\lg x^2$ имеет смысл при всех значениях $x\neq 0$, областью его определения служит совокупность двух интервалов $-\infty < x < 0$ и $0 < x < \infty$. Тождество $\lg x^2 = 2\lg x$ есть равенство, справедливое в общей части областей определения выражений $\lg x^2$ и $2\lg x$, т. е. в интервале $(0, \infty)$.

Для обозначения тождественности двух выражений наряду со знаком равенства применяется символ $\equiv$:

$$U(x, y, \ldots, z) \equiv V(x, y, \ldots, z).$$

Примечание. Введение специального знака $\equiv$ обусловлено тем, что знак равенства может применяться в различных смыслах, например для обозначения равенства чисел или для обозначения уравнения (см. гл. IV, § 47).

Простейшими и вместе с тем основными алгебраическими тождествами являются равенства, выражающие законы арифметических действий:

$$a+b \equiv b+a, \quad (a+b)+c \equiv a+(b+c),$$

$$ab \equiv ba, \quad (ab)c \equiv a(bc),$$

$$(a+b)c \equiv ac+bc.$$

Эти тождества имеют место в произвольном числовом поле. Тождествами являются также равенства, вытекающие как следствия из законов арифметических действий. Примерами таких тождеств являются известные из арифметики равенства, выражающие правила действия с любым числом компонентов: перестановка и группировка слагаемых и сомножителей, умножение суммы на число, умножение суммы на сумму и т. п.

Определение. *Замена аналитического выражения другим тождественным ему выражением называется тождественным преобразованием данного выражения.*

Соотношение тождественности аналитических выражений, рассматриваемых на одном и том же множестве допустимых систем значений аргументов, обладает следующими основными свойствами, характеризующими соотношение эквивалентности:

I. Свойство обратимости: *если* $U \equiv V$, *то* $V \equiv U$.

II. Свойство рефлексивности: $U \equiv U$.

III. Свойство транзитивности: *если* $U \equiv V$ *и* $V \equiv W$, $U \equiv W$.

Пусть $U(x, y, ..., z)$ и $V(x, y, ..., z)$ два тождественных аналитических выражения; если эти выражения рассматривать не совместно, а по отдельности, то их области определения могут оказаться различными. В этом случае *преобразование, заключающееся в замене аналитического выражения другим, ему тождественным, может привести к изменению области определения.* При таком расширенном толковании понятия тождественного преобразования основные свойства I, II, III не могут безоговорочно применяться.

Примеры

1. Тождественное преобразование $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$ расширяет область определения левой части, так как левая часть имеет смысл при всех значениях $x \neq \pm 1$, а правая часть при всех значениях $x \neq 1$.

2. При преобразовании

$$\lg x^2 = 2 \lg x$$

область определения выражения $\lg x^2$ сужается: из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ исключается первый интервал.

3. Из тождеств:

$$10^{\lg x} \equiv x \quad \text{и} \quad -10^{\lg(-x)} \equiv x$$

не следует, что их левые части также тождественны. В самом деле, левая часть первого тождества определена в интервале $(0, \infty)$, а левая часть второго — в интервале $(-\infty, 0)$, но эти интервалы не имеют ни одной общей точки и выражения:

$$10^{\lg x} \text{ и } -10^{\lg(-x)}$$

не имеет смысла рассматривать совместно.

Определение. *Пусть $U(x, y, ..., z)$ и $V(x, y, ..., z)$ два аналитических выражения, рассматриваемых совместно; выражения:*

$$U(x, y, \ldots, z)+V(x, y, \ldots, z); \qquad U(x, y, \ldots, z)\cdot V(x, y, \ldots, z);$$

$$\frac{U(x, y, \ldots, z)}{V(x, y, \ldots, z)}$$

(последнее выражение рассматривается лишь при условии, если V не равно тождественно нулю), *значения которых равны (соответственно) сумме, произведению и частному значений U и*

V, называются соответственно суммой, произведением и частным выражений U и V.

Этот общий принцип кладется в основу определения действий над различными частного вида аналитическими выражениями.

§ 11. Аналитические выражения, содержащие параметры

Рассмотрим некоторое аналитическое выражение, содержащее две группы аргументов. Будем для определенности аргументы одной группы обозначать последними буквами алфавита, напр. $x, y, \ldots, z$, и по-прежнему называть их аргументами, а аргументы другой группы обозначать первыми буквами алфавита, напр. $a, b, \ldots, c$, и называть их параметрами.

Нижеследующие выражения могут служить примерами выражений, содержащих параметры:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \quad ax^2+bx+c, \quad a^{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}+\lg(x+b).$$

Если параметрам $a, b, \ldots, c$ придана некоторая система численных значений, то получится выражение, содержащее только лишь аргументы $x, y, \ldots, z$. При этом возможен один из следующих двух случаев.

Случай 1°. Полученное выражение определяет некоторую функцию от аргументов $x, y, \ldots, z$ (над данным полем). В этом случае данная система численных значений параметров называется допустимой.

Случай 2°. Полученное после подстановки значений параметров выражение не определяет никакой функции от аргументов $x, y, \ldots, z$ над данным числовым полем, обратившись в выражение, лишенное смысла при всех значениях аргументов $x, y, \ldots, z$ (из данного числового поля). В этом случае данная система значений параметров не считается допустимой.

В некоторых случаях на допустимые значения параметров, в соответствии с их конкретным смыслом, налагаются дополнительные ограничения.

Примеры

1. Для аналитического выражения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

допустимой является произвольная система двух чисел (из данного поля) a и b, из которых ни одно не равно нулю. Так, например, при $a=2$, $b=3$ получим функцию:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}.$$

Системы значений параметров (0, 2), (3, 0), (0, 0) не являются допустимыми.

2. Для выражения $\lg(x-a)$ допустимой является произвольное действительное значение a. Область определения функции $\lg(x-a)$ (при данном a) есть интервал (a, ∞). Эта область определения различна для различных значений a. Так при $a=1$, $a=-2$ и $a=0$ получим функции $\lg(x-1)$, $\lg(x+2)$ и $\lg x$.

3. Для выражения a^x+a^{-x} множеством допустимых значений a служит интервал $0<a<\infty$, так как функция a^x (в элементарной математике) рассматривается лишь при положительном основании.

4. Рассмотрим круговой конус с радиусом основания r, объем этого конуса выразится через высоту x по формуле $v=\frac{1}{3}\pi r^2 x$. Здесь по смыслу задачи для параметра r допустимыми являются лишь положительные значения, но выражение $\frac{1}{3}\pi r^2 x$, рассматриваемое вне связи с данной задачей, имеет смысл при произвольных значениях x и r.

ГЛАВА I

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 12. Многочлены

Определение. *Целым рациональным выражением или многочленом называется выражение, составленное из аргументов и из чисел посредством только лишь действий сложения и умножения.*

Тем же термином «многочлен» называется ф у н к ц и я, определяемая целым рациональным выражением.

Числа, входящие в состав многочлена, а также допустимые значения аргументов будем считать принадлежащими некоторому числовому полю (это поле должно быть указано).

Возведение в целую положительную степень $n > 1$ является частным случаем умножения:

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \ldots x}^{n \text{ раз}},$$

при $n = 0$ и при $n = 1$ считают (соответственно) $x^0 = 1$ $x^1 = x$.

Следовательно, *степени (целые положительные) аргументов и целых рациональных выражений от аргументов в свою очередь являются многочленами.*

Деление на число (из данного числового поля) можно рассматривать как умножение на обратное число. Так, например, $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$. Поэтому, целое рациональное выражение может содержать действие деления на определенные числа (из данного поля); однако не может содержать деления на аргументы и на выражения, содержащие аргументы.

Примеры

1. Примерами многочленов могут служить:

$$x, \quad x^2, \quad (x-y)^2, \quad x^3 + 2ax^2 - a^2, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4},$$

$$\frac{(ax + by)^2 [(x-y)^2 + 3(a^2x + b^2y^2)^3]}{4} \quad \text{и т. п.}$$

2. Выражения

$$\frac{1}{x-y}, \qquad \frac{x+y-1}{x}+x^2+y^2, \qquad \frac{x}{y}$$

содержат аргументы в знаменателях, а потому не являются многочленами.

3. Выражения

$$2^x+2^{-x}, \qquad \sin x+\cos x, \qquad \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y$$

содержат трансцендентные операции над аргументами, а потому не являются многочленами.

Для многочлена допустимой является произвольная система чисел, взятых в качестве значений аргументов из данного числового поля. В самом деле, действия сложения и умножения выполнимы, каковы бы ни были числа-компоненты из данного числового поля. Таким образом, *областью определения многочлена от данных аргументов x, $y, \ldots, z$ является множество произвольных систем численных значений (из данного поля) этих аргументов.*

Один и тот же многочлен можно рассматривать над различными числовыми полями. Допустим, например, что в состав целого рационального выражения, кроме аргументов, входят лишь рациональные числа. Рассматривая данный многочлен над полем рациональных чисел, мы считаем для аргументов допустимыми произвольные рациональные значения. Так как рациональные числа входят в состав поля действительных (а также комплексных чисел), то этот же многочлен можно рассматривать над полем действительных (комплексных) чисел, считая для аргументов допустимыми произвольные действительные (комплексные) значения.

Численные значения многочлена при произвольных численных значениях аргументов принадлежат тому же числовому полю, над которым рассматривается многочлен.

Многочлены можно рассматривать над числовыми кольцами. Допустим, например, что числа, входящие в состав целого рационального выражения, являются целыми, тогда при рассмотрении данного многочлена над кольцом целых чисел для аргументов считаются допустимыми произвольные целые значения.

Примеры

1. Многочлен

$$P(x)=x^3+x^2+2x+1$$

имеет целые коэффициенты; рассматривая его над кольцом целых чисел, считаем для x допустимыми лишь целые значения.

Так, например:

$$P(1)=5, \quad P(0)=1, \quad P(-1)=-1.$$

При рассмотрении этого многочлена над полем рациональных чисел для x допустимы не только целые, но и произвольные дробные значения.

Так, например:

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{8}, \quad P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{27}.$$

При рассмотрении этого многочлена над полем действительных чисел допустимыми для x считаются произвольные действительные (рациональные и иррациональные) значения.

Так, например:

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 4\sqrt{2},$$

$$P(\pi) = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi + 1,$$

вычислив с точностью до 0,01, получим:

$$P(\pi) \approx 31,006 + 9,870 + 6,283 + 1 \approx 48,17.$$

При рассмотрении $P(x)$ над полем комплексных чисел для x считаются допустимыми произвольные комплексные значения:

$$P(1+i) = (1+i)^3 + (1+i)^2 + 2(1+i) + 1 =$$
$$= (-2+2i) + 2i + (2+2i) + 1 = 1 + 6i.$$

2. Многочлен

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x^2 - y^2}{3}$$

можно рассматривать над полем рациональных, над полем действительных, а также над полем комплексных чисел.

3. Многочлен

$$x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2$$

можно рассматривать над полем действительных и над полем комплексных чисел *.

4. Многочлен $x^2 + iy^2$ рассматривается над полем комплексных чисел.

Тождественные преобразования многочленов выполняются на основании законов арифметических действий и вытекающих из этих законов правил действий с любым числом компонентов.

Пример

На нижеследующем примере показано применение законов действий к тождественному преобразованию многочленов

$$P(a,\ b) = [a(a+2b) + ab] \cdot [(a^2 - b)\,2a].$$

Имеем:

$a(a+2b) + ab = (a^2 + a\cdot 2b) + ab =$	(дистрибутивность)
$= (a^2 + 2ab) + ab =$	(коммутативность умножения)
$= a^2 + (2ab + ab) =$	(ассоциативность сложения)
$= a^2 + (2+1)\,ab =$	(дистрибутивность)
$= a^2 + 3ab,$	

Далее:

$(a^2 - b)\,2a = a^2(2a) - b(2a) =$	(дистрибутивность)
$= (2a)\,a^2 - (2a)\,b =$	(коммутативность умножения)
$= 2(a\cdot a^2) - 2(ab) =$	(ассоциативность умножения)
$= 2a^3 - 2ab.$	

---

* Разумеется, что многочлены в примерах 1, 2 и 3 можно рассматривать над промежуточными полями, так, например, $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2$ можно рассматривать над полем чисел вида $a + b\sqrt{2}$, промежуточном между полями рациональных и действительных чисел (a и b — рациональные числа).

Далее:

$$P(a,\ b) = (a^2 + 3ab)(2a^3 - 2ab) =$$

$$= a^2(2a^3) + a^2(-2ab) + 3ab(2a^3) + 3ab(-2ab) =$$

(умножение суммы на сумму)

$$= a^2 2a^3 + a^2(-2)ab + 3ab\cdot 2\cdot a^3 + 3ab(-2)ab =$$

(ассоциативность умножения)

$$= 2a^2a^3 + (-2)a^2ab + 3\cdot 2aa^3b + 3(-2)aabb =$$

(коммутативность умножения)

$$= 2(a^2a^3) + (-2)(a^2a)b + (3\cdot 2)(aa^3)b + (-3\cdot 2)(aa)(bb) =$$

(ассоциативность умножения)

$$= 2a^5 - 2a^3b + 6a^4b - 6a^2b^2.$$

§ 13. Представление многочлена в каноническом виде

Согласно определению, всякий многочлен составляется из чисел и аргументов при помощи действий сложения и умножения, поэтому применением законов этих действий (раскрытие скобок, умножение суммы на сумму) многочлен можно преобразовать в тождественную ему сумму слагаемых (членов), каждое из которых является либо произведением числового коэффициента и степеней аргументов x, y, ..., z, либо числом (обозначенным буквой или цифрами). Итак, многочлен от аргументов x, y, ..., z может быть преобразован в сумму членов вида

$$Ax^ky^l \ldots z^q. \tag{1}$$

Примечание. Чтобы не делать частых оговорок условимся произведение (1) также рассматривать как сумму, содержащую лишь одно слагаемое.

Разумеется, что данный член может не содержать некоторых аргументов. Если член (1) не содержит какого-либо аргумента, то показатель степени этого аргумента считается равным нулю. Если данный член является числом (не содержит аргументов), то показатели степени всех аргументов следует считать равными нулю: $k = l = \ldots = q = 0$.

Определение. *Одночленом от аргументов x, y, ..., z называется произведение, состоящее из числового коэффициента и целых неотрицательных степеней аргументов:*

$$Ax^ky^l \ldots z^q. \tag{1}$$

Одночлен, будучи целой рациональной функцией, является частным (простейшим) случаем многочлена. Рассмотрим следующие два возможные случая.

Случай 1°. $A \neq 0$. В этом случае показатель степени, с которым данный аргумент входит в одночлен (1), называется степенью одночлена относительно этого аргумента. Так, k есть степень одночлена (1) относительно x, l есть степень этого одночлена относительно y и т. д.

Определение. *Сумма всех показателей степени $k + l + \ldots + q$, с которыми входят аргументы в одночлен (1), называется сте-*

пенью данного одночлена (относительно совокупности аргументов).

Всякое отличное от нуля число можно рассматривать как одночлен нулевой степени.

Случай 2°. $A = 0$. В этом случае одночлен называется нуль-одночленом. Нуль-одночлену не приписывается никакой степени. Все нуль-одночлены имеют значение, тождественно равное нулю. Одночлен, отличный от нуль-одночлена, будем называть отличным от нуля.

Определение. *Два отличные от нуля одночлена от одних и тех же аргументов:*

$$Ax^{k_1}y^{l_1}\ \dots\ z^{q_1} \quad \text{и} \quad Bx^{k_2}y^{l_2}\ \dots\ z^{q_2}$$

называются подобными, если каждый из аргументов содержится в обоих одночленах в одной и той же степени:

$$k_1 = k_2, \quad l_1 = l_2, \quad \dots, \quad q_1 = q_2.$$

Таким образом, подобные члены могут отличаться лишь числовыми сомножителями — коэффициентами.

Нуль-одночлен считается подобным всякому одночлену.

Сумму нескольких подобных одночленов (в силу закона дистрибутивности) можно заменить тождественным ей одночленом с коэффициентом, равным сумме коэффициентов одночленов-слагаемых. Для этого достаточно вынести за скобку буквенные сомножители (каждый в соответствующей степени). Так, например:

$$2x^2y^3z - 3x^2y^3z + 9x^2y^3z = (2 - 3 + 9)\,x^2y^3z = 8x^2y^3z.$$

Произведение двух одночленов (в силу законов коммутативности и ассоциативности умножения) можно представить в виде одночлена, коэффициент которого равен произведению коэффициентов одночленов-сомножителей, а каждый из аргументов, содержащихся в одном из сомножителей, входит в одночлен-произведение с показателем степени, равным сумме показателей данного аргумента в обоих сомножителях *.

Пример

$$\left(-5x^2y^3zu\right)\left(\frac{3}{2}\,x^3z^4v^5\right) =$$

$$= (-5)\,x^2y^3zu\,\frac{3}{2}\,x^3z^4v^5 = \qquad \text{(ассоциативность умножения)}$$

$$= \left(-5\cdot\frac{3}{2}\right)x^2x^3y^3zz^4uv^5 = \qquad \text{(коммутативность умножения)}$$

$$= \left(-5\cdot\frac{3}{2}\right)(x^2x^3)\,y^3\,(zz^4)\,uv^5 = \qquad \text{(ассоциативность умножения)}$$

$$= -\frac{15}{2}\,x^5y^3z^5uv^5.$$

---

* В частности, аргумент, содержащийся лишь в одном из сомножителей, входит в произведение с неизменным показателем, так как показатель, с которым этот аргумент входит в другой сомножитель, следует считать равным нулю.

Всякий многочлен после выполнения надлежащих преобразований можно представить в виде суммы одночленов; в этой сумме можно сгруппировать подобные члены (свойство коммутативности сложения) и каждую группу подобных членов можно заменить одним одночленом — их суммой (свойство ассоциативности сложения). Эта операция известна из школьного курса алгебры под названием приведения подобных членов. В результате приведения подобных членов может представиться один из двух случаев:

Случай 1°. *Многочлен представится в виде суммы попарно неподобных одночленов*:

$$A_1x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots + A_sx^{k_s}y^{l_s} \ldots z^{q_s},$$

где $x, y, \ldots, z$ — аргументы, $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — коэффициенты. Нуль-одночлены принято не писать, и каждый из коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_s$ можно считать отличным от нуля.

Случай 2°. *Коэффициенты всех одночленов-слагаемых равны нулю* $A_1 = A_2 = \ldots = A_s = 0$. Многочлен, все коэффициенты которого равны нулю, называется нуль-многочленом. Значение нуль-многочлена при всех значениях аргументов равно нулю. Обычно нуль-многочлен обозначается тем же символом 0, как и число нуль в арифметике.

Определение. *Представление многочлена в виде тождественной ему суммы попарно неподобных одночленов или в виде нуль-многочлена называется каноническим представлением данного многочлена.*

Многочлен, заданный в виде суммы попарно неподобных одночленов, называется заданным в каноническом виде.

Приведение многочлена к каноническому виду в школьном курсе называют **упрощением целого выражения.**

По числу одночленов-слагаемых (отличных от нуля) многочлены, заданные в каноническом виде, разделяются на одночлены, двучлены, трехчлены и т. д.

Примечания: I. Всякий одночлен, будучи целым рациональным выражением, является частным случаем многочлена.

II. В каноническом представлении многочлена от нескольких аргументов некоторые аргументы могут не содержаться. Если, например, для многочлена от двух аргументов $P(x, y)$ получится следующее каноническое представление:

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k,$$

то при данном x многочлен $P(x, y)$ имеет одно и то же значение, каково бы ни было значение y.

Пример

Многочлен от двух аргументов

$$P=(x-y)^2+(x+y)^2-2y^2+x$$

имеет следующее каноническое представление (не содержащее y):

$$P=2x^2+x.$$

Определение. *Степенью многочлена, заданного в каноническом виде и отличного от нуль-многочлена, называется наибольшая из степеней (относительно совокупности аргументов) одночленов-слагаемых, входящих в состав многочлена. Нуль-многочлену не приписывается никакой степени.*

Примеры

1. Многочлен $2x+y+3z+2$ имеет первую степень.
2. Многочлен $x^2+3xy+y^2+2x+y+1$ имеет вторую степень.
3. Многочлен $xyz-1$ имеет третью степень.

Определение. *Многочлен, заданный в каноническом виде,*

$$P(x,\ y,\ \ldots,\ z)=A_1x^{k_1}y^{l_1}\ \ldots\ z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}\ \ldots\ z^{q_2}+\ldots$$

называется однородным многочленом или формой степени $\boldsymbol{n}$, *если все его члены имеют одну и ту же степень, равную* $\boldsymbol{n}$:

$$k_1+l_1+\ldots+q_1=k_2+l_2+\ldots+q_2=\ldots=n.$$

Всякий одночлен также считается однородным многочленом.

Примеры

1. Многочлены

$$ax,\quad a_1x+b_1y,\quad a_1x+b_1y+c_1z,\quad a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$$

суть однородные многочлены 1-й степени, или линейные формы от одного, двух, трех и n аргументов (соответственно). Примерами конкретных линейных форм могут служить

$$x-y,\ 2x+\frac{1}{2}y-z,\quad 3x+y-z+2u.$$

2. Многочлены

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2$$

суть однородные многочлены второй степени или квадратичные формы.

3. Многочлены

$$x^3,\quad x^3+y^3+z^3-3xyz,\quad x^2y+y^2x+z^2y$$

суть однородные многочлены третьей степени (кубические формы).

4. Всякое отличное от нуля число можно рассматривать как однородный многочлен нулевой степени.

Теорема. *При замене аргументов $x,\ y,\ \ldots,\ z$ однородного многочлена степени n пропорциональными числами $tx,\ ty,\ \ldots, tz$ многочлен умножается на множитель t^n:*

$$P(tx,\ ty,\ \ldots,\ tz)=t^nP(x,\ y,\ \ldots,\ z).$$

Доказательство. Рассмотрим какой-либо отдельный член однородного многочлена:

$$Ax^ky^l \dots z^q, \text{ где } k+l+\dots+q=n.$$

При замене

$$x, y, \dots, z \quad \text{на} \quad tx, ty, \dots, tz$$

получим:

$$A(tx)^k(ty)^l \dots (tz)^q = t^{k+l+\dots+q} Ax^ky^l \dots z^q = t^n \cdot Az^ky^l \dots z^q.$$

Итак, каждый член приобретает множитель t^n, следовательно, t^n будет множителем всего многочлена, ч. т. д.

§ 14. Различные способы расположения членов многочлена

В каноническом представлении многочленов с одним аргументом принято располагать члены в определенном порядке одним из следующих двух способов:

1° по убывающим степеням аргумента:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (\text{где } a_n \neq 0);$$

2° по возрастающим степеням аргумента:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

При втором способе не исключается возможность (в частных случаях) равенства нулю нескольких первых коэффициентов; если первые k коэффициентов равны нулю, то в каноническом представлении на первом месте будет находиться член a_kx^k, где $a_k \neq 0$.

Для многочленов с несколькими аргументами одну и ту же степень могут иметь несколько неподобных членов. Так, например, первый и третий члены многочлена

$$x^2 + x + 2xy + 2y + 1$$

имеют вторую степень, а второй и четвертый члены имеют первую степень.

Ниже указаны наиболее часто встречающиеся способы расположения членов многочлена с несколькими аргументами, заданного в каноническом виде.

Лексикографическое (словарное) расположение.

При этом способе сначала устанавливается некоторый порядок расположения для аргументов. Условимся во всех членах многочлена от данных m аргументов $x, y, \dots, z$ на первом месте писать некоторый определенный аргумент, например x, на втором месте аргумент y и т. д., на m-м месте аргумент z. Всякому члену $Ax^k y^l \dots z^q$ многочлена соответствует система m неотрицательных чисел — показателей, написанных в установленном порядке: $k, l, \ldots, q$.

Пусть

$$K_1 = A_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1} \quad \text{и} \quad K_2 = A_2 x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{q_2}$$

— два неподобные одночлена от данных аргументов. Если $k_1 \neq k_2$, то старшим считается тот одночлен, для которого показатель степени аргумента x больше. Так, если $k_1 > k_2$, то K_1 старше, чем K_2. Если $k_1 = k_2$, но $l_1 \neq l_2$, то старшим считается одночлен, для которого показатель степени аргумента y имеет большее значение, и т. д. Итак, *из двух неподобных одночленов K_1 и K_2 старшим считается тот, у которого первый по порядку показатель степени больше показателя степени при том же аргументе у другого одночлена, а все предыдущие показатели равны*. При лексикографическом расположении многочлена одночлены выписываются слева направо в порядке старшинства.

Пример

Чтобы лексикографически расположить многочлен

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ez^2y + fx + ky + l,$$

установим для аргументов следующий порядок: x, y, z, тогда получим следующее лексикографическое расположение членов

$$ax^3 + dx^2y + fx + by^3 + eyz^2 + ky + cz^3 + l.$$

Приняв для аргументов порядок z, x, y, получим следующее лексикографическое расположение членов того же многочлена

$$cz^3 + ez^2y + ax^3 + dx^2y + fx + by^3 + ky + l.$$

Расположение многочлена по степеням данного аргумента.

Примем данный аргумент, например x, за первый, тогда при лексикографическом расположении членов степень относительного аргумента x всякого последующего члена будет не больше степени предыдущего члена. Разобьем все члены на группы, относя к одной и той же группе одночлены одинаковой степени относительно x. Вынеся за скобки в каждой группе членов соответствующую степень аргумента x, получим:

$$P(x, y, \ldots, z) = p_n(y, \ldots, z)\, x^n + p_{n-1}(y, \ldots, z)\, x^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + p_0(y, \ldots, z).$$

В этой форме записи коэффициентами (при степенях данного аргумента) являются многочлены

$$p_n(n, \ldots, z), \quad p_{n-1}(y, \ldots, z), \ldots, p_0(y, \ldots, z)$$

от прочих аргументов. При этом коэффициент $p_n(y, \ldots, z)$ всегда считается отличным от нуль-многочлена. Число n называется степенью, а слагаемое $p_n(y, \ldots, z)x^n$ старшим членом многочлена относительно аргумента x. Аналогично определяется младший относительно x член многочлена.

Пример

Расположим многочлен

$$2x^3 + 3x^3z - 4xy^2 + 2y - z - 2xyz + 1$$

по степеням x:

$$(3z + 2)x^3 - 2(yz + 2y^2)x + (2y - z + 1).$$

Расположим тот же многочлен по степеням y и z, получим соответственно

$$-4xy^2 + 2(-xz + 1)y + (3x^3z + 2x^3 - z + 1)$$

и

$$(3x^3 - 2xy - 1)z + (2x^3 - 4xy^2 + 2y + 1).$$

Расположение по однородным многочленам. Всякий многочлен, отличный от нуль-многочлена, заданный в каноническом виде, можно представить в виде суммы однородных многочленов. В самом деле, достаточно, пользуясь законами коммутативности и ассоциативности сложения, разбить члены данного многочлена на группы, состоящие из одночленов одной и той же степени. Эти группы образуют (каждая) однородные многочлены, составляющие в сумме данный многочлен. Обычно однородные многочлены располагают по убывающим (или по возрастающим) степеням, тогда в общем случае многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ степени n можно представить в следующем виде:

$$P(x, y, \ldots, z) = P_n(x, y, \ldots, z) + P_{n-1}(x, y, \ldots, z) + \ldots + P_0,$$

где $P_k(x, y, \ldots, z)$ — однородный многочлен степени k.

Однородный многочлен наибольшей (наименьшей) степени, входящей в состав многочлена P, заданного в каноническом виде, называют группой старших (младших) членов. Члены однородных многочленов $P_k(x, y, \ldots, z)$ обычно располагают в лексикографическом порядке.

Примеры

1. Ниже дано в общем виде расположение многочленов второй степени от двух и трех аргументов по однородным многочленам:

$$(a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2) + (a_1x + a_2y) + a_0$$

и

$$(a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2) + (a_1x + a_2y + a_3z) + a_0.$$

2. Расположив многочлен

$$xyz + 2 + 2x^2 + 3y^4 + x^3 - y^3 + x - y$$

по однородным многочленам, получим:

$$(x^3 + xyz - y^3) + (2x^2 + 3y^2) + (x - y) + 2.$$

§ 15. Теорема о многочлене, тождественно равном нулю

Теорема. *Если при произвольных значениях аргументов (из того числового поля, над которым рассматривается многочлен) значение многочлена, заданного в каноническом виде, равно нулю, то все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема утверждает, что *никакой многочлен, представленный в каноническом виде, кроме нуль-многочлена, не может быть тождественно равным нулю.*

Доказательство. 1°. Сначала докажем теорему для многочленов с одним аргументом. Применим метод математической индукции. Для многочленов первой степени

$$P(x) = a_1x + a_0$$

теорема верна. В самом деле, если при всех значениях x значение двучлена $P(x)$ равно нулю, то, положив (в частности) $x = 0$, получим $a_0 = 0$ и, следовательно, $P(x) = a_1x \equiv 0$. Положив $x = 1$, получим $a_1 = 0$. Следовательно, $P(x)$ есть нуль-многочлен.

Предположим, что теорема верна для многочленов степени, низшей чем n, докажем, что в этом предположении она будет верна для многочленов степени n. Пусть при всех значениях x (из данного поля)

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0, \tag{1}$$

докажем, что $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$.

Заменив в тождестве (1) x на $2x$, получим тождество:

$$P(2x) = 2^na_nx^n + 2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 2a_1x + a_0. \tag{2}$$

Умножим тождество (1) на 2^n и вычтем из него (почленно) тождество (2), тогда получим:

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1}x^{n-1} + 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2}x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (2^n - 1)a_0 \equiv 0. \tag{3}$$

По предположению многочлен степени, низшей чем n, может быть тождественным нулю лишь при условии, если все его коэффициенты равны нулю, следовательно, из тождества (3) получим

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1} = 0, \quad 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2} = 0, \ \ldots,$$
$$2^{n-k}(2^k-1)a_{n-k} = 0, \ \ldots, \quad (2^n-1)a_0 = 0.$$

Так как $2^{n-k} \neq 0$ и $2^k - 1 \neq 0$, то $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$; но тогда тождество (1) примет вид:

$$a_nx^n \equiv 0;$$

положив $x = 1$, получим $a_n = 0$.

Будучи верной для многочленов первой степени, теорема верна для многочленов любой степени.

2°. Для доказательства теоремы в общем случае снова воспользуемся методом математической индукции. Допустим, что теорема справедлива для многочленов с числом аргументов меньшим, чем m, докажем, что при этом предположении она будет справедлива для многочленов от m аргументов. Расположим данный многочлен $P(x, y, ..., z)$ по степеням одного из аргументов, например, x:

$$P(x, y, \ldots, z) = p_n(y, \ldots, z)x^n + p_{n-1}(y, \ldots, z)x^{n-1} + \\ + \ldots + p_0(y, \ldots, z).$$

По условию $P(x, y, ..., z) = 0$ при всех значениях аргументов (из данного поля); докажем, что $P(x, y, ..., z)$ есть нуль-многочлен. Фиксируем произвольно значения аргументов $y, ..., z$, тогда $P(x, y, ..., z)$ можно рассматривать как многочлен с одним аргументом x, который равен нулю при всех значениях x, следовательно, все его коэффициенты равны нулю:

$$p_n(y, \ldots, z) = p_{n-1}(y, \ldots, z) = \ldots = p_0(y, \ldots, z) = 0.$$

Так как значения $m - 1$ аргументов $y, ..., z$ можно выбирать произвольно, то последние равенства суть тождества. По предположению это возможно лишь, если каждый из многочленов p_n, $p_{n-1}, ..., p_0$ от $m - 1$ аргументов является нуль-многочленом, но тогда все коэффициенты многочлена $P(x, y, ..., z)$ также равны нулю.

Будучи верной для многочленов с одним аргументом, теорема верна для многочленов с любым числом аргументов, ч. т. д.

§ 16. Теорема о тождественности многочленов

Теорема. *Необходимым и достаточным условием тождественности двух многочленов (над некоторым числовым полем), заданных в каноническом виде, является равенство коэффициентов членов, содержащих одни и те же аргументы в одинаковых степенях* (т. е. коэффициентов подобных членов).

Доказательство. Условие достаточно. Если все соответственные коэффициенты двух многочленов

$$P = A_1x^{k_1}y^{l_1}\ldots z^{q_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2}\ldots z^{q_2} + \ldots \tag{A}$$

и

$$Q = B_1x^{k_1}y^{l_1}\ldots z^{q_1} + B_2x^{k_2}y^{l_2}\ldots z^{q_2} + \ldots \tag{B}$$

равны:

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \ \ldots,$$

то мы имеем одно и то же, а не два различных выражения, поэтому значения данных многочленов равны при всех значениях аргументов.

Условие необходимо. Предположим, что при всех значениях аргументов значения многочленов (A) и (B) равны, докажем, что при этом условии многочлены состоят из одних и тех же одночленов. Рассмотрим какой-либо член одного из многочленов, например $A_1x^{k_1}y^{l_1}...z^{q_1}$, в другом многочлене либо содержится член $B_1x^{k_1}y^{l_1}...z^{q_1}$, подобный данному, либо такого члена не содержится. В последнем случае член $B_1x^{k_1}y^{l_1}...z^{q_1}$ все же может быть написан, если считать $B_1 = 0$. Добавив (в случае надобности) в каждом из данных многочленов недостающее количество членов с коэффициентами равными нулю, можно считать, что каждому члену одного многочлена соответствует подобный член другого. По условию значения многочленов (A) и (B) одинаковы при всех значениях аргументов, поэтому, выполнив почленное вычитание, получим при всех значениях аргументов:

$$P - Q = (A_1 - B_1)\, x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + (A_2 - B_2)x^{k_2}y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots \equiv 0.$$

Это возможно лишь при условии $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = ... = 0$, откуда $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, ..., ч. т. д.

Примеры

1. Расположить многочлен x^2+3x+2 по степеням $x-1$.

Решение. Ищем для данного многочлена выражение в следующем виде:

$$x^2 + 3x + 2 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1) + C.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав члены в правой части, получим:

$$x^2 + 3x + 2 \equiv Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C.$$

По теореме о тождественности должны быть равны соответственные ко эффициенты:

$$A = 1, \quad -2A + B = 3, \quad A - B + C = 2,$$

откуда $A=1$, $B=5$, $C=6$ и

$$x^2 + 3x + 2 \equiv (x-1)^2 + 5(x-1) + 6.$$

2. Доказать, что если при произвольных значениях аргументов и при произвольном t имеет место тождество

$$P(tx, ty, \ldots, tz) \equiv t^k P(x, y, \ldots, z),$$

то $P(x, y, ..., z)$ есть однородный многочлен степени k.

Доказательство. Расположим многочлен P по степеням однородных многочленов:

$$P(x, y, \ldots, z) \equiv P_n(x, y, \ldots, z) + P_{n-1}(x, y \ldots, z) + \ldots + P_0.$$

Заменив аргументы пропорциональными числами tx, ty, ..., tz, получим тождество:

$$t^k P(x, y, \ldots, z) \equiv t^n P_n(x, y, \ldots, z) + t^{n-1} P_{n-1}(x, y, \ldots, z) + \ldots + P_0.$$

По теореме о тождественности многочленов это возможно (при произвольном t), если

$$P(x, y, \ldots, z) \equiv P_k(x, y, \ldots, z).$$

§ 17. Единственность канонического представления многочлена. Действия над многочленами

Теорема. *Всякое целое рациональное выражение может быть единственным образом (с точностью до порядка следования одночленов-слагаемых) представлено в каноническом виде.*

Доказательство. Как известно (см. § 13) всякое целое рациональное выражение можно представить в каноническом виде. Два канонические представления данного выражения суть многочлены, тождественные этому выражению, а потому тождественные между собой. В силу теоремы о тождественности, эти два многочлена состоят из одних и тех же одночленов-слагаемых и могут отличаться лишь порядком, в котором они написаны, ч. т. д.

Пусть

$$P(x, y, \ldots, z) = A_1x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots$$

и

$$Q(x, y, \ldots, z) = B_1x^{k_1'}y^{l_1'} \ldots z^{q_1'} + B_2x^{k_2'}y^{l_2'} \ldots z^{q_2'} + \ldots$$

два многочлена от аргументов $x, y, \ldots, z$, заданные в каноническом виде; сумма и произведение многочленов суть также целые рациональные функции от тех же аргументов:

$$P + Q = (A_1x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + \ldots) + (B_1x^{k_1'}y^{l_1'} + \ldots z^{q_1'} + \ldots),$$

$$PQ = (A_1x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + \ldots)(B_1x^{k_1'}y^{l_1'} \ldots z^{q_1'} + \ldots).$$

Для получения канонического представления суммы $P + Q$ и произведения PQ следует воспользоваться общими правилами сложения и умножения двух сумм:

$$P + Q = A_1x^{k_1}y^{l_1} \ldots z^{q_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots + \\ + B_1x^{k_1'}y^{l_1'} \ldots z^{q_1'} + B_2x^{k_2'}y^{l_2'} \ldots z^{q_2'} + \ldots \qquad (P + Q)$$

и

$$PQ = A_1B_1x^{k_1+k_1'}y^{l_1+l_1'} \ldots z^{q_1+q_1'} + \\ + A_2B_1x^{k_2+k_1'}y^{l_2+l_1'} \ldots z^{q_2+q_1'} + \ldots \qquad (PQ)$$

(в правой части последнего равенства следует составить сумму произведений каждого члена P на каждый член Q), после чего выполнить приведение подобных членов в правых частях равенств $(P + Q)$ и (PQ). Канонические представления многочленов $P + Q$ и PQ обычно и называют суммой и произведением данных многочленов. В силу теоремы о единственности канонического представления не существует никаких многочленов с другими коэффициентами, значения которых при всех значениях аргументов равны (соответственно) сумме и произведению значений многочленов P и Q.

Основные, характеристические свойства сложения и умножения остаются в силе для многочленов, т. е. имеют место тождества:

$$P+Q=Q+P, \quad (P+Q)+R \equiv P+(Q+R),$$
$$PQ \equiv QP, \quad (PQ)R \equiv P(QR), \quad (P+Q)R \equiv PR+QR,$$

где P, Q и R произвольные многочлены (для краткости аргументы не написаны). Так, например, многочлены $P+Q$ и $Q+P$ тождественны, так как (в силу закона коммутативности сложения чисел) их значения равны при произвольных значениях аргументов.

Два многочлена называются взаимно противоположными, если их сумма тождественна нуль-многочлену. Если

$$P(x, y, \ldots, z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots$$

— данный многочлен, то противоположный многочлен

$$-P(x, y, \ldots, z) = C_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1} + C_2 x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{q_2} + \ldots$$

находится из условия:

$$P+(-P) \equiv (A_1+C_1) x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1} + (A_2+C_2) x^{k_2} y^{l_2} \ldots, z^{q_2} + \ldots \equiv 0,$$

откуда

$$A_1+C_1 = A_2+C_2 = \ldots = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = -A_1, \quad C_2 = -A_2, \ldots$$

Следовательно, *многочлен* $-P$, *противоположный* P, *получается заменой коэффициентов* P *противоположными числами*.

Вычитание многочленов определяется как операция обратная относительно сложения многочленов. Многочленом-разностью

$$P(x, y, \ldots, z) - Q(x, y, \ldots, z)$$

называется многочлен $R(x, y, \ldots, z)$, удовлетворяющий условию

$$P(x, y, \ldots, z) \equiv Q(x, y, \ldots, z) + R(x, y, \ldots, z).$$

Прибавив к обеим частям этого тождества по $-Q$, получим:

$$R(x, y, \ldots, z) = P + (-Q).$$

Полученный многочлен удовлетворяет поставленному условию, так как

$$Q+R \equiv Q+[P+(-Q)] \equiv P.$$

Итак, вычитание многочлена Q равносильно прибавлению противоположного многочлена, т. е. $-Q$.

Коэффициенты многочленов суммы, произведения и разности получаются из коэффициентов данных многочленов посредством действий сложения, вычитания и умножения. Следовательно. *если коэффициенты данных многочленов принадлежат некоторому числовому кольцу (в частности полю), то коэффициенты их суммы, разности и произведения принадлежат тому же кольцу.* Так, например, сумма, разность и произведение многочленов с целыми коэффициентами суть многочлены с целыми коэффициентами. Сумма, разность и произведение многочленов с четными коэффициентами суть многочлены с четными коэффициентами. Сумма, разность и произведение многочленов с рациональными, действительными или комплексными коэффициентами суть многочлены соответственно с рациональными, действительными или комплексными коэффициентами.

В множестве всех многочленов от данных аргументов $x, y, \ldots, z$, рассматриваемых над данным числовым кольцом (в частности полем), выполнимы операции сложения и умножения, обладающие характеристическими свойствами этих операций, а также однозначно выполнимая операция обратная сложению — вычитание. Следовательно, *множество всех многочленов от данных аргументов над данным числовым кольцом, в свою очередь, образует кольцо (относительно операций сложения и умножения многочленов). Это множество называется кольцом многочленов над данным числовым кольцом (в частности над данным полем).*

В кольце многочленов нулем является нуль-многочлен. Всякий многочлен, отличный от нуль-многочлена, будем кратко называть отличным от нуля.

При выполнении действий над многочленами, заданными в каноническом виде, рекомендуется применять форму записи, облегчающую получение окончательного результата в каноническом виде. При сложении многочленов рекомендуется подписывать подобные члены под подобными, при этой форме записи сложение многочленов сводится к сложению (по столбцам) коэффициентов. При умножении многочленов от одного аргумента рекомендуется, расположив сомножители по убывающим или по возрастающим степеням аргумента, составлять «частные произведения» множимого на каждый член многочлена-множителя и при сложении частных произведений подписывать подобные члены под подобными.

Ниже приводится схема умножения многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (P)$$

на многочлен

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0; \qquad (Q)$$

Члены множителя \ Члены множимого	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$b_m x^m$	$a_n b_m x^{n+m} + a_{n-1} b_m x^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_m x^m$
$b_{m-1} x^{m-1}$	$a_n b_{m-1} x^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_{m-1} x^{m-1}$
...	. . . .
$b_1 x$	. . . . $a_0 b_1 x$
b_0	. . . . $a_1 b_0 x + a_0 b_0$
$P \cdot Q$	$a_n b_m x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}) x^{n+m-1} + \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0$

Член произведения, содержащий x^k, имеет коэффициент

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \ldots + a_0 b_k$$

(при этом a_k при $k>n$ и b_k при $k>m$ считаются равными нулю), равный сумме всевозможных произведений $a_i b_j$, взятых при условии $i+j=k$.

В самом деле, из всевозможных произведений

$$a_i x^i b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$$

степень k имеют члены, для которых $i+j=k$.

Примеры

1. Выполнить следующие действия над многочленами

$$(4x^3 - 5a^2x - 8a^3 - 4ax^2) + (2a^2x - x^3 + 4a^3 + 2x^2) - (9a^3 - 5ax^2 + 5x^3),$$

где x и a — аргументы.

Решение. Подписав подобные члены друг под другом, производим сложение коэффициентов по столбцам. Для определенности выписываем члены в лексикографическом порядке.

I слаг.	$4x^3 - 4x^2a \qquad - 5xa^2 - 8a^3$
II слаг.	$-x^3 \qquad + 2x^2 + 2xa^2 + 4a^3$
III слаг.	$-5x^3 + 5x^2a \qquad\qquad - 9a^3$
	$-2x^3 + x^2a + 2x^2 - 3xa^2 - 13a^3$

2. Найти произведение многочленов (от аргумента x)

$$x^4 - 3x^3a^2 + 2xa^3 - a^4 \quad \text{и} \quad 2x^3 + x^2a - 3a^3;$$

имеем:

множимое		$x^4 - 3x^2a^2 + 2xa^3 - a^4$
члены множителя	$2x^3$	$2x^7 \quad -6x^5a^2 + 4x^4a^3 - 2x^3a^4$
	x^2a	$+x^6a \quad -3x^4a^3 + 2x^3a^4 - x^2a^5$
	$-3a^3$	$-3x^4a^3 \quad + 9x^2a^5 - 6xa^6 + 3a^7$
произведение		$2x^7 + x^6a - 6x^5a^2 - 2x^4a^3 \quad + 8x^2a^5 - 6xa^6 + 3a^7$

Примечание. Из приведенного образца записи видно, что при выписывании членов частных произведений, в случае, когда степени аргумента в сомножителях имеют пропуски, надо оставлять места для «недостающих» членов, так как они могут оказаться в следующих частных произведениях.

§ 18. Теорема о произведении многочленов

Теорема. *Если каждый из двух многочленов-сомножителей, заданных в каноническом виде, отличен от нуля, то:*

1° *многочлен-произведение также отличен от нуля;*

2° *если хотя бы один из сомножителей не является одночленом, то каноническое представление многочлена-произведения содержит не менее двух членов;*

3° *степень многочлена-произведения равна сумме степеней сомножителей.*

Доказательство. Для многочленов с одним аргументом теорема верна. В самом деле, произведение старших членов $a_n b_m x^{n+m}$ многочленов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{n-k} x^{n-k}$$

и

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_{m-l} x^{m-l},$$

где $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$ есть отличный от нуля старший член произведения $P(x)Q(x)$ (см. предыдущий параграф). Следовательно, произведение PQ отлично от нуля (пункт 1°) и имеет степень равную $n+m$ (пункт 3°). Если хотя бы один из многочленов P и Q не является одночленом, то в нем содержатся по крайней мере два члена. В этом случае произведение младших членов

$$a_{n-k} b_{m-l} x^{m+n-k-l} \quad (\text{где } a_{n-k} \neq 0, \quad b_{m-l} \neq 0)$$

не имеет себе подобных среди прочих произведений членов сомножителей и является отличным от нуля младшим членом произведения. Следовательно, произведение содержит по крайней мере два члена: старший и младший (пункт 2°).

Для многочленов с несколькими аргументами доказательство аналогично. Расположим лексикографически члены множимого и множителя (приняв за нормальный один и тот же порядок следования аргументов):

$$P = Ax^k y^l z^m \ldots u^n + \ldots + Bx^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} \ldots u^{n_1} + \ldots;$$

$$Q = Cx^p y^q z^r \ldots u^t + \ldots + Dx^{p_1} y^{q_1} z^{r_1} \ldots u^{t_1} + \ldots$$

Произведение старших членов многочленов множимого и множителя

$$ACx^{k+p} y^{l+q} \ldots u^{n+t} \tag{1}$$

есть отличный от нуля член произведения. Этот член не имеет себе подобных среди прочих членов произведения. В самом деле, составим произведение каких-либо двух членов данных сомножителей, причем хотя бы один из этих членов выберем отличным от соответствующего старшего члена:

$$BDx^{k_1+p_1}y^{l_1+q_1}z^{m_1+r_1}\dots u^{n_1+t_1}. \qquad (2)$$

Сравним полученный одночлен с произведением старших членов. Если $k>k_1$, либо $p>p_1$, то $k+p>k_1+p_1$ и член (1) старше члена (2); если $k=k_1$ и $p=p_1$, но $l>l_1$, либо $q>q_1$, то $k+p= =k_1+p_1$, $l+q>l_1+q_1$ и член (1) старше члена (2); если $k=k_1$, $p=p_1$, $l=l_1$, $q=q_1$, но $m\geq m_1$, либо $r>r_1$, то и в этом случае член (1) старше члена (2). Это поочередное сравнение показателей закончится как только наступит неравенство показателей, но это неравенство должно наступить, так как хотя бы один из одночленов был взят отличным от старшего члена соответствующего многочлена. Итак, каноническое представление PQ наверное содержит член отличный от нуля, следовательно, $PQ\not\equiv 0$ (пункт 1°).

Если хотя бы один из многочленов P и Q не является одночленом, то произведение младших членов в их лексикографическом расположении является неподобным прочим членам младшим членом произведения (доказательство аналогично). В этом случае $P\cdot Q$ содержит по крайней мере два члена (пункт 2°).

Докажем (пункт 3°), что степень (относительно совокупности аргументов) произведения PQ равна сумме степеней сомножителей. Предположим сначала, что $P(x, y, \dots, z)$ и $Q(x, y, \dots, z)$ являются однородными многочленами степени N и M соответственно. Согласно доказанному (пункт 2°) $PQ\not\equiv 0$. Докажем, что каждый член многочлена-произведения PQ имеет степень равную $N+M$. В самом деле, всевозможные произведения каждого члена $Ax^ky^l\dots z^q$ многочлена P на каждый член $B^{k_1}y^{l_1}\dots z^{q_1}$ многочлена Q имеют одну и ту же степень $N+M$, так как

$$(Ax^ky^l\dots z^q)(Bx^{k_1}y^{l_1}\dots z^{q_1})=ABx^{k+k_1}y^{l+l_1}\dots z^{q+q_1}$$

и

$$(k+k_1)+(l+l_1)+\dots+(q+q_1)=$$
$$=(k+l+\dots+q)+(k_1+l_1+\dots+q_1)=N+M.$$

Следовательно, произведение PQ есть однородный многочлен степени $N+M$.

Пусть $P(x, y, \dots, z)$ произвольный многочлен степени N, а $Q(x, y, \dots, z)$ произвольный многочлен степени M. Расположим каждый из сомножителей по однородным многочленам

$$P(x,y,\dots,z)=P_N(x,y,\dots,z)+P_{N-1}(x,y,\dots,z)+\dots+P_0,$$
$$Q(x,y,\dots,z)=Q_M(x,y,\dots,z)+Q_{M-1}(x,y,\dots,z)+\dots+Q_0,$$

где (по условию) $P_N\not\equiv 0$ и $Q_M\not\equiv 0$. Многочлен-произведение также представим в виде суммы однородных многочленов

$$P(x, y, \ldots, z)\,Q(x, y, \ldots, z) = P_N Q_M + (P_{N-1}Q_M + P_N Q_{M-1}) + \\ + (P_{N-2}Q_M + P_{N-1}Q_{M-1} + P_N Q_{M-2}) + \ \ldots \ + P_0 Q_0.$$

Однородный многочлен $P_N Q_M$ имеет степень $N+M$, а каждое из прочих слагаемых либо имеет более низкую степень, либо обращается в нуль. Следовательно, степень произведения PQ равна $N+M$ (пункт 3°).

Примечание. При доказательстве установлено следующее предложение, имеющее самостоятельное значение: *произведение однородных многочленов также является однородным многочленом.*

Пример

Нижеследующий пример показывает, что многочлен-произведение может содержать два члена (т. е. наименьшее возможное число членов, если хотя бы один из сомножителей не является одночленом)

$$(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3) = x^6 - y^6.$$

§ 19. Формулы сокращенного умножения

Наиболее часто встречающиеся произведения рекомендуется запомнить и пользоваться ими в качестве готовых формул при выполнении действий над многочленами. Эти формулы называются формулами сокращенного умножения. Ниже приводится перечень основных формул сокращенного умножения.

1. Умножением двучлена $x+y$ на себя получим формулу:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2. \tag{1}$$

2. Заменив y на $-y$, получим:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2. \tag{2}$$

Аналогично непосредственным умножением устанавливаются формулы:

3. $$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2. \tag{3}$$
4. $$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3. \tag{4}$$
5. $$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \tag{5}$$
6. $$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3. \tag{6}$$
7. $$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3. \tag{7}$$
8. $$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab. \tag{8}$$

Формулы (1)—(8) известны из школьного курса, ими широко пользуются в различных преобразованиях и вычислениях.

9. Для представления в каноническом виде квадрата суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ с любым числом слагаемых умножим эту сумму

самоё на себя. При умножении надо составить сумму $\Sigma x_i x_j$ всевозможных произведений каждого члена данной суммы $x_1+x_2+ +\ldots+x_n$ на каждый член той же суммы. В сумме $\Sigma x_i x_j$ содержатся квадраты каждого из слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$: при $i=j$ имеем $x_i x_j = x_i^2$. Если $i \neq j$, то произведению $x_i x_j$ i-го члена множимого на j-й член множителя соответствует равное (в силу закона коммутативности) произведение j-го члена множимого на i-й член множителя. Объединив равные слагаемые, получим тождество:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \\ + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ \ldots + 2x_{n-1}x_n. \qquad (9)$$

10. Выполним следующее умножение:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \ \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\
\hline
x & x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ \ldots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} \\
-y & \quad -x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ \ldots - x^2y^{n-2} - xy^{n-1} - y^n \\
\hline
 & x^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - y^n
\end{array}$$

Отсюда формула:

$$(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x - y^n \qquad (10)$$

или кратко

$$(x - y)\sum_{i=1}^{n} x^{n-i} y^{i-1} = x^n - y^n.$$

Формулы (3) и (6) являются частными случаями последней формулы (при $n=2$ и $n=3$).

Аналогично устанавливаются следующие формулы:

11.

$$(x+y)(x^{2k-1} - x^{2k-2}y + x^{2k-3}y^2 - \ \ldots - y^{2k-1}) = x^{2k} - y^{2k}; \qquad (11)$$

так, например, при $k=3$:

$$(x+y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5) = x^6 - y^6.$$

12.

$$(x+y)(x^{2k} - x^{2k-1}y + x^{2k-2}y^2 - \ldots + y^{2k}) = x^{2k+1} + y^{2k+1}. \qquad (12)$$

Так, например (при $k=2$):

$$(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5.$$

13. Формула бинома Ньютона дает каноническое представление натуральной **степени** двучлена $x+y$. Каноническое представление $(x+y)^n$ имеет вид:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \ldots + \\ + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^n y^n;$$

числа C_n^k (пока неизвестные) называются **биномиальными коэффициентами**. Чтобы получить удобное правило вычисления биномиальных коэффициентов, установим рекуррентное соотношение, характеризующее закон их образования. Умножив написанное тождество на $x+y$, получим:

$$(x+y)^{n+1} =$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k \qquad + \ldots + C_n^n y^n$$

$$\begin{array}{r|l}
x & C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n y + \ldots + C_n^k x^{n+1-k} y^k \quad + \ldots + C_n^n x y^n \\
y & \qquad\qquad + C_n^0 x^n y + \ldots + C_n^{k-1} x^{n+1-k} y^k + \ldots + C_n^{n-1} x y^n + C_n^n y^{n+1} \\
\hline
\end{array}$$

$$C_n^0 x^{n+1} + \quad . \ . \ . + (C_n^k + C_n^{k-1}) x^{n+1-k} y^k + \ldots + C_n^n y^{n+1}$$

Согласно принятому обозначению, коэффициент при $x^{n+1-k} y^k$ в каноническом представлении $(x+y)^{n+1}$ есть C_{n+1}^k, следовательно,

$$C_{n+1}^0 = C_n^0 \text{ и, так как, } C_1^1 = 1,$$

то $C_1^0 = C_2^0 = C_3^0 = \ldots = 1$;

и аналогично $C_1^1 = C_2^2 = C_2^3 = \ldots = 1$:

при $1 \leqslant k \leqslant n$ получим:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \tag{C}$$

Условимся считать $C_0^0 = 1$.

В силу формулы (C) последовательное вычисление биномиальных коэффициентов можно осуществить при помощи следующей таблицы, называемой **арифметическим треугольником**. В строках этой таблицы написаны биномиальные коэффициенты для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

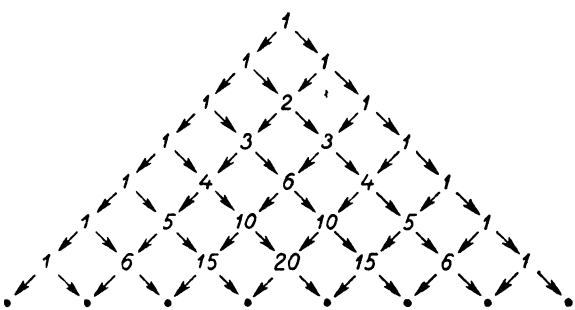


ТАБЛИЦА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
(Треугольник Паскаля)

Чтобы получить последующую строку таблицы, достаточно сложить рядом стоящие члены предыдущей строки, как показано на схеме при помощи стрелок. Так, например, воспользовавшись этой таблицей, получим:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Докажем, что при $0 < k \leqslant n$ имеет место следующая формула для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $n=1$ формула верна:

$$C_1^1 = \frac{1}{1} = 1.$$

Допустим, что формула верна для некоторого натурального n (при $k=1, 2, \dots, n$), докажем, что в этом предположении она верна и для $n+1$. В самом деле, при $1 < k \leqslant n$ имеем:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} = \qquad \text{[в силу (С)]}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1\cdot 2\dots(k-1)} =$$

(по предположению)

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\dots[(n+1)-k+1]}{1\cdot 2\dots k}.$$

При $k=1$ получим:

$$C_{n+1}^1 = C_n^1 + C_n^0 = \qquad \text{[в силу (С)]}$$

$$= \frac{n}{1} + 1 = \qquad \text{(по предположению)}$$

$$= n+1 = \frac{n+1}{1}.$$

При $k=n+1$ имеем:

$$C_{n+1}^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots[(n+1)-(n+1)+1]}{1\cdot 2\cdot 3\dots n(n+1)} = 1.$$

Итак, будучи верной для некоторого натурального n, формула верна и для $n+1$, но формула справедлива при $n=1$, следовательно, она справедлива при произвольном натуральном n. В окончательном виде формула бинома Ньютона записывается так:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}x^{n-k}y^k + \dots + y^n. \qquad (13)$$

Формулы (1), (2), (4) и (5) суть частные случаи формулы бинома Ньютона.

Тождества 1—13 установлены на основании законов арифметических действий, они носят общий характер, именно, под x и y можно подразумевать числа произвольного поля (числового); x и y могут быть не непосредственными аргументами, а некоторыми выражениями (не обязательно целыми), содержащими аргументы.

§ 20. Примеры тождественных преобразований многочленов

На нижеследующих примерах показано применение правил действий над многочленами и формул сокращенного умножения к тождественным преобразованиям целых, рациональных выражений.

Примеры

1. Тождество Лагранжа. Так называется следующее тождество:

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2=$$
$$=(x_1a_2-a_1x_2)^2+(x_1a_3-x_3a_1)^2+\ldots+(x_{n-1}a_n-x_na_{n-1})^2$$

или в сокращенном обозначении

$$\sum x_i^2\sum a_j^2-\left(\sum a_i\,x_i\right)^2=\sum_{k<l}\begin{vmatrix}x_k & x_l\\ a_k & a_l\end{vmatrix}^2.$$

Доказательство. Произведение $\sum x_i^2\sum a_j^2$ равно сумме всевозможных произведений $x_i^2\,a_j^2$, где $i=1,\ 2,\ldots,\ n$ и $j=1,\ 2,\ldots,\ n$; выражение $(\sum a_i\ x_i)^2$ равно сумме квадратов $a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+\ldots+a_n^2x_n^2$ плюс сумма удвоенных произведений:

$$\sum_{k<l}2x_k\,x_l\,a_k\,a_l=2(x_1x_2a_1a_2+x_1x_3a_1a_3+\ldots+x_{n-1}x_na_{n-1}a_n).$$

При выполнении вычитания в левой части сократятся все слагаемые вида $x_i^2\ a_i^2$; перегруппировав оставшиеся члены, представим левую часть в виде суммы слагаемых:

$$x_k^2\,a_l^2-2x_k\,x_l\,a_k\,a_l+\ x_l^2\ a_k^2,$$

откуда следует справедливость тождества.

В частности, при $n=3$ тождество Лагранжа примет вид:

$$a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\equiv$$
$$\equiv(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2.$$

Примечание. Из тождества Лагранжа следует, что равенство

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)=(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2$$

при действительных x_i и a_j возможно лишь, если каждое из неотрицательных слагаемых в правой части тождества обращается в нуль, т. е.

если

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

2. Тождество Эйлера. Так называется следующее тождество:

$$(ax + by + cz + dt)^2 + (bx - ay + dz - ct)^2 + \\ + (cx - dy - az + bt)^2 + (dx + cy - bz - at)^2 \equiv \\ \equiv (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Доказательство. По возведении в квадрат многочленов в левой части сократятся все удвоенные произведения. Выпишем, например, члены, содержащие произведение xy:

$$2abxy - 2abxy - 2cdxy + 2cdxy.$$

Аналогично сократятся члены, содержащие прочие произведения аргументов. Таким образом, в правой части останутся всевозможные произведения a^2x^2, $b^2x^2, \ldots, d^2t^2$ (всего 16 членов); сумма этих произведений равна произведению, написанному в правой части.

3. Представить в каноническом виде многочлен:

$$(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a).$$

Решение. Сгруппируем сомножители так, чтобы можно было применить формулу (3) умножения суммы на разность (см. предыдущий параграф)

$$\{[(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]\}\ \{[c+(a-b)]\cdot[c-(a-b)]\} =$$
$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = \qquad \text{(формула 3)}$$
$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = \qquad \text{(формулы 1 и 2)}$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \qquad \text{(формула 3)}$$
$$= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) = \qquad \text{(формула 9)}$$
$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

4. Воспользовавшись тождествами:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) \quad \text{и} \quad (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

(следующими из формул 1 и 2), представить в каноническом виде многочлены:

1°. $S_1 = (a + b + c - d)^2 + (a + b - c + d)^2 + \\ + (a - b + c + d)^2 + (-a + b + c + d)^2.$

2°. $S_2 = [a(x + y) + b(x - y)]^2 - [a(x - y) + b(x + y)]^2.$

Решение.

1°. $S_1 = [(a+b) + (c-d)]^2 + [(a+b) - (c-d)]^2 + \\ + [(c+d) + (a-b)]^2 + [(c+d) - (a-b)]^2 = \\ = 2(a+b)^2 + 2(c-d)^2 + 2(c+d)^2 + 2(a-b)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2.$

2°. $S_2 = [x(a+b) + y(a-b)]^2 - [x(a+b) - y(a-b)]^2 = \\ = 4xy(a+b)(a-b) = 4a^2xy - 4b^2xy.$

Примечание. Преобразование многочлена S_1 можно выполнить другим способом, показав непосредственно, что все удвоенные произведения сокращаются (см. пример 2).

5. Доказать, что многочлен

$$P = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$$

можно представить в виде квадрата трехчлена второй степени.

Решение.

$$P = [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 = \quad \text{(формула 8)}$$
$$= [(x^2+5x)+4][(x^2+5x)+6]+1 = (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25 = \quad \text{(формула 8)}$$
$$= (x^2+5x+5)^2.$$

6. Представить в каноническом виде многочлен:

$$Q = (x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(-x+y+z)^3.$$

Решение.

$$Q = [(x+y)+z]^3-[(x+y)-z]^3-\{[z+(x-y)]^3+[z-(x-y)]^3\} =$$
$$= 2z\{[(x+y)+z]^2+[(x+y)+z][(x+y)-z]+[(x+y)-z]^2\} -$$
$$-2z\{[z+(x-y)]^2-[z+(x-y)][z-(x-y)]+[z-(x-y)]^2\}$$

(формулы 6 и 7).

Сгруппировав в каждой фигурной скобке первое и третье слагаемые и применив ко второму формулу 3, получим:

$$Q = 2z[2(x+y)^2+2z^2+(x+y)^2-z^2]-2z[2z^2+2(x-y)^2-z^2+(x-y)^2] =$$
$$= 2z[3(x+y)^2-3(x-y)^2] = 24xyz.$$

7. Представить в каноническом виде многочлены:

$$P_1(x,\ y) = (x+y)^n+(x-y)^n \quad \text{и} \quad P_2(x,\ y) = (x+y)^n-(x-y)^n.$$

Решение.

$$(x+y)^n = x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\ldots+y^n,$$

$$(x-y)^n = x^n-nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2-\ldots+(-1)^n y^n.$$

Следовательно,

$$P_1(x,\ y) = 2x^n+2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4+\ldots$$

Последний член равен $2y^n$ при n четном и $2nxy^{n-1}$ при n нечетном.

$$P_2(x,\ y) = 2nx^{n-1}y+2\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3+\ldots$$

Последний член равен $2y^n$ при n нечетном и $2nxy^{n-1}$ при n четном. Из последних выражений для P_1 и P_2 следует, что

1°. $$(1+i)^n+(1-i)^n$$

есть действительное число, равное

$$P_1(1,\ i) = 2-2\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$

2°.

$$\frac{1}{\sqrt{k}}[(a+b\sqrt{k})^n-(a-b\sqrt{k})^n] \quad \text{(где } a,\ b \text{ и } k \text{—рациональные числа)}$$

есть рациональное число, равное

$$\frac{1}{\sqrt{k}}P_2(a, b\sqrt{k}) = 2na^{n-1}b + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}kb^3 + \ldots$$

К р у г о в а я п е р е с т а н о в к а а р г у м е н т о в. *Пусть*

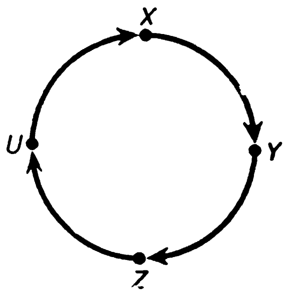
$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ u \qquad (1)$$

— система букв, заданных в определенном порядке. Замена первой буквы второй, второй буквы третьей и т. д. и, наконец, последней буквы первой называется круговой перестановкой данных букв. На чертеже 8 изображена схема круговой перестановки четырех букв. Круговая перестановка переводит расположение букв (1) в следующее расположение

$$y,\ z,\ \ldots,\ u,\ x.$$

Применив повторно круговую перестановку, получим

$$z,\ \ldots,\ u,\ x,\ y \quad \text{и т. д.}$$



Черт. 8

Применение круговой перестановки облегчает преобразование сумм (или произведений), в которых всякое последующее слагаемое получается из предыдущего круговой перестановкой аргументов. Для таких сумм достаточно преобразовать лишь первое слагаемое, а результаты преобразования прочих слагаемых получаются путем последовательного применения круговой перестановки аргументов.

Пример

Доказать тождество

$$s(s-2b)(s-2c) + s(s-2c)(s-2a) + s(s-2a)(s-2b) - 8abc =$$
$$= (s-2a)(s-2b)(s-2c), \qquad \text{где} \quad s = a + b + c.$$

Р е ш е н и е. Второе и третье слагаемые в левой части получаются из первого круговой перестановкой букв. Преобразуем первое слагаемое:

$$(s-2b)(s-2c) = (a-b+c)(a+b-c) =$$
$$= a^2 - (b-c)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

Выполнив последовательно круговую перестановку букв, получим:

$$(s-2c)(s-2a) = b^2 - c^2 - a^2 + 2ca,$$
$$(s-2a)(s-2b) = c^2 - a^2 - b^2 + 2ab,$$

откуда

$$(s-2b)(s-2c) + (s-2c)(s-2a) + (s-2a)(s-2b) =$$
$$= -a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Левая часть доказываемого тождества примет вид:

$$(a+b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)-8abc=$$
$$=[a+(b+c)][-(b-c)^2+2a(b+c)-a^2]-8abc=$$
$$=-a^3+a^2(b+c)+a(b-c)^2-(b+c)(b-c)=$$

(располагаем по ст епеням a)

$$=a^2(b+c-a)+(b-c)^2(a-b-c)=(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]=$$
$$=(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)=(s-2a)(s-2b)(s-2c).$$

§ 21. Симметрические многочлены

Определение. *Многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ от данных аргументов $x, y, \ldots, z$ называется симметрическим, если он не изменяется при любой перестановке его аргументов*

$$P(x, y, \ldots, z)\equiv P(y, x, \ldots z)\equiv P(y, z, \ldots, x)\equiv \ldots$$

Если в каноническом представлении симметрического многочлена содержится одночлен $Ax^ky^l \ldots z^q$, то в нем содержатся все одночлены, получающиеся из данного при произвольной перестановке аргументов. Докажем, например, что многочлен P содержит член $Ay^kx^l \ldots z^q$, получающийся перестановкой аргументов x и y. В самом деле, пусть

$$P(x, y, \ldots, z = Ax^ky^l \ldots z^q + \ldots$$

Переставив аргументы x и y, получим:

$$P(x, y, \ldots, z) = P(y, x, \ldots, z) = Ay^kx^l \ldots z^q + \ldots$$

Следовательно, всякий симметрический многочлен можно представить в виде суммы таких многочленов (симметрических), каждый из которых может быть получен из любого содержащегося в нем члена путем всевозможных перестановок аргументов.

Примеры

1. Найти общий вид симметрических многочленов 2-й степени с тремя аргументами.

Решение. Искомый многочлен может содержать член Ax^2, тогда он и содержит члены Ay^2 и Az^2, получающиеся из первого заменой агрументов. По той же причине многочлен вместе с членом Bxy должен содержать члены Byz и Bzx. В общем случае искомый многочлен содержит члены первой степени Cx, Cy, Cz и свободный член D. Общий вид искомого многочлена таков:

$$P(x, y, z) = A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+xz)+C(x+y+z)+D,$$

никаких других членов симметрический многочлен второй степени в каноническом виде содержать не может.

2. Аналогично докажем, что симметрический многочлен третьей степени с тремя аргументами имеет вид:

$$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$$
$$+Cxyz+D(x^2+y^2+z^2)+E(xy+yz+xz)+F(x+y+z)+G.$$

Нижеследующие многочлены от n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **основными симметрическими функциями.**

Сумма аргументов:

$$p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Сумма всевозможных произведений аргументов, взятых по два:

$$p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сумма всевозможных произведений аргументов, взятых по k:

$$p_k = x_1x_2\ldots x_k + x_2x_3\ldots x_{k+1} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Произведение аргументов:

$$p_n = x_1x_2\ldots x_n.$$

В высшей алгебре доказывается, что *всякий симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от основных симметрических функций.*

Примеры

1. Выразить сумму квадратов аргументов через основные симметрические функции.

Решение.

$$x^2 + y^2 + \ldots + u^2 + v^2 =$$
$$= (x + y + \ldots + u + v)^2 - 2(xy + xz + \ldots + uv) = p_1^2 - 2p_2.$$

2. Выразить через основные симметрические функции следующий симметрический многочлен:

$$S = xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2.$$

Решение.

Произведение

$$p_1p_2 = (x + y + z)(xy + xz + yz)$$

состоит из 9 членов, среди которых содержатся все 6 членов многочлена S. Остальные три члена одинаковы и каждый из них равен $p_3 = xyz$. Следовательно,

$$S = p_1p_2 - 3p_3.$$

§ 22. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов обычно применяется в тех случаях, когда известно, что в результате преобразования данного выражения должно получиться некоторое выражение определенного вида с коэффициентами, подлежащими вычислению. Искомые числовые коэффициенты обозначаются буквами, их рассматривают как неизвестные. В случае многочленов соответственные коэффициенты в каноническом представлении данного и преобразованного выражений должны быть одинаковы. Приравняв эти коэффициенты, получим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Уравнения для нахождения искомых коэффициентов можно получить другим способом, приравняв значения данного и преобразованного выражений при частных значениях аргументов.

Для примера выведем формулу куба трехчлена. Многочлен $(x+y+z)^3$ есть однородный симметрический многочлен третьей степени с тремя аргументами, поэтому его каноническое представление имеет вид (см. пример 2, стр. 60):

$$(x+y+z)^3 = A(x^3+y^3+z^3) + \\ + B(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+Cxyz,$$

где A, B и C искомые числовые коэффициенты. Коэффициенты при x^3 в каноническом представлении левой части равен 1*, поэтому $A=1$. К тому же результату придем, положив $x=1$, $y=z=$ $=0$.

Положив $x=y=1$, $z=0$, получим: $8=2A+2B$, откуда $B=3$.

Положив $x=y=z=1$, получим: $27=3A+6B+C$, откуда $C=6$.

Следовательно,

$$(x+y+z)^3 = \\ = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+6xyz.$$

Примечание. Воспользовавшись формулой (1) (см. пример 2, стр. 61), последнее тождество можно представить в следующем виде:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+ \\ yz+zx)-3xyz.$$

Примеры

1. Представить в каноническом виде произведение

$$(x+2)(x+3)(x-5).$$

Решение. Произведение есть многочлен 3-й степени, коэффициент при старшем члене равен 1, а свободный член равен —30. Положим:

$$(x+2)(x+3)(x-5) = x^3+Ax^2+Bx-30.$$

Для вычисления A и B положим

$$x=-2 \quad \text{и} \quad x=-3,$$

получим:

$$4A-2B-38=0,$$

$$9A-3B-57=0.$$

Откуда

$$A=0, \quad B=-19.$$

Следовательно,

$$(x+2)(x+3)(x-5) = x^3-19x-30.$$

2. Расположить многочлен

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \qquad (1)$$

по убывающим степеням разности $x-a$.

---

* Так как коэффициент при старшем члене (относительно x) произведения равен произведению коэффициентов старших членов сомножителей.

Решение. Положим

$$P(x) = A_n (x-a)^n + A_{n-1} (x-a)^{n-1} + \ldots + A_1 (x-a) + A_0, \qquad (2)$$

где A_i искомые коэффициенты. Подсчитав (по формуле бинома Ньютона) коэффициенты при степенях x в правой части (2) и приравняв их соответственным коэффициентом в выражении (1), получим:

$$A_n = c_n, \quad -naA_n + A_{n-1} = c_{n-1},$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 A_n - (n-1) a A_{n-1} + A_{n-2} = c_{n-2} \text{ и т. д.}$$

Откуда последовательно находим:

$$A_n = c_n, \; A_{n-1} = c_{n-1} + nac_n \text{ и т. д.}$$

3. Найти условия, при которых многочлен

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

является кубом двучлена первой степени.

Решение. По условию

$$(Ax + B)^3 \equiv A^3x^3 + 3A^2Bx^2 + 3AB^2x + B^3 \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Откуда (необходимые и достаточные условия)

$$A^3 = a, \; 3A^2B = b, \; 3AB^2 = c, \; B^3 = d. \qquad (1)$$

Из первого и четвертого равенств имеем: $A = \sqrt[3]{a}$ $B = \sqrt[3]{d}$; подставив во второе и третье, получим:

$$3(\sqrt[3]{a})^2 \sqrt[3]{d} = b, \quad 3\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{d})^2 = c;$$

возведя в куб, получим следующие необходимые условия:

$$27a^2d = b^3 \quad \text{и} \quad 27ad^2 = c^3. \qquad (2)$$

Для многочленов над полем действительных чисел условия (2) достаточны. В самом деле, положив $A = \sqrt[3]{a}$ (где $a \neq 0$) и $B = \dfrac{b}{3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}$, согласно (2), получим:

$$B^3 = \frac{b^3}{27a^2} = d \quad \text{и} \quad 27ad^2 = 27A^3B^6 = c^3, \text{ откуда } c = 3AB^2.$$

Для многочленов над полем комплексных чисел эти условия недостаточны. Примером может служить многочлен, не являющийся точным кубом

$$x^3 + 3x^2 + 3\varepsilon x + 1,$$

где ε мнимый кубический корень из 1, но для которого выполнены условия (2).

§ 23. Условные тождества

Условным тождеством будем называть *равенство, справедливое при всех значениях аргументов, удовлетворяющих одному или нескольким уравнениям (условиям).*

Примеры

1. Доказать, что

$$(5x - 3y + 4z)(5x - 3y - 4z) = (3x - 5y)^2 \tag{1}$$

при условии

$$x^2 = y^2 + z^2.$$

Решение. Преобразуем левую часть (1):

$$(5x - 3y)^2 - 16z^2 = (5x - 3y)^2 - 16(x^2 - y^2) = (3x - 5y)^2.$$

2. Доказать, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

при условии

$$x + y + z = 0.$$

Решение. Для доказательства достаточно принять во внимание формулу куба трехчлена (стр. 62).

3. Доказать, что

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

при условии

$$x + y + z = 0.$$

Решение. Вычислим произведение

$$\begin{aligned}
&(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = \\
&\quad = x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x + y) + x^2z^3(x + z) + y^2z^2(y + z) = \\
&= x^5 + y^5 + z^5 - x^2y^2z - x^2z^2y - y^2z^2x = \qquad \text{(в силу заданного условия)} \\
&\quad = x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx).
\end{aligned}$$

Так как при условии $x + y + z = 0$ имеем $(x + y + z)^2 = 0$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$$

и

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \text{(см. предыдущий пример)},$$

то

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2},$$

откуда и вытекает доказываемое условное тождество.

§ 24. Делимость многочленов

Определение. *Многочлен $F(x, y, ..., z)$ делится на многочлен $\Phi(x, y, ..., z)$, если существует такой многочлен $Q(x, y, ..., z)$, что имеет место тождество:*

$$F(x, y, \ldots, z) \equiv Q(x, y, \ldots, z)\,\Phi(x, y, \ldots, z). \tag{1}$$

Многочлены $\Phi(x, y, ..., z)$ и $Q(x, y, ..., z)$ называются делителями многочлена $F(x, y, ..., z)$.

Пусть $c \neq 0$ — произвольное число из числового поля, над которым рассматривается многочлен; имеем:

$$F(x, y, \ldots, z) = c\left[\frac{1}{c}F(x, y, \ldots, z)\right].$$

Следовательно, всякое отличное от нуля число (из данного поля), а также всякий многочлен, отличающийся от данного числовым множителем, неравным нулю, суть делители данного многочлена. Эти делители называются тривиальными делителями. Все прочие делители данного многочлена называются его нетривиальными делителями. В дальнейшем под делителями многочлена будем подразумевать его нетривиальные делители.

Примеры

1. Многочлены:

$$x+y,\quad x-y,\quad x^3+x^2y+xy^2+y^3,\quad x^3-x^2y+xy^2-y^3,$$
$$x^2-y^2,\quad x^2+y^2$$

являются нетривиальными делителями многочлена x^4-y^4:

$$x^4-y^4=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3),$$
$$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3),$$
$$x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2).$$

Примерами тривиальных делителей данного многочлена могут служить:

$$2,\quad \frac{x^4}{2}-\frac{y^4}{2},\quad y^4-x^4,\quad 3x^4-3y^4,\quad \frac{1}{3}\ \text{и т п}$$

2. Доказать, что многочлен $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ делится на $(x-1)^2$ и найти частное.

Решение. Представим $P(x)$ в виде:

$$P(x)=nx^n(x-1)-(x^n-1).$$

Двучлен x^n-1 делится на $x-1$ в силу тождества (10) (§ 19). Имеем

$$P(x)\equiv(x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1)\equiv$$
$$\equiv(x-1)[n(x^n-x^{n-1})+(n-1)(x^{n-1}-x^{n-2})+\ldots+(x-1)]\equiv$$
$$\equiv(x-1)^2[(nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+1].$$

Частным является многочлен, заключенный в квадратные скобки.

Теорема. *Если многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ делится на многочлен $\Phi(x, y, \ldots, z)$, то существует лишь один единственный многочлен-частное.*

Доказательство. Допустим противное, что при делении многочлена P на Φ можно получить два различных частных Q_1 и Q_2, тогда имеем: $P\equiv\Phi Q_1$ и $P\equiv\Phi Q_2$, откуда $\Phi Q_1\equiv\equiv\Phi Q_2$ или $\Phi(Q_1-Q_2)\equiv0$. По условию $\Phi\not\equiv0$, а потому $Q_1\equiv Q_2$, так как в противном случае произведение $\Phi(Q_1-Q_2)\not\equiv0$, ч. т. д.

В кольце многочленов действие деления выполнимо не всегда. Ниже указывается ряд признаков невыполнимости деления. *Деление, наверное, невыполнимо в следующих случаях.*

1°. *Если многочлен-делимое $F(x, y, \ldots, z)$ есть одночлен, а делитель $\Phi(x, y, \ldots, z)$ не является одночленом.*

В самом деле, каким бы ни был многочлен Q, произведение $Q\Phi$ (в каноническом представлении) содержит по крайней мере два члена и не может быть тождественно одночлену.

2°. *Если степень делимого F относительно совокупности аргументов ниже степени делителя Φ.*

В самом деле, каков бы ни был многочлен Q, тождество (1) не может выполняться, так как степень произведения $Q\Phi$ больше степени делителя Φ, а, следовательно, и подавно больше степени F.

3°. *Если группа старших (или младших) членов делимого F не делится на группу старших (соответственно младших) членов делителя Φ.*

В самом деле, каким бы ни был многочлен Q, тождество (1) не может иметь места, так как в противном случае группа старших (младших) членов F, будучи равной произведению групп старших (младших) членов многочленов Q и Φ, должна делиться на группу старших (младших) членов делителя Φ. В частности, деление невыполнимо, если степень группы младших членов делимого ниже степени группы младших членов делителя.

Предположим, что многочлены F и Φ расположены по убывающим степеням некоторого аргумента, например x:

$$F(x, y, \ldots, z) = F_n(y, \ldots, z)\,x^n + F_{n-1}(y, \ldots, z)\,x^{n-1} + \ldots + F_k(y, \ldots, z)\,x^k;$$

$$\Phi(x, y, \ldots, z) = \Phi_m(y, \ldots, z)\,x^m + \Phi_{m-1}(y, \ldots, z)\,x^{m-1} + \ldots + \Phi_l(y, \ldots, z)\,x^l.$$

В частности, для многочлена с одним аргументом коэффициенты с у т ь ч и с л а данного поля.

Известно, что (стр. 48) старший (младший) относительно данного аргумента член произведения равен произведению старших (младших) членов сомножителей, поэтому деление невыполнимо в следующем случае.

4°. *Если старший (младший) относительно данного аргумента член $F_n(y, \ldots, z)x^n$ (или $(F_k(y, \ldots, z)x^k)$ делимого не делится на старший (младший) член $\Phi_m(y, \ldots, z)x^m$ (соответственно $\Phi_l(y, \ldots, z)x^l$) делителя.*

В частности, деление невыполнимо, если

a) *степень делимого относительно данного аргумента меньше степени делителя относительно того же аргумента, т. е. $n<m$ и, в частности, если делимое не содержит аргумент, содержащийся в делителе* (т. е. $n=0$, $m>0$);

b) если $k<l$;

c) $F_n(y, \ldots, z)$ *не делится на* $\Phi_m(y, \ldots, z)$;

d) $F_k(y, \ldots, z)$ *не делится на* $\Phi_l(y, \ldots, z)$

Для многочленов с одним аргументом над числовым полем последние два признака 4° c) и 4° d) применения не имеют, так как в этом случае коэффициенты суть числа поля, а в поле понятие «не делится» теряет смысл.

Перечисленными простейшими признаками **не исчерпываются** всевозможные случаи невыполнимости деления многочленов.

Примеры

1. Одночлен xyz не делится на $x - y + z$ (признак 1°).

2. Многочлен $x+y+z$ не делится на $xy+yz+zx$, так как степень первого многочлена равна 1, а второго равна 2 (признак 2°).

3. Многочлен $x^4y^2z^2 + 2x^3 - 3y^3 + 1$ не делится на многочлен $x^2 - y^2 + 2x - y + 3$, так как группа старших членов первого многочлена $x^4y^2z^2$ не делится на $x^2 - y^2$ (признак 3°).

4. Многочлен

$$a^4 - b^4 + 2a^3 + b^2$$

не делится на многочлен $a^2 + b^2 + a + b$, так как группа младших членов первого многочлена b^2 не делится на $a + b$ (признак 3°).

5. Многочлен $x^4y^4 + x^6 - y^3 + 4$ не делится на $x^2y^3 + x^3y + 2$, так как старший относительно x член 1-го многочлена x^6 не делится на старший член относительно x 2-го многочлена x^3y.

6. Многочлен $a^5 - b^5 + 4(a^3 + b^3)$ не делится на $a - b + c$, так как второй многочлен содержит аргумент, не содержащийся в первом.

7. Если многочлен $F(x, y, \ldots, z)$ делится на многочлен $\Phi(x, y, \ldots, z)$ **той же** степени, то частное есть многочлен нулевой степени, т. е. число. Следовательно, в этом случае коэффициенты многочленов F и Φ пропорциональны, т. е. Φ есть тривиальный делитель.

Многочлен $x^6 - y^6 + 3x^2y^2 + 6x^2 - 2y^2$ не делится на $x^6 + y^6 + x^2 + y^2$, так как коэффициенты данных многочленов не пропорциональны.

Многочлен $x^6 - y^6 + 3x^2y^2 + x^2 - y^2$ не делится на $x^3 - y^3 + x^2 + y^2$, так как группа младших членов $x^2 - y^2$ не делится на $x^2 + y^2$.

§ 25. Деление с остатком

Ограничимся рассмотрением многочленов **с одним аргументом** над данным числовым полем.

Теорема. *Каковы бы ни были два многочлена (над данным полем)*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

причем $\varphi(x) \neq 0$, существует (над тем же полем) единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. степень $r(x)$ меньше m или $r(x) \equiv 0$,

2°. имеет место тождество:

$$f(x) \equiv q(x)\varphi(x) + r(x). \tag{1}$$

Многочлены $q(x)$ и $r(x)$ называются соответственно **неполным частным** и **остатком**.

5*

Нахождение многочленов $q(x)$ и $r(x)$ называется **делением с остатком** многочлена $f(x)$ на многочлен $\varphi(x)$.

Доказательство. Если $m>n$, то тождество (1) удовлетворяется при $q(x)\equiv 0$ и $r(x)\equiv f(x)$. Пусть $n\geqslant m$; разделим старший член $a_n x^n$ многочлена $f(x)$ на старший член $b_m x^m$ многочлена $\varphi(x)$, умножим полученное частное на $\varphi(x)$ и вычтем произведение из $f(x)$:

$$[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0] - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}[b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \\ + \ldots + b_0] = a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_0, \qquad (2)$$

где $a'_{n-1} = a_{n-1} - b_{m-1}\frac{a_n}{b_m}$, и т. д., откуда:

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\varphi(x) + R_1(x),$$

где $R_1(x)$ многочлен, находящийся в правой части тождества (2). Этот многочлен называется **первым остатком** от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$. Пусть n_1 степень первого остатка и a'_{n_1} его старший коэффициент (если $a'_{n-1}\neq 0$, то $n_1=n-1$).

Если $n_1\geqslant m$, то, поступив с $R_1(x)$ так же, как с $f(x)$, получим:

$$R_1(x) = \frac{a'_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}\varphi(x) + R_2(x)$$

и

$$f(x) \equiv \left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}\right)\varphi(x) + R_2(x).$$

Многочлен $R_2(x)$ называется **вторым остатком** от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ и т. д. Для получения последующего остатка надо старший член предыдущего остатка разделить на старший член многочлена $\varphi(x)$, умножить на полученное частное многочлен $\varphi(x)$ и вычесть произведение из предыдущего остатка. Описанный процесс можно продолжать, пока не получится в остатке многочлен $R_k(x)$ степени более низкой, чем m, либо $R_k\equiv 0$. В результате этого процесса получится тождество (1), где

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \ldots \text{ и } r(x) = R_k(x).$$

Докажем, что $q(x)$ и $r(x)$ есть **единственная** пара многочленов, удовлетворяющих тождеству (1). Допустим (противное), что существует другая пара многочленов $q_1(x)$ и $r_1(x)$, где степень r_1 меньше m (либо $r_1\equiv 0$) и

$$f(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x). \qquad (3)$$

Из тождеств (1) и (3) получим:

$$q(x)\varphi(x) + r(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x)$$

и, следовательно,

$$[q(x) - q_1(x)]\varphi(x) \equiv r_1(x) - r(x). \qquad (4)$$

Последнее тождество возможно лишь при $q(x) \equiv q_1(x)$ В самом деле, если многочлены $q(x)$ и $q_1(x)$ различны, то левая часть тождества (4) содержит аргумент x в степени не меньшей m, тогда как правая часть есть многочлен степени низшей, чем m (либо нуль-многочлен), что невозможно. Следовательно, $q(x) \equiv q_1(x)$, но тогда и $r(x) \equiv r_1(x)$, ч. т. д.

Согласно изложенному, деление с остатком заключается в переходе от делимого к первому остатку, от первого остатка ко второму и т. д. при помощи *единообразного выполнения одних и тех же операций*. Обычно эти операции выполняются при помощи известной схемы (деление «углом»), в которой вычисления располагаются в порядке, показанном на следующем примере.

Пример

$$\begin{array}{r|l}
-\;8x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 40x^3 - 50x^2 + 30x - 10 & 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8 \\
8x^6 + 12x^5 - 16x^4 + 24x^3 - 32x^2 \phantom{{}+30x-10} & \overline{4x^2 - 2x + 1} \\ \hline
-\;-4x^5 - 4x^4 + 16x^3 - 18x^2 + 30x \phantom{{}-10} & \\
-4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 16x \phantom{{}-10} & \\ \hline
-\;2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 14x - 10 & \\
2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8 & \\ \hline
5x^3 - 2x^2 + 8x - 2 &
\end{array}$$

В этом примере:

делимое:	$8x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 40x^3 - 50x^2 + 30x - 10$,
делитель:	$2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8$,
первый остаток:	$-4x^5 - 4x^4 + 16x^3 - 18x^2 + 30x - 10$,
второй остаток:	$2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 14x - 10$,
неполное частное:	$4x^2 - 2x + 1$,
остаток:	$5x^3 - 2x^2 + 8x - 2$.

При делении многочленов с остатком можно применять предложенную М. В. Яковкиным более экономную схему записи*.

Так как для нахождения членов неполного частного надо делить старшие члены промежуточных остатков на старший член делителя, то нет надобности находить сами эти остатки, а достаточно знать лишь их старшие члены. Деление по схеме М. В. Яковкина (с незначительным видоизменением) для рассмотренного выше примера расположится так:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 & 8x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 40x^3 - 50x^2 + 30x - 10 \\ \hline
-3x^3 & -12x^5 + 16x^4 - 24x^3 + 32x^2 \\
4x^2 & \qquad\quad + 6x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x \\
-6x & \qquad\qquad\qquad - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \\
8 & \\ \hline
 & 4x^2 - 2x + 1 \;\|\; 5x^3 - 2x^2 + 8x - 2
\end{array}$$

* М. В. Яковкин. О схеме деления многочлена, журнал «Математика в школе», № 5, 1954.

Здесь в верхней левой клетке записан старший член делителя, а затем в столбец записаны прочие члены делителя с обратными знаками. Делимое выписано в верхней строке. В нижней строке $4x^2$ есть старший член частного. Произведение старшего члена делителя на старший член частного не пишем, так как при вычитании из делимого это произведение сократится, произведение же старшего члена частного на прочие члены делителя, взятое с обратным знаком, записано во второй строке. Далее делим старший член первого остатка: $8x^5 - 12x^5 = -4x^5$ на старший член делителя, получаем второй член частного $-2x$ и продолжаем далее описанный процесс. Остаток $5x^3 - 2x^2 + 8x - 2$ получается сложением записанных «в столбец» подобных между собой членов.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием делимости многочлена $f(x)$ на $\varphi(x)$ является тождественное равенство нулю остатка.*

Это предложение устанавливает связь между операциями деления и деления с остатком в кольце многочленов.

Условие необходимо. Если многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то имеет место тождество:

$$f(x) = Q(x)\varphi(x).$$

Сопоставив с (1), получим $q(x) = Q(x)$ и $r(x) \equiv 0$.

Условие достаточно. Если в тождестве (1) $r(x) \equiv 0$, то $f(x) = q(x)\varphi(x)$ и, следовательно, $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, ч. т. д.

Примечание. Не следует смешивать понятия делимости многочленов с делимостью их значений.

Поясним это примерами.

1°. Многочлен $f(x) = x^2 - 1$ делится на $\varphi(x) = x + 1$, так как

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

но не имеет смысла говорить о делимости их значений при $x = -1$, так как $\varphi(-1) = 0$.

2°. Многочлен $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$ не делится на

$$\varphi(x) = x^2 + 1;$$

имеем:

$$x^3 - x^2 + 2x = (x - 1)(x^2 + 1) + (x + 1).$$

Рассмотрим эти многочлены над полем рациональных чисел. Так как при всех значениях аргумента $\varphi(x) \neq 0$, то деление на значение $\varphi(x)$ (в числовом поле) всегда выполнимо, например:

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{10}.$$

Рассмотрим ту же пару многочленов над кольцом целых чисел. Положив $x = 1$, получим $f(1) = 2$ и $\varphi(1) = 2$. В кольце целых чисел значение $f(1)$ делится на $\varphi(1)$, неполное частное есть 1, остаток равен 0. Неполное частное $x-1$ и остаток $x+1$ от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ в кольце многочленов имеют при $x=1$ соответственно значения 0 и 2.

Примеры

1. Найти неполное частное и остаток от деления двучлена x^n-a^n на x^p-a^p (n и p — натуральные числа и $a \neq 0$). При каком условии первый двучлен делится на второй?

Решение. Разделим с остатком число n на p:

$$n = kp + r, \text{ где } 0 \leqslant r < p,$$

откуда

$$x^n - a^n = x^{kp}x^r - a^{kp}a^r = x^r(x^{kp} - a^{kp}) + a^{kp}(x^r - a^r).$$

Двучлен $x^{kp}-a^{kp}$ делится на x^p-a^p, так как (формула 10, § 19)

$$x^{kp} - a^{kp} = (x^p)^k - (a^p)^k = (x^p - a^p)(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)}a^p + \ldots + a^{p(k-1)}).$$

Следовательно, неполное частное равно:

$$x^r(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)}a^p + \ldots + a^{p(k-1)}) = x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + \ldots + a^{p(n-1)}x^r,$$

остаток равен $a^{kp}(x^r-a^r)$.

Деление выполняется нацело, если $x^r-a^r \equiv 0$; последнее возможно лишь при условии $r=0$. Значит, число n должно быть кратным p.

2. При каких значениях a и b многочлен x^3+8x^2+5x+a делится на трехчлен x^2+3x+b.

Решение. Применим метод неопределенных коэффициентов. Пусть $Ax+B$ частное от деления первого многочлена на второй:

$$x^3 + 8x^2 + 5x + a \equiv (Ax + B)(x^2 + 3x + b).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях аргумента, получим

$$1 = A, \quad 8 = 3A + B, \quad 5 = Ab + 3B, \quad a = Bb,$$

откуда

$$A = 1, \quad B = 5, \quad b = -10, \quad a = -50.$$

При делении с остатком многочлена $f(x)$ на $\varphi(x)$ над коэффициентами $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняются в определенной последовательности четыре арифметические действия, поэтому *коэффициенты неполного частного и остатка принадлежат тому же числовому полю, над которым рассматриваются данные многочлены.* При этом действие деления производится лишь при делении старших коэффициентов $f(x)$ и промежуточных остатков на старший коэффициент b_m многочлена $\varphi(x)$

Если $b_m = \pm 1$, то коэффициенты неполного частного и остатка (и всех промежуточных остатков) выражаются через коэффициенты $f(x)$ и $\varphi(x)$ посредством сложения, вычитания и умножения. В этом частном случае, *если коэффициенты многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат некоторому кольцу, то и коэффициенты частного, промежуточных остатков и остатка принадлежат тому же кольцу.* Так, например, при делении с остатком многочлена с целыми коэффициентами в общем случае получаются многочлены (неполное частное и остаток) с дробными коэффициентами. Однако, если $b_m = \pm 1$, то в этом случае получаются многочлены с целыми коэффициентами.

Будем под $f(x)$ и $\varphi(x)$ подразумевать многочлены от нескольких аргументов $x, y, \ldots, z$, расположенные по степеням аргумента x, тогда коэффициенты $a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$ суть многочлены от прочих аргументов. В этом случае деление с остатком приводит к выражениям, не являющимся многочленами (относительно совокупности аргументов), так как коэффициенты получаются в виде дробных выражений относительно аргументов $y, \ldots, z$. Если коэффициент b_m является числом, то коэффициент частного и остатков не содержит аргументов в знаменателях, поэтому в данном частном случае *в результате деления с остатком получатся многочлены, расположенные по степеням x.*

Пример

$$
\begin{array}{l|l}
x^3y + 3x^2(y-1) + xy^2 - 1 & x^2 + 2xy - y \\
\underline{x^3y + 2x^2y^2 \qquad - xy^2} & \overline{xy + (-2y^2 + 3y - 3)} \\
x^2(-2y^2 + 3y - 3) + 2xy^2 - 1 & \\
\underline{x^2(-2y^2 + 3y - 3) + 2x(-2y^3 + 3y^2 - 3y) + (2y^3 - 3y^2 + 3y)} & \\
2x(2y^3 - 2y^2 + 3y) + (-2y^3 + 3y^2 - 3y - 1) &
\end{array}
$$

Этот пример показывает, что коэффициентами «неполного частного» и «остатка» при делении с остатком данных многочленов, расположенных по степеням x, служат многочлены от y.

§ 26. Теорема Безу

Теорема. *Остаток от деления многочлена*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

на двучлен $x - a$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x = a$.

Доказательство. Неполное частное есть многочлен $n-1$ степени, а остаток, будучи многочленом степени ниже 1, есть число. Следовательно, в тождестве

$$P(x) = (x - a)(c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_0) + R$$

значение R одно и то же при всех значениях аргумента x. Положив $x = a$, получим $P(a) = R$, ч. т. д.

Рассуждение остается в силе и в том случае, когда $P(x, y, \ldots, z)$ есть многочлен от нескольких аргументов, а деление происходит на разность $x - A(y, \ldots, z)$, где $A(y, \ldots, z)$ многочлен. В данном случае коэффициенты c_k и остаток R суть многочлены от $y, \ldots, z$, причем:

$$R(y, \ldots, z) = P\big(A(y, \ldots, z), y, \ldots, z\big).$$

Примеры

1. Остаток от деления многочлена $2x^3 - 3x^2 - x + 1$ на $x - 2$ равен $2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 3$.

Остаток от деления того же многочлена на $x + 1$ равен

$$2(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 1 = -3$$

2. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x-a)(x-b)$, где $a \neq b$.

Решение. Делитель есть многочлен второй степени, остаток должен быть двучленом первой степени:

$$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + (Ax+B).$$

Положив $x=a$ и $x=b$, получим:

$$Aa + B = P(a), \quad Ab + B = P(b).$$

Из этих уравнений найдем:

$$A = \frac{P(a) - P(b)}{a-b} \quad \text{и} \quad B = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a},$$

и

$$R(x) = \frac{P(a) - P(b)}{a-b}\, x + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}.$$

Для вычисления коэффициентов неполного частного и остатка от деления $P(x)$ на $x-a$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Умножим искомое неполное частное на делитель:

$$\begin{array}{r|l}
 & A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1x + A_0 \\ \hline
x & A_{n-1}x^{n} + A_{n-2}x^{n-1} + \ldots + A_1x^2 + A_0x \\
-a & \qquad -aA_{n-1}x^{n-1} - \ldots \qquad -aA_1x \qquad\qquad -aA_0 \\ \hline
 & A_{n-1}x^{n} + (A_{n-2} - aA_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (A_0 - aA_1)x - aA_0
\end{array}$$

Сумма полученного произведения и остатка R должна быть тождественна $P(x)$, следовательно,

$$A_{n-1} = a_n, A_{n-2} - aA_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, A_0 - aA_1 = a_1, \; R - aA_0 = a_0.$$

Откуда находим последовательно:

$$A_{n-1} = a_n, \; A_{n-2} = a_{n-1} + aA_{n-1}, \; A_{n-3} = a_{n-2} + aA_{n-2}, \ldots,$$
$$R = a_0 + aA_0.$$

Вычисления обычно располагают в виде следующей схемы Горнера:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
a	A_{n-1} $(A_{n-1} = a_n)$	A_{n-2} $(= aA_{n-1} + a_{n-1})$	A_{n-3} $(= aA_{n-2} + a_{n-2})$	$\cdots$	R $(= aA_0 + a_0)$

Коэффициенты неполного частного и остаток вычисляются путем последовательного заполнения второй строки таблицы

Примеры

1. Вычислить неполное частное и остаток от деления многочлена $2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ на $x - 2$. Составляем таблицу

2	2	—1	—1	3	—2
	2	3	5	13	24

Неполное частное: $2x^3 + 3x^2 + 5x + 13$. Остаток: 24.

2. Вычислить неполное частное и остаток от деления $x^4 - x^2 + 2x - 3$ на $x + 1$

—1	1	0	—1	2	—3
	1	—1	0	2	—5

Неполное частное: $x^3 - x^2 + 2$, остаток: —5.

§ 27. Теоремы о корнях многочлена

Рассмотрим многочлен $P(x)$ положительной степени (т. е. не являющийся числом) от одного аргумента над некоторым числовым полем.

Определение. *Число a называется корнем многочлена $P(x)$, если значение $P(x)$ в точке $x=a$ равно нулю.*

Иными словами, корень многочлена $P(x)$ есть корень уравнения

$$P(x) = 0.$$

Основная теорема алгебры комплексных чисел. *Всякий многочлен $P(x)$ положительной степени имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень.*

Доказательство основной теоремы известно из курса высшей алгебры. Эта теорема утверждает, что для всякого многочлена положительной степени

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с комплексными коэффициентами существует, по крайней мере, одно комплексное (в частности может быть действительное) число a такое, что при $x = a$ значение многочлена равно нулю.

В частности, всякий многочлен с действительными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень, этот корень может быть, а может не быть действительным.

Теорема. *Если многочлен $P(x)$ положительной степени с действительными коэффициентами имеет мнимый корень $\alpha = \xi + \eta i$ (где $\eta \neq 0$), то сопряженное комплексное число $\xi - \eta i$ также является корнем $P(x)$.*

Доказательство. Пусть $x=\xi+\eta i$ некоторое комплексное значение аргумента, а

$$u+iv=P(\xi+\eta i)$$

соответствующее значение многочлена. Сопряженному значению аргумента $x=\xi-\eta i$ соответствует сопряженное значение многочлена, так как при замене x сопряженным числом $\bar{x}$ каждый член многочлена $a_k x^k$ заменится сопряженным числом $a_k \bar{x}^k$. Следовательно,

$$P(\xi-\eta i)=u-iv.$$

Если $\xi+\eta i$ есть корень многочлена, то $u+vi=0$, т. е. $u=v=0$. Но когда $\xi-\eta i$ также является корнем многочлена, так как

$$P(\xi-\eta i)=u-iv=0, \qquad \text{ч. т. д}$$

§ 28. Разложение многочлена на множители

Определение. *Многочлен положительной степени $P(x, y, ..., z)$ называется неразложимым или неприводимым над данным числовым полем, если он не имеет нетривиальных делителей с коэффициентами из этого поля.*

Многочлен $P(x, y, ..., z)$ называется разложимым (или приводимым) над данным полем, если он имеет нетривиальные делители с коэффициентами из этого поля.

Теорема. *Всякий многочлен $P(x, y, ..., z)$ положительной степени (над данным полем) может быть представлен в виде произведения неразложимых множителей:*

$$P(x, y, \ldots, z)=p_1(x, y, \ldots, z)\cdot p_2(x, y, \ldots, z)\ldots p_k(x, y, \ldots, z), \quad \text{(P)}$$

где

$$p_1(x, y, \ldots, z),\ p_2(x, y, \ldots, z),\ \ldots,\ p_k(x, y, \ldots, z)$$

неразложимые (над данным полем) многочлены.

Это разложение является единственным с точностью до числовых множителей (из данного поля).

Доказательство дается в курсе высшей алгебры; в задачи элементарной алгебры входит лишь рассмотрение различных частных приемов практического разложения многочленов на множители.

Разъяснения: 1°. Слова «с точностью до числовых множителей» означают, что в двух разложениях данного многочлена неприводимые многочлены-сомножители либо (соответственно) тождественны, либо могут отличаться лишь числовыми множителями. Такие разложения не рассматриваются как различные, например, следующие разложения квадратного трехчлена

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5) = (3x-9)\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{x}{3} - 1\right)(x-5)$$

и т. п. различными не считаются.

2°. Если сам многочлен P является неразложимым, то правая часть тождества (P) рассматривается как состоящая из «одного множителя» и «разложение» принимает вид:

$$P(x, y, \ldots, z) = P(x, y, \ldots, z).$$

3°. В формуле (P) среди неразложимых сомножителей могут встречаться одинаковые (с точностью до числовых множителей). Объединив вместе одинаковые сомножители, получим каноническое разложение многочлена на множители:

$$P(x, y, \ldots, z) = Cp_1^{\alpha_1}(x, y, \ldots, z)\, p_2^{\alpha_2}(x, y, \ldots, z) \ldots p_s^{\alpha_s}(x, y, \ldots, z).$$

где C — числовой множитель, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — некоторые натуральные числа.

Всякий многочлен первой степени является неразложимым, так как в противном случае он мог бы быть представлен в виде произведения не менее двух сомножителей степени не ниже первой, что невозможно

Разложение на множители многочленов от одного аргумента.

Теорема. *Число a есть корень многочлена $P(x)$ в том и только в том случае, если $P(x)$ делится на разность $x-a$.*

Доказательство. Если a есть корень многочлена $P(x)$, то $P(a) = 0$, но $P(a)$ есть остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$. Следовательно, $P(x)$ делится на $(x-a)$. Обратно, если $P(x)$ делится на $x-a$, то

$$P(x) = (x-a)Q(x), \qquad (1)$$

откуда $P(a) = 0$, т. е. число a есть корень многочлена $P(x)$ ч. т. д.

Следствие. *Если многочлен $P(x)$ имеет в данном числовом поле корень $x = a$, то он является разложимым над этим полем, так как $x-a$ есть его нетривиальный делитель.*

Теорема. *Всякий многочлен $P_n(x)$ степени n (где $n > 0$) разлагается над полем комплексных чисел на n линейных множителей.*

Доказательство. В самом деле, в силу основной теоремы многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

в поле комплексных чисел имеет хотя бы один корень $x = x_1$ и, следовательно, делится на разность $x - x_1$:

$$P_n(x) = (x - x_1) P_{n-1}(x).$$

В силу той же теоремы многочлен $P_{n-1}(x)$ имеет хотя бы один корень x_2, а потому делится на разность $x - x_2$. Следовательно, имеем:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) P_{n-2}(x).$$

После n-го шага получим:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) P_0, \qquad (*)$$

где P_0 — многочлен нулевой степени, т. е. отличное от нуля число, ч. т. д.

Сравнив коэффициенты при старшем члене в обеих частях этого тождества, получим $P_0 = a_n$. Числа x_1, x_2, ..., x_n суть корни многочлена P_n.

Если корень x_1 встречается α_1 раз, x_2 встречается α_2 раз и т. д. x_k встречается α_k раз, то разложение примет вид:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$; число α_i называется кратностью корня x_i, а сам корень x_i называется α_i-кратным корнем данного многочлена. Если кратность корня равна 1, то корень называется **простым**.

Принято каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема. *Всякий многочлен $P_n(x)$ степени n в поле комплексных чисел имеет **n** корней, при этом каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. В самом деле, числа x_1, x_2, ..., x_n суть корни многочлена $P_n(x)$. Кроме этих чисел многочлен $P_n(x)$ не имеет никаких других корней, так как ни при каком значении x, отличном от x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) ни один из сомножителей в правой части не обращается в нуль, а потому и $P_n(x) \neq 0$, ч. т. д.

Следствие. *Многочлен $P_n(x)$ степени **n** в данном числовом поле имеет не более чем **n** корней.*

В самом деле, в поле комплексных чисел многочлен имеет в точности n корней. Среди n комплексных корней содержатся (в частности) все действительные и (в частности) все рациональные корни. Число таких корней не больше их общего числа, т. е. n.

Теорема. *Над полем действительных чисел:*

1°. *неразложимыми являются только двучлены первой степени и квадратные трехчлены с мнимыми корнями;*

2°. *всякий многочлен с действительными коэффициентами* *степени выше 2-й разлагается в общем случае на множители первой степени и неразложимые квадратные трехчлены.*

В частных случаях в каноническом разложении многочлена над полем действительных чисел могут отсутствовать либо множители 1-й степени, либо квадратные трехчлены.

Доказательство. Предположим, что квадратный трехчлен с действительными коэффициентами

$$ax^2+bx+c$$

имеет мнимые корни. Если бы этот трехчлен был приводимым над полем действительных чисел, то имело бы место разложение:

$$ax^2+bx+c\equiv(kx+l)(mx+n), \tag{1}$$

где k, l, m и n — действительные числа. Но тогда, вопреки предположению, трехчлен имел бы два действительные корня:

$$x_1=-\frac{l}{k} \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{n}{m}.$$

Следовательно, над полем действительных чисел трехчлен (1) неразложим.

Если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет мнимый корень $\alpha=\xi+\eta i$, то он имеет и сопряженный корень $\overline{\alpha}=\xi-\eta i$, а потому делится на произведение

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=$$
$$=x^2-2\xi x+(\xi^2+\eta^2)=x^2+px+q,$$

где $p=-2\xi$, $q=\xi^2+\eta^2$, т. е. на квадратный трехчлен с мнимыми корнями *.

Частное от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен x^2+px+q есть многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами. Имеем:

$$P(x)=(x^2+px+q)Q(x).$$

Если α_1 есть мнимый корень многочлена $Q(x)$, то $\overline{\alpha_1}$ также есть корень $Q(x)$ и $Q(x)$ делится на трехчлен

$$(x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha_1})=x^2+p_1x+q_1.$$

В этом случае, α, $\overline{\alpha}$, α_1 и $\overline{\alpha_1}$ суть корни многочлена $P(x)$ и он делится на произведение трехчленов

$$(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1).$$

Имеем:

$$P(x)=(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1)Q_2(x).$$

Если, в частности, α есть кратный корень многочлена $P(x)$, то $\alpha_1=\alpha$ и $\overline{\alpha_1}=\overline{\alpha}$ суть также корни многочлена $Q(x)$. В этом случае $P(x)$ делится на $(x^2+px+q)^2$.

---

* Действительных корней этот трехчлен не имеет, так как $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=(x-\xi)^2+\eta^2>0$ при произвольном действительном x.

Описанный процесс попарного выделения сопряженных мнимых корней можно продолжать, пока не будут исчерпаны все мнимые корни многочлена $P(x)$. Из сказанного следует, что мнимые корни многочлена $P(x)$ попарно сопряжены; при этом наличие кратного корня влечет за собой наличие сопряженного корня той же кратности.

Если в разложении многочлена $P(x)$ на множители

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

над полем комплексных чисел выделить действительные двучлены первой степени, соответствующие действительным корням, и квадратные трехчлены, соответствующие парам мнимых сопряженных корней, то получится следующее разложение $P(x)$ на множители над полем действительных чисел:

$$P(x) \equiv a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\dots(x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\dots$$

$$\dots(x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

В этом разложении каждый неразложимый (над полем действительных чисел) множитель берется в степени, равной кратности соответствующего корня.

Следствие. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.*

В самом деле, если бы все корни многочлена нечетной степени были бы мнимые, то их число (равное степени многочлена) было бы нечетным, что невозможно.

Примеры

1. При каких условиях многочлен с действительными коэффициентами

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

делится на двучлен $x^2 + 1$?

Решение. Для делимости на $x^2 + 1$ необходимо и достаточно, чтобы число i было корнем $P(x)$. Это ясно, так как наличие корня i, а следовательно, и сопряженного ему корня $-i$ равносильно делимости на

$$(x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

Искомое условие запишется так:

$$P(i) = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + \dots =$$

$$= (a_0 - a_2 + a_4 - \dots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) = 0.$$

Откуда

$$a_0 - a_2 + a_4 - \dots = 0 \quad \text{и} \quad a_1 - a_3 + a_5 - \dots = 0.$$

2. Доказать, что трехчлен $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{2p+2}$ (где n, m и p любые натуральные числа) делится на квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$.

Решение. Пусть $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ — мнимый кубический корень из 1. Имеем:

$$\varepsilon^3 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0,$$

но так как $\varepsilon - 1 \neq 0$, то $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Докажем, что ε есть корень данного трехчлена:

$$\varepsilon^{3n} + \varepsilon^{3m+1} + \varepsilon^{3p+2} = 1 + \varepsilon^{3m}\varepsilon + (\varepsilon^{3p})\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Отсюда следует, что трехчлен имеет и сопряженный корень $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ и делится на

$$(x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2) = x^2 - (\varepsilon + \varepsilon^2)x + \varepsilon^3 = x^2 + x + 1.$$

Над полем рациональных чисел существуют неразложимые многочлены любой степени.

Существуют многочлены с несколькими аргументами произвольной степени, неразложимые над каким угодно полем. Примером может служить многочлен

$$Q(x, y) = P(x) + y,$$

где $P(x)$ — произвольный многочлен с одним аргументом. В самом деле, для многочлена $Q(x, y)$ единственно возможное разложение на множители имеет вид:

$$Q(x, y) = p_1(x)[p_2(x)y + p_3(x)].$$

Откуда $p_1(x)p_2(x) \equiv 1$ и, следовательно, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ суть числа данного поля Итак, многочлен может иметь лишь тривиальные делители.

Геометрическая интерпретация. Если многочлен $P(x, y)$ является разложимым

$$P(x, y) = P_1(x, y)\, P_2(x, y),$$

то линия, определяемая уравнением $P(x, y) = 0$, распадается на две линии

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0$$

(каждая из этих линий может распадаться в свою очередь). Если многочлен $P(x, y)$ неразложим, то соответствующая линия является нераспадающейся на пару (или большее число) линий более низкого порядка. В частности (как известно из курса аналитической геометрии) уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

с неразложимой левой частью изображается нераспадающаяся линия второго порядка (т. е. эллипс, гипербола или парабола). Если левая часть разлагается на два линейные множителя, то линия распадается на пару прямых. Известное из аналитической геометрии условие распадения линии второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0$$

является необходимым и достаточным условием разложимости многочлена второй степени (над полем комплексных чисел) с двумя аргументами на линейные множители.

§ 29. Различные способы разложения многочленов на множители

В задачу элементарной алгебры входят установление и систематизация различных частных приемов разложения многочленов на множители. В практике разложения многочленов отдельные приемы применяются в различных их комбинациях, и умение целесообразно ими пользоваться приобретается лишь в результате длительного опыта. Элементарные частные приемы в общем случае не дают возможности установить неразложимость или разложимость данного многочлена и выполнить окончательное разложение на множители. Однако в практическом применении к различным конкретным случаям частные приемы разложения на множители имеют весьма важное значение.

Задача разложения многочлена на неприводимые множители не может ставиться без указания того числового поля, над которым требуется выполнить разложение. *Для различных полей окончательные результаты разложения одного и того же многочлена могут быть различными.* В учебной литературе нередко числовое поле, над которым требуется выполнить разложение, явно не указывается, поскольку бывает ясно, о каком числовом поле идет речь *.

Простейшие методы разложения основываются на непосредственном применении законов арифметических действий.

Непосредственное применение закона дистрибутивности известно в учебной литературе под названием вынесения общего множителя за скобки.

Примеры

1. Разложить на множители

$$(2a^2 - 3ax)(5c + 2d) - (6a^2 - 4ax)(5c + 2d) =$$
$$= [(2a^2 - 3ax) - (6a^2 - 4ax)](5c + 2d) = \quad \text{(дистрибутивность)}$$
$$= (ax - 4a^2)(5c + 2d) = a(x - 4a)(5c + 2d). \quad \text{(дистрибутивность)}$$

Обычно применению закона дистрибутивности предшествуют преобразования, основанные на законах коммутативности (перестановка членов) и ассоциативности (группировка членов). Этот прием в учебной литературе называется методом группировки. Иногда целесообразно применение «искусственных» преобразований, заключающихся в разбиении некоторых слагаемых на сумму двух или нескольких подобных членов, или в введении сокращающихся членов.

2. $(ay + bx)^3 + (ax + by)^3 - (a^3 + b^3)(x^3 + y^3) =$

$$= 3a^2b\,xy^2 + 3ab^2\,yx^2 + 3a^2b\,x^2y + 3ab^2\,xy^2 =$$
(раскрытие скобок и приведение подобных)
$$= 3ab\,xy\,(ay + bx + ax + by) = \quad \text{(дистрибутивность)}$$
$$= 3ab\,xy\,[(ax + ay) + (bx + by)] = \quad \text{(коммутативность и ассоциативность)}$$
$$= 3ab\,xy\,[a(x + y) + b(x + y)] = 3ab\,xy\,(x + y)(a + b). \quad \text{(дистрибутивность)}$$

3. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Разобьем второй и третий члены на сумму двух слагаемых

$$6x^2 = 3x^2 + 3x^2 \quad \text{и} \quad 11x = 9x + 2x.$$

---

* Так, например, в задачах для VI и VII классов ни о каком ином поле, кроме поля рациональных чисел, речи быть не может.

Получим:

$$x^3+6x^2+11x+6=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6=$$
$$=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)=$$
$$=(x+3)(x^2+3x+2)=(x+3)(x^2+2x+x+2)=(x+3)(x+2)(x+1).$$

4. $$P=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b).$$

Решение. Заметив, что выражение в третьей скобке есть разность выражений в первых двух

$$a+b=(b+c)-(c-a),$$

получим

$$P=bc(b+c)+ca(c-a)-ab[(b+c)-(c-a)]=$$
$$=[bc(b+c)-ab(b+c)]+[ca(c-a)+ab(c-a)]=$$
$$=b(b+c)(c-a)+a(c-a)(c+b)=(b+c)(c-a)(b+a).$$

При разложении многочленов на множители формулы сокращенного умножения применяются для представления суммы в виде произведения.

Так, например, формулой

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

удобно пользоваться для разложения на множители квадратного трехчлена x^2+px+q, если нетрудно непосредственно подобрать числа a и b, сумма которых равна p, а произведение равно q.

При разложении многочленов на множители часто пользуются преобразованием, называемым **выделением полного квадрата**. Это преобразование заключается в дополнении (путем введения сокращающихся членов) некоторой группы слагаемых до квадрата многочлена.

Примеры

5. Разложить на множители трехчлен x^2+6x+8.

Решение. Заметив, что $6=2+4$ и $8=2\cdot 4$, получим:

$$x^2+6x+8=(x+2)(x+4).$$

6. Разложить на множители трехчлен $9x^2+12x+3$.

Решение. Применим преобразование выделения полного квадрата:

$$9x^2+12x+3=[(3x)^2+2\cdot 2\cdot(3x)+4]-4+3=$$
$$=(3x+2)^2-1=(3x+3)(3x+1)=3(x+1)(3x+1)$$

7. Двучлен x^2+1 над полем действительных чисел неразложим. Над полем комплексных чисел имеем:

$$x^2+1=x^2-i^2=(x+i)(x-i).$$

8. Трехчлены

$$x^2+xy+y^2 \quad \text{и} \quad x^2-xy+y^2$$

над полем действительных чисел неразложимы. Рассмотрим для определенности первый трехчлен. Применив преобразование выделения полного квадрата, получим:

$$\left[x^2+2x\left(\frac{1}{2}y\right)+\frac{1}{4}y^2\right]+\frac{3}{4}y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

Над полем комплексных чисел получим следующее разложение на линейные множители:

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)\left(x+\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)$$

Аналогично для другого трехчлена получим:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,yi\right)\left(x - \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,yi\right).$$

9. $4xz^2 - 3xy^2 + 4z^2y - 3y^3 = 4z^2(x+y) - 3y^2(x+y) = (4z^2 - 3y^2)(x+y)$.

Это разложение следует рассматривать как окончательное над полем рациональных чисел. Над полем действительных чисел разложение может быть продолжено. Рассматривая первый множитель как разность квадратов, получим:

$$(2z + \sqrt{3}y)(2z - \sqrt{3}y)(x+y).$$

10. Разложить на множители $x^4 + x^2y^2 + y^4$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 =$$
$$= (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy).$$

Полученное разложение полезно запомнить. Над полем комплексных чисел разложение может быть продолжено (см. пример 8).

11. Разложить на множители над полем действительных и комплексных чисел $x^4 + y^4$.

Решение. Имеем:

$$x^4 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (\sqrt{2}\,xy)^2 =$$
$$= (x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2).$$

Применив преобразование выделения полного квадрата к каждому из квадратных трехчленов, получим следующее разложение над полем комплексных чисел:

$$x^4 + y^4 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}yi\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}yi\right)\times$$
$$\times\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}yi\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}yi\right).$$

12. Разложить на множители $S = a^6 - b^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Решение. Имеем:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

и

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

Следовательно,

$$S = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)[(a-b)(a+b) + 1] =$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1).$$

Над полем комплексных чисел первые два трехчлена разложимы (см. пример 8), а третий неразложим (см. стр. 80 «Геометрическая интерпретация»).

13. Разложить на множители $(x+y)^4 + x^4 + y^4$.

Решение. Применим дважды преобразование выделения полного квадрата:

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 =$$
$$= (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2.$$

Откуда

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2[(x+y)^4 - 2xy(x+y)^2 + x^2y^2] =$$
$$= 2[(x+y)^2 - xy]^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

14. Разложить на множители $P(x) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$.

Решение.

$$P(x) = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5 =$$
$$= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3) = 5xy[(x^3 + y^3) + 2xy(x+y)] =$$
$$= 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2).$$

15. Разложить на множители

$$P(a,\ b,\ c) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Решение. Применим преобразование выделения полного квадрата:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 =$$
$$= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2.$$

Следовательно,

$$P(a,\ b,\ c) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$= [c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2] = (c + a - b)(c - a + b)(a + b + c)(a + b - c).$$

Знание корней многочлена $f(x)$ позволяет или произвести полностью разложение на множители, или выделить ряд множителей первой степени и свести задачу к разложению на множители многочлена более низкой степени.

Примеры

16. Разложить на множители $P(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$.

Решение. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что многочлен обращается в нуль при $x = -2$, следовательно, он делится на $x + 2$. Выполнив деление (по схеме Горнера):

	1	6	13	14	12	8
-2	1	4	5	4	4	0

получим:

$$P(x) = (x + 2)(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4).$$

Подстановкой убедимся, что второй множитель также обращается в нуль при $x = -2$. Выполнив деление на $x + 2$, получим:

$$P(x) = (x + 2)^2(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Второй множитель легко разлагается способом группировки:

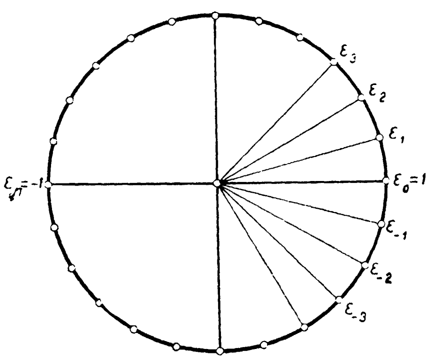
$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1).$$

Имеем окончательно (над полями рациональных и действительных чисел):

$$P(x) = (x + 2)^3(x^2 + 1).$$

17. Разложить многочлен $x^{2n} - 1$ на множители над полем действительных чисел.

Решение. Найдем сначала линейные множители, на которые разлагается данный многочлен над полем комплексных чисел. Корнями многочлена служат значения комплексных корней степени $2n$ из 1.



Черт. 9

Соответствующие точки расположены в вершинах правильного $2n$-угольника, их можно занумеровать, как показано на чертеже 9.

Имеем:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n},$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_{-1} = \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$
$$\varepsilon_{-2} = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Среди этих чисел содержатся два действительные: $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_n = -1$. Корни ε_k и ε_{-k} (где $0<k<n$) дают в разложении $x^{2n}-1$ два сопряженные комплексные сомножителя: их произведение дает неразложимый (над полем действительных чисел) квадратный трехчлен:

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k}) = \left(x - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) =$$
$$= \left(x - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n} = x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1.$$

Следовательно,

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

или сокращенно:

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

Разделив обе части на x^2-1, получим следующее разложение:

$$x^{2n-2} + x^{2n-1} + \ldots + x^2 + 1 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

При разложении на множители многочленов от нескольких аргументов нередко применяется следующая обобщенная теорема Безу.

Теорема. *Для делимости многочлена $P(x, y, \ldots, z)$ на разность $x-A(y, \ldots, z)$ (где $A(y, \ldots, z)$ — многочлен) необходимо и достаточно, чтобы результат подстановки $x = A(y, \ldots, z)$ в $P(x, y, \ldots, z)$ был тождественно (относительно $y, \ldots, z$) равен нулю.*

Доказательство. Разделив с остатком многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ на $x - A(y, \ldots, z)$, получим:

$$P(x, y, \ldots, z) \equiv [x - A(y, \ldots, z)]\,Q(x, y, \ldots, z) + R(y, \ldots, z),$$

где $R(y, \ldots, z) \equiv P(A(y, \ldots, z), y, \ldots, z)$, следовательно, многочлен P разделится на $x-A$ в том и только в том случае, если $P(A(y, \ldots, z), y, \ldots, z) \equiv 0$

Примеры

18. Найти значение коэффициента k, при котором многочлен

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$$

делится на трехчлен $x + y + z$, и выполнить разложение на множители.

Решение. Требуется найти k, при котором многочлен делится на разность $x-(-y-z)$. Необходимым достаточным условием делимости является:

$$P(-y-z, y, z) = -(y+z)^3 + y^3 + z^3 - k(y+z)yz \equiv$$
$$\equiv -(3+k)(y+z)yz \equiv 0.$$

Следовательно, $k = -3$ и $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Так как при любой перестановке аргументов делимое и делитель не изменяются, то не изменяется и частное. Частное является однородным многочленом, так как в противном случае произведение делителя на частное содержало бы различные между собой группы старших и младших членов и не могло бы быть тождественным однородному многочлену $P(x, y, z)$. Итак, искомое частное есть однородный симметрический многочлен второй степени. Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left[A\left(x^2+y^2+z^2\right)+B\left(xy+xz+yz\right)\right].$$

Сравнив коэффициенты при x^3, получим $1=A$.

Положив в последнем тождестве $x=1$, $y=1$, $z=0$, получим

$$2=2(2A+B), \quad \text{откуда} \quad B=-1.$$

Итак, имеем тождество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right).$$

Над полем комплексных чисел возможно дальнейшее разложение. Достаточно принять во внимание, что

$$(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z)\equiv x^2+\varepsilon^3 y^2+\varepsilon^3 z^2+(\varepsilon^2+\varepsilon)(yz+xz+xy)\equiv$$
$$\equiv x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy,$$

где

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \varepsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

— мнимые кубические корни из 1.

19. Разложить на множители

$$P=(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4.$$

Решение. Рассмотрим P как многочлен от аргумента a. Нетрудно заметить, что $P(a, b, c)$ обращается в нуль при подстановке $a=b$, а также при подстановке $a=c$. Аналогично рассматривая $P(a, b, c)$ как многочлен от аргумента b, заметим, что он обращается в нуль при $b=c$. Следовательно, $P(a, b, c)$ делится на линейные двучлены $a-b$, $a-c$ и $b-c$. Эти двучлены не делятся друг на друга, так как каждый из них содержит аргумент, не содержащийся в другом. В разложении на неприводимые множители $P(a, b, c)$ содержится каждый из указанных двучленов, а потому $P(a, b, c)$ делится на произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$. Частное является однородным симметрическим многочленом второй степени. В самом деле, при любой перестановке аргументов делимое и делитель либо оба меняют знак, либо оба не меняются, а потому частное не изменяется. Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4\equiv$$
$$\equiv(a-b)(b-c)(c-a)\left[A\left(a^2+b^2+c^2\right)+B(ab+bc+ca)\right].$$

Сравнив коэффициенты при a^4b, получим $3=-A$. Положив $a=1$, $b=-1$, $c=0$, получим: $-2=2(2A-B)$, откуда $B=-5$. Итак,

$$P=-(a-b)(b-c)(c-a)\left[3\left(a^2+b^2+c^2\right)+5(ab+bc+ca)\right].$$

§ 30. Деление с остатком многочленов, расположенных по возрастающим степеням аргумента

Рассмотрим два многочлена от одного аргумента x, расположенные по возрастающим степеням x:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n;$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m, \quad \text{где } b_0\neq 0.$$

Разделив младший член многочлена $f(x)$ на b_0, умножим частное на $\varphi(x)$ и вычтем из $f(x)$:

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0}\varphi(x) = a'_1 x + a'_2 x^2 + \ldots = xR_1(x).$$

Полученный многочлен $xR_1(x)$ назовем первым остатком. Имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{b_0}\varphi(x) + xR_1(x).$$

Применив описанный процесс к $xR_1(x)$ и $\varphi(x)$, получим второй остаток:

$$xR_1 - \frac{a'_1 x}{b_0}\varphi(x) = a''_2 x^2 + \ldots = x^2 R_2(x).$$

Откуда

$$f(x) = \left(\frac{a_0}{b_0} + \frac{a'_1 x}{b_0}\right)\varphi(x) + x^2 R_2(x).$$

После k-го шага получим:

$$f(x) = q_{k-1}(x)\varphi(x) + x^k R_k(x), \tag{1}$$

где $q_{k-1}(x)$ есть многочлен степени не выше чем $k-1$ или нуль-многочлен, а $x^k R_k(x)$, k-й остаток, есть многочлен степени не ниже k или нуль-многочлен.

Существует лишь единственная пара многочленов $q_{k-1}(x)$ и $R_k(x)$, удовлетворяющая (при перечисленных условиях) тождеству (1). Допустим противное, что, кроме $q_{k-1}(x)$ и $R_k(x)$, существует другая пара многочленов $q'_{k-1}(x)$ (степени не выше $k-1$ или нуль-многочлен) и R'_k таких, что имеет место тождество

$$f(x) \equiv q'_{k-1}(x)\varphi(x) + x^k R'_k(x). \tag{1'}$$

Из тождеств (1) и (1′) получим:

$$[q_{k-1}(x) - q'_{k-1}(x)]\varphi(x) \equiv x^k [R'_k(x) - R_k(x)].$$

Если R'_k и R_k не тождественны, то младший член правой части этого тождества имеет степень не меньшую k, но тогда левая часть отлична от нуля и (так как $b_0 \neq 0$) ее младший член имеет степень меньшую k, что невозможно. Следовательно, $R'_k \equiv R_k$, но тогда $q'_{k-1} \equiv q_{k-1}$.

Если многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то имеет место тождество

$$f(x) \equiv q_{n-m}(x)\varphi(x),$$

где q_{n-m} — многочлен степени $n-m$, следовательно, остаток R_{n-m+1} (а также все последующие остатки) есть нуль-многочлен. Обратно, если в процессе деления получится остаток, тождественный нулю, то многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$.

Если многочлен $f(x)$ не делится на $\varphi(x)$, то процесс деления $f(x)$ на $\varphi(x)$, расположенных по возрастающим степеням аргумента, является бесконечным, он дает бесконечную последовательность остатков, ни один из которых не равен нулю *.

При выполнении деления многочленов, расположенных по возрастающим степеням аргумента, последовательное вычисление частных и остатков удобно производить путем «деления углом».

П р и м е ч а н и е. Если окажется, что остаток R_{n-m+1} отличен от нуля, то многочлен $f(x)$ не делится на $\varphi(x)$. В самом деле, последующие частные имеют степени больше, чем $n-m$, и при их умножении на $\varphi(x)$ будут получаться многочлены степени большей, чем $f(x)$, а потому не тождественные $f(x)$.

Примеры

1. Ниже показана запись при «делении углом» многочленов, расположенных по возрастающим степеням

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 1-x & \quad 1+x+x^2 \\
 & \underline{1+x+x^2} & 1-2x+x^2+x^3+\dots \\
xR_1(x) & -2x-x^2 & \\
 & \underline{-2x-2x^2-2x^3} & \\
x^2R_2(x) & \dots\dots x^2+2x^3 & \\
 & \qquad\quad \underline{x^2+x^3+x^4} & \\
x^3R_3(x) & \dots\dots\quad \underline{x^3-x^4} & \\
 & \qquad\quad \dots &
\end{array}
$$

Последовательные частные суть

$$1,\quad 1-2x,\quad 1-2x+x^2,\quad 1-2x+x^2+x^3 \text{ и т. д.}$$

2. Пусть

$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_p\dots \qquad \{d\}$$

последовательность коэффициентов частных.

Доказать, что если $n<m$, то любые m последовательных чисел $\{d\}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$d_pb_m+d_{p+1}b_{m-1}+\dots+d_{p+m}b_0=0.$$

---

* В частном получается степенной ряд, дающий представление алгебраической дроби $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в круге (на комплексной плоскости) сходимости с центром в точке 0 и с радиусом, равным расстоянию от точки 0 до ближайшего корня знаменателя $\varphi(x)$.

Р е ш е н и е. Выберем число N достаточно большим (бо́льшим, чем $p+m$). Перепишем тождество (1) так (положим $k=N+1$):

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \equiv (d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_px^p+\ldots+d_Nx^N)\times$$
$$\times(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m)+x^{N+1}R_{N+1}(x);$$

приравняв нулю коэффициенты при x^m, x^{m+1}, ..., x^{m+p}, в правой части получим тождества

$$\begin{aligned}
&d_0b_m+d_1b_{m-1}+\ldots+d_mb_0=0,\\
&d_1b_m+d_2b_{m-1}+\ldots+d_{m+1}b_0=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_pb_m+d_{p+1}b_{m-1}+\ldots+d_{p+m}b_0=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ГЛАВА II

ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 31. Рациональные выражения и рациональные функции

Определение. *Рациональным выражением от аргументов $x, y, \ldots, z$ называется выражение, составленное из аргументов и из чисел данного поля при помощи действий сложения, вычитания, умножения и деления.*

При этом выражения, не имеющие числового значения ни при каких значениях аргументов (т. е. выражения, лишенные смысла), рациональными не считаются.

Всякий многочлен является рациональным (целым) выражением.

Определение. *Рациональное выражение называется дробным, если оно содержит действие деления на выражения, содержащие аргументы.*

Числа, входящие в состав рационального выражения, а также допустимые значения аргументов считаются принадлежащими некоторому числовому полю; кратко говорят, что рациональное выражение рассматривается над данным полем.

Примеры

1. Примерами рациональных выражений могут служить

$$\frac{ax+by}{cx+d}, \quad -\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{ab}{x+y}}{a^2+b^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Первое и третье выражения — дробные, второе выражение — целое (т. е. многочлен).

2. Выражения

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{x-1}{x-x}, \quad \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-2xy-y^2}$$

не считаются рациональными, так как они не имеют численного значения ни при каких значениях аргументов.

3. Выражения

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right), \quad \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$$

содержат трансцендентные операции над аргументом, а потому не являются рациональными.

§ 32. Алгебраические дроби

Определение, *Отношение двух многочленов* $\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}$ *называется алгебраической или рациональной дробью.*

По количеству аргументов, содержащихся в многочленах числителе и знаменателе, алгебраические дроби разделяются на дроби от одного, от двух, от трех и т. д. аргументов.

Всякий многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ можно рассматривать как рациональную дробь со знаменателем, равным единице:

$$P(x, y, \ldots, z) = \frac{P(x, y, \ldots, z)}{1}.$$

Таким образом, множество многочленов включается как часть в множество всех рациональных дробей.

Произвольной системе значений аргументов (из данного числового поля), при которой знаменатель алгебраической дроби не обращается в нуль, соответствует вполне определенное значение дроби, все эти системы образуют множество допустимых систем значений аргументов или о б л а с т ь о п р е д е л е н и я алгебраической дроби (рассматриваемой над данным полем). В частности, для дроби одного аргумента $\frac{P(x)}{Q(x)}$ допустимым является любое значение x (из данного поля) за исключением корней знаменателя.

При совместном задании нескольких дробей:

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}, \quad \frac{P_1(x, y, \ldots, z)}{Q_1(x, y, \ldots, z)}, \quad \frac{P_2(x, y, \ldots, z)}{Q_2(x, y, \ldots, z)}, \ldots$$

допустимой является произвольная система численных значений аргументов (из данного числового поля), при которой ни один из знаменателей Q, Q_1, Q_2, ... не обращается в нуль.

Примеры

1. Примерами алгебраических дробей могут служить

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \text{ (от одного аргумента)}, \quad \frac{x+y}{x-y} \text{ (от двух аргументов)},$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{1-x-y-z} \text{ (от трех аргументов)}.$$

2. Областью определения дроби $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$, рассматриваемой над полем рациональных (действительных) чисел, является множество всех рациональных (действительных) чисел, отличных от 1. Область определения этой дроби, рассматриваемой над полем комплексных чисел, является множество всех комплексных чисел, отличных от 1, i и от $-i$.

3. Областью определения дроби $\frac{1}{x-y}$ (над любым полем) является множество всевозможных пар неравных чисел x и y (т. е. $x \neq y$) из данного поля.

4. Областью определения дроби $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, рассматриваемой над полем действительных чисел, является множество всех точек (x, y), отличных от точки $x = y = 0$.

Область определения той же дроби над полем комплексных чисел является множество всевозможных пар комплексных чисел x и y, удовлетворяющих условию $x \neq iy$.

5. Дробь $\frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2}$ определена для всех значений x, y, z, кроме значений, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2+z^2=1$ (поверхность единичной сферы в координатном пространстве).

6. При совместном рассмотрении дробей $\frac{1}{x+y}$ и $\frac{1}{x-y}$ допустимые значения аргументов определяются из условий $x \neq y$ и $x \neq -y$ (или в поле действительных чисел $|x| \neq |y|$).

§ 33. Тождественность алгебраических дробей

По общему определению тождественности двух аналитических выражений *две алгебраические дроби считаются тождественными, если при их совместном рассмотрении их значения равны для произвольной допустимой системы значений аргументов.* Иначе это определение можно сформулировать так:

Определение. *Две алгебраические дроби:*

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} \quad \text{и} \quad \frac{P_1(x, y, \ldots, z)}{Q_1(x, y, \ldots, z)}$$

тождественны, если равенство

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} = \frac{P_1(x, y, \ldots, z)}{Q_1(x, y, \ldots, z)}$$

выполняется при произвольной системе значений аргументов x, y, ..., z, при которой каждый из знаменателей данных дробей отличен от нуля:

$$Q(x,y, \ldots, z) \neq 0 \quad \text{и} \quad Q_1(x,y, \ldots, z) \neq 0.$$

Пример

Дроби $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ и $\frac{1}{x+y}$ тождественны, так как при совместном их рассмотрении следует считать $x \neq \pm y$, но тогда

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}.$$

Тождественное преобразование алгебраической дроби может изменить ее область определения. Так, например, при замене дроби $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ дробью $\frac{1}{x-y}$ значения $x = y \neq 0$ (недопустимые для первой дроби) становятся допустимыми.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием тождественности двух дробей*

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} \equiv \frac{P_1(x, y, \ldots, z)}{Q_1(x, y, \ldots, z)} \qquad (1)$$

является выполнение тождества

$$P(x, y, \ldots, z) Q_1(x, y, \ldots, z) \equiv P_1(x, y, \ldots, z) Q(x, y, \ldots, z). \qquad (2)$$

Разъяснение. Тождество (1) есть равенство, справедливое при всех допустимых системах значений аргументов, т. е. при всех системах чисел x, y, ..., z, при которых $Q \neq 0$ и $Q_1 \neq 0$. В тождестве (2) левая и правая части суть многочлены; согласно определению тождественности многочленов, это есть равенство, справедливое при произвольной системе значений аргументов из данного числового поля.

Доказательство. Условие достаточно. В самом деле, если имеет место тождество (2), то произведения $P \cdot Q_1$ и $P_1 \cdot Q$, будучи равными при всех системах значений аргументов, равны (в частности) и при допустимых (для данных дробей) системах. Но если $Q \neq 0$ и $Q_1 \neq 0$, то из равенства $PQ_1 = P_1Q$ следует равенство $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$, т. е. тождество (1).

Условие необходимо. Требуется доказать, что если дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ равны при произвольных допустимых системах значений аргументов, то равенство $PQ_1 = QP_1$ выполняется при всех системах значений аргументов (из данного числового поля).

Рассмотрим сначала дроби от одного аргумента $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Множество недопустимых значений аргумента состоит из всех корней двух алгебраических уравнений:

$$Q(x) = 0 \quad \text{и} \quad Q_1(x) = 0.$$

Каждое из этих уравнений имеет конечное множество корней (число различных корней не больше степени левой части), поэтому множество недопустимых значений аргумента конечно, а множество его допустимых значений бесконечно (из всех чисел данного поля следует исключить недопустимые значения). Из тождества

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

следует, что при всех допустимых значениях аргумента

$$P(x) Q_1(x) = P_1(x) Q(x).$$

Следовательно, значение многочлена

$$R(x) = P(x) Q_1(x) - P_1(x) Q(x)$$

равно нулю при всяком допустимом значении аргумента. Итак, многочлен $R(x)$ имеет бесконечное множество корней. Следовательно, $R(x) \equiv 0$, так как всякий отличный от нуля многочлен имеет лишь конечное множество корней, откуда $P_1Q \equiv PQ_1$.

Рассмотрим две дроби от нескольких аргументов. Ограничимся случаем двух аргументов (доказательство можно распространить на дроби от любого числа аргументов).

Пусть $R(x, y)$ — произвольный отличный от нуля многочлен от аргументов x и y. Множество всех точек (x, y) плоскости, удовлетворяющих уравнению

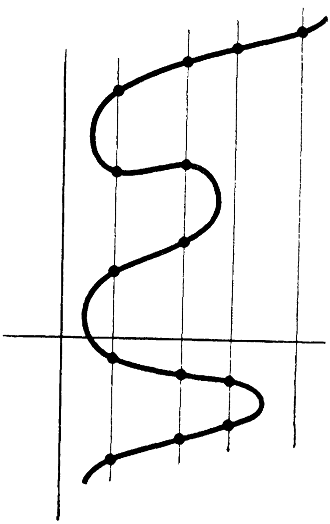
$$R(x, y) = 0,$$

называется, как известно, алгебраической линией*.

Расположим многочлен $R(x, y)$ по степеням одного из аргументов, например y:

$$R(x, y) = Q_m(x)\, y^m + Q_{m-1}(x)\, y^{m-1} + \ldots + Q_1(x)\, y + Q_0(x)$$
$$(\text{где } Q_m(x) \not\equiv 0).$$

При данном значении аргумента $x = x_0$ возможен один из двух следующих случаев:



Черт. 10

1°. *Не все коэффициенты*

$$Q_m(x),\ Q_{m-1}(x), \ldots,\ Q_1(x),\ Q_0(x)$$

обращаются в нуль. В этом случае уравнение $R(x_0, y) = 0$ имеет лишь конечное множество решений (число корней не больше чем m). Геометрически это обозначает, что параллель оси ординат $x = x_0$ может пересекать алгебраическую линию лишь в конечном числе точек. Для поля действительных чисел этот случай пояснен на чертеже 10.

2°. *Все коэффициенты* $Q_m(x_0)$, $Q_{m-1}(x_0)$, ..., $Q_0(x_0)$ *обращаются в нуль.* В этом случае $R(x_0, y)$ есть нуль-многочлен от y. Геометрически это означает, что прямая линия $x = x_0$ входит в состав алгебраической линии**.

---

* Принятое ниже изложение является геометрическим лишь по форме. Так, например, при рассмотрении многочленов над полем комплексных чисел под «точкой» (x, y) следует понимать пару комплексных чисел $x = a + bi$, $y = c + di$, а под «плоскостью» — множество всех этих «точек».

** Так, например, прямая $x = 1$ входит в состав линии второго порядка $x^2+2xy-2y-1=0$ (проверить!).

Множество таких особых значений x конечно, так как всякое особое значение является общим корнем всех коэффициентов $Q_i(x)$, а каждый нетождественный нулю коэффициент имеет конечное число корней.

Итак, *всякая параллель оси ординат $x = x_0$ имеет с алгебраической линией конечное множество точек пересечения, за исключением, быть может, конечного множества параллелей, входящих в состав линии.*

Если из плоскости удалить все точки алгебраической линии, то оставшееся множество точек плоскости не будет алгебраической линией. В самом деле, на всякой параллели оси ординат останется бесконечное множество точек, за исключением, быть может, конечного множества параллелей, которые будут полностью удалены из плоскости.

Рассмотрим совместно две алгебраические дроби от двух аргументов

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \text{и} \quad \frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}.$$

Множество допустимых систем значений аргументов есть множество всех точек плоскости, за вычетом точек, принадлежащих хотя бы одной из двух алгебраических линий $Q(x, y) = 0$, $Q_1(x, y) = 0$, т. е. точек, образующих алгебраическую линию $Q(x, y) \cdot Q_1(x, y) = 0$.

Если данные дроби тождественны, то многочлен

$$R(x, y) = P(x, y)\,Q_1(x, y) - P_1(x, y)\,Q(x, y)$$

равен нулю при всех допустимых системах значений аргументов, т. е. во всей плоскости, за исключением, быть может, точек алгебраической линии $Q \cdot Q_1 = 0$. Но при этих условиях $R(x, y)$ есть нуль-многочлен. В самом деле, если $R(x, y) \not\equiv 0$, то равенство $R(x, y) = 0$ может выполняться лишь вдоль некоторой алгебраической линии, а не во всех точках плоскости за вычетом алгебраической линии $Q \cdot Q_1 = 0$. Следовательно, $R(x, y) \equiv 0$, т. е $PQ_1 \equiv P_1 Q$, ч. т. д.

§ 34. Сокращение алгебраических дробей

Теорема. *Если числитель и знаменатель алгебраической дроби имеют общий нетривиальный делитель $K(x, y, \ldots, z)$, то, разделив числитель и знаменатель на этот делитель, получим дробь, тождественную данной:*

$$\frac{K(x, y, \ldots, z)\,P(x, y, \ldots, z)}{K(x, y, \ldots, z)\,Q(x, y, \ldots, z)} \equiv \frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}.$$

Это тождественное преобразование называется **сокращением дроби** на делитель K.

Доказательство. В самом деле, при всех допустимых системах значений аргументов, т. е. системах, определяющихся условиями $Q \neq 0$, $K \neq 0$ значения дробей равны, ч. т. д.

Другое доказательство. Дроби тождественны, ибо выполняется (см. предыдущий параграф) необходимое и достаточное условие тождественности алгебраических дробей:

$$P \cdot KQ \equiv KP \cdot Q, \qquad \text{ч. т. д.}$$

При сокращении дроби область ее определения может расшириться. В самом деле, область определения дроби $\frac{KP}{KQ}$ находится из двух условий $K \neq 0$, $Q \neq 0$; для дроби же $\frac{P}{Q}$, полученной после сокращения, условие $K \neq 0$ отпадает.

Определение. *Алгебраическая дробь* $\frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)}$ *называется несократимой, если многочлены — числитель и знаменатель не имеют ни одного общего (многочленного) делителя положительной степени.*

Два многочлена, не имеющие общих делителей, кроме числовых, называются взаимно простыми. Значит, *числитель и знаменатель несократимой дроби взаимно просты.*

Рассмотрим разложения числителя и знаменателя несократимой дроби на неприводимые множители:

$$p = p_1 p_2 \ldots p_n; \quad q = q_1 q_2 \ldots q_m.$$

Эти разложения не содержат ни одного общего (с точностью до числовых множителей) множителя. В самом деле, если $p_i \equiv q_j$, то числитель и знаменатель (вопреки предположению) имели бы общий нетривиальный делитель. Обратно, если в разложениях многочленов p и q не содержится ни одного общего неприводимого множителя, то дробь $\frac{p}{q}$ несократима. В самом деле, если бы дробь не была несократимой, то многочлены p и q имели бы общий делитель $s(x, y, \ldots, z)$:

$$p = \bar{p} \cdot s, \quad q = \bar{q} \cdot s.$$

Но тогда (вопреки предположению) неприводимые множители, на которые разлагается $s(x, y, \ldots, z)$, явились бы общими в разложениях числителя и знаменателя.

Примеры

1. Дробь $\frac{x^2+5xy+6y^2}{x^2-xy-2y^2}$ несократима, так как разложения числителя и знаменателя:

$$x^2 + 5xy + 6y^2 \equiv (x + 2y)(x + 3y)$$

и

$$x^2 - xy - 2y^2 \equiv (x - 2y)(x + y)$$

не содержат общих неприводимых множителей.

2. Дробь $\dfrac{x^3+y^3}{x^4-y^4}$ сократима, так как числитель и знаменатель имеют общий нетривиальный делитель $x+y$.

Тождественность алгебраических дробей обладает характеристическими свойствами соотношения эквивалентности.

I. *Обратимость:*

$$\text{если} \quad \frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1}, \quad \text{то} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P}{Q}.$$

II. *Рефлексивность:*

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P}{Q}.$$

III. *Транзитивность:*

$$\text{если} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2} \quad \text{и} \quad \frac{P_2}{Q_2} \equiv \frac{P_3}{Q_3}, \quad \text{то} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_3}{Q_3}.$$

Доказательство. Справедливость свойств I и II очевидна; докажем выполнение свойств III. В самом деле, в силу необходимого и достаточного условия тождественности дробей имеем

$$P_1Q_2 \equiv P_2Q_1 \quad \text{и} \quad P_2Q_3 \equiv P_3Q_2,$$

перемножив эти тождества, получим:

$$(P_1Q_2)(P_2Q_3) \equiv (P_2Q_1)(P_3Q_2), \quad \text{или} \quad P_1Q_3 \cdot P_2Q_2 \equiv P_3Q_1 \cdot P_2Q_2.$$

Откуда, разделив обе части на P_2Q_2, получим:

$$P_1Q_3 \equiv P_3Q_1, \quad \text{или} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_3}{Q_3},$$

ч. т. д

Определение. *Каноническим представлением алгебраической дроби* $\dfrac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}$ *называется всякая тождественная ей несократимая алгебраическая дробь.*

Пример

Каноническим представлением дроби

$$\frac{x^2+2\sqrt{2}\,xy+2y^2}{2x^2-y^2} \equiv \frac{(x+\sqrt{2}\,y)^2}{(\sqrt{2}x+y)(\sqrt{2}\,x-y)}$$

служит несократимая дробь $\dfrac{x+\sqrt{2}\,y}{\sqrt{2}\,x-y}$. Умножив числитель и знаменатель на произвольный отличный от нуля числовой множитель, например, на $\sqrt{2}$, получим дробь $\dfrac{\sqrt{2}x+2y}{2x-\sqrt{2}y}$, являющуюся также каноническим представлением данной дроби.

Теорема. *Для всякой алгебраической дроби* $\dfrac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}$:

1° *существует каноническое представление в виде несократи-*

мой дроби $\dfrac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)}$:

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} \equiv \frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)};$$

2° это каноническое представление единственно с точностью до общих (отличных от нуля) числовых множителей (из данного поля) числителя и знаменателя.

Доказательство. 1° Разложим многочлены $P(x, y, \ldots, z)$ и $Q(x, y, \ldots, z)$ на неприводимые множители (это разложение единственно). Обозначив через $K(x, y, \ldots, z)$ произведение всех общих множителей многочленов P и Q, имеем:

$$P(x, y, \ldots, z) = p_1 p_2 \ldots p_l K,$$
$$Q(x, y, \ldots, z) = q_1 q_2 \ldots q_m K$$

(если сама данная дробь $\dfrac{P}{Q}$ несократима, то считаем $K \equiv 1$). Положим:

$$p(x, y, \ldots, z) = p_1 p_2 \ldots p_l, \quad q(x, y, \ldots, z) = q_1 q_2 \ldots q_m,$$

где p_i и q_k неразложимые многочлены; в частности, многочлен $p(x, y, \ldots, z)$ или $q(x, y, \ldots, z)$ может оказаться числом (так будет, если один из многочленов P и Q делится на другой). Дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима и

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{p}{q}.$$

2°. Допустим, что существует другая несократимая дробь $\dfrac{\bar{p}}{\bar{q}}$, тождественная дроби $\dfrac{P}{Q}$; тогда имеем

$$\frac{p}{q} \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{q}}.$$

Разложим многочлены $\bar{p}$ и $\bar{q}$ на неприводимые множители

$$\bar{p} = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_r \quad \text{и} \quad \bar{q} = \bar{q}_1 \bar{q}_2 \ldots \bar{q}_n.$$

В силу тождества (1) имеем

$$\underbrace{(p_1 p_2 \ldots p_l)}_{p} \underbrace{(\bar{q}_1 \bar{q}_2 \ldots \bar{q}_n)}_{\bar{q}} \equiv \underbrace{(\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_r)}_{\bar{p}} \underbrace{(q_1 q_2 \ldots q_m)}_{q}.$$

В силу единственности разложения многочлена на множители левая и правая части этого тождества содержат одни и те же (с точностью до числовых множителей) неприводимые многочлены-сомножители. Группы p и q не имеют ни одного общего сомножителя, поэтому все множители группы p содержатся среди группы множителей p (различие в числовых множителях не принимается во внимание). Аналогично докажем, что все множители группы $\bar{p}$ содержатся среди сомножителей p. Следовательно, многочлены p и $\bar{p}$ могут отличаться лишь числовым множителем $p = C\bar{p}$ (где $C \neq 0$), но тогда и $q = C\bar{q}$, ч. т. д.

При рассмотрении несократимой алгебраической дроби над полем рациональных чисел коэффициенты числителя и знаменателя обычно умножают на наименьшее общее кратное знаменателей этих коэффициентов (разумеется, если среди коэффициентов содержатся дробные числа). В соответствии с этим каноническим представлением дроби с рациональными коэффициентами считается тождественная ей несократимая дробь с целыми взаимно простыми коэффициентами.

Пример

Каноническим представлением дроби $\dfrac{\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}xy + y^2}{\frac{1}{6}x^2 - xy + \frac{4}{3}y^2}$ служит дробь $\dfrac{x - 3y}{x - 4y}$ с целыми взаимно простыми коэффициентами.

Для приведения алгебраической дроби к каноническому виду достаточно разделить числитель и знаменатель на многочлен, служащий их наибольшим общим делителем. На практике, обычно, разложив числитель и знаменатель на неприводимые множители, сокращают дробь на общие множители числителя и знаменателя.

Теорема. *Две тождественные алгебраические дроби имеют одно и то же (с точностью до числовых множителей числителя и знаменателя) каноническое представление.*

Доказательство. Пусть $\dfrac{p_1}{q_1}$ и $\dfrac{p_2}{q_2}$ суть канонические представления двух тождественных дробей

$$\frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{p_1}{q_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} \equiv \frac{p_2}{q_2} \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2},$$

тогда $\dfrac{p_1}{q_1} \equiv \dfrac{p_2}{q_2}$ (по свойству транзитивности), но, если две несократимые дроби $\dfrac{p_1}{q_1}$ и $\dfrac{p_2}{q_2}$ тождественны, то их числители и знаменатели могут отличаться лишь общим числовым множителем (см. стр. 98 пункт 2° доказательства).

Следствие. *Все тождественные между собой алгебраиче-*

ские дроби имеют единственное (с точностью до общих числовых множителей числителя и знаменателя) каноническое представление.

§ 35. Рациональные функции

Соотношение тождественности (обладающее свойствами симметрии, рефлексивности и транзитивности) позволяет разбить множество всех алгебраических дробей от данных аргументов (над данным числовым полем) на классы тождественных дробей. При этом разбиении все тождественные между собой дроби относятся к одному классу, дроби же, содержащиеся в различных классах, не тождественны. Каждый класс тождественных дробей содержит единственную (с точностью до числовых множителей числителя и знаменателя) несократимую дробь. Различные тождественные между собой дроби (рассматриваемые по отдельности) могут иметь различные области определения. Среди дробей данного класса наиболее широкую область определения имеет несократимая дробь. так как при переходе от дроби $\frac{P}{Q}=\frac{kp}{kq}$ к несократимой дроби $\frac{p}{q}$ область определения первой дроби может лишь расшириться (стр. 96).

Примем следующее дополнительное определение.

Определение (принцип продолжения). *Если алгебраическая дробь* $\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)}$ *теряет смысл в точке* $(x_0, y_0,\ldots, z_0)$*, но тождественная ей несократимая дробь* $\frac{p(x,y,\ldots,z)}{q(x,y,\ldots,z)}$ *не теряет смысла в данной точке:* $q(x_0, y_0,\ldots, z_0)\neq 0$*, то значение дроби* $\frac{P}{Q}$ *при* $x=x_0$, $y=y_0$, ..., $z=z_0$ *считается равным значению тождественной несократимой дроби в точке* $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$*:*

$$\frac{P(x_0, y_0,\ldots, z_0)}{Q(x_0, y_0,\ldots, z_0)}=\frac{p(x_0, y_0,\ldots, z_0)}{q(x_0, y_0,\ldots, z_0)}.$$

В силу принципа продолжения для всех тождественных между собой алгебраических дробей устанавливается одна и та же область определения, это есть область определения несократимой дроби тождественной данным дробям.

Принцип продолжения позволяет беспрепятственно сокращать числитель и знаменатель дроби на общие многочленные множители.

Рассмотрим, например, дробь от одного аргумента: $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, если $Q(x_0)=0$, то знаменатель делится на $(x-x_0)^k$ (где k — кратность корня x_0). Предположим, что числитель делится на $(x-x_0)^l$ ($l=0$, если P не делится на $x-x_0$); сократив числитель и знаменатель на общие множители, получим

$$R(x) \equiv \begin{cases} (x-x_0)^{l-k}\dfrac{p(x)}{q(x)}, & \text{если } l \geqslant k, \\ \dfrac{p(x)}{(x-x_0)^{k-l}q(x)}, & \text{если } l < k, \end{cases}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ взаимно простые многочлены, не обращающиеся в нуль в точке x_0. Имеем $R(x_0)=\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$, если $l=k$ и $R(x_0)=0$, если $l>k$; если же $k>l$, со $R(x_0)$ не имеет смысла.

Определение. *Всякая функция $f(x, y, \ldots, z)$, определяемая алгебраической дробью $\dfrac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}$, называется рациональной функцией.*

В силу принципа продолжения все тождественные между собой дроби определяют одну и ту же функцию, которую обычно изображают при помощи соответствующей несократимой дроби.

Примеры

1. Дробь $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ тождественна многочлену $x^n+ax^{n-1}+\ldots+a^n$.

Областью ее определения служит множество всех чисел поля, над которым эта дробь рассматривается. Например, значение дроби $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ в точке $x=2$ равно значению трехчлена x^2+2x+4 при $x=2$, т. е. числу 12.

2. Дробь $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ тождественна несократимой дроби $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$. Областью определения обеих дробей является множество всех чисел (данного поля), удовлетворяющих условию $x \neq -y$. В частности, при $x=2$, $y=2$ обе дроби имеют значение, равное числу 3. При $x=2$, $y=-2$ обе дроби теряют смысл.

3. Имеем:

$$\frac{x^4-y^4}{x^4+x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

Данная дробь, рассматриваемая над полем действительных чисел, имеет смысл при всех значениях x и y, кроме $x=y=0$. Над полем комплексных чисел данная дробь имеет смысл при всех x и y, кроме $x=\varepsilon y$ и $x=\varepsilon^2 y$, где ε и ε^2 мнимые кубические корни из 1.

Установленный выше «алгебраический принцип» продолжения и принцип продолжения по непрерывности (см. § 6) находятся в следующем взаимоотношении. В случаях, когда применим алгебраический принцип, к тому же результату приводит и принцип продолжения по непрерывности.

В самом деле, пусть

$$P(x, y, \ldots, z) = K(x, y, \ldots, z)\,p(x, y, \ldots, z),$$
$$Q(x, y, \ldots, z) = K(x, y, \ldots, z)\,q(x, y, \ldots, z),$$

дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима и $q(x_0, y_0, \ldots, z_0) \neq 0$.

Применим принцип продолжения по непрерывности: равенство

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} = \frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)}$$

имеет место во всех точках $(x, y, \ldots, z)$ окрестности точки $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, в которых $Q(x, y, \ldots, z) \neq 0$.

Переходя к пределу в точке $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, получим:

$$\lim \frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} = \lim \frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)} = \frac{p(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{q(x_0, y_0, \ldots, z_0)}.$$

Согласно обоим принципам продолжения следует считать:

$$\frac{P(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{Q(x_0, y_0, \ldots, z_0)} = \frac{p(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{q(x_0, y_0, \ldots, z_0)}.$$

§ 36. Поле рациональных функций

Рассмотрим совместно две алгебраические дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$, составим две новые алгебраические дроби

$$\frac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1} \quad \text{и} \quad \frac{PP_1}{QQ_1}, \tag{1}$$

значения которых (соответственно) равны сумме и произведению значений данных дробей при произвольных допустимых (для них) системах аргументов ($Q \neq 0$, $Q_1 \neq 0$). Дроби (1) называются суммой и произведением данных дробей (соответственно).

Теорема. *Если дроби-компоненты $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ заменить тождественными дробями, то дроби-сумма и произведение также заменятся тождественными им дробями:*

$$\text{если} \quad \frac{P}{Q} \equiv \frac{P'}{Q'} \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P'_1}{Q'_1},$$

$$\text{то} \quad \frac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1} \equiv \frac{P'Q'_1 + P'_1Q'}{Q'Q'_1} \quad \text{и} \quad \frac{PP_1}{QQ_1} \equiv \frac{P'P'_1}{Q'Q'_1}.$$

Доказательство. Так как значения совместно рассматриваемых дробей-сумм (произведений) при всех допустимых для них системах значений аргументов ($Q \neq 0$, $Q' \neq 0$, $Q_1 \neq 0$, $Q_1' \neq 0$) равны между собой, будучи равными сумме (произведению) значений дробей компонентов:

$$\frac{PQ_1+P_1Q}{QQ_1} = \frac{P'Q'_1 + P'_1Q'}{Q'Q'_1} = \frac{P}{Q} + \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P'}{Q'} + \frac{P'_1}{Q'_1},$$

то обе рассматриваемые дроби-суммы (произведения) тождественны, ч. т. д.

Следствие. *Каковы бы ни были две алгебраические дроби, взятые из двух данных классов тождественных между собой* *дробей, каноническое представление их суммы (произведения) одно и то же (с точностью до общих числовых множителей числителя и знаменателя) независимо от выбора дробей и, таким образом, определяется заданием лишь самих классов.*

Дробь-сумма (произведение) двух данных дробей определяет некоторую рациональную функцию; эта функция есть сумма (произведение) рациональных функций, определяемых дробями-слагаемыми (сомножителями).

Сложение и умножение алгебраических дробей подчиняются основным законам арифметических действий:

$$1)\ \frac{P}{Q}+\frac{M}{N}\equiv\frac{M}{N}+\frac{P}{Q};\quad 2)\ \frac{P}{Q}+\left(\frac{M}{N}+\frac{R}{S}\right)\equiv\left(\frac{P}{Q}+\frac{M}{N}\right)+\frac{R}{S};$$

$$3)\ \frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}\equiv\frac{M}{N}\cdot\frac{P}{Q};\quad 4)\ \frac{P}{Q}\cdot\left(\frac{M}{N}\cdot\frac{R}{S}\right)\equiv\left(\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{R}{S};$$

$$5)\ \frac{P}{Q}\left(\frac{M}{N}+\frac{R}{S}\right)\equiv\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}+\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}.$$

В самом деле, значения правой и левой частей каждого из этих тождеств одинаковы при всех допустимых значениях аргументов (в силу законов действий над числами). В справедливости этих тождеств можно убедиться и непосредственной проверкой на основании определений действий.

Для дроби $\frac{P}{Q}$ существует ей противоположная, т. е. дробь $\frac{X}{Y}$ удовлетворяющая условию $\frac{P}{Q}+\frac{X}{Y}\equiv 0$.

В самом деле, по условию должно быть:

$$\frac{P}{Q}+\frac{X}{Y}\equiv\frac{PY+QX}{QY}\equiv 0,\quad \text{откуда}\quad PY+QX\equiv 0,$$

этому последнему условию удовлетворяет всякая дробь $\frac{X}{Y}$, тождественная дроби $\frac{-P}{Q}$. Никаких других дробей, удовлетворяющих данному условию, не существует, так как все искомые дроби при всех допустимых значениях аргументов должны иметь равные значения, эти значения противоположны значениям дроби $\frac{P}{Q}$.

Аналогично докажем, что если $P\neq 0$, то для данной дроби $\frac{P}{Q}$ существует обратная дробь $\frac{Q}{P}$:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{Q}{P}\equiv 1.$$

Этому условию удовлетворяют все дроби, тождественные $\frac{Q}{P}$.

Из изложенного следует, что в множестве всех рациональных функций выполнимо действие вычитания, а также действие деления (кроме деления на функцию, тождественно равную нулю). Дроби, изображающие результаты этих обратных действий, получаются по обычным правилам вычитания и деления дробей.

Так (по определению вычитания), разность двух дробей $\frac{P}{Q}$ и $\frac{M}{N}$ есть дробь $\frac{X}{Y}$, удовлетворяющая условию $\frac{M}{N}+\frac{X}{Y}=\frac{P}{Q}$. Но этому условию удовлетворяет дробь (а также всякая тождественная ей дробь):

$$\frac{X}{Y}\equiv\frac{P}{Q}+\left(-\frac{M}{N}\right)\equiv\frac{P}{Q}+\frac{-M}{N}\equiv\frac{PN-QM}{QN},$$

так как

$$\frac{M}{N}+\frac{X}{Y}=\frac{M}{N}+\left[\frac{P}{Q}+\left(-\frac{M}{N}\right)\right]\equiv\frac{P}{Q}.$$

Выполнимость действия деления можно доказать аналогично:

$$\frac{P}{Q}:\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{N}{M}=\frac{PN}{QM},\quad \text{так как}\quad \frac{M}{N}\left(\frac{PN}{QM}\right)\equiv\frac{P}{Q}.$$

Теорема. *Множество всех рациональных функций образует поле.*

Доказательство. В самом деле, как доказано выше, в результате выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на функцию, тождественно равную нулю) над рациональными функциями получаются функции, изобразимые алгебраическими дробями, т. е. также рациональные функции, ч. т. д. *.

При выполнении действий над рациональными функциями выполняют соответствующие действия над изображающими их алгебраическими дробями и получают дробь, изображающую результат действия над рациональными функциями.

Из изложенного следует, что *для алгебраических дробей остаются в силе те же правила, которые имеют место для арифметических дробей, изображающих рациональные числа.* В частности, при сложении дробей поступают следующим образом:

---

* Нередко эту теорему формулируют ошибочно, говоря, что алгебраические дроби образуют поле. Поле образуют не сами дроби, а классы тождественных между собой дробей.

Эта ошибка аналогична довольно грубой ошибке, допускаемой в некоторых руководствах по теоретической арифметике, где, например, рациональные числа определяются как пары, а не как классы равных пар второй ступени. См., например, книгу И. В. Арнольда, Теоретическая арифметика (Учпедгиз, 1939, стр. 128), где сказано: «Рациональными числами называются пары (a, b) целых чисел a и b...». В более поздней литературе по теоретической арифметике (например, И. В. Проскуряков, Числа и многочлены. Изд. АПН), эта грубая ошибка не повторяется.

разлагают знаменатели дробей-компонентов на неприводимые множители, составляют наименьшее общее кратное многочленов-знаменателей, для чего составляется произведение многочленных множителей, содержащихся в разложении хотя бы одного из многочленов-знаменателей, при этом каждый множитель берется в наибольшей степени, с которой он входит в разложения; далее дроби-слагаемые приводятся к общему знаменателю путем умножения числителя и знаменателя каждой дроби на множитель, дополняющий знаменатель этой дроби до наименьшего общего кратного знаменателей, при этом дроби-компоненты заменяются (соответственно) тождественными дробями; далее составляют дробь-сумму с числителем, равным сумме числителей и со знаменателем, равным общему знаменателю дробей-слагаемых. В самом деле, при сложении дробей с общим знаменателем общее правило сложения упрощается:

$$\frac{P}{Q}+\frac{M}{Q}\equiv\frac{PQ+MQ}{Q^2}\equiv\frac{P+M}{Q}.$$

Пример

Найти сумму дробей:

$$S=\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{xy}{x^3-y^3}+\frac{x^2y}{x^4-y^4}.$$

Приводим дроби-слагаемые к общему знаменателю.

Разлагаем на множители знаменатели:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y),$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$
$$x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

Находим наименьшее общее кратное знаменателей

$$Q=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)=x^6+x^5y+x^4y^2-x^2y^4-xy^5-y^6$$

Умножив числитель и знаменатель каждой из дробей на соответствующий дополнительный множитель, получим

$$\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{x(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)}=$$
$$=\frac{x^5+x^4y+2x^3y^2+x^2y^3+xy^4}{Q};$$

$$\frac{xy}{x^3-y^3}=\frac{xy(x+y)(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)}=$$
$$=\frac{x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4}{Q};$$

$$\frac{x^2y}{x^4-y^4}=\frac{x^2y(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)}=$$
$$=\frac{x^4y+x^3y^2+x^2y^3}{Q}$$

Складываем числители дробей, получившихся после приведения данных дробей к общему знаменателю,

$$\begin{array}{r}
x^5 + x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\
x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\
x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 \\
\hline
x^5 + 3x^4y + 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4
\end{array}$$

Следовательно,

$$S = \frac{x^5 + 3x^4y + 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4}{x^6 + x^5y + x^4y^2 - x^2y^4 - xy^5 - y^6}.$$

§ 37. Тождественные преобразования рациональных выражений

Всякое рациональное выражение (от данных аргументов) составляется из аргументов и из чисел некоторого поля посредством четырех арифметических действий; в результате последовательного выполнения (в надлежащем порядке) указанных действий над многочленами и алгебраическими дробями данное рациональное выражение можно представить в виде некоторой алгебраической дроби. В самом деле, в результате сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических дробей (в частности многочленов) мы снова получим алгебраическую дробь, а потому последовательное применение этих операций в любом количестве и в любых комбинациях позволяет всякое сложное рациональное выражение представить в виде отношения двух многочленов и окончательно в виде некоторой несократимой дроби. Исключение может представиться, если в процессе преобразований обнаружится, что данное выражение не имеет смысла ни при каких значениях аргументов, но тогда его нельзя рассматривать как рациональное выражение (так будет, если хотя бы в одном из знаменателей получится нуль-многочлен).

При всех системах значений аргументов, допустимых для данного и для преобразованного выражений, их значения одинаковы. В процессе выполнения тождественных преобразований алгебраические дроби можно заменять тождественными и, в частности, производить сокращение дробей, так как замена дробей-компонентов тождественными дробями приводит к тождественным результатам. Следовательно, несократимые дроби, которые могут получиться в качестве окончательного результата преобразования (различными способами) данного выражения, тождественны между собой.

Определение. *Представление рационального выражения в виде тождественной ему несократимой дроби называется каноническим представлением данного выражения.*

В каноническом представлении рационального выражения

$$R(x, y, \ldots, z) = \frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)}$$

многочлены $p(x, y, \ldots, z)$ и $q(x, y, \ldots, z)$ определяются единственным образом с точностью до общих числовых множителей.

Принцип (алгебраический) продолжения принято применять к произвольным рациональным выражениям, а именно, если при подстановке $x=x_0$, $y=y_0, \ldots, z=z_0$ рациональное выражение $R(x, y, \ldots, z)$ теряет смысл, а его каноническое представление

$$R(x, y, \ldots, z)=\frac{p(x, y, \ldots, z)}{q(x, y, \ldots, z)}$$

в точке $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ смысла не теряет, то принято считать:

$$R(x_0, y_0, \ldots, z_0)=\frac{p(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{q(x_0, y_0, \ldots, z_0)}.$$

Всякое рациональное выражение определяет единственную рациональную функцию, изображающуюся его каноническим представлением. Обычно в элементарной алгебре приведение к каноническому виду называется упрощением рационального выражения.

§ 38. Примеры тождественных преобразований рациональных выражений

Тождественные преобразования рациональных выражений как по своей цели, так и по методам выполнения могут быть весьма разнообразными. Различные частные свойства преобразуемых выражений позволяют рационализировать вычисления. Эти упрощающие моменты никакой общей теорией предусмотрены быть не могут. Навыки в рациональном выполнении преобразований достигаются практикой.

Примеры

На примерах 1—4 показано непосредственное выполнение действия над алгебраическими дробями.

1. Упростить выражения

$$\Phi(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+1\right).$$

Решение. Выполняем действия:

$$\Phi(x)=\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x-2-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-x}.$$

При $x=2$ следует считать значение $\Phi(x)$ равным $-\frac{1}{2}$. **При $x=0$ и $x=1$** выражение $\Phi(x)$ не имеет смысла.

2. Упростить

$$S=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

Решение. Сложим сперва второе и третье слагаемые:

$$\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=$$

$$=\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{p^2+q^2}{p^2q^2}+\frac{2}{pq}\right)=\frac{3}{(p+q)^2p^2q^2}.$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^2p^2q^2}=$$

$$=\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)^2p^3q^3}+\frac{3}{(p+q)^2p^2q^2}=\frac{1}{p^3q^3}.$$

3. Упростить выражение

$$S=\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$$

Решение. Выполняем действия в следующем порядке:

a) $$\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3yz}{y+z}=$$

$$=\frac{(y^2-yz+z^2)(y+z)+x^3-3xyz}{x(y+z)}=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)},$$

b) $$\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}=\frac{2x(y+z)}{x+y+z},$$

c) $$S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)}\cdot\frac{2x(y+z)}{x+y+z}+(x+y+z)^2=$$

$$=2\,\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}+(x+y+z)^2.$$

Воспользовавшись тождеством, выведенным в примере 18 (стр. 84) параграфа 29, получим:

$$S=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2).$$

Следовательно, выражение S тождественно многочлену $3(x^2+y^2+z^2)$.

4. Упростить выражение

$$S=\frac{1}{x(x-y)(x-z)(x-t)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)(y-t)}+$$
$$+\frac{1}{z(z-x)(z-y)(z-t)}+\frac{1}{t(t-x)(t-y)(t-z)}$$

Решение. Общим кратным знаменателей данных дробей является многочлен

$$Q=xyzt(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

После приведения дробей к общему знаменателю получим следующий числитель:

$$P(x,y,z,t)=yzt(y-z)(y-t)(z-t)-xzt(x-z)(x-t)(z-t)+$$
$$+xyt(x-y)(x-t)(y-t)-xyz(x-y)(x-z)(y-z).$$

Заметим, что при $x=y$ числитель обращается тождественно в нуль относительно прочих аргументов:

$$P(x,x,z,t)\equiv 0.$$

Следовательно, числитель делится на разность $x-y$. Аналогично убедимся, что числитель делится на все прочие двучленные множители знаменателя. Следовательно, $P(x, y, z, t)$ делится на произведение всех двучленных множителей знаменателя. Частное есть многочлен нулевой степени, т. е. число. Итак, имеем:

$$P(x,y,z,t)=K(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

Для вычисления K положим $x=0,\ y=1,\ z=-1,\ t=2$. Получим

$$P(0,1,-1,2)=K(-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-3)\quad\text{или}\quad -12=K\cdot 12.$$

Откуда $K=-1$ и, следовательно, $S=-\dfrac{1}{xyzt}$.

На примерах 5 и 6 показан часто встречающийся прием разбиения дроби на сумму двух дробей более простого вида.

5. Доказать тождество

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}\equiv$$
$$\equiv\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

Решение. Замечаем, что дроби-слагаемые в левой части получаются друг из друга круговой перестановкой букв. Преобразуем первое слагаемое, разбив его на две дроби:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}.$$

Выполнив круговую перестановку букв, получим:

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a},$$
$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}.$$

Доказываемое тождество устанавливается почленным сложением полученных тождеств.

6. Вычислить сумму

$$S=\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\frac{x_3}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}+\ldots+$$
$$+\frac{x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Решение. Замечаем, что

$$\frac{x_k}{(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1})(x_1+x_2+\ldots+x_k)}=$$
$$=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_k)-(x_1+x_2-\ldots+x_{k-1})}{(x_1+x_2+\ldots+x_k)(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1})}=$$
$$=\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}}-\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_k}.$$

Положив $k=2, 3, \ldots, n$ и просуммировав, получим:

$$S=\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_1+x_2+x_3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}-\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\right)=$$
$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{x_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

В примерах 7, 8 и 9 показано установление равенств, справедливых при некоторых условиях.

7. Вычислить значение рационального выражения

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}} \quad \text{при условии} \quad x^2+x+1=0.$$

Решение. Заметим, что из условия

$$x^2+x+1=0 \quad \text{следует} \quad x+\frac{1}{x}=-1 \quad \text{и} \quad x^3=-x^2-x=1.$$

Имеем:

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=x^{12}\cdot x^2+\frac{1}{x^{12}\cdot x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1.$$

8. Доказать, что из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \tag{1}$$

вытекают следующие равенства:

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=$$
$$=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}$$

Решение. Из условия (1) имеем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0.$$

После приведения дробей к общему знаменателю и сложения получим, приравняв нулю числитель:

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=0.$$

Имеем:

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=[c(a+b)+ab][(a+b)+c]-abc=$$
$$=c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)=$$
$$=(a+b)[c(a+b)+ab+c^2]=(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

Следовательно, должно иметь место хотя бы одно из равенств $a=-b$, $a=-c$, $b=-c$. При этом условии подлежащие доказательству равенства устанавливаются непосредственной проверкой.

9. Доказать, что

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0 \qquad (1)$$

при условии

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0. \qquad (2)$$

Решение. Докажем следующее тождество:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$
$$=\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right). \qquad (3)$$

В самом деле, разность между правой и левой частями (3) равна

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right]+\frac{1}{c-a}\left[\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}\right]+$$
$$+\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right]. \qquad (4)$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right]=\frac{ab-b^2+c^2-ac}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Прочие слагаемые получаются из первого последовательной круговой перестановкой букв. При круговой перестановке знаменатель дроби не меняется, а для числителей второго и третьего слагаемых получаются следующие выражения:

$$bc-c^2+a^2-ab \text{ и } ca-a^2+b^2-cb.$$

Сумма этих трех числителей, а следовательно, и сумма (4) тождественно, равны нулю. Отсюда следует тождество (3). Если выполнено условие (2), то имеет место равенство (1).

На примерах 10, 11 и 12 показаны искусственные преобразования, рассчитанные на использование «специфических» свойств рассматриваемых выражений.

10. Представить в виде дроби с двучленными числителем и знаменателем следующее произведение:

$$S = (x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\ \ldots\ (x^{2^n}+y^{2^n}).$$

Решение. Умножим S на $x-y$:

$$(x-y)S = [(x-y)(x+y)](x^2+y^2)\ \ldots\ (x^{2^n}+y^{2^n}) =$$

$$= [(x^2-y^2)(x^2+y^2)](x^4+y^4)\ \ldots\ (x^{2^n}+y^{2^n}) = \ \ldots = x^{2^{n+1}} - y^{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{x^{2^{n+1}} - y^{2^{n+1}}}{x-y}.$$

11. Вычислить сумму

$$S = \frac{2x-a}{x^2-ax+a^2} + \frac{4x^3-2a^2x}{x^4-a^2x^2+a^4} + \ldots + \frac{2^n x^{2^n-1} - 2^{n-1} x^{2^{n-1}-1} a^{2^{n-1}}}{x^{2^n} - a^{2^{n-1}} x^{2^{n-1}} + a^{2^n}}.$$

Решение. Составим тождества:

$$\frac{2x+a}{x^2+ax+a^2} + \frac{2x-a}{x^2-ax+a^2} = \frac{2x(2x^2+a^2)}{x^4+a^2x^2+a^4};$$

$$\frac{2x(2x^2+a^2)}{x^4+a^2x^2+a^4} + \frac{2x(2x^2-a^2)}{x^4-a^2x^2+a^4} = \frac{4x^3(2x^4+a^4)}{x^8+a^4x^4+a^8};$$

. . . .

$$\frac{2^{n-1} x^{2^{n-1}-1}(2x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}} + \frac{2^{n-1} x^{2^{n-1}-1}(2x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}})}{x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}} =$$

$$= \frac{2^n x^{2^n-1}(2x^{2^n}+a^{2^n})}{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}.$$

После почленного сложения, сократив одинаковые дроби в обеих частях, получим:

$$S = \frac{2^n x^{2^n-1}(2x^{2^n}+a^{2^n})}{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}} - \frac{2x+a}{x^2+ax+a^2}.$$

12. Доказать тождество:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Решение. Допустимыми системами значений аргументов являются системы чисел x, a, b, c, взятые при условиях $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$. При произвольной допустимой системе значений a, b и c левая часть его многочлен не выше второй степени относительно x. Левая часть, будучи многочленом не выше второй степени, при трех различных значениях $x = a$, $x = b$ и $x = c$ имеет значение, равное 1. Следовательно, при произвольной допустимой системе значений аргументов x, a, b и c левая часть равна 1.

В примере 13 показано применение метода математической индукции.

13. Доказать тождество

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1+1}{a_1a_2} + \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1a_2a_3} + \ldots + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}{a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}} =$$

$$= \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}}.$$

Доказательство методом математической индукции. Предположим, что доказываемое тождество верно для некоторого n, докажем, что в этом предположении оно верно для $n+1$. Положим

$$S_n = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1+1}{a_1a_2} + \ldots + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}.$$

По предположению

$$S_n = \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n + \quad a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}.$$

Но тогда

$$S_{n+1} = S_n + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}\ a_{n+2}} =$$

$$= \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}} + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}a_{n+2}} =$$

$$= \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1)(a_{n+2}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}\ a_{n+2}}.$$

Итак, формула верна для S_{n+1} в предположении, что она верна для S_n. Но при $n=1$ формула верна:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1+1}{a_1a_2} = \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1a_2}.$$

Следовательно, она верна при произвольном натуральном n.

ГЛАВА III

РАДИКАЛЫ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 39. Радикалы над полем действительных чисел

Действие извлечения корня однозначно выполнимо в множестве всех неотрицательных действительных чисел.

Теорема. *Каково бы ни было неотрицательное действительное число* A, *существует единственное неотрицательное действительное число* x, n*-я степень которого равна* A.

Доказательство. Рассмотрим последовательность n-х степеней целых неотрицательных чисел:

$$0,\ 1^n,\ 2^n, \ldots, k^n, \ldots \qquad \{k^n\}$$

Пусть $N > 0$ — любое заданное (как угодно большое) число. Докажем, что при всех достаточно больших значениях k имеет место неравенство $k^n > N$.

В самом деле, пусть k любое натуральное число, большее 1 и большее N:

$$1 < k \text{ и } N < k.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим $N < k^2$. Перемножив почленно последнее неравенство и $1 < k$, получим $N < k^3$ и т. д. и, наконец, $N < k^n$.

В частности, в последовательности $\{k^n\}$ существуют числа большие A. Обозначим через $p + 1$ наименьшее из этих чисел:

$$p^n \leqslant A < (p+1)^n.$$

Разделим сегмент $[p, p+1]$ на десять равных частей точками: $p,\ p+\frac{1}{10},\ p+\frac{2}{10}, \ldots, p+1$. Пусть $p+\frac{q_1+1}{10}$ наименьшее из этих чисел, n-я степень которого больше A; имеем:

$$\left(p+\frac{q_1}{10}\right)^n \leqslant A < \left(p+\frac{q_1+1}{10}\right)^n.$$

Далее делим вновь полученный сегмент на 10 равных частей и так далее неограниченно. В результате получится действительное число x, определяемое десятичной дробью

$$x = p, q_1 q_2 \dots q_m \dots$$

Его приближенные значения по недостатку и по избытку:

$$x_m^- = p, q_1 q_2 \dots q_m \quad \text{и} \quad x_m^+ = p, q_1 q_2 \dots (q_m + 1)$$

обладают следующим свойством:

$$(x_m^-)^n \leqslant A < (x_m^+)^n. \qquad (1)$$

По правилу умножения действительных чисел, x^n есть единственное действительное число, удовлетворяющее неравенствам:

$$(x_m^-)^n \leqslant x^n \leqslant (x_m^+)^n, \qquad (2)$$

при всех значениях m.

Сопоставив (1) и (2), получим $x^n = A$. Никакого другого неотрицательного числа y, n-я степень которого равна A, не существует. В самом деле, если $y < x$, то $y^n < x^n$ (монотонность умножения), т. е. $y^n < A$, если же $y > x$, то $y^n > A$, ч. т. д.

Определение. *Неотрицательное число* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{n}$*-я степень которого равна* $\boldsymbol{A}$,

$$x^n = A, \text{ где } A \geqslant 0,$$

называется арифметическим корнем степени $\boldsymbol{n}$ *из числа* $\boldsymbol{A}$. Это число обозначается так:

$$x = \sqrt[n]{A}.$$

Натуральное число n называется показателем корня.

Следствие. Если $a \geqslant 0$, то согласно определению корня

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Выражение $\sqrt[n]{A}$, обозначающее результат извлечения корня, называется также радикалом*.

Действие извлечения корня n-ой степени из числа a можно толковать как разбиение числа a на n равных между собой сомножителей:

$$a = \overbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}^{n \text{ раз}}.$$

---

* Тем же термином «радикал», по сложившейся традиции, называется и сам символ $\sqrt[n]{}$.

Теорема. *Соотношение*

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}, \text{ либо } \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}, \text{ либо } \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$$

(где $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$) *имеет место в том и только в том случае, если числа x и y связаны тем же соотношением, т. е. (соответственно):*

$$x < y, \quad \text{либо } x > y, \quad \text{либо } x = y.$$

Доказательство. Пусть, например, $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$, тогда (воспользовавшись законом монотонности умножения), умножив почленно это неравенство само на себя n раз, получим

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n < \left(\sqrt[n]{y}\right)^n, \text{ т. е. } x < y.$$

Аналогично:

$$\text{если } \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}, \text{ то } x > y$$

$$\text{и если } \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}, \text{ то } x = y.$$

Следовательно, числа x и y связаны тем же соотношением, что и числа $\sqrt[n]{x}$ и $\sqrt[n]{y}$.

Полученное условие является и достаточным. В самом деле, пусть, например, $x < y$, тогда, допустив что $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[n]{y}$, мы получили бы следствие $x \geqslant y$, противоречащее условию. Следовательно, числа $\sqrt[n]{x}$ и $\sqrt[n]{y}$ связаны тем же соотношением, что и числа x и y, ч. т. д.

Эта теорема позволяет устанавливать свойства действия извлечения корня путем проверки.

Ниже изложены теоремы, на основании которых выполняются тождественные преобразования арифметических корней. В учебной литературе эти теоремы называют *правилами действий над радикалами.*

I. *Правило извлечения корня из произведения:* *корень из произведения равен произведению корней той же степени из каждого сомножителя:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\ \sqrt[n]{a_2}\ \ldots \sqrt[n]{a_k}. \tag{I}$$

Доказательство. Разбив каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_k

на n равных сомножителей и перемножив, получим

$$a_1 a_2 \ . \ . \ . a_k = \left\{\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \overbrace{\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_1} \ . \ . \ . \sqrt[n]{a_1}}^{n \text{ раз}} \\ \sqrt[n]{a_2} \cdot \sqrt[n]{a_2} \ . \ . \ . \sqrt[n]{a_2} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \sqrt[n]{a_k} \cdot \sqrt[n]{a_k} \ . \ . \ . \sqrt[n]{a_k} \end{array}\right.$$

Сгруппировав сомножители по столбцам, представим $a_1, a_2, ..., a_n$ в виде произведения n равных сомножителей:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k = \left(\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2}, \ldots, \sqrt[n]{a_k}\right)^n,$$

откуда следует равенство (I), ч. т. д.

Правило I можно доказать проверкой, путем возведения обеих частей в n-ю степень:

$$\left(\sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_k}\right)^n = a_1, a_2, \ldots, a_k \quad \text{(по определению корня)}$$

и

$$\left(\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a_1}\right)^n \left(\sqrt[n]{a_2}\right)^n \ldots \left(\sqrt[n]{a_k}\right)^n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_k$$

(возведение в степень произведения).

Правило I можно сформулировать иначе: *произведение корней данной степени равно корню той же степени из произведения подкоренных чисел*:

$$\sqrt[n]{a_1}\ \sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

II. ***Правило извлечения корня из дроби.*** *Корень из частного равен корню той же степени из числителя, деленному на корень из знаменателя:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad \text{(II)}$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{a}, \ldots \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b}} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Правило II можно сформулировать иначе: *частное корней данной степени равно корню той же степени из частного подкоренных чисел.*

III. *Правило возведения корня в степень.* *При возведении корня в степень достаточно возвести в степень подкоренное число:*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \qquad \text{(III)}$$

Доказательство. Применим правило (I), положив: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$.

V. *Теорема об извлечении корня из степени.* *Для извлечения корня из* k*-й степени числа* a *достаточно возвести в* k*-ю степень корень из* a:

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k. \qquad \text{(IV)}$$

Это правило является лишь иной словесной формулировкой предыдущего правила.

V. *Правило вынесения множителя за знак радикала.* Так называется следующее тождество:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}\,. \qquad \text{(V)}$$

Доказательство.

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\,\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}\,.$$

VI. *Правило введения множителя под знак радикала*:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}. \qquad \text{(VI)}$$

Это правило является лишь иной записью предыдущего тождества.

Кратко правило V и VI можно формулировать так: *при вынесении за знак корня множителя из него извлекается корень, при введении под знак корня множителя он возводится в степень, равную показателю корня.*

VII. *Правило извлечения корня из корня.* *При извлечении корня из корня можно перемножить показатели корней, оставив без изменения подкоренное число:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}\,. \qquad \text{(VII)}$$

Доказательство. Обозначим $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \alpha$, число a можно получить путем следующих двух последовательных разбиений: сперва число a разбивается на k равных сомножителей $\sqrt[k]{a}$, а затем каждый из этих сомножителей разбивается на n

сомножителей, равных $\alpha = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a}\right)}$:

$$a = (k)\begin{cases}\sqrt[k]{a} \\ \sqrt[k]{a} \\ \vdots \\ \sqrt[k]{a}\end{cases} = (k)\overset{(n)}{\begin{cases}\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha\end{cases}}$$

Таким образом, число a разбивается на nk сомножителей, равных α, и, следовательно,

$$\alpha = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Равенство (VII) можно доказать также проверкой путем возведения обеих его частей в степень nk.

VIII. *Правило умножения показателя степени и показателя корня.* *Величина корня не изменяется, если показатель корня умножить на произвольное натуральное число k, а подкоренное число возвести в ту же степень k:*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}. \qquad \text{(VIII)}$$

Доказательство. Имеем (по предыдущему правилу):

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Иначе правило VIII формулируют так: *показатель степени и показатель корня можно сократить на общий множитель.*

IX. *Правило приведения радикалов к общему показателю.* *Радикалы (взятые в любом числе) можно заменить соответственно равными радикалами с общим показателем корня.*

Доказательство. Пусть

$$\sqrt[n_1]{A_1},\quad \sqrt[n_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[n_k]{A_k}$$

— данные радикалы, n — общее кратное показателей, а d_1, d_2, ..., d_k — соответствующие дополнительные множители:

$$n = n_1d_1,\ n = n_2d_2, \ldots,\ n = n_kd_k.$$

Воспользовавшись правилом VIII, можно заменить данные радикалы соответственно равными радикалами с общим показателем корня:

$$\sqrt[n_1]{A_1} = \sqrt[n]{{}^{d_1}_{1}},\quad \sqrt[n_2]{A_2} = \sqrt[n]{A_2^{d_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{A_k} = \sqrt[n]{A_k^{d_k}}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

X. ***Правило сравнения радикалов.*** *Чтобы установить, какое из чисел $\sqrt[m]{A}$ или $\sqrt[n]{B}$ является бо́льшим, достаточно установить, которое из чисел A^n или B^m является бо́льшим.*

Доказательство. По приведении радикалов к общему показателю, получим:

$$\sqrt[mn]{A^n} \text{ и } \sqrt[nm]{B^m},$$

следовательно, достаточно сравнить между собой подкоренные числа, ч. т. д.

Так, например, $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, так как $3^2 > 2^3$.

Для радикалов, не являющихся арифметическими, свойства I—X ***имеют место не во всех случаях.***

Четная степень всякого действительного числа неотрицательна, поэтому в поле действительных чисел уравнение

$$x^{2k} = a, \quad \text{где } a < 0$$

не имеет решений. Следовательно, *действие извлечения корня четной степени из отрицательных чисел невыполнимо в поле действительных чисел*, а потому символ $\sqrt[2k]{a}$ при $a < 0$ не имеет смысла (в поле действительных чисел).

Теорема. *В поле действительных чисел однозначно выполнимо действие извлечения корня нечетной степени. При этом*

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

Доказательство. Пусть a — произвольное данное неотрицательное число, $a \geqslant 0$, как доказано выше, действие извлечения корня однозначно выполнимо в множестве всех неотрицательных чисел, т. е. уравнение

$$x^{2k+1} = a \qquad (1)$$

в множестве всех неотрицательных чисел имеет единственное решение $x = \sqrt[2k+1]{a}$. Так как при $x < 0$ уравнение (1) не удовлетворяется (левая часть отрицательна), то $\sqrt[2k+1]{a}$ является единственным решением этого уравнения и в поле всех действительных чисел.

Рассмотрим уравнение

$$x^{2k+1} = -a$$

с отрицательной правой частью. Очевидно, что решением этого уравнения может быть лишь отрицательное число $x < 0$. Так как

$$|x^{2k+1}| = |x|^{2k+1}, \text{ то } |x|^{2k+1} = a, \text{ откуда } |x| = \sqrt[2k+1]{a}.$$

Из условия $x < 0$ получим $x = -\sqrt[2k+1]{a}$.

В самом деле,

$$\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Так, например,

$$\sqrt[3]{-243} = -3, \ \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}.$$

Извлечение корня нечетной степени из отрицательного числа $-a$ можно толковать как разбиение этого числа на $2k+1$ равных между собой отрицательных сомножителей:

$$-a = \overbrace{\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)\cdot\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)\ldots\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)}^{(2k+1)\ \text{раз}}.$$

Если a и b два отрицательные числа и $a < b$, то и

$$\sqrt[2k+1]{a} < \sqrt[2k+1]{b}.$$

В самом деле,

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|} \ \text{ и } \ \sqrt[2k+1]{b} = -\sqrt[2k+1]{|b|},$$

но $|a| > |b|$, а потому и

$\sqrt[2k+1]{|a|} > \sqrt[2k+1]{|b|}$, откуда $-\sqrt[2k+1]{|a|} < -\sqrt[2k+1]{|b|}$, т. е.

$$\sqrt[2k+1]{a} < \sqrt[2k+1]{b}.$$

Доказательства правил I—X действий над радикалами остаются в силе применительно к радикалам с нечетными показателями корня при произвольных действительных подкоренных числах, значит, остаются в силе и сами эти правила.

При применении этих правил надо следить за тем, чтобы при отрицательных подкоренных числах показатели корней были всегда нечетными. Так например, при $a < 0$ равенство

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

справедливо, если n и k — нечетные числа.

Например:

$$\sqrt[15]{-32} = \sqrt[15]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}.$$

При применении правила IX приведения радикалов к общему показателю в качестве общего кратного показателей следует брать нечетное число. Так, например,

$$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[15]{(-2)^5} \ \text{ и } \ \sqrt[5]{(-3)} = \sqrt[15]{(-3)^3}.$$

Для радикалов с произвольными натуральными показателями и при произвольных действительных подкоренных числах правила действий имеют место не во всех случаях и могут применяться лишь с указанными ниже коррективами.

Основное тождество

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

справедливое при $a \geqslant 0$, остается в силе при произвольном a, если $n = 2k + 1$ — нечетное число.

В случае четного $n = 2k$, имеем $a^{2k} = |a|^{2k}$, а потому:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Так, например,

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Правила I и II при отрицательных подкоренных числах и при четном показателе корня места не имеют. Так, например, равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

не имеет места, если хотя бы одно из чисел a или b отрицательно, ибо тогда соответствующий радикал в правой части, а значит, и правая часть, теряют смысл.

Если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $ab \geqslant 0$; в этом случае

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|\,|b|} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}.$$

Если же a и b разных знаков, то и левая часть теряет смысл.

Правила III и IV

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

при $a < 0$ и при четном n места не имеют, так как $\sqrt[n]{a}$ теряет смысл.

Правило V вынесения множителя за знак радикала при четном $n = 2k$ и произвольном a применяется в следующем виде:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}b} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}b} = |a|\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} a\sqrt[2k]{b}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a\sqrt[2k]{b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Так, например,

$$\sqrt{(-2)^2 3} = 2\sqrt{3}.$$

Правило VI введения множителя под знак радикала четной степени применяется в следующем виде:

$$a\sqrt[2n]{b} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}b}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Так, например,

$$(-2)\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$$

Правило VII извлечения корня из корня при $a < 0$ неприменимо, если хотя бы одно из чисел n или k четно, так как в этом случае выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ оба теряют смысл.

Правило VIII $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ при $a < 0$ и при четном n места не имеет, так как $\sqrt[n]{a}$ теряет смысл. При четном $k = 2m$ правая часть смысла не теряет и ее преобразование выполняется следующим образом:

$$\sqrt[2mn]{a^{2m}} = \sqrt[2mn]{|a|^{2m}} = \sqrt[n]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ \sqrt[n]{-a} & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Так, например,

$$\sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}.$$

При n нечетном, k четном и $a < 0$ правило места не имеет, так как $\sqrt[n]{a} < 0$, но $a^k > 0$ и $\sqrt[nk]{a^k} > 0$.

Так, например,

$$\sqrt[3]{-2} < 0, \text{ но } \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2} > 0.$$

§ 40. Преобразование выражений, содержащих радикалы

Определение. *Выражение, составленное из чисел (обозначенных буквами или цифрами) при помощи алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня), называется алгебраическим выражением.*

Алгебраическое выражение называется выражением, содержащим радикалы, если оно содержит символы (один или несколько) извлечения корня.

Алгебраическое выражение, содержащее действие извлечения корня из выражений, в которые входят аргументы, называется иррациональным относительно данных аргументов.

Мы рассматриваем алгебраические выражения по внешнему виду. Не исключена возможность, что иррациональное выражение окажется тождественным некоторому рациональному выражению. Так, например, выражение $\sqrt{(x^2+1)^2-1}$, данное в иррациональном виде, тождественно рациональному выражению x^2.

Примерами числовых и буквенных выражений, содержащих радикалы, могут служить:

$$1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},\quad \sqrt[3]{a+\sqrt{b}},\quad \sqrt{a^2-\sqrt[3]{ab}}+\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Тождественные преобразования выражений, содержащих радикалы, выполняются на основании общих законов арифметических действий и правил действий над радикалами. В предыдущем параграфе перечислены эти правила и указаны условия их применимости.

Ниже указаны наиболее часто встречающиеся тождественные преобразования, которыми обычно пользуются при выполнении различных преобразований выражений, содержащих радикалы. Для определенности будем предполагать радикалы арифметическими, в соответствии с этим буквы, содержащиеся под радикалами, обозначают неотрицательные числа. Для радикалов, не являющихся арифметическими, следует учитывать указания, данные в предыдущем параграфе.

1°. Упрощение радикалов вида $\sqrt[k]{X^mY^n\ldots Z^p}$.

Разделив с остатком числа m, n, ..., p на k, получим:

$$m=qk+u,\ n=rk+v,\ \ldots,\ p=sk+w \text{ и}$$

$$\sqrt[k]{X^mY^n\ldots Z^p}=\sqrt[k]{X^{qk}X^uY^{rk}Y^v\ldots Z^{sk}Z^w}=$$
$$=X^qY^r\ldots Z^s\sqrt[k]{X^uY^v\cdots Z^w},$$

где u, v, ..., w — неотрицательные числа меньше k.

2°. Упрощение радикалов вида

$$\sqrt[k]{\frac{X^m\ldots Y^n}{Z^p\ldots T^q}},\ \text{где } Z\neq 0,\ \ldots,\ T\neq 0.$$

Умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на $Z^{k-p}\ \ldots\ T^{k-q}$. Имеем:

$$\sqrt[k]{\frac{X^m\ldots Y^n}{Z^p\ldots T^q}}=\sqrt[k]{\frac{X^m\ldots Y^nZ^{k-p}\ldots T^{k-q}\ \ldots}{Z^k\ldots T^k}}=$$
$$=\frac{1}{Z\ldots T}\sqrt[k]{X^m\ldots Y^nZ^{k-p}\ldots T^{k-q}}.$$

3°. Возведение в степень радикала.

При $k < n$ имеем:

$$\left(\sqrt[n]{X}\right)^k = \sqrt[n]{X^k}, \quad \left(\sqrt[n]{X}\right)^{n+k} = \sqrt[n]{X^n X^k} = X\sqrt[n]{X^k},$$

$\left(\sqrt[n]{X}\right)^{2n+k} = X^2\sqrt[n]{X^k}$ и в общем виде

$$\left(\sqrt[n]{X}\right)^{pn+k} = \sqrt[n]{X^{pn+k}} = X^p\sqrt[n]{X^k}.$$

4°. В силу закона дистрибутивности:

$$a_1\sqrt[n]{X} + a_2\sqrt[n]{X} + \ldots + a_k\sqrt[n]{X} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\sqrt[n]{X}.$$

Это преобразование в учебной литературе называется приведением подобных радикалов.

5°. При умножении (делении) радикалов с различными показателями можно пользоваться правилами I и II умножения и деления радикалов (см. предыдущий параграф), предварительно приведя данные радикалы к общему показателю:

$$\sqrt[m]{X} \cdot \sqrt[n]{Y} = \sqrt[mn]{X^n} \cdot \sqrt[mn]{Y^m} = \sqrt[mn]{X^n Y^m}$$

и аналогично:

$$\frac{\sqrt[m]{X}}{\sqrt[n]{Y}} = \sqrt[mn]{\frac{X^n}{Y^m}} = \frac{1}{Y}\sqrt[mn]{X^n Y^{m(n-1)}}.$$

6°. Из 3° следует, что всякий многочлен от радикала n-й степени может быть представлен в виде многочлена степени не выше, чем $n-1$, от того же радикала. В самом деле, если в выражении

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

сделать подстановку $x = \sqrt[n]{X}$ и воспользоваться преобразованием 3° для членов степени большей n, то получим:

$$P\left(\sqrt[n]{X}\right) = (a_0 + a_nX + a_{2n}X^2 + \ldots) + (a_1 + a_{n+1}X + \ldots)\sqrt[n]{X} + \\ + (a_2 + a_{n+2}X + \ldots)\sqrt[n]{X^2} + \ldots + (a_{n-1} + a_{2n-1}X + \\ + \ldots)\sqrt[n]{X^{n-1}}.$$

7°. Формула преобразования «сложного» квадратного радикала. Так называется следующая формула:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \tag{1}$$

где $A > 0$, $B > 0$ и $A^2 > B$, а знаки берутся либо верхние, либо нижние.

Доказательство. Положим:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x.$$

Возведя в квадрат, получим:

$$x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}, \text{ откуда } x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}. \quad (2)$$

Аналогично найдем:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

после почленного сложения и вычитания получим формулу (1), ч. т. д.

Примеры

1. Упростить выражение

$$P=(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}).$$

Решение. Так как

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2};\quad \sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=6\sqrt{2};\quad \sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=$$
$$=2\sqrt{5},$$

то

$$2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}=3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

и

$$\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}=2(2\sqrt{2}-5\sqrt{5}).$$
$$P=6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}-5\sqrt{5})=$$
$$=6(2\sqrt{5}\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{5}\sqrt{5}+5\sqrt{2}\sqrt{5})=$$
$$=6(7\sqrt{10}-29).$$

2. Установить, какое из чисел $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ или $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$ является бо́льшим.

Решение. Оба числа положительны, так как

$$8>\sqrt{15}, \quad \text{ибо} \quad 8^2>15.$$

Пусть

$$2\sqrt{8-\sqrt{15}} \vee \sqrt{30}+\sqrt[3]{3},$$

где $\vee$ означает неизвестный знак $>$, $<$, $=$; возвысив обе части в квадрат, получим:

$$4(8-\sqrt{15}) \vee 30+2\sqrt{30}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9};$$

откуда

$$-2\sqrt{30}\sqrt[3]{3}-4\sqrt{15}\ \vee\ \sqrt[3]{9}-2.$$

Так как левая часть последнего соотношения (эквивалентного данному) отрицательна, а правая положительна, то знак $\vee$ обозначает $<$, следовательно,

$$2\sqrt{8-\sqrt{15}}<\sqrt{30}+\sqrt[3]{30}.$$

3. Преобразовать произведение

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Решение. Все подкоренные выражения положительны, чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что

$$2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

возведя в квадрат, получим:

$$2>\sqrt{2+\sqrt{3}};$$

возведя в квадрат вторично, получим верное соотношение

$$2>\sqrt{3}^{*}.$$

Произведение третьего и четвертого множителей равно

$$\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Умножив на второй сомножитель, получим произведение

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

и, наконец,

$$P=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1.$$

4. Представить $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ в виде $A\sqrt{2}+B\sqrt{3}$, где A и B рациональные числа.

Решение. Примем во внимание следующее положение: если при рациональных коэффициентах m, m_1, n, n_1 имеет место равенство

$$m\sqrt{2}+n\sqrt{3}=m_1\sqrt{2}+n_1\sqrt{3}, \qquad (1)$$

то $m=m_1$ и $n=n_1$. В самом деле, если $m=m_1$ то из (1) следует, что $n=n_1$,

---

* В данном случае доказательство неравенства проверкой возможно, так как числа, возводимые в квадрат, положительны.

и аналогично, если $n = n_1$, то $m = m_1$. Допустим, что $m \neq m_1$ и $n \neq n_1$, тогда из (1) получим:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{n_1 - n}{m - m_1},$$

последнее невозможно, так как $\frac{2}{3}$ не является точным квадратом (см. ниже § 41).

Применим метод неопределенных коэффициентов. Если

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = A\sqrt{2} + B\sqrt{3}, \tag{2}$$

то, возведя обе части в куб, получим:

$$9\sqrt{3} - 11\sqrt{2} = 2A^3\sqrt{2} + 6A^2B\sqrt{3} + 9AB^2\sqrt{2} + 3B^3\sqrt{3}. \tag{3}$$

При рациональных A и B это возможно, если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2A^3 + 9AB^2 &= -11 \\ 2A^2B + B^3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

имеет рациональное решение. Непосредственным подбором находим следующее рациональное решение $A = -1$, $B = 1$. При этих значениях коэффициентов имеет место равенство (3), но если равны кубы, то равны и основания; следовательно, из равенства (3) следует (2). Итак, имеем:

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

5. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}.$$

Решение. Упростим левую и правую части доказываемого равенства: левая часть равна

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}}}\sqrt[3]{2 - \sqrt[5]{3^3}},$$

правая часть равна

$$\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}\left(1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2}\right).$$

Достаточно доказать, что

$$\left(1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2}\right)^3 = 5\left(2 - \sqrt[5]{3^3}\right),$$

вычисляем левую часть, имеем последовательно (можно воспользоваться формулой куба трехчлена, стр. 62):

$$\left(1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2}\right)^2 = 1 + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3^4} + 2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3^2} -$$
$$- 2\sqrt[5]{3^3} = 1 + 2\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2} - 2\sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^4}$$

$\times$	$1+2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3^2}-2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^4}$
1	$1+2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3^2}-2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^4}$
$\sqrt[5]{3}$	$\sqrt[5]{3}+2\sqrt[5]{3^2}-\sqrt[5]{3^3}-2\sqrt[5]{3^4}+3$
$-\sqrt[5]{3^2}$	$-\sqrt[5]{3^2}-2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^4}+6-3\sqrt[5]{3}$

$$10-5\sqrt[5]{3^3}=5(2-\sqrt[5]{3^3}).$$

6. Упростить выражение

$$S=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}.$$

Решение. Применяем последовательно формулу преобразования сложного радикала.

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}}=2\sqrt{2}+1;$$

$$\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{2}+1;$$

$$S=\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{43+7}{2}}+$$

$$\sqrt{\frac{43-7}{2}}=5+3\sqrt{2}.$$

7. Преобразовать, пользуясь формулой сложного радикала, выражение

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

Положив $A=4\sqrt{2}$, $B=24$, получим:

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32-24}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{32-24}}{2}}=\sqrt{3\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}$$

8. Доказать, что при $n>2$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}.$$

Решение. Достаточно доказать, что $n^{n+1} > (n+1)^n$ или что

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Имеем:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \leqslant 1$$ (см. ниже, стр. 215), если $n \geqslant 3$, ч. т. д.

В примерах 9—13 показаны преобразования буквенных выражений, содержащих радикалы

9. Преобразовать

$$S = \frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d} + \frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d} - a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}},$$

где a, b, c и d положительны.

Решение.

$$S = \frac{1}{a^2c}\sqrt{3d\,(a^4c^2)^2} + \frac{2}{ac^2}\sqrt{3d\,(2a^3c^3)^2} - a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{(a^2c)^2}} =$$

$$= \frac{1}{a^2c}\,a^4c^2\sqrt{3d} + \frac{2}{ac^2}\,2a^3c^3\sqrt{3d} - a^4c^2\,\frac{1}{a^2c}\sqrt{3d} =$$

(правила V и II предыдущего параграфа)

$$= a^2c\sqrt{3d} + 4a^2c\sqrt{3d} - a^2c\sqrt{3d} = (a^2c + 4a^2c - a^2c)\sqrt{3d} = 4a^2c\sqrt{3d}$$

(дистрибутивность).

10. Преобразовать:

$$\frac{24a^5b^2}{d^2}\left(\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}\right) : \left(\frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}\right) =$$

$$= \left(\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}}\right) : \left(\frac{4a^2}{b}\cdot\frac{ab^2}{d}\sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right) = \quad \text{(правило V)}$$

$$= \frac{6a^2b^2}{d}\left(\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}} : \sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right) = \quad \text{(свойства умножения и деления)}$$

$$= \frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\left(\frac{a^2b^2}{c^2}\right)^3} : \sqrt[15]{\left(\frac{ab}{cd^2}\right)^5} = \quad \text{(правило IX)}$$

$$= \frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{a^6b^6c^5d^{10}}{c^6a^5b^5}} = \frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{abd^{10}}{c}} = \quad \text{(правило II)}$$

$$= \frac{6a^2b^2}{cd}\sqrt[15]{abd^{11}c^{14}}.$$

11. Упростить выражение:

$$Q=\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$$

Решение. Радикал $\sqrt{n^2-4}$ имеет действительное значение, если $n^2\geqslant 4$, откуда $n\geqslant 2$ или $n\leqslant -2$. Преобразуем отдельно числитель и знаменатель; числитель равен

$$n^3-3n-2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}=(n+1)^2(n-2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4};$$

знаменатель равен

$$n^3-3n+2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}=(n-1)^2(n+2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}$$

При $n\geqslant 2$ имеем:

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{n^2-4}=\sqrt{n+2}\,\sqrt{n-2}\\ n-2=\sqrt{(n-2)^2}\quad\text{и}\quad n+2=\sqrt{(n+2)^2}\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$Q=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}\left[(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}\right]}{(n-1)\sqrt{n+2}\left[(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}\right]}=$$

$$=\frac{n+1}{n-1}\sqrt{\frac{n-2}{n+2}}.$$

При $n<-2$ (значение $n=-2$ исключается как обращающее в 0 знаменатель) соотношения (1) должны быть заменены следующим:

$$\sqrt{n^2-4}=\sqrt{|n+2|}\,\sqrt{|n-2|};$$

$$n-2=-|n-2|=-(\sqrt{|n-2|})^2;\ n+2=-(\sqrt{|n+2|})^2.$$

Следовательно,

$$Q=\frac{(n+1)\sqrt{|n-2|}\left[-(n+1)\sqrt{|n-2|}+(n-1)\sqrt{|n+2|}\right]}{(n-1)\sqrt{|n+2|}\left[-(n-1)\sqrt{|n+2|}+(n+1)\sqrt{|n-2|}\right]}=$$

$$=-\frac{n+1}{n-1}\sqrt{\left|\frac{n-2}{n+2}\right|}=-\frac{n+1}{n-1}\sqrt{\frac{n-2}{n+2}}=-\frac{n+1}{n-1}\sqrt{\frac{2-n}{-n-2}}.$$

12 Для сравнения преобразуем выражение (см. пример 9):

$$S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8b^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}},$$

не ставя никаких дополнительных условий.

Каждое из слагаемых имеет вполне определенное действительное значение, если $a\neq 0$, $c\neq 0$ и $d\geqslant 0$, при этих условиях имеем:

$$S=\frac{1}{a^2c}|a^4c^2|\sqrt{3d}+\frac{2}{ac^2}2|a^3c^3|\sqrt{3d}+\frac{a^4c^2}{|a^2c|}\sqrt{3d}=$$

$$=\left(a^2c+\frac{4|a|^3}{a}|c|-a^2|c|\right)\sqrt{3d}$$

Так как

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad |c| = \begin{cases} c \text{ при } c > 0 \\ -c \text{ при } c < 0, \end{cases}$$

то

$$S = \begin{cases} 4a^2c\sqrt{3d}, \text{ если } a > 0,\ c > 0 \\ -4a^2c\sqrt{3d}, \text{ если } a < 0,\ c > 0 \\ -2a^2c\sqrt{3d}, \text{ если } a > 0,\ c < 0 \\ 6a^2c\sqrt{3d}, \text{ если } a < 0,\ c < 0. \end{cases}$$

13. Преобразовать

$$Q = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \quad \text{при } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right),$$

где $a>0$, $b>0$.

Решение. Вычисляем

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)-1} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}.$$

Выполнив подстановку, получим

$$Q = \frac{2b\,\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) - \dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}} =$$

$$= \frac{2b\,|a-b|}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)-|a-b|} = \frac{2b\,|a-b|}{(a+b)-|a-b|}.$$

Но

$$|a-b| = \begin{cases} a-b \text{ (при } a \geqslant b) \\ b-a \text{ (при } a < b), \end{cases}$$

поэтому

$$Q = \begin{cases} a-b & (\text{при } a \geqslant b) \\ \dfrac{b}{a}(b-a) & (\text{при } a < b). \end{cases}$$

Выполнить данное преобразование, если $a < 0$, $b < 0$. При этих условиях радикалы также действительны, так как выражения $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ и ab не меняются при замене чисел a и b противоположными. В данном случае будем иметь:

$$\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b| = -a-b.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{2b\,|a-b|}{(-a-b)-|a-b|} = \begin{cases} -\frac{b}{a}(a-b) & \text{при } a \geqslant b \\ (a-b) & \text{при } a < b \end{cases}$$

Сопряженные множители

Пусть S — данное выражение, содержащее радикалы.

Определение. *Сопряженным множителем относительно S называется всякое выражение M, неравное тождественно нулю, такое, что произведение SM не содержит радикалов.*

Выражение S можно рассматривать как сопряженный множитель для выражения M.

Вопрос об отыскании сопряженных множителей в общем виде рассматривается в курсе «Высшей алгебры», в теории симметрических функций *. В элементарной алгебре устанавливаются приемы нахождения сопряженных множителей лишь для частного вида выражений, содержащих радикалы.

1. Для выражения

$$S = \sqrt[n]{X^p Y^q \ldots Z^r},$$

где p, q и r — натуральные числа, меньшие n, достаточно положить

$$M = \sqrt[n]{X^{n-p}\,Y^{n-q}\ldots Z^{n-r}}.$$

В самом деле,

$$SM = XY \ldots Z.$$

2. Для выражения

$$S = \sqrt[n]{X} - \sqrt[n]{Y}$$

сопряженный множитель определяется на основании тождества

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}).$$

Положив $x = \sqrt[n]{X}$, $y = \sqrt[n]{Y}$

и

$$M = \sqrt[n]{X^{n-1}} + \sqrt[n]{X^{n-2}\,Y} + \sqrt[n]{X^{n-3}\,Y^2} + \ldots + \sqrt[n]{Y^{n-1}},$$

получим

$$\left(\sqrt[n]{X} - \sqrt[n]{Y}\right)M = X - Y.$$

В частности (при $n = 2$), для выражения $S = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$ до-

---

* См., например, книгу проф. А. К. Сушкевича, Основы высшей алгебры, учебник для университетов.

статочно положить $M = \sqrt{X}+\sqrt{Y}$:

$$SM = \left(\sqrt{X}-\sqrt{Y}\right)\left(\sqrt{X}+\sqrt{Y}\right) = X - Y.$$

Для выражения

$S = \sqrt[3]{X} - \sqrt[3]{Y}$ достаточно положить $M = \sqrt[3]{X^2} + \sqrt[3]{XY} + {}$ $+ \sqrt[3]{Y^2}$:

$$SM = \left(\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{Y}\right)\left(\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}\right) = X - Y.$$

3. Для $S = \sqrt[n]{X}+\sqrt[n]{Y}$ сопряженный множитель находится на основании тождества

$$x^n \pm y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots \pm y^{n-1})$$

(знак $+$ при n нечетном, $-$ при n четном).

Так, например, для $\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{Y}$ следует положить:

$$M = \sqrt[3]{X^2} - \sqrt[3]{XY} + \sqrt[3]{Y^2}.$$

4. Нахождение сопряженных множителей для выражений, содержащих квадратные радикалы.

Всякий многочлен от квадратного радикала $\sqrt{X}$ можно представить в виде:

$$P\left(\sqrt{X}\right) = P_1(X) + P_2(X)\sqrt{X},$$

где P_1 и P_2 многочлены * относительно X (см. п. 6°, стр. 125). В качестве сопряженного множителя можно взять выражение

$$M = P_1(X) - P_2(X)\sqrt{X},$$

так как

$$P(\sqrt{X})M = P_1^2(X) - P_2^2(X)X.$$

Рассмотрим общий случай, когда выражение S является многочленом от нескольких квадратных радикалов:

$$S = P\left(\sqrt{X}, \sqrt{Y}, \ldots, \sqrt{Z}\right),$$

где $P(x, y, \ldots, z)$ есть многочлен от аргументов $x, y, \ldots, z$. Нахождение сопряженного множителя можно выполнить последовательным применением изложенного приема. Будем рассматри-

---

* Коэффициенты многочлена могут быть рациональными функциями от аргументов, содержащихся в выражении X.

вать $P(x, y, \ldots, z)$ как многочлен от аргумента x, в соответствии с этим представим S в следующем виде:

$$S = P_1 + P_2 \sqrt{X},$$

где P_1 и P_2 суть многочлены от X и от прочих радикалов. Положив $M_x = P_1 - P_2\sqrt{X}$, получим выражение:

$$SM_x = P_1^2 - P_2^2 X,$$

не содержащее радикала $\sqrt{X}$ и являющееся многочленом относительно прочих радикалов. Для полученного выражения можно (в силу изложенного) найти множитель M_y такой, что

$$SM_x M_y$$

не содержит радикалов $\sqrt{X}$ и $\sqrt{Y}$ и является многочленом относительно прочих радикалов. Применяя это рассуждение последовательно к прочим радикалам, окончательно получим выражение

$$SM_x M_y \ldots M_z,$$

не содержащее радикалов.

Достаточно положить

$$M = M_x M_y \ldots M_z.$$

5. Преобразование дробных выражений, содержащих радикалы. Дробным выражением, содержащим радикалы, будем называть выражение вида $S = \frac{S_1}{S_2}$, где хотя бы одно из выражений S_1 или S_2 содержит радикалы. Знание сопряженных множителей позволяет освобождать от радикалов числитель, либо знаменатель выражения S. Если M_2 сопряженный множитель знаменателя, то имеет место равенство

$$S = \frac{S_1 M_2}{S_2 M_2}$$

(разумеется при условии $M_2 \neq 0$). Правая часть последнего есть выражение, не содержащее радикалов в знаменателе. Аналогично, если M_1 есть сопряженный множитель числителя, то

$$S = \frac{S_1 M_1}{S_2 M_1} \quad (\text{где } M_1 \neq 0)$$

и, следовательно, S представлено в виде выражения, не содержащего радикалов в числителе.

Примеры

1. Освободить от иррациональности знаменатель

$$\frac{1}{a - \sqrt[n]{b}}.$$

Решение.

$$\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\left(a-\sqrt[n]{b}\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^{n}-b}.$$

2. Перенести иррациональность из числителя в знаменатель

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}{a-1}=\frac{a-\sqrt[3]{a^2}}{(a-1)\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(a-\sqrt[3]{a^2}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}{(a-1)\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}=$$

$$=\frac{a^3-a^2}{(a-1)\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{a}\right)}=$$

$$=\frac{a}{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\right)}.$$

3. Найти сопряженный множитель для выражения

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}.$$

Решение. Умножив данное выражение на $M_1=\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$, получим

$$\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2-C=$$

$$=A+B-C+2\sqrt{AB}.$$

Умножив полученное произведение на $M_2=A+B-C-2\sqrt{AB}$ получим в произведении рациональное выражение

$$(A+B-C)^2-4AB.$$

Следовательно, можно положить

$$M=M_1M_2=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)\left(A+B-C-2\sqrt{AB}\right).$$

4. Освободить знаменатель дроби

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

от радикалов.

Решение. Воспользуемся тождеством (см. стр. 86)

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=x^3+y^3+z^3-3xyz;$$

положим:

$$x=\sqrt[3]{a}, \quad y=\sqrt[3]{b}, \quad z=\sqrt[3]{c}.$$

Умножив числитель и знаменатель на

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab},$$

получим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[2]{ac}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}$$

Для окончательного освобождения знаменателя от радикалов следует умножить числитель и знаменатель на

$$(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

5. Найти сопряженный множитель для выражения вида

$$a+b\sqrt[3]{k}+c\sqrt[3]{k^2}.$$

Решение. Применим метод неопределенных коэффициентов.

Умножим данное выражение на выражение того же вида с неопределенными коэффициентами A, B и C:

$$\left(a+b\sqrt[3]{k}+c\sqrt[3]{k^2}\right)\left(A+B\sqrt[3]{k}+C\sqrt[3]{k^2}\right)=$$
$$=(aA+kcB+kbC)+(bA+aB+kcC)\sqrt[3]{k}+$$
$$+(cA+bB+aC)\sqrt[3]{k^2}.$$

В качестве коэффициентов A, B и C можно взять любое **нетривиальное** решение линейной однородной системы:

$$\left.\begin{aligned} bA+aB+kcC&=0\\ cA+bB+\ aC&=0\end{aligned}\right\},$$

если только $aA+kcB+kbC\neq 0$.

Так, например, для выражения:

$$1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2^2}$$

ищем коэффициенты сопряженного множителя из системы

$$\left.\begin{aligned} A+B+4C&=0\\ 2A+B+\ C&=0\end{aligned}\right\};$$

откуда

$$\frac{A}{-3}=\frac{B}{7}=\frac{C}{-1}.$$

Следовательно, можно положить $A=3$, $B=-7$, $C=1$.

Так как $aA+kcB+kcC=-21\neq 0$, то в качестве сопряженного множителя можно взять выражение

$$3-7\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}.$$

Изложенный метод неопределенных коэффициентов применим к отысканию сопряженных множителей для выражений вида:

$$a_0+a_1\sqrt[n]{k}+a_2\sqrt[n]{k^2}+\ldots+a_{n-1}\sqrt[n]{k^{n-1}}.$$

§ 41. Извлечение корня из чисел

В настоящем параграфе будет рассматриваться извлечение корня из положительных чисел, таким образом, все радикалы будут предполагаться арифметическими.

Теорема. *Если натуральное число N не является **n**-й степенью никакого натурального числа, то $\sqrt[n]{N}$ есть иррациональное число.*

Доказательство. По условию число N не содержится в последовательности

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ldots,k^n,\ldots \qquad \{k^n\}$$

n-х степеней целых неотрицательных чисел, следовательно, $\sqrt[n]{N}$ не может быть целым числом. Докажем, что $\sqrt[n]{N}$ не может быть дробным числом. Допустим, что $\sqrt[n]{N}=\frac{p}{q}$, где p и q взаимно простые числа и $q\neq 1$, но тогда

$$N=\frac{p^n}{q^n}.$$

Последнее равенство невозможно, так как p^n и q^n также взаимно просты и $q^n\neq 1$, а потому (вопреки условию) N не может быть целым числом. Будучи числом действительным, $\sqrt[n]{N}$ не является ни целым, ни дробным, следовательно, $\sqrt[n]{N}$ есть иррациональное число, ч. т. д.

Теорема. *Если числитель и знаменатель несократимой дроби $\frac{P}{Q}$ (где $Q\neq 1$) не являются* (каждый) *точными **n**-ми степенями, то $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ есть иррациональное число*.*

Доказательство. Допустим, что $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ есть рациональное число:

$$\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}=\frac{p}{q},$$

* «Точная n-я степень», значит, n-я степень некоторого натурального числа.

где p и q взаимно простые числа, тогда

$$\frac{P}{Q}=\frac{p^n}{q^n}$$

Так как p^n и q^n также взаимно просты, то $P=p^n$ и $Q=q^n$, т. е. (вопреки предположению) P и Q суть также n-ые степени. Следовательно, $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ есть иррациональное число, ч. т. д.

Если действительное число α не является точной n-й степенью натурального числа, то в последовательности $\{k^n\}$ найдется наибольшее число k^n меньшее α:

$$k^n<\alpha<(k+1)^n.$$

Определение. *Число* $\boldsymbol{k}$ *называется значением* $\sqrt[n]{a}$ *с точностью до* 1 *по недостатку, а* $k+1$ *значением* $\sqrt[n]{N}$ *с точностью до* 1 *по избытку, если* $k^n<\alpha<(k+1)^n$.

Имеем

$$k<\sqrt[n]{\alpha}<k+1.$$

Обозначим через N целую часть числа α:

$$\alpha=N+\beta,\quad \text{где } 0<\beta<1.$$

Правило. *Для нахождения значения* $\sqrt[n]{\alpha}$ *с точностью до* 1 *(по недостатку или по избытку) достаточно найти значение корня* n*-й степени с точностью до* 1 *из целой части числа* α.

Доказательство. Пусть k значение $\sqrt[n]{N}$ по недостатку с точностью до 1:

$$k^n\leqslant N<(k+1)^n$$

(случай, когда N есть точная n-я степень, не исключается).

Так как

$$(k+1)^n-k^n=nk^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}k^{n-2}+\ldots+1\geqslant 1$$

(равенство при $k=0$)

и $0<\beta<1$, то $k^n\leqslant N+\beta<(k+1)^n$,

откуда

$$k<\sqrt[n]{N+\beta}<k+1;\quad \text{т. е. } k<\sqrt[n]{\alpha}<k+1.$$

Следовательно, k и $k+1$ суть значения корня с точностью до 1 и для числа α, ч. т. д.

Определение. *Число* $\boldsymbol{r}$ *называется значением* $\sqrt[n]{\alpha}$ *по недостатку с точностью до* $\frac{1}{m}$*, если имеют место неравенства:*

$$r<\sqrt[n]{\alpha}<r+\frac{1}{m}.$$

Число $r+\frac{1}{m}$ называется приближенным значением $\sqrt[n]{\alpha}$ по избытку с той же точностью.

Правило. *Для нахождения приближенного значения $\sqrt[n]{\alpha}$ с точностью до $\frac{1}{m}$ достаточно найти значение корня **n**-й степени с точностью до 1 из числа αm^n и результат разделить на **m**.*

Доказательство. Пусть

$$k^n \leqslant \alpha m^n < (k+1)^n,$$

тогда $\quad k \leqslant m\sqrt[n]{\alpha} < k+1$ и $\frac{k}{m} < \sqrt[n]{\alpha} < \frac{k}{m}+\frac{1}{m}$.

Следовательно, $r=\frac{k}{m}$ и $\frac{k}{m}+\frac{1}{m}$ суть искомые приближенные значения корня, ч. т. д.

Из изложенных правил следует, что на практике для вычисления корней из чисел с заданной степенью точности достаточно уметь находить корни из натуральных чисел с точностью до 1.

Правило извлечения квадратного корня с точностью до 1 из натуральных чисел подробно излагается в школьном курсе алгебры (см., например, учебник алгебры А. П. Киселева). Для извлечения корней более высокой степени (а также и квадратных) пользуются различными средствами: непосредственными испытаниями (см. пример 2), таблицами степеней натуральных чисел, логарифмическими таблицами.

Для извлечения корней из чисел, близких к 1, применяется следующая приближенная формула

$$\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{n}, \text{ где } |\alpha|<1. \tag{1}$$

Установим оценку погрешности этой формулы, считая $\alpha>0$. Имеем:

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)-\sqrt[n]{1+\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n-(1+\alpha)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n-2}\sqrt[n]{1+\alpha}+\ldots+\sqrt[n]{(1+\alpha)^{n-1}}}<$$

$$<\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\alpha^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\alpha^3+\ldots+\frac{\alpha^n}{n^n}}{n}<$$

$$<\frac{\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n}{n}<\frac{n-1}{n}\alpha^2<\alpha^2.$$

Итак, при $\alpha>0$ формула дает значение корня с избытком с точностью большей, чем α^2 *.

Для квадратного корня оценку погрешности легко уточнить:

$$\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\sqrt{1+\alpha}=\frac{\frac{\alpha^2}{4}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{1+\alpha}}<\frac{\alpha^2}{8}.$$

Для вычисления дробного числового выражения, содержащего рациональные числа и числовые радикалы, удобно заменить это выражение выражением, имеющим рациональный знаменатель, так как действие деления на рациональное число выполняется без затруднений.

Примеры

1. Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{11}$, $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ иррациональны.

2. Вычислить $\sqrt[3]{72351}$ с точностью до 1.

Решение. Применяем непосредственно метод испытаний. Так как

$$10^3<72351<100^3,$$

то искомый корень есть двузначное число. Испытываем число 50, имеем $(50)^3=125\,000$, следовательно, искомый корень меньше 50. Испытываем число 40; имеем: $40^3=64\,000$, и, следовательно,

$$40^3<72351<50^3.$$

Так как $41^3=68\,921$ и $42^3=74088$, то $41<\sqrt[3]{72351}<42$.

3. Найти $\sqrt{2,5}$ с точностью до 0,1. Здесь $a=2,5$, $n=2$, $m=10$. $am^n=250$ и $15^2<250<16^2$.

Искомые приближенные значения суть 1,5 и 1,6.

4. Вычислить с точностью до 0,001 корень $\sqrt[5]{245}$.

Решение. Имеем: $245=243+2=3^5+2$.

Следовательно,

$$\sqrt[5]{245}=3\sqrt[5]{1+\frac{2}{3^5}}.$$

Применим формулу (1), положив $\alpha=\frac{2}{3^5}$.

$$\sqrt[5]{245}=3\left(1+\frac{2}{5\cdot 3^5}\right)$$

с ошибкой меньшей, чем

$$3\cdot\frac{2^2}{3^{10}}<\frac{1}{3^7}<0,000025.$$

5. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ с точностью до 0,001.

---

* В курсе анализа, в теории рядов, дается более точная оценка погрешности.

Решение. Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{2{,}2361-1{,}4142}{3}=0{,}274$$

(с точностью до 0,001).

§ 42. Извлечение корня методом последовательных приближений

Рассмотрим функцию

$$y=f(x)=\frac{m-1}{m}x+\frac{N}{mx^{m-1}}$$

в интервале $0<x<\infty$, где $N>0$ — данное положительное число, m — данное натуральное число.

Теорема. *В интервале $0<x<\infty$ наименьшее значение функции $f(x)$ равно $\sqrt[m]{N}$ при значении аргумента $x=\sqrt[m]{N}$.*

Доказательство. Представим $f(x)$ в виде суммы двух слагаемых

$$f(x)=U+V,\quad \text{где}\quad U=\frac{m-1}{m}x,\ V=\frac{N}{mx^{m-1}}.$$

Произведение

$$U^{m-1}V=\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}N=\text{const}$$

постоянно. Следовательно (см. ниже стр. 227 § 60), сумма $f(x)=U+V$ имеет наименьшее значение при условии

$$\frac{U}{m-1}=\frac{V}{1},\quad \text{откуда}\quad \frac{x}{m}=\frac{N}{mx^{m-1}}\quad \text{и}\quad x=\sqrt[m]{N}.$$

Наименьшее значение функции $f(x)$ равно:

$$f(\sqrt[m]{N})=\frac{m-1}{m}\sqrt[m]{N}+\frac{N}{m\sqrt[m]{N^{m-1}}}=\sqrt[m]{N}.$$

График функции $f(x)$ при $m=3$ и $N=2$ представлен на чертеже 11.

Другое доказательство. Вычислим производную:

$$f'(x)=\frac{m-1}{m}-\frac{m-1}{m}\frac{N}{x^m}=\frac{m-1}{m}\frac{x^m-N}{x^m}.$$

Из выражения для производной видно, что $f'(x)<0$ в интервале $0<x<\sqrt[m]{N}$, в этом интервале функция $f(x)$ убывает $f'(x)>0$ в интервале $\sqrt[m]{N}<x<\infty$, в этом интервале функция возрастает; $f'(x)=0$ при $x=\sqrt[m]{N}$, при этом значении аргумента функция имеет наименьшее значение, равное $\sqrt[m]{N}$, ч. т. д.

Если аргументу x придать произвольное положительное значение $a \neq \sqrt[m]{N}$, то соответствующее значение функции будет больше, чем наименьшее ее значение, равное $\sqrt[m]{N}$.

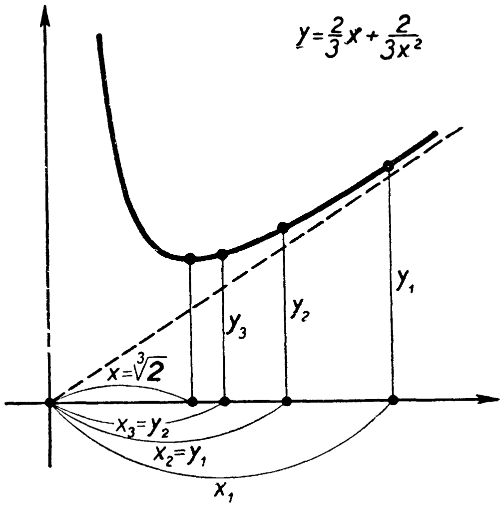
Докажем, что при произвольном значении аргумента, бо́льшем чем $\sqrt[m]{N}$, имеет место неравенство:

$$f(x) < x. \qquad (1)$$

В самом деле

$$x - f(x) = x - \frac{m-1}{m}x - \frac{N}{mx^{m-1}} = \frac{x^m - N}{mx^{m-1}} > 0,$$

откуда $f(x) < x$.



Черт. 11

Изученные свойства функции $f(x)$ позволяют выполнять приближенное извлечение корня произвольной степени из чисел с любой заданной степенью точности. Этот способ приближенного извлечения корня удобен при вычислениях на арифмометре.

Пусть a произвольное положительное число, выбранное по возможности близко к значению $\sqrt[m]{N}$. Например, можно положить a равным целому числу, m-я степень которого наиболее близка к N.

Составим последовательность чисел:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m-1}{m}a + \frac{N}{ma^{m-1}} \\ x_2 &= \frac{m-1}{m}x_1 + \frac{N}{mx_1^{m-1}} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{m-1}{m}x_{n-1} + \frac{N}{mx_{n-1}^{m-1}} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}. \qquad \{x_n\}$$

Эта последовательность является убывающей и ограниченной, так как, в силу неравенств (1), имеем:

$$x_n = f(x_{n-1}) < x_{n-1} \text{ и } x_n = f(x_{n-1}) > \sqrt[m]{N},$$

а потому эта последовательность имеет предел.

Пусть $\lim x_n = x$, тогда

$$\lim x_n = \frac{m-1}{m} \lim x_{n-1} + \frac{N}{m(\lim x_{n-1})^{m-1}},$$

$$\text{т. е.} \quad x = \frac{m-1}{m} x + \frac{N}{mx^{m-1}}, \text{ откуда } x = \sqrt[m]{N}.$$

Если за приближенное значение $\sqrt[m]{N}$ взять x_n, то допущенная при этом погрешность α будет иметь следующую оценку:

$$\alpha = x_n - \sqrt[m]{N} = x_n - \frac{N}{\sqrt[m]{N^{m-1}}} < x_n - \frac{N}{x_n^{m-1}}$$

(принять во внимание, что $x_n > \sqrt[m]{N}$).

На чертеже 13 пояснен процесс последовательного приближения при вычислении кубического корня.

Примеры

(Вычисления выполнены на арифмометре).

1 Вычислить $\sqrt{135}$ с шестью значащими цифрами.

Решение. Составим функцию

$$f(x) = \frac{1}{2} x + \frac{135}{2x},$$

положив в общей формуле $m = 2$, $N = 135$. Положим $a = 12$ (ближайшее целое значение $\sqrt{135}$). Имеем:

$$x_1 = f(a) = \frac{1}{2} a + \frac{135}{2 \cdot a} = 6 + \frac{135}{2 \cdot 12} = \frac{93}{8},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1 \cdot 93}{2 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 135}{93} = 5{,}8125 + 5{,}8065 \approx$$

$$\approx 11{,}6190 \approx 11{,}62 \qquad \text{(с избытком).}$$

Положив $x_3 = 11{,}62$, продолжим вычисления

$$x_3 = f(x_2) = \frac{11{,}62}{2} + \frac{135}{2 \cdot 11{,}62} = 5{,}81 + 5{,}80895 \approx 11{,}61895$$

с ошибкой, меньшей чем

$$x_3 - \frac{135}{x_3} \approx 11{,}61895 - 11{,}61890 = 0{,}00005.$$

Округлив результат, получим: $x \approx 11{,}6189$ (все шесть цифр — верные, учесть, что приближенное значение x_3 с избытком).

Примечание. Так как x_1, x_2, x_3,... суть приближенные значения корня с избытком, то, чтобы избежать ошибок в оценке погрешностей, обусловленных округлением промежуточных результатов, это округление надо производить, заменяя значения x_1, x_2,... их приближенными значениями с избытком.

2. Вычислить $\sqrt[3]{149}$ с пятью значащими цифрами.

Решение. Составим функцию ($m = 3$, $N = 149$)

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{149}{3x^2}.$$

Положим $a = 5$, имеем: $x_1 = \frac{10}{3} + \frac{149}{75} = 5,32$;

$$x_2 = \frac{2 \cdot 5,32}{3} + \frac{149}{3 \cdot (5,32)^2} \approx 3,546666 + \frac{149}{84,9072} \approx 3,54667 + 1,75486 \approx 5,30153$$

с ошибкой, меньшей чем

$$x_2 - \frac{149}{x_2^2} \approx 5,30153 - \frac{149}{28,1063} \approx 5,30153 - 5,30117 < 0,0004.$$

Так как пятая значащая цифра не надежна, продолжаем вычисления, положив $x_2 = 5,302$; получим:

$$x_3 = \frac{2 \cdot 5,302}{3} + \frac{149}{3 \cdot (5,302)^2} \approx 5,30146$$

с ошибкой, меньшей чем

$$5,30146 - \frac{149}{(5,30146)^2} < 0,00004.$$

Поэтому можно положить: $\sqrt[3]{149} \approx 5,3015$.

§ 43. Обобщение понятия степени

По определению натуральной степени числа a имеем:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n \text{ раз}} \quad \text{при} \quad n > 1 \quad \text{и} \quad a^1 = a \quad \text{при} \quad n = 1.$$

Символы a^0, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\sqrt{2}}$ и т. п. не имеют смысла (согласно этому определению), ибо не имеет смысла умножать число a само на себя 0 или —1, или $\frac{1}{2}$, или $\sqrt{2}$ раз. Символу a^n, где n не является натуральным числом, можно придать смысл лишь по определению, условившись приписывать ему вполне определенное значение в случае, когда n не есть натуральное число.

Известны следующие основные свойства степени, вытекающие непосредственно из свойств умножения:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \tag{I}$$

$$(a^m)^n = a^{nm} \tag{II}$$

(где n и m натуральные числа). Будем руководствоваться следующим принципом:

при обобщении понятия степени принимаются такие определения, при которых сохраняются свойства (I) и (II).

Докажем, что если принять за основу этот принцип, то получится единственно возможная система определений, посредством которых понятие степени распространяется для случая произвольного рационального показателя.

Нулевой показатель. Если (пока формально) в соотношении (I) положить $m = 0$, то получим:

$$a^n a^0 = a^n.$$

Если $a \neq 0$, то найдем единственно возможное значение $a^0 = 1$. Это рассуждение не является доказательством равенства $a^0 = 1$ (так как при $m = 0$ выражение a^m утрачивает смысл), оно лишь показывает, какое определение следует принять для a^0, чтобы сохранилось свойство (I).

Определение. *Если $a \neq 0$, то считают $a^0 = 1$. Символу 0^0 не приписывается никакого численного значения.*

Справедливость свойства (II) проверяется непосредственно:

$$(a^0)^n = 1^n = a^{0n},\ (a^m)^0 = 1 = a^{0m},\ (a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^{0\cdot 0}.$$

Отрицательный показатель. Если в равенстве (I) положить $m = -n$, то получим:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1.$$

Откуда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (где $a \neq 0$); следовательно, чтобы сохранилось свойство (I), надо принять следующее определение.

Определение. *Если $a \neq 0$, то считают $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.*

Свойство (I) сохраняется при любых целых n и m. Пусть, например, число n положительно, а m отрицательно, $m = -m_1$, имеем:

$$a^n a^m = a^n a^{-m_1} = a^n \frac{1}{a^{m_1}} = \frac{a^n}{a^{m_1}} = \begin{cases} a^{n-m_1} & (\text{если } n > m_1) \\ \dfrac{1}{a^{m_1-n}} & (\text{если } n < m_1). \end{cases}$$

Но во втором случае

$$\frac{1}{a^{m_1-n}} = a^{-(m_1-n)} = a^{n-m_1}.$$

Итак, в обоих случаях

$$a^n a^m = a^{n-m_1} = a^{n+(-m_1)} = a^{n+m}.$$

Прочие возможные случаи предлагаем разобрать учащимся. Справедливость свойства (II) проверяется непосредственно.

Пусть, например, оба показателя отрицательны, тогда имеем:

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)}.$$

Прочие возможные случаи предлагаем разобрать учащимся.

Дробный показатель. Пусть a — неотрицательное число, $a \geqslant 0$. Положим в равенстве (II) $m = \frac{1}{n}$, тогда получим:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Откуда $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Заменив в равенстве (II) n на $\frac{1}{n}$, получим: $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ и вместе с тем $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Согласно принципу обобщения понятия степени, надо принять следующее определение.

Определение. *Если $a \geqslant 0$, то считают $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и, в частности, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, где m и n — произвольные натуральные числа.*

Теорема. *Если $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, то и $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}$.*

Доказательство. Имеем $mn_1 = m_1 n$, следовательно,

$$a^{mn_1} = a^{m_1 n} \text{ и } \sqrt[nn_1]{a^{mn_1}} = \sqrt[nn_1]{a^{m_1 n}},$$

откуда

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}, \text{ т. е. } a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Проверим справедливость свойств (I) и (II) для произвольных положительных дробных степеней $n = \frac{p}{q}$, $m = \frac{r}{s}$.

Имеем:

$$\text{I. } a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} =$$
$$= a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}.$$

$$\text{II. } \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}},$$

Понятие степени для дробного отрицательного показателя распространяется при помощи определения:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Проверкой можно установить, что основные свойства (I) и (II) остаются в силе для произвольного рационального (как положительного, так и отрицательного и нулевого) показателя (предлагаем учащимся сделать проверку).

Если придерживаться определения $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ и при отрицательном a, то $a^{\frac{1}{n}}$ (при $a<0$) следует рассматривать лишь для нечетных значений n, ибо при n четном $\sqrt[n]{a}$ не имеет смысла (в поле действительных чисел).

При $a<0$ дробная степень $a^{\frac{m}{n}}$ рассматривается лишь при следующих условиях: дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а знаменатель $n=2k+1$ нечетное число; тогда имеем:

$$a^{\frac{m}{2k+1}} = \left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{a^m}.$$

§ 44. Степенная функция с рациональным показателем

Определение. *Степенной функцией называется функция, заданная формулой $y = x^n$, где x — аргумент, а n — данное число.*

Областью определения степенной функции является множество всех значений аргумента x при которых выражение x^n имеет смысл.

Степенная функция с натуральным показателем

Пусть n — произвольное натуральное число. Областью определения функции x^n является интервал $-\infty<x<\infty$, так как степень имеет смысл при всех значениях x.

Теорема. *На полусегменте $0\leqslant x<\infty$ функция x^n возрастает от 0 до ∞.*

Доказательство. Требуется доказать нижеследующие положения 1°, 2° и 3°.

1°. На полусегменте $[0, \infty]$ функция x^n возрастает.

В самом деле, в силу свойства монотонности умножения, из двух различных неотрицательных значений x аргумента большему значению x соответствует большее значение x^n:

$$\text{если } x_1 < x_2, \text{ то } x_1^n < x_2^n.$$

2°. При $x=0$ значение функции x^n равно нулю (это очевидно) и $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$.

В самом деле, пусть N произвольное (как угодно большое) число; неравенство $x^n > N$ выполняется при $x > \sqrt[n]{N}$, значит, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$.

3°. Пусть k произвольное неотрицательное число; на полусегменте $0 \leqslant x < \infty$ существует значение аргумента x, при котором $x^n = k$.

В самом деле, по доказанному в § 39 таким значением (и притом единственным) является $x = \sqrt[n]{k}$, ч. т. д.

При четном, $n = 2k$, функция $x^n = x^{2k}$ является четной.

В самом деле, значения функции x^{2k} в противоположных точках x и $-x$ одинаковы:

$$(-x)^{2k} = x^{2k}.$$

Теорема. *При четном $n=2k$ функция $x^n = x^{2k}$ в полуинтервале $-\infty < x \leqslant 0$ убывает от ∞ до 0.*

Доказательство. 1°. Функция x убывает в полуинтервале $-\infty < x \leqslant 0$.

В самом деле, пусть $x_1 < x_2 \leqslant 0$, тогда противоположные числа $-x_1$ и $-x_2$ неотрицательны и $0 \leqslant -x_2 < -x_1$. Следовательно (в силу 2°):

$$(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}.$$

Но так как $(-x_1)^{2k} = x_1^{2k}$ и $(-x_2)^{2k} = x_2^{2k}$, то $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Итак, большему значению аргумента в полуинтервале $(-\infty, 0]$ соответствует меньшее значение функции, т. е. x^{2k} убывает в этом полуинтервале.

2°. При $x = 0$ функция x^k обращается в нуль. Так как при $x < -\sqrt[2k]{N}$ имеем $x^{2k} > (-\sqrt[2k]{N})^{2k} = N$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2k} = \infty$.

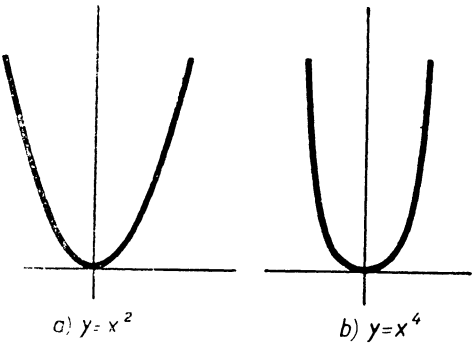
3°. Данное значение $m \geqslant 0$ функция x^{2k} имеет при $x = -\sqrt[2k]{m}$ в полуинтервале $(-\infty, 0]$.

На чертеже 12 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

При n нечетном, $n = 2k+1$, функция $x^n = x^{2k+1}$ является нечетной.

В самом деле, значения x^{2k+1} и $(-x)^{2k+1}$ суть противоположные числа: $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Теорема. *При нечетном $n = 2k+1$ функция x^{2k+1} в полуинтервале $-\infty < x \leqslant 0$ возрастает от $-\infty$ до 0.*



Черт. 12

Доказательство. 1°. Если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $0 \leqslant -x_2 < -x_1$, а потому $(-x_1)^{2k+1} > (-x_2)^{2k+1}$ или, что то же $-x_1^{2k+1} > -x_2^{2k+1}$, откуда $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$. Следовательно, в полуинтервале $-\infty < x \leqslant 0$ функция x^{2k+1} возрастает.

2°. Произвольное отрицательное значение $-m$ (где $m > 0$) функция x^{2k+1} имеет при $x = -\sqrt[2k+1]{m}$.

3°. При $x = 0$ функция x^{2k+1} обращается в нуль. Так как при $x < -\sqrt[2k+1]{N}$ имеем $x^{2k+1} < -N$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, ч. т. д.

Так как в полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция x^{2k+1} возрастает от $-\infty$ до 0, а на полусегменте $[0, \infty]$ она возрастает от 0 до ∞, то в интервале $(-\infty, \infty)$ (т. е. на множестве всех действительных чисел) она возрастает от $-\infty$ до ∞.

Графики функций $y = x$ и $y = x^3$ представлены на чертеже 13.

Степенная функция с целым отрицательным показателем

Рассмотрим функцию $y = x^n$, где $n = -k$, а k — натуральное число.

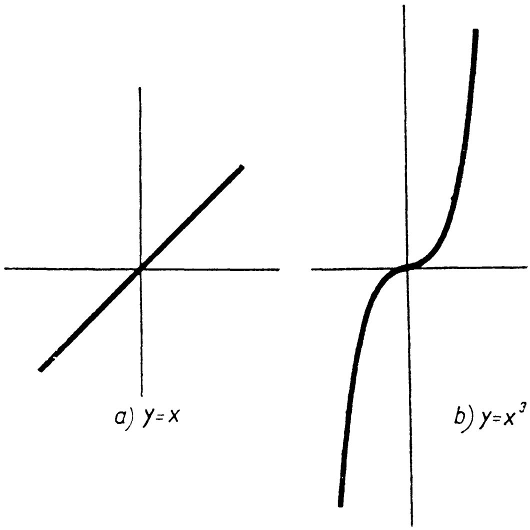
1°. Выражение $\frac{1}{x^k}$ теряет смысл лишь при $x = 0$, поэтому *область определения данной функции есть множество всех* *действительных чисел, отличных от нуля; оно состоит из двух интервалов* $(-\infty, 0)$ *и* $(0, +\infty)$ (число 0 исключается).

Теорема. *В интервале* $(0, \infty)$ *функция* $\frac{1}{x^k}$ *убывает от* ∞ *до* 0.

Доказательство. Требуется доказать следующие положения:

1°. В интервале $0<x<\infty$ функция $\frac{1}{x^k}$ убывает. В самом деле, при $0<x_1<x_2$ имеем $0<x_1^k<x_2^k$, откуда $\frac{1}{x_1^k} > \frac{1}{x_2^k}$,

т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



Черт. 13

2°. Пусть m произвольное положительное число; в интервале $0<x<\infty$ существует значение аргумента x, при котором $\frac{1}{x^k} = m$.

В самом деле, если $\frac{1}{x^k} = m$, то $x^k = \frac{1}{m}$; последнее равенство выполняется при единственном положительном значении

$$x = \frac{1}{\sqrt[k]{m}}.$$

3°. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^k} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

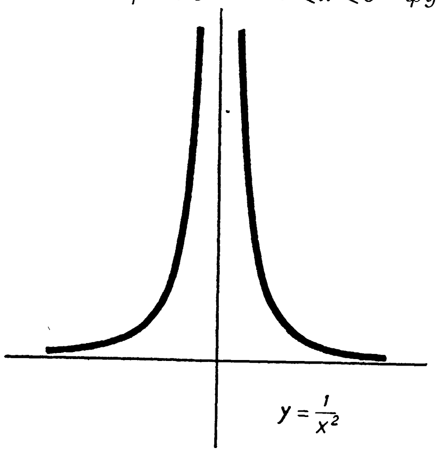
В самом деле, неравенство $\frac{1}{x^k} > N$ выполняется при всех положительных значениях, меньших $\frac{1}{\sqrt[k]{N}}$, где N — произвольное (как угодно большое) положительное число, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^k} = \infty$.

Неравенство $\frac{1}{x^k} < \varepsilon$ выполняется при всех значениях x, бо́льших $\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$, где ε произвольное (как угодно малое) положительное число, т. е. lim $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0$, ч. т. д.

При четном $k = 2l$ функция x^{-k} четная:

$$(-x)^{-k} = \frac{1}{(-x)^{2l}} = \frac{1}{x^{2l}} = x^{-k}.$$

В интервале $-\infty < x < 0$ функция $y = x^{-2l}$ возрастает от 0 до $+\infty$ (подробнее рассуждения предлагаем провести учащимся). На чертеже 14 представлен график функции $y = \frac{1}{x^2}$.



Черт. 14

При нечетном $k = 2l + 1$ функция x^{-k} нечетная:

$$(-x)^{-(2l+1)} = -x^{-(2l+1)}.$$

В интервале $(-\infty, 0)$ эта функция убывает от 0 до $-\infty$. Графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^3}$ представлены на чертеже 15.

Степенная функция с дробным показателем

Положим $n = \frac{1}{k}$, где k — натуральное число.

Рассмотрим функцию

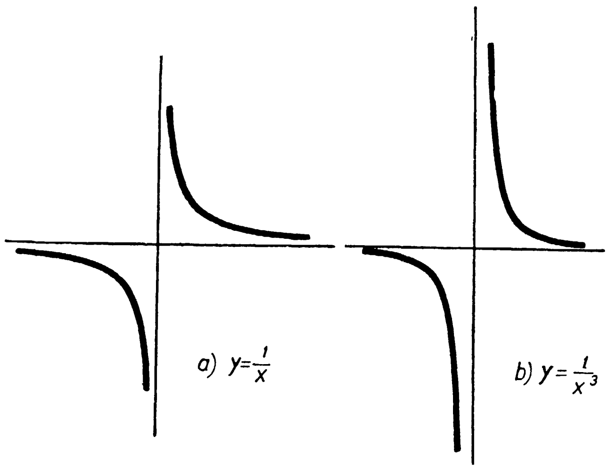
$$y = x^n = \sqrt[k]{x} \text{ на полусегменте } 0 \leqslant x < \infty.$$

Теорема. *На полусегменте $0 \leqslant x < \infty$ функция $\sqrt[k]{x}$ возрастает от 0 до ∞.*

Доказательство. 1°. На полусегменте $[0, \infty)$ функция $\sqrt[k]{x}$ возрастает, так как при $0 \leqslant x_1 < x_2$ имеем $0 \leqslant \sqrt[k]{x_1} < \sqrt[k]{x_2}$ (см. стр. 116).

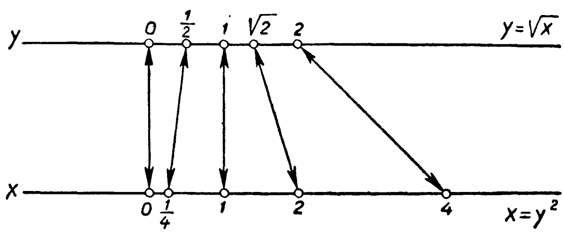
2°. Пусть m — произвольное неотрицательное число; на полусегменте $0 \leqslant x < \infty$ существует (и притом единственное) значение аргумента $x = m^k$, при котором значение функции $\sqrt[k]{x}$ равно m.

3°. При $x=0$ имеем $y=0$. Так как при всех значениях $x > N^k$ имеем $\sqrt[k]{x} > N$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[k]{x} = \infty$, ч. т. д.



Черт. 15

Взаимно обратные функции $y=\sqrt[k]{x}$ и $x=y^k$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между значениями x на полусегменте $0 \leqslant x < \infty$ и значениями y на полусегменте $0 \leqslant y < \infty$. Схема этого соответствия представлена на чертеже 16.



Черт. 16

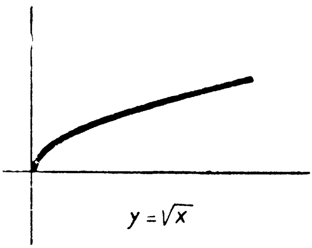
Для построения графика функции $y=\sqrt[k]{x}$ достаточно построить график функции $x = y^k$ для положительных значений y.

Так, при $k=2$ имеем $y=\sqrt{x}$; графиком является часть параболы, изображенной на чертеже 12а, но расположенная, как показано на чертеже 17.

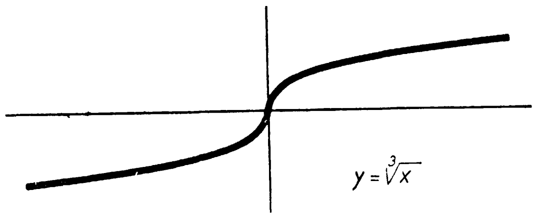
Исследование функции $y=x^{\frac{p}{q}}$ с дробным положительным показателем (где дробь $\frac{p}{q}$ предполагается несократимой) не представляет затруднений. В самом деле, $y=\sqrt[q]{x^p}$; можно разбить вычисление значения y на два шага:

$$u=x^p \text{ и } y=\sqrt[q]{u}.$$

1°. Если q — число четное (p — нечетное), то область определения функции $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ есть полусегмент $0 \leqslant x < \infty$; если q — число нечетное, то область определения есть интервал $-\infty < x < +\infty$.



Черт. 17



Черт. 18

2°. При q нечетном $x^{\frac{p}{q}}$ есть нечетная функция, если p нечетно, и четная, если p четно. В самом деле, в первом случае

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{-x^p}=-\sqrt[q]{x^p}$$

и во втором

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}.$$

3°. Функция $x^{\frac{p}{q}}$ возрастает в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$. В самом деле, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то (согласно изложенному выше)

$$x_1^p < x_2^p \quad \text{и} \quad \sqrt[q]{x_1^p} < \sqrt[q]{x_2^p}.$$

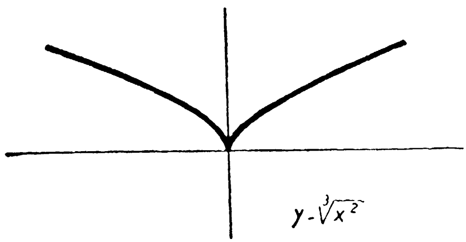
4°. При q нечетном и p четном функция $x^{\frac{p}{q}}$ убывает в интервале $(-\infty, 0)$, а при q нечетном и p нечетном возрастает в этом интервале (доказательство предоставляем учащимся).

5°. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{p}{q}} = +\infty$. В самом деле, если $x > \sqrt[p]{N^q}$, то выполняется неравенство

$$x^{\frac{p}{q}} > N.$$

6°. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} +\infty \text{ (если } q \text{ нечетное и } p \text{ четное),} \\ -\infty \text{ (если } q \text{ нечетное и } p \text{ нечетное).} \end{cases}$

На чертежах 18 и 19 представлены соответственно графики функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{2}{3}}$.



Черт. 19

При дробном отрицательном n функцию $y = x^n$ можно исследовать тем же способом, так и при целом отрицательном, приняв во внимание, что

$$x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}.$$

§ 45. Явные алгебраические функции над полем действительных чисел

Определение. *Функции, определяемые алгебраическими выражениями, называются явными алгебраическими функциями*.*

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется иррациональной.

Согласно этому определению, *закон соответствия явной алгебраической функции можно задать формулой, содержащей лишь алгебраические действия над аргументами и числами данного поля.* Как известно, закон соответствия рациональной функции можно задать посредством лишь четырех арифмети-

* Так как в дальнейшем будут рассматриваться только лишь явные функции, то явные алгебраические функции будем кратко называть алгебраическими.

ских действий, в отличие от этого, закон соответствия иррациональной функции нельзя задать при помощи лишь четырех арифметических действий: *формулы, изображающие иррациональную функцию, непременно содержат аргументы под знаками радикалов.*

В настоящем параграфе будут рассматриваться алгебраические функции над полем действительных чисел, именно, все данные числа будут предполагаться действительными, а допустимые значения для аргументов должны быть таковы, чтобы действия, содержащиеся в формуле (изображающей функцию), были выполнимы в поле действительных чисел.

Не всякая функция, заданная иррациональным выражением. является иррациональной. Так, например, функция, заданная формулой $y = \sqrt[3]{x^9}$, на самом деле является рациональной, так как ее закон соответствия можно задать формулой $y = x^3$.

Таким образом, *при классификации функции существенен характер закона соответствия функции, а не внешний вид формулы, его изображающей.*

При установлении области определения явной алгебраической функции, рассматриваемой над полем действительных чисел. надлежит руководствоваться следующими правилами.

1°. *Значения выражений, содержащихся в качестве делителей в формуле, изображающей алгебраическую функцию, должны быть отличными от нуля.*

2°. *Подкоренные выражения радикалов четной степени должны быть неотрицательными.*

Если выражение, изображающее алгебраическую функцию, содержит радикалы четных степеней:

$$\sqrt[2k]{f(x, \ldots, z)}, \quad \sqrt[2l]{\varphi(x, \ldots, z)}, \quad \sqrt[2m]{\psi(x, \ldots, z)}, \ldots,$$

то допустимые системы значений аргументов должны удовлетворять системе неравенств:

$$f(x, \ldots, z) \geqslant 0, \ \varphi(x, \ldots, z) \geqslant 0, \ \ldots, \ \psi(x, \ldots, z) \geqslant 0.$$

Примеры

1. **Функция**

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}}{x - 1}$$

является рациональной над полем действительных чисел, так как в изображающей ее формуле аргумент не содержится под знаком радикала.

Ниже даны примеры установления областей определения и исследования иррациональных функций.

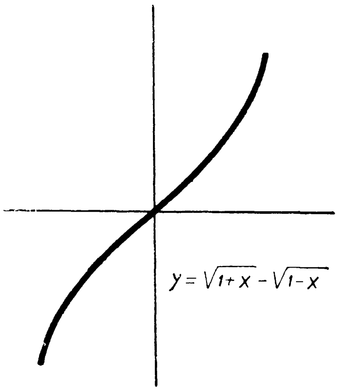
2. Область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

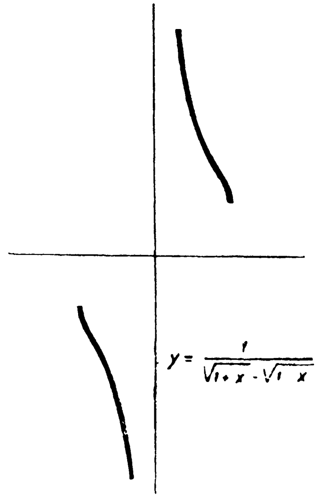
устанавливается системой неравенств $1 + x \geqslant 0$, $1 - x \geqslant 0$, это есть сегмент $-1 \leqslant x \leqslant 1$. На этом сегменте $\sqrt{1+x}$ возрастает от 0 до $\sqrt{2}$, а $\sqrt{1-x}$ убывает от $\sqrt{2}$ до 0, функция $f(x)$ возрастает от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$. Функция $f(x)$ нечетная, так как

$$f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -f(x),$$

график представлен на чертеже 20.



Черт. 20



Черт. 21

3. Для установления области определения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

к неравенствам $1 + x \geqslant 0$, $1 - x \geqslant 0$ надо присоединить условие:

$$\sqrt{1+x} \neq \sqrt{1-x}, \text{ откуда } x \neq 0.$$

Область определения есть совокупность двух промежутков

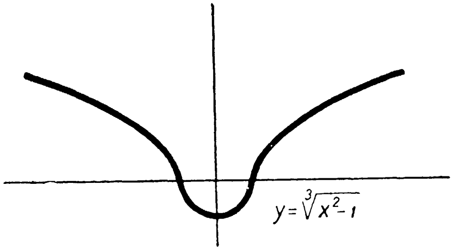
$$-1 \leqslant x < 0 \text{ и } 0 < x \leqslant 1.$$

Так как $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ (при $x \neq 0$), где $f(x)$ — функция, рассмотренная в предыдущем примере, то на полусегменте $[-1; 0)$ функция $\varphi(x)$ убывает от $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ до $-\infty$, а в полуинтервале $(0; 1]$ убывает от ∞ до $\frac{1}{\sqrt{2}}$ график представлен на чертеже 21.

4. Область определения функции $f(x) = \sqrt[k]{x^{2n} - a^{2n}}$ (где $a \neq 0$)

при четном k устанавливается из условия $x^{2n} - a^{2n} \geqslant 0$, откуда $x^{2n} \geqslant a^{2n}$ и $|x| \geqslant |a|$.

Область определения есть множество двух промежутков $-\infty < x \leqslant -|a|$ и $|a| \leqslant x < +\infty$, функция четная; в промежутке $|a| \leqslant x < +\infty$ возрастает от 0 до $+\infty$, а в промежутке $(-\infty, -|a|\,]$ убывает от $+\infty$ до 0.



Черт. 22

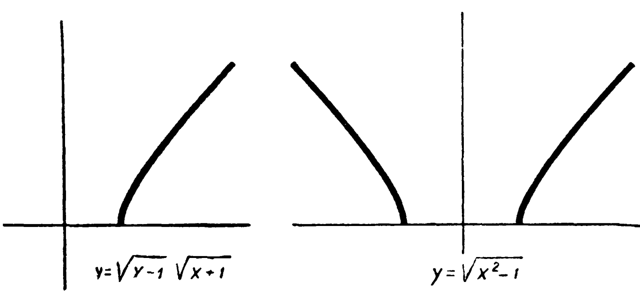
При нечетном k область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$. Так как x^{2n} возрастает от 0 до $+\infty$ в промежутке $[0, +\infty)$ и убывает от $+\infty$ до 0 в промежутке $(-\infty, 0]$, то $f(x)$ возрастает от $-\sqrt[k]{a^{2n}}$ до $+\infty$ в первом промежутке и убывает от $+\infty$ до $-\sqrt[k]{a^{2n}}$ во втором. Наименьшее значение $f(x)$ есть $-\sqrt[k]{a^{2n}}$; функция четная (черт. 22).

5. Область определения функции $\sqrt[2k]{a^{2n} - x^{2n}}$ есть сегмент $-|a| \leqslant x \leqslant |a|$, функция четная, на сегменте $[0, \ |a|\,]$ убывает от $\sqrt[k]{|a|^n}$ до 0, а на сегменте $[|a|\,, 0]$ возрастает от 0 до $\sqrt[k]{|a|^n}$.

6. Область определения функции $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$ определяется системой неравенств $x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, имеющей единственное решение $x = 0$. Область определения состоит из одной точки $x = 0$.

7. Выражение $\sqrt{-a^2 - x^2}$ при $a \neq 0$ не определяет над полем действительных чисел никакой функции, так как $-a^2 - x^2 < 0$ при произвольном действительном x.

8. Область определения функции $y = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$ устанавливается системой неравенств $x - 1 \geqslant 0$, $x + 1 \geqslant 0$, откуда $1 \leqslant x < +\infty$. Для функции $\sqrt{x^2-1}$ (см. пример 5) область определения есть совокупность



Черт. 23

двух промежутков $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (черт. 23); тождественное преобразование

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$$

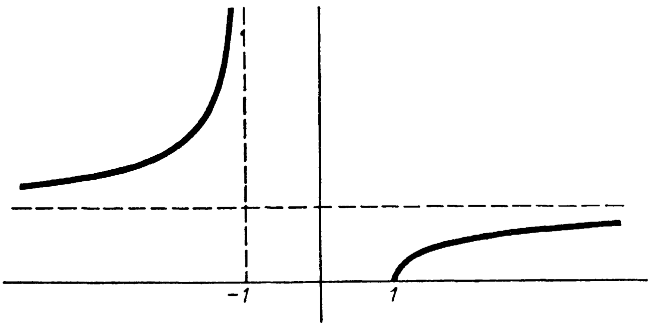
сужает область определения левой части, так как из этой области исключается полуинтервал $(-\infty, -1]$.

9. Область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

устанавливается условием $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$. Следовательно, либо (числитель неотрицателен, знаменатель положителен) $x-1 \geqslant 0$, $x+1>0$, откуда $x \geqslant 1$, либо (числитель неположителен, знаменатель отрицателен) $x-1 \leqslant 0$, $x+1<0$, откуда $x<-1$. Область определения состоит из двух промежутков $-\infty<x<-1$ и $1 \leqslant x<\infty$. Исключив целую часть из подкоренной дроби, получим:

$$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1} \quad \text{и} \quad f(x)=\sqrt{1-\frac{2}{x+1}}.$$



$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Черт. 24

На полусегменте $1 \leqslant x<+\infty$ дробь $\frac{2}{x+1}$ убывает от 1 до 0, а, следовательно, $f(x)$ возрастает от 0 до 1. В интервале $-\infty<x<-1$ дробь $\frac{2}{x+1}$ убывает от 0 до $-\infty$, а, следовательно, $f(x)$ возрастает от 1 до $+\infty$. Заметим, что

$$f(-x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{f(x)},$$

график представлен на чертеже 24.

10. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$, функция нечетная, возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$. В самом деле, при $x>0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

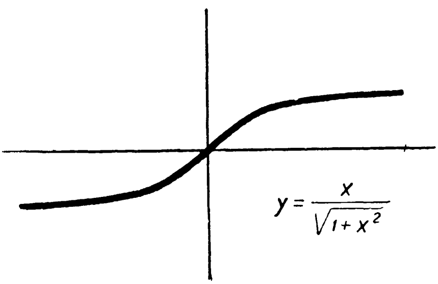
Так как $\frac{1}{x^2}$ убывает, то знаменатель также убывает, а $f(x)$ возрастает. При $x < 0$ имеем:

$$f(x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}.$$

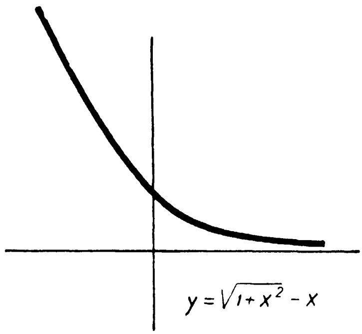
Так как $\frac{1}{x^2}$ возрастает, то $|f(x)|$ убывает, $f(x) < 0$, а потому $f(x)$ возрастает. Имеем

$$f(0) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

Итак, в интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает от -1 до 1 (черт. 25).



Черт. 25



Черт. 26

11. Исследовать функцию $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$. В промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ функция убывает от $+\infty$ до 1, так как при $x < 0$ оба слагаемые $\sqrt{x^2+1}$ и $-x$ убывают:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad f(0) = 1.$$

В промежутке $0 \leq x < \infty$ функция убывает от 1 до 0. В самом деле (переносим иррациональность в знаменатель)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x};$$

в интервале $(0, +\infty)$ знаменатель возрастает от 1 до $+\infty$. Итак, в интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $f(x)$ убывает от $+\infty$ до 0 (черт. 26). Заметим, что $f(x)$ есть разность между ординатой верхней ветви гиперболы $y^2 = x^2 + 1$ и ординатой одной из ее асимптот $y = x$ (черт. 27).

При помощи выражений, содержащих радикалы, могут быть заданы различные «разрывные линии», состоящие из отдельных дуг, ломаные линии и т. п.

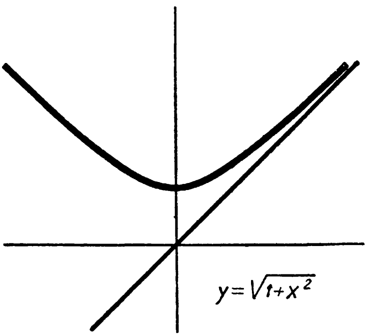
12. Функция $y=\sqrt{x^2}$ имеет графиком линию, состоящую из биссектрис I и II квадрантов координатной плоскости. В самом деле,

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0 \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases} \qquad \text{(черт. 28)}$$

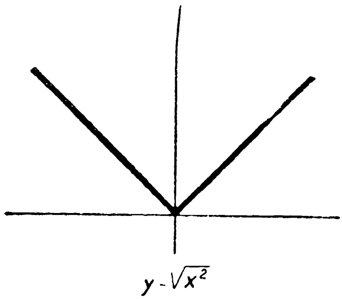
13. Функция $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ графически изображается двумя прямолинейными лучами, так как

$$y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1, \text{ если } x>0 \\ -1, \text{ если } x<0. \end{cases} \qquad \text{(черт. 29)}$$

Область определения состоит из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В точке 0 функция не имеет значения.



Черт. 27



Черт. 28

14. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}.$$

Область определения устанавливается условием

$$1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2>0,$$

откуда $x\neq 0$, следовательно, область определения состоит из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Имеем:

$$f(x)=\frac{2x(1+x^2)}{2|x|}=\begin{cases} -(1+x^2), \text{ если } x<0 \\ 1+x^2, \text{ если } x>0. \end{cases}$$

График представлен на чертеже 30.

15. Исследовать функцию

$$y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}.$$

Имеем:

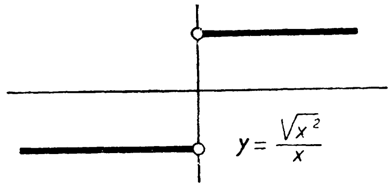
$$\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=\begin{cases} -(x+2) \text{ при } x\leqslant -2 \\ x+2 \text{ при } x\geqslant -2 \end{cases}$$

и

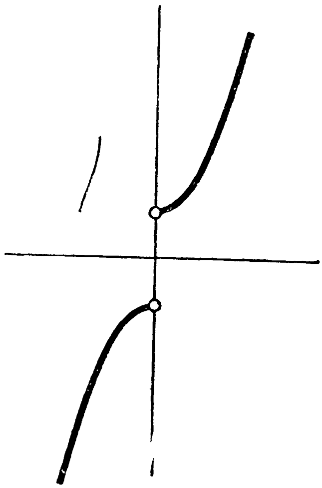
$$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}-(x-2) & \text{при } x\leqslant 2\\ x-2 & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Область определения есть интервал $(-\infty,\ +\infty)$. Имеем:

$$y=|x+2|+|x-2|=\begin{cases}-2x & \text{при } x\leqslant -2\\ 4 & \text{при} -2\leqslant x\leqslant 2\\ 2x & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$$

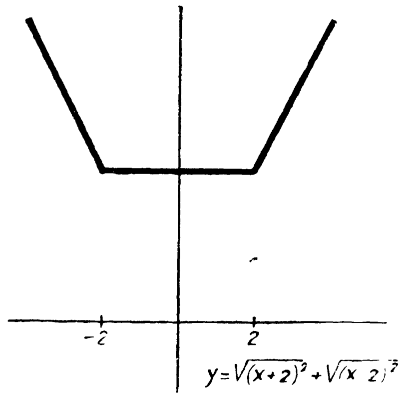


Черт. 29



Черт. 30

Графиком является ломаная, состоящая из трех звеньев (черт. 31).



Черт. 31

16. Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$y=\frac{x\sqrt{x^4-a^4}}{a\ x^2-a^2}\sqrt{\frac{1-\dfrac{a^2}{x^2}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}},$$

где a — данное отличное от нуля число.

Допустимые значения аргумента определяются из условий:

$$x^4-a^4\geqslant 0;\qquad \frac{1-\dfrac{a^2}{x^2}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\geqslant 0\quad \text{и}\quad |x|\neq|a|.$$

Эти условия выполняются, если $|x| > |a|$. Следовательно, область определения состоит из двух интервалов:

$$-\infty < x < -|a| \quad \text{и} \quad |a| < x < +\infty.$$

При выполнении тождественных преобразований считаем $|x| > |a|$, а потому $x^2 - a^2 > 0$; имеем:

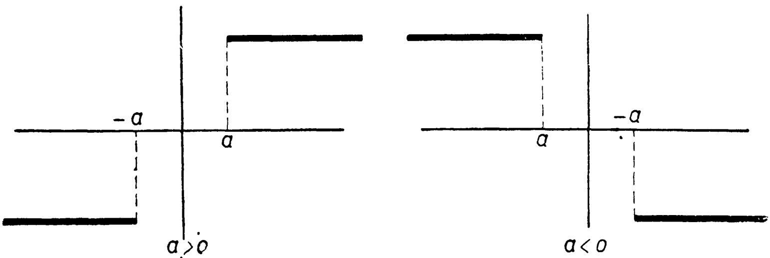
$$y = \frac{x}{a} \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}}{x^2 - a^2} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}} \frac{|a|}{|x|} =$$

$$= \frac{x}{a} \frac{|a|}{|x|} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2 - a^2} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x}{a} \frac{|a|}{|x|}.$$

Если $a > 0$, то $y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > a \\ -1 & \text{при } x < -a. \end{cases}$

Если $a < 0$, то $y = -\frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{если } x > -a \\ 1, & \text{если } x < a. \end{cases}$

График изображен на чертеже 32.



Черт. 32

Примечание. Применение принципа продолжения по непрерывности позволяет присоединить точки $x = \pm a$ к области определения. Так, например, при $a > 0$ имеем:

$$\lim_{x \to a} y = \lim 1 = 1 \text{ и } \lim_{x \to -a} y = -1.$$

Поэтому в точках a и $-a$ следует считать $y = 1$ и $y = -1$ (соответственно).

17. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \quad \text{(где } a \text{ данное число).} \qquad (1)$$

Если $a = 0$, то дроби, находящиеся под радикалами, обращаются в -1, поэтому над полем действительных чисел данную функцию следует рассматривать при $a \neq 0$. Радикалы действительны, если

$$\frac{a+x}{a-x} > 0.$$

Откуда (числитель и знаменатель положительны)

$$a+x>0 \quad \text{и} \quad a-x>0 \tag{2}$$

или (числитель и знаменатель отрицательны)

$$a+x<0 \quad \text{и} \quad a-x<0. \tag{3}$$

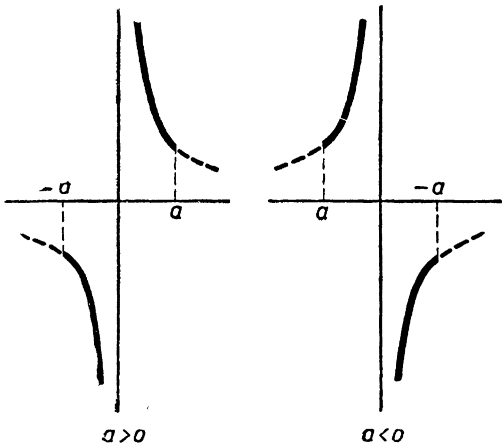
Ни одно из равенств $a+x=0$ и $a-x=0$ не может выполняться, так как при $x=a$ или $x=-a$ теряет смысл одно из подкоренных выражений.

Если $a>0$, то из системы неравенств (2) найдем $-a<x<a$, а система (3) не имеет решений.

Если $a<0$, то из системы (2) находим $a<x<-a$, а система (1) не имеет решений.

Итак, радикалы действительны, если $-|a|<x<|a|$. Знаменатель данного выражения y обращается в нуль, если

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad \text{или} \quad \frac{a+x}{a-x}=\frac{a-x}{a+x},$$



Черт. 33

откуда $x=0$; а потому $x=0$ не является допустимым значением аргумента. Следовательно, областью определения функции является множество двух интервалов $-|a|<x<0$ и $0<x<|a|$. В каждом из этих интервалов имеем (умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$);

$$y=\frac{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+1}{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)-1}=\frac{a}{x}.$$

Графически функция изображается частью гиперболы $y=\frac{a}{x}$, содержащейся в полосе, ограниченной прямыми $x=\pm|a|$ (черт. 33).

Преобразования, которые применялись в настоящем примере, изменяют область определения первоначально данного выражения, а именно, для данного выражения область определения состоит из двух интервалов $(-|a|, 0)$ и $(0, |a|)$, тогда как для преобразованного выражения $\frac{a}{x}$ областью определения является совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Следовательно, функция, заданная выражением (1), есть функция $\frac{a}{x}$, но рассматриваемая в части области ее определения, состоящей из двух интервалов $(-|a|, 0)$ и $(0, |a|)$.

П р и м е ч а н и е. Если применить принцип продолжения по непрерывности, то получим следующие значения функции в точках

$x = \pm a$:

$$y = \lim_{x \to a} \frac{a}{x} = 1 \quad \text{и} \quad y = \lim_{x \to -a} \frac{a}{x} = -1.$$

18. Исследовать функцию

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Область определения находится из условий:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0.$$

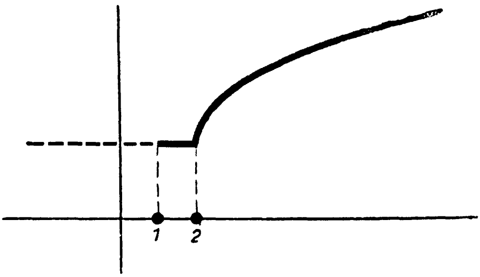
Из первого условия найдем: $x \geqslant 1$: из второго

$$x \geqslant 2\sqrt{x-1} \text{ откуда}$$

$x^2 \geqslant 4x - 4$* или

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0,$$

последнее неравенство выполняется при всех действительных x. Следовательно, область определения есть промежуток $1 \leqslant x < +\infty$. Применив к каждому радикалу формулу преобразования сложного радикала, получим (положить $A = x$, $B = 4(x-1)$):



Черт. 34

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x + \sqrt{(x-2)^2}}{2}} = 2\sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 2 & (\text{если } x \leqslant 2) \\ 2\sqrt{x-1} & (\text{если } x \geqslant 2). \end{cases}$$

График состоит из прямолинейного отрезка и части параболы (черт. 34).

Примечание. Выполненное преобразование расширяет область определения первоначального данного выражения до множества всех действительных чисел. Аналогичный случай имел место в предыдущем примере.

§ 46. Функция $\sqrt[n]{z}$ от комплексного аргумента

Докажем, что в поле комплексных чисел выполнимо действие извлечение корня. Пусть $z = a + bi$ — данное комплексное число.

Теорема. *Если $z \neq 0$, то существует **n** различных комплексных чисел, удовлетворяющих условию $w^n = z$.*

При $z = 0$ этому условию удовлетворяет единственное число $w = 0$.

Доказательство. Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — данное отличное от нуля комплексное число. Будем искать комплексное

* Почленное возведение в квадрат неравенства возможно, так как при $x \geqslant 1$ обе части неотрицательны.

число $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, n-я степень которого равна z:

$$w^n = z.$$

Согласно правилу возведения в степень мы должны иметь:

$$|z| = |w|^n \text{ и } \arg z = n\arg w. \qquad (1)$$

Под символом $\arg z$ можно подразумевать произвольное значение аргумента числа z. Если φ — главное значение аргумента z, то общее выражение для аргумента z будет:

$$\arg z = \varphi + 2k\pi, \quad \text{где } 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Условие (1) можно переписать следующим образом:

$$r^n = \rho \text{ и } n\psi = \varphi + 2k\pi, \text{ откуда } r = \sqrt[n]{\rho} \text{ и } \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

По теореме о существовании арифметического корня (см. § 39) для модуля w получаем единственное значение $|w| = \sqrt[n]{\rho}$. Аргумент ψ определяется неоднозначно. В самом деле, полагая $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим бесконечное множество значений для ψ:

$$\ldots \psi_{-1} = \frac{\varphi}{n} - \frac{2\pi}{n},\ \psi_0 = \frac{\varphi}{n},\ \psi_1 =$$
$$= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ldots$$

и соответственно

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Докажем, что среди значений w имеется лишь n отличных друг от друга чисел. Полагая $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n значений корня $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. Ясно, что $w_r \neq w_n$, если $r \neq s$ (где $0 \leqslant r \leqslant n-1$ и $0 \leqslant s \leqslant n-1$). В самом деле, $\arg w_r = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi r}{n}$ и $\arg w_s = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi s}{n}$ не могут отличаться на кратное 2π, ибо

$$\arg w_r - \arg w_s = \frac{2\pi(r-s)}{n}, \text{ но } |r-s| < n \text{ и } \left|\frac{r-s}{n}\right| < 1.$$

Нетрудно видеть, что $w_n = w_0$. В самом деле,

$$|w_n| = |w_0| \text{ и } \arg w_n = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \arg w_0 + 2\pi.$$

Аналогично можно установить, это $w_0 = w_{2n} = \ldots = w_{-n} = w_{-2n} \ldots$, что $w_1 = w_{n+1} = w_{2n+1} \ldots$ и вообще, что $w_k = w_l$, если $k - l$ есть число, кратное n, ч. т. д.

Символом $\sqrt[n]{z}$ *обозначается множество всех корней* n*-й степени из* z; *при* $z \neq 0$ *этот символ имеет* n *различных значений.*

В дальнейшем при одновременном рассмотрении комплексных и арифметических радикалов последние будем обозначать символом $\underset{+}{\sqrt[n]{}}$.

В частности при $z = 1$ имеем $\varphi = 0$, $\rho = 1$, откуда найдем следующие значения n значений $\sqrt[n]{1}$:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon; \quad \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2, \ \ldots,$$

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon^k, \ldots, \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = \varepsilon^n = 1.$$

Таким образом, комплексные корни из 1 суть степени ε, где ε — первое мнимое значение корня из 1 (при $k = 1$). Из выражения для k-го значения корня $\sqrt[n]{z}$ найдем:

$$w_k = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= \underset{+}{\sqrt[n]{\rho}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = w_0\varepsilon^k.$$

Следовательно, *все значения* $\sqrt[n]{z}$ *можно получить из начального значения* w_0 *последовательным умножением его на значения корня* n*-й степени из* 1, *т. е. на* $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$:

$$\sqrt[n]{z} = w_0, \varepsilon w_0, \ \ldots, \varepsilon^{n-1} w_0.$$

Геометрическая интерпретация. Умножение на число ε геометрически означает поворот радиуса-вектора множимого на $\frac{1}{n}$-ю часть полного оборота. Отсюда ясно, что концы радиусов-векторов, изображающих числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, суть вершины правильного n-угольника с центром в начале координат (черт. 35, где $n = 6$).

Извлечение квадратного корня можно выполнить алгебраически без перехода к тригонометрической форме. Пусть

$$x = x + iy \quad \text{и} \quad w = u + iv.$$

Вычислим u и v из условий $w^2 = z$ или

$$(u + iv)^2 = x + yi.$$

Следовательно,

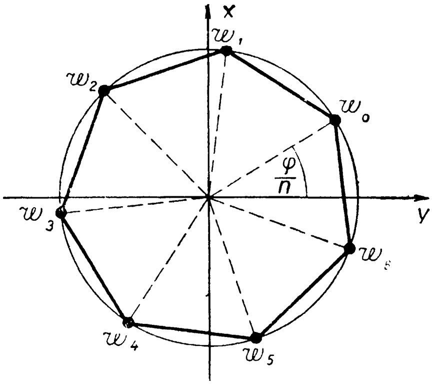
$$u^2 - v^2 + 2uvi = x + yi.$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$u^2 - v^2 = x, \qquad (1)$$

$$2uv = y. \qquad (2)$$

Возведя обе части каждого из этих уравнений в квадрат и сложив, получим:



Черт. 35

$$(u^2 + v^2)^2 = x^2 + y^2.$$

Откуда

$$u^2 + v^2 = \underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (3)$$

(берем арифметическое значение корня, так как $u^2 + v^2 > 0$); из уравнений (1) и (3) найдем:

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right),$$

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x\right).$$

Следовательно,

$$u = \pm \underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x}{2}}}, \quad v = \pm \underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x}{2}}}.$$

Из уравнения (2) следует, что при $y > 0$ числа u и v должны быть одинаковы по знаку, а потому радикалы следует взять с одним и тем же знаком. Если $y < 0$, то радикалы следует взять с противоположными знаками. Итак,

$$\sqrt{x + iy} = \pm\left(\underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x}{2}}} + i\underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x}{2}}}\right),$$

если $y > 0$ и

$$\sqrt{x + iy} = \pm\left(\underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x}{2}}} - i\underset{+}{\sqrt{\frac{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x}{2}}}\right),$$

если $y < 0$.

Применение этого способа к корням степени выше второй встречает трудности, связанные с необходимостью решать системы уравнений высших степеней. Так, например, в случае кубического корня, положив

$$x+iy=(u+iv)^3$$

и возведя в куб, получим

$$x+iy=u^3-3uv^2+i(3u^2v-v^3).$$

Откуда для определения u и v получим систему уравнений:

$$u^3-3uv^2=x, \quad 3u^2v-v^3=y.$$

Попытка решить эту систему снова привела бы к необходимости извлекать кубические корни из мнимых чисел, т. е. по сути дела мы возвратимся к первоначальной задаче.

Примеры

1. Ниже даны значения комплексных корней из 1.

При $n=2$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}=-1, \quad \varepsilon^2=1.$$

При $n=3$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^3=1.$$

При $n=4$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i; \quad \varepsilon^2=-1, \quad \varepsilon^3=-i, \quad \varepsilon^4=1.$$

При $n=5$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}^{\,*}}{4};$$

$$\varepsilon^2=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \quad \varepsilon^3=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\varepsilon^4=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}; \quad \varepsilon^5=1.$$

---

* Как известно $\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}$, но $\sin\frac{\pi}{10}$ есть половина стороны правильного десятиугольника, вписанного в единичный круг, а потому

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

При $n = 6$

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \varepsilon^3 = -1;$$

$$\varepsilon^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \varepsilon^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \varepsilon^6 = 1.$$

2. Найти $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение. Представим подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно,

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

но

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Откуда

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right).$$

Для нахождения w_1 и w_2 следует умножить w_0 на

$$\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \varepsilon^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Для извлечения квадратного корня применим формулу (стр. 168):

$$\sqrt{-5-12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{169}-5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{169}+5}{2}}\right) = \pm(2-3i).$$

Всякому комплексному числу $z \neq 0$ можно поставить в соответствие n различных чисел — значений корня $\sqrt[n]{z}$, поэтому *выражение $w = \sqrt[n]{z}$ определяет n-значную функцию комплексного аргумента z.*

Рассмотрим две координатные плоскости — плоскость XOY для изображения значений $z = x + iy$ и плоскость UOV для изображения соответствующих значений $w = u + iv$; каждой точке плоскости $z \neq 0$ на плоскости UOV соответствует множество n различных точек.

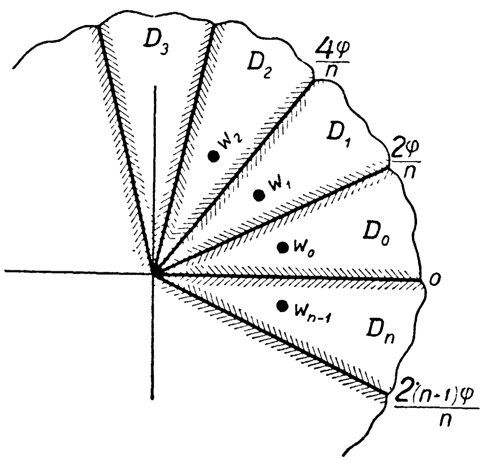
Функция, обратная относительно $w = \sqrt[n]{z}$, есть $z = w^n$, эта функция однозначна, причем в n различных точках w, εw, $\varepsilon^2 w$, ..., $\varepsilon^{n-1} w$ (где ε значение $\sqrt[n]{1}$) образующих вершины правильного n-угольника (с центром в $w = 0$), эта функция имеет одно и то же значение.

Возьмем в качестве аргумента z главное его значение $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и рассмотрим соответствующее значение:

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}_{+} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right).$$

Для главного значения $\arg w_0 = \frac{\varphi}{n}$ имеют место неравенства $0 \leqslant \frac{\varphi}{n} < \frac{2\pi}{n}$ На плоскости UOV эти неравенства определяют угол, образованный лучами $\arg w = 0$ и $\arg w = \frac{2\pi}{n}$.

Внутренюю область этого угла с присоединенной стороной $\arg w = 0$ обозначим через D_0. Итак, значение w_0 содержится в D_0 (черт. 36).



Черт. 36

Если в качестве аргумента z взять значение $\varphi + 2\pi$, то получим соответствующее значение корня:

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}_{+} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Это значение содержится в угле D_1, определяемом неравенствами

$$\frac{2\pi}{n} \leqslant \arg w_1 < \frac{4\pi}{n}, \text{ так как } \frac{2\pi}{n} \leqslant \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} < \frac{4\pi}{n}.$$

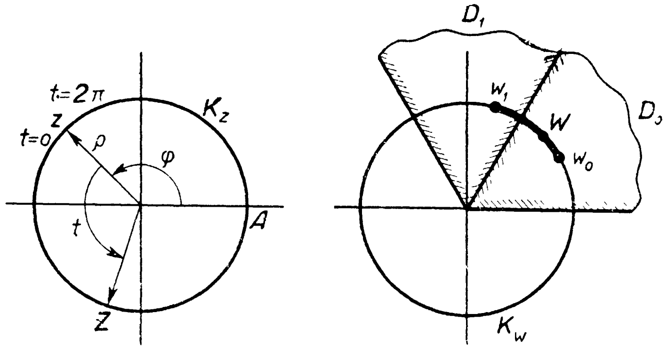
Значение корня

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}_{+} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

содержится в угле D_k, определяемом неравенствами:

$$\frac{2k\pi}{n} \leqslant \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}.$$

Пусть $z \neq 0$ — данное комплексное число; возьмем в качестве $\arg z$ главное его значение: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Рассмотрим окружность K_z радиуса $\rho = |z|$ с центром в начале координат (черт. 37). Положение произвольной точки Z этой окружности определяется



Черт. 37

центральным углом t, который будем отсчитывать от радиуса-вектора точки z. Сегменту $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ соответствует полная окружность K_z, при этом концам сегмента $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответствует одна и та же точка z. По условию $|Z| = |z| = \rho$, а в качестве аргумента Z возьмем следующее, вполне определенное значение $\varphi + t$, где $0 \leqslant t < 2\pi$. На плоскости UOV точке z соответствует точка w_0, лежащая в D_0, а точке Z точка $W = \sqrt[n]{Z}$, лежащая на окружности K_w радиуса $\sqrt[n]{\rho}_{+}$ с центром в начале координат, ибо $|W| = \sqrt[n]{\rho}_{+}$.

При этом, так как в качестве $\arg Z$ выбрано вполне определенное значение $\varphi + t$, то и точка W (при $Z \neq z$) определяется единственным образом:

$$W = \sqrt[n]{\rho}_{+} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{t}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{t}{n}\right)\right].$$

Если точка Z расположена на дуге zA (черт. 37), то $0 \leqslant \varphi + t < 2\pi$, а потому $0 \leqslant \arg W = \frac{\varphi + t}{n} < \frac{2\pi}{n}$.

Следовательно, точка W расположена на дуге окружности K_w, содержащейся в D_0. Если точка Z расположена на дуге Az, то $2\pi \leqslant \varphi + t < 4\pi$, а потому

$$\frac{2\pi}{n} < \arg W \leqslant \frac{\varphi + t}{n} < \frac{4\pi}{n}$$

и, следовательно, точка W расположена на дуге окружности K_w в области D_1. Значению $t = 0$ соответствует точка $W = w_0$, а значению $t = 2\pi$ точка $W = w_1$. Итак, полной окружности K_z соответствует в плоскости UOV дуга окружности K_w, соединяющая точки w_0 и w_1. Начальной точке z соответствуют две различные точки w_0 и w_1.

Все сказанное кратко принято описывать так: *если точка z, описав в плоскости XOY окружность с центром в точке 0, возвращается в первоначальное положение, то значение w_0 корня $\sqrt[n]{z}$ переходит в значение w_1.*

Заметим, что вместо окружности K_z может быть взята любая простая замкнутая линия, содержащая начало во внутренней области.

Аналогично устанавливается, что при обходе точкой z окружности K_z значение w_1 переходит в w_2, w_2 переходит в w_3 и т. д. w_k переходит в w_{k+1}, w_{n-1} переходит в w_0.

Значения $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ корня $\sqrt[n]{z}$ называются ветвями многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$, эти ветви переходят друг в друга (в круговом порядке) при обходе точки z вокруг начала координат по простой замкнутой линии.

Аналитические выражения, содержащие комплексные радикалы, имеют иной смысл, чем выражения, содержащие действительные радикалы.

1°. В соответствии с определением комплексного радикала, $\sqrt[n]{A}$ есть множество всех решений уравнения

$$Z^n = A$$

(а не некоторое определенное его решение).

2°. Пусть дано некоторое выражение

$$W\left(\sqrt[n]{A},\ \sqrt[m]{B},\ \ldots, \sqrt[p]{C}\right), \tag{W}$$

содержащее комплексные радикалы.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда выражение (W) является рациональной функцией относительно радикалов

$\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[m]{B}$, . . ., $\sqrt[p]{C}$. Это значит, что функция $W(x, y, ..., z)$ есть рациональная функция от аргументов $x, y, ..., z$, а выражение (w) получается заменой:

$$x = \sqrt[n]{A}, \quad y = \sqrt[m]{B}, \quad . \; . \; ., \quad z = \sqrt[p]{C}.$$

Если для каждого из радикалов взять некоторое определенное значение, то выражение (W) также получит некоторое определенное значение (если только оно не утратит смысла). Выражение (W), содержащее комплексные радикалы, рассматривается как многозначное: множество его значений есть то множество чисел, которое получится, если каждому из радикалов $\sqrt[n]{A}, \sqrt[m]{B}, \; . \; . \; ., \sqrt[p]{C}$ придавать все возможные для него значения.

Заметим, что радикалы $\sqrt[n]{A}, \sqrt[m]{B}, \sqrt[p]{C}$ могут быть сложными, т. е. подкоренные выражения $A, B, ..., C$ в свою очередь могут содержать радикалы.

Если выражение (W) содержит аргументы, то оно определяет в общем случае многозначную функцию от этих аргументов.

Равенство двух выражений, содержащих радикалы, понимается в следующем смысле: множество всех значений первого выражения и множество всех значений второго выражения совпадают (т. е. состоят из одних и тех же чисел).

Пример

Найти все значения выражения $\sqrt{25} + \sqrt[3]{i}$.

Решение. В поле комплексных чисел радикал $\sqrt{25}$ имеет два значения:

$$\sqrt{25} = 5, -5,$$

а радикал $\sqrt[3]{i}$ имеет три значения:

$$\sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad -i.$$

Комбинируя все возможные значения слагаемых, получим шесть значений данного выражения:

$$\sqrt{25} + \sqrt[3]{i} = \frac{10 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad \frac{10 - \sqrt{3}}{1} + i\frac{1}{2},$$

$$5 - i, \quad \frac{-10 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad \frac{-10 - \sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -5 - i.$$

Действия над радикалами в поле комплексных чисел имеют иной смысл по сравнению с действиями над арифметическими радикалами в поле действительных чисел.

I. Рассмотрим умножение корней одинаковой степени. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 какие-либо значения аргументов сомножителей. Имеем:

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

и

$$\sqrt[n]{z_1} = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho_1}}\left(\cos\frac{\varphi_1 + 2k_1\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2k_1\pi}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{z_2} = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho_2}}\left(\cos\frac{\varphi_2 + 2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_2 + 2k_2\pi}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{z_1z_2} = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho_1\rho_2}}\left(\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi}{n}\right), \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2} = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho_1}}\underset{+}{\sqrt[n]{\rho_2}}\left[\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2+2(k_1+k_2)\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2+2(k_1+k_2)\pi}{n}\right], \quad (2)$$

где k, k_1 и k_2 — произвольные целые числа. Формулы (1) и (2) определяют (каждая) некоторое множество (конечное) чисел; докажем, что оба эти множества состоят из одних и тех же чисел. В самом деле:

1°. $\underset{+}{\sqrt[n]{\rho_1\rho_2}} = \underset{+}{\sqrt[n]{\rho_1}}\underset{+}{\sqrt[n]{\rho_2}}$, в силу свойств арифметических радикалов.

2°. Так как $k_1 + k_2$ есть целое число, то можно положить $k = k_1 + k_2$, следовательно, всякое число из множества значений $\sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2}$ содержится в множестве значений $\sqrt[n]{z_1z_2}$.

3°. Так как всякое целое число k можно (бесконечным множеством способов) разбить на два целые слагаемые $k_1 + k_2 = k$, то всякое число множества $\sqrt[n]{z_1z_2}$ содержится в множестве чисел $\sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2}$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{z_1z_2} = \sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2}.$$

II. В силу определения корня имеет место тождество $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$ для любого значения радикала, но $\sqrt[n]{(z^n)}$ имеет n значений:

$$\sqrt[n]{(z^n)} = \rho\left(\cos\frac{n\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{n\varphi + 2k\pi}{n}\right) = z\varepsilon^k,$$

а потому символы $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n$ и $\sqrt[n]{(z^n)}$ имеют различный смысл.

III. Правило сокращения показателей не имеет места, символы

$$\sqrt[nk]{z^k} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{z}$$

различны: первый имеет nk, а второй n значений. Значения $\sqrt[n]{z}$ содержатся среди значений $\sqrt[nk]{z^n}$. В самом деле

$$\sqrt[nk]{z^k} = \sqrt[n]{\rho}_{+}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k_1\pi}{nk}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k_1\pi}{nk}\right)\right].$$

Если k_1 делится на k, то получается одно из значений радикала $\sqrt[n]{z}$.

IV. Символы: $\sqrt[n]{z^m}$ и $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ не всегда имеют одинаковый смысл.

Имеем:

$$\sqrt[n]{z^m} = \sqrt[n]{\rho^m}_{+}\left[\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\right] \tag{1}$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^m = \sqrt[n]{\rho^m}_{+}\left[\cos\frac{(\varphi + 2k_1\pi)m}{n} + i\sin\frac{(\varphi + 2k_1\pi)m}{n}\right]. \tag{2}$$

Значения $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ содержатся среди значений $\sqrt[n]{z^m}$, а так как $k_1 m$ есть целое число (можно положить $k_1 m = k$).

Обратное не всегда имеет место. Значение $\sqrt[n]{z^m}$ содержится среди значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ тогда и только тогда, если существует такое число k_1, что числа k и $k_1 m$ при делении на n имеют одинаковые остатки, т. е. разность $k - mk_1$ кратна n:

$$k - mk_1 = qn \quad \text{или} \quad k_1 m + qn = k.$$

Это значит, что линейное уравнение

$$mx + ny = k \tag{3}$$

должно иметь решения в целых числах *.

Возможны следующие два случая:

1°. Числа m и n взаимно просты, тогда уравнение (2) имеет решение при любом k; значит, любое значение $\sqrt[n]{z^m}$ содержится среди значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$. В этом случае

$$\sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

2°. Числа m и n не взаимно просты, тогда уравнение (3) имеет решения не при всех k, а лишь при тех, которые делятся на общий наибольший делитель d чисел m и n. Сократив на d, получим уравнение:

$$m_1x + n_1y = k',$$

имеющие решение в целых числах. В этом случае не все значения $\sqrt[n]{z^m}$ содержатся среди значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$.

Дробная степень комплексного числа. Пусть n натуральное число; $\frac{1}{n}$-я степень числа z определяется, как и в поле действительных чисел, посредством равенства

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z};$$

это есть n-значная функция от аргумента z.

Дробная степень $\frac{m}{n}$ числа z рассматривается лишь при условии, что числа m и n взаимно просты, в этом случае полагаем:

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

Это есть n-значная функция от аргумента z.

Возможна следующая постановка вопроса: нельзя ли из множества значений корня $\sqrt[n]{z}$ выделить одно, которое считать «главным» значением, назвать его «арифметическим» корнем и обозначить символом $\sqrt[n]{z}$. Можно было бы, например, в качестве такого «арифметического» корня принять значение w_0 с наименьшим неотрицательным аргументом. Однако выделение «главного» значения комплексного радикала являлось бы бесперспективным, бесплодным обобщением ради самого обобще-

* О решении линейных уравнений в целых числах см. § 73, стр. 283 «Неопределенные уравнения».

ния *. В самом деле, понятие арифметического корня в поле действительных чисел ценно тем, что эти корни обладают рядом свойств, выражающихся правилами действия над радикалами. Если же ввести понятие «арифметического» комплексного радикала, то эти радикалы в общем случае не будут обладать указанными свойствами, а потому и само понятие «арифметического корня» обесценится.

Поясним сказанное на примере извлечения квадратного корня. Уравнению $w^2 = z$ удовлетворяют два взаимно противоположные комплексные числа:

$$w = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ и } -w = \rho\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + \\ + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right),$$

изображающиеся на координатной плоскости точками, симметричными относительно начала координат. Примем например за «главное» значение корня то значение w, которое изображается точкой в верхней полуплоскости:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Равенство

$$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$$

имеет место не всегда. В самом деле, левая часть изображается (по условию) точкой верхней полуплоскости, тогда как этого нельзя сказать про правую часть. Пусть, например, аргументы чисел $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ соответственно суть $\frac{2}{3}\pi$ и $\frac{5}{6}\pi$, тогда аргументом произведения $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ явится сумма $\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$, т. е. это произведение изобразится точкой в нижней полуплоскости, а потому

$$\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}.$$

Примеры

1. На неправильном применении к радикалам в поле комплексных чисел правил действия над действительными радикалами основан ряд «парадоксов». Рассмотрим одно из таких ошибочных рассуждений.

Известно, что $i^2 = -1$, но с другой стороны,

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

и $\sqrt{-1} = i$; следовательно, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = 1$

---

* С таким обобщением можно познакомиться, например, по книге И. В. Арнольда. Теоретическая арифметика. Учпедгиз, 1939, стр. 330—332.

Ошибочность рассуждений очевидна.

Во-первых, $\sqrt{-1} = \pm i$ (а не i)

и

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \begin{cases} i \cdot i \\ (-i)(-i) \end{cases} = i^2 = -1 \quad (\text{а нс } 1).$$

Во-вторых, в поле комплексных чисел $\sqrt{1} = \pm 1$ (а не 1).

2. Имеем $\left(\sqrt[3]{1}\right)^3 = 1$, тогда как $\sqrt[3]{1^3} = \sqrt[3]{1} = \varepsilon, \varepsilon^2, 1$.

3. В поле комплексных чисел $\sqrt[3]{8}$ имеет три значения:

$$\sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3}, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad 2,$$

а $\sqrt[6]{64}$ имеет 6 значений:

$$\sqrt[6]{64} = 1 + i\sqrt{3}, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -2, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad 1 - i\sqrt{3}, \quad 2.$$

Среди шести значений $\sqrt{64}$ содержатся значения $\sqrt[3]{8}$.

4. Числа 2 и 3 взаимно просты; символы $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2$ и $\sqrt[3]{8^2}$ в поле комплексных чисел имеют одни и те же значения. В самом деле:

$$\sqrt[3]{8} = 2\varepsilon, \ 2\varepsilon^2, \ 2, \text{ а поэтому } (\sqrt[3]{8})^2 = 4\varepsilon^2, 4\varepsilon, 4.$$

Вычисляем

$$\sqrt[3]{8^2} = 4\varepsilon, \quad 4\varepsilon^2, \ 4.$$

Получаются одни и те же числа, но записанные в различных порядках.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 47. Уравнения и системы уравнений

Пусть $F_1(x, y, ..., z)$ и $F_2(x, y, ..., z)$ — функции, рассматриваемые совместно в общей части их областей определения (эта общая часть предполагается непустой).

Определение. *Уравнением называется равенство*

$$F_1(x, y, \ldots, z) = F_2(x, y, \ldots, z), \qquad (\mathrm{F})$$

выражающее следующее суждение:

значение функции $F_1(x, y, ..., z)$ равно значению функции $F_2(x, y, ..., z)$.

Общая часть областей определения функций F_1 и F_2 называется областью определения уравнения (F) или множеством допустимых систем значений аргументов.

Пусть $x = a$, $y = b, ..., z = c$ некоторая система значений аргументов из области определения уравнения; возможен один из следующих случаев.

Случай 1°. При системе значений аргументов $(a, b, ..., c)$ данное суждение истинно, т. е. в точке $(a, b, ..., c)$ значения функций F_1 и F_2 равны:

$$F_1(a, b, \ldots, c) = F_2(a, b, \ldots, c).$$

Определение. *Система чисел $(a, b, ..., c)$ называется решением уравнения* (F), *если значения функций F_1 и F_2 при $x = a$, $y = b$, ..., $z = c$ равны.*

Говорят также, что данная система чисел удовлетворяет уравнению (F).

Случай 2°. При системе значений аргументов $(a, b, ..., c)$ данное суждение ложно, т. е. значения функций F_1 и F_2 в точке $(a, b, ..., c)$ различны:

$$F_1(a, b, \ldots, c) \neq F_2(a, b, \ldots, c).$$

В этом случае говорят, что система чисел $(a, b, \ldots, c)$ **не удовлетворяет** уравнению (F).

Функция F_1 называется **левой** частью уравнения (F), а функция F_2 называется **правой** частью уравнения.

Аргументы $x, y, \ldots, z$ называются **неизвестными**.

Для уравнения с одним неизвестным

$$F_1(x) = F_2(x)$$

всякое его решение $x = a$ называется также **корнем**.

> Примечание. В частных случаях правая или левая часть уравнения может быть **числом**, тогда она рассматривается как постоянная функция, имеющая одно и то же значение при всех значениях аргументов. Так, например, в уравнении $x + y = 2$ правая часть постоянна.

Случай I. *Существует хотя бы одно решение уравнения* (F), *однако, значения функций F_1 и F_2 равны **не при всех** (допустимых) системах значений аргументов.*

В этом случае множество решений уравнения образует **правильную часть** области определения уравнения.

Случай II. *Не существует ни одной системы значений неизвестных, при которых значения правой и левой частей равны.*

В этом случае уравнение называется противоречивым. Противоречивое уравнение не имеет решений. Чтобы не исключать этот случай из рассмотрения, говорят, что множество решений противоречивого уравнения является **пустым**.

Случай III. *Всякая (допустимая) система значений неизвестных является решением уравнения*, иными словами, значения функций F_1 и F_2 равны по всей области определения уравнения.

В этом случае говорят, что уравнение (F) **удовлетворяется тождественно**.

> Примечание. Уравнение, удовлетворяющееся тождественно, мы **не называем** тождеством. *Понятия уравнения и тождества существенно различны.* Тождество есть равенство, выражающее **имеющее место** соотношение тождественности двух выражений (см. стр. 29). Уравнение же есть равенство, выражающее **суждение** о равенстве численных значений двух функций.

Решить уравнение — это значит найти множество всех его решений.

Множество всех решений уравнения может быть как конечным, так и бесконечным.

Элементарная математика ограничивается изучением лишь частного вида уравнений, в которых правая и левая части являются **элементарными функциями**. Иными словами, левая и правая части уравнений задаются формулами, содержащими элементарные математические операции (эти операции перечислены на стр. 25).

Решением уравнения является система чисел $x = a$, $y = b$, ..., $z = c$, при подстановке которых в аналитические выражения $F_1(x, y, ..., z)$ и $F_2(x, y, ..., z)$ получается одно и то же число.

Уравнения, изучаемые в элементарной математике, рассматриваются обычно над некоторым числовым полем, т. е. указывается (либо подразумевается), какому числовому полю должны принадлежать допустимые значения неизвестных и числа, входящие в состав аналитических выражений. *Множества решений одного и того же уравнения, рассматриваемого над различными числовыми полями, могут быть различными.*

Уравнения, рассматриваемые в элементарной математике, классифицируются по характеру математических операций, выполняемых над неизвестными.

Уравнение
$$F_1(x, y, \ldots, z) = F_2(x, y, \ldots, z) \qquad \text{(F)}$$
называется целым алгебраическим или, кратко, алгебраическим, если F_1 и F_2 — многочлены.

Уравнение (F) называется дробным (дробным алгебраическим или рациональным), если (F_1) и (F_2) являются рациональными функциями, но хотя бы одна из них не является многочленом.

Уравнение (F) называется иррациональным (иррациональным алгебраическим), если F_1 и F_2 являются алгебраическими выражениями, причем хотя бы одна из функций F_1 и F_2 не является рациональной (содержит действие извлечение корня из выражений от неизвестных).

Элементарная теория перечисленного вида уравнений изложена в главах V и VI

В частности уравнение $F(x, y, .., z) = 0$ называется алгебраическим уравнением степени n, если $F(x, y, ..., z)$ есть многочлен степени n.

Уравнение называется трансцендентным, если в правой или левой его части (кроме алгебраических) содержатся трансцендентные операции над неизвестными.

Примеры

1. Система чисел $x=0$, $y=0$ есть решение уравнения
$$x^2 - y^2 = 2xy,$$
так как при $x=y=0$ значения правой и левой части равны. Система чисел $x=2$, $y=1$ не есть решение этого уравнения, так как при $x=2$, $y=1$
$$(x^2 - y^2) = 3 \quad \text{а} \quad (2xy) = 4.$$

2. В поле действительных чисел уравнение $x^2+y^2=0$ имеет единственное решение $x=y=0$. В поле комплексных чисел это уравнение имеет бес-

конечное множество решений, ему удовлетворяет любая пара чисел x, $y=ix$, где x — произвольное число.

3. Уравнение

$$|x|+|y|+|z|=-1$$

не имеет решений (ни в каком числовом поле), так как значение левой части неотрицательно при произвольных значениях неизвестных.

4. Уравнение

$$x^2+2x+1-(x+1)^2=0$$

удовлетворяется тождественно при всех значениях неизвестного.

5. Уравнение

$$|x|=x$$

имеет бесконечное множество решений, множество всех его решений есть множество всех неотрицательных чисел (как в поле действительных, так и в поле комплексных чисел).

6. Нижеследующие уравнения являются алгебраическими

$$x^2+3x+1=0, \quad x^2-2xy+1=x^3-y^3.$$

Нижеследующие уравнения являются дробными:

$$\frac{x-1}{x+1}=1-x, \quad \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{y}-1.$$

Нижеследующие уравнения являются иррациональными:

$$2+\sqrt{x^2-1}=x, \quad \sqrt{\frac{x-y}{x+1}}=x+\sqrt[3]{x^2-y^2}.$$

Нижеследующие уравнения являются трансцендентными:

$$2^{\frac{x}{y}}-x=0, \quad \sin x=x+1, \quad \operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=x+y.$$

Уравнения

$$x+y=2, \; x^2+x-1=0, \; x^3-y^3-x-1=0, \; xy-1=0$$

являются алгебраическими, степени которых соответственно равны 1, 2, 3 и 2.

7. Областью определения уравнения

$$\lg x=x-1$$

(над полем действительных чисел) является множество всех положительных чисел, т. е. интервал $(0, \infty)$. В самом деле, область определения левой части есть множество всех положительных чисел, а правой части — множество всех действительных чисел, общей частью этих множеств является множество всех положительных чисел.

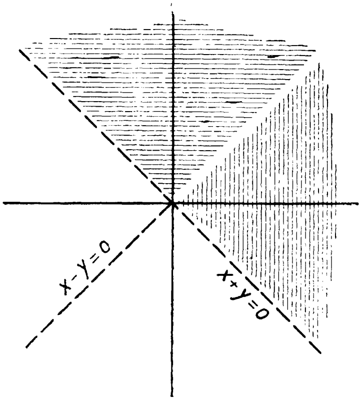
8. Область определения уравнения

$$\frac{1}{x-y}=\lg(x+y)$$

находится из условий $x-y\neq 0$ и $x+y>0$, или что то же $y\neq x$ и $y>-x$. На чертеже 38 соответствующее множество точек заштриховано.

Определение. *Системой* k *уравнений с неизвестными* $x, y, \ldots, \ldots, z$ *называется множество* k *равенств*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, \ldots, z) = F_1'(x, y, \ldots, z) \\ F_2(x, y, \ldots, z) = F_2'(x, y, \ldots, z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots, z) = F_k'(x, y, \ldots, z) \end{array}\right\}, \qquad (F)$$



Черт. 38

выражающих следующее суждение: при данной системе значений неизвестных удовлетворяется каждое из заданных уравнений (F).

При этом всегда правые и левые части всех уравнений системы рассматриваются совместно в общей части их областей определения, называемой областью определения системы (F). Область определения системы предполагается непустым множеством.

Пусть $(a, b, \ldots, c)$ — данная (допустимая) система значений неизвестных, тогда при $x=a$, $y=b$, ..., $z=c$ имеет место один из следующих случаев:

1°. Данное суждение истинно; в этом случае значение левой части каждого из уравнений системы (F) равно значению правой части; система чисел $x = a$, $y = b$, ..., $z = c$ называется решением системы уравнений (F).

2°. Данное суждение ложно, в этом случае хотя бы для одного уравнения системы (F) значение левой части не равно значению правой части.

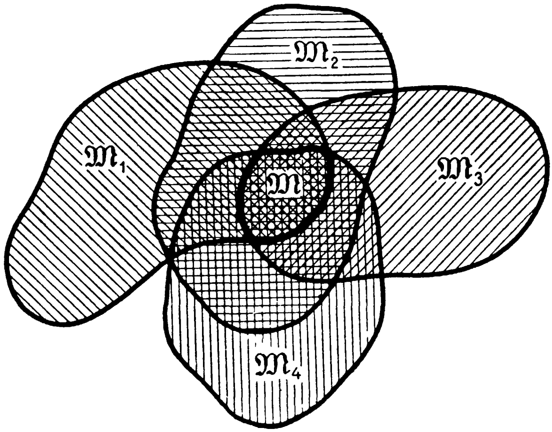
Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений.

Система, не имеющая решений, называется противоречивой.

Каждое уравнение системы, рассматриваемое в отдельности, имеет некоторое вполне определенное множество решений (в частности, быть может, пустое); всякое решение системы содержится в множестве решений каждого из уравнений, рассматриваемого в отдельности. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ..., $\mathfrak{M}_k$ множества решений каждого из уравнений (в отдельности) системы (F), тогда множество $\mathfrak{M}$ всех решений системы есть общая часть этих множеств (черт. 39).

Следствие. *Если хотя бы одно из уравнений системы* (F) *противоречиво, то и данная система является противоречивой.*

Пусть, например, уравнение $F_i = F_i'$ противоречиво, тогда и вся система (F) не имеет ни одного решения. В самом деле, в противном случае, всякое решение системы (F) было бы решением i-го уравнения, но последнее, по предположению, не имеет решений.



Черт. 39

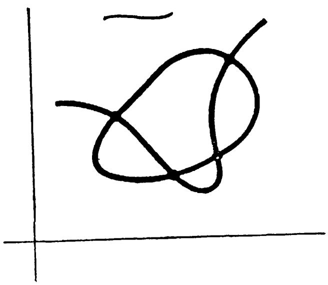
Геометрическая интерпретация

В частности система уравнений

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2 = (x, y) = 0$$

изображает множество точек пересечения линий * (черт. 40)

$$F_1(x, y) = 0 \text{ и } F_2(x, y) = 0.$$



Черт. 40

Система уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

изображает линию пересечения поверхностей $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ (в предположении, что поверхности действительно пересекаются по линии).

Если множество всех решений уравнения (или системы уравнений) можно задать при помощи одной или нескольких (конечного числа) формул, то совокупность этих формул называют общим решением данного уравнения (системы).

* Условия, которым должна удовлетворять функция F, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ изображало линию, или уравнение $F(x, y, z) = 0$ изображало поверхность, устанавливаются в курсе математического анализа (см., например, М. К. Гребенча и С. И. Новоселов. Курс математического анализа, т. II, § 40). Мы предполагаем эти условия выполненными.

Примеры

1. $\left.\begin{aligned} x-1&=0\\ x^2&=1\end{aligned}\right\}$ система двух уравнений с одним неизвестным.

2. $\left.\begin{aligned} x+y&=3\\ x-y&=1\end{aligned}\right\}$ система двух уравнений с двумя неизвестными.

3. $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ x+2y+z&=5\end{aligned}\right\}$ система двух уравнений с тремя неизвестными.

4. $x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0, \quad x=y+z$

система трех уравнений с тремя неизвестными.

5. В предыдущих примерах, в примере 1, $x=1$ есть решение системы; в примере 2, $x=2$, $y=1$ есть решение системы, а $x=1$, $y=2$ не есть решение системы (последняя пара чисел является решеним первого, но не второго уравнения); в примере 3 система не имеет решений, так как в противном случае для всякого решения системы многочлен $x+2y+z$ имел бы два различные значения 1 и 5.

6. Система уравнений

$$x^2+1=0, \quad x-y+1=0,$$

рассматриваемая над полем действительных чисел, не имеет решений, так как первое уравнение не имеет решений в поле действительных чисел. Эта же система имеет в поле комплексных чисел два решения. В самом деле, первое уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$x=i,\ y \quad \text{и} \quad x=-i,\ y,$$

где y — произвольное число. Второе уравнение имеет бесконечное множество решений x, $y=x+1$, где x — произвольное число. Общим для этих множеств являются следующие две пары чисел:

$$x=i,\ y=1+i \quad \text{и} \quad x=-i,\ y=1-i,$$

дающие два различные решения системы.

7. Общее решение уравнения $ax+by+c=0$ при $a\neq 0$ дается формулой

$$x=\frac{-by-c}{a}.$$

где y — произвольное число. При $b\neq 0$ общее решение этого же уравнения может быть представлено в виде

$$y=-\frac{ax+c}{b}, \text{ где } x \text{ — произвольное число.}$$

8. Общее решение квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a\neq 0$, дается следующей формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

9. Формула

$$x=(-1)^n \arcsin m+n\pi,$$

где n — произвольное целое число и $|m|\leqslant 1$, дает общее решение уравнения $\sin x=m$.

10. Систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + \lg y &= 1 \\ x - \lg(-y) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

не имеет смысла рассматривать. В самом деле, для первого уравнения множество допустимых систем значений для неизвестных определяется из условия $y>0$ (верхняя полуплоскость), а для второго уравнения из условия $y<0$ (нижняя полуплоскость). Области определения левых частей уравнения не имеют общих точек.

§ 48. Эквивалентность уравнений и систем уравнений

Определение. *Уравнения (или системы)*

$$F_1 = F_2 \qquad \text{(F)}$$

и

$$\Phi_1 = \Phi_2 \qquad (\Phi)$$

с одними и теми же неизвестными $x, y, \ldots, z$ *называются эквивалентными над некоторым числовым полем, если множество всех решений в данном числовом поле первого уравнения (системы) и множество всех решений второго уравнения (системы) в том же числовом поле одинаковы.*

Следовательно, если всякое решение уравнения (или системы) уравнений (F) *является решением уравнения (или системы)* (Ф), *и обратно — всякое решение уравнения (или системы)* (Ф) *является решением уравнения (или системы)* (F), *то данные уравнения (или системы) эквивалентны над тем числовым полем, над которым они рассматриваются.*

Противоречивые уравнения (системы) эквивалентны, так как множество их решений в данном поле п у с т о: уравнения (системы) не имеют решений.

Примечание. Для алгебраических уравнений возможно учитывать также кратности корней и считать уравнения

$$F_1 = F_2 \quad \text{и} \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

эквивалентными лишь в том случае, когда всякий корень одного уравнения является корнем той же кратности другого уравнения. Во избежание неясностей следует делать специальную оговорку в рассуждениях, в которых учитываются кратности корней.

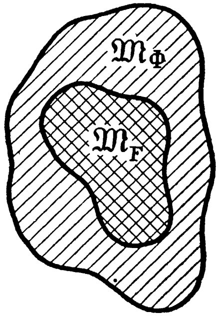
Если не сделано никаких оговорок, то будем считать, что кратности корней **не учитываются.**

При решении уравнений (или систем уравнений) *возможно данное уравнение (систему) заменить эквивалентным уравнением (системой), ибо при такой замене множество решений уравнения (системы) остается неизменным.*

Понятие эквивалентности является относительным, так как данная пара уравнений (систем), рассматриваемая над одним полем, может быть, а над другим полем может не быть эквивалентной.

Геометрически замена системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) &= F_1'(x, y) \\ F_2(x, y) &= F_2'(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Черт. 41

эквивалентной системой

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \Phi_1'(x, y) \\ \Phi_2(x, y) &= \Phi_2'(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

означает замену двух линий, заданных уравнениями (1), двумя другими линиями, заданными уравнениями (2), причем линии (2) пересекаются между собой в тех же точках, в которых пересекаются между собой линии (1).

Определение. *Уравнение (или система уравнений)* (Φ) *называется следствием уравнения (системы)* (F), *если множество всех решений уравнения (системы)* (F) *есть часть множества всех решений уравнения (системы)* (Φ).

Иными словами, если уравнение (система) (Φ) есть следствие уравнения (системы) (F), то всякое решение уравнения (системы) (F) есть решение уравнения системы (Φ). Таким образом, все решения данного уравнения (системы) удовлетворяют всякому его следствию.

Пусть $\mathfrak{M}_F$ есть множество всех решений уравнения (системы) (F), $\mathfrak{M}_\Phi$ — множество всех решений уравнения (системы) (Φ). Если (Φ) есть следствие (F), то множество $\mathfrak{M}_\Phi$ может быть более широким, чем множество $\mathfrak{M}_F$ (схематическое пояснение см. черт. 41), в этом случае уравнение (система) (Φ) имеет решения, не являющиеся решениями (F). Такие решения называются посторонними для уравнения (системы) (F).

Может оказаться, что множество $\mathfrak{M}_\Phi$ совпадает с множеством $\mathfrak{M}_F$ *, в этом случае уравнения (системы) (F) и (Φ) эквивалентны.

Обычно, на практике уравнение (систему) (Φ) получают из уравнения (системы) (F) при помощи некоторых математических операций и общих свойств равенств. Тогда уравнение (систему) (Φ) называют также выводным уравнением (системой).

---

* Как известно из элементов теории множеств, всякое множество считается частью (т. н. несобственной частью) самого себя.

Если найдены все решения уравнения (системы) (Ф), *выведенного в качестве следствия из уравнения (системы)* (F), *то для нахождения решений уравнения (системы)* (F) *достаточно подвергнуть испытанию решения* (Ф) *посредством подстановки в* (F) *и затем отбросить все посторонние решения.*

Примеры

1. Уравнения

$$x^2+1=0, \quad x^4+1=0, \quad x^{2n}+1=0 \text{ (где } n>2)$$

над полем действительных чисел эквивалентны, так как ни одно из них не имеет решений (действительных). Над полем комплексных чисел эти уравнения не эквивалентны. В самом деле, первое имеет два решения:

$$x=\pm i,$$

второе — четыре решения:

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),$$

а третье уравнение имеет $2n$ решений:

$$x=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n} \quad \text{(где } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1).$$

2. Рассмотрим уравнения

$$x^2+y^2=0 \quad \text{и} \quad |x|+|y|=0.$$

Над полем действительных чисел они эквивалентны, так как в этом поле каждое из них имеет единственное решение $x=y=0$. Над полем комплексных чисел эти уравнения не эквивалентны, так как первое имеет бесконечное множество решений $x=iy$, а второе — одно решение $x=y=0$.

3. Над полем действительных чисел система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0 \\ x-y&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

эквивалентна уравнению

$$x^2+y^2=0,$$

единственным решением как системы (1), так и уравнения (2); служит $x=y=0$.

4. Уравнение

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

где λ_1 и λ_2 произвольные данные числа, есть следствие системы

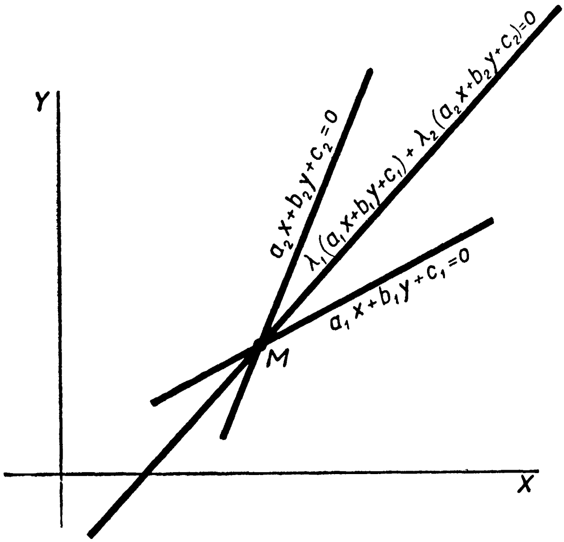
$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0 \\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

В самом деле, если левые части уравнений (2) обращаются в нуль (каждая), то обращается в нуль левая часть уравнения (1). В общем случае система (2) и уравнение (1) не эквивалентны. Множество решений первого уравнения (2) изображается прямой $a_1x+b_1y+c_1=0$, множество решений второго уравнения — прямой $a_2x+b_2y+c_2=0$. . При $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ решение системы единственно и изображается точкой M (черт. 42) пересечения этих прямых. Если λ_1 или λ_2 отличны от нуля, то множество решений уравнения (1) изображается прямой линией, проходящей через точку M. Эта прямая содержит бесконечное множество точек, отличных от точки M.

5. Над полем действительных чисел уравнение

$$\sqrt{(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2}=0$$

эквивалентно системе уравнений (2) (см. предыдущий пример).



Черт. 42

Пусть дана система n уравнений

$$F_1=F_1',\quad F_2=F_2',\quad \dots,\quad F_n=F_n' \qquad (\mathrm{F_n})$$

с неизвестными x, y, ..., z. Рассмотрим систему, которую образуют некоторые k (где $k<n$) уравнений, выбранные из системы ($\mathrm{F_n}$). Для определенности рассмотрим систему, образованную k первыми уравнениями данной системы ($\mathrm{F_n}$):

$$F_1=F_1',\quad F_2=F_2',\quad \dots\quad F_k=F_k'; \qquad (\mathrm{F_k})$$

рассмотрим также вторую систему, образованную оставшимися уравнениями:

$$F_{k+1}=F_{k+1}',\quad F_{k+2}=F_{k+2}',\quad \dots,\quad F_n=F_n'. \qquad (\mathrm{F_{n-k}})$$

Теорема. *Если система уравнений*

$$\Phi_1=\Phi_1',\quad \Phi_2=\Phi_2',\quad \dots,\quad \Phi_l'=\Phi_l' \qquad (\mathbf{\Phi_1})$$

эквивалентна системе ($\mathrm{F_k}$), *то система уравнений*

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1=\Phi_1',\quad \Phi_2=\Phi_2',\quad \Phi_l'=\Phi_l'\\ F_{k+1}=F_{k+1}',\quad F_{k+2}=F_{k+2}',\quad \dots,\quad F_n=F_n'\end{array}\right\} \qquad (\mathbf{\Phi},\mathrm{F})$$

эквивалентна системе ($\mathrm{F_n}$).

Иными словами, *любое множество уравнений, входящих в состав системы, можно заменить другими уравнениями при условии, что заменяемые и заменяющие уравнения образуют эквивалентные системы.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{M}$ всех решений данной системы (F_n) является общей частью двух множеств, множества $\mathfrak{M}_k$ всех решений системы (F_k) и множества $\mathfrak{M}_{n-k}$ решений системы (F_{n-k}) оставшихся уравнений. В силу эквивалентности систем (F_k) и (Φ_l) они имеют одно и то же множество $\mathfrak{M}_k$ всех решений. При замене уравнений (F_k) уравнениями (Φ_l) оба множества $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{M}_{n-k}$ не изменятся, а потому не изменится и их общая часть. Следовательно, системы (F_n) и (Φ, F), как имеющие одно и то же множество всех решений, эквивалентны, ч. т. д.

В частности, *всякое уравнение, входящее в состав системы уравнений, можно заменить эквивалентным уравнением.*

Теорема. *Если какое-либо из уравнений, содержащихся в системе, есть следствие прочих уравнений (той же системы), то это уравнение может быть отброшено.*

Доказательство. Пусть, например, последнее уравнение системы

$$F_1 = F_1', \quad F_2 = F_2', \quad \ldots, \quad F_{n-1} = F_{n-1}', \quad F_n = F_n' \qquad (F_n)$$

есть следствие предыдущих (или некоторых из предыдущих); требуется доказать, что система (F_n) эквивалентна системе

$$F_1 = F_1', \quad F_2 = F_2', \quad \ldots, \quad F_{n-1} = F_{n-1}'. \qquad (F_{n-1})$$

В самом деле, всякое решение системы (F_{n-1}) есть решение системы (F_n), так как уравнение $F_n = F_n'$, будучи следствием уравнений (F_{n-1}), удовлетворяется произвольным решением системы уравнений (F_{n-1}). Обратно, всякое решение системы (F_n) есть решение системы (F_{n-1}), так как всякое решение системы (F_n) есть решение общее для всех уравнений (F_{n-1}), ч. т. д.

Следствие. *Всякое уравнение системы, удовлетворяющееся тождественно, может быть отброшено.*

В самом деле, для всякого уравнения, удовлетворяющегося тождественно, множеством всех решений служит вся область определения системы; это уравнение удовлетворяется решениями прочих уравнений системы, а потому является их следствием.

§ 49. Преобразование уравнений

При решении уравнений широко применяются тождественные преобразования левой и правой частей данного уравнения. *Если тождественные преобразования не изменяют область определения уравнения, то данное и преобразованные уравнения эк-*

вивалентны. Если тождественные преобразования изменяют область определения уравнения, то может измениться и множество всех его решений. Следовательно, выполнение тождественных преобразований частей уравнения может привести к уравнению, не эквивалентному данному.

В частности, *если в результате преобразования область определения уравнения расширяется, то может расшириться и множество всех его решений. Посторонними (для данного уравнения) будут решения преобразованного уравнения, принадлежащие множеству систем значений неизвестных, на которое расширилась область определения уравнения; если таких решений не окажется, то данное и преобразованное уравнения эквивалентны.*

Если тождественное преобразование сужает область определения уравнения, то возможна потеря решений. Потерянными окажутся решения данного уравнения, принадлежащие множеству систем значений неизвестных, на которое сужается область его определения. Если ни одна из систем значений неизвестных, исключающихся из области определения данного уравнения, не удовлетворяет этому уравнению, то преобразованное уравнение эквивалентно данному.

Так, например уравнения

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)} = \psi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)\varphi(x)} = \psi(x)$$

над полем действительных чисел в общем случае не эквивалентны, так как для первого уравнения допустимые значения неизвестного должны удовлетворять условиям $f(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, а для второго лишь одному условию $f(x)\varphi(x) \geqslant 0$.

То же относится и к уравнениям

$$\log f(x) + \log \varphi(x) = \psi(x) \quad \text{и} \quad \log[f(x)\varphi(x)] = \psi(x):$$

для первого уравнения функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ должны удовлетворять условиям $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, а для второго — условию $f(x)\varphi(x) > 0$.

Пример. Уравнения

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 2\sqrt{2} \tag{1}$$

и

$$\sqrt{x^2-1} = 2\sqrt{2} \tag{2}$$

над полем действительных чисел не эквивалентны: первое уравнение имеет единственное решение $x = 3$, второе уравнение имеет два решения $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$. Область определения уравнения (1) есть полусегмент $1 \leqslant x < +\infty$, область определения уравнения (2) состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Корень $x_1 = -3$ принадлежит полуинтервалу $-\infty < x \leqslant -1$, на который расширилась область определения уравнения. При переходе от уравнения (2) к уравнению (1) область определения сужается и происходит потеря корня $x_1 = -3$.

В практике решения уравнений обычно из данного уравнения (системы) в качестве следствий выводят другие уравнения (системы) так, чтобы получить уравнение (систему), решения которого известны. Поэтому, существенно установить в общем виде, какие операции приводят к уравнению (системе), эквивалентному либо не эквивалентному данному уравнению (системе).

Общий признак. *Если уравнение (система)*

$$\Phi_1 = \Phi_2 \qquad (\Phi)$$

есть следствие уравнения (системы)

$$F_1 = F_2, \qquad (\mathrm{F})$$

а (F) *есть следствие* (Ф), *то уравнения (системы)* (F) *и* (Ф) *эквивалентны.*

Этот признак является лишь иным словесным выражением определения понятия эквивалентности, так как по условию всякое решение уравнения (системы) (F) должно быть решением (Ф) и обратно, всякое решение (Ф) должно быть решением (F).

Теорема. *Уравнения*

и
$$F(x, y, \ldots, z) = F_1(x, y, \ldots, z) \qquad (\mathrm{F})$$

$$F(x, y, \ldots, z) + \omega(x, y, \ldots, z) = F_1(x, y, \ldots, z) + \omega(x, y, \ldots, z) \qquad (\mathrm{F} + \omega)$$

эквивалентны, если функция $\omega(x, y, \ldots, z)$ *имеет смысл в области определения уравнения* (F).

Эту теорему формулируют в виде правила: *к обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же слагаемое.*

Доказательство. Если при некоторых значениях неизвестных значения выражений F и F_1 одинаковы, то одинаковы также и значения выражений $F + \omega$ и $F_1 + \omega$, поэтому всякое решение уравнения (F) является решением (F + ω), т. е. уравнение (F+ω) является следствием уравнения (F). Обратно, уравнение (F) есть следствие (F + ω), так как, чтобы получить (F), достаточно к обеим частям уравнения (F + ω) прибавить $-\omega(x, y, \ldots, z)$. Следовательно, уравнения (F) и (F + ω) эквивалентны, ч. т. д.

Следствие. Прибавив к обеим частям уравнения

$$F(x, y, \ldots, z) + \alpha(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots, z)$$

одно и то же выражение $-\alpha(x, y, \ldots, z)$, получим эквивалентное уравнение:

$$F(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots, z) - \alpha(x, y, \ldots, z),$$

в котором слагаемое α находится с противоположным знаком в другой части. Правило переноса формулируют так: *слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.* В частности, всякое уравнение

$$F_1 = F_2$$

можно заменить эквивалентным уравнением вида

$$F=0.$$

В самом деле, для этого достаточно перенести функцию F_2 в левую часть:

$$F_1-F_2=0.$$

Если область определения функции $\omega(x, y, \ldots, z)$ у́же области определения данного уравнения, т. е. если слагаемое ω имеет смысл не при всех допустимых системах значений неизвестных, то при переходе от уравнения (F) к уравнению (F + ω) произойдет сужение области определения. Потеря решений произойдет, если слагаемое $\omega(x, y, \ldots, z)$ теряет смысл при каких-либо системах значений неизвестных, являющихся решениями данного уравнения. *Уравнения* (F) *и* (F + ω) *эквивалентны, если слагаемое* $\omega(x, y, \ldots, z)$ *имеет смысл при всех системах значений неизвестных, удовлетворяющих данному уравнению.*

Примеры

1. Уравнения $x+1=0$ и $\log x+x+1=\log x$ не эквивалентны. В самом деле, единственное решение первого уравнения $x=-1$ не удовлетворяет второму, так как $\log(-1)$ не имеет смысла.

2. Уравнения $x^2=1$ и $x^2+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$ эквивалентны, так как при переходе от первого уравнения ко второму из области определения исключается число 2, не удовлетворяющее первому уравнению.

3. Прибавив к обеим частям уравнения $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ слагаемое $-\frac{1}{x}$, получим $x=0$, что не является решением данного уравнения.

Причиной появления постороннего решения является выполнение тождественных преобразований. Прибавив к обеим частям данного уравнения слагаемое $-\frac{1}{x}$, получим уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x},$$

эквивалентное данному с той же областью определения, состоящей из всех чисел (данного поля), отличных от нуля; выполнив тождественные преобразования, получим уравнение $x=0$, областью определения которого служит множество всех чисел (данного поля).

Теорема. *Уравнения*

$$F(x, y, \ldots, z)=F_1(x, y, \ldots, z) \qquad \text{(F)}$$

и

$$\omega(x, y, \ldots, z)F(x, y, \ldots, z)=\omega(x, y, \ldots, z)F_1(x, y, \ldots, z) \qquad (\omega\,\text{F})$$

эквивалентны, если функция $\omega(x, y, \ldots, z)$ *имеет смысл и отлична от нуля при всех системах значений аргументов, допустимых для уравнения* (F).

Эту теорему формулируют в виде правила: *уравнение можно умножить на любое неравное нулю выражение.*

Доказательство. Если значения обеих частей уравнения (F) равны, то равны и значения обеих частей уравнения (ωF). Поэтому уравнение (ωF) есть следствие (F). Обратно, уравнение (F) есть следствие уравнения (ωF). В самом деле, выражение $\frac{1}{\omega}$ имеет смысл при всех допустимых системах значений неизвестных, ибо $\omega(x, y, ..., z) \neq 0$; умножив ($\omega$F) почленно на $\frac{1}{\omega}$, получим в качестве следствия (F), ч. т. д.

Следствие. *Обе части уравнения можно умножить на произвольное, отличное от нуля, число.*

Если множитель $\omega(x, y, ..., z)$ может обращаться в нуль при некоторых допустимых значениях неизвестного, то в общем случае уравнения (F) *и* (ωF) *неэквивалентны.* В самом деле, уравнению (ωF) удовлетворяют все числа, обращающие в нуль ω, т. е. все корни уравнения $\omega = 0$. Но среди корней последнего уравнения могут быть числа, не являющиеся корнями уравнения (F).

Так, например, уравнение $3x + 1 = 2x$ имеет корень $x = -1$, но уравнение

$$(x-2)(3x+1) = (x-2)\cdot 2x,$$

кроме $x = -1$, имеет корень $x = 2$.

При переходе от уравнения (F) к уравнению (ωF), где $\omega(x, y, ..., z) \neq 0$, произойдет потеря решений, если множитель ω теряет смысл при некоторых системах значений неизвестных, являющихся решениями уравнения (F); *потери решений не произойдет, если множитель ω не теряет смысла ни при каких системах значений неизвестных, удовлетворяющих уравнению* (F).

В практике решения уравнений существенно иметь в виду следующее положение: *при выполнении над обеими частями уравнения некоторой операции, для которой обратная операция не является однозначной, может получиться уравнение, не эквивалентное данному.*

Поясним сказанное на нижеследующих двух примерах.

I. *Если обе части уравнения возвести в некоторую (целую положительную) степень, то в общем случае получится уравнение, не эквивалентное данному.* В самом деле, уравнение

$$[F_1(x, y, \ldots, z)]^n = [F_2(x, y, \ldots, z)]^n \qquad (\mathrm{F}^n)$$

есть следствие уравнения

$$F_1(x, y, \ldots. z) = F_2(x, y, \ldots, z). \qquad (\mathrm{F})$$

Но, кроме решений уравнений (F), уравнению (F_n) удовлетворяют решения любого из уравнений.

$$F_1(x, y, \ldots, z) = \varepsilon F_2(x, y, \ldots, z). \qquad (\varepsilon \mathrm{F})$$

где ε — произвольное значение корня n-й степени из 1. В самом деле, по возведении обеих частей уравнения (εF) в n-ю степень получим в качестве следствия уравнение (F^n).

Обратно, всякое решение (в данном числовом поле) уравнения (F^n) удовлетворяет уравнению (εF), где ε некоторое, вполне определенное (в общем случае) значение корня из 1 (ε принадлежит тому полю, над которым рассматривается уравнение). В самом деле, если при данной системе значений неизвестных $F_1^n = F_2^n \neq 0$, то имеем $\frac{F_1^n}{F_2^n} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^n = 1$; следовательно, $\frac{F_1}{F_2} = \varepsilon$ и $F_1 = \varepsilon F_2$ (где ε одно из значений $\sqrt[n]{1}$).

Если $\varepsilon \neq 1$, то рассматриваемое решение уравнения (F^n) является посторонним для уравнения (F).

Если $F_1 = F_2 = 0$, то уравнение (εF) удовлетворяется при любом ε (из данного поля).

Над полем действительных чисел при нечетном n уравнения (F) и (F^n) эквивалентны. В самом деле, $\sqrt[n]{1}$ при нечетном n имеет лишь одно действительное значение. При n четном $\sqrt[n]{1}$ имеет два действительные значения ± 1, поэтому все решения уравнения (F^n) удовлетворяют одному из уравнений (F) и $F_1 = -F_2$.

II. Уравнения

$$F_1 = F_2 \quad \text{и} \quad \sin F_1 = \sin F_2$$

в общем случае не эквивалентны. В самом деле, из равенства значений синусов следует, что

$$F_1 = (-1)^n \cdot F_2 + n\pi \tag{1}$$

(где n — любое целое число). Кроме решений первого уравнения, второму уравнению удовлетворяют решения каждого из уравнений (1), которые получаются при $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Никакой общей теорией невозможно предусмотреть многообразие преобразований, выполнение которых может привести к уравнению, не эквивалентному данному. В каждом конкретном случае должно производиться специальное исследование. Ниже в качестве образца рассмотрен ряд конкретных примеров преобразования уравнений. Этими примерами не исчерпываются различные преобразования, применяющиеся в практике решения уравнений.

1°. Если обе части данного уравнения

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} \tag{I}$$

заменить обратными по величине выражениями, то получится уравнение

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}. \tag{II}$$

Область определения находится из условий: для уравнения (I)

$$\varphi(x) \neq 0; \quad \varphi_1(x) \neq 0; \tag{a}$$

для уравнения (II)

$$f(x) \neq 0; \quad f_1(x) \neq 0 \tag{b}$$

(кроме подразумевающегося условия: все функции f, f_1, φ, φ_1 должны иметь смысл). Всякое значение x (если оно существует), при котором выполнено условие (b) и

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0^*,$$

служит корнем уравнения (II), но не является корнем уравнения (I). Всякое значение x, при котором выполнено условие (a) и

$$f(x) = f_1(x) = 0,$$

служит корнем уравнения (I), но не является корнем уравнения (II). Следовательно, уравнения (I) и (II) могут не быть эквивалентными.

Так, например, заменим уравнение $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ уравнением $x = x^2$. Последнее уравнение имеет два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, однако, данному уравнению удовлетворяет лишь первый корень $x_1 = 1$, а второй является посторонним.

2°. Составим из равенства (I) следующую производную пропорцию:

$$\frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x) - \varphi(x)} = \frac{f_1(x) + \varphi_1(x)}{f_1(x) - \varphi_1(x)}. \tag{III}$$

Для уравнения (III) область определения находится из условий

$$f(x) \neq \varphi(x); \quad f_1(x) \neq \varphi_1(x). \tag{c}$$

Всякое значение x, для которого выполнено условие (c), и

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0,$$

служит корнем уравнения (III), но не является корнем уравнения (I). Всякое значение x, для которого выполнено условие (a) и

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad f_1(x) = \varphi_1(x),$$

служит корнем уравнения (I), но не является корнем уравнения (III) **.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2} = \frac{x + 1}{3x + 1} \tag{1}$$

Составив указанным способом производную пропорцию, получим:

$$\frac{2x^2 + 4}{-2x} = \frac{4x + 2}{-2x}. \tag{2}$$

Для последнего уравнения $x = 0$ не есть допустимое значение неизвестного. Умножив обе части на $-2x$, получим

$$2x^2 + 4 = 4x + 2,$$

откуда

$$2(x - 1)^2 = 0 \quad \text{и} \quad x = 1.$$

Кроме корня $x = 1$, данное уравнение имеет корень $x = 0$.

---

* Заметим, что значения x, при которых $\varphi_1(x) = 0$, но $\varphi_1(x) \neq 0$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi \neq 0$, или $f = 0$, $f_1 \neq 0$, или $f \neq 0$, $f_1 = 0$, не могут служить решениями ни уравнения (I), ни уравнения (II).

** Следует заметить, что значения x, при которых $\varphi = 0$, $\varphi_1 \neq 0$ или $\varphi \neq 0$, $\varphi_1 = 0$, или $f - \varphi \neq 0$, $f_1 - \varphi_1 = 0$, или $f - \varphi = 0$, $f_1 - \varphi \neq 0$, не могут служить решениями ни уравнения (I), ни уравнения (III).

3°. Уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$$

над полем действительных чисел в общем случае не эквивалентны, так как для второго уравнения допустимые значения неизвестного должны удовлетворять дополнительным условиям

$$f(x)\geqslant 0, \quad \varphi(x)\geqslant 0.$$

Аналогичное замечание относится к уравнениям (основание логарифмов произвольное)

$$f(x)=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \log f(x)=\log\varphi(x);$$

для второго уравнения допустимые значения неизвестного должны удовлетворять дополнительным условиям $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$.

Так, например, логарифмируя обе части уравнения

$$x^3=x, \text{ получим: } 3\log x=\log x,$$

откуда $2\log x=0$ и $x=1$. Кроме этого, данное уравнение имеет еще два решения $x=0$ и $x=-1$, не являющиеся решениями второго уравнения.

§ 50. Совокупность уравнений

Определение. *Совокупностью k уравнений*

$$F_1(x, y, \ldots, z)=\Phi_1(x, y, \ldots, z),$$
$$F_2(x, y, \ldots, z)=\Phi_2(x, y, \ldots, z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_k(x, y, \ldots, z)=\Phi_k(x, y, \ldots, z)$$

называется следующее суждение: при данной системе значений неизвестных удовлетворяется хотя бы одно из уравнений данной совокупности.

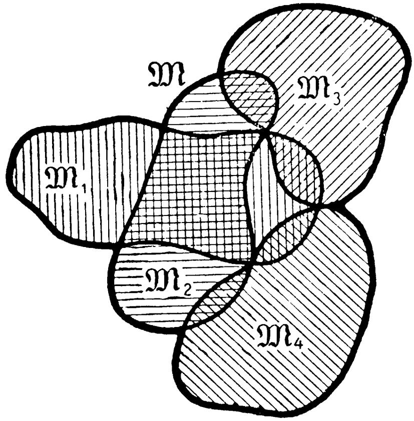
Систему чисел $(a, b, \ldots, c)$, при которой высказанное суждение истинно, будем называть решением данной совокупности уравнений; при подстановке $x=a$, $y=b$, ..., $z=c$ хотя бы одно (но не обязательно все) из данных равенств окажется верным.

Чтобы решить совокупность уравнений, достаточно решить каждое из уравнений $F_i=\Phi_i$ в отдельности, а затем объединить в одно множество все полученные решения. Таким образом, если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ суть множества всех уравнений $F_1=\Phi_1$, $F_2=\Phi_2$, ..., $F_k=\Phi_k$ (соответственно), то множество $\mathfrak{M}$ всех решений данной совокупности есть сумма (в теоретико-множественном смысле) этих множеств:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\ldots+\mathfrak{M}_k.$$

В предыдущих рассуждениях предполагается, что левые и правые части всех данных уравнений рассматриваются совместно в общей части их областей определения. Если некоторая система чисел удовлетворяет какому-либо из уравнений данной совокупности, например, первому, но при этом теряют смысл левая или правая часть, хотя бы одного из прочих уравнений совокупности, то такая система чисел не считается решением совокупности.

Геометрическая интерпретация. Совокупность уравнений $F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$ изображает пару линий, т. е. линию, составленную из точек обеих данных линий.



Черт. 43

Теорема. *Если левая часть уравнения*

$$F(x, y, \ldots, z)=0 \qquad (\mathrm{F})$$

разлагается на множители:

$$F(x, y, \ldots, z) \equiv F_1(x, y, \ldots, z) \cdot F_2(x, y, \ldots, z) \ldots F_k(x, y, \ldots, z),$$

то уравнение (F) *эквивалентно совокупности уравнений, полученной поочередным приравниванием нулю сомножителей левой части:*

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ \ldots, \ F_k=0. \qquad (\mathrm{F}_i)$$

Доказательство. Всякое решение уравнения (F) удовлетворяет хотя бы одному из уравнений совокупности (F_i) так как для равенства произведения нулю необходимо, чтобы хотя бы один из сомножителей был равен нулю. Обратно, всякое решение совокупности уравнений (F_i) есть решение уравнения (F), так как, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и произведение равно нулю, ч. т. д.

Примеры

1. Решить уравнение $(x-1)(x+1)^2(x^2+1)=0$.

Решение. Приравняв поочередно нулю сомножители, получим совокупность уравнений:

$$x-1=0, \quad (x+1)^2=0, \quad x^2+1=0.$$

Взяв множество решений всех этих уравнений, получим корни данного уравнения $x=1$, $x=-1$ (двукратный корень) **и** $x=\pm i$.

2. Решить уравнение

$$(x-1)(x^3+1)\frac{1}{(x-1)^2}=0.$$

Решение. Приравняв поочередно нулю сомножители, получим **три** уравнения:

1) $x-1=0$, откуда $x=1$;

2) $x^2+1=0$, откуда $x=i$ и $x=-i$;

3) $\dfrac{1}{(x-1)^2}=0$, не имеет решений.

Решения данного уравнения суть $x = i$ и $x = -i$. Корень первого уравнения $x = 1$ следует исключить. В самом деле, число 1 не принадлежит множеству допустимых значений неизвестного, ибо при $x = 1$ левая часть исходного уравнения теряет смысл.

3. Решить уравнение

$$(x+1)\log x = 0.$$

Решение. Приравняв нулю по отдельности сомножители, получим:

$$x+1=0, \quad \text{откуда} \quad x=-1; \quad \log x = 0, \quad \text{откуда} \quad x=1.$$

Но $x = -1$ не есть допустимое значение для неизвестного, ибо при $x = -1$ теряет смысл $\log x$, а следовательно, и вся левая часть исходного уравнения.

§ 51. Основные способы решения систем уравнений

Одним из основных методов решения систем уравнений является метод подстановки.

Допустим, что известно общее решение одного из уравнений системы:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ \ldots,\ z) &= 0 \\ F_2(x,\ y,\ \ldots,\ z) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_n(x,\ y,\ \ldots,\ z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{F})$$

например, уравнения

$$F_1(x,\ y,\ \ldots, z) = 0. \qquad (\mathrm{F}_1)$$

Предположим, далее, что общее решение уравнения (F_1) задано формулой, выражающей одно неизвестное, например x, через другие*:

$$x = x(y,\ \ldots,\ z): \qquad (\mathrm{x})$$

Всякое частное решение уравнения (F_1) получается, если неизвестным $y, \ldots, z$ придать некоторую определенную (допустимую) систему численных значений. При всех (допустимых) значениях $y, \ldots, z$ имеет место тождество (относительно $y, \ldots, z$)

$$F_1(x(y,\ \ldots,\ z),\ y,\ \ldots,\ z) \equiv 0. \qquad (1)$$

Теорема I. *Если $x=x(y, \ldots, z)$ есть общее решение уравнения* (F_1), *то система* (F) *эквивалентна системе:*

$$\left.\begin{aligned} F_2(x(y,\ \ldots,\ z),\ y,\ldots,\ z) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x(y,\ \ldots,\ z),\ y,\ldots,\ z) &= 0 \\ x = x(y,\ \ldots,\ z) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{F}')$$

---

* Элементарная математика ограничивается рассмотрением лишь этого частного случая.

Доказательство. Всякое решение системы (F) $x=a$, $y=b$, ..., $z=c$ есть решение системы (F′). В самом деле, система чисел $x=a$, $y=b$, ..., $z=c$ есть решение уравнения $F_1=0$, следовательно, оно (решение) содержится в формуле общего решения этого уравнения:

$$a = x(b, \ldots, c).$$

Итак, последнее уравнение системы (F′) удовлетворяется; подставив в прочие уравнения значения $y=b$, ..., $z=c$, получим:

$$F_2\big(x(b, \ldots, c), b, \ldots, c\big) = F_2(a, b, \ldots, c) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n\big(x(b, \ldots, c), b, \ldots, c\big) = F_n(a, b, \ldots, c) = 0.$$

В самом деле $F_2(a, b, \ldots, c) = \ldots = F_n(a, b, \ldots, c) = 0$, так как по условию $(a, b, ..., c)$ есть решение системы (F).

Обратно, всякое решение системы (F′) есть решение системы (F). В самом деле, если система чисел $(a, b, \ldots, c)$ удовлетворяет уравнениям (F′), то имеем:

$$a = x(b, \ldots, c).$$

Положив в тождестве (1) $y=b$, ..., $z=c$, получим:

$$F_1\big(x(b, \ldots, c), b, \ldots, c\big) = F_1(a, b, \ldots, c) = 0.$$

Следовательно, первое уравнение системы (F) удовлетворяется. Так как система чисел $y = b$, ..., $z = c$ удовлетворяет первым $n—1$ уравнениям (F′), то имеем:

$$F_2\big(x(b, \ldots, c), b, \ldots, c\big) = F_2(a, b, \ldots, c) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n\big(x(b, \ldots, c), b, \ldots, c\big) = F_n(a, b, \ldots, c) = 0.$$

Следовательно, удовлетворяются и все прочие уравнения системы (F).

Если одна из систем (F) или (F′) противоречива, то и другая противоречива, так как в противном случае всякое решение непротиворечивой системы оказалось бы решением противоречивой системы.

Из изложенного следует эквивалентность систем (F) и (F′), ч. т. д.

Доказанная теорема служит обоснованием способа подстановки. Этот способ излагается в виде следующего правила.

Правило. *При решении системы уравнений методом подстановки следует:*

1°. *Решить одно из уравнений системы относительно какого-нибудь неизвестного, выразив его через прочие неизвестные (формула* (x)).

2°. *Исключить это неизвестное, подставив найденное выражение в прочие уравнения системы.*

После подстановки получится система, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше, чем в первоначальной системе (первые $n-1$ уравнений системы (F)$'$*).*

3°. *Решить полученную систему (относительно неизвестных $y, \ldots, z$).*

4°. *Для каждого решения последней системы вычислить соответствующее значение исключенного неизвестного (подстановкой в формулу* (x)*).* (Примеры применения способа подстановки см. в следующих параграфах: 69, 70, 74, 88, 90, 95.)

Для решения системы уравнений, о которой говорится в пункте 3°, в свою очередь, можно применить метод подстановки, это еще раз понизит на 1 число уравнений и число неизвестных и т. д.

В практике решения систем уравнений широко применяется следующий способ: некоторые из уравнений, входящие в состав системы, умножаются (почленно) на специально подобранные множители, а затем почленно складываются. Эта операция «комбинирования» может повторяться несколько раз применительно к разным уравнениям, входящим в состав системы. Множители подбираются так, чтобы в результате «комбинирования» получилась (как следствие) система уравнений, решающаяся уже известным методом.

Так, например, складывая и вычитая уравнения

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \} \tag{F}$$

в качестве следствия из (F) получим систему:

$$F_1 + F_2 = 0, \quad F_1 - F_2 = 0. \quad \} \tag{F'}$$

Системы: (F) и (F$'$) эквивалентны. В самом деле, систему (F) в свою очередь можно вывести в качестве следствия из системы (F$'$); для этого достаточно разделить почленно на 2 уравнения (F$'$) и затем сложить и вычесть:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(F_1 + F_2) + \frac{1}{2}(F_1 - F_2) \equiv F_1 = 0, \\ &\frac{1}{2}(F_1 + F_2) - \frac{1}{2}(F_1 - F_2) \equiv F_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Теорема II. *Системы уравнений*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ \ldots, \ F_n = 0 \ \} \tag{F}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = 0, \\ &m_{12}F_2 + m_{22}F_2 = 0, \\ &m_{13}F_1 + m_{23}F_2 + m_{33}F_3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_{1n}F_1 + m_{2n}F_2 + \ldots + m_{nn}F_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{mF}$$

эквивалентны, если каждый из «диагональных» множителей $m_{22}, m_{33}, \ldots, m_{nn}$ *отличен от нуля.*

Разъяснение. Множители m_{ik} могут быть числами или функциями от неизвестных, в последнем случае условие теоремы требует, чтобы каждый из множителей $m_{22}, m_{33}, \ldots, m_{nn}$ был отличным от нуля во всей области определения системы.

Доказательство. Всякое решение системы (F) есть решение системы (mF), так как при всех значениях неизвестных, при которых функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ обращаются в нуль (каждая), обращаются в нуль и левые части всех уравнений системы (mF). Обратно, всякое решение системы (mF) есть решение системы (F). В самом деле, пусть при некоторых значениях неизвестных обращаются в нуль левые части (mF). Если $F_1=0$, то второе равенство системы (mF) принимает вид $m_{22}F_2 = 0$, но так как $m_{22} \neq 0$, то $F_2=0$. Далее, из равенств $F_1=F_2=0$ и из третьего равенства (mF) следует $m_{33}F_3 = 0$, откуда $F_3 = 0$, и так далее, и, наконец, из равенств $F_1=F_2= \ldots =F_{n-1}=0$ вытекает $m_{nn}F_n=0$, откуда $F_n=0$. Итак, всякое решение системы (mF) есть решение системы (F).

Из изложенного следует эквивалентность систем (F) и (mF), ч. т. д. (Примеры применения способа комбинирования уравнений см. в параграфах 70, 71, 74, 90.)

В частности, системы:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 0,\\ F_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F_1 &= 0,\\ F_1 + F_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{aligned} F_2 &= 0,\\ F_1 + F_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

эквивалентны. Нижеследующие системы

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 0,\\ F_1 + F_2 &= 0,\\ F_1 + F_2 + F_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F_1 &= 0,\\ F_2 &= 0,\\ F_1 + F_2 + F_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F_1 &= 0,\\ F_1 - F_2 &= 0,\\ F_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

и т. п. эквивалентны системе

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0. \}$$

Доказанная теорема является частным случаем следующей общей теоремы.

Теорема. *Если детерминант*

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в области определения системы (F), *то системы*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, F_n = 0 \quad \} \qquad \text{(F)}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} m_{11}F_1+m_{12}F_2+\ldots+m_{1n}F_n=0\\ m_{21}F_1+m_{22}F_2+\ldots+m_{2n}F_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m_{n1}F_1+m_{n2}F_2+\ldots+m_{nn}F_n=0 \end{array}\right\} \qquad (mF)$$

эквивалентны.

Доказательство. При выполнении равенств (F) выполняются также равенства (mF). Обратно, если значения функций F_i удовлетворяют системе линейных однородных уравнений (mF) с неравным нулю детерминантом, то $F_1=F_2=\ldots=F_n=0$. Следовательно, системы (F) и (mF) эквивалентны, ч. т. д.

Различные частные приемы, применяющиеся при решении систем уравнений, невозможно предусмотреть общей теорией. При применении этих приемов вопрос об эквивалентности систем, получающихся из данной системы, подлежит специальному исследованию.

Примеры

1. Для решения системы

$$F_1F_2=0, \quad \Phi=0\} \qquad (1)$$

достаточно решить совокупность двух систем

$$\left.\begin{array}{l} F_1=0\\ \Phi=0 \end{array}\right\} \ (2) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{array}{l} F_2=0\\ \Phi=0 \end{array}\right\} \qquad (2')$$

В самом деле, всякое решение системы (1) удовлетворяет уравнению $F_1F_2=0$, откуда $F_1=0$, или $F_2=0$ и, кроме того, $\Phi=0$. Следовательно, удовлетворяется хотя бы одна из систем (2) или (2′). Обратно, если удовлетворяется система (2) или (2′) то $F_1=0$ или $F_2=0$ и, следовательно, $F_1F_2=0$ и так как $\Phi=0$, то удовлетворяется система (1).

2. Рассмотрим две системы:

$$\left.\begin{array}{l} F=F_1\\ \Phi=\Phi_1 \end{array}\right\} \ (1) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{array}{l} F\Phi=F_1\Phi_1\\ F=F_1 \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Система (2) есть следствие системы (1), так как из равенств (1) вытекают равенства (2). В общем случае системы (1) и (2) не эквивалентны. В самом деле, пусть удовлетворяется система (2), причем $F=F_1\neq 0$, тогда из первого уравнения (2) получим $\Phi=\Phi_1$, т. е. удовлетворяется система (1). Если же $F=F_1=0$, то удовлетворяются оба уравнения (2), однако, уравнение $\Phi=\Phi_1$ может не удовлетворяться, такие решения явятся посторонними для системы (1).

§ 52. Решение уравнений при дополнительных условиях

Нередко на допустимые значения неизвестных налагаются дополнительные условия; эти дополнительные условия могут быть различными. Так, например, можно поставить условие, чтобы некоторые из неизвестных были либо целыми, либо положительными, либо рациональными числами, чтобы значения неизвестных удовлетворяли некоторым неравенствам и т. п. Различные условия обычно возникают при решении задач посредством составления уравнений, эти условия устанавливаются в соответствии со смыслом задачи. Так, например, если неизвестное обозначает число людей, то допустимыми его значениями являются натуральные числа, если неизвестное обозначает длину отрезка, то его допустимые значения положительны, если неизвестное обозначает цифру в десятичной системе нумерации, то его допустимые значения суть 0, 1, 2, 3, . . . , 9 и т. п.

Не исключена возможность, что выражения, служащие правой и левой частями уравнения, имеют более широкую область определения, чем множество допустимых систем значений неизвестных, определяемое условиями задачи. Если откинуть эти условия, то множество допустимых систем значений аргументов расширится. Будем рассматривать уравнение (или систему) при расширенном множестве допустимых значений неизвестных, а откинутые условия как дополнительные. В множестве всех решений (без дополнительных условий) уравнения (системы) в частности содержатся все его решения, удовлетворяющие дополнительным условиям. Отсюда вытекает следующее часто применяющееся правило решения уравнений (систем) при дополнительных условиях.

Правило. *Чтобы решить уравнение (систему) при дополнительных условиях, достаточно решить данное уравнение (систему) без этих условий, и из полученного множества всех решений выбрать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям.*

Примеры

1. Найти такое число n, чтобы

$$1+2+3+\ldots+n=15.$$

Решение. По смыслу задачи n должно быть натуральным числом. Выполнив суммирование, получим:

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=15,$$

следовательно, n должно удовлетворять квадратному уравнению:

$$n^4+n-30=0. \qquad (1)$$

Это последнее уравнение можно рассматривать над полем комплексных чисел, считая для n допустимыми произвольные комплексные значения. В этом поле данное квадратное уравнение имеет два решения $n=5$ и $n=-6$, из которых натуральным является число 5. Итак, $n=5$ есть единственное решение уравнения (1) при данном дополнительном условии.

2. Задача. *Имеется 32 сосуда двух размеров. Из двух различных сосудов объем большего на два литра больше объема меньшего. Общий объем больших и общий объем малых сосудов один и тот же — 60 л. Определить количество больших и малых сосудов.*

Решение. Пусть x — число больших сосудов, тогда

$32-x$ — число малых сосудов,

$\dfrac{60}{x}$ — объем большого сосуда,

$\dfrac{60}{32-x}$ — объем малого сосуда.

По условию

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{32 - x} = 2.$$

Откуда

$$x^2 - 92x + 960 = 0.$$

По смыслу задачи неизвестное x должно удовлетворять следующим дополнительным условиям:

a) x — натуральное число;

b) $x < 32$.

Решив квадратное уравнение без учета дополнительных условий, получим два решения:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 80.$$

Из этих двух чисел условию a) удовлетворяют оба, условию b) удовлетворяет первое.

Следовательно, больших сосудов было 12, малых сосудов было $32 - 12 = 20$.

3. *Вычислить углы A, B и C треугольника, выраженные в градусах, если* $A + B = 120°$ и $A - C = 130°$.

Решение. Для A, B и C имеем систему уравнений

$$A + B = 120; \quad A - C = 130; \quad A + B + C = 180$$

при дополнительных условиях $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Решив систему без учета дополнительных условий, получим единственное решение $A = 190$, $B = -70$, $C = 60$. Задача не имеет решений, так как полученное решение не удовлетворяет дополнительным условиям.

§ 53. Уравнения, содержащие параметры

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, \ldots, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0 \qquad (\mathrm{F})$$

с неизвестными $x, y, \ldots, z$ и с параметрами $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$; при всякой допустимой системе значений параметров $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \gamma_0$ уравнение (F) обращается в уравнение

$$F(x, y, \ldots, z; \alpha_0, \beta_0, \ldots, \gamma_0) = 0 \qquad (\mathrm{F_0})$$

с неизвестными $x, y, \ldots, z$, не содержащее параметров. Уравнение ($\mathrm{F_0}$) имеет некоторое вполне определенное множество (быть может, пустое) решений.

Аналогично рассматриваются системы уравнений, содержащих параметры. Допустимыми системами значений параметров считаются системы, допустимые для каждого уравнения в отдельности.

Определение. *Решить уравнение (или систему), содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения (системы).*

Понятие эквивалентности применительно к уравнению, содержащим параметры, устанавливается следующим образом.

Определение. *Два уравнения (системы)*

$$F(x, y, \ldots, z; \alpha, \beta, \ldots \gamma) = 0, \qquad (F)$$

$$\Phi(x, y, \ldots, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0 \qquad (\Phi)$$

с неизвестным $x, y, \ldots, z$ и с параметрами $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ называются эквивалентными, если для обоих уравнений (систем) множество допустимых систем значений параметров одно и то же и при всякой допустимой системе значений параметров оба уравнения (системы уравнений) эквивалентны.

Итак, *эквивалентные уравнения при всякой допустимой системе значений параметров имеют одно и то же множество решений.*

Преобразование уравнения, изменяющее множество допустимых систем значений параметров, приводит к уравнению, не эквивалентному данному уравнению.

Предположим, что каждое из неизвестных, содержащихся в уравнении

$$F(x, y, \ldots, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0 \qquad (F)$$

задано в виде некоторой функции от параметров:

$$x = x(\alpha, \beta, \ldots, \gamma); \; y = y(\alpha, \beta, \ldots, \gamma); \; \ldots$$
$$z = z(\alpha, \beta, \ldots, \gamma). \qquad (X)$$

Говорят, что система функций (X), заданных совместно, удовлетворяет уравнению (F), если при подстановке этих функций вместо неизвестных $x, y, \ldots, z$ в уравнение (F) левая его часть обращается в нуль тождественно при всех допустимых значениях параметров:

$$F\big(x(\alpha, \beta, \ldots, \gamma), y(\alpha, \beta, \ldots, \gamma), \ldots, z(\alpha, \beta, \ldots, \gamma); \alpha, \beta, \ldots, \gamma\big) \equiv 0.$$

При всякой допустимой системе численных значений параметров $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0, \ldots, \gamma = \gamma_0$ соответствующие значения функций (X) образуют решение уравнения

$$F(x, y, \ldots, z; \alpha_0, \beta_0, \ldots, \gamma_0) = 0.$$

Примеры

1. Уравнение

$$\sqrt{1 - a^2x^2} + (b - a)x + \sqrt{b^2 - a^2} = 0,$$

рассматриваемое над полем действительных чисел, содержит два параметра a и b. Допустимые значения параметров определяются из условий:

$$|a| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |b| \geqslant |a|.$$

Так, например, системы $a = 0$, $b = 1$; $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$;

$$a = -\frac{1}{3}, \; b = \frac{1}{2} \text{ — допустимые.}$$

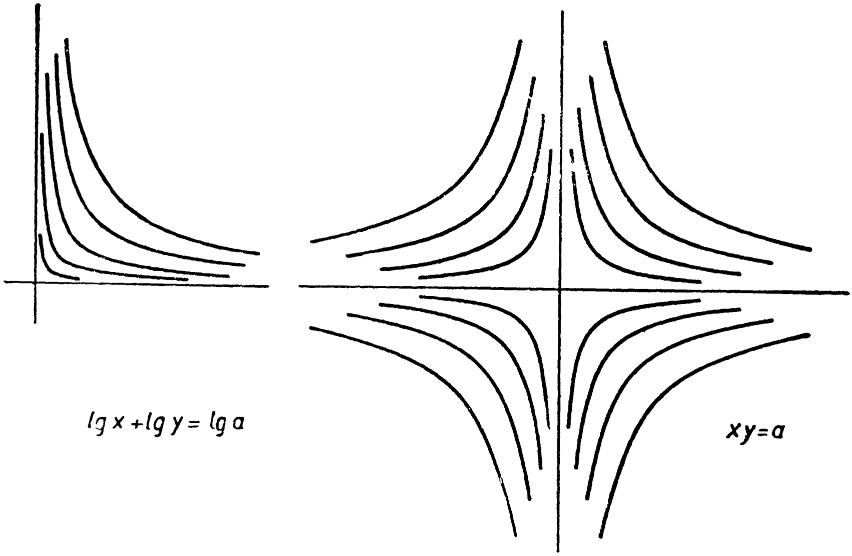
Положив $a = 0$, $b = 1$, получим уравнение $x^2 + x + 1 = 0$; положив $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$,

Системы $a = 2$, $b = 0$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ не являются допустимыми.

2. Для уравнения

$$a^x + x + 1 = 0$$

допустимые значения a определяются условием $a > 0$, так как функция a^x в элементарной математике рассматривается лишь при положительном основании.



Черт. 44

3. Для уравнения

$$\frac{x}{m-1} + 1 = 0. \qquad (1)$$

множество допустимых значений параметра m определяется условием $m \neq 1$. Умножив уравнение на $m - 1$, получим:

$$x + m - 1 = 0. \qquad (2)$$

Для последнего уравнения $m = 1$ является допустимым значением параметра. При этом значении левая часть уравнения (1) теряет смысл, а уравнение (2) имеет решение $x = 0$. Уравнения (1) и (2) не эквивалентны.

4. Рассмотрим два уравнения:

$\lg x + \lg y = \lg a$ (1) и $xy = a$. (2)

Для первого уравнения допустимые значения неизвестных и параметра определяются из условий

$$x > 0, \ y > 0, \ a > 0.$$

Для второго уравнения допустимыми являются произвольные значения неизвестных и параметра. Урвнения (1) и (2) не эквивалентны. На чертеже 44 показаны линии (гиперболы), изображающие данные уравнения при различных значениях параметра.

5. При решении квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в общем виде коэффициенты a, b и c рассматриваются как параметры.

6 **Задача.** *Разделить данный отрезок, равный a, на две части так, чтобы большая часть была средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей частью.*

Решение. Пусть x — длина большей части, тогда $a-x$ длина меньшей части.

По условию $x^2 = a(a-x)$, откуда

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \tag{1}$$

Согласно смыслу задачи для параметра a допустимым является произвольное положительное значение, а неизвестное x должно удовлетворять дополнительному условию $0<x<a$. Решив уравнение (1) без учета дополнительного условия для неизвестного, получим:

$$x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1),\quad x_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1);$$

условию $0<x<a$ удовлетворяет первое решение, оно и дает ответ на вопрос задачи.

7. Функция параметра $x = a^2$ удовлетворяет уравнению

$$x^3 - a^6 = 0.$$

В поле действительных чисел эта функция дает общее решение уравнения. В поле комплексных чисел общее решение уравнения может быть задано следующими функциями:
$x = a^2$, $x = \varepsilon a^2$, $x = \varepsilon^2 a^2$ (где ε и ε^2 — мнимые кубические корни из 1).

8. Функции

$$x_1 = \frac{-m-\sqrt{m^2+n^2}}{n} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-m+\sqrt{m^2+n^2}}{n} \tag{1}$$

удовлетворяют уравнению (как легко проверить):

$$nx^2 + 2mx - n = 0 \tag{2}$$

и при $n \neq 0$ дают все решения уравнения (2). Однако эти функции не дают общего решения уравнения (2), так как при $n=0$ и $m \neq 0$ уравнение имеет решение $x=0$, при $m=n=0$ уравнение удовлетворяется тождественно, тогда как при $n=0$ формулы (1) теряют смысл.

§ 54. Об исследовании уравнений

Необходимо различать два вида исследования уравнений: основное исследование и дополнительное исследование. *Основным исследованием будем называть всякое исследование, входящее в процесс решения уравнения в качестве составной его части.* Таким образом, основное исследование вытекает из требования «решить уравнение». Например, к основному исследованию относятся следующие вопросы: выявить посторонние решения, найти множество допустимых значений параметров, исследовать, дают ли найденные функции от параметров общее решение, при всех ли значениях параметров эти функции удовлетворяют уравнению.

К дополнительному исследованию будем относить всякое исследование не вытекающее из требования «решить уравнение». В отличие от основного, дополнительное исследование не имеет определенного содержания, если не указано, какие именно свойства уравнений и их решений подлежат исследованию. К дополнительному исследованию относятся, например, такие вопросы: выделить решения, удовлетворяющие дополнительным условиям; установить те или иные свойства функций, удовлетворяющих уравнению (системе); при решении задач посредством составления уравнений установить дополнительные условия, которым должны удовлетворять допустимые значения неизвестных и параметров, исходя из их конкретного смысла. (Примеры исследования уравнений даны в следующих параграфах: 73, 78, 86, 87, 88, 90, 93, 95, 106) *.

§ 55. Особые случаи решения уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \varphi(x), \tag{f}$$

в котором правая и левая части заданы при помощи аналитических выражений. Пусть при значении $x=a$ хотя бы одно из выражений $f(x)$ или $\varphi(x)$ теряет смысл. Если основываться непосредственно на определении корня уравнения, как такого значения аргумента x, при котором значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны, то число a нельзя считать принадлежащим множеству допустимых значений неизвестного, а значит, нельзя его считать корнем уравнения. Принцип продолжения функции по непрерывности (см. § 6) позволяет расширить понятие корня уравнения.

Дополнительное определение. *Если в точке $x = a$, хотя бы одно из выражений $f(x)$ и $\varphi(x)$ теряет смысл, и если предел разности $f(x) - \varphi(x)$ в точке a равен нулю:*

$$\lim [f(x) - \varphi(x)] = 0,$$

то число a считается корнем (особым) уравнения (f).

Определение распространяется на уравнения с несколькими неизвестными, а именно, если предел $f - \varphi$ в точке $(a, b, \ldots, c)$ равен нулю:

$$\lim [f(x, y, \ \ldots, z) - \varphi(x, y, \ \ldots, z)] = 0,$$

---

* К сожалению в учебной литературе (особенно в старой) основное исследование не разграничивается от дополнительного и постановка вопроса об исследовании уравнений делается неопределенной. Так, например, в учебнике алгебры Киселева в исследование упорно включаются случаи «положительных, отрицательных и нулевых корней». Однако исследование этих случаев никак не вытекает из требования «решить уравнение».

то $x = a,\ y = b,\ \ldots,\ z = c$ считается решением (особым) уравнения $f = \varphi$.

Понятие особого решения может вводиться, может и не вводиться, это зависит от того, принимается или нет принцип продолжения по непрерывности (подробности см. стр. 22), в зависимости от этого на особые решения возможны две точки зрения.

I. Согласно первой точке зрения *дополнительное определение решения в особом случае не принимается, а потому $x=a$ не считается корнем уравнения* (f).

II. Согласно второй точке зрения сформулированное *дополнительное определение принимается, и число a считается корнем уравнения* (f).

Возможно придерживаться как той, так и другой точек зрения, но, во избежание недоразумений (там, где они могут возникнуть) надо указывать, какая из этих точек зрения принимается.

В школьном курсе математики обычно принимается первая точка зрения, т. е. особые решения не рассматриваются.

Примечание. Следует иметь в виду, что связанное с особыми случаями решений уравнений наивное протаскивание (характерное для старых учебников) всякого рода «раскрытия неопределенностей, «бесконечных корней» и т. п. как чего-то очевидного само по себе», есть глубоко ошибочная, антинаучная точка зрения.

Примеры

1. Согласно дополнительному определению, число $x = 0$ следует считать корнем уравнения

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$\lim \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = 0.$$

2 Решить уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}. \tag{1}$$

Решение. После преобразований получим:

$$\sin 2x \cdot \sin x(\cos x - 1) = 0, \tag{2}$$

откуда

$$x = n\frac{\pi}{2},\quad x = n\pi \text{ и } x = 2n\pi.$$

Две последние формулы решений содержатся в первой, поэтому формула $x = n\frac{\pi}{2}$ дает общее решение уравнения (2). Переход от уравнения (1) к уравнению (2) был связан с расширением области определения, поэтому возможно появление посторонних решений. Подстановка $x = n\frac{\pi}{2}$ в уравнение (1) показывает, что здесь имеет место особый случай. Именно, при четном $n = 2k$ теряет смысл левая часть, а при нечетном $n = 2k + 1$ — правая.

Имеем (при $x \neq n\frac{\pi}{2}$):

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \sin x - \operatorname{tg} x.$$

При нечетном n получим:

$$\lim_{x \to \frac{2k+1}{2}\pi} |f(x) - \varphi(x)| = \lim |\sin x - \operatorname{tg} x| = \infty.$$

Следовательно, числа $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ не являются корнями уравнения.

При четном n имеем:

$$\lim_{x \to k\pi} (\sin x - \operatorname{tg} x) = 0.$$

Следовательно, числа $x = k\pi$ являются **особыми** решениями уравнения (1). Согласно **первой** точке зрения уравнение (1) не имеет решений.

§ 56. Основные свойства неравенств

Учение о неравенствах основывается на характеристических свойствах неравенств и на законах монотонности арифметических действий. Разумеется, что учение о неравенствах относится лишь к **расположенным** числовым полям (например, поле рациональных чисел или действительных чисел), в которых определены понятия «больше», «меньше», «равно»; к полю же комплексных чисел оно неприменимо. Отметим основные свойства неравенств и важнейшие следствия из них.

I. *Из неравенства $A<B$ следует неравенство $B>A$ и обратно — из второго неравенства следует первое* (свойство необратимости). Это свойство можно формулировать в виде следующего ***правила***. *При перестановке правой и левой частей неравенства смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

II. Из $A<B$ и $B<C$ следует $A<C$ (свойство транзитивности § 4).

III. *Если $A<B$,* то $B-A>0$ *и обратно — из второго неравенства следует первое* (см. § 4).

IV. Если $A<B$, то $A+C<B+C$ (свойство монотонности сложения, § 4).

Отсюда **правило**: *К обеим частям неравенства можно прибавить поровну.*

V. *Если* $A<B$ и $C<D$, то $A+C<B+D$.

Доказательство. Из $A<B$ следует $A+C<B+C$ из $C<D$ следует $B+C<B+D$. В силу транзитивности (свойство II) получим:

$$A+C<B+D, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Отсюда **правило**. *Неравенства одинакового смысла можно складывать почленно.*

VI. *Если* $A<B$, *то* $Am<Bm$ *при* $m>0$ *и* $Am>Bm$ *при* $m<0$ (свойство монотонности умножения § 4).

Отсюда **правило**. *При умножении обеих частей неравенства на положительный множитель смысл знака неравенства не меняется, а при умножении на отрицательный множитель смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

VII. В частности, при $m=-1$, получим: *если* $A<B$, *то* $-A>-B$.

Правило. *При изменении знака обеих частей неравенства смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

VIII. *Если* $A<B$ *и* $C>D$, *то*

$$A-C<B-D. \qquad (1)$$

Доказательство. По свойству VII имеем $-C<-D$, сложив почленно с неравенством $A<B$, получим (1), ч. т. д.

Правило. *Неравенства противоположного смысла можно вычитать почленно.*

IX. *Если* $A<B$ *и* $C<D$, *где* A, B, C *и* D *положительные числа, то* $AC<BD$.

Доказательство. Из $A<B$ следует $AC<BC$; из $C<D$ следует $BC<BD$, откуда $AC<BD$, ч. т. д.

Правило. *Неравенства одинакового смысла с положительными частями можно почленно перемножать.*

Примечание. Если в IX A, B, C и D отрицательны, то $-A>-B>0$ и $-C>-D>0$, откуда $AC>BD$, следовательно, при почленном перемножении смысл знака неравенства изменяется на противоположный. При перемножении неравенств с произвольными числами A, B, C и D могут представиться разнообразные случаи. Так, например, $-2<4$ и $-2<3$: имеем $(-2)\cdot(-2)<4\cdot 3$. С другой стороны, $-4<2$ и $-6<1$; но в данном случае $(-4)\cdot(-6)>2\cdot 1$.

X. Из IX следует, *что если* $A<B$, *где* A *и* B *положительные числа, то* $A^n<B^n$ *(*n *— натуральное число).*

Правило. *Обе части неравенства с положительными членами можно возвести в одну и ту же степень.*

XI. Если $A<B$ *и числа* A *и* B *одного знака, то*

$$\frac{1}{A}>\frac{1}{B}.$$

Доказательство Имеем: $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B-A}{AB} > 0$, так как $B - A > 0$ и $AB > 0$, ибо A и B числа одного знака, ч т. д.

Примечание Для чисел разных знаков свойство XI не имеет места.

§ 57. Тождественные неравенства

Пусть $F_1(x, y, ..., z)$ и $F_2(x, y, ..., z)$ некоторые аналитические выражения, заданные совместно.

Определение. *Неравенство*

$$F_1(x, y, \ldots, z) \vee F_2(x, y, \ldots, z)^*$$

выполняется тождественно, если оно имеет место для значений F_1 и F_2 при произвольных допустимых системах значений аргументов.

Под доказательством неравенства обычно понимают доказательство утверждения, что данное неравенство выполняется тождественно при всех системах допустимых значений, входящих в него аргументов.

Общих способов доказательства неравенств установить невозможно ввиду большого разнообразия как самих неравенств, так и применяемых в доказательствах методов. Наряду с весьма примитивными способами нередко применяются остроумные и искусственные приемы, так что не представляется возможным выработать определенную рецептуру.

§ 58. Некоторые замечательные неравенства

Ниже приведен ряд примеров на доказательство некоторых замечательных неравенств и на применение характерных методов

Примеры

1. *Доказать, что при всех натуральных значениях n:*

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} < 3 \qquad (1)$$

Доказательство. При $n = 1$ и $n = 2$ неравенство очевидно непосредственно. Для доказательства в общем виде заменим в знаменателях, начиная с 4-го слагаемого, числа $3, 4, \ldots, n$ меньшим числом 2. Будем иметь неравенства:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots k} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

---

* Знак $\vee$ может обозначать любой из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, тогда символом $\vee$ обозначается знак противоположного смысла, т. е. соответственно $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Следовательно,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ .\ .\ .+\frac{1}{1\cdot 2\ .\ .\ .n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отбросив отрицательное слагаемое $-\frac{1}{2^{n-1}}$, получим (1), ч. т. д.

Примечание. При произвольном натуральном n имеет место неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

В самом деле·

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\ \frac{1}{n^2}+\ .\ .\ .+$$

$$+\frac{n(n-1)\ .\ .\ .(n-k+1)}{1\cdot 2\ .\ .\ .k}\ \frac{1}{n^k}+\ .\ .\ .+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .2\cdot 1}{1\cdot 2\ .\ .\ .(n-1)n}\ \frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ .\ .\ .+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\ .\ .\ .k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ .\ .\ .\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ .\ .\ .+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\ .\ .\ .n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ .\ .\ .\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{1\cdot 2\ .\ .\ .k}+\ .\ .\ .+\frac{1}{1\cdot 2\ .\ .\ .n}<3.$$

2. *Доказать неравенство*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n^2}<2 \tag{1}$$

при всех натуральных n.

Доказательство. Задача аналогична предыдущей, однако, решение строится на иных принципах. Примем во внимание, что

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Положив последовательно $k=2, 3,...,n$ и подставив в левую часть неравенства (1), получим:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ .\ .\ .$$

$$.\ .\ .+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

3. ***Теорема*** *об абсолютной величине суммы: абсолютная величина суммы не больше, чем сумма абсолютных величин слагаемых:*

$$|a_1 + a_2 + \ . \ . \ . + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ . \ . \ . + |a_n|.$$

Доказательство вытекает из правила сложения положительных и отрицательных чисел. Если слагаемые суть числа одинакового знака (возможно, что среди них имеются равные нулю), то абсолютная величина суммы равна сумме абсолютных величин слагаемых. В этом случае имеем равенство·

$$|a_1 + a_2 + \ . \ . \ . + a_n| = |a_1| + |a_2| + \ . \ . \ . + |a_n|$$

Если среди слагаемых имеются и положительные и отрицательные числа, то для вычисления абсолютной величины суммы можно сложить отдельно абсолютные величины положительных и абсолютные величины отрицательных слагаемых и из большей суммы вычесть меньшую. Для вычисления же суммы абсолютных величин достаточно сумму абсолютных величин положительных слагаемых сложить с суммой абсолютных величин отрицательных слагаемых. В этом случае имеем неравенство:

$$|a_1 + a_2 + \ . \ . \ . + a_n| < |a_1| + |a_2| + \ . \ . \ . + |a_n|.$$

Так, например,

$|2 + 5 + 1| = 8$ и $|2| + |5| + |1| = 8$ (имеем равенство),

$|2 + 5 - 1| = 6$ и $|2| + |5| + |-1| = 8$ (имеем нераченство)

4. Неравенство Буняковского.

При всех значениях a_i и b_i выполняется неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ . \ . \ . + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ . \ . \ . + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ . \ . \ . + b_n^2)$$

или (в сокращенной записи):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Равенство имеет место лишь при условии, если числа a_i и b_i пропорциональны:

$$a_1 = kb_1, \ a_2 = kb_2, \ . \ . \ . \ , a_n = kb_n.$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством Лагранжа (см. § 20, пример 1, стр. 56):

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 - \left(\sum a_i b_i\right)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \ . \ . \ . + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2.$$

Правая часть этого тождества, будучи суммой квадратов, неотрицательна, а поэтому:

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 - \left(\sum a_i b_i\right)^2 \geqslant 0$$

Отсюда следует неравенство Буняковского. Равенство возможно лишь, если каждое из слагаемых в правой части равно нулю, но тогда

$$a_1 b_2 = a_2 b_1; \ a_1 b_3 = a_3 b_1, \ . \ . \ . \ , a_{n-1} b_n = a_n b_{n-1}$$

Если последние равенства имеют место, то числа a_i и b_i пропорциональны: $a_i = kb_i$. ч. т. д.

5. *При всех действительных a_i и b_i справедливо неравенство*

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

или кратко

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Равенство имеет место лишь, если числа a_i и b_i пропорциональны.

Доказательство. В самом деле

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|b_i| \leqslant \text{(теорема об абсолютной величине суммы)}$$

$$\leqslant \sum a_i^2+\sum b_i^2+2\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2} = \text{(в силу неравенства Буняковского)}$$

$$=\left[\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2}\right]^2.$$

Отсюда и вытекает доказываемое неравенство, ч. т. д.

При $n=2$ неравенство примет вид:

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}. \qquad (1)$$

Геометрическая интерпретация. Пусть $A\ (a_1, a_2)$ и $B\ (b_1, b_2)$ — две точки плоскости. Неравенство (1) выражает, что сумма отрезков OA и OB не больше отрезка AB (черт. 45). Аналогичную интерпретацию имеет неравенство при $n=3$.

6. *Теорема об абсолютной величине суммы имеет место для произвольных комплексных чисел*

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|.$$

Доказательство. Докажем неравенство для случая двух слагаемых. Положив $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, имеем:

$$|z_1+z_2|=|(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)|=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

и

$$|z_1|+|z_2|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Следовательно,

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|;$$

достаточно в неравенстве (1) (см предыдущий пример) заменить b_1 на $-a_2$, a_2 на b_1 и b_2 на $-b_2$.

Для суммы с любым числом слагаемых теорема распространяется методом математической индукции. Допустим, что

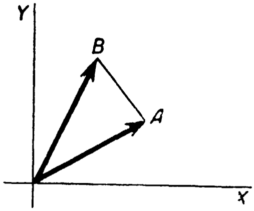
$$|z_1 + z_2 + \ . \ . \ . + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ . \ . \ . + |z_n|,$$

тогда

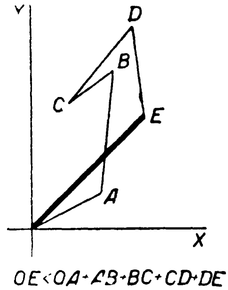
$$|z_1 + z_2 + \ . \ . \ . + z_n + z_{n+1}| = |(z_1 + z_2 + \ . \ . \ . + z_n) + z_{n+1}| \leqslant$$

$$\leqslant |z_1 + z_2 + \ . \ . \ . + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant \qquad \text{(случай двух слагаемых)}$$

$$\leqslant |z_1| + |z_2| + \ . \ . \ . + |z_n| + |z_{n+1}| \qquad \text{(по предположению).}$$



Черт. 45



Черт. 46

Итак, теорема верна для суммы $n+1$ слагаемых, если она верна для суммы n слагаемых; будучи верной для суммы двух слагаемых, теорема справедлива для суммы любого числа слагаемых, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Длина замыкающей (черт. 46) не меньше суммы длин звеньев ломаной линии.

7. *Теорема о выпуклых функциях.*

Определение. *Функция $y=f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) в некотором промежутке, если для любой пары различных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

(для вогнутой функции выполняется неравенство противоположного смысла).

Геометрическая интерпретация. Середина любой хорды графика выпуклой (вогнутой) функции лежит выше (ниже) соответствующей точки дуги (черт. 47).

Теорема. *Если функция $f(x)$ выпукла (вогнута) в некотором промежутке, то для n произвольных значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этого промежутка имеет место неравенство:*

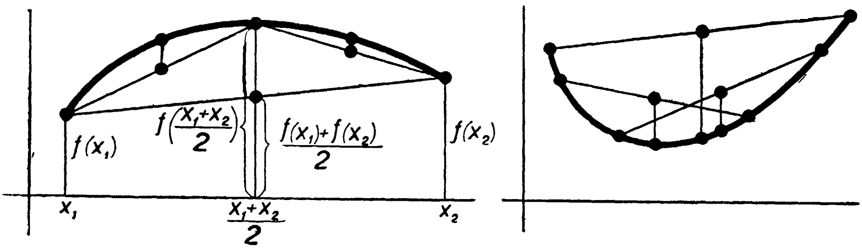
$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ . \ . \ . + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ . \ . \ . + f(x_n)}{n}; \qquad (1)$$

равенство при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (для вогнутой функции неравенство противоположного смысла).

Доказательство. Докажем, что неравенство справедливо для чисел вида $n=2^k$. В самом деле, по условию (а) неравенство (1) справедливо при

$k=1$. Допустим, что неравенство справедливо для некоторого k, докажем, что оно справедливо для $k+1$. По предположению

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^k})}{2^k}, \qquad (2)$$



Черт. 47

при любых $x_1, x_2, \ldots, x_{2^k}$, не равных между собой.

Имеем:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}+\dfrac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)<$$

$$<\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\dfrac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2}<$$

(по условию)

$$<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^k})+f(x_{2^k+1})+\ldots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}$$

(в силу предположения (2))

В силу принципа математической индукции теорема верна для любых чисел вида $n=2^k$, т. е. $n=2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$

Докажем, что, если неравенство верно для некоторого числа n, то оно верно и для $n-1$. Допустым, что некоторого n при произвольных x_i из данного промежутка имеет место (1). Положив в этом неравенстве

$$x_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1},$$

получим:

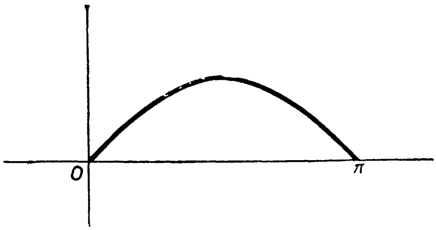
$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}\right)<$$

$$< \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}$$

Откуда после преобразований получим:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+(x_{n-1})}{n-1}.$$

Будучи верной для всех чисел вида 2^k, теорема верна и для любых меньших чисел, а значит, и для всех натуральных чисел, так как среди чисел 2^k содержатся как угодно большие, и т. д.



Черт. 48

Для вогнутой функции неравенства надо заменить неравенствами противоположного смысла. Из доказанной теоремы вытекает ряд неравенств·

а) при $0 < x$ функция $f(x) = x^m$ выпукла.

В самом деле, при $m=2$ и $x_1 \neq x_2$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4} <$$

$$< \frac{x_1^2+x_2^2+(x_1^2+x_2^2)}{4} <$$

$$< \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Далее применим метод математической индукции. Допустим, что при $0 < x_2$, $0 < x_1$ и $x_1 \neq x_2$:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{m-1} < \frac{x_1^{m-1}+x_2^{m-1}}{2}.$$

Умножив на $\frac{x_1+x_2}{2}$, получим:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{m} < \frac{(x_1^{m-1}+x_2^{m-1})(x_1+x_2)}{4} =$$

$$= \frac{x_1^m+x_2^m+(x_2x_1^{m-1}+x_1x_2^{m-1})}{4}.$$

Так как числа x_1-x_2 и $x_1^{m-1}-x_2^{m-1}$ одного знака, то

$$(x_1-x_2)(x_1^{m-1}-x_2^{m-1}) > 0,$$

откуда $x_2x_1^{m-1}+x_1x_2^{m-1} < x_1^m+x_2^m$, а поэтому

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m < \frac{x_1^m + x_2^m}{2}$$

Следовательно (силу принципа математической индукции), неравенство верно при любом $m > 2$ (при $m = 1$ — равенство). По теореме о выпуклой функции имеем при произвольных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^m \leqslant \frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n},$$

равенство, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

b) В промежутке от 0 до π функция $f(x) = \sin x$ вогнута (черт. 48). В самом деле,

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} <$$

$$< \sin\frac{x_1 + x_2}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

так как, если $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi$ и $x_1 \neq x_2$, то $0 < \cos\frac{x_1 - x_2}{2} < 1$.

Следовательно, при произвольных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в промежутке от 0 до π имеем:

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

равенство, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

§ 59. Средние величины

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — n данных действительных чисел; *средним этих чисел называется всякое число M, не большее, чем наибольшее, и не меньшее, чем наименьшее из данных чисел a_i*

$$\min a \leqslant M \leqslant \max a,$$

где $\min a$ и $\max a$ наибольшее и наименьшее из чисел a_i.

Теория средних величин имеет многочисленные применения в теории вероятностей, в математической статистике, при математической обработке результатов наблюдений.

Определение. 1°. *Средним арифметическим чисел a_i называется число:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum a_i}{n}$$

2°. *Средним геометрическим положительных чисел a_i называется число:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{\Pi a_i}.$$

3°. *Средним гармоническим положительных чисел называется число, обратное среднему арифметическому чисел обратных данным:*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ .\ \ .+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sum\frac{1}{a_i}}.$$

4°. *Средним квадратическим называется квадратный корень из среднего арифметического квадратов данных чисел:*

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ .\ \ .+a_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}}.$$

***Теорема** о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ \ .\ .\ .\ a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ .\ \ \ +a_n}{n}.$$

Равенство имеет место при условии $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Доказательство методом математической индукции. Докажем справедливость неравенства при $n=2$

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (1)$$

В самом деле, при любых действительных x_1 и x_2 имеем

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\geqslant 0,\ \text{откуда}\ x_1x_2\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2}{2}.$$

Положив $x_1=\sqrt{a_1}$ и $x_2=\sqrt{a_2}$, получим неравенство (1).

Равенство возможно лишь при условии $x_1-x_2=0$, т. е. $x_1=x_2$, а следовательно, $a_1=a_2$.

Для доказательства неравенства в общем виде установим некоторое вспомогательное неравенство. Если x_1 и x_2 неотрицательные числа, то при $x_1<x_2$ имеем $x_1^{n-1}<x_2^{n-1}$, если же $x_1>x_2$, то $x_1^{n-1}>x_2^{n-1}$.

Следовательно, при любых неотрицательных x_1 и x_2 имеем:

$$(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})(x_1-x_2)\geqslant 0\ \text{(равенство, если}\ x_1=x_2).$$

Раскрыв скобки и перенеся часть членов в правую часть, получим:

$$x_1^n+x_2^n\geqslant x_1x_2^{n-1}+x_2x_1^{n-1}\ \text{(равенство, если}\ x_1=x_2).$$

Взяв n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, написав соответствующие неравенства и сложив их почленно, получим:

$$(x_1^n+x_2^n)+(x_1^n+x_3^n)+\ .\ .\ .\qquad +(x_1^n+x_n^n)+$$

$$+(x_2^n+x_3^n)+\ .\ .\ .\qquad +(x_2^n+x_n^n)+$$

$$+ (x_3^n + x_4^n) + \dots + (x_3^n + x_n^n) +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (x_{n-1}^n + x_n^n) \geqslant$$
$$\geqslant (x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_1^{n-1}) + (x_1 x_3^{n-1} + x_3 x_1^{n-1}) + \dots + (x_1 x_n^{n-1} + x_n x_1^{n-1}) +$$
$$+ (x_2 x_3^{n-1} + x_3 x_2^{n-1}) + \dots + (x_2 x_n^{n-1} + x_n x_2^{n-1}) +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (x_{n-1} x_n^{n-1} + x_n x_{n-1}^{n-1})$$

(равенство, если $x_1 = x_2 = \dots = x_n$). Выполнив приведение подобных членов, получим:

$$(n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) \geqslant x_1 (x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) +$$
$$+ x_2 (x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) + \dots + x_n (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} +$$
$$+ \dots + x_{n-1}^{n-1}), \qquad (2)$$

Допустим, что для любых $n-1$ положительных чисел среднее арифметическое не меньше их среднего геометрического. Следовательно, в частности:

$$x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geqslant (n-1)\, x_2 x_3 \dots x_n,$$
$$x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geqslant (n-1)\, x_1 x_3 \dots x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1} \geqslant (n-1)\, x_1 x_2 \dots x_{n-1}$$

(равенства при $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$).

Пользуясь последними неравенствами, можно усилить неравенство (2):

$$(n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) \geqslant n(n-1)\, x_1 x_2 \dots x_n$$

(равенство при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$). Положив в последнем соотношении $x_1^n = a_1$, $x_2^n = a_2$, ..., $x_n^n = a_n$, получим:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(равенство при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$).

Следовательно, среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического в предположении, что соответствующее неравенство справедливо для $n-1$ чисел. Но при $n = 2$ справедливость неравенства установлена непосредственной проверкой. Следовательно, оно имеет место при любом натуральном $n \geqslant 2$, ч. т. д.

Теорема. *Среднее гармоническое положительных чисел не больше их среднего геометрического:*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ ...\ +\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2\ ...\ a_n}. \qquad (1)$$

Доказательство. Среднее геометрическое чисел $\frac{1}{a_i}$ не больше их среднего арифметического:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\ ...\ \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ ...\ +\frac{1}{a_n}}{n}$$

(равенство при $a_1 = a_2 = ... = a_n$).

Взяв обратные величины от обеих частей последнего неравенства и изменив смысл знака неравенства, получим (1), ч. т. д.

Теорема. *Среднее квадратическое не меньше абсолютной величины среднего арифметического данных чисел*

$$\frac{|a_1+a_2+\ ...\ +a_n|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ ...\ +a_n^2}{n}}$$

(равенство при $a_1 = a_2 = ... = a_n$).

Доказательство. Рассмотрим квадрат суммы:

$$(a_1+a_2+\ ...\ +a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\ ...\ +a_n^2 +$$
$$+ 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_{n-1}a_n.$$

Воспользовавшись неравенством $2a_i a_j \leqslant a_i^2 + a_j^2$ (равенство при $a_i = a_j$), заменим каждое удвоенное произведение суммой квадратов сомножителей, тогда получим неравенство

$$(a_1+a_2+\ ...\ +a_n)^2 \leqslant n(a_1^2+a_2^2+\ ...\ +a_n^2).$$

Чтобы получить требуемое неравенство, извлечем корень из обеих частей последнего неравенства, а затем почленно разделим на n, ч. т. д.

Среднее арифметическое заключено между наименьшим и наибольшим из данных чисел. В самом деле, если в сумме $a_1 + a_2 + ... + a_n$ заменить каждое слагаемое наименьшим, а затем наибольшим числом, то получим:

$$n \min a \leqslant a_1+a_2+\ ...\ +a_n \leqslant n \max a$$

лии

$$\min a \leqslant \frac{a_1+a_2+\ ...\ +a_n}{n} \leqslant \max a.$$

Аналогично доказывается такое же утверждение относительно среднего геометрического и среднего гармонического:

$$\min a \leqslant \sqrt[n]{\Pi a_i} \leqslant \max a \quad \text{и} \quad \min a \leqslant \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \leqslant \max a.$$

Среднее квадратическое заключено между наименьшей и наибольшей из абсолютных величин данных чисел:

$$\min |a| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leqslant \max |a|.$$

При положительных числах a_i среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое связаны между собой следующими неравенствами:

$$\min a \leqslant \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\Pi a_i} \leqslant \frac{\sum a_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}} \leqslant \max a.$$

Теорема. *Если знаменатели дробей*

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

положительны, то имеет место неравенство:

$$\min \frac{a}{b} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant \max \frac{a}{b},$$

где $\min \frac{a}{b}$ *и* $\max \frac{a}{b}$ *наименьшая и наибольшая из данных дробей* $\frac{a_i}{b_i}$.

Доказательство. Обозначим для краткости $m = \min \frac{a}{b}$ и $M = \max \frac{a}{b}$;

имеем:

$$mb_1 \leqslant a_1 \leqslant Mb_1,$$
$$mb_2 \leqslant a_2 \leqslant Mb_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$mb_n \leqslant a_n \leqslant Mb_n.$$

Сложив почленно и разделив на $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, получим:

$$m \leqslant \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \leqslant M, \quad \text{ч. т. д.}$$

Равенство имеет место лишь, когда дроби $\frac{a_i}{b_i}$ равны между собой.

В частности,

$$\min a \leqslant \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ \ldots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \ \ldots + k_n} \leqslant \max a,$$

где k_i произвольные положительные числа, а $\min a$ и $\max a$ наименьшее и наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Неравенство Бернулли. *При $h > 0$ и при любом рациональном $r > 1$ имеет место неравенство*

$$(1 + h)^r > 1 + rh.$$

Доказательство. Положив $r = \frac{p}{q}$, где $p > q$, напишем неравенство, выражающее, что среднее геометрическое чисел

$$\overbrace{(1 + rh),\ (1 + rh),\ \ldots,(1 + rh)}^{q\ \text{раз}},\ \overbrace{1, 1,\ \ldots, 1}^{p - q\ \text{раз}}$$

меньше их среднего арифметического

$$\sqrt[p]{(1 + rh)^q} < 1 + \frac{qrh}{p}.$$

Откуда

$$(1 + rh) < (1 + h)^{\frac{p}{q}},\quad \text{т. е.}\quad 1 + rh < (1 + h)^r,\ \text{ч. т. д.}$$

При натуральном $r = n$ неравенство Бернулли может быть доказано непосредственно. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(1 + h)^n = 1 + nh + C_n^2h^2 + \ \ldots + h^n,$$

отбросив положительные слагаемые, начиная с третьего, получим:

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

§ 60. Задачи на экстремум, решаемые применением неравенств

***Лемма** 1°. Если сумма n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет данное значение S, то произведение*

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ \ldots\ x_n^{m_n}$$

имеет наибольшее значение, при условиях

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ \ldots = \frac{x_n}{m_n}, \tag{1}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — любые заданные положительные рациональные числа.

Доказательство. Предположим, что $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — натуральные числа. Рассмотрим $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ чисел

$$\underbrace{\frac{x_1}{m_1}, \frac{x_1}{m_1}, \ldots, \frac{x_1}{m_1}}_{m_1 \text{ раз}}; \quad \underbrace{\frac{x_2}{m_2}, \frac{x_2}{m_2}, \ldots, \frac{x_2}{m_2}}_{m_2 \text{ раз}}, \ldots; \quad \underbrace{\frac{x_n}{m_n}, \frac{x_n}{m_n}, \ldots, \frac{x_n}{m_n}}_{m_n \text{ раз}};$$

напишем, что их среднее геометрическое не больше среднего арифметического:

$$\sqrt[m_1+m_2+\ldots+m_n]{\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{m_1}\left(\frac{x_2}{m_2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{x_n}{m_n}\right)^{m_n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_1\frac{x_1}{m_1} + m_2\frac{x_2}{m_2} + \ldots + m_n\frac{x_n}{m_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

откуда

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \leqslant \frac{m_1^{m_1}\cdot m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}}{\left(\sum m_i\right)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} S^{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \qquad (2)$$

Наибольшее значение для $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ получается, когда последнее неравенство обратится в равенство, что будет иметь место при условии (см. стр. 222)

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \frac{S}{\sum m_i}.$$

Пусть $m_1 = \frac{p_1}{q_1}, m_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, m_n = \frac{p_n}{q_n}$ — дробные числа. Обозначим через N наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей, а через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — соответствующие дополнительные множители. Имеем:

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} = \sqrt[N]{x_1^{p_1d_1}x_2^{p_2d_2}\ldots x_n^{p_nd_n}}.$$

При данной сумме произведение, находящееся под знаком корня, имеет наибольшее значение, если

$$\frac{x_1}{p_1d_1} = \frac{x_2}{p_2d_2} = \ldots = \frac{x_n}{p_nd_n}.$$

Разделив знаменатели на N, получим равенства (1), ч. т. д.

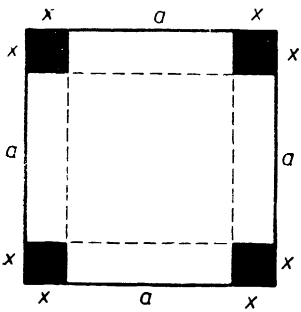
Следствие. При данной сумме $x_1+x_2+\ldots+x_n$ произведение чисел $x_1x_2\ldots x_n$ имеет наибольшее значение, если эти числа равны $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Лемма 2°. *При данном произведении* $P = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ сумма $S = x_1+x_2+\ldots+x$ имеет наименьшее значение, если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию (1).

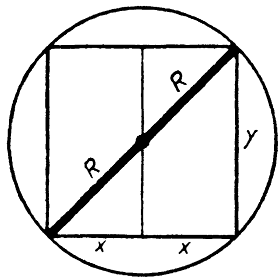
Доказательство. Перепишем неравенство (2) следующим образом:

$$S \geqslant (m_1+m_2+\ \ldots\ +m_n)\left(\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ \ldots\ m_n^{m_n}}\right)^{\frac{1}{m_1+m_2+\ \ldots\ +m_n}}.$$

При условии (1) это неравенство обращается в равенство, и тогда при данном P сумма S получает наименьшее значение, ч. т. д.



Черт. 49



Черт. 50

Задачи отыскания максимума P при данном S и минимума S при данном P называются **взаимными**. Как для той, так и для другой задачи решение дается условиями (1).

Примеры

1. *Из всех прямоугольников с данным периметром найти тот прямоугольник, площадь которого является наибольшей.*

Решение. Пусть x и y — длины взаимно-перпендикулярных сторон прямоугольника, $2s$ — его периметр и p — площадь. Имеем: $x+y=s$, но при данной сумме произведение p имеет наибольшее значение, если $x=y=\frac{s}{2}$, т. е. если прямоугольник является квадратом.

Взаимная задача формулируется следующим образом: *из всех прямоугольников с данной площадью найти тот, который имеет наименьший периметр.* Решение этой задачи также дает квадрат.

2. *Из данного квадрата со стороной **a** вырезать по углам такие квадраты со стороной x, чтобы после сгибания по пунктирным линиям (черт. 49) получилась коробка наибольшего объема.*

Решение. Площадь основания коробки равна $(a-2x)^2$, высота равна x. Отсюда найдем объем: $v = x\ (a-2x)^2$. Положим $a-2x=y$, тогда имеем

$$2v = (2x)\ y^2.$$

Сумма сомножителей $2x$ и y равна a, следовательно, $2v$ (а также и v) имеет наибольшее значение, если

$$\frac{2x}{1}=\frac{y}{2}, \text{ т. е. } 2x=\frac{a-2x}{2}, \text{ откуда } x=\frac{a}{6}.$$

3. *Найти цилиндр наибольшего объема, вписанный в шар данного радиуса R*

Решение. Пусть x и y — радиус основания и высота искомого цилиндра; имеем: $v=\pi x^2 y$ Из чертежа 50, на котором фигура изображена в разрезе, найдем:

$$4R^2=4x^2+y^2, \text{ откуда } v=\frac{\pi}{4}\,y\,(4R^2-y^2)=\frac{\pi}{4}\,(y^2)^{\frac{1}{2}}(4R^2-y^2).$$

Сумма сомножителей y^2 и $4R^2-y^2$ постоянна, поэтому максимальное значение объема получится, если

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=\frac{4R^2-y^2}{1}, \text{ откуда } 3y^2=4R^2,\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}R \text{ и } x=\sqrt{\frac{2}{3}}\,R.$$

4. *Из всех прямоугольных параллелепипедов с данным объемом найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность.*

Решение. Пусть x, y и z — ребра искомого параллелепипеда, v — его объем, а $2s$ — полная поверхность.

Имеем: $v=xyz$. Ищем минимум:

$$s=xy+xz+yz.$$

Так как значение v дано, то данным можно считать также и значение $v^2=(xy)\,(xz)\,(yz)$. Минимум суммы s при данном произведении реализуется, если $xy=xz=yz$, откуда $x=y=z$.

Следовательно, решение задачи дает куб.

Взаимная задача формулируется следующим образом: *из всех прямоугольных параллелепипедов с данной полной поверхностью найти тот, который имеет наибольший объем.* Решение этой задачи также дает куб.

5. *Найти наименьшее значение суммы $S=x^2+y^2+z^2$ при заданном значении $ax+by+cz=p$. (где хотя бы одно из чисел a, b и c отлично от нуля).*

Решение. Пусть $ax+by+cz=p$. В силу неравенства Буняковского (см. § 58, стр. 216) имеем:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(ax+by+cz)^2,$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{p^2}{a^2+b^2+c^2},$$

наименьшее значение S будет реализовано, когда неравенство обратится в равенство, что будет иметь место при

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}. \tag{1}$$

Из этих соотношений и из уравнения $ax+by+cz=p$ найдем:

$$x=\frac{ap}{a^2+b^2+c^2},\quad y=\frac{bp}{a^2+b^2+c^2},\quad z=\frac{cp}{a^2+b^2+c^2}.$$

Геометрическая интерпретация. На данной плоскости $ax+by+cz=p$ ищется точка, для которой расстояние от начала координат $\sqrt{S}$

имеет наименьшее значение. Соотношения (1) показывают, что искомой точкой служит основание перпендикуляра, опущенного из точки O на данную плоскость.

§ 61. Неравенства, содержащие неизвестные, задание элементарных областей при помощи неравенств

Пусть $F_1(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ — функции от аргументов $x, y, \ldots, z$, рассматриваемые совместно в общей части их областей определения.

Неравенство

$$F_1(x, y, \ldots, z) < F_2(x, y, \ldots, z), \tag{F}$$

выражающее следующее суждение: значение функции F_1 меньше значения функции F_2, называется неравенством с неизвестными $x, y, \ldots, z$.

Неравенства, содержащие неизвестные, могут быть различных видов:

$$F_1 > F_2, \quad F_1 \leqslant F_2, \quad F_1 \geqslant F_2.$$

Если при некоторой системе значений неизвестных $x=a$, $y=b, \ldots, z=c$ высказанное суждение истинно, т. е. значение функции F_1 меньше значения функции F_2:

$$F_1(a, b, \ldots, c) < F_2(a, b, \ldots, c),$$

то система чисел $(a, b, \ldots, c)$ называется решением неравенства (F), говорят также, что эта система чисел удовлетворяет неравенству (F).

Можно рассматривать системы неравенств, содержащие неизвестные. Решением системы неравенств называется система значений неизвестных, удовлетворяющая каждому неравенству данной системы неравенств.

Решить неравенство (систему) — значит найти множество всех его решений.

Множество всех решений системы неравенств есть общая часть множеств решений каждого неравенства системы, взятого в отдельности.

Можно рассматривать также совокупности неравенств, содержащие неизвестные. Решением совокупности неравенств называется такая система значений неизвестных, при которой удовлетворяется хотя бы одно из неравенств совокупности.

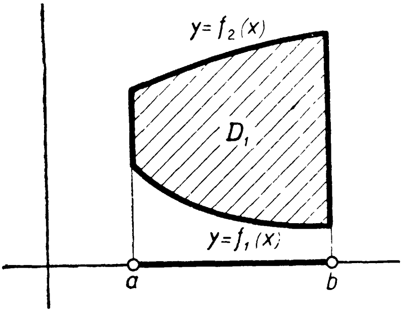
Систему двух неравенств $F_1 < F_2$, $F_2 < F_3$ принято записывать «цепочкой»:

$$F_1 < F_2 < F_3.$$

Понятие эквивалентности, сформулированное применительно к уравнениям, распространяется на неравенства (системы и совокупности неравенств): достаточно в определении (стр. 187) заменить слово «уравнение» словом «неравенство».

Таким образом (по определению), *два неравенства (системы либо совокупности) эквивалентны, если они имеют одно и то же множество всех решений.*

Если неравенство (система или совокупность) *является следствием данного неравенства* (системы или совокупности), *то* (по определению) *множество всех его решений содержит как часть множество всех решений данного неравенства* (системы или совокупности).



Черт. 51

Заданием неравенства (системы или совокупности неравенств), содержащего неизвестные, определяется множество всех его решений. В математике часто *неравенствами пользуются как средством задания числовых и точечных множеств.*

В § 5 (см. стр. 17 и 18) были сформулированы определения различных видов числовых промежутков: сегменты, интервалы, полусегменты (конечные и бесконечные), все эти промежутки определялись как множества всех действительных чисел, удовлетворяющих некоторым неравенствам.

Элементарные области на плоскости. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ две функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству $f_1(x)<f_2(x)$ в интервале (a, b). Рассмотрим множество точек (x, y) плоскости, содержащихся внутри фигуры, ограниченной снизу линией $y=f_1(x)$, сверху линией $y= f_2(x)$, слева и справа параллелями оси ординат $x = a$ и $x = b$ (черт. 51) (линии, ограничивающие данную фигуру, к рассматриваемому множеству не причисляются).

Аналитически это множество можно характеризовать следующей системой неравенств:

$$a < x < b, \quad f_1(x) < y < f_2(x), \qquad (D_1)$$

которой удовлетворяют координаты принадлежащих ему точек. В самом деле, при любом данном x, содержащемся в интервале (a, b), значения y содержатся между числами $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Примечание. Входящие в состав границы боковые отрезки могут (один или оба) выродиться в точку, так будет, если верхняя и нижняя дуги имеют общие концы (один или оба, черт. 52).

Аналогично, системой неравенств

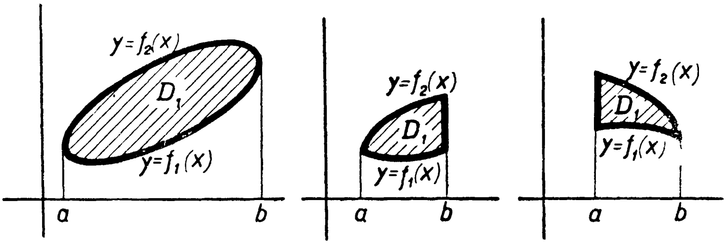
$$c < y < d, \quad \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y) \qquad (D_2)$$

характеризуется множество точек плоскости, лежащих внутри фигуры, ограниченной слева и справа линиями $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ (соответственно), а снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ (черт. 53).

Системой неравенств

$$a < x < b, \quad f(x) < y < +\infty$$

определяется фигура, ограниченная снизу линией $y = f(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 54).

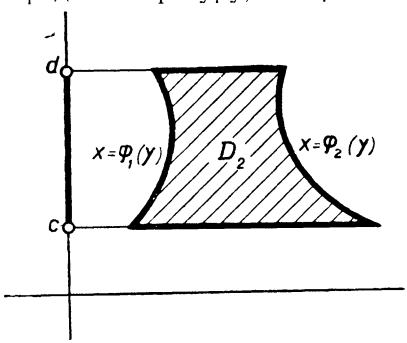


Черт. 52

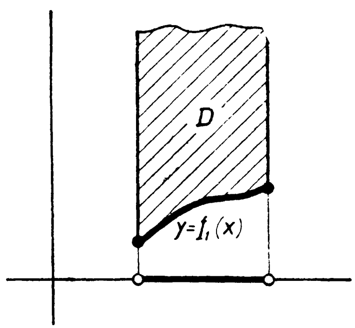
Система неравенств

$$a < x < +\infty, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$$

определяет фигуру, изображенную на черт. 55



Черт. 53



Черт. 54

Определение. *Элементарной областью (открытой) называется множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств вида:*

$$a < x < b, \quad f_1(x) < y < f_2(x) \tag{D$_1$}$$

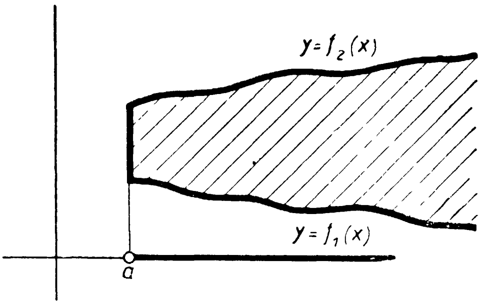
или

$$c < y < d, \quad \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y). \tag{D$_2$}$$

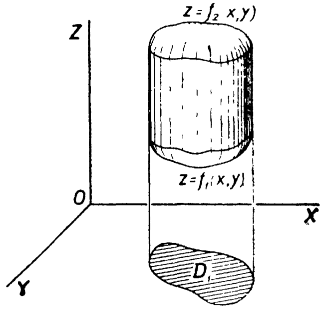
Множество точек, получающихся присоединением к элементарной области ограничивающих ее линии, называется замкнутой элементарной областью.

Примечание. В неравенствах, определяющих элементарные области, могут участвовать символы $\pm\infty$.

Для получения системы неравенств, определяющих замкнутую элементарную область, достаточно в неравенствах, определяющих соответствующую область (открытую), заменить знаки $<$ знаками $\leqslant$ за исключением, разумеется, знаков, относящих-



Черт. 55



Черт. 56

ся к символам $\pm\infty$, и также случаев, когда равенство влечет за собой невыполнимые действия.

Системы неравенств могут служить для задания точечных множеств в пространстве. Рассмотрим, например, множество точек, содержащихся внутри тела, ограниченного снизу поверхностью $z = f_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = f_2(x, y)$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси OZ.

Если проекцией рассматриваемого тела на плоскость XOY служит элементарная плоская область (черт. 56), то данное множество характеризуется системой неравенств:

$$f_1(x, y) < z < f_2(x, y),$$

где x и y, координаты проекции на XOY произвольной точки множества, удовлетворяют системе неравенств, характеризующей плоскую область, служащую проекцией тела, т. е. системе неравенств вида (D_1) или (D_2).

Примеры

1. Система неравенств

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

определяет множество точек, лежащих внутри прямоугольника. Системы неравенств

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

определяют соответствующий замкнутый прямоугольник (черт. 57).

2. Множество точек, лежащих внутри окружности

$$x^2 + y^2 = 1,$$

определяется системой неравенств:

$$-1 < x < 1, \quad -\sqrt{1-x^2} < y \sqrt{1-x^2} \text{ (черт. 58).}$$

3. Система неравенств

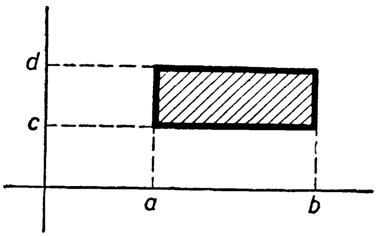
$$0 < x < +\infty, \quad \frac{1}{x} \leqslant y < +\infty$$

определяет замкнутую область, образованную точками, лежащими в первом квадранте выше гиперболы $y=\frac{1}{x}$ и на самой гиперболе (черт. 59), эту систему неравенств сокращенно можно записать так:

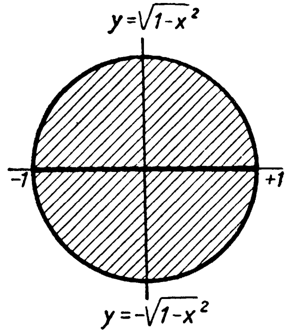
$$0 < x, \quad \frac{1}{x} \leqslant y.$$

4. Система неравенств

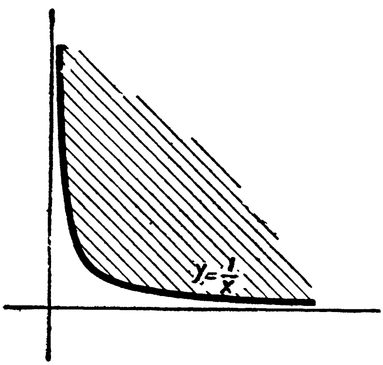
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x$$



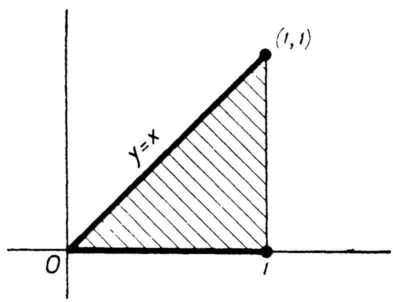
Черт. 57



Черт. 58



Черт. 59



Черт. 60

определяет изображенный на чертеже 60 треугольник (замкнутый), этот же треугольник можно задать системой неравенств:

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad y \leqslant x \leqslant 1.$$

5. Система неравенств

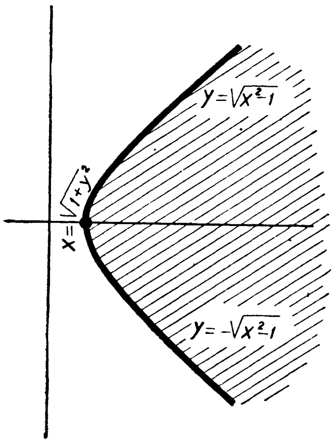
$$1 < x, \quad -\sqrt{x^2-1} < y < \sqrt{x^2-1}$$

определяет область, ограниченную ветвью гиперболы $x^2-y^2=1$; эту же область можно (черт. 61) задать системой неравенств:

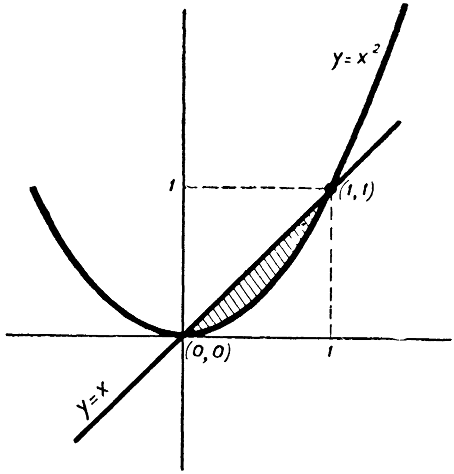
$$-\infty < y < \infty, \quad \sqrt{1+y^2} < x < +\infty.$$

6. Рассмотрим область, ограниченную сверху прямой $y=x$, а снизу параболой $y=x^2$ (черт. 62). Прямая и парабола пересекаются в двух точках (0, 0) и (1, 1). Рассматриваемую область можно задать системой неравенств:

$$0<x<1, \quad x^2<y<x$$



Черт. 61



Черт. 62

или

$$0 < y < 1, \quad y < x < \sqrt{y}.$$

7 Множество точек, содержащихся внутри тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, можно задать системой неравенств:

$$0 < z < 1-x-y, \quad 0 < y < 1-x, \quad 0 < x < 1.$$

§ 62. Решение неравенств

Во многих случаях (но, разумеется, не во всех) множество всех решений неравенства (системы или совокупности) с одним неизвестным состоит из конечного числа числовых промежутков. Аналогично для неравенств с двумя (или большим числом) неизвестными множество всех решений может состоять из конечного числа элементарных областей. В этом случае (наиболее важном в приложениях) задача решения неравенства (системы или совокупности) ставится так: установить *неравенства, определяющие промежутки или элементарные области, в которых удовлетворяется данное неравенство (система или совокупность).*

Таким образом, в рассматриваемом случае неравенства заменяются новыми неравенствами, характеризующими все те промежутки или элементарные области, в которых выполняются данные неравенства.

Некоторые положения теории эквивалентности уравнений имеют место, а некоторые не имеют места применительно к неравенствам.

1°. *Применительно к неравенствам остается в силе общий признак эквивалентности (стр. 193).*

2°. ***Теорема.*** *Неравенства*

$$F_1 \vee F_2 \qquad (\mathrm{F})$$

и

$$F_1 + \omega \vee F_2 + \omega$$

эквивалентны, если функция $\omega(x, y, \ldots, z)$ *имеет смысл* в области определения неравенства (F).

Доказательство, данное на стр. 193 для уравнений, остается в силе для неравенств (надо лишь в рассуждениях знак равенства заменить знаком неравенства).

Следствие. *Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.*

3°. Имеет место *теорема: неравенства*

$$F_1(x, y, \ldots, z) < F_2(x, y, \ldots, z)$$

и

$$F_2(x, y, \ldots, z) > F_1(x, y, \ldots, z)$$

эквивалентны.

Доказательство. В силу свойства I (см. § 56) второе неравенство вытекает из первого, а первое из второго.

4°. ***Теорема.*** *Если функция* $\omega(x, y, \ldots, z)$ *положительна в области определения неравенства*

$$F_1 < F_2,$$

то это неравенство и неравенство

$$\omega F_1 < \omega F_2$$

эквивалентны. Если функция $\omega(x, y, \ldots, z)$ *отрицательна, то неравенства*

$$F_1 < F_2 \text{ и } \omega F_1 > \omega F_2$$

эквивалентны.

Доказательство из $F_1 < F_2$ при $\omega > 0$ следует $\omega F_1 < \omega F_2$ (см. § 56, свойство VI), а при $\omega < 0$ следует $\omega F_1 > \omega F_2$. Обратно, из

$$\omega F_1 < \omega F_2 \text{ при } \omega > 0 \text{ следует } \frac{1}{\omega}(\omega F_1) < \frac{1}{\omega}(\omega F_2),$$

т. е. $F_1 < F_2$; при $\omega < 0$ из $\omega F_1 > \omega F_2$ следует

$$\frac{1}{\omega}(\omega F_1) < \frac{1}{\omega}(\omega F_2),$$

т. е. $F_1 < F_2$, ч. т. д.

Формулировка этой теоремы в виде правила та же, что формулировка свойства VI на стр. 213.

При почленном умножении и возведении в степень неравенств следует руководствоваться правилами IX и X, изложенными в § 56.

5°. ***Теорема.*** *Неравенство*

$$\frac{F(x,\ y,\ \ldots,\ z)}{\Phi(x,\ y,\ \ldots,\ z)} > 0$$

эквивалентно неравенству

$$F(x,\ y, \ldots, z)\,\Phi(x,\ y, \ldots,\ z) > 0.$$

Доказательство очевидно, так как значения частного $\frac{F}{\Phi}$ и произведения $F \cdot \Phi$ суть числа одного и того же знака, ч. т. д.

На основании этой теоремы можно производить освобождение неравенств от знаменателей. (Примеры решения неравенств рассмотрены в параграфах 75, 91, 92, 93, 106).

Теорема о «комбинировании» (стр. 202 и 203), справедливая для систем уравнений, не имеет места для систем неравенств. Так, например, системы:

$$\left.\begin{matrix} F_1 > 0 \\ F_2 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{matrix} F_1 > 0 \\ F_1 + F_2 > 0 \end{matrix}\right\}$$

не эквивалентны. В самом деле, вторая система есть следствие первой. Однако первая система не есть следствие второй, так как из условия $F_1 + F_2 > 0$ при $F_1 > 0$ следует, что $F_2 > -F_1$, но не следует, что $F_2 > 0$.

Пример

Рассмотрим систему неравенств

$$x - y > 0,\ x + y > 0.$$

Эта система эквивалентна системе

$$y < x,\ y > -x, \text{ т. е. } -x < y < x.$$

Последнее возможно, если $-x < x$, т. е. при $x > 0$. Итак, имеем элементарную область (черт. 63):

$$0 < x < +\infty,\ -x < y < x, \qquad (D_1)$$

Вторая система принимает вид $x - y > 0$, $2x > 0$, откуда (черт. 64):

$$0 < x < +\infty,\ y < x. \qquad (D_2)$$

Элементарная область (D_1) есть часть (D_2) (вторая система — следствие первой).

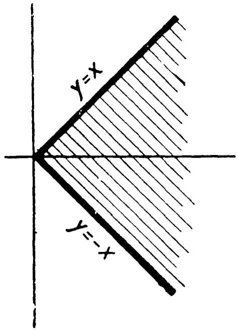
Неполное решение неравенств

Задача неполного решения неравенства, содержащего неизвестное, заключается в следующем: *установить, что существует* *некоторое непустое множество значений неизвестного x, удовлетворяющих данному неравенству*

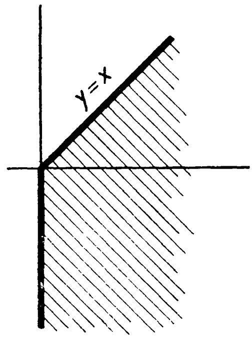
$$f(x) > \varphi(x),$$

и указать такое множество.

Таким образом, при неполном решении неравенства не требуется находить множество всех его решений, а достаточно (во-



Черт. 63



Черт. 64

обще говоря) найти некоторую непустую часть этого множества. При такой постановке вопроса в процессе неполного решения неравенства возможно, в целях упрощения, производить над данным неравенством ряд операций сужающих множество всех его решений.

Неполное решение неравенств широко применяется в теории пределов. Так, например, чтобы доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, достаточно доказать, что при произвольном заданном ε неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется при всех значениях $x \neq a$ в некотором интервале, содержащем точку a, при этом вовсе не требуется находить множество всех значений аргумента, удовлетворяющих неравенству (1).

Примеры

1. Доказать, что при всех достаточно больших положительных значениях аргумента x выполняются неравенства

$$0 < \frac{x}{x^2 - 5} < 0{,}0001. \qquad (1)$$

Решение. Найдем такой интервал (N, ∞), в котором наверное выполняются неравенства (1). Будем считать, что $x > \sqrt{5}$, тогда дробь $\frac{x}{x^2-5}$ положительна, а потому достаточно выполнения неравенств:

$$\frac{x^2 - 5}{x} > 10^4 \quad \text{или} \quad x > 10^4 + \frac{5}{x},$$

Последнее неравенство наверное выполняется, если $x>1001$, так как тогда $\frac{5}{x}<1$ и $x>1\,001>10^4+\frac{5}{x}$. Итак, неравенства (1) выполняются в интервале $(1001, \infty)$.

2. Найти интервал, содержащий точку $x=1$, в котором наверное выполняется неравенство

$$|x^3+x-2|<0{,}0001. \qquad (1)$$

Решение. Имеем

$$|x^3+x-2|=|x-1|\,|x^2+x+2|.$$

Возьмем какой-либо определенный интервал, содержащий точку $x=1$, например, интервал $0<x<2$. В этом интервале

$$|x^2+x+2|<8, \text{ а потому } |x^3+x+2|<8\,|x-1|.$$

Неравенство (1) наверное выполняется, если $|x-1|<\frac{0.0001}{8}$, т. е. в интервале

$$0{,}9999875<x<1{,}0000125.$$

§ 63. Неравенства, содержащие абсолютную величину

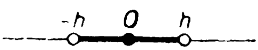
Пусть h данное положительное число; неравенство

$$|x|<h \qquad (1)$$

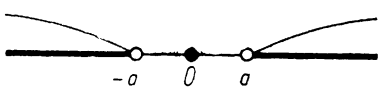
справедливо при положительном x, если $x<h$; при отрицательном x, если $-h<x$ и при $x=0$. Ни при каких других значениях x неравенство (1) места не имеет (это следует из определения соотношений «больше» и «меньше» для положительных и отрицательных чисел). Неравенство (1) равносильно системе неравенств:

$$-h<x<h. \qquad (2)$$

Геометрически неравенство (1) выражает, что точка x расположена на числовой прямой на расстоянии, меньшем h, от начала координат. Точка x должна быть заключена в интервале



Черт. 65



Черт. 66

$(-h, h)$ (черт. 65), это и выражают неравенства (2).

Если $a>0$, то неравенство $|x|>a$ выполняется либо если $x>a$, либо если $x<-a$. Таким образом, данное неравенство эквивалентно совокупности двух неравенств:

$$x<-a, \quad x>a;$$

общее решение есть совокупность двух интервалов $(-\infty, -a)$ и (a, ∞). Геометрически неравенство $|x|>a$ выражает, что точка x расположена на числовой оси на расстоянии большем a от начала координат (черт. 66).

При $a<0$ неравенство $|x|>a$ удовлетворяется тождественно.

При $a=0$ получим неравенство $|x|>0$, удовлетворяющееся всеми значениями неизвестного, отличными от нуля; общее решение есть совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Неравенство

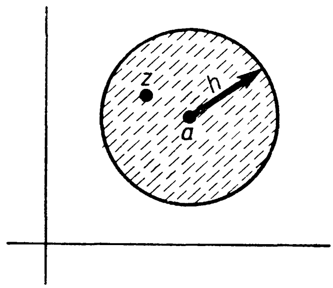
$$|x-a|<h \quad (\text{где } h>0)$$

выполняется, если $-h<x-a<h$, откуда

$$a-h<x<a+h.$$

Соответствующая точка x должна быть расположена в интервале длины $2h$ с серединой в точке a. При выполнении неравенства $|x-a|>h$ точка x расположена вне этого интервала (черт. 67).

Черт. 67



Черт. 68

Пусть a — данное комплексное число. Выражение $|z-a|$ равно длине отрезка, соединяющего точки z и a. Следовательно, неравенство

$$|z-a|<h$$

выполняется для всех точек, лежащих внутри круга радиуса h с центром в точке a (черт. 68).

Примеры

1. Неравенство $|x-2|<1$ выражает интервал $1<x<3$. В комплексной плоскости неравенство $|z-2|<1$ выражает внутренность круга радиуса 1 с центром в точке 2.

2. Система неравенств

$$1<|x-4|<2$$

равносильна следующей системе двух неравенств

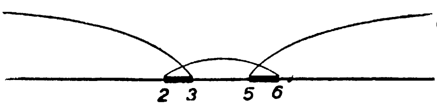
$$1<|x-4| \quad \text{и} \quad |x-4|<2.$$

Первое изображается совокупностью двух интервалов

$$-\infty<x<3 \quad \text{и} \quad 5<x<+\infty,$$

второе — интервалом $2<x<6$.

Общую часть составляют два интервала $2<x<3$ и $5<x<6$ (черт. 69).



Черт. 69

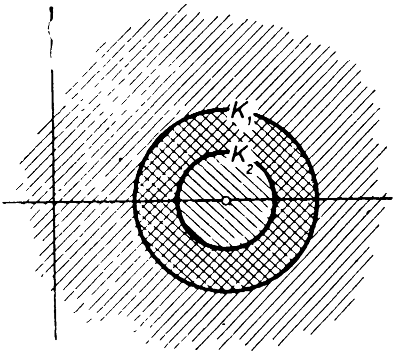
3. В комплексной плоскости неравенство $1<|x-4|$ изображает множество точек, лежащих вне круга K_1 радиуса 1 с центром в точке 4. Неревенство

$|x-4|<2$ изображает внутренность круга K_2 радиуса 2 с центром в точке 4.

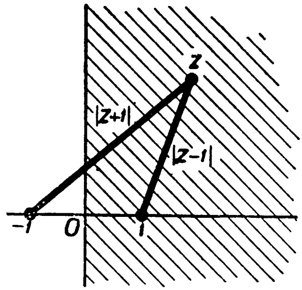
Система неравенств

$$1<|x-4|<2$$

изображает множество точек, лежащих внутри кольца, ограниченного кругами K_1 и K_2 (черт. 70).



Черт. 70



Черт. 71

4. Неравенство

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad |z-1| \leqslant |z+1|$$

выражает, что расстояние точки z до точки 1 не больше расстояния z до точки -1. Множество точек z есть правая полуплоскость, включая мнимую ось (черт. 71).

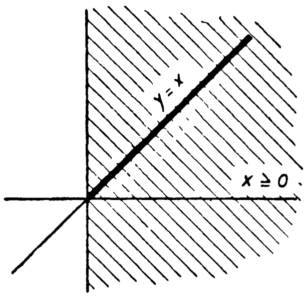
§ 64. Смешанные системы

Определение. *Смешанной системой с неизвестными $x, y, \ldots, z$ называется множество соотношений, из которых некоторые являются уравнениями, а некоторые неравенствами:*

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
F_1(x,y,\ldots,z)=F_1'(x,y,\ldots,z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_k(x,y,\ldots,z)=F_k'(x,y,\ldots,z)
\end{array}\right\}, \quad (\mathrm{F}) \\
\left.\begin{array}{l}
\Phi_1(x,y,\ldots,z)>\Phi_1'(x,y,\ldots,z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_l(x,y,\ldots,z)>\Phi_l'(x,y,\ldots,z)
\end{array}\right\}, \quad (\Phi)
\end{array}\right\} (\mathrm{F}, \Phi)$$

выражающих следующее суждение: при данной системе значе-

ний неизвестных удовлетворяется каждое из заданных соотношений.



Черт. 72

Определения основных понятий, относящихся к системам уравнений и неравенств (решение, эквивалентность, следствие и т. д.), распространяются и на смешанные системы.

Пример

Уравнение $x - y = 0$ или $y = x$ определяет биссектрису I и III квадрантов.

Неравенство $x \geq 0$ определяет правую полуплоскость (включая OY).

Смешанная система $x - y = 0$, $x \geq 0$ определяет биссектрису первого квадранта координатной плоскости (черт. 72).

§ 65. О решении и исследовании текстовых задач на составление уравнений и неравенств

В текстовых задачах *соотношения между искомыми величинами, числовыми данными и параметрами* (при решении задач в общем виде) *не задаются заранее, а устанавливаются из условия задачи, сформулированного словесно.*

Искомые величины или другие величины, зная которые можно определить искомые, обозначают буквами — эти величины называются неизвестными. Все независимые между собой соотношения между данными и неизвестными величинами, либо непосредственно сформулированные в условии (в словесной форме), либо вытекающие из смысла задачи (например, физические законы, которым подчиняются рассматриваемые величины), либо следующие из условия путем некоторых рассуждений, записывают в виде равенств и неравенств.

Таким образом, по условиям данной задачи составляются соотношения (уравнения и неравенства) с данными неизвестными; эти соотношения в общем случае образуют некоторую смешанную систему. В частных случаях эта система может не содержать неравенств либо уравнений, может состоять лишь из одного уравнения или неравенства.

Если величины, считающиеся известными, задаются в общем виде и обозначаются буквами, то полученные уравнения (неравенства) содержат параметры. Не всегда условия, которым должны удовлетворять неизвестные и параметры, выражаются при помощи равенств и неравенств. Так, например, условия быть целым или рациональным числом не задаются при помощи равенств и неравенств. Эти условия, налагающиеся на допустимые значения неизвестных и параметров, суть те дополнительные условия, при которых следует решать смешанную систему.

Таким образом, в общем случае решение задачи сводится к решению полученной смешанной системы в некотором числовом поле при определенных дополнительных условиях. Последними условиями из множества всех решений (в данном поле) смешанной системы выделяются те решения, для которых значения неизвестных (в соответствии с их конкретным смыслом) являются допустимыми.

Если рассуждения, на основе которых были составлены соотношения (уравнения, неравенства), неприменимы в некоторых «особых случаях», то эти случаи следует рассмотреть отдельно.

Обычно в решение и исследование задачи включается истолкование, на основе ее конкретного смысла, случаев, когда полученная система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений. Нередко в исследование задачи включаются дополнительные вопросы, относящиеся к конкретному истолкованию решения. Так, например, если некоторое неизвестное обозначает величину, которая отсчитывается в двух противоположных направлениях, то можно поставить вопрос, при каких условиях это неизвестное положительно (отсчитывается в установленном положительном направлении) или отрицательно (отсчитывается в противоположном направлении) и т. п.

Таковы общие указания, относящиеся к решению и исследованию текстовых задач.

Решение одной и той же задачи может быть более простым или более сложным в зависимости от выбора величин принятых за неизвестные, а также от выбора независимых соотношений, на основе которых составляется соответствующая смешанная система.

Изложенные указания не являются «абсолютными» и не могут претендовать на исчерпывающую полноту, так как *многообразие различных соотношений действительности, изучающихся методами математики, не может быть уложено в рамки раз и навсегда установленных правил.* Различные задачи, возникающие при решении практических и теоретических вопросов, имеют свои индивидуальные особенности, вносящие самые разнообразные моменты в их решение и исследование.

Задача. *В одном сосуде объемом v_1 литров в начале наблюдения имеется a_1 литров воды, а в другом объемом v_2 литров имеется a_2 литров. Каждую минуту в первый сосуд поступает по m_1 литров, а во второй по m_2 литров воды. Через сколько минут в обоих сосудах будет одинаковое количество воды?*

Решение. Парамеры m_1 и m_2 можно считать как положительными, так и отрицательными. Например, случай $m_1<0$ будем толковать так. из первого сосуда выкачиваются m_1 *л* в минуту.

Будем решать задачу при следующих условиях: поступление (выкачивание) воды в сосуды прекращается, как только один из них будет либо наполнен, либо опорожнен.

Допустимые значения параметров определяются следующими условиями:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant v_1, \quad 0 \leqslant a_2 \leqslant v_2.$$

Пусть x — искомое количество минут, за которое объемы воды в обоих сосудах сравняются. Время x можно считать отрицательным, если процесс течения жидкости происходит до начала наблюдения. За время x минут в первый сосуд поступает m_1x *л* и в нем окажется a_2+m_1x *л* воды. Аналогично по прошествии времени x во втором сосуде окажется a_2+m_2x *л* воды. По условию задачи объемы воды в обоих сосудах должны быть равны, это условие выражается уравнением:

$$a_1 + m_1x = a_2 + m_2x. \tag{1}$$

Кроме того, количество воды в каждом из сосудов не отрицательно и не может быть бо́льшим чем объем сосуда, эти условия выражаются неравенствами:

$$0 \leqslant a_1 + m_1x \leqslant v_1, \quad 0 \leqslant a_2 + m_2x \leqslant v_2. \tag{2}$$

Итак, требуется решить смешанную систему, состоящую из уравнения (1) и неравенств (2).

Решив уравнение (1), получим:

1°. $x = \dfrac{a_2 - a_1}{m_1 - m_2}$, если $m_1 \neq m_2$.

2°. Не существует решений, если $m_1 = m_2$, $a_2 \neq a_1$.

3°. Уравнение удовлетворяется тождественно, $m_1=m_2$ и $a_1=a_2$.

В случае 1°, если значение x удовлетворяет обоим неравенствам (2), то задача имеет единственное решение. Если $x>0$, то количества воды сравняются в будущем, $x<0$ означает, что равенство объемов имело место до начала наблюдения. Если значение x не удовлетворяет неравенствам (2), то равенство объемов наступить не может, например. один из сосудов наполнится или опорожнится до того момента, когда сравняются объемы.

В случае 2° в начале наблюдения в сосудах было различное количество воды и каждую минуту в них поступает одинаковое количество жидкости. Следовательно, объемы никогда не могут сравняться.

Случай 3° отличается от предыдущего тем, что в начале наблюдения в сосудах было одинаковое количество воды, но тогда в обоих сосудах одинаковое количество воды будет в течение всего опыта.

Положим, например:

$$a_1 = 1, \ a_2 = 5, \ v_1 = 10, \ v_2 = 20, \ m_1 = 8 \text{ и } m_2 = 2,$$

имеем; $x = \dfrac{2}{3}$ и $0 < 1+8\cdot\dfrac{2}{3} < 10$, $0<5+2\cdot\dfrac{2}{3} < 20$, объемы сравняются через $\dfrac{2}{3}$ *мин*.

Положим: $a_1=32$, $a_2=20$, $m_1=4$, $m_2=1$, $v_1=40$, $v_2=30$, тогда $x=-4$; имеем $0<32-4\cdot 4<40$ и $0<20-4\cdot 1<30$. В первом сосуде было воды больше, чем во втором, и в него ежеминутно поступает большее количество литров. Объемы в будущем сравняться не могут. Если поступление воды имело место до начала наблюдения, то объемы были равны **4 *мин*** тому назад.

Положим: $a_1=20$, $a_2=30$, $m_1=15$, $m_2=10$, $v_1=30$, $v_2=100$.

Имеем $x = 2$, условие $a_1 + m_1x < v_1$ не выполняется: $20 + 15\cdot 2 > 30$, т. е. первый сосуд наполнится раньше, чем наступит равенство объемов.

Предлагаем учащимся самостоятельно привести ряд числовых данных и дать конкретное толкование результатов.

Сопоставление различных текстовых задач, приводящихся обычно в сборниках упражнений по элементарной алгебре, показывает, что многие задачи отличаются друг от друга лишь фабулой, тогда как некоторые соотношения между данными и искомыми величинами, а также рассуждения, посредством которых устанавливаются эти соотношения, остаются одними и теми же. Две такие задачи дают лишь две различные конкретные интерпретации одного и того же математического рассуждения, одних и тех же соотношений.

Задача *Из пунктов A_1 и A_2, находящихся на расстояниях a_1 и a_2 от пункта O, выходят два курьера и движутся со скоростями m_1 и m_2 (соответственно). Вычислить момент встречи курьеров. Пункты A_1, A_2 и O расположены* на прямолинейной дороге, по которой и происходит движение.

Решение. Пусть x искомое время; за x *час* первый курьер пройдет расстояние m_1x *км* и окажется на расстоянии $a_1 + m_1x$ *км* от точки O. Аналогично второй курьер окажется на расстоянии $a_2 + m_2x$ от точки O. В момент встречи должно иметь место равенство:

$$a_1 + m_1x = a_2 + m_2x. \tag{1}$$

В этой задаче и в рассмотренной выше задаче о наполнении сосудов получается одно и то же уравнение, для составления которого применяются одни и те же рассуждения. Вместо объемов воды сравниваются расстояния, вместо скоростей течения воды даются скорости движения курьеров.

При решении теоретических и практических задач (в науке, в технике, в обыденной жизни) в ряде случаев приходится пользоваться по сути дела одними и теми же рассуждениями, приводящими к одним и тем же соотношениям. Одна из целей решения текстовых задач в курсе алгебры заключается в *усвоении характерных наиболее часто встречающихся рассуждений при решении задач элементарными математическими методами* * и *в приобретении навыков в составлении соотношений, выражающих зависимости между величинами.*

Так как в действительности никакое явление не протекает изолированно от других явлений, то и решение практических задач нередко осложняется необходимостью учитывать явления, связанные с данным. Чтобы наиболее отчетливо выделить сами рассуждения данного типа и показать их применение к решению различных задач составляются «абстрактные» задачи, в условиях которых соотношения между данными и искомыми величинами даются в упрощенном, схематическом описании без учета ряда дополнительных условий, имеющих место в действительности. В «абстрактных» задачах нередко и сама фабула приспосабливается к требуемым математическому содержанию и степени сложности. Таковы, например, известные задачи «на смешение», «на курьеров», «на бассейны» и т. п. **.

---

* Как известно из методики математики, эта цель не является единственной.

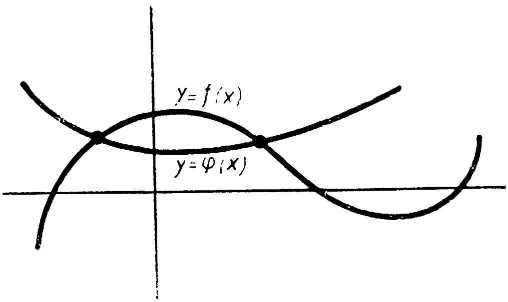
** О количестве и месте «абстрактных» задач среди прочих упражнений трактуется в методике математики.

Рассмотренная в виде примера (стр. 243) задача о наполнении сосудов нередко дается (например, в школьных задачниках) без указания объемов самих сосудов, тогда отпадают и дополнительные условия для неизвестного. Эта задача соответствует лишь абстрактно мыслимому случаю сосудов неограниченной вместимости. Цель такой задачи показать сами рассуждения, приводящие к составлению уравнения, не осложняя их установлением неравенств, характеризующих дополнительные условия.

Примеры решения и исследования текстовых задач даны ниже в § 78 и 95.

§ 66. Понятие об элементарных графических и приближенных методах решения уравнений

Решение уравнения $f(x)=0$ можно толковать геометрически как отыскание точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс. Если начерчен график функции $f(x)$, то, выполнив соответствующие измерения, можно определить искомые корни уравнения. На практике построение графика (пользуясь известными свойствами функции и таблицей ее значений), а также измерение отрезков (линейкой или на миллиметровой бумаге) могут быть выполнены лишь приближенно.



Черт. 73

Графический способ решения уравнений «в чистом виде» не обладает большой точностью и может служить лишь для грубых расчетов.

Нередко графический способ применяется в следующем виде: представив данное уравнение в виде равенства двух функций

$$f(x)=\varphi(x),$$

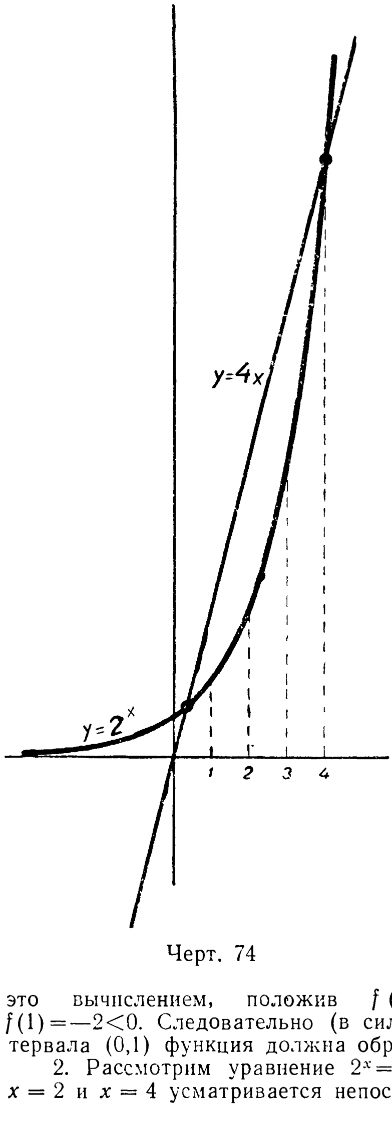
строят отдельно графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и затем при помощи измерений находят абсциссы точек пересечения графиков (черт. 73).

Графический метод играет незаменимую роль в качестве вспомогательного средства при приближенном решении уравнений. Знание графиков функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ нередко позволяет определить число решений уравнения (1), отыскать «в первом приближении» те промежутки, в которых содержатся искомые корни и определить «примерно» их численные значения. Результаты, полученные графическим путем, подвергаются последующей проверке и уточнению вычислительными методами.

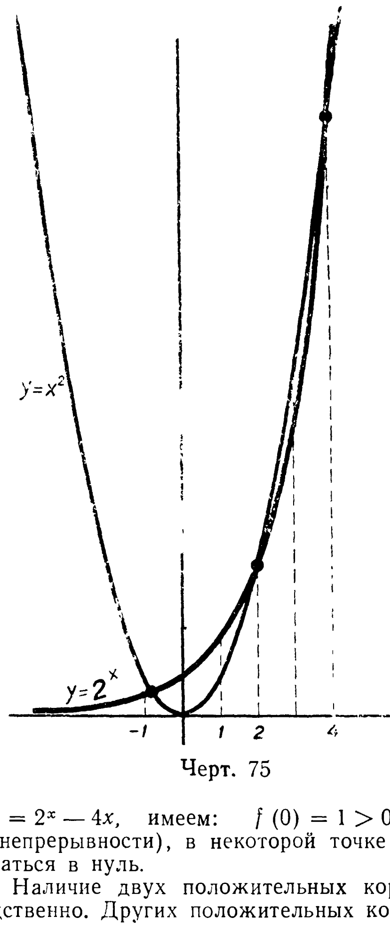
Таким образом, *графические методы во многих случаях помогают наметить путь последующей вычислительной работы.*

Примеры

1. Определить число корней уравнений $2^x=4x$. Из чертежа 74, на котором представлены графики функций $y=2^x$ и $y=4x$, видно, что уравнение имеет два корня. Большего числа корней не может быть, так как показательная линия всюду выпукла и не может пересекаться с прямой более чем в двух точках (см. ниже, § 99). Значение большего корня $x = 4$ находится непосредственно. Второй корень (как показывает чертеж) заключен в интервале (0,1). Проверим



Черт. 74



Черт. 75

это вычислением, положив $f(x) = 2^x - 4x$, имеем: $f(0) = 1 > 0$, а $f(1)=-2<0$. Следовательно (в силу непрерывности), в некоторой точке интервала (0,1) функция должна обращаться в нуль.

2. Рассмотрим уравнение $2^x=x^2$ Наличие двух положительных корней $x = 2$ и $x = 4$ усматривается непосредственно. Других положительных корней

нет, ибо при $x > 0$ данное уравнение эквивалентно уравнению $x = 2\log_2 x$ и линия $y = 2\log_2 x$, будучи выпуклой, не может иметь более двух точек пересечения с прямой $y=x$. Наличие корня в интервале $(-1, 0)$ ясно из чертежа 75. В самом деле, положив $f(x) = 2^x - x^2$, имеем:

$$f(-1) = \frac{1}{2} - 1 < 0, \text{ и } f(0) = 1 > 0$$

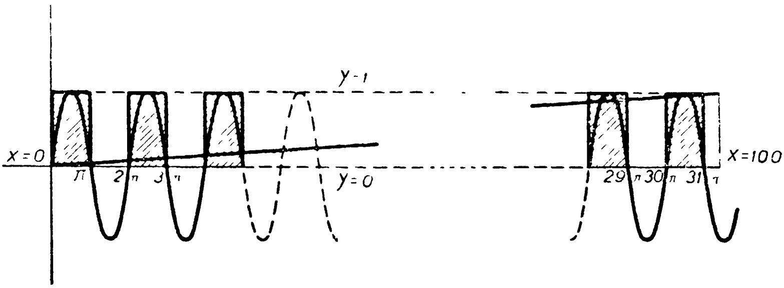
3. Определить число корней уравнения

$$\sin x = \frac{1}{100} x.$$

Определим сначала число неотрицательных корней. При $x \geqslant 0$ соответствующие точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = \frac{1}{100} x$ должны быть расположены в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $x = 100$, $y = 0$ и $y = 1$. Определим, сколько целых полупериодов синуса содержит сегмент $[0, 100]$ Как показывает несложный расчет: $31\pi < 100 < 32\pi$. Разобьем весь прямоугольник с основанием $[0, 100]$ на 32 прямоугольника, основанием которых служат сегменты.

$$[0, \pi], [\pi, 2\pi], \ldots, [30\pi, 31\pi], [31\pi, 100].$$

Точки пересечения прямой $y = 0{,}01\,x$ и синусоиды содержатся в прямоугольниках 1-м, 3-м и т. д. в 31-м по две в каждом. Таким образом, уравнение



Черт. 76

имеет 32 неотрицательных корня. Уравнение имеет 63 действительных корня, из них 31 положительный, 31 отрицательный и 1, равный нулю (черт. 76, масштабные единицы осей взяты различными).

Предположим, что:

1°. *Найден такой сегмент $a \leq x \leq b$, внутри которого содержится единственный корень $x = \xi$ уравнения $f(x) = 0$ (функция $f(x)$ предполагается непрерывной).*

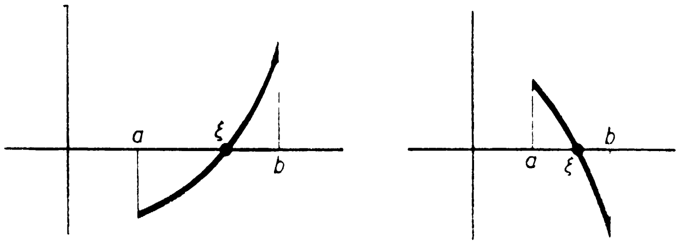
2°. *Значения функции $f(x)$ в точках a и b противоположны по знаку.*

Корень ξ считается отделенным, если выполнены перечисленные условия (черт. 77).

Во многих случаях (см. приведенные выше примеры) отделение корней может быть достигнуто применением графического способа.

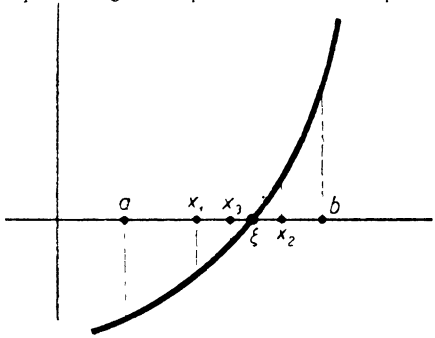
В курсе высшей алгебры излагаются методы отделения корней многочленов.

Существуют различные методы приближенного вычисления отделенного корня, если точное его значение неизвестно. Эти методы позволяют вычислить корень с любой заданной степенью точности. Изложение наиболее распространенного из этих методов (способ «хорд и касательных») дано в курсе высшей алгебры.

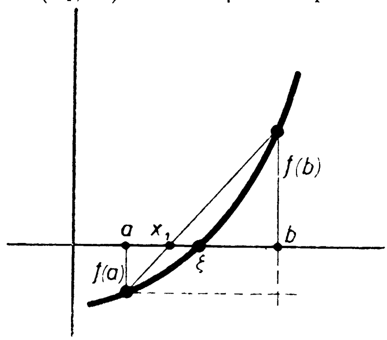


Черт. 77

Ниже мы остановимся на элементарном способе приближенного вычисления корня. Пусть x_1 — любая точка, взятая внутри *сегмента* $a \leqslant x \leqslant b$, в частности, можно взять его середину $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то $\xi = x_1$ и, значит, корень найден. Допустим, что $f(x_1) \neq 0$; положим для определенности, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и $f(x_1) < 0$ (черт. 78). В этом случае искомый корень ξ содержится в интервале (x_1, b). Повторив процесс



Черт. 78



Черт. 79

деления промежутка достаточное число раз, можно получить как угодно малый промежуток, содержащий искомый корень, и тем самым вычислись ξ с любой заданной степенью точности.

К числу элементарных методов относится способ линейной интерполяции, называемый иначе «способом хорд» или правилом «ложного положения». Заменим (приближенно) дугу (кривую) AB графика хордой (черт. 79), тогда абсцисса x_1 точки пересечения хорды AB с осью OX рассматривается как приближенное значение корня ξ.

Заменив дугу хордой, мы можем считать приращение функции пропорциональным приращению аргумента:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{f(x_1) - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Но приближенно $\xi = x_1$ (при замене дуги хордой) и $f(x_1) = 0$, откуда

$$x_1 = a - \frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Поправка Δx, которую надо прибавить к a, чтобы получить приближенное значение корня x_1, равна:

$$\Delta x = x_1 - a = -\frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Способ линейной интерполяции можно комбинировать со способом деления промежутка. При вычислениях следует пользоваться имеющимися в распоряжении средствами (таблицы логарифмов, таблицы значений функций, счетная линейка, арифмометр) и руководствоваться общими правилами приближенных вычислений.

Пример.

1 Вычислить меньший корень уравнения $2^x = 4x$ с точностью до 0,01.

Решение. В примере 1, стр. 247, показано, что искомый корень содержится в интервале (0,1). Имеем $f(0) = 1$ и $f(1) = -2$, где $f(x) = 2^x - 4x$.

При помощи линейной интерполяции получим:

$$x_1 = 0 - \frac{(1 - 0) f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Вычислим значение $f(x_1)$

$$f(x_1) = \sqrt[3]{2} - \frac{4}{3} = 0{,}2599 - 1{,}3333 = -0{,}0734.$$

Следовательно, искомый корень лежит в интервале $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Так как значение $f\left(\frac{1}{3}\right)$ «близко к нулю», то естественно предположить, что искомый корень близок к $\frac{1}{3}$. Положим $x_2 = 0{,}3$, имеем:

$$f(0{,}3) = 2^{0{,}3} - 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2311 - 1{,}2 = 0{,}0311 \ (> 0)$$

(при вычислении дробных степеней числа 2 можно воспользоваться таблицами логарифмов). Следовательно, корень заключен в интервале (0,3; 0,333...). Применим снова линейную интерполяцию:

$$x_3 = 0{,}3 - \frac{(0{,}333\ldots - 0{,}3) f(0{,}3)}{f(0{,}33\ldots) - f(0{,}3)} = 0{,}3 - \frac{0{,}0333 \cdot 0{,}0311}{-0{,}0734 - 0{,}0311} = 0{,}3100.$$

Отсюда естественно ожидать, что $x = 0{,}30$ есть искомое приближенное значение корня. Для проверки вычислим $f(0{,}31)$, имеем:

$$f(0{,}31) = 2^{0{,}31} - 0{,}31 \cdot 4 = 1{,}237 - 1{,}24 < 0.$$

Итак, $f(0{,}30) > 0$, а $f(0{,}31) < 0$. Значит, $\xi^- = 0{,}30$ и $\xi^+ = 0{,}31$ суть искомые приближенные значения корня с недостатком и избытком.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

§ 67. Линейные уравнения

Определение. *Линейным уравнением с неизвестными $x, y, \ldots, z$ называется уравнение вида:*

$$ax + by + \ldots + cz = d, \qquad (L)$$

где коэффициенты $a, b, \ldots, c$ и свободный член d суть числа данного поля (или некоторые функции параметров).

К каноническому виду (L) может быть приведено всякое уравнение первой степени, т. е. уравнение:

$$F_1(x, y, \ldots, z) = F_2(x, y, \ldots, z),$$

левая и правая части которого суть многочлены первой степени от неизвестных.

При рассмотрении линейного уравнения (L) над полем рациональных чисел обычно умножают обе части на общее наименьшее кратное знаменателей чисел $a, b, \ldots, c, d$, а затем полученное уравнение с целыми коэффициентами сокращают на общие (отличные от ± 1) делители этих чисел (если эти делители имеются). Каноническим видом линейного уравнения над полем рациональных чисел считается уравнение (L), в котором $a, b, \ldots, c$ и d суть целые, взаимно простые (в своей совокупности) числа *.

Примеры

1. Примеры линейных уравнений:

---

* Известное из школьных учебников правило: «освободить уравнение от дробей, сократить на общий множитель, перенести неизвестное в одну, а данные числа в другую часть» относится к уравнениям над полем рациональных чисел.

над полем рациональных чисел:

$$2x = 5, \quad 3x - 2y = 4, \quad x + y - z = 1;$$

над полем действительных чисел:

$$\sqrt{2}x - y = 1, \quad x + \pi y = \sqrt{2};$$

над полем комплексных чисел:

$$(3 + i)x - y + z + it = 0.$$

Три первые уравнения можно рассматривать также над полем действительных и полем комплексных чисел, а четвертое и пятое над полем комплексных чисел.

2. Привести уравнение над полем рациональных чисел

$$\frac{0,2x + 0,1y}{2} - \frac{4x - y}{10} = \frac{3x + \frac{3}{2}}{30} + \frac{x - y}{5}$$

к каноническому виду.

Решение. Имеем последовательно:

$$\frac{2x + y}{20} - \frac{4x - y}{10} = \frac{2x + 1}{20} + \frac{x - y}{5};$$

умножаем на 20:

$$2x + y - 2(4x - y) = 2x + 1 + 4(x - y);$$

и окончательно:

$$-12x + 7y = 1, \quad \text{либо} \quad 12x - 7y = -1.$$

3. Уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)^3 + 2x$$

эквивалентно линейному уравнению; имеем последовательно:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

и (после переноса членов, содержащих x, в левую часть)

$$-5x = -3 \quad \text{и, наконец,} \quad 5x = 3$$

Линейное уравнение с одним неизвестным. Линейное уравнение с одним неизвестным имеет следующий вид:

$$ax = b, \tag{L}$$

где a и b числа данного поля.

Случай 1°. $a \neq 0$. Во всяком числовом поле при произвольном $a \neq 0$ уравнение (L) имеет единственное решение (выполнимость деления):

$$x = \frac{b}{a}.$$

Это решение *принадлежит тому же числовому полю, которому принадлежат a и b.*

Случай 2°. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение не имеет решений. В самом деле, $0x = 0$ при произвольном x; следовательно, если $b \neq 0$, то равенство (L) не может выполняться ни при каком значении x.

Случай 3°. $a = b = 0$. В этом случае уравнение (L) примет вид $0x = 0$ и удовлетворяется тождественно; его решением служит произвольное число x данного поля.

Примеры

1. Решить уравнение

$$\frac{x-4}{5} + \frac{3x-2}{10} = \frac{2x+1}{3} - 7.$$

Решение. Приводим уравнение к каноническому виду:

$$6(x-4) + 3(3x-2) = 10(2x+1) - 210,$$

$$15x - 30 = 20x - 200,$$

$$3x - 6 = 4x - 40,$$

$$-x = -34; \quad x = 34\,^*.$$

2. Решить уравнение

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) + 2.$$

Решение. Приводим к каноническому виду:

$$(2+\sqrt{2})\,x = 4 + \sqrt{2},$$

откуда

$$x = \frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2})\,(2-\sqrt{2})}{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

Зная приближенные значения $\sqrt{2}$, можно вычислить корень уравнения с любой степенью точности. Так, например:

$x \approx 3 - 1,41 = 1,59$ с точностью до 0,01 (с избытком).

3 Решить уравнение

$$x + \frac{1}{2} = i(x+1).$$

Решение. Приводим к каноническому виду:

$$2(1-i)\,x = -1 + 2i;$$

откуда

$$x = \frac{-1+2i}{2(1-i)} = \frac{(-1+2i)(1+i)}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i.$$

4. Уравнение

$$5x - 15 = 2x - 25 + 3x$$

не имеет решений; после приведения к каноническому виду получается противоречивое уравнение

$$0x = -10.$$

Линейное уравнение с несколькими неизвестными. Рассмотрим уравнение с неизвестными $x, y, \ldots, z$:

$$ax + by + \ldots + cz = d. \qquad \text{(L)}$$

---

* Здесь дано решение в подробной записи; по мере приобретения навыков, рекомендуется несложные промежуточные вычисления делать в уме и применять менее подробные записи.

Случай 1°. *Хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.* Уравнение (L) имеет бесконечное множество решений. Если, например, уравнение (L) содержит неизвестное x, т. е. $a \neq 0$, то общее решение можно представить в виде:

$$x = \frac{-by - \ldots - cz + d}{a}, \tag{x}$$

где $y, \ldots, z$ произвольные числа поля, над которым рассматривается уравнение. В самом деле, уравнения (x) и (L) эквивалентны, так как (x) можно получить из (L) переносом в правую часть слагаемых $by, \ldots, cz$ и умножением на отличное от нуля число $\frac{1}{a}$. Уравнение (x) дает выражение для значения x через значения прочих неизвестных $y, \ldots, z$, которые могут быть выбраны произвольно.

Случай 2°. *Все коэффициенты при неизвестных равны нулю*: $a = b = \ldots = c = 0$, но $d \neq 0$. Уравнение не имеет решений.

Случай 3°. *Все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю*: $a = b = \ldots = c = d = 0$. Уравнение удовлетворяется тождественно произвольной системой чисел $(x, y, \ldots, z)$ из данного поля.

Рассмотренные случаи 1°, 2° и 3° дают необходимые и достаточные условия того, чтобы линейное уравнение (соответственно) имело решения, но не удовлетворялось тождественно; было противоречиво; удовлетворялось тождественно. В самом деле, для каждого данного уравнения имеет место один из взаимно исключающих друг друга трех случаев 1°, 2° и 3°, а потому эти случаи выражают соответствующие необходимые и достаточные условия.

Геометрическая интерпретация. Из аналитической геометрии известно, что уравнение с двумя неизвестными

$$ax + by = c$$

изображает прямую линию, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля; ему удовлетворяет произвольная точка этой прямой линии*.

Аналогично уравнение

$$ax + by + cz = d$$

изображает плоскость в пространстве, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

* Элементарное доказательство утверждения, что график линейной функции $ax + by = c$ есть прямая линия, известно из школьного учебника алгебры.

Примеры

1. Общее решение уравнения $2x - y = 3$ можно представить в виде: $y = 2x - 3$, где x — произвольное число или

$$x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}, \quad y \text{ — произвольное число.}$$

2. Приведя уравнение

$$2(x - 2y + z) + 3x = x - 4y - 3$$

к каноническому виду, получим

$$4x + 2z = -3,$$

последнее уравнение не содержит y. Общее решение можно записать в виде: $x = \frac{1}{2}z - \frac{3}{4}$, y и z — произвольные числа, или $z = -2x - \frac{3}{2}$, x и y — произвольные числа.

§ 68. Линейные системы

Пусть дана система линейных уравнений (или кратко линейная система):

$$\left.\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + \;\ldots + c_1z = d_1 & (1), \\ a_1x + b_2y + \;\ldots + c_2z = d_2 & (2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx + b_ny + \;\ldots + c_nz = d_n & (n). \end{array}\right\} \quad (L)$$

Признаки, позволяющие по значениям коэффициентов судить, имеет ли данная система решения, а также формулы общего решения устанавливаются в курсе высшей алгебры. В элементарной алгебре изучаются элементарные методы решения и исследования линейных систем, эти методы излагаются в виде правил, позволяющих в каждом конкретном случае установить, имеет ли данная система решения и найти эти решения. Таким образом, *элементарная алгебра дает алгоритм, позволяющий в каждом конкретном случае выполнить решение и исследование линейной системы.*

Ограничимся случаем, когда не все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если все коэффициенты при неизвестных равны нулю, то вопрос об исследовании системы решается непосредственно, именно: если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система противоречива, если же и все свободные члены равны нулю, то система удовлетворяется тождественно.

Если некоторые из уравнений (L) удовлетворяются тождественно, то эти уравнения можно отбросить.

§69. Треугольные системы

Определение. *Линейная система называется полной треугольной, если ее уравнения можно записать в таком порядке (каноническом), что*

1° *первое уравнение содержит только одно неизвестное;*

2° *в каждом последующем уравнении могут содержаться неизвестные, содержащиеся в предыдущих уравнениях, и, кроме того, содержится только лишь одно неизвестное, не входящее в предыдущие уравнения.*

В канонической записи треугольной системы при переходе от предыдущего уравнения к последующему, к неизвестным, содержащимся в предыдущих уравнениях, присоединяется только одно новое неизвестное, причем первое уравнение содержит лишь одно неизвестное.

В общем виде полная треугольная система записывается так:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 & = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = d_3, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = d_n, \end{array}\right\} \qquad (\Delta)$$

где ни один из «диагональных» коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ не равен нулю. *В полной треугольной системе число уравнений равно числу неизвестных.*

Пример

Система уравнений

$$x = 2, \quad y - u + z = 0, \quad x - 2y = 4, \quad x - 3y - z = 1$$

— полная треугольная, ее можно записать так:

$$\left.\begin{array}{ll} x & = 2, \\ x - 2y & = 4, \\ x - 3y - z & = 1, \\ \qquad y + z - u & = 0. \end{array}\right\}$$

Определение. *Линейная система называется усеченной треугольной, если она является полной треугольной относительно некоторой совокупности неизвестных, причем в уравнениях системы содержатся неизвестные, не принадлежащие этой совокупности.*

Если усеченная система является полной треугольной относительно неизвестных, $x_1, x_2, \dots, x_n$, то в ее уравнениях, кроме этих неизвестных, содержатся некоторые другие неизвестные; обозначим их через $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Канонической записью усеченной треугольной системы считается следующая ее запись:

$$\left.\begin{array}{l}
c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \ldots + c_{1k}t_k + a_{11}x_1 = d_1, \\
c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \ldots + c_{2k}t_k + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n1}t_1 + c_{n2}t_2 + \ldots + c_{nk}t_k + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = d_n.
\end{array}\right\} \quad (\overline{\Delta})$$

где диагональные коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ отличны от нуля (каждый).

В усеченной системе число неизвестных **больше** числа уравнений.

Примеры

Система уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
x - y + z + w = 0, \quad z - u = 0, \\
x + 2y + 3t + u = 3, \quad x + t + u = 1
\end{array}\right\}$$

является усеченной треугольной; она полная относительно неизвестных x, y, z, w,

$$\left.\begin{array}{l}
t + u + x = 1, \\
3t + u + x + 2y = 3, \\
-u + z = 0, \\
x - y + z + w = 0.
\end{array}\right\} \quad (\overline{\Delta})$$

Эту же систему можно рассматривать как полную относительно других неизвестных, например: t, z, y, w, тогда получится следующая каноническая запись.

$$\left.\begin{array}{l}
x + u + t = 1, \\
-u + z = 0, \\
x + u + 3t + 2y = 3, \\
x + z - y + w = 0.
\end{array}\right\} \quad (\overline{\Delta'})$$

Эту систему нельзя рассматривать как полную относительно x, y, t, w, так как уравнение $z - u = 0$ не содержит этих аргументов.

Эту систему нельзя также рассматривать как полную треугольную относительно u, x, y, t. В самом деле, за первое уравнение следует взять $z - u = 0$, но тогда все прочие уравнения содержат (каждое) не менее двух неизвестных x, y, t.

Теорема. 1°. *Всякая полная треугольная система имеет единственное решение.*

2°. *Всякая усеченная треугольная система имеет бесконечное множество решений.*

Доказательство. 1°. Решим систему способом подстановки (§ 51). Первое уравнение имеет общее решение:

$$x = \frac{d_1}{a_{11}},$$

где $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно придавать произвольные значения из данного числового поля. Подставив найденное значение для x_1, получим следующую треугольную систему относительно $x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{22}x_2 &= d_2 - a_{21}\frac{d_1}{a_{11}}, \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= d_3 - a_{31}\frac{d_1}{a_{11}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= d_n - a_{n1}\frac{d_1}{a_{11}} \end{aligned}$$

из первого уравнения находим x_2 и, подставив в прочие уравнения, получим треугольную систему относительно неизвестных $x_3, x_4, \ldots, x_n$ и т. д. После n-го шага получится вполне определенная система значений неизвестных, дающая единственное решение системы (Δ).

2°. Перепишем усеченную систему (Δ) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 &&= d_1 - c_{11}t_1 - \ldots - c_{1k}t_k, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &&= d_2 - c_{21}t_1 - \ldots - c_{2k}t_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &&= d_n - c_{n1}t_1 - \ldots - c_{nk}t_k. \end{aligned}$$

Если неизвестным t_1, t_2, t_k придать некоторую (произвольную) систему значений

$$t_1 = t_1^{(0)}, \ t_2 = t_2^{(0)}, \ \ldots, \ t_k = t_k^{(0)},$$

то получится полная треугольная система, имеющая единственное решение

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ x_2 = x_2^{(0)}, \ \ldots, \ x_n = x_n^{(0)}.$$

Итак, всякой системе значений неизвестных t_i соответствует единственное решение системы $(\bar{\Delta})$, следовательно, $(\bar{\Delta})$ имеет бесконечное множество решений, ч. т. д.

Для решения усеченной системы достаточно, решив первое уравнение относительно x_1:

$$x_1 = \frac{d_1}{a_{11}} - \frac{c_{11}}{a_{11}}t_1 - \ldots - \frac{c_{1k}}{a_{11}}t_k,$$

подставить найденное выражение в прочие уравнения системы (Δ).

Тогда получится усеченная система с неизвестными $x_2, x_3, \ldots, x_n$; $t_1, t_2, \ldots, t_k$; из этой системы найдем x_2 и составим усеченную систему с неизвестными $x_3, x_4, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k$ и т. д. Окончательно получим общее решение, в котором неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражены в виде линейных многочленов от неизвестных $t_1, t_2, \ldots, t_k$; последним можно придавать **произвольные** значения из данного числового поля.

Полную треугольную систему можно преобразовать в следующую эквивалентную систему, которую получим, решив (в отдельности) первое уравнение относительно x_1, второе относительно x_2 и т. д.; n-е относительно x_n:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \delta_1,\\
x_2 &= \delta_2 + \alpha_{11}x_1,\\
x_2 &= \delta_3 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \delta_n + \alpha_{1n-1}x_1 + \ldots + \alpha_{n-1\,n-1}x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Чтобы решить эту систему, достаточно подставить значение x_1 из первого уравнения во второе, затем значения x_1 и x_2 подставить в третье уравнение и т. д. Для усеченной системы в правых частях будут содержаться неизвестные $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Примеры

1 Решить полную треугольную систему (см пример на стр. 256):

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= 2,\\
x - 2y &= 4,\\
x - 3y - z &= 1,\\
y + z - u &= 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

Решение. Из первого уравнения имеем $x = 2$, подставив во второе, получим $2 - 2y = 4$ и $y = -1$, подставив значения $x = 2$ и $y = -1$ в третье, получим $z = 4$; из последнего найдем $u = 3$.

Итак, $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$, $u = 3$ есть единственное решение системы.

2. Решить усеченную систему

$$
\left.
\begin{aligned}
t + u + x &= 1,\\
3t + u + x + 2y &= 3,\\
-u + z &= 0,\\
x - y + z + w &= 0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (\overline{\Delta})
$$

(см. пример на стр. 257).

Решение. Из первого уравнения получим $x = 1 - t - u$.

Из второго получим

$$y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t - \frac{u}{2} - \frac{x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t - \frac{u}{2} - \frac{1}{2}(1 - t - u) = 1 - t\,.$$

Из третьего найдем $z = u$; и, наконец, из последнего

$$w = -x + y - z = -(1 - t - u) + (1 - t) - u = 0.$$

Итак, общее решение системы можно представить в следующем виде:

$$x = 1 - t - u,\quad y = 1 - t,\quad z = u,\quad w = 0,$$

где неизвестным u и t можно придавать произвольные численные значения.

Общее решение данной системы можно представить в другом виде. Воспользовавшись записью системы в виде (Δ'), получим следующие выражения неизвестных t, z, y, w через x и u (вычисления предоставляем учащимся):

$$t = 1 - x - u, \quad z = u, \quad y = x + u, \quad w = 0.$$

§ 70. Исключение неизвестного из двух линейных уравнений

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a_1x + b_1y + \ . \ . \ . + c_1z = d_1, \\ (2) & a_2x + b_2y + \ . \ . \ . + c_2z = d_2,\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{L})$$

кратко данную систему запишем так:

$$L_1(x, \ y, \ . \ . \ . , \ z) = d_1, \quad L_2(x, \ y, \ . \ . \ . \ , \ z) = d_2. \qquad (\mathrm{L})$$

Теорема. *Если каждое из уравнений* (L) *содержит некоторое неизвестное, то систему* (L) *можно заменить эквивалентной системой двух линейных уравнений, одно из которых не содержит данное неизвестное.*

Составление этого последнего уравнения называется и с к л ю ч е н и е м данного неизвестного.

Д о к а з а т е л ь с т в о заключается в установлении способа составления требуемой системы. Ниже дается описание двух способов.

Допустим для определенности, что каждое из уравнений (L) содержит неизвестное x (т. е. $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$), которое требуется исключить.

С п о с о б п о д с т а н о в к и. Применим к системе (L) способ подстановки (см. § 51). Решив одно из уравнений, например первое, относительно x, получим общее его решение:

$$x = \frac{d_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \ . \ . \ . \ - \frac{c_1}{a_1}z. \qquad (1_1)$$

По правилу, изложенному в § 51, найденное выражение для x следует подставить во второе уравнение:

$$a_2\left(\frac{d_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \ . \ . \ . - \frac{c_1}{a_1}z\right) + b_2y + \ . \ . \ . + c_2z = d_2.$$

Умножив на $a_1 \neq 0$ и перенеся числовые слагаемые в правую часть, получим уравнение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y + \ . \ . \ . + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z = a_1d_2 - a_2d_1. \qquad (1{,}2)$$

Последнее уравнение: *во-первых, линейное; во-вторых, не содержит x; в-третьих, совместно с уравнением* (1_1) *или эквивалентным ему уравнением $L_1 = d_1$ образует систему эквивалентную* (L) (теорема I, § 51).

Способ сравнения (или уравнивания) коэффициентов. Умножим первое уравнение на числовой множитель m_1, а второе на m_2 и сложим их почленно:

$$m_1L_1(x, y, \ldots, z) + m_2L_2(x_1, y, \ldots, z) = m_1d_1 + m_2d_2. \qquad \text{(ml)}$$

Если к этому уравнению присоединить одно из данных уравнений, например:

$$L_1(x, y, \ldots, z) = d_1, \qquad (1)$$

то получится система эквивалентная данной, если $m_2 \neq 0$ (см. § 51, теорема II, стр. 202). Множители m_1 и m_2 можно выбрать так, чтобы уравнение (ml) не содержало x; для этого достаточно положить $m_1 = a_2$, $m_2 = -a_1$.

Вычисления обычно располагаются так:

$$\begin{array}{r|l} a_1x + b_1y + \ldots + c_1z = d_1 & a_2 \\ a_2x + b_2y + \ldots + c_2z = d_2 & a_1 \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)\,y + \ldots + (a_2c_1 - a_1c_2)\,z = a_2d_1 - a_1d_2 & \end{array}$$

умножаем первое на a_2, второе на a_1 и вычитаем.

Полученное линейное уравнение не содержит x и совместно с $L_1 = d_1$ образует систему эквивалентную (L) (§ 51, теорема II), ч. т. д.

Примечание. При решении уравнений с целыми коэффициентами обычно для уравнивания коэффициентов данные уравнения умножаются (соответственно) на множители, дополняющие a_1 и a_2 до их наименьшего общего кратного.

В результате исключения неизвестного x как одним, так и другим способами получается одно и то же уравнение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y + \ldots + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z = a_1d_2 - a_2d_1\text{*}.$$

Для этого последнего уравнения могут представиться следующие случаи.

Случай 1°. Уравнение содержит хотя бы одно из неизвестных $y, \ldots, z$.

Случай 2°. Уравнение удовлетворяется тождественно; в этом случае

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \ldots, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \quad a_1d_2 - a_2d_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \ldots = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

или, положив $\dfrac{a_2}{a_1} = k$, получим:

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \ldots, \quad d_2 = kd_1.$$

* Возможное различие в общем (отличном от нуля) множителе для всех коэффициентов не существенно.

Таким образом, второе уравнение системы (L) является следствием первого, так как, умножив $L_1 = d_1$ на k, получим $L_2 = d_2$, второе уравнение системы (L) можно отбросить.

Случай 3°. Уравнение противоречиво:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \ldots = a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \quad \text{но} \quad a_1d_2 - a_2d_1 \neq 0,$$

т. е.

$$a_2 = ka_2, \quad b_2 = kb_1, \ldots, \quad c_2 = kc_1. \quad \text{но} \quad d_2 \neq kd_1.$$

В этом случае система (L) противоречива.

Примеры

1. Исключить неизвестные x из уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x + 5y - 2z = 1, \\ (2) & 2x - 7y + 5z = 2 \end{array}\right\}$$

Решение. Способ подстановки. Решим одно из уравнений (например, первое) относительно x:

$$x = -\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}.$$

Подставим во второе.

$$2\left(-\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right) - 7y + 5z = 2$$

Приведя к каноническому виду, получим:

$$-31y + 19z = 4. \qquad (1,2)$$

Система

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, \\ -31y + 19 = 4 \end{array}\right|$$

эквивалентна данной.

Способ сравнения коэффициентов Умножим первое урав ние на 2, а второе на 3 и вычтем почленно:

$$\begin{array}{r|l} 3x + 5y - 2z = 1 & 2 \\ 2x - 7y + 5z = 2 & 3 \\ \hline 31y - 19z = -4. & \end{array}$$

Система

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 5y - 2z = 1, \\ 31y - 19z = -4 \end{array}\right\}$$

эквивалентна данной. Система

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 7y + 5z = 2, \\ 31y - 19z = -4 \end{array}\right\}$$

также эквивалентна данной.

2. Для исключения неизвестного x из уравнений

$$\left.\begin{array}{r} (\sqrt{2} + 1)x + y = 1, \\ x + (\sqrt{2} - 1)y = 2 \end{array}\right\}$$

умножим второе уравнение на $\sqrt{2}+1$, тогда получим:

$$(\sqrt{2}+1)x+y=2(\sqrt{2}+1)$$

По вычитании из полученного уравнения первого, получим противоречивое следствие

$$2\sqrt{2}+1=0$$

Данная система противоречива. В этом примере коэффициенты при неизвестных пропорциональны:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1, \quad \text{но} \quad \frac{1}{2}\neq\sqrt{2}+1$$

3. Исключение какого-либо неизвестного из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=2,\\ 3x-3y+3z&=6 \end{aligned}\right\}$$

приведет к тождеству $0=0$. В данном случае одно из уравнений есть следствие другого, чтобы получить второе уравнение достаточно первое умножить на 3.

§ 71. Исследование и решение системы линейных уравнений элементарными методами

Рассмотрим систему k линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1,\\ &(2) \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2,\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(k) \quad a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n=d_k. \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

Рассмотрим какое-либо неизвестное и уравнение, его содержащее. Допустим для определенности, что неизвестное x_1 содержится в первом уравнении (т. е. $a_{11}\neq 0$) *. Перепишем без изменения это уравнение:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1, \qquad (1_1)$$

а также все уравнения системы, не содержащие неизвестного x_1. Прочие уравнения системы содержат неизвестное x_1; возьмем первое по порядку из этих уравнений. Допустим, например, что второе уравнение

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2 \qquad (2)$$

содержит x_1. Исключив x_1 из уравнений (1_1) и (2), получим уравнение, не содержащее x_1, которым можно в системе (L) заме-

* Это предположение не умаляет общности рассуждений, так как всегда можно перенумеровать надлежащим образом как уравнения, так и неизвестные.

нить уравнение (2). Эта замена возможна, так как система двух уравнений (1) и (2) эквивалентна системе, состоящей из (1_1) и из полученного уравнения (не содержащего x_1).

Так же следует поступить с прочими уравнениями системы (L), содержащими x_1: каждое из них следует заменить уравнением, которое получится в результате исключения из него и из (1_1) неизвестного x_1. Итак, окончательно получится система эквивалентная (L), состоящая из уравнения (1_1) и из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = d'_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = d'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (L')$$

не содержащих x_1.

Переход к системе уравнений (L′), не содержащих x_1 и образующих вместе с уравнением (1_1) систему, эквивалентную (L), называется *исключением* неизвестного x_1 из уравнений (L).

Если хотя бы одно из уравнений (L′) противоречиво, то система (L) также противоречива и ее исследование можно считать оконченным. Если некоторые из полученных уравнений удовлетворяются тождественно, то их следует отбросить. В частности, если все уравнения (L′) удовлетворятся тождественно, то все они могут быть отброшены и исследование системы (L) можно считать законченным, так как в этом случае система (L) эквивалентна одному уравнению (1_1), а все прочие уравнения (L) являются его следствиями.

Если не все уравнения (L′) удовлетворяются тождественно, то к этой системе снова можно применить процесс исключения одного из неизвестных.

Так, например, если первое уравнение (L′) содержит неизвестное x_2, то, исключив это неизвестное, получим уравнение:

$$a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = d'_1 \qquad (1_2)$$

и систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a''_{13}x_3 + \ldots + a''_{1n}x_n = d''_1, \\ a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = d''_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (L'')$$

не содержащих x_2. Система, состоящая из уравнений (1_2) и (L″), эквивалентна (L′), а система, состоящая из уравнений (1_1), (1_2) и (L″), эквивалентна (L).

Исключение неизвестных (в общем случае) можно продолжать далее, при этом будут получаться уравнения (1_1), (1_2), (1_3) и т. д., из которых каждое предыдущее содержит одно из неизвестных, не содержащееся ни в каком из последующих.

Так как число неизвестных конечно, то описанный процесс исключения неизвестных закончится. При этом возможен один из следующих двух случаев: *либо получится треугольная система, эквивалентная данной, либо на некотором шаге получится противоречивое уравнение.*

В первом случае данная система имеет единственное решение, если в результате исключения неизвестных получится полная треугольная система и бесконечное множество решений, если получится усеченная система.

Во втором случае данная система противоречива.

Поясним изложенное на примере исследования, в общем виде, системы двух уравнений с двумя неизвестными и системы трех уравнений с тремя неизвестными.

1) Дана система

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad a_1x + b_1y = c_1, \\ &(2) \quad a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L)}$$

Представляет интерес рассмотрение лишь случая, когда хотя бы одно из чисел a_1 и b_1 отлично от нуля, так как при $a_1 = b_1 = 0$ первое уравнение либо противоречиво (тогда и система противоречива), либо удовлетворяется тождественно (и может быть отброшено). Это замечание относится и ко второму уравнению.

Если a_1 0, то, решив первое уравнение, получим

$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y. \qquad (1')$$

Подставив во второе уравнение, получим

$$a_2\left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y\right) + b_2y = c_2$$

или

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (1,2)$$

Могут представиться следующие случаи:

a) если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то уравнения $(1')$ и $(1,2)$ образуют треугольную систему. Из $(1, 2)$ найдем

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1};$$

подставив в $(1')$, получим (после преобразований)

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

В этом случае система имеет единственное решение;

b) если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, то уравнение $(1, 2)$ противоречиво, а значит, и данная система противоречива;

c) если $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, то второе уравнение системы есть следствие первого:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Общее решение дается формулой (1′), где неизвестному y можно придавать произвольные значения.

Из сопоставления рассмотренных случаев следует, что, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение; если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то система либо противоречива, либо имеет бесконечное множество решений.

Примечание. При исключении неизвестных методом сравнения коэффициентов лишь незначительно видоизменяются выкладки (предоставляем учащимся произвести сопоставление).

Геометрическая интерпретация. Каждое из уравнений (1) и (2) в отдельности изображает прямую линию. В случае a) прямые (1) и (2) пересекаются в одной точке. В случае b) прямые не пересекаются (система противоречива), т. е. они параллельны. В случае c) уравнения (1) и (2) эквивалентны, они изображают одну и ту же прямую линию.

II. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ &(2) \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ &(3) \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

Предположим (для определенности), что первое уравнение содержит неизвестное x_1 (т. е. $a_1 \neq 0$). Исключив x_1 из уравнений (1) и (2), получим (методом сравнения коэффициентов):

$$(b_1a_2 - b_2a_1)\,y + (c_1a_2 - c_2a_1)\,z = d_1a_2 - d_2a_1{}^*. \qquad (1,2)$$

Аналогично, исключив x из уравнений (1) и (3), получим:

$$(b_1a_3 - b_3a_1)\,y + (c_1a_3 - c_3a_1)\,z = d_1a_3 - d_3a_1. \qquad (1,3)$$

Кратко будем записывать уравнения (1, 2) и (1, 3) так:

$$\left.\begin{aligned} &(1,2) \quad B_2y + C_2z = D_2, \\ &(1,3) \quad B_3y + C_3z = D_3, \end{aligned}\right\} \qquad (L')$$

где $B_2 = b_1a_2 - b_2a_1 \ldots$ и т. д. Уравнения (1), (1, 2) и (1,3) образуют систему, эквивалентную (L).

a) Хотя бы одно из уравнений (1, 2) или (1, 3) противоречиво. В этом случае система противоречива: так, если (1, 2) противоречиво, то

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{d_2}{d_1}.$$

*) Если (2) не содержит x (т. е. $a_2 = 0$), то его следует оставить без изменения. Однако в этом случае (1, 2) принимает вид $-b_2a_1y - c_2a_1z = -d_2a_1$, т. е. получается уравнение, отличающееся от (2) лишь числовым множителем $-a_1$.

b) Оба уравнения (1, 2) и (1,3) удовлетворяются тождественно:

$$B_2 = C_2 = D_2 = B_3 = C_3 = D_3 = 0.$$

В этом случае:

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \quad \text{и} \quad a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_3 : b_3 : c_3 : d_3.$$

Уравнения (2) и (3) суть следствия (1) и система эквивалентна одному уравнению:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1.$$

Общее решение (L) можно представить в виде:

$$x = \frac{d_1 - b_1 y - c_1 z}{a_1}.$$

c) Одно из уравнений (1, 2) и (1, 3) непротиворечиво и не удовлетворяется тождественно, а другое удовлетворяется тождественно.

Пусть, например: $B_2 \neq 0$, но $B_3 = C_3 = D_3 = 0$.
В этом случае уравнения

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \tag{1}$$

$$B_2 y + C_2 z = D_2 \tag{1,2}$$

образуют усеченную треугольную систему. Решив (1, 2) относительно y, получим:

$$y = \frac{D_2 - C_2 z}{B_2},$$

подставив в (1), найдем:

$$x = \frac{d_1 B_2 - b_1 D_2 + (b_1 C_2 - c_1 B_2) z}{a_1 B_2},$$

где z — произвольное число. Система имеет бесконечное множество решений.

Если ни одно из уравнений (1, 2) и (1, 3) не противоречиво и не удовлетворяется тождественно, то дальнейшее исследование системы (L) сводится к исследованию системы (L'). Пусть, например: $B_2 \neq 0$. Исключив y из уравнений (1, 2) и (1, 3), получим уравнение:

$$(B_3 C_2 - B_2 C_3) z = B_3 D_2 - B_2 D_3. \tag{1,2,3}$$

Уравнения (1), (1, 2) и (1, 2, 3) образуют систему, эквивалентную (L). Возможны следующие случаи:

d) Уравнение (1, 2, 3) противоречиво, тогда и система (L) противоречива. В этом случае:

$$B_3 = k B_2, \; C_3 = k C_2, \; \text{но} \; D_3 \neq k D_2$$

(где k — коэффициент пропорциональности).

Равенство $B_3=kB_2$ в развернутом виде перепишется так:

$$b_1a_3-b_3a_1=k(b_1a_2-b_2a_1),$$

откуда

$$b_3=\frac{a_3-ka_2}{a_1}b_1+b_2k.$$

Обозначим $\frac{a_3-ka_2}{a_1}=l$, тогда

$$b_3=lb_1+kb_2.$$

Из соотношения $C_3=kC_2$ найдем:

$$c_3=lc_1+kc_2.$$

Наконец, примем во внимание очевидное тождество

$$a_3=la_1+ka_2.$$

Так как $D_2\neq kD_3$, то $d_3\neq ld_1+kd_2$. Итак, если левую часть уравнения (1) умножить на l, а левую часть (2) на k, затем их сложить, то получится левая часть уравнения (3). Однако правая часть (3) не получается этим путем из правых частей (1) и (2).

e) Уравнение (1, 2, 3) удовлетворяется тождественно. Система (L) эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (1) и (1,2). Следовательно, имеем то же, что в случае c). Система (L) имеет бесконечное множество решений. К равенствам, имевшим место в предыдущем случае, присоединится $D_3=kD_2$, откуда найдем:

$$d_3=ld_1+kd_2.$$

Третье уравнение есть следствие первых двух, чтобы его получить, достаточно уравнения (1) и (2) умножить на l и k (соответственно) и сложить.

f) Уравнение (1, 2, 3) непротиворечиво и не удовлетворяется тождественно: $B_3C_2-B_2C_3\neq 0$. Система (L) эквивалентна треугольной системе уравнений (1), (1, 2) и (1, 2, 3). В этом случае система имеет единственное решение. Из (1, 2, 3) найдем:

$$z=\frac{B_3D_2-B_2D_3}{B_3C_2-B_2C_3}=$$

$$=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3-a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2}.$$

Далее, из (1, 2) найдем y и, наконец, из (1) x. *Для неизвестных получаются выражения с одним и тем же знаменателем, для получения числителя достаточно в выражении знаменателя заменить коэффициенты при соответствующем неизвестном свободными членами.*

Геометрическая интерпретация. Каждое из уравнений (1), (2) и (3), взятое в отдельности, изображает плоскость. В случае a) среди плоскостей (1), (2) и (3) имеется хотя бы одна пара параллельных. В случае b) все три уравнения изображают одну и ту же плоскость (плоскости совпадают). В случае c) два уравнения изображают одну и ту же плоскость (две плоскости совпадают), а третья плоскость пересекает ее по прямой линии. В случае d) плоскости, изображаемые данными уравнениями, попарно пересекаются, образуя грани призмы. В случае e) все три плоскости проходят через одну прямую. В случае f) три плоскости пересекаются в одной точке. На чертеже 80 дано пояснение рассмотренных случаев.

Сопоставим изложенное исследование с общими теоремами об исследовании линейных систем, известными из высшей алгебры. Коэффициенты B_2, C_2, B_3, C_3 суть миноры (с точностью до знаков) матрицы системы

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|, \text{ а } D_2 \text{ и } D_3 \text{ миноры расширенной матрицы } \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\|$$

коэффициент уравнения (1, 2, 3) с точностью до множителя a_1 ($a_1 \neq 0$ по предположению) есть детерминант системы. Имеем в рассмотренных случаях

Случай	Ранг матр. системы	Ранг расширенной матрицы	Результат исследования
a	1 или 2	2 или 3	система противоречива
b	1	1	бесконечное множество решений
c	2	2	— — — — — — — — —
d	2	3	система противоречива
e	2	2	бесконечное множество решений
f	3	3	единственное решение

Однородные линейные системы.

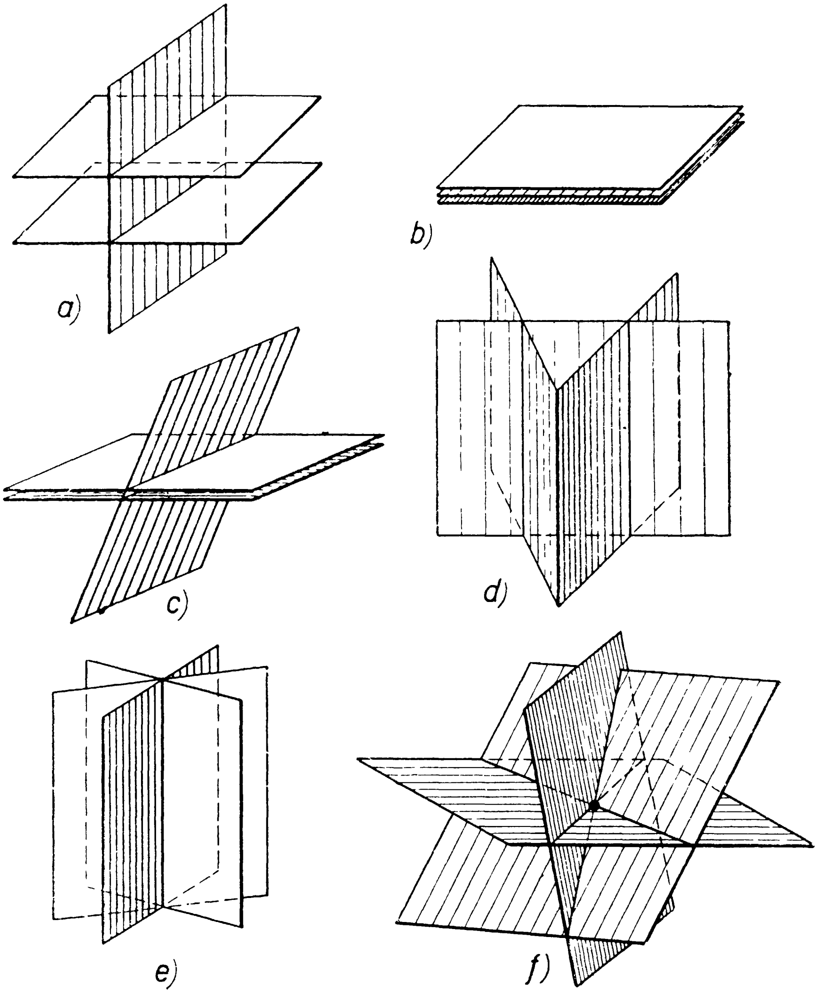
Определение. *Линейная система называется однородной, если все свободные члены равны нулю.*

Однородная линейная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(L)}$$

Однородная система не может быть противоречивой, так как она имеет **нулевое** или **тривиальное** решение:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$



Черт. 80

Если исключение неизвестных приведет к **полной треугольной** системе, то однородная система имеет единственное тривиальное решение; если исключение неизвестных приведет к **усеченной треугольной** системе, то однородная система имеет бесконечное множество решений, среди которых содержатся нетривиальные решения.

Геометрическая интерпретация. Уравнения

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0, \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

изображают прямые, проходящие через начало координат. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то эти прямые различны и начало координат есть их единственная общая точка. Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то прямые совпадают, система имеет бесконечное множество решений.

Аналогично, плоскости, изображающиеся уравнениями

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

проходят через начало координат. Эти плоскости могут пересекаться лишь в одной точке (тривиальное решение), пересекаться по прямой или совпадать, в двух последних случаях система имеет нетривиальные решения.

Примеры

1. Исследовать систему

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 4, \qquad (1) \\ 3x + 4y - 2z &= 5, \qquad (2) \\ 4x + 5y + 6z &= 15. \qquad (3) \end{aligned}\right\}$$

Исключив x из (1) и (2), а затем из (1) и (3), получим:

$$\begin{array}{r|l} 2x - 3y + 5z = 4 & 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 & 2 \\ \hline -17y + 19z = 2 & \end{array} \quad (1,2) \quad \text{и} \quad \begin{array}{r|l} 2x - 3y + 5z = 4 & 2 \\ 4x + 5y + 6z = 15 & 1 \\ \hline -11y + 4z = -7 & \end{array} \quad (1,3)$$

Исключив y из (1, 2) и (1, 3), получим:

$$\begin{array}{r|l} 17y - 19z = -2 & 11 \\ 11y - 4z = 7 & 17 \\ \hline -141z = -141 & \end{array} \qquad \text{или } z = 1 \qquad (1,2,3)$$

Полная треугольная система

$$z = 1, \quad -17y + 19z = 2, \quad 2x - 3y + 5z = 4,$$

составленная из уравнений (1), (1, 2) (1, 2, 3), эквивалентна данной. Из треугольной системы найдем единственное решение

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

2. Присоединим к уравнениям, рассмотренным в предыдущем примере, новое четвертое уравнение

$$7x - 2y - 3z = 2;$$

исследовать, имеет ли система уравнений (1) — (4) решения.

Решение. Единственное возможное решение системы (1) — (4) есть $x = y = z = 1$, так как это единственная система чисел, удовлетворяющая первым трем уравнениям; проверкой убедимся, что уравнение (4) при $x = y = z = 1$ также удовлетворяется.

Исключение неизвестного x из уравнений (1) и (4) приведет к уравнению

$$-17y + 41z = 24 \tag{1,4}$$

Это уравнение присоединится к (1, 2) и (1, 3). Исключив z из (1, 2) и (1, 4), получим:

$$22z = 22 \tag{1,2,4}$$

Уравнение (1, 2, 4) есть следствие (1, 2, 3) и может быть отброшено.

3. Видоизменим предыдущий пример: вместо уравнения (4) возьмем уравнение

$$7x - 2y - 3z = 1 \tag{4'}$$

и присоединим его к уравнениям примера (1). Получится противоречивая система, так как $x = y = z = 1$ не удовлетворяет (4′). В этом случае уравнение (1, 4) заменится уравнением

$$-17y + 41z = 26,$$

а уравнение (1, 2, 4) заменится уравнением

$$22z = 24 \quad \text{или} \quad 11z = 12,$$

последнее уравнение и уравнение (1, 2, 3) образуют противоречивую систему.

4. Решить систему

$$\left.\begin{array}{lr}
2x + 3y + 4z + 5u = -2, & (1)\\
3x + y + 2z + 4u = 1, & (2)\\
4x + 6y + 3z + 7u = 1, & (3)\\
5x + 2y + z + 4u = 4. & (4)
\end{array}\right\}$$

Решение. Исключаем неизвестное y, комбинируя уравнения (2) поочередно с прочими уравнениями:

$$\begin{array}{l|l}
2x + 3y + 4z + 5u = -2 & 1\\
3x + y + 2z + 4y = 1 & 3\\
\hline
7x + 2z + 7u = 5 & (2,1);
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
4x + 6y + 3z + 7u = 1 & 1\\
3x + y + 2z + 4u = 1 & 6\\
\hline
14x + 9z + 17u = 5 & (2,3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
5x + 2y + z + 4u = 4 & 1\\
3x + y + 2z + 4u = 1 & 2\\
\hline
x + 3z + 4u = -2 & (2,4).
\end{array}$$

Исключаем неизвестное x, комбинируя (2, 4) с уравнениями (2, 1) и (2, 3),

$$\begin{array}{l|l}
7x + 2z + 7u = 5 & 1\\
x + 3z + 4u = -2 & 7\\
\hline
19z + 21u = -19 & (2,4,1);
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
14x + 9z + 17u = 5 & 1\\
x + 3z + 4u = -2 & 14\\
\hline
33z + 39u = -33 & (2,4,3).
\end{array}$$

Исключив (z) из (2, 4, 1) и (2, 4, 3), получим:

$$\begin{array}{l|l}
19z + 21u = -19 & 33\\
33z + 39u = -33 & 19\\
\hline
48u = 0 & \text{или } u = 0 \qquad (2,\ 4,\ 3,\ 1).
\end{array}$$

Уравнения (2), (2, 4), (2, 4, 3) и (2, 4, 3, 1) образуют полную треугольную систему:

$$u = 0, \quad 33z + 39u = -33, \quad x + 3z + 4u = -2, \quad 3x + y + 2z + 4u = 1,$$

из которой найдем единственное решение:

$$u=0, \quad z=-1, \quad x=1, \quad y=0.$$

5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{lr} 2x-\ y+3z=1, & (1) \\ 4x-2y-\ z=-3, & (2) \\ 2x-\ y-4z=-4, & (3) \\ 10x-5y-6z=-10. & (4) \end{array}\right|$$

Решение. Исключаем y, комбинируя первое уравнение с прочими,

$$\begin{array}{r|l} 4x-2y-\ z=-3 & 1 \\ 2x-\ y+3z=1 & 2 \\ \hline 7z=5 & \end{array} \quad (1,\,2); \qquad \begin{array}{r|l} 2x-y-4z=-4 & 1 \\ 2x-y+3z=1 & 1 \\ \hline 7z=5 & \end{array} \quad (1,\,3),$$

$$\begin{array}{r|l} 10x-5y-6z=-10 & 1 \\ 2x-\ y+3z=1 & 5 \\ \hline 21z=15 & \end{array} \quad (1,4).$$

Уравнения (1, 3) и (1, 4) суть следствия (1, 2), а потому могут быть отброшены. Система эквивалентна усеченной треугольной системе двух уравнений (1) и (1, 2), из которых найдем:

$$z=\frac{5}{7}, \quad y=2x+\frac{8}{7},$$

где x — произвольное число.

6. Исследовать однородную систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля).

Решение. 1°. Если коэффициенты при неизвестных пропорциональны $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$, то одно из уравнений есть следствие другого. Пусть, например, $a_1\neq 0$, тогда найдем общее решение:

$$x=-\frac{b_1y+c_1z}{a_1}.$$

Система имеет бесконечное множество решений, два неизвестные произвольны.

2°. Предположим, что коэффициенты данных уравнений непропорциональны, пусть, например, $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Решим систему относительно неизвестных x и y (см. стр 265):

$$x=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)\,z}{a_1b_2-a_2b_1}; \qquad y=\frac{(c_1a_2-a_1c_2)\,z}{a_1b_2-a_2b_1},$$

где z — произвольное число. Откуда

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$$

или

$$x=(b_1c_2-b_2c_1)\,t; \quad y=(c_1a_2-c_2a_1)\,t; \quad z=(a_1b_2-a_2b_1)\,t,$$

где t (коэффициент пропорциональности) — произвольное число. **Система имеет бесконечное множество решений: одно неизвестное произвольно.**

Итак, всякая однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений.

Геометрическая интерпретация. Две плоскости, проходящие через начало координат, либо пересекаются по прямой (случай 2°), либо совпадают (случай 1°).

§ 72. Метод неопределенных коэффициентов

Для исключения неизвестных из линейных уравнений можно применять метод **неопределенных коэффициентов**.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + c_1z + k_1u + \ldots + l_1v &= d_1, \\ a_2x + b_2y + \ldots + c_2z + k_2u + \ldots + l_2v &= d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + \ldots + c_nz + k_nu + \ldots + l_nv &= d_n \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{L})$$

или в сокращенной записи:

$$L_1 = d_1,\ L_2 = d_2, \ldots, L_n = d_n.$$

Поставим следующую задачу: *в качестве следствия из данных уравнений получить линейное уравнение, не содержащее неизвестных x, y, ..., z.* Умножив данные уравнения на некоторые числовые множители λ_1, λ_2, ..., λ_n (соответственно) и сложив почленно, получим линейное уравнение:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_n d_n. \quad (\lambda\mathrm{L})$$

По условию последнее уравнение не должно содержать неизвестных x, y,..., z. Приравняем коэффициенты при этих неизвестных нулю:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n &= 0, \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (\lambda)$$

Получилась система однородных уравнений относительно неопределенных коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тривиальное решение этой системы исключается из рассмотрения, так как при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ уравнение (λL) удовлетворяется тождественно. Всякое нетривиальное решение системы (λ) приводит к уравнению (λL), не содержащему неизвестных x, y, ..., z. Отметим следующие возможные случаи:

1°. Уравнение (λL) содержит неизвестные $u, \ldots, v$ (хотя бы одно).

2°. Уравнение (λL) противоречиво, т. е.

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n \equiv 0, \quad \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_n d_n \neq 0.$$

В этом случае система (L) противоречива, так как уравнение (λL), будучи следствием (L), противоречиво.

3°. Уравнение (λL) удовлетворяется тождественно, т. е.

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n \equiv 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_n d_n = 0.$$

В этом случае система (L) содержит уравнения, которые могут быть получены в качестве следствия из прочих уравнений. В самом деле, по предложению не все множители λ_i равны нулю (решение нетривиальное), пусть, например $\lambda_n \neq 0$, тогда:

$$L_n \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} L_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} L_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} L_{n-1}$$

и

$$d_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} d_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} d_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} d_{n-1}.$$

Последнее уравнение может быть получено посредством умножения предыдущих уравнений на множители $-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}, -\frac{\lambda_2}{\lambda_n}, \ldots, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ (соответственно) и почленного сложения.

Применение метода неопределенных коэффициентов к решению систем линейных уравнений основано на следующем частном случае теоремы II (§ 51). Если $k_n \neq 0$, то системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_{n-1} = 0, \quad F_n = 0$$

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \ldots, F_{n-1} = 0, \; k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots + k_n F_n = 0$$

эквивалентны (в нашем случае $m_{22} = m_{33} = \ldots = m_{n-1\,n-1} = 1$ и $m_{nn} = k_n \neq 0$, см. стр. 202). Из теоремы II (§ 51) также следует, что, если $\lambda_i \neq 0$, то система (L) эквивалентна системе, в которой i-е уравнение заменено уравнением

$$\lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_i L_i + \ldots + \lambda_n L_n = \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_n d_n, \quad (\lambda \mathrm{L})$$

а все прочие уравнения (L) оставлены без изменения.

Пример

Решить систему

$$
\begin{aligned}
3x - 4y + 5z \phantom{{}-2u} &= 13, &(1)\\
3x \phantom{{}-4y} - z - 2u &= 5, &(2)\\
7y - 8z + 4u &= 21, &(3)\\
3x \phantom{{}-4y} + 10z - 4u &= 19. &(4)
\end{aligned}
$$

Решение. Исключим из этих уравнений неизвестные y, z и u (можно взять три другие неизвестные). Приравняем нулю коэффициенты при y, z и u в уравнении, которое получится, если данные уравнения умножить на коэффициенты λ, μ, ν, σ и сложить:

$$
\left.
\begin{aligned}
-4\lambda + 7\nu &= 0,\\
5\lambda - \mu - 8\nu + 10\sigma &= 0,\\
-2\mu + 4\nu - 4\sigma &= 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (\lambda)
$$

Исключив μ из последних двух уравнений, получим:

$$5\lambda - 10\nu + 12\sigma = 0.$$

Это уравнение совместно с первым и третьим образует усеченную треугольную систему, из которой найдем:

$$\lambda = \frac{7}{4}\nu, \qquad \mu = \frac{43}{24}\nu, \qquad \sigma = \frac{5}{48}\nu.$$

Достаточно знать какое-либо частное решение системы (λ); положив $\nu = 48$, получим:

$$\lambda = 84, \quad \mu = 86, \quad \nu = 48, \quad \sigma = 5.$$

Умножив данные уравнения на найденные коэффициенты и сложив, получим:

$$(3\lambda + 3\mu + 3\sigma)x = 13\lambda + 5\mu + 21\nu + 19\sigma$$

или, после подстановки значений коэффициентов и сокращения,

$$x = 5.$$

Последним уравнением можно заменить любое из уравнений данной системы (например, третье), так как ни один из множителей λ, μ, ν, σ не равен нулю. Положив $x = 5$ в уравнениях (2) и (4), получим:

$$z + 2u = 10,$$
$$5z - 2u = 2.$$

Откуда $z=2$ и $u=4$. Из (1) найдем $y=3$. Система имеет единственное решение:

$$x = 5, \quad y = 3, \quad z = 2, \quad u = 4.$$

§ 73. Линейные системы, содержащие параметры. Решение линейных систем при дополнительных условиях

Линейное уравнение, содержащее параметры, имеет вид:

$$ax + by + \ldots + cz = d,$$

где коэффициенты a, $b, \ldots, c$, d суть данные функции от параметров.

Если не задано никаких дополнительных условий, то исследование системы уравнений (в частности одного уравнения) заключается в установлении, при каких значениях параметров система имеет решение, при каких противоречива. В первом случае надо установить, в каких случаях система имеет единственное решение, в каких бесконечное множество решений, скольким неизвестным можно придавать произвольные значения и составить формулы решения.

При исключении неизвестных из системы (заданной в общем виде), в которой число уравнений больше числа неизвестных, получаются соотношения (одно или несколько) между коэффициентами данных уравнений, эти соотношения, не содержащие неизвестных, дают условия (необходимые) существования решения системы.

Если коэффициенты суть рациональные функции от параметров, то формулы решения также являются рациональными относительно параметров, так как при исключении неизвестных и решении линейных уравнений над коэффициентами производятся лишь арифметические действия.

Примеры

1. Исследовать уравнение

$$m^2(x-2)-3m=x+1.$$

Решение. Приведя уравнение к каноническому виду, получим:

$$(m^2-1)x=2m^2+3m+1.$$

Если $m\neq\pm1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{2m^2+3m+1}{m^2-1}=\frac{2m+1}{m-1}.$$

Если $m=1$, то $2m^2+3m+1=6\neq0$, уравнение не имеет решений. Если $m=-1$, то $2m^2+3m+1=0$ и данное уравнение удовлетворяется тождественно.

2. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned}&(m-1)^2x+(m^2-1)y=(m+1)^2, &&(1)\\&(2m-1)x+(m+1)\ y=m^2-1. &&(2)\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{A})$$

Решение. Наиболее простым из коэффициентов при неизвестных является $m+1$, поэтому будем исключать неизвестное y, пользуясь вторым уравнением.

Если $m\neq-1$, то второе уравнение содержит y; умножим почленно уравнение (2) на $m-1$ и вычтем из первого:

$$\begin{array}{c|l}(m^2-1)y+(m-1)^2x=(m+1)^2 & 1\\ (m+1)y+(2m-1)x=m^2-1 & (m-1)\\ \hline -m(m-1)x=m(m+1)(3-m) & \end{array}\qquad(2,\ 1)$$

Треугольная система:

$$\left.\begin{aligned}&(m+1)y+(2m-1)x=m^2-1,\\&\qquad -m(m-1)x=m(m+1)(3-m)\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{B})$$

(при $m\neq-1$) эквивалентна системе (А).

Если $m\neq0$ и $m\neq1$, то из второго уравнения (В) найдем x, и, подставив в первое уравнение этой системы, найдем y. В этом случае система имеет единственное решение:

$$x=\frac{(m+1)(m-3)}{m-1};\qquad y=\frac{-m^2+5m-2}{m-1}\ (\text{где } m\neq\pm1\ \text{ и }\ m\neq0).$$

Особые случаи. I. Если $m\neq-1$, то можно вывести систему (В), но формулы решения нельзя получить при $m=0$ и при $m=1$.

Случай 1°. $m=0$. Второе уравнение системы (В) удовлетворяется тождественно. Система (А) эквивалентна одному уравнению

$$x-y=1,$$

из которого найдем бесконе́чное множество решений:

$$y=x-1,\quad x - \text{произвольное число данного поля.}$$

Случай 2°. $m = 1$. Второе уравнение системы (В) противоречиво; система не имеет решений.

II. При $m = -1$ система (В) не может быть выведена, так как второе уравнение не содержит y.

Случай 3°. $m = -1$. Система (А) примет вид:

$$4x = 0, \quad -3x = 0.$$

Откуда найдем бесконечное множество решений:

$$x = 0, \quad y \text{ — произвольное число.}$$

Примечание. На основании результатов исследования линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными можно сделать следующее заключение: система (А) имеет единственное решение, если

$$a_1b_2 - a_2b_1 = (m-1)^2(m+1) - (2m-1)(m^2-1) = \\ = (m+1)m(m-1) \neq 0,$$

т. е. если $m \neq -1$, $m \neq 0$ и $m \neq 1$. При $m = -1$, $m=0$, и $m=1$ система является либо противоречивой, либо имеет бесконечное множество решений, (что согласуется с результатами выполненного решения).

3. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{m-a} + \frac{y}{m-b} &= 1, \\ \frac{x}{n-a} + \frac{y}{n-b} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Решение. Допустимые значения параметров определяются следующими условиями: $m \neq a$, $m \neq b$, $n \neq a$, $n \neq b$.

Умножив первое уравнение на $-(m-a) \neq 0$, а второе на $n-a \neq 0$ и сложив почленно, исключим x и составим систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{m-a} + \frac{y}{m-b} &= 1, \\ \frac{(n-m)(a-b)}{(m-b)(n-b)}\, y &= n - m. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Если $n \neq m$ и $a \neq b$, то из треугольной системы (В) найдем единственное решение:

$$y = \frac{(m-b)(n-b)}{a-b}, \qquad x = \frac{(m-a)(n-a)}{b-a}.$$

Полученные выражения для неизвестных не теряют смысла, если например $m=a$, но соответствующие значения x и y нельзя считать решениями, ибо такая система параметров не принадлежит области определения системы уравнений (A). В процессе выполнения преобразований произошло расширение области определения рассматриваемых функций параметров.

Особые случаи. Случай 1°. $m=n$. Второе уравнение системы (В) удовлетворяется тождественно. Система имеет бесконечное множество решений:

$$x = m - a + \frac{m-a}{m-b}\, y \quad (\text{где } m \neq a, \quad m \neq b).$$

Случай 2°. $a=b$. При $m \neq n$ система противоречива. Случай $a=b$, $m=n$ включается в предыдущий.

4. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 5, & (1) \\ 2ax + 3by + (b-5a)\,z &= 2a + 3b, & (2) \\ bx + 3ay + (a-b)\,z &= a + 4b. & (3) \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Решение. Уравнение (1) содержит все три неизвестные. Исключив x из уравнения (2), а затем из уравнений (3), получим систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 5, & (1)\\ 3(b-a)y + (b-a)z &= 3(b-a), & (1,\ 2)\\ 3(2a-b)y + 2(a+b)z &= (2a+3b). & (1,\ 3) \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Если $a \neq b$, то уравнение (1, 2) содержит y и эквивалентно следующему уравнению

$$3y + z = 3. \qquad (1,\ 2)$$

Исключив y из уравнений (1, 2') и (1, 3), получим систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 5,\\ 3y + z &= 3,\\ 3bz &= -4a + 6b. \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Если $b \neq 0$, то из треугольной системы (C) найдем единственное решение:

$$z = \frac{-4a+6b}{3b}, \qquad y = \frac{4a+3b}{9b}, \qquad x = \frac{-10a+18b}{3b},$$

где $a \neq b$ и $b \neq 0$.

Особые случаи. I. Систему (C) можно вывести при условии $a \neq b$, но формулы ее решения нельзя получить при $b=0$.

Случай 1°. $b = 0$, $a \neq b$, т. е. a 0, третье уравнение системы (C) противоречиво. Данная система не имеет решений.

II. При $b=a$ можно вывести систему (B), но нельзя вывести систему (C). Если $a=b$, то система (B) примет вид (второе уравнение этой системы удовлетворяется тождественно):

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 5,\\ 3ay + 4az &= 5a. \end{aligned}$$

Случай 2°. Если $a=b \neq 0$, то получим бесконечное множество решений:

$$y = \frac{5-4z}{3}, \quad x = 4z \ (z \text{ — произвольное число}).$$

Случай 3°. Если $a = b = 0$, то данная система эквивалентна одному уравнению:

$$2x + 3y - 4z = 5,$$

откуда найдем бесконечное множество решений $x = \dfrac{5-3y+4z}{2}$.

5. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= m,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= m^2,\\ a^3x + b^3y + c^3z &= m^3. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Решение. Если $a \neq 0$, то воспользовавшись первым уравнением, исключим x из второго, а затем из третьего уравнения, тогда получим систему:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= m,\\ b(b-a)y + c(c-a)z &= m(m-a),\\ b(b^2-a^2)y + c(c^2-a^2)z &= m(m^2-a^2). \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Второе уравнение содержит y, если $b \neq 0$, $b \neq a$; исключив y из последнего уравнения, получим треугольную систему

$$\left.\begin{aligned} ax + \quad by + \quad & cz = m, \\ b(b-a)\,y + \quad & c(c-a)\,z = m(m-a), \\ & c(c-a)(c-b)\,z = m(m-a)(m-b). \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Если $c \neq 0$, $c \neq a$ и $c \neq b$, то из системы (C) найдем единственное решение (элементарные выкладки опускаем):

$$z = \frac{m(m-a)(m-b)}{c(c-a)(c-b)}, \quad y = \frac{m(m-a)(m-c)}{b(b-c)(b-a)}, \quad x = \frac{m(m-b)(m-c)}{a(a-b)(a-c)},$$

где

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq b, \quad c \neq 0, \quad c \neq a, \quad c \neq b.$$

Примечание. Заметив, что система уравнений не изменяется при любой перестановке аргументов x, y, z вместе с параметрами a, b и c (соответственно), можно непосредственно написать формулы для y и x из первой формулы путем надлежащей перестановки параметров.

Особые случаи. Из изложенного выше следует, что особые случаи имеют место, если хотя бы один из параметров a, b и c равен нулю, либо если среди значений этих параметров имеются равные между собой. Так как исходная система (A) симметрична относительно параметров a, b и c (см. примечание), то можно сократить число подлежащих рассмотрению особых случаев (рекомендуем учащимся для каждого рассмотренного ниже особого случая переписывать исходную систему (A)).

Случай 1°. Один из параметров a, b и c равен нулю, два остальные отличны друг от друга.

Пусть, например, $c=0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Система (C) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} ax + \quad by \quad & = m, \\ b(b-a)\,y \quad & = m(m-a), \\ 0\,z & = m(m-a)(m-b) \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

Если $m \neq 0$, $m \neq a$, $m \neq b$, то последнее уравнение противоречиво. Система не имеет решений.

Если $m=0$, либо $m=a$, либо $m=b$, то последнее уравнение удовлетворяется тождественно. Система имеет бесконечное множество решений:

$$y = \frac{m(m-a)}{b(b-a)}, \qquad x = \frac{m(m-b)}{a(a-b)}, \quad z \text{ — произвольное число}$$

Случай 2°. Значения двух параметров a, b и c равны нулю, третий отличен от нуля. Пусть, например $b=c=0$, $a \neq 0$, система (B) примет вид:

$$ax = m, \quad 0y + 0z = m(m-a), \quad 0y + 0z = m(m^2-a^2);$$

при $m \neq 0$ и $m \neq a$ система противоречива. При $m=0$ или $m=a$ система имеет бесконечное множество решений:

$$x = \frac{m}{a}, \quad y \text{ и } z \text{ произвольны.}$$

Случай 3°. $a=b=c=0$. При $m \neq 0$ система противоречива, при $m=0$ удовлетворяется тождественно.

Случай 4°. Два параметра a, b, c отличны от нуля и равны между собой, третий им неравен и отличен от нуля.

Пусть, например, $a=c \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq a$.

Система (С) примет вид:

$$\begin{aligned} ax + \quad & by + az = m, \\ & b(b-a)y \quad = m(m-a), \\ & \qquad 0\cdot z = m(m-a)(m-b) \end{aligned}$$

Если $m \neq 0$, $m \neq a$, $m \neq b$, то система противоречива.

Если $m = 0$, либо $m = a$, либо $m = b$, то система имеет бесконечное множество решений:

$$y = \frac{m(m-a)}{b(b-a)}, \qquad x = \frac{m(m-b)}{a(a-b)} - z; \text{ (} z \text{ — произвольное число)}$$

Случай 5°. Два параметра a, b и c отличны от нуля и равны между собой, третий параметр равен нулю. Пусть, например, $a=c\neq 0$, $b=0$, система (В) примет вид:

$$ax + az = m, \quad 0y + 0z = m(m-a), \quad 0y + 0z = m(m^2 - a^2)$$

При $m \neq 0$ и $m \neq a$ система противоречива, при $m = 0$ или $m = a$ система имеет бесконечное множество решений:

$$x = \frac{m}{a} - z; \quad y \text{ и } z \text{ произвольны.}$$

Случай 6°. $a=b=c\neq 0$.

Система (В) примет вид:

$$ax + ay + az = m, \quad 0y + 0z = m(m-a), \quad 0y + 0z = m(m^2 - a^2)$$

Система противоречива при $m \neq 0$ и $m \neq a$.

Если $m=0$ или $m=a$, то система имеет бесконечное множество решений:

$$x = \frac{m}{a} - y - z; \quad y \text{ и } z \text{ произвольны}$$

6. Исключить неизвестное x из уравнений

$$a_1x = b_1 \quad \text{и} \quad a_2x = b_2.$$

Решение. Исключив x по обычным правилам, получим:

$$0 = b_1a_2 - a_1b_2.$$

Это равенство есть необходимое условие совместности системы двух уравнений с одним неизвестным. Полученное условие не является достаточным, так, например, оно выполняется при $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$, но каждое из уравнений противоречиво.

7. Исключить неизвестные x, y, и z из однородной системы:

$$ax + cy + bz = 0, \qquad (1)$$

$$cx + by + az = 0, \qquad (2)$$

$$bx + ay + cz = 0 \qquad (3)$$

Исключением неизвестных из однородной системы называется вывод соотношений между параметрами, при которых система имеет нетривиальные решения.

Решение 1°. Если система содержит одно независимое уравнение, то

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{c} = \frac{c}{b}.$$

В этом случае система имеет бесконечное множество решений (два неизвестные произвольны).

2°. Если система содержит два (по крайней мере) независимые уравнения, например (1) и (2) (см. пример 6, стр. 273), то составим общее решение системы двух уравнений (1) и (2):

$$x=(ac-b^2)t,\quad y=(bc-a^2)t,\quad z=(ab-c^2)t,$$

где t произвольное число. Подставив в уравнение (3), получим

$$(3abc-a^3-b^3-c^3)t=0. \tag{4}$$

Если $3abc-a^3-b^3-c^3\neq 0$, то из уравнения (4) найдем $t=0$, в этом случае система имеет единственное тривиальное решение.

Если

$$3abc-a^3-b^3-c^3=0, \tag{5}$$

то уравнение (3) удовлетворяется всеми решениями системы уравнений (1) и (2), следовательно, имеет нетривиальные решения. Заметим, что в случае 1° равенство (5) также выполняется.

Итак, равенство (5) есть искомый результат исключения неизвестных.

При решении уравнений и систем линейных уравнений, при дополнительных условиях поступают по общему правилу: находят значения параметров, при которых решение удовлетворяет поставленным условиям.

Ниже приведены примеры решений линейных уравнений при различных дополнительных условиях.

Примеры

1. Найти целые положительные решения

$$2ax=(a+1)x+18. \tag{1}$$

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду:

$$(a-1)x=18,\quad \text{откуда}\quad x=\frac{18}{a-1},$$

где $a\neq 1$. При $a=1$ уравнение не имеет решений. По условию x — натуральное число. Следовательно, $a-1$ должно быть положительным делителем числа 18:

1) $a-1=1,\quad a=2,\quad x=18;$
2) $a-1=2,\quad a=3,\quad x=9;$
3) $a-1=3,\quad a=4,\quad x=6;$
4) $a-1=6,\quad a=7,\quad x=3;$
5) $a-1=9,\quad a=10,\quad x=2;$
6) $a-1=18,\quad a=19,\quad x=1.$

2. Найти рациональные решения уравнения

$$x+\sqrt{2}=x\sqrt{2}+a^2,$$

где a — рациональный параметр.

Решение. Имеем:

$$x(1-\sqrt{2})=a^2-\sqrt{2}.$$

Откуда

$$x=\frac{a^2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-(a^2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(2-a^2)+(1-a^2)\sqrt{2},$$

неизвестное x есть рациональное число лишь в том случае, если $a^2=1$, откуда $a=\pm 1$ и $x=1$.

3. Найти действительные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} ix+y&=-1,\\ x+y&=2a-1,\end{aligned}\right\}$$

где a — комплексный параметр.

Решение. При произвольном a система имеет единственное решение:

$$x = \frac{2a}{1-i} = a(1+i), \quad y = (a-1) - ai,$$

Пусть $a = \alpha + i\beta$ (где α и β действительные числа), имеем:

$$x = (\alpha + i\beta)(1+i) = (\alpha - \beta) + i(\alpha + \beta),$$

$$y = (\alpha + i\beta - 1) - i(\alpha + i\beta) = \alpha + \beta - 1 + i(-\alpha + \beta),$$

числа x и y действительны, если $\alpha+\beta=0$ и $-\alpha+\beta=0$. Откуда $\alpha = 0$, $\beta=0$, т. е. $a=0$, при $a=0$ получим $x=0$, $y=-1$.

4. *Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными**. Так называются уравнения вида

$$ax + by = c,$$

где a, b и c — целые числа. Под решением неопределенного уравнения понимают его решение в целых числах, т. е. решение (1) при дополнительном условии: x и y суть целые числа. Числа a, b и c будем предполагать взаимно простыми.

Теорема 1°. *При взаимно простых* a, b *и* c *уравнение* (1) *имеет целые решения в том и только в том случае, если* a *и* b *взаимно просты.*

2°. *Если* a *и* b *взаимно просты, то существует бесконечное множество решений* (1)

Доказательство. Если a и b не взаимно просты, то они имеют общий нетривиальный делитель:

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad \text{где} \quad d > 1.$$

В этом случае при любых целых x и y правая часть делится на d, но левая, т. е. число c, не делится на d (так как a, b и c взаимно просты). В этом случае уравнение не имеет целых решений.

Предположим, что a и b взаимно просты. Рассмотрим общее решение (1):

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad (\text{где } a > 0). \tag{2}$$

Полагая последовательно: $y=0, 1, 2, \ldots, a-1$, получим соответствующие значения $c-by$. Эти значения дают при делении на a различные остатки. В самом деле, если при $0 \leqslant y_1 \leqslant a-1$, $0 \leqslant y_2 \leqslant a-1$ и $y_1 \neq y_2$ числа $c-by_1$ и $c-by_2$ равноостаточны, то их разность делится на a:

$$(c - by_1) - (c - by_2) = b(y_2 - y_1) = da,$$

что невозможно, так как a и b взаимно просты и $|y_2 - y_1| < a$. Следовательно, среди a различных неотрицательных остатков от деления $c-by$ на a содержится каждое из чисел $0, 1, 2, \ldots, a-1$. Но если остаток при $y=y_1$ равен нулю, то левая часть (2) есть целое число x_1 и пара чисел x_1, y_1 есть целое решение уравнения (1). Докажем, что в этом случае уравнечие (1) имеет бесконечное множество целых решений. В самом деле, пусть

$$ax + by = c \ (\text{где } x \text{ и } y \text{ — целые числа}),$$

имеем:

$$ax_1 + by_1 = c,$$

откуда

$$a(x - x_1) = -b(y - y_1). \tag{3}$$

---

* Неопределенные уравнения изучаются в теории чисел, в настоящей же книге эти уравнения приведены лишь как пример уравнений, решаемых при дополнительных условиях.

Так как b не делится на a, то $y-y_1$ делится на a, т. е. $y=y_1+at$, где t — целое число. Из (3) получим $x=x_1-bt$. Проверкой убедимся, что

$$x = x_1 - bt, \quad y = y_1 + at \tag{4}$$

при любом целом t есть решение уравнения (1), а поэтому формулы (4) дают общее решение (1) в целых числах.

Итак, для решения неопределенного уравнения достаточно путем не более чем a испытаний, полагая последовательно $y=0$, 1, 2,..., $a-1$, найти одно целое решение уравнения и составить формулы общего решения (4).

Пример

Решить в целых числах уравнение

$$8x + 13y = 159.$$

Решение. Имеем:

$$x = \frac{159-13y}{8} = 19 - y + \frac{7-5y}{8}.$$

Полагая последовательно $y=0$, 1, 2,..., 7, при $y=3$, получим целое число $x = 15$. Общее решение есть:

$$x = 15 - 13t, \quad y = 3 + 8t, \quad \text{где } t \text{ — произвольное целое число.}$$

§ 74. Различные частные способы решения линейных систем

Общая схема исследования и решения линейных систем, изложенная в предыдущих параграфах, применима к произвольной линейной системе, этой схемы мы придерживались при рассмотрении конкретных примеров. Однако в ряде случаев, пользуясь специфическими свойствами уравнения или системы, можно применять частные приемы, вносящие упрощения в процесс решения и исследования. Во многих случаях целесообразно применение специальных линейных комбинаций, введение вспомогательных неизвестных, составление производных пропорций и т. п. Эти частные приемы общей теорией нельзя предусмотреть, ряд таких приемов пояснен ниже на примерах.

Примеры

1. Часто встречающаяся линейная система вида:

$$ax + by = c_1,$$
$$ax - by = c_2,$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, решается непосредственно путем почленного сложения и вычитания данных уравнений (см. § 51):

$$2ax = c_1 + c_2, \quad 2by = c_1 - c_2,$$

откуда

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2a}, \quad y = \frac{c_1 - c_2}{2b}\ *.$$

* При несложных численных коэффициентах вычисления рекомендуется выполнять в уме.

2. Решить систему

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{x-y}{a-b}, \quad ax+by=a-c, \quad \text{где } a\neq\pm b.$$

Решение. Воспользуемся следующей производной пропорцией:

$$\text{если } \frac{A}{B}=\frac{C}{D}, \text{ то } \frac{A+C}{B+D}=\frac{A-C}{B-D}, \quad \text{где } B\neq\pm D.$$

Применив к первому уравнению эту производную пропорцию, получим

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \text{ при условии } a\neq 0 \text{ и } b\neq 0.$$

Положив

$$x=ka, \quad y=kb$$

и подставив во второе уравнение системы, получим:

$$k(a^2+b^2)=a-c. \tag{1}$$

При рассмотрении системы над полем действительных чисел $a^2+b^2\neq 0$, так как равенство $a^2+b^2=0$ возможно лишь, если $a=b=0$, что противоречит условию. Уравнение (1) имеет единственное решение.

Имеем:

$$k=\frac{a-c}{a^2+b^2},$$

откуда

$$x=\frac{a(a-c)}{a^2+b^2}, \quad y=\frac{b(a-c)}{a^2+b^2}. \tag{2}$$

При рассмотрении системы над полем комплексных чисел уравнение (1) противоречиво если $b=\pm ai\neq 0$ и $c\neq a$. В этом случае система (как имеющая противоречивое следствие) противоречива. Предлагаем учащимся проверить, что при $a=\pm bi(\neq 0)$ и $c=a$ данная система имеет бесконечное множество решений.

Наконец, следует рассмотреть случаи, когда невозможен переход к производной пропорции.

1°. Если $a=0$, b 0, то данная система примет вид:

$$\frac{x+y}{b}=\frac{x-y}{-b}, \quad by=-c,$$

$$\text{откуда } x=0, \; y=-\frac{c}{b}.$$

2°. Если $a\neq 0$, $b=0$, то система имеет единственное решение

$$x=\frac{a-c}{a}, \quad y=0.$$

В случаях 1° и 2° окончательные формулы (2) дают тот же результат, и можно эти случаи не выделять в качестве особых.

3. Решить систему

$$\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{m_n}, \tag{1}$$

$$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n=D, \tag{2}$$

где $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0,\ldots,m_n\neq 0$.

Р е ш е н и е. Введем новое неизвестное t, положив

$$\frac{x_1 - a_1}{m_1} = \frac{x_2 - a_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{m_n} = t.$$

Откуда

$$x_1 = a_1 + m_1 t, \quad x_2 = a_2 + m_2 t, \ \ldots, \ x_n = a_n + m_n t. \tag{3}$$

Решение системы (1), (2) и системы (3), (2) суть равносильные задачи, поскольку уравнения (1) являются результатом исключения неизвестного t из (3) (см. § 51). Подставив в последнее уравнение, получим:

$$t(A_1 m_1 + A_2 m_2 + \ldots + A_n m_n) = D - (a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n). \tag{4}$$

Если $A_1 m_1 + A_2 m_2 \ldots + A_n m_n \neq 0$, то уравнение (4) имеет единственное решение

$$t = \frac{D - (a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n)}{A_1 m_1 + A_2 m_2 + \ldots + A_n m_n}.$$

Из равенств (3) найдем выражения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В этом случае система имеет единственное решение.

Если

$$A_1 m_1 + A_2 m_2 + \ldots + A_n m_n = 0, \text{ но } D \neq A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n,$$

то уравнение (4) противоречиво, в этом случае данная система противоречива.

Если $A_1 m_1 + \ldots + A_n m_n = 0$ и $D = a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n$, то уравнение (4) удовлетворяется тождественно, в этом случае система имеет бесконечное множество решений. Общее решение может быть задано формулами (3), где t — произвольное число.

При $n = 3$ решение системы можно геометрически истолковать как отыскание точек пересечения прямой и плоскости.

4. Решить систему

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \quad \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad x + y + z = 38.$$

Р е ш е н и е. Умножив знаменатели обеих частей первого уравнения на 2, а второго на 3, получим:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} \text{ или } x = 4t, \quad y = 6t, \quad z = 9t.$$

Из третьего уравнения найдем:

$$19t = 38, \quad t = 2 \text{ и } x = 8, \quad y = 12, \quad z = 18.$$

П р и м е ч а н и е. Можно не вводить коэффициент пропорциональности t, а воспользоваться свойством равных отношений:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{19} = \frac{38}{19} = 2.$$

5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= a_1, \\
x_3 + x_4 + \ldots + x_1 &= a_2, \\
x_4 + x_5 + \ldots + x_2 &= a_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} &= a_n.
\end{aligned}\right\}$$

Решение. В этой системе левая часть каждого последующего уравнения получается из левой части предыдущего круговой перестановкой неизвестных. Сложив почленно данные уравнения, получим:

$$(n-1)(x_1+x_2+\ .\ .\ .+x_n)=a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n.$$

Откуда

$$x_1+x_2+\ .\ .\ .+x_n=\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n}{n-1}. \qquad (1)$$

Вычитая последовательно из уравнений (1) уравнения данной системы, получим единственное решение:

$$x_1=\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n}{n-1}-a_1,$$

$$x_2=\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n}{n-1}-a_2,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$x_n=\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n}{n-1}-a_n.$$

6. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} kx+y+z&=a,\\ x+kx+z&=b,\\ x+y+kz&=c.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Сложив почленно, получим:

$$(k+2)(x+y+z)=a+b+c. \qquad (1)$$

Если $k\neq-2$, то из (1) найдем:

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{k+2}. \qquad (2)$$

Вычитая (2) из первого уравнения, получим:

$$x(k-1)=a-\frac{a+b+c}{k+2}.$$

Если $k\neq 1$, то

$$x=\frac{1}{k-1}\left(a-\frac{a+b+c}{k+2}\right);$$

аналогичные выражения найдем для прочих неизвестных.

Итак, если $k\neq-2$, и $k\neq 1$, то система имеет единственное решение.

Если $k=-2$ и $a+b+c$ 0, то уравнение (1) противоречиво, в этом случае и система противоречива.

При $k=-2$ и $a+b+c=0$ система примет вид:

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z&=a,\\ x-2y+z&=b,\\ x+y-2z&=-a-b.\end{aligned}\right\}$$

Третье уравнение есть следствие первых двух и может быть отброшено. Система имеет бесконечное множество решений (предоставляем учащимся составить формулы общего решения).

При $k=1$ система противоречива, если среди чисел a, b и c хотя бы два различны между собой. Система содержит лишь одно независимое уравнение, если $a=b=c$.

7. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+ay+a^2z+a^3=0, \quad (1)\\ x+by+b^2z+b^3=0, \quad (2)\\ x+cy+c^2z+c^3=0, \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

где a, b и c попарно различные числа.

Решение. Обычный процесс исключения неизвестных приводит к уравнениям *

$$y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)=0, \tag{1,2}$$

$$y+(a+c)z+(a^2+ac+c^2)=0 \tag{1,3}$$

и, наконец,

$$(b-c)z+(ab-ac+b^2-c^2)=0 \tag{1,2,3}$$

из (1, 2, 3), (1, 2) и (1) найдем единственное решение:

$$x=-abc, \quad y=ab+bc+ac, \quad z=-(a+b+c). \tag{4}$$

Второй способ. Уравнения (1), (2) и (3) показывают, что числа a, b и c должны быть корнями многочлена третьей степени:

$$X^3+zX^2+yX+x=0.$$

Следовательно, этот многочлен может быть представлен в виде:

$$(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях X, получим формулы (4).

8. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+u&=k, \quad (1)\\ ax+by+cz+du&=l, \quad (2)\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=m, \quad (3)\\ a^3x+b^3y+x^3z+d^3u&=n, \quad (4)\end{aligned}\right\}$$

где a, b, c и d попарно различные числа.

Решение. Для исключения неизвестных y, z и u применим метод неопределенных коэффициентов. Имеем:

$$(\lambda+\mu a+\nu a^2+\sigma a^3)x=\lambda k+\mu l+\nu m+\sigma n, \tag{5}$$

где λ, μ, ν, σ определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda+\mu b+\nu b^2+\sigma b^3=0,\\ \lambda+\mu c+\nu c^2+\sigma c^3=0,\\ \lambda+\mu d+\nu d^2+\sigma d^3=0.\end{aligned}\right\}$$

Положим $\sigma=1$, тогда для определения λ, μ и ν получим систему, рассмотренную в предыдущем примере.

Итак,

$$\lambda=-bcd, \quad \mu=bc+cd+bd, \quad \nu=-(b+c+d), \quad \sigma=1$$

Коэффициент при x в уравнении (5) равен результату подстановки $X=a$ в многочлен

$$X^3+\nu X^2+\mu X+\lambda=(X-b)(X-c)(X-d).$$

---

* Сокращение на $a-b$, $a-c$ и $b-c$ возможно, так как по условию $a\neq b$, $b\neq c$ и $a\neq c$.

Следовательно,

$$\sigma a^3 + \nu a^2 + \mu a + \lambda = (a - b)(a - c)(a - d) \neq 0$$

из (5) получим:

$$x = \frac{\lambda k + \mu l + \nu m + \sigma n}{(a - b)(a - c)(a - d)},$$

аналогичные выражения найдем для прочих неизвестных.

§ 75. Неравенства первой степени

Неравенство первой степени (или линейное неравенство) с неизвестными $x, y, \ldots, z$ после переноса всех членов в одну часть примет следующий вид (канонический вид):

$$ax + by + \ldots + cz + d \vee 0,$$

где $\vee$ может обозначать любой из символов $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Ниже будут рассматриваться неравенства над **полем действительных** чисел; для неизвестных и коэффициентов считаются допустимыми произвольные действительные значения.

Линейное неравенство с одним неизвестным имеет следующий канонический вид:

$$ax + b \vee 0.$$

Для определенности рассмотрим неравенство

$$ax + b > 0;$$

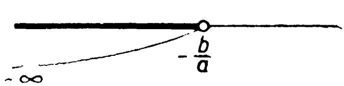
имеем: $ax > -b$, откуда

$$x > -\frac{b}{a}, \text{ если } a > 0 \text{ и } x < -\frac{b}{a}, \text{ если } a < 0.$$

При $a < 0$ решением является любое число x большее, чем $-\frac{b}{a}$; множество всех решений есть бесконечный интервал $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ (черт. 81).

При $a < 0$ решением является любое число x большее, чем $-\frac{b}{a}$, множество всех решений есть бесконечный интервал $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ (черт. 82).

Черт. 81



Черт. 82

Если $a = 0$, то при $b > 0$ неравенство удовлетворяется тождественно произвольным действительным значением x. При $b \leqslant 0$ и $a = 0$ данное неравенство не имеет решений.

Примеры

1. Решить неравенство

$$2-3x<14-5x.$$

Решение. Перенеся члены, содержащие x, в левую часть, а не содержащие x — в правую. получим:

$$5x-3x<14-2 \quad \text{или} \quad 2x<12,$$

откуда

$$x<6$$

2. Решить неравенство

$$\frac{37-2x}{3}+9\leqslant\frac{3x-8}{4}-x.$$

Решение. Умножив обе части на 12, получим:

$$148-8x+108<9x-24-12x \quad \text{или} \quad 256-8x\leqslant-3x-24,$$

откуда

$$-5x\leqslant-280 \text{ и } x\geqslant 56.$$

3. Решить неравенство

$$2(x-1)-x>3(x-1)-2x-5.$$

Решение. Имеем:

$$x-2>x-8.$$

По сокращении получим неравенство $-2>-8$, верное при всех значениях x. Данное неравенство, как эквивалентное полученному, удовлетворяется тождественно.

4. Решить неравенство

$$2x-2<(x-3)-(5-x).$$

Решение. Имеем $2x-2<2x-8$ или $-2<-8$. Следствием является неверное суждение. Значит, данное неравенство не имеет решений.

Неравенства с несколькими неизвестными. Рассмотрим линейное неравенство

$$ax+by+\ \ldots\ +cz+d>0.$$

Решив относительно одного из неизвестных (содержащегося в левой части), например, относительно x (при $a\neq0$), получим:

$$x>\frac{-by-\ \ldots\ -cz-d}{a} \qquad (\text{при } a>0)$$

и

$$x<\frac{-by-\ \ldots\ -cz-d}{a} \qquad (\text{при } a<0).$$

Неравенство имеет бесконечное множество решений; придавая неизвестным (каждому) $y,\ldots,z$ произвольные численные значения и взяв для неизвестного x любое значение большее (при $a>0$) или меньшее (при $a<0$), чем соответствующее значение $\frac{-by-\ldots-cz-d}{a}$, получим систему чисел $x, y,\ldots, z$, являющуюся решением данного неравенства. Множество всех его решений можно задать посредством следующей системы неравенств (полагаем для определенности $a>0$):

$$-\infty < y < +\infty, \; \ldots, -\infty < z < +\infty,$$
$$\frac{-by - \ldots - cz - d}{a} < x < +\infty.$$

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим неравенство с двумя неизвестными

$$Ax + By + C > 0 \quad (\text{или} < 0).$$

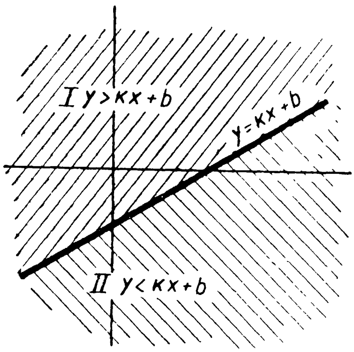
Решив относительно y, получим неравенство, эквивалентное данному $\left(\text{полагаем } k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}\right)$:

$$y > kx + b \quad (\text{при } B > 0) \qquad \text{(I)}$$

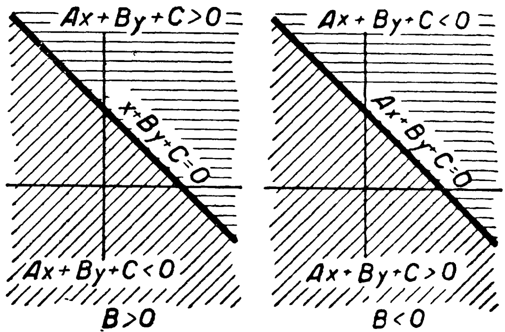
или

$$y < kx + b \quad (\text{при } B < 0). \qquad \text{(II)}$$

Прямая $y=kx+b$ разбивает координатную плоскость на две полуплоскости I и II, расположенные соответственно выше и ниже данной прямой (черт. 83). Неравенству (I) удовлетворяют все точки, расположенные в полуплоскости I, т. е. выше пря-



Черт. 83



Черт. 84

мой $y=kx+b$. Неравенству (II) удовлетворяют все точки, расположенные в полуплоскости II, т. е. ниже прямой $y=kx+b$. Прямая

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

делит координатную плоскость на две полуплоскости, в одной из них выполняется неравенство

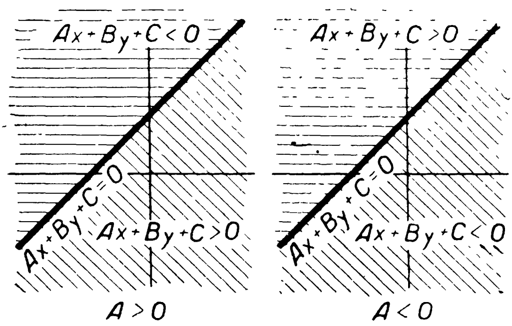
$$Ax + By + C > 0, \qquad (1)$$

а в другой

$$Ax + By + C < 0. \qquad (2)$$

Если $B>0$ или ($B<0$), то неравенство (1) выполняется в верхней (нижней) полуплоскости относительно прямой (1), а неравенство (2) в нижней (верхней) полуплоскости (черт. 84).

Аналогично покажем, что если $A>0$ (или $A<0$), неравенство (1) выполняется в правой (левой) полуплоскости относительно прямой (1) и неравенство (2) в левой (правой) полуплоскости (черт. 85).



Черт. 85

Аналогичное толкование имеет множество всех решений линейного неравенства с тремя неизвестными, неравенству

$$z>ax+by+c \quad (\text{или } z<ax+by+c)$$

удовлетворяют точки пространства, расположенные выше (ниже) плоскости $z=ax+by+c$.

Пример

Неравенство	Множество решений	
$2x+y+1>0$	полуплоскость	верхняя (правая) относительно $2x+y+1=0$
$3x-2y+3>0$	— — — — — — — —	нижняя (правая) относительно $3x-2y+3=0$
$x-y-1<0$	— — — — — — — —	верхняя (левая) (относительно) $x-y-1=0$
$-2x-y-3<3$	— — — — — — — —	верхняя (правая) относительно $2x+y+6=0$

§ 76. Системы линейных неравенств

Рассмотрим систему линейных неравенств с одним неизвестным:

$$a_1x+b_1>0, \quad a_2x+b_2<0, \quad . \ . \ ., \quad a_nx+b_n>0^*.$$

* Какой из знаков < или > фигурирует в каждом из этих неравенств, несущественно.

Множество всех решений каждого из этих неравенств, взятого в отдельности, есть бесконечный интервал вида $(-\infty, \alpha)$ или $(\alpha, +\infty)$. Всего получится (по числу неравенств) n интервалов (некоторые из них могут совпадать). Множество решений системы есть общая часть всех полученных интервалов. Если это множество пустое (интервалы не имеют общей части), то система неравенств противоречива. Если это множество не пустое, то общей частью интервалов является некоторый интервал; произвольное число x, принадлежащее этому интервалу, является решением системы.

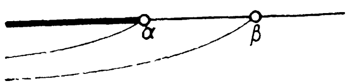
Рассмотрим систему двух неравенств с одним неизвестным. Решив каждое неравенство в отдельности, можно заменить данную систему системой простейших неравенств. В зависимости от коэффициентов могут получиться либо два неравенства одинакового смысла:

$$1^\circ.\ \left.\begin{matrix} x<\alpha \\ x<\beta \end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad 2^\circ.\ \left.\begin{matrix} x>\alpha \\ x>\beta \end{matrix}\right\},$$

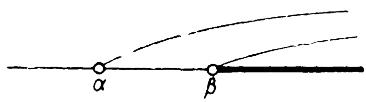
либо неравенства противоположного смысла

$$3^\circ.\ \left.\begin{matrix} x>\alpha \\ x<\beta \end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad 4^\circ.\ \left.\begin{matrix} x<\alpha \\ x>\beta \end{matrix}\right\}.$$

Предположим, что $\alpha \neq \beta$, пусть для определенности $\alpha<\beta$. Тогда в случае 1° обоим неравенствам удовлетворяет любое число x, меньшее α. Интервал $(-\infty, \alpha)$ есть общая часть двух интервалов $(-\infty, \alpha)$ и $(-\infty, \beta)$ (черт. 86). Аналогично в случае 2° получим $x>\beta$, т. е. интервал $(\beta, +\infty)$ (черт. 87). В слу-

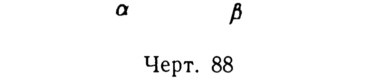


Черт. 86

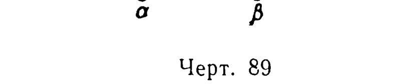


Черт. 87

чае 3° обоим неравенствам удовлетворяет любое число, содержащееся между α и β, т. е. $\alpha<x<\beta$. Интервал (α, β) является общей частью двух бесконечных интервалов $(\alpha, +\infty)$ и $(-\infty, \beta)$ (черт. 88). В случае 4° система не имеет решений, так как не существует ни одного числа большего, чем β, но меньшего, чем α. В данном случае интервалы $(-\infty, \alpha)$ и $(\beta, +\infty)$ не имеют общих точек (черт. 89).



Черт. 88



Черт. 89

Неравенство

$$|ax+b|<k, \text{ где } k>0,$$

эквивалентно следующей системе линейных неравенств

$$-k<ax+b<k \text{ или } -k-b<ax<k-b,$$

откуда

$$-\frac{k+b}{a}<x<\frac{k-b}{a} \text{ при } a>0 \text{ и } \frac{k-b}{a}<x<\frac{-k-b}{a} \text{ при } a<0.$$

Примеры

1. Решить систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} 3+x&>4+2x, \\ 5x-3&<4x-1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решим первое неравенство:

$$x-2x>4-3,$$

откуда $x<-1$. Аналогично, решив второе неравенство, получим $x<2$. Итак, должны выполняться следующие два неравенства: $x<-1$ и $x<2$, что будет иметь место, если $x<-1$. Множество всех решений есть интервал $(-\infty, -1)$.

2. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} 3+x&<4+2x, \\ 5x-3&<4x-1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решив данные неравенства, получим соответственно $x>-1$ и $x<2$. Множество всех решений данной системы есть интервал $-1<x<2$.

3. Решить систему:

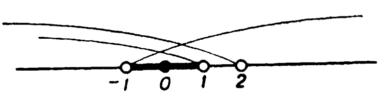
$$\left.\begin{aligned} 3+x&>4+2x, \\ 5x-3&>4x-1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решения первого и второго неравенств соответственно суть интервалы $(-\infty, -1)$ и $(2, +\infty)$, не имеющие общих точек. Система не имеет решений.

4. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} 3+x&<4+2x, \\ 5x-3&<4x-1, \\ 7+2x&>6+3x. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решив каждое из данных неравенств, получим соответственно три интервала $(-1, +\infty)$, $(-\infty, 2)$ и $(-\infty, 1)$. Множество всех решений системы есть общая часть этих интервалов, т. е. интервал $(-1, 1)$ (черт. 90).



Черт. 90

5. Решить неравенство $|3-2x|<1$.

Решение. Неравенство эквивалентно системе

$$-1<3-2x<1$$

$$\text{или } \quad -4<-2x<-2,$$

откуда

$$1<x<2$$

Рассмотрим линейную систему неравенств с двумя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 > 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 > 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_kx + B_ky + C_k > 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{L})$$

(вместо знака $>$ можно взять во всех или в некоторых неравенствах знак противоположного смысла). Каждое неравенство, взятое в отдельности, определяет некоторую полуплоскость. Множество всех решений системы (L) изображается общей частью всех этих полуплоскостей. В частности, это может быть многоугольник или бесконечная область, ограниченная некоторой ломаной линией, или, наконец, пустое множество. В последнем случае полуплоскости, определяемые неравенствами (L), не имеют общей части, система (L) противоречива. Под решением системы неравенств (L) обычно понимают установление неравенств, определяющих элементарные области (см. § 61), из которых составляется многоугольная область, определяемая системой (L).

Рассмотрим систему двух неравенств; предположим сначала, что прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

непараллельны. Допустим, например, что, решив каждое неравенство относительно y, мы получили два неравенства протранзитивности) выполнение условия

$$y < k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y > k_2x + b_2, \text{ где } k_1 \neq k_2.$$

Чтобы при некотором значении x оба последние неравенства могли иметь место, необходимо и достаточно (в силу закона транзитивности) выполнение условия

$$k_2x + b_2 < k_1x + b_1 \quad \text{или} \quad (k_2 - k_1)\,x < b_1 - b_2,$$

откуда

$$x > \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \text{ если } k_1 > k_2 \quad \text{и} \quad x < \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \text{ если } k_1 < k_2.$$

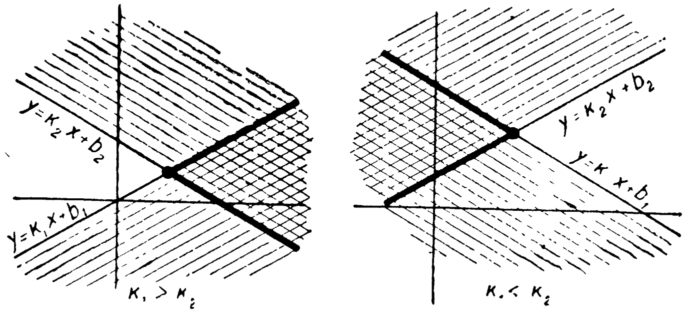
Общее решение системы имеет вид:

$$\frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} < x < +\infty, \ k_2x + b_2 < y < k_1x + b_1, \text{ если } k_1 > k_2$$

и

$$-\infty < x < \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \ k_2x + b_2 < y < k_1x + b_1, \text{ если } k_1 < k_2.$$

Данная система неравенств определяет на плоскости множество точек, лежащих выше прямой $y=k_2x+b_2$, но ниже прямой $y=k_1x+b_1$, т. е. внутренность некоторого угла (черт. 91).



Черт. 91

Допустим, что, решив относительно y каждое неравенство, мы получили два неравенства одинакового смысла, например,

$$y > k_1x + b_1 \text{ и } y > k_2x + b_2.$$

В этом случае при всяком данном значении x значение y должно быть любым числом бо́льшим, чем наибольшее из двух чисел k_1x+b_1 и k_2x+b_2. Выясним, какое из этих двух чисел является бо́льшим. Пусть для определенности $k_1 > k_2$; имеем:

$$k_1x + b_1 \geqslant k_2x + b_2 \quad \text{при} \quad x \geqslant \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$$

и

$$k_1x + b_1 \leqslant k_2x + b_2 \quad \text{при} \quad x \leqslant \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}.$$

Общее решение системы представится в виде:

$$y > \begin{cases} k_1x + b_1, & \text{если} \quad x \geqslant \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \\ k_2x + b_2, & \text{если} \quad x \leqslant \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}. \end{cases}$$

Данная система неравенств определяет множество точек плоскости, лежащих выше каждой из прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ (черт. 92).

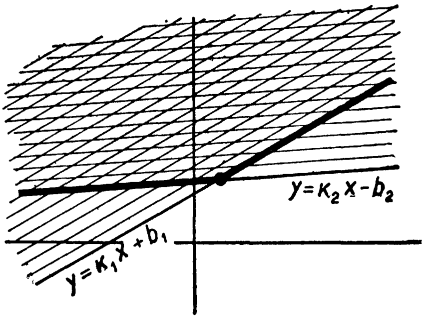
Аналогично можно решать каждое из неравенств относительно неизвестного x.

Этот способ неприменим, если одно из неравенств (например первое) не содержит x, а другое не содержит y. В данном случае, решив первое неравенство относительно x, а второе относительно y, получим, например, такую систему неравенств:

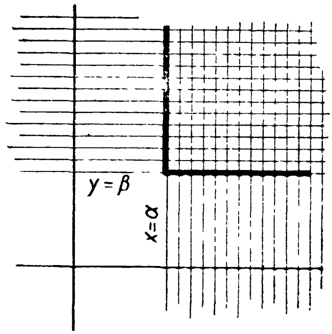
$$x > \alpha, \quad y > \beta$$

(разумеется, могут получиться неравенства со знаками противоположного смысла). Первое неравенство определяет правую полуплоскость относительно прямой $x=\alpha$, а второе верхнюю полуплоскость относительно прямой $y=\beta$. Система этих неравенств определяет внутреннюю область прямого угла:

$$\alpha < x < +\infty, \quad \beta < y < +\infty \text{ (черт. 93).}$$



Черт. 92



Черт. 93

На чертеже 94 пояснены различные случаи, когда прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

параллельны.

В случаях *a*) и *e*) общее решение системы может быть задано неравенством $y>kx+b$,

в случае *b*) неравенством $y < kx + b_1$,

в случае *c*) неравенствами $kx+b_1<y<kx+b$,

в случаях *d*) и *f*) система не имеет решений.

Система трех неравенств с двумя неизвестными может определять на плоскости треугольник, «срезанный угол», угол и т. п. Некоторые из возможных случаев представлены на чертеже 95.

Примеры

1. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} y - x + 1 &> 0, \\ 2x - y - 3 &> 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решив неравенства относительно y, получим:

$$y > x - 1 \quad \text{и} \quad y < 2x - 3.$$

Откуда

$$x - 1 < 2x - 3 \quad \text{и} \quad x > 2;$$

следовательно,

$$2 < x < +\infty, \quad x - 1 < y < 2x - 3 \quad \text{(черт. 96).}$$

Решением системы служит любая пара чисел (x, y), где $x > 2$, а y — любое число большее, чем значение $x - 1$, но меньшее, чем значение $2x - 3$.

Если решать неравенства относительно x, то получим:

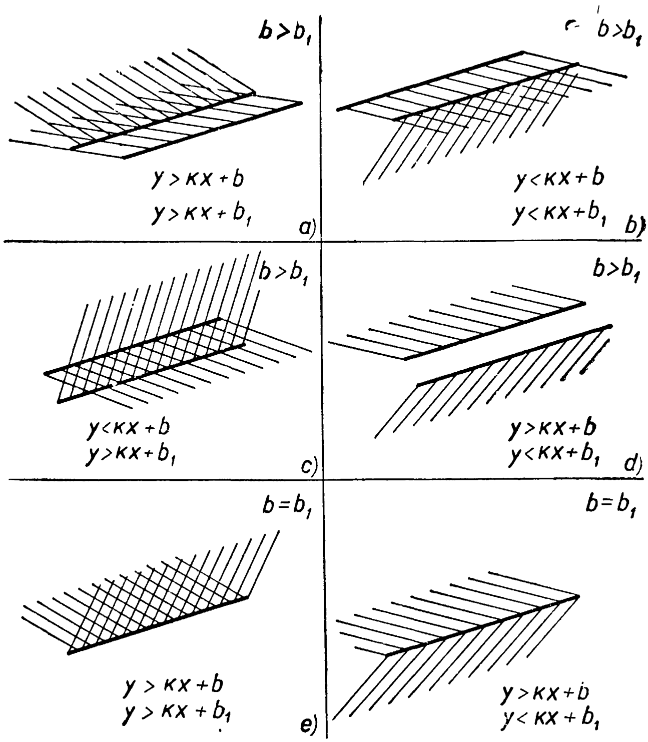
$$x < y + 1 \quad \text{и} \quad x > \frac{y+3}{2},$$

откуда

$$\frac{y+3}{2} < y + 1 \quad \text{и} \quad y > 1,$$

и, следовательно,

$$1 < y < +\infty, \quad \frac{y+3}{2} < x < y + 1.$$



Черт. 94

2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 1 &< 0, \\ 9x - 3y - 2 &< 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решив относительно y, получим:

$$y > 2x + 1 \quad \text{и} \quad y > 3x - \frac{2}{3}.$$

Решение относительно x также приведет к неравенствам **одинакового смысла**. Составим неравенства:

$3x - \frac{2}{3} \geqslant 2x + 1$, откуда $x \geqslant \frac{5}{3}$ и $3x - \frac{2}{3} \leqslant 2x + 1$, откуда $x \leqslant \frac{5}{3}$.

Решение можно представить в следующем виде:

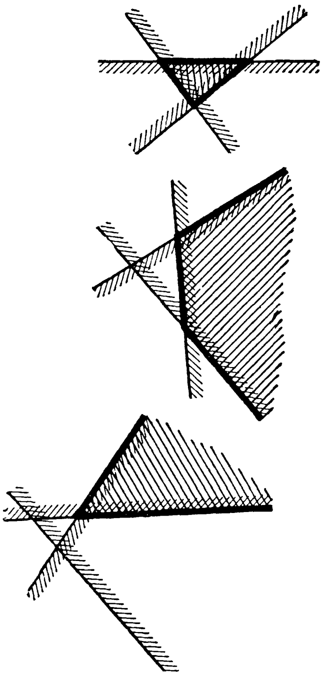
$$y > \begin{cases} 3x - \dfrac{2}{3}, & \text{если } x \geqslant \dfrac{5}{3}, \\ 2x + 1, & \text{если } x \leqslant \dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \text{(черт. 97).}$$

3. Решить систему

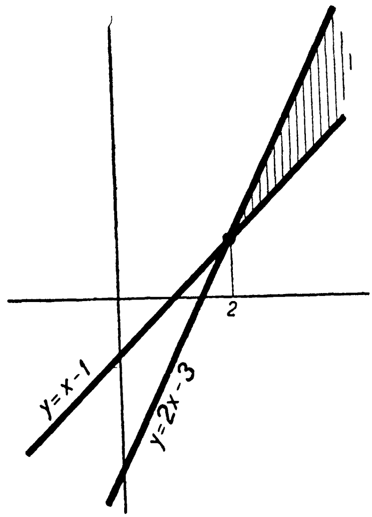
$$2x - 3y + 6 > 0, \quad x - 3 < 0.$$

Решение. Система определяет часть плоскости, лежащую левее прямой $x-3=0$ и ниже прямой $2x-3y+6=0$:

$$-\infty < x < 3, \quad y < \frac{2x+6}{3}.$$



Черт. 95



Черт. 96

Решение можно представить в другом виде, имеем:

$$x < 3 \quad \text{и} \quad x > \frac{3y-6}{2},$$

откуда $\dfrac{3y-6}{2} < 3$ и $y < 4$ и окончательно:

$$-\infty < y < 4, \quad \frac{3y-6}{2} < x < 3.$$

4. Система неравенств

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + 3 > 0, \\ x + y - 1 > 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} y > -x - \frac{3}{2}, \\ y > -x + 1 \end{aligned}\right\}$$

определяет полуплоскость верхнюю относительно прямой $x + y - 1 = 0$

4. Неравенство $|2x-3y+1|<4$ эквивалентно системе неравенств

$$\left.\begin{aligned}-4<2x-3y+1,\\ 2x-3y+1<4,\end{aligned}\right\}\quad\text{или}\quad\left.\begin{aligned}2x-3y+5>0,\\ 2x-3y-3<0.\end{aligned}\right\}$$

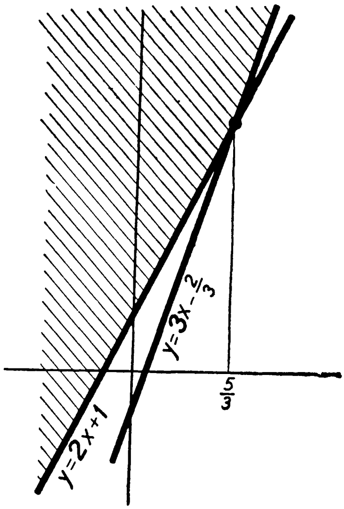
Неравенство определяет на плоскости полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми (черт. 98):

$$-\infty<x<\infty,\quad \frac{2}{3}\cdot x-1<y<\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

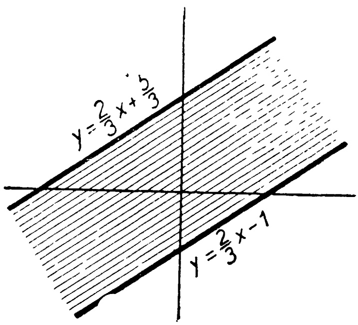
5. Решить систему трех неравенств:

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x-2y+1<0,\\ &(2)\quad 2x-y-1<0,\\ &(3)\quad x-y+1>0.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Обозначим левые части неравенств через L_1, L_2, L_3 соответ-



Черт. 97



Черт. 98

ственно. Геометрически система определяет множество точек, лежащих выше каждой из прямых $L_1=0$, $L_2=0$, но ниже прямой $L_3=0$. Решив систему неравенств (1) и (2), получим:

$$y>\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 2x-1, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Решив третье неравенство (3) относительно y, получим:

$$y<x+1.$$

Для нахождения решений системы (L) решаем совокупность следующих двух систем неравенств

$$\text{a)}\quad y>\frac{x+1}{2},\quad y<x+1,\quad x\leqslant 1,$$

$$\text{b)}\quad y>2x-1,\quad y<x+1,\quad x\geqslant 1$$

Из первых двух неравенств системы а) получим:

$$\frac{x+1}{2}<x+1,\quad\text{откуда } x>-1.$$

Следовательно, система неравенств а) определяет треугольник:

$$\frac{x+1}{2} < y < x+1, \quad -1 < x \leqslant 1. \tag{1}$$

Таким же образом решим систему b):

$$2x-1 < x+1, \quad \text{откуда } x < 2.$$

Следовательно, получим треугольник:

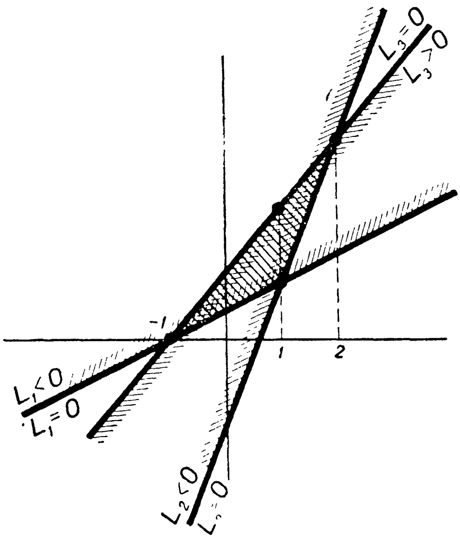
$$2x-1 < y < x+1, \quad 1 \leqslant x < 2 \tag{2}$$

Решение системы (L) дает две элементарные области (1) и (2), составляющие вместе внутренность треугольника, изображенного на чертеже 99.

На чертеже 100 изображены различные области, на которые делят плоскость прямые $L_1=0$, $L_2=0$ и $L_3=0$. В каждой из этих областей указаны соответствующие неравенства. Из геометрической интерпретации следует, например, что система

$$L_1 > 0, \quad L_2 > 0, \quad L_3 < 0$$

не имеет решений (предлагаем проверить это алгебраически).



Черт. 99

Аналогично можно рассматривать системы неравенств с тремя неизвестными. Каждое неравенство вида $Ax+By+Cz+D \gtrless 0$ определяет одно из двух полупространств, на которые плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ разбивает все пространство. Система неравенств определяет общую часть полупространств, определенных каждым неравенством в отдельности.

Пример

Рассмотрим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} 4x-y-z+1>0, \\ x-y+z+2>0. \end{aligned}\right\}$$

Решив относительно z каждое из неравенств, получим:

$$\left.\begin{aligned} z < 4x-y+1, \\ z > -x+y-2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Неравенства могут выполняться совместно при условии:

$$-x+y-2 < 4x-y+1,$$

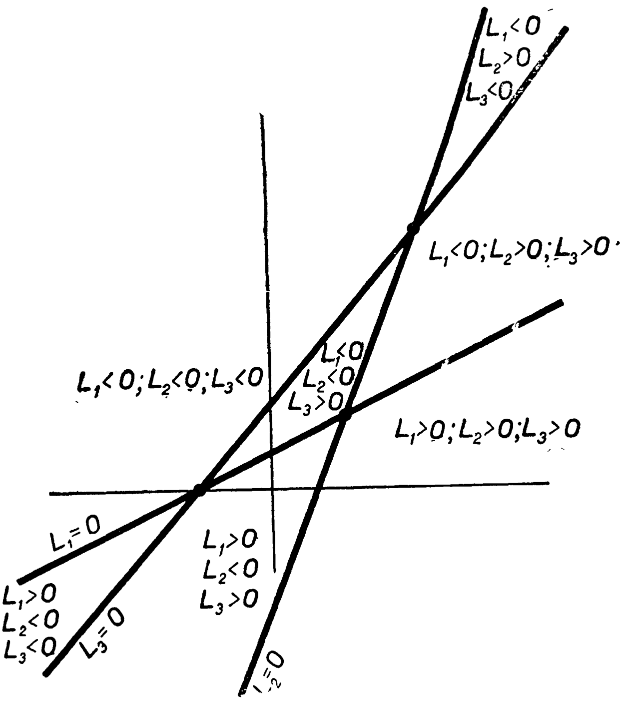
откуда

$$y < \frac{5}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < \frac{5}{2}x + \frac{3}{2},\ -x + y - 2 < z < 4x - y + 1.$$

Геометрическая интерпретация. Система (1) определяет множество точек пространства, расположенных ниже плоскости $z = 4x - y + 1$ и выше плоскости $z = -x + y - 2$. Это есть множество точек внутренних относительно некоторого двугранного угла. Прямая $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ есть проек-



Черт. 100

ция на плоскость XOY ребра двугранного угла. Полуплоскость $y < \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ есть проекция на XOY рассматриваемого двугранного угла.

2. Видоизменим предыдущий пример следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} 4x - y - z + 1 < 0, \\ x - y + z + 2 > 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$z > 4x - y + 1 \quad \text{и} \quad z > -x + y - 2.$$

Выясним, которое из выражений в правых частях последних неравенств является большим. Неравенство

$$4x - y + 1 \geqslant -x + y - 2$$

имеет место, если

$$y \leqslant \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Неравенство

$$4x - y + 1 \leqslant -x + y - 2$$

имеет место, если

$$y \geqslant \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$z > 4x - y + 1, \quad \text{если} \quad y \leqslant \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

и

$$z > -x + y - 2, \quad \text{если} \quad y \geqslant \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Итак, имеем две элементарные области:

$$-\infty < x < +\infty; \quad -\infty < y \leqslant \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}; \quad 4x - y + 1 < z < +\infty$$

и

$$-\infty < x < +\infty; \quad \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \leqslant y < +\infty; \quad -x + y - 2 < z < +\infty.$$

Геометрическая интерпретация. Система определяет двугранный угол, внутренние точки которого лежат выше каждой из плоскостей

$$z = 4x - y + 1 \quad \text{и} \quad z = -x + y - 2.$$

§ 77. Смешанные системы

Распространенным видом смешанных систем являются уравнения, содержащие параметры, заданные при дополнительных условиях, выраженных посредством неравенств, содержащих неизвестные. К такого рода смешанным системам приводятся многие текстовые задачи. В данном случае обычно поступают так: находят общее решение уравнения (или системы уравнений), выразив неизвестные через параметры, а затем составляют соответствующие неравенства относительно параметров.

Примеры

1. Найти положительные решения уравнения

$$5kx - 9 = 10x - 3k.$$

Решение. Требуется решить смешанную систему

$$5kx - 9 = 10x - 3k, \quad x > 0.$$

Решим уравнение

$$x = \frac{3(3-k)}{5(k-2)}, \quad \text{где} \quad k \neq 2,$$

при $k = 2$ уравнение не имеет решений.

Неравенство $x>0$ выполняется, если $2<k<3$ (числитель и знаменатель положительны), либо, если $k>3$ и $k<2$ (числитель и знаменатель отрицательны) последняя система неравенств противоречива.

Итак,

$$x=\frac{3(3-k)}{5(k-2)}, \quad \text{где} \quad 2<k<3.$$

2. Найти решения уравнения

$$3(x+1)=4+ax,$$

бо́льшие -1.

Решение. Решаем смешанную систему:

$$(3-a)x=1, \quad x>-1.$$

Решим уравнение $x=\frac{1}{3-a}$, где $a\neq 3$. При $a=3$ уравнение противоречиво.

Решим неравенство

$$\frac{1}{3-a}>-1, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{3-a}+1=\frac{4-a}{3-a}>0.$$

Последнее имеет место, если (числитель и знаменатель отрицательны)

$$a>4 \quad \text{и} \quad a>3, \quad \text{т. е. при} \quad a>4,$$

или (числитель и знаменатель положительны)

$$a<4 \quad \text{и} \quad a<3, \quad \text{т. е. при} \quad a<3.$$

Итак: $x=\frac{1}{3-a}$, где $a<3$, либо $a>4$.

3. Найти решения системы

$$\left.\begin{aligned} 3x-y&=k,\\ 6x-ky&=4 \end{aligned}\right\}$$

при условиях $x<0$, $y>0$.

Решение. 1°. Система имеет единственное решение при $k\neq 2$,

$$x=\frac{k+2}{3}, \quad y=2,$$

неравенство $x<0$ выполняется, если $k<-2$. Неравенство $y>0$ удовлетворяется тождественно.

2°. $k=2$. Система содержит одно независимое уравнение:

$$3x-y=2, \quad \text{откуда} \quad y=3x-2,$$

где x — произвольное число. Согласно условиям $x<0$ и $3x-2>0$, откуда найдем $x<0$ и $x>\frac{3}{2}$, что невозможно.

Итак,

$$x=\frac{k+2}{3}, \quad y=2, \quad \text{где} \quad k<-2.$$

Решим ту же систему при условиях $x>0$, $y<0$. Если $k\neq 2$, то $y=2$, следовательно, условие $y<0$ не выполняется.

При $k=2$ имеем условия $x>0$ и $3x-2<0$, откуда найдем, $0<x<\frac{2}{3}$.

Итак,

$$y = 3x - 2, \quad 0 < x < \frac{2}{3}, \quad k = 2 \qquad \text{(черт. 101).}$$

На нижеследующих примерах показано решение линейных смешанных систем с двумя неизвестными.

4. Решить систему

$$2x - y + 1 = 0, \quad x + y + 2 > 0.$$

Решение. Общее решение уравнения дается формулой

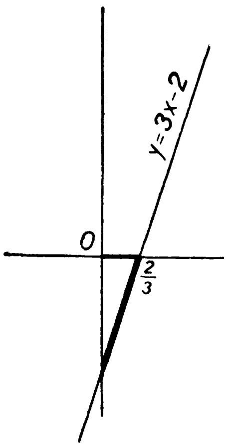
$$y = 2x + 1.$$

Подставим в неравенство:

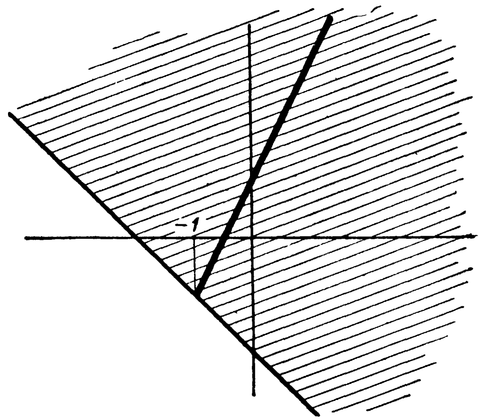
$$x + y + 2 = x + (2x + 1) + 2 = 3x + 3 > 0, \quad \text{откуда} \quad x > -1.$$

Следовательно,

$$y = 2x + 1, \quad \text{где} \quad x > -1.$$



Черт. 101



Черт. 102

Геометрическая интерпретация. Множество решений смешанной системы изображается частью прямой линии $2x - y + 1 = 0$, лежащей в полуплоскости $x + y + 2 > 0$, это есть луч (черт. 102).

5. Решить систему:

$$x - y + 1 = 0, \quad 2x - y + 2 > 0, \quad x - 2y + 4 > 0.$$

Решение. Общее решение уравнения есть

$$y = x + 1$$

подставим в первое неравенство

$$2x - (x + 1) + 2 = x + 1 > 0, \quad \text{откуда} \quad x > -1,$$

а затем во второе

$$x - 2(x + 1) + 4 = -x + 2 > 0, \quad \text{откуда} \quad x < 2.$$

Следовательно,

$$y = x + 1, \quad \text{где} -1 < x < 2.$$

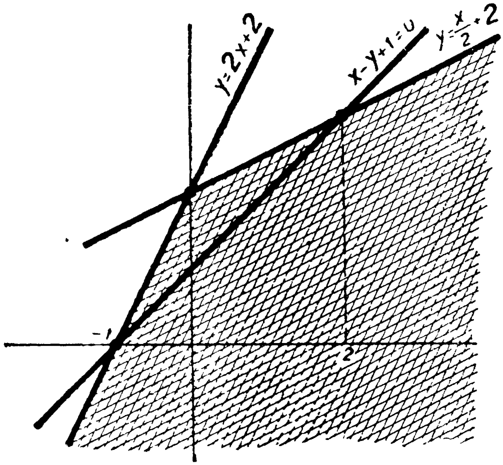
Геометрическая интерпретация. Множество решений смешанной системы изображается отрезком прямой, содержащимся внутри угла, определяемого двумя данными неравенствами (черт. 103).

§ 78. Примеры решения и исследования текстовых задач на составление уравнений и неравенств

Ниже рассмотрены примеры решения задач посредством составления линейных уравнений и неравенств. Общие указания относительно решения и исследования текстовых задач изложены в § 65.

Примеры

1. *Найти стоимость 1 кг товара, если известно, что уменьшив стоимость k кг товара на 5 руб., получим стоимость n кг товара, увеличенную на 2 руб.*



Черт. 103

Решение. Пусть x — стоимость 1 *кг* товара, тогда kx — стоимость k *кг*, nx — стоимость n *кг*. По условию $kx - 5 = nx + 2$ или

$$(k-n)\,x = 7, \quad \text{где} \quad x > 0. \quad (1)$$

Допустимые значения параметров и определяются из условий

$$k > 0, \quad n > 0.$$

Решим смешанную систему (1). Решаем уравнение

$$1^\circ.\ x = \frac{7}{k-n} \quad \text{при} \quad k \neq n.$$

2°. При $k = n$ уравнение не имеет решений.

В случае 1° неравенство $x > 0$ выполняется при $k > n$. Если $k < n$, то уравнение имеет отрицательное решение, не соответствующее смыслу задачи.

Итак, имеем: $x = \dfrac{7}{k-n}$ при $k > n$; при $k < n$ задача не имеет решения.

В случае 2° k и n *кг* товара имеют одинаковую стоимость и условие задачи противоречиво.

2. *Кусок сплава из двух металлов имеет удельный вес d. Удельный вес первого металла равен d_1, а второго d_2. Сколько граммов надо взять того и другого металла, чтобы кусок сплава весил a кг?*

Решение. Пусть x — вес первого металла в сплаве, y — вес второго металла; по условию

$$x + y = a.$$

Объем куска сплава равен сумме объемов содержащихся в нем металлов; имеем: $\dfrac{x}{d_1}$ — объем первого металла, $\dfrac{y}{d_2}$ — объем второго металла, $\dfrac{a}{d}$ — объем сплава. Следовательно,

$$\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2} = \frac{a}{d},$$

приняв во внимание, что $x > 0$, $y > 0$,
получим смешанную систему:

$$\left.\begin{aligned} dd_2x + dd_1y &= ad_1d_2, \\ x + y &= a, \qquad x > 0, \quad y > 0. \end{aligned}\right\}$$

Все параметры положительны.

Решив систему уравнений, получим:

1°. если $d_2 \neq d_1$, то

$$x = \frac{ad_1(d_2 - d)}{d(d_2 - d_1)}; \qquad y = \frac{ad_2(d - d_1)}{d(d_2 - d_1)}.$$

2°. Система не имеет решений, если $d_1 = d_2 \neq d$.

3°. Система имеет бесконечное множество решений, если $d_1 = d_2 = d$,

$$y = a - x \quad (x \text{ — любое число}).$$

В случае 1° положим для определенности $0 < d_1 < d_2$. Неравенства выполняются, если $d_1 < d < d_2$, и задача имеет единственное решение.

Если, например, $d_1 < d_2 < d$, то $x < 0$; задача не имеет решений, так как нельзя составить сплава с удельным весом большим, чем d_2.

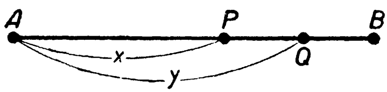
В случае 2° оба металла имеют одинаковый удельный вес d_1 и нельзя составить сплава с удельным весом $d \neq d_1$.

В случае 3° существует бесконечное множество решений, удовлетворяющих неравенствам $x > 0$, $y > 0$, т. е. $x > 0$, $a - x > 0$, откуда $y = a - x$, где x — произвольное число интервала $0 < x < a$. В этом случае, в силу равенства удельных весов, не существенно, какие количества металлов взяты.

3. *Из пункта P дороги, соединяющей города A и B, выходят одновременно пешеход M в направлении к A, пешеход N в направлении к B и поезд в направлении к B. Поезд приходит в B, стоит там n мин, а затем отправляется в A. По пути в A поезд встречает N, который садится на поезд и прибывает в A одновременно с M. Определить положение пункта P и пункта Q встречи поезда с N, если скорость пешеходов v км в час, скорость поезда V км в час, расстояние от A до B d км.*

Решение Пусть (черт. 104) $AP = x$, $AQ = y$, где Q точка встречи поезда с N. Время (в часах), которое M шел из P в A, равно $\frac{x}{v}$; в течение того же времени N шел из P в Q $\frac{y-x}{x}$ часов и ехал на поезде $\frac{y}{V}$ часов, следовательно:

$$\frac{x}{v} = \frac{y - x}{v} + \frac{y}{V}. \tag{1}$$



Черт. 104

За время $\frac{y-x}{v}$, в течение которого N шел из P в Q, поезд прошел из P в B $\frac{d-x}{V}$ часов, стоял в B $\frac{n}{60}$ *час* шел из B в Q $\frac{d-y}{V}$ *час*, следовательно:

$$\frac{y - x}{v} = \frac{d - x}{V} + \frac{n}{60} + \frac{d - y}{V}. \tag{2}$$

По смыслу задачи допустимые значения параметров удовлетворяют условиям $0 < v < V$, $n > 0$.

Неизвестные должны удовлетворять неравенствам $0 < x < y < d$.

Итак, требуется решить смешанную систему

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x}{v}=\dfrac{y-x}{v}+\dfrac{y}{V}; \qquad \dfrac{y-x}{v}=\dfrac{d-x}{V}+\dfrac{n}{60}+\dfrac{d-y}{V}, \\ 0<x<y<d.\end{array}\right\}$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение:

$$\frac{x}{v}=\frac{d-x}{V}+\frac{n}{60}+\frac{d}{V}, \text{ откуда } x=\frac{v}{V+v}\left(2d+\frac{nV}{60}\right),$$

из (1) получим:

$$y=\frac{2vV}{(v+V)^2}\left(\frac{nV}{60}+2d\right) \qquad (\text{так как } v+V\neq 0).$$

Неравенства $0<x<y$ выполняются всегда, так как $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2V}{v+V}>1$ при $0<v<V$. Неравенство $y<d$ принимает вид:

$$\frac{2vV}{(v+V)^2}\left(\frac{nV}{60}+2d\right)<d,$$

откуда

$$n<\frac{60d(V-v)^2}{2vV}.$$

Последнее условие ограничивает стоянку поезда в пункте B, если оно не соблюдается, то N прибудет в B раньше, чем из B выйдет поезд и задача (в данной постановке вопроса) потеряет смысл.

4. *Бассейн может быть наполнен двумя кранами I и II следующим образом: если кран I открыть на t_1 час, а затем, закрыв его, открыть кран II, то для наполнения бассейна кран II должен работать t_2 час. Если в течение T_1 час будут работать оба крана, а затем кран I будет закрыт, то для наполнения бассейна кран II должен работать еще T_2 час. Во сколько часов каждый кран, будучи открыт один, наполнит бассейн?*

Решение. Пусть x и y времена наполнения бассейна кранами I и II в отдельности, тогда $x'=\dfrac{1}{x}$ и $y'=\dfrac{1}{y}$ суть части бассейна, которые наполняются кранами I и II в единицу времени *.

По условию задачи в течение первого опыта:
кран I действовал t_1 *час* и наполнил $x't_1$ часть бассейна;
кран II действовал t_2 *час* и наполнил $y't_2$ часть бассейна.

В течении второго опыта:
кран I действовал T_1 *час* и наполнил T_1x' часть бассейна;
кран II действовал T_1+T_2 *час* и наполнил $(T_1+T_2)y'$ часть бассейна.

По смыслу задачи $x>0$, $y>0$, а следовательно, и $x'>0$, $y'>0$.

Так как в течение первого, а также и в течение второго опыта был наполнен весь бассейн, то получим следующую смешанную систему:

$$\left.\begin{array}{l}x't_1+y't_2=1, \\ x'T_1+y'(T_1+T_2)=1, \quad x'>0, \quad y'>0,\end{array}\right\}$$

где параметры t_1, t_2, T_1 и T_2 положительны.

Решим систему уравнений.

---

* Здесь слово «часть» понимается в широком смысле, так, если $x=\dfrac{1}{2}$, то $x'=2$, т. е. в 1 *час* может быть наполнен бассейн по объему вдвое больший данного.

Случай 1°. Если $t_1(T_1+T_2)-T_1t_2 \neq 0$, то

$$x' = \frac{T_1+T_2-t_2}{t_1(T_1+T_2)-T_1t_2}, \qquad y' = \frac{T_1-t_1}{T_1t_2-t_1(T_1+T_2)}.$$

Неравенства $x'>0$, $y'>0$ выполняются, если

$$\left.\begin{matrix} T_1+T_2>t_2 \\ t_1>T_1, \end{matrix}\right\} \text{(A)}, \qquad \text{либо} \qquad \left.\begin{matrix} T_1+T_2<t_2 \\ t_1<T_1 \end{matrix}\right\} \text{(B)}$$

В случае (А) числитель и знаменатель в выражении для x' положительны, а в выражении для y' отрицательны. В случае (В) знаки распределяются противоположным образом. Если не выполняется ни одна из систем неравенств (А) и (В), то условие задачи противоречиво. Так, например, при $T_1+T_2>t_2$ и $T_1>t_1$ выходит, что для наполнения одного и того же бассейна в течение второго опыта каждый из кранов действовал большее время, чем в течение первого опыта (прочие возможные случаи невыполнения совокупности неравенств (A) и (B), например, $T_1+T_2<t_2$, $t_1>T_1$, $T_1+T_2=t_2$, $t_1\neq T_1$ и т. д. рекомендуем истолковать учащимся).

Итак, в случае 1° и при выполнении неравенств (А) или (В) задача имеет единственное решение:

$$x=\frac{1}{x'}=\frac{t_1(T_1+T_2)-T_1t_2}{T_1+T_2-t_2}; \qquad y=\frac{1}{y'}=\frac{T_1t_2-t_1(T_1+T_2)}{T_1-t_1}.$$

Случай 2°. Если

$$\frac{T_1}{t_1}=\frac{T_1+T_2}{t_2}\neq 1,$$

то система не имеет решений. Так, например, если коэффициент пропорциональности больше 1, то $T_1>t_1$, $T_1+T_2>t_2$, и, как показано в предыдущем случае, условие задачи противоречиво.

Случай 3°. Если

$$\frac{T_1}{t_1}=\frac{T_1+T_2}{t_2}=1,$$

то система уравнений имеет бесконечное множество решений. В самом деле, в течение первого и второго опытов каждый кран действовал одинаковое время, т. е. второй опыт по существу не отличается от первого, этих данных недостаточно для решения задачи.

5. *Даны две стороны* a и b *треугольника ABC, сумма высот* h_a *и* h_b *опущенных на эти стороны, равна третьей стороне* h_c. *Вычислить третью сторону.*

Решение. Обозначим $x=c$, по условию задачи

$$h_a+h_b=h_c. \tag{1}$$

Произведение стороны треугольника на высоту, опущенную на эту сторону, равно удвоенной площади треугольника, поэтому имеем; $h_a a = h_b b = h_c x$. Откуда найдем:

$$h_a=\frac{h_c x}{a}, \qquad h_b=\frac{h_c x}{b}.$$

Подставив в равенство (1), получим уравнение:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1 \text{ или } \quad bx+ax=ab.$$

Обозначим для определенности через a бо́льшую из двух сторон a и b. Так как в треугольнике всякая сторона меньше суммы, но больше разности двух других сторон, то имеем:

$$a-b<x<a+b$$

Решение задачи приводится к решению смешанной системы:

$$\left.\begin{array}{l} bx+ax=ab, \\ a-b<x<a+b, \ x>0, \\ \qquad\qquad (\text{где } a>0, b>0). \end{array}\right\}$$

Решив уравнение, получим:

$$x=\frac{ab}{a+b}>0.$$

Подставив в x систему неравенств, получим:

$$a-b<\frac{ab}{a+b}<a+b \quad \text{или} \quad a^2-b^2<ab<(a+b)^2.$$

Неравенство $ab<(a+b)^2$ выполняется тождественно, поэтому достаточно выполнения следующего неравенства:

$$a^2-b^2<ab \quad \text{или} \quad a^2-ab-b^2<0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{5}{4}b^2=\left(a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}b\right)\left(a-\frac{\sqrt{5}+1}{2}b\right).$$

Заметим, что при $a>0$ и $b>0$ первый множитель положителен, поэтому неравенство эквивалентно следующему линейному неравенству:

$$a-\frac{\sqrt{5}-1}{2}b<0, \text{ откуда } a<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b.$$

Итак,

$$x=\frac{ab}{a+b}, \text{ где } 0<b<a<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b.$$

6. *Какими способами можно выдать* 78 *руб., имея лишь* 5-*рублевые и* 3-*рублевые денежные знаки.*

Решение. Пусть x и y искомые количества 5-рублевых и 3-рублевых дензнаков, имеем:

$$5x+3y=78;$$

требуется решить это уравнение при дополнительных условиях x и y — суть целые неотрицательные числа.

Решим данное уравнение в целых числах. Испытание показывает, что $x=0$, $y=26$ есть решение уравнения, следовательно (стр. 284), его общее решение запишется в виде:

$$x=3t, \quad y=26-5t.$$

Чтобы решить уравнение в целых неотрицательных числах, надо присоединить неравенства:

$$x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0 \quad \text{или} \quad 3t\geqslant 0, \quad 26-5t\geqslant 0,$$

откуда $0\leqslant t\leqslant\frac{26}{5}$. Существует 6 целых значений t, удовлетворяющих этим неравенствам:

$$t_1=0, \quad t_2=1, \quad t_3=2, \quad t_4=3, \quad t_5=4, \quad t_6=5,$$

откуда найдем 6 решений:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 26; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 21; \quad x_3 = 6, \quad y_3 = 16;$$
$$x_4 = 9, \quad y_4 = 11; \quad x_5 = 12, \quad y_5 = 6; \quad x_6 = 15, \quad y_6 = 1.$$

7. *Зубчатое колесо I с a зубцами вращает колесо II с b зубцами. Вначале первый зубец колеса I зацепляет последний зубец второго. Сколько оборотов должно сделать первое колесо, чтобы зацепить первым зубцом k-й зубец второго* (черт. 105)?

Решение. Если колесо I обернулось x раз, то через начальное положение O пройдут ax его зубцов (каждый зубец считается столько раз, сколько он проходит через O). Столько же зубцов колеса II пройдут через O. Если за это время колесо II сделало y полных оборотов и первый зубец зацепил k-й зубец второго, то

$$ax = by + k \quad \text{или} \quad ax - by = k. \tag{1}$$

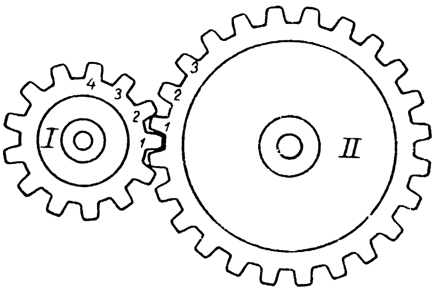
Получилось неопределенное уравнение, исследование которого было проведено в § 73. Это уравнение надо решить при условиях $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Пусть, например:

$$a = 84, \quad b = 222, \quad k = 18.$$

Уравнение (1) примет вид: $84x - 222y = 18$ или $14x - 37y = 3$.

Решив последнее уравнение целых чисел, получим:

$$x = 24 + 37t, \quad y = 9 + 14t.$$



Черт. 105

Из условия $x > 0$, $y > 0$ найдем $t \geqslant 0$. Следовательно, после двадцати четырех оборотов колеса I первый его зубец впервые зацепит 18-й и зубец колеса II. Далее 18-й зубец колеса II первый зубец будет зацеплять каждый раз после 37 оборотов I. Положим $k = 5$, оставив без изменения все прочие данные, тогда получим уравнение:

$$84x - 222y = 5.$$

Это уравнение не имеет решений в целых числах, следовательно, 1-й зубец колеса I никогда не зацепляет 5-го зубца колеса II.

8 *Надо купить* 20 *м ткани двух сортов. Метр ткани первого сорта стоит* 15 *руб., а метр второго сорта* 12 *руб. Сколько метров ткани того и другого сорта следует купить, чтобы стоимость всей покупки не превышала* 276 *руб?*

Решение. Если куплено x *м* ткани первого сорта и y *м* ткани второго сорта, то стоимость всей покупки равна $15x + 12y$. Согласно условию задачи требуется решить смешанную систему:

$$\left.\begin{aligned} 15x + 12y &\leqslant 276, \\ x + y &= 20, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{aligned}\right\}$$

Из уравнения найдем:

$$y = 20 - x \tag{1}$$

и, подставив в первое неравенство, получим:

$$15x + 240 - 12x \leqslant 276,$$

откуда

$$x \leqslant 12,$$

следовательно,

$$0 < x \leqslant 12, \quad y = 20 - x.$$

В частности, при $x = 12$, $y = 8$ стоимость покупки составит в точности 276 руб. При $x = 10$, $y = 10$ стоимость покупки будет $15 \cdot 10 + 12 \cdot 10 = 270$ руб. < 276 руб. и т. д. *.

9. *Газ в количестве* a $м^3$ *последовательно пропускают через* n *фильтров, каждый из которых поглощает* $p\%$ *объема примесей, содержащихся в газе. Затем газ поступает в резервуар, в котором находится* b $м^3$ *газа, содержащего* $q\%$ *примесей. Какой процент примесей допустим в газе до очистки, если количество примеси в газе, собравшемся в резервуаре, не должно превышать* $r\%$?

Решение. Пусть x — искомый процент, тогда газ, не прошедший через фильтры, содержит $\frac{ax}{100}$ примесей и $a - \frac{ax}{100} = a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ чистого газа. При прохождении через фильтры количество чистого газа не меняется, а количество примесей меняется следующим образом: первый фильтр поглотит $\frac{p}{100}$ бывшего первоначально объема примесей, таким образом будет поглощено $\frac{ax}{100} \cdot \frac{p}{100}$, а останется

$$\frac{ax}{100} - \frac{ax}{100}\frac{p}{100} = \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ примесей.}$$

Второй фильтр поглотит $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}$ $м^3$ и останется $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$ $м^3$ примеси и т. д. После прохождения через последний n-й фильтр остается $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ примесей. В резервуаре (куда поступает газ) первоначально содержится $\frac{bq}{100}$ примесей, а по окончании опыта в резервуаре окажется

$$\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{bq}{100} \ м^3 \text{ примесей.}$$

После окончания опыта общий объем газа в резервуаре составится из первоначального объема плюс объем чистого газа и примесей, прошедших через фильтры:

$$b + a\left(1 - \frac{x}{100}\right) + \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

По условию задачи имеем неравенство:

$$\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{bq}{100} \leqslant \frac{r}{100}\left[b + a\left(1 - \frac{x}{100}\right) + \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\right].$$

---

* Текст настоящей задачи с соответствующими изменениями взят из школьного задачника. Этот пример показывает, что (при соответствующей переделке условия) задачи на составление уравнений можно предлагать как задачи на составление неравенств.

Это неравенство надо решить при допустимых значениях параметров

$$0 \leqslant p \leqslant 100, \quad 0 \leqslant q \leqslant 100, \quad 0 \leqslant r \leqslant 100,$$

n — натуральное число, и при дополнительном условии $0 \leqslant x < 100$ для неизвестного. Решив неравенство, получим:

$$x \leqslant \frac{r(a+b) - bq}{a\left[\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \left(1 - \frac{r}{100}\right) + \frac{r}{100}\right]}$$

и $0 \leqslant x < 100$. В частности, чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условия $r(a+b) - bq \geqslant 0$, откуда

$$r \geqslant \frac{bq}{a+b}.$$

ГЛАВА VI

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

§ 79. Квадратный трехчлен, выделение полных квадратов

Квадратным трехчленом (над данным числовым полем) называется многочлен второй степени от одного аргумента:

$$ax^2+bx+c,$$

где $a \neq 0$, при $a=0$ этот многочлен не является многочленом второй степени.

При исследовании квадратного трехчлена широко пользуются преобразованием выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

где $\Delta=b^2-4ac$ называется дискриминантом трехчлена.

Преобразование выделения полных квадратов применяется к многочленам второй степени с несколькими аргументами. Если многочлен второй степени содержит член с квадратом некоторого аргумента, например x, то он может быть представлен в виде

$$ax^2+bx+c,$$

где a — число, b — многочлен первой степени, а c — многочлен второй степени относительно прочих аргументов. В правой части тождества

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ есть квадрат многочлена первой степени, а второе слагаемое — многочлен не выше второй степени, не содержащий аргумента x.

Практика выделения полных квадратов для многочленов с несколькими аргументами показана ниже на примерах (в общем виде вопрос рассматривается в высшей алгебре).

Примеры

1. Выделить полные квадраты в многочлене

$$P = 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y + 1.$$

Решение. Данный многочлен не содержит членов с произведением аргументов, поэтому можно дополнить до полных квадратов (отдельно) группу членов, содержащих x, и группу членов, содержащих y:

$$P = 2(x^2 - 2x) - 3(y^2 + 2y) + 1 =$$
$$= [2(x^2 - 2x + 1) - 2] - [3(y^2 + 2y + 1) - 3] + 1 = 2(x - 1)^2 - 3(y + 1)^2 + 2.$$

2. Выделить полные квадраты в многочлене

$$F = 2x^2 + 6xy + y^2 + 2xz - z^2 + 1.$$

Решение. Расположив многочлен по степени x, применим преобразование выделения полного квадрата:

$$F = 2[x^2 + x(3y + z)] + y^2 - z^2 + 1 =$$
$$= 2\left[x^2 + 2x\frac{3y + z}{2} + \left(\frac{3y + z}{2}\right)^2\right] - \frac{(3y + z)^2}{2} + y^2 - z^2 + 1 =$$
$$= 2\left[x + \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right]^2 - \frac{7}{2}y^2 - 3yz - \frac{3}{2}z^2 + 1.$$

Далее рассмотрим многочлен с двумя аргументами

$$F_1 = -\frac{7}{2}y^2 - 3yz - \frac{3}{2}z^2 + 1$$

и снова применим к нему изложенный прием:

$$F_1 = -\frac{7}{2}\left[y^2 + 2\cdot\frac{3}{7}yz\right] - \frac{3}{2}z^2 + 1 =$$
$$= -\frac{7}{2}\left[y^2 + 2y\frac{3}{7}z^2 + \frac{9}{49}z^2\right] + \frac{9}{14}z^2 - \frac{3}{2}z^2 + 1 =$$
$$= -\frac{7}{2}\left(y + \frac{3}{7}z\right)^2 - \frac{6}{7}z^2 + 1,$$

имеем окончательно

$$F = 2\left(x + \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(y + \frac{3}{7}z\right)^2 - \frac{6}{7}z^2 + 1.$$

3. Преобразование выделения полного квадрата непосредственно неприменимо, например, к такому многочлену:

$$F = xy + x,$$

не содержащему квадратов аргументов. В этом случае введем новые аргументы u и v, положив

$$x = u + v, \quad y = u - v,$$

тогда получим

$$F = u^2 - v^2 + u + v = (u^2 + u) - (v^2 - v) =$$
$$= \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x + y + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y - 1}{2}\right)^2,$$

так как

$$u = \frac{x + y}{2}, \qquad v = \frac{x - y}{2}.$$

§ 80. Корни квадратного трехчлена

Корни квадратного трехчлена (согласно общему определению корня многочлена)

$$ax^2 + bx + c \tag{I}$$

суть значения аргумента, при которых значение трехчлена равно нулю, т. е. корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{II}$$

Трехчлен над полем действительных чисел. Рассмотрим квадратный трехчлен над полем действительных чисел, считая a, b, c и допустимые значения для неизвестного действительными числами.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием, чтобы*

1°. *трехчлен* (I) *в поле действительных чисел имел два различные корня,*

2°. *не имел корней,*

3°. *имел двукратный корень*

является соответственное выполнение следующих условий:

$$1°.\ b^2 - 4ac > 0; \quad 2°.\ b^2 - 4ac < 0; \quad 3°.\ b^2 - 4ac = 0.$$

Таким образом, признак, обычно формулируемый в следующем виде:

если дискриминант положителен, то квадратное уравнение имеет два различные действительные корня,

если дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет действительных корней,

если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет двукратный действительный корень,

является необходимым и достаточным признаком перечисленных трех возможных случаев.

Доказательство. Из тождества

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

следует, что корнями трехчлена являются те значения x, при которых

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{1}$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{2}$$

уравнение (2) эквивалентно уравнению (II).

1°. $\Delta > 0$. Из последнего равенства получим:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{3}$$

откуда

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Таким образом, существуют два различные действительные корня трехчлена.

2°. $\Delta < 0$. Равенства (1) и (2) не могут иметь места ни при каком действительном x, ибо ни при каком x квадрат действительного числа $x + \frac{b}{2a}$ не может быть отрицательным. Переход к равенству (3) невозможен, ибо (в поле действительных чисел) при $\Delta < 0$ выражение $\sqrt{\Delta}$ не имеет смысла. Трехчлен не имеет корней в поле действительных чисел.

3°. $\Delta = 0$. В этом случае

$$ax + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2;$$

следовательно, трехчлен имеет двукратный действительный корень

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Перечисленные признаки исчерпывают все возможные, имеющие место и взаимно исключающие друг друга случаи (относительно знака Δ) *, поэтому они (признаки) являются необходимыми и достаточными условиями, ч. т. д.

* Так, например, если оба корня действительны и различны, то $\Delta > 0$, ибо при $\Delta < 0$ уравнение не имело бы действительных корней, а при $\Delta = 0$ был бы двукратный корень.

Примечание. В частности, если коэффициенты трехчлена рациональны, то его корни рациональны, в том и только в том случае, когда $\sqrt{\Delta}$ — рациональное число, т. е. когда дискриминант является точным квадратом рационального числа (см. § 41).

Трехчлен над полем комплексных чисел. Рассмотрим трехчлен (I) с произвольными комплексными коэффициентами, считая для аргумента допустимым произвольные комплексные значения.

Теорема. 1°. *Чтобы квадратный трехчлен в поле комплексных чисел имел два различные корня, необходимо и достаточно выполнение условия* $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

2°. *Чтобы трехчлен имел двукратный корень, необходимо и достаточно выполнение условия* $b^2 - 4ac = 0$.

Доказательство. В поле комплексных чисел уравнение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\Delta}{4a^2}$$

всегда имеет решение, так как в этом поле выполнимо действие извлечения корня. Из (2) найдем:

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}.$$

1°. Если $\Delta \neq 0$, то в поле комплексных чисел радикал имеет два различные значения; трехчлен имеет два различные корня.

2°. Если $\Delta = 0$, то радикал имеет единственное значение, равное нулю; трехчлен имеет двукратный корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Так как 1° и 2° исчерпывают все возможные, имеющие место и взаимно исключающие друг друга случаи, то полученные признаки являются необходимыми и достаточными условиями, ч. т. д.

Обычно формулу корней квадратного уравнения пишут в виде

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (x)$$

Для квадратного уравнения над полем действительных чисел формула применяется при условии в $b^2 - 4ac \geqslant 0$, а радикал подразумевается арифметическим.

Для трехчлена над полем комплексных чисел постановка знаков $\pm$ излишня, так как всякий квадратный комплексный радикал имеет два (в общем случае различные) значения. Однако, в целях единообразия записи, формулу во всех случаях принято писать в виде (x).

Для уравнения с действительными коэффициентами, рассматриваемого над полем комплексных чисел, в случае

$b^2 - 4ac < 0$ формула (x) дает два мнимые сопряженные корня:

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Корни квадратного трехчлена будем обозначать так:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В случае двукратного корня

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Для квадратного трехчлена над полем действительных чисел, имеющего действительные различные корни ($b^2 - 4ac > 0$), то x_1 является **меньшим**, а x_2 **бóльшим** корнем.

Нередко пользуются упрощенными формулами корней. Обозначим коэффициент при x через $2b$, тогда формула (x) примет более простой вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a};$$

в этом случае дискриминантом трехчлена называют выражение $b^2 - ac$.

Для «приведенного» трехчлена $x^2 + px + q$ формула (x) примет вид:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Всякий квадратный трехчлен над полем комплексных чисел разлагается над этим полем на два линейные множителя:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{4}$$

где x_1 и x_2 суть корни трехчлена (см. § 28).

Трехчлен над полем действительных чисел разлагается на линейные множители, если он имеет действительные корни, т. е. если $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Если же $b^2 - 4ac < 0$, то над полем **действительных чисел** трехчлен неразложим (см. § 28). Этот трехчлен в поле комплексных чисел имеет мнимые корни.

Выполнив умножение в правой части тождества (4) и приравняв соответственные коэффициенты (в обеих частях), получим:

$$b = -a(x_1 + x_2), \quad c = ax_1x_2,$$

откуда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

В частности, для приведенного трехчлена x^2+px+q имеем:

$$p=-(x_1+x_2), \quad q=x_1x_2.$$

Эти равенства известны в элементарной алгебре под названием теоремы Виета:

Если x_1 и x_2 *корни квадратного трехчлена* x^2+px+q, *то коэффициент* p *равен сумме корней с обратным знаком, а свободный член* q *равен произведению корней.*

Справедлива и обратная теорема:
если $p=-(x_1+x_2)$ и $q=x_1x_2$, *то числа* x_1 и x_2 *суть корни трехчлена* x^2+px+q. В самом деле, проверим, например, что x_1 есть корень данного трехчлена:

$$x_1^2+px_1+q=x_1^2-(x_1+x_2)x_1+x_1x_2=0, \text{ ч.т.д.}$$

Формулы (4) и (5) можно получить непосредственно из формул корней:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Сложив и перемножив x_1 и x_2, получим формулы (5); заменив в трехчлене коэффициенты b и c их выражениями через корни, получим разложение трехчлена на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=$$
$$=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

В силу теоремы обратной теореме Виета задача нахождения двух чисел x и y по заданным их сумме и произведению $x+y=S$, $xy=P$ приводится к квадратному уравнению. Именно искомые числа x и y суть корни квадратного уравнения

$$z^2-Sz+P=0.$$

Однородный квадратный трехчлен. Однородный квадратный трехчлен (бинарная квадратичная форма)

$$F(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$$

выделением полного квадрата преобразуется к виду

$$a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2-\frac{\Delta}{4a}y^2 \text{ или } c\left(y+\frac{b}{2c}x\right)^2-\frac{\Delta}{4c}x^2, \text{ где } \Delta=b^2-4ac.$$

Положив $y=tx$ (или $x=ty$), получим:

$$F(x, y)=x^2(a+bt+ct^2)=x^2c(t-t_1)(t-t_2),$$

где t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения $ct^2+bt+a=0$.

Следовательно,

$$F(x, y)=c(y-t_1x)(y-t_2x),$$

т. е. *однородный квадратный трехчлен с двумя аргументами разлагается над полем комплексных чисел на два линейные однородные множителя.*

Однородный трехчлен над полем действительных чисел разлагается на два действительные множителя, если $\Delta > 0$. Если $\Delta < 0$, то такой трехчлен над полем действительных чисел неразложим. Если $\Delta < 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ в поле действительных чисел удовлетворяется лишь при условии

$$y = 0, \quad x + \frac{b}{2a} y = 0,$$

эта система имеет единственное тривиальное решение $x = y = 0$.

Если $\Delta > 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ имеет бесконечное множество решений $y = t_1 x$, $y = t_2 x$ (где x — произвольное число), геометрически это означает, что линия $F(x, y) = 0$ распадается на две прямые линии.

Примеры

1. Трехчлен x^2-3x+2 в поле действительных чисел имеет два действительные корня, так как $\Delta = 9-8 = 1 > 0$.

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Имеет место следующее разложение:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

2. Трехчлен $3x^2-4x+2$ в поле действительных чисел не имеет корней: $\Delta = 4 - 3 \cdot 2 = -2 < 0$, а в поле комплексных чисел имеет два корня:

$$x_1 = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}.$$

Над полем действительных чисел трехчлен неразложим, над полем комплексных чисел имеет место разложение:

$$3x^2 - 4x + 2 = 3\left(x - \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}\right).$$

3. Трехчлен $9x^2+6x+1$ имеет двукратный корень, так как $\Delta=0$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Имеет место разложение

$$9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x+1)^2.$$

4. Трехчлен $x^2-3x+(3+i)$ в поле комплексных чисел имеет два различные корня, так как $\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i \neq 0$. Имеем:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i), \quad x_1 = 1 + i, \quad x_2 = 2 - i$$

и

$$x^2 - 3x + (3+i) = (x-1-i)(x-2+i).$$

5. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известен один из его корней:

$$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{-2}=-4+\sqrt{15}.$$

Формула корней квадратного уравнения показывает, что если коэффициенты рациональны, а корни иррациональны, то один корень получается из другого переменой знака перед радикалом, поэтому зная один корень, можно найти другой; имеем:

если

$$x_2=-4+\sqrt{15}, \text{ то } x_1=-4-\sqrt{15}.$$

Следовательно, $p=-(x_1+x_2)=8$, $q=1$.

Зная коэффициенты, составим уравнение:

$$x^2+8x+1=0.$$

6. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен один из его корней:

$$x=\frac{1}{2+i\sqrt{5}}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{2+i\sqrt{5}}=\frac{2-i\sqrt{5}}{9}=\frac{2}{9}-i\frac{\sqrt{5}}{9}.$$

Квадратный трехчлен с действительными корнями, имеющий мнимый корень, имеет также и сопряженный корень. Поэтому

$$x_1=\frac{2}{9}-i\frac{\sqrt{5}}{9}, \quad x_2=\frac{2}{9}+i\frac{\sqrt{5}}{9}.$$

Следовательно, $p=-(x_1+x_2)=-\frac{4}{9}$, $x_1x_2=\frac{1}{9}$

Искомое уравнение таково:

$$9x^2-4x+1=0.$$

7. Найти условие, при котором квадратный трехчлен

$$ax^2+bx+c$$

является полным квадратом, т. е. квадратом двучлена первой степени.

Решение. Если

$$ax+bx+c\equiv(\alpha x+\beta)^2,$$

то трехчлен имеет двукратный корень $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, а потому необходимо, чтобы $\Delta=b^2-4ac=0$.

Для трехчлена над полем комплесных чисел это условие является и достаточным, так как при $\Delta=0$ имеем:

$$ax^2+bx+c \equiv \left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2.$$

Трехчлен является квадратом двучлена

$$\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Для трехчлена над полем действительных чисел, кроме $\Delta=0$, должно быть выполнено условие $a>0$.

8. Вывести условие, при котором корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

удовлетворяют линейному уравнению

$$Ax_1+Bx_2=C$$

с данными коэффициентами A, B и C.

Решение. Искомое условие получится, если исключить x_1 и x_2 уравнений

$$a(x_1+x_2)=-b; \quad Ax_1+Bx_2=C; \quad ax_1x_2=c.$$

Первые два соотношения образуют систему линейных уравнений относительно x_1 и x_2, из этой системы найдем:

$$x_1=\frac{Ca+Bb}{a(A-B)}; \quad x_2=\frac{-Ab-Ca}{a(A-B)},$$

если $A\neq B$. Подставив в третье соотношение, получим:

$$(aC+bB)(bA+aC)+ac(A-B)^2=0. \qquad (1)$$

Если $A=B$, то система первых двух уравнений противоречива при $\frac{a}{A}\neq-\frac{b}{C}$ и второе уравнение есть следствие первого при $\frac{a}{A}=-\frac{b}{C}$.

В частности, чтобы отношение корней было равно данному числу k:

$$x_1:x_2=k \quad \text{или} \quad x_1-kx_2=0,$$

необходимо выполнение условия

$$ac(1+k)^2-kb^2=0 \quad (\text{положить } A=1,\ B=-k,\ C=0).$$

Так, например, уравнение имеет один корень, вдвое больший другого ($k=2$), если $9ac-2b^2=0$.

§ 81. Квадратные уравнения, содержащие параметры

Квадратное уравнение с параметрами α, β, ..., γ имеет вид:

$$a(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)x^2+b(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)x+c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, $b(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, $c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ суть данные функции от параметров, рассматриваемые совместно в общей части их областей определения. В частности, некоторые из этих коэффициентов могут быть постоянными. При всех допустимых системах значений параметров, при которых

$a(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) \neq 0$, формула корней квадратного уравнения дает выражение этих корней через параметры. При решении уравнения (1) в поле действительных чисел на допустимые значения параметров налагается дополнительное ограничение в виде неравенства

$\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = b^2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) - 4a(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) \geqslant 0$, выражающего действительность корней.

Системы значений параметров, при которых старший коэффициент равен нулю: $a(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0$, следует рассматривать отдельно в качестве особых случаев; при этих значениях уравнение (1) становится линейным.

Примеры

1. Дано уравнение

$$x^2 - 2(2+m)x + 12 + m^2 = 0:$$

a) решить это уравнение в поле комплексных и в поле действительных чисел;

b) найти значения m, при которых трехчлен $x^2 - 2(2+m)x + 12 + m^2$ является полным квадратом.

Решение. a) Имеем:

$$a = 1,\ 2b = -2(2+m),\ c = 12 + m^2,$$
$$\Delta = (2+m)^2 - (12 + m^2) = 4(m-2).$$

По формуле корней квадратного уравнения получим:

$$x = 2 + m \pm 2\sqrt{m-2}.$$

Корни действительны и различны при действительном $m > 2$, при $m = 2$ уравнение имеет двукратный корень $x = 4$. Особых случаев нет, так как $a = 1 \neq 0$.

b) трехчлен является полным квадратным при условии $\Delta = 4(m-2) = 0$, т. е. при $m = 2$. Если $m = 2$, то трехчлен примет вид:

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2.$$

2. Решить уравнение:

$$(m^2 + mn - 2n^2)x^2 + 3n^2x - (m^2 - mn - 2n^2) = 0.$$

Решение. Имеем:

$$a = (m^2 + mn - 2n^2) = (m-n)(m+2n), \quad b = 3n^2,$$
$$c = -(m^2 - mn - 2n^2) = -(m+n)(m-2n);$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 9n^4 + 4(m^2 - n^2)(m^2 - 4n^2) = 25n^4 - 20m^2n^2 + 4m^2 =$$
$$= (5n^2 - 2m^2)^2.$$

Если $a \neq 0$, т. е. $m \neq n$ и $m \neq -2n$, то

$$x = \frac{-3n^2 \pm (5n^2 - 2m^2)}{2(m-n)(m+2n)}.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{-3n^2 + (5n^2 - 2m^2)}{2(m-n)(m+2n)} = -\frac{(m+n)}{m+2n},$$
$$x_2 = \frac{-3n^2 - (5n^2 - 2m^2)}{2(m-n)(m+2n)} = \frac{m-2n}{m-n}.$$

Особые случаи. Случай 1°. $m=n$. Уравнение примет вид:

$$3m^2x + 2m^2 = 0$$

Если $m \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{2}{3}.$$

Если $m=n=0$, то уравнение удовлетворяется тождественно.
Случай 2°. $m=-2n$. Уравнение примет вид:

$$3n^2x - 4n^2 = 0.$$

Если $n \neq 0$, то $x = \frac{4}{3}$.

Если $n=0$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

§ 82. Симметрические функции корней квадратного трехчлена

Из формул $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, устанавливающих связь между коэффициентами квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ и его корнями, следует, что *коэффициенты приведенного трехчлена суть симметрические функции его корней*. Из высшей алгебры известно, что для любого многочлена (с коэффициентом при старшем члене, равном 1) коэффициенты являются симметрическими многочленами от корней и что всякая *целая рациональная* симметрическая функция от корней может быть выражена через коэффициенты многочлена. Для квадратного трехчлена возможность выражения симметрических функций от корней через коэффициенты можно установить элементарно без привлечения общей теории симметрических функций. Найдем выражения для суммы одинаковых степеней корней квадратного трехчлена; положим:

$$s_1 = x_1 + x_2,\ s_2 = x_1^2 + x_2^2,\ s_3 = x_1^3 + x_2^3, \ldots,\quad s_k = x_1^k + x_2^k,\ \ldots,$$

имеем $s_1 = -p$. Для вычисления s_2 напишем условия, что числа x_1 и x_2 удовлетворяют квадратному уравнению:

$$x^2 + px + q = 0,$$

т. е.

$$x_1^2 + px_1 + q = 0 \tag{1}$$

и

$$x_2^2 + px_2 + q = 0. \tag{2}$$

Сложив почленно, получим:

$$s_2 - p^2 + 2q = 0.$$

Умножив (1) на x_1, а (2) на x_2 и сложив, получим:

$$s_3 + ps_2 + qs_1 = 0.$$

Умножив (1) и (2) на x_1^{k-2} и x_2^{k-2} и сложив, получим:

$$s_k + ps_{k-1} + qs_{k-2} = 0.$$

Из полученных равенств находим последовательно:

$$s_2 = p^2 - 2q;$$
$$s_3 = -ps_2 - qs_1 = -p^3 + 3qp;$$
$$s_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 \quad \text{и т. д.}$$

Теорема. *Произвольный симметрический многочлен $\Phi(x_1, x_2)$ от корней квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ можно выразить через коэффициенты* p *и* q.

Доказательство. Члены многочлена $\Phi(x_1, x_2)$ имеют вид: $Ax_1^k\, x_2^l$; если $k = l$, то данный член равен Aq^k; если один из показателей, например l, равен нулю (но $k \neq 0$), то симметрический многочлен, содержащий член Ax_1^k, содержит также Ax_2^k сумма этих членов равна As_k; если $k \neq l$, пусть, например $0 < l < k$, то симметрический многочлен содержит члены $Ax_1^k\, x_2^l$ и $Ax_2^k\, x_1^l$. Сумма этих членов равна:

$$Ax_1^l\, x_2^l\, (x_1^{k-l} + x_2^{k-l}) = Aq^l\, s_{k-l}\,.$$

Зная выражения для сумм s_k, можно выразить через коэффициенты произвольный симметрический многочлен корней, ч. т. д.

Если требуется выразить симметрические функции корней трехчлена (неприведенного) $ax^2 + bx + c$, то достаточно в общих формулах положить $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Примеры

1. Выразить дробную симметрическую функцию от корней квадратного трехчлена

$$S = \frac{2x_1^2 - 3x_1\, x_2 + 2x_2^2}{x_1^3 - 3x_1^2\, x_2 - 3x_2^2\, x_1 + x_2^3}$$

через коэффициенты. Вычислить значение этой функции от корней уравнения $2x^2 + x - 2 = 0$, не решая это уравнение.

Решение. Имеем:

$$2x_1^2 - 3x_1\, x_2 + 2x_2^2 = 2s_2 - 3q = 2p^2 - 7q,$$

$$x_1^3 - 3x_1^2\, x_2 - 3x_2^2\, x_1 + x_2^3 = s_3 - 3x_1\, x_2\, (x_1 + x_2) =$$
$$= (-p^3 + 3pq) + 3pq = 6pq - p^3.$$

Следовательно,

$$S = \frac{2p^2 - 7q}{6pq - p^3},$$

или, положив $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, получим;

$$S = \frac{2ab^2 - 7a^2c}{6abc - b^3}.$$

Вычислим значение S от корней данного уравнения, положив $a=2$, $b=1$, $c=-2$:

$$S = -\frac{12}{5}.$$

2. Выразить через коэффициенты

$$s_{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad \text{и} \quad s_{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$$

в предположении, что трехчлен x^2+px+q имеет положительные корни.

Решение.

$$s^2_{\frac{1}{2}} = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} = -p + 2\sqrt{q},$$

$$s^4_{\frac{1}{4}} = x_1 + 4\sqrt[4]{x_1^3}\sqrt[4]{x_2} + 6\sqrt[4]{x_1^2\, x_2^2} + 4\sqrt[4]{x_2}\sqrt[4]{x_1^3} + x_2$$

$$= -p + 4\, s_{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{q} + 6\sqrt{q},$$

откуда

$$s_{\frac{1}{2}} = \sqrt{-p + 2\sqrt{q}}$$

и

$$s_{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-p + 6\sqrt{q} + 4\sqrt[4]{q}\sqrt{-p + 2\sqrt{q}}}.$$

3. Составить квадратное уравнение, корнями которого служат

$$\xi_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}; \quad \xi_2 = x_2 + \frac{1}{x_2},$$

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{где } c \neq 0).$$

Решение. Найдем коэффициенты искомого уравнения:

$$p_1 = -(\xi_1 + \xi_2) = -(x_1 + x_2)\cdot\left(1 + \frac{1}{x_1x_2}\right)$$

и

$$q_1 = \xi_1\xi_2 = \frac{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}{x_1x_2} = \frac{x_1^2\, x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2) + 1}{x_1x_2};$$

эти коэффициенты суть симметричные (дробные) функции корней данного уравнения, а потому рационально выражаются через его коэффициенты. Заменив

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

получим:

$$p_1 = \frac{bc + ab}{ac}, \quad q_1 = \frac{(a-c)^2 + b^2}{ac}.$$

Зная коэффициенты, составим уравнение:

$$acx^2 + (bc + ab)x + (a-c)^2 + b^2 = 0.$$

4. Составить квадратное уравнение, корни которого равны корням данного трехчлена x^2+px+q, сложенным с данным числом λ.

Решение. По условию корни искомого уравнения должны быть

$$\xi_1 = x_1 + \lambda \quad \text{и} \quad \xi_2 = x_2 + \lambda.$$

Найдем коэффициенты искомого уравнения

$$p = -(\xi_1 + \xi_2) = -(x_1 + x_2) - 2\lambda = p - 2\lambda$$

и

$$q_1 = (x_1 + \lambda)(x_2 + \lambda) = \lambda^2 + \lambda(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = \lambda^2 - p\lambda + q.$$

Зная коэффициенты, составим уравнение:

$$x^2 + (p - 2\lambda)x + (\lambda^2 - \lambda p + q) = 0.$$

5. Найти условие, при котором один из корней уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

равен кубу другого.

Решение. По условию должно иметь место одно из соотношений:

$$x_1^3 - x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_2^3 - x_1 = 0.$$

Перемножив, получим:

$$(x_1^3 - x_2)(x_2^3 - x_1) = x_1^3 x_2^3 - (x_1^4 + x_2^4) + x_1 x_2 = q^3 - s_4 + q = 0$$

или окончательно:

$$q^3 - p^4 + 4p^2 q - 2q^2 + q = 0. \qquad (1)$$

Другое решение. Пусть дано соотношение $x_1^3 - x_2 = 0$. Разделив с остатком x^3 на x^2+px+q, получим:

$$x^3 = (x^2 + px + q)(x - p) + (p^2 - q)x + pq.$$

Положив $x = x_1$, получим:

$$x_1^3 = (p^2 - q)x_1 + pq.$$

Данное соотношение перепишется так:

$$(p^2 - q)x_1 - x_2 = -pq.$$

Положив в условии (1) (см. стр. 323, пример 8)

$$a = 1,\ b = p,\ c = q,\ A = p^2 - q,\ B = -1,\ c = -pq,$$

получим искомое соотношение.

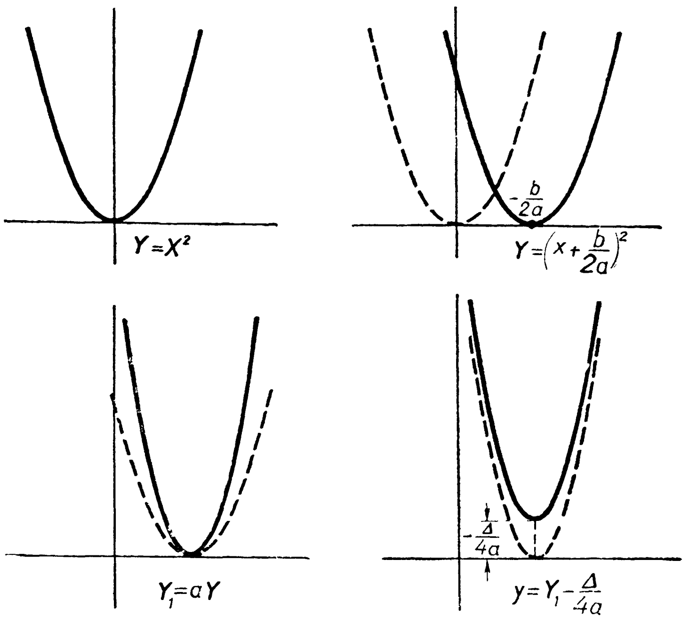
§ 83. Квадратный трехчлен над полем действительных чисел, неравенства второй степени, наибольшие и наименьшие значения

Рассмотрим функцию

$$y = ax^2 + bx + c,$$

определяемую квадратным трехчленом с действительными коэффициентами. Имеем:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$



Черт. 106

Случай 1°. $a > 0$. Слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ положительно при $x \neq -\frac{b}{2a}$ и равно нулю при $x = -\frac{b}{2a}$; трехчлен имеет при $x = -\frac{b}{2a}$ наименьшее значение, равное $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4b} = -\frac{\Delta}{4a}$.

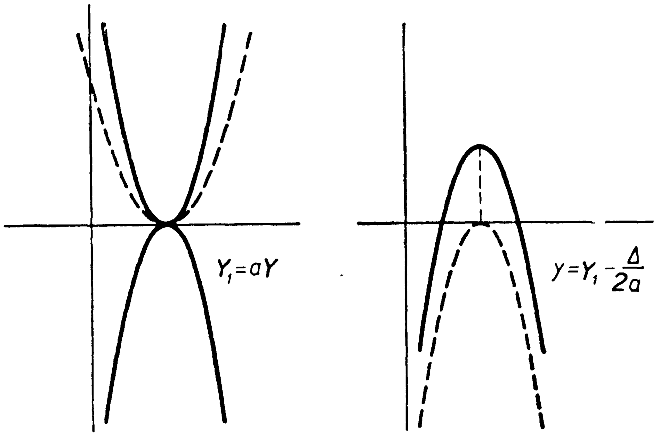
В полуинтервале $-\infty < x \leqslant -\frac{b}{2a}$ функция y убывает от $+\infty$ до $-\frac{\Delta}{4a}$, а на полусегменте $-\frac{b}{2a} \leqslant x < +\infty$ возрастает от $-\frac{\Delta}{4a}$

до $+\infty$. График трехчлена (парабола) можно получить из параболы $Y = X^2$ путем следующих преобразований (черт. 106):

a) $x = X - \frac{b}{2a}$ — параллельный перенос в направлении оси абсцисс;

b) $Y_1 = aY$ — растяжение от оси ординат в a раз;

c) $Y_1 = y - \frac{\Delta}{4a}$ — перенос в направлении оси ординат.



Черт. 107

Случай 2°. $a<0$. В этом случае $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$, трехчлен имеет при $x = -\frac{b}{2a}$ наибольшее значение $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$. В полуинтервале $-\infty < x \leqslant -\frac{b}{2a}$ функция y возрастает от $-\infty$ до $-\frac{\Delta}{4a}$, на полусегменте $-\frac{b}{2a} \leqslant x < +\infty$ убывает от $-\frac{\Delta}{4a}$ до $-\infty$. График можно получить из параболы $Y = X^2$ посредством тех же преобразований, но со следующим различием. Преобразование b) $Y_1 = aY$ состоит из растяжения от оси абсцисс в $|a|$ раз и из зеркального отражения в оси абсцисс:

$$Y_1 = -|a|\,Y \qquad \text{(черт. 107)}$$

Итак, *при* $x = -\frac{b}{2a}$ *квадратный трехчлен имеет экстремум, равный* $-\frac{\Delta}{4a}$; *при* $a>0$ *— это есть минимум, а при* $a<0$ *— максимум.*

Знак квадратного трехчлена. Квадратные неравенства.

Теорема.

1°. *Квадратный трехчлен с действительными различными корнями может иметь как положительные, так и отрицательные значения.*

2°. *Трехчлен с мнимыми корнями не может иметь значений, различных по знаку, и обращаться в нуль.*

3°. *Трехчлен, имеющий двойной корень, обращается в нуль при единственном значении аргумента и не может иметь численных значений, различных по знаку.*

Доказательство. Случай 1°. $\Delta > 0$, корни трехчлена действительны и различны: $x_1 < x_2$; имеем:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если $a > 0$, то знак трехчлена совпадает со знаком произведения:

$$(x - x_1)(x - x_2), \tag{1}$$

если же $a < 0$, то знак трехчлена противоположен знаку этого произведения. При любом значении $x < x_1$ имеем $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$, поэтому произведение (1) положительно. При любом значении x, заключенном между x_1 и x_2, имеем $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 < 0$, поэтому произведение (1) отрицательно. При любом значении $x > x_2$ имеем $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$, поэтому произведение (1) положительно.

Знак трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ в различных промежутках определяется по следующей таблице:

	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 < x < \infty$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$y\,(a > 0)$	$+$	$-$	$+$
$y\,(a < 0)$	$-$	$+$	$-$

Случай 2°. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, трехчлен не имеет действительных корней. Из равенства

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

следует, что знак y при всех значениях x одинаков со знаком числа a, так как

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0, \quad \text{а} \quad \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0.$$

Случай 3°. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. В этом случае

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

знак трехчлена одинаков со знаком числа a при всех $x \neq -\frac{b}{2a}$, а при $x = -\frac{b}{2a}$ значение $y = 0$, ч. т. д.

Квадратным неравенством, или неравенством второй степени (с одним неизвестным), называется неравенство, которое после переноса всех его членов в левую часть примет вид:

$$ax^2 + bx + c \vee 0^*.$$

Из изложенного исследования знака квадратного трехчлена следует, что:

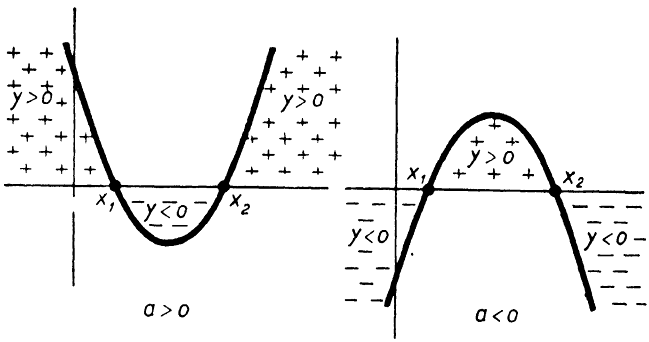
1°. *Если $\Delta > 0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при $a>0$ в двух интервалах:*

$$-\infty < x < x_1 \quad \text{и} \quad x_2 < x < +\infty,$$

а при $a<0$ в интервале $x_1<x<x_2$.

Неравенство $ax^2+bx+c<0$ выполняется при $a>0$ в интервале $x_1<x<x_2$ и при $a<0$ в интервалах

$$-\infty < x < x_1 \quad \text{и} \quad x_2 < x < +\infty \text{ (черт. 108).}$$



Черт. 108

2°. *Если $\Delta<0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ при $a>0$ выполняется тождественно и при $a<0$ не выполняется ни при каком значении x.*

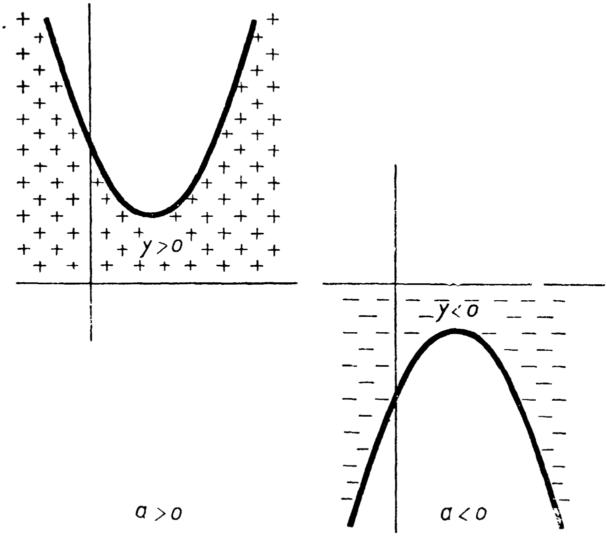
Неравенство $ax+bx+c<0$ при $a>0$ не выполняется ни при каких значениях x и при $a<0$ выполняется тождественно (черт. 109).

3°. *Если $\Delta=0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ при $a>0$ выполняется в двух интервалах $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ и при $a<0$ не выполняется ни при каких значениях x.*

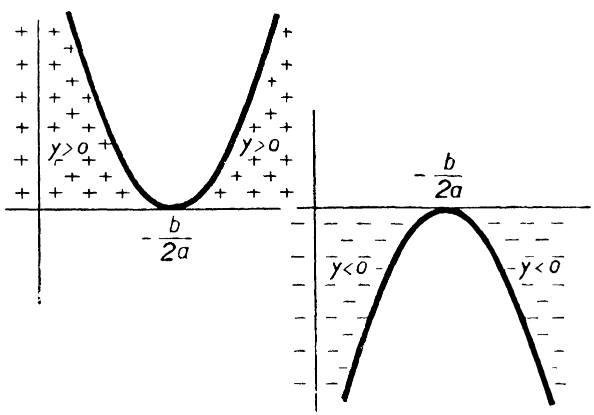
---

* Здесь символ $\vee$ может означать любой из знаков: $<$, $>$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Неравенство $ax^2+bx+c<0$ *при* $a>0$ *не выполняется ни при каких значениях* x *и при* $a<0$ *выполняется в двух интервалах* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ *и* $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (черт. 110).



Черт. 109



Черт. 110

Результаты изложенного исследования кратко можно сформулировать следующим образом:

Значения трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$

одинаковы по знаку с числом a для всех значений x, кроме значений, принадлежащих сегменту корней $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. В интервале (x_1, x_2) значения трехчлена и число a противоположны и по знаку.

Это правило применимо и к трехчлену с мнимыми корнями, если принять во внимание, что в этом случае, в поле действительных чисел, нет корней, нет и значений аргумента, принадлежащих сегменту $[x_1, x_2]$. Для трехчлена с кратным корнем сегмент корней обращается в точку.

Следовательно, неравенство

$$af(x) > 0$$

выполняется при всех значениях аргумента вне сегмента корней, т. е. для трехчлена с действительными корнями в двух интервалах $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$, а для трехчлена с мнимыми корнями в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Для трехчлена с действительными корнями неравенство

$$af(x) < 0$$

выполняется в интервале корней $x_1 < x < x_2$.

Расположение данного числа относительно корней трехчлена. Предположим, что квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различные действительные корня; пусть α — произвольное действительное число, неравное ни одному из корней $f(x)$. Следовательно, α содержится в одном из трех интервалов $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$.

Теорема. *Число α принадлежит интервалу $(-\infty, x_1)$ в том и только в том случае, если $af(\alpha) > 0$ и $\alpha < -\frac{b}{2a}$;*

интервалу (x_1, x_2), если $af(\alpha) < 0$;

интервалу $(x_2, +\infty)$, если $af(\alpha) > 0$ и $\alpha > -\frac{b}{2a}$.

Доказательство. Принадлежность числа α интервалу $x_1 < x < x_2$ характеризуется условием $af(\alpha) < 0$, а одному из интервалов $-\infty < x < x_1$ и $x_2 < x < +\infty$ условием $af(\alpha) > 0$. Установим, какому из интервалов $(-\infty, x_1)$ или $(x_2, +\infty)$ принадлежит число α, если $af(\alpha) > 0$. Интервал $(-\infty, x_1)$ расположен левее, а интервал $(x_2, +\infty)$ — правее средины интервала корней, т. е. точки $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

$$-\infty < x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2 < +\infty \qquad \text{(черт. 111).}$$

Следовательно, неравенства $\alpha < -\frac{b}{2a}$ и $\alpha > -\frac{b}{2a}$ служат признаками принадлежности числа α интервалам $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ (соответственно), ч. т. д.

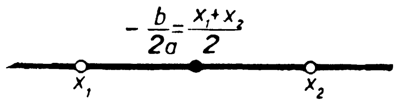
Знаки корней трехчлена. В частности, при $\alpha = 0$ предыдущий признак устанавливает условия, при которых:

$0 < x_1 < x_2$, т. е. оба корня положительны;

$x_1 < 0 < x_2$, т. е. корни разных знаков;

$x_1 < x_2 < 0$, корни отрицательны.

Однако для определения знаков корней x_1 и x_2 (если только эти корни действительны) удобнее непосредственно пользоваться формулами зависимости между корнями и коэффициентами:



Черт. 111

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

из которых следует, что

оба корня положительны, если $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{b}{a} < 0$;

оба корня отрицательны, если $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$;

меньший корень отрицателен, больший положителен, если $\frac{c}{a} < 0$;

один корень равен нулю, если $c = 0$, *а другой корень положителен при* $\frac{b}{a} < 0$ *и отрицателен при* $\frac{b}{a} > 0$;

оба корня равны нулю, если $b = c = 0$;

Примеры

1. Найти наибольшие и наименьшие значения следующих трехчленов *.

Трехчлен	Характер экстремума	$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{\Delta}{4a}$
$x^2 + x + 1$	min	$x = -\frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{4}$
$2x^2 - 5x + 2$	min	$x = \frac{5}{4}$	$y = -\frac{9}{8}$
$10 + 4x - 3x^2$	max	$x = \frac{2}{3}$	$y = \frac{34}{3}$

(Рекомендуем учащимся построить графики этих трехчленов.)

2. Решить неравенство

$$x^2 + 6 < 5x.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

---

* При решении примеров можно не пользоваться готовыми формулами, а находить экстремум непосредственно выделением полного квадрата в каждом конкретном случае.

Трехчлен $x^2—5x+6$ имеет корни $x_1=2$, $x_2=3$.
Неравенство выполняется в интервале $2<x<3$.

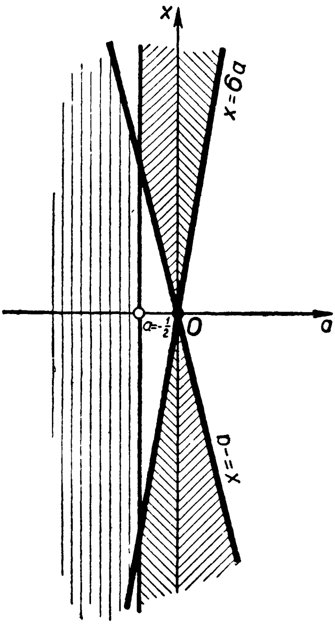
3. Найти область определения функции, заданной формулой:

$$\sqrt{4x^2-8x+3}.$$

Решение. Область определения находится из условия

$$4x^2-8x+3 \geqslant 0.$$

Корни трехчлена $4x^2-8x+3$ суть $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. Неравенство выполняется в совокупности промежутков $-\infty < x \leqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2} \leqslant x < +\infty$. Искомая область определения состоит из этих двух промежутков.



Черт. 112

4. Неравенство

$$x^2-x+1>0$$

выполняется при всех значениях x, так как $\Delta<0$ и $a=1>0$.

5. Решить неравенство

$$\frac{x^2+x-6}{2a+1} > x+6(2a-1) \quad \left(\text{где } a \neq -\frac{1}{2}\right).$$

Решение. После переноса членов в одну часть и приведения к общему знаменателю получим неравенство, эквивалентное данному:

$$\frac{x^2-2ax-24a^2}{2a+1} > 0.$$

Корни трехчлена $x^2-2ax-24a^2$ суть $-4a$ и $6a$.

1°. Если $2a+1>0$, т. е. $a>-\frac{1}{2}$, то умножив на $2a+1$, получим неравенство:

$$x^2-2ax-24a^2>0.$$

При $a>0$ меньший корень есть $—4a$, больший есть $6a$; в этом случае получим совокупность двух интервалов:

$$-\infty < x < -4a \quad \text{и} \quad 6a < x < +\infty.$$

При $-\frac{1}{2} < a < 0$ меньший корень есть $6a$, больший $—4a$; в этом случае получим совокупность двух интервалов:

$$-\infty < x < 6a \quad \text{и} \quad -4a < x < +\infty.$$

2°. Если $2a+1<0$, т. е. $a<-\frac{1}{2}$, то умножив на $2a+1$, получим неравенство

$$x^2-2ax-24a^2<0,$$

из которого найдем интервал: $6a<x<—4a$.

3°. При $a=0$ неравенство примет вид $x^2>0$ и удовлетворяется всеми значениями $x \neq 0$. Имеем совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Результат исследования графически изображен на чертеже 112.

6. Исследовать корни квадратного уравнения:

$$x^2-(8k-2)x+(15k^2-2k-7)=0$$

в зависимости от значений параметра k.

Решение. Составим дискриминант:

$$\Delta=(4k-1)^2-(15k^2-2k-7)=k^2-6k+8.$$

A) Если $k^2-6k+8>0$, то корни уравнения (1) действительны и различны.
B) Если $k^2-6k+8<0$, то корни уравнения (1), мнимые сопряженные.
C) Если $k^2-6k+8=0$, то уравнение имеет двукратный корень.
Корни трехчлена k^2-6k+8 суть $k_1=2$, $k_2=4$.

Случай A) имеет место, если $k<2$ или $k>4$. Случай B) имеет место, если $2<k<4$. Случай C) имеет место, если $k=2$ или $k=4$.

7. Не решая уравнения

$$2x^2+x-1=0,$$

определить, в каком интервале относительно его корней содержится число 1.

Решение. Полагаем $f(x)=2x^2+x-1$. $\Delta=9>0$; корни действительны. Так как $f(1)=2>0$ (умножение $f(x)$ на $a=2$ излишне, ибо $a>0$) и $1>-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{4}$, то число 1 больше большего корня.

8. Исследовать, при каких значениях параметра m уравнение

$$4x^2+(m-2)x+m-5=0$$

имеет положительные корни, отрицательные корни, один положительный и один отрицательный корень.

Решение. Уравнение имеет действительные корни, если

$$\Delta=(m-2)^2-16(m-5)=m^2-20m+84\geqslant 0.$$

Корни трехчлена $m^2-20m+84$ суть $m_1=6$ и $m_2=14$. Следовательно, корни уравнения действительны при значениях параметра в совокупности двух промежутков $-\infty<m\leqslant 6$ и $14\leqslant m<+\infty$:

1°. Корни трехчлена положительны, если m удовлетворяет системе неравенств $m-5>0$, $m-2<0$, $\Delta\geqslant 0$, эта система противоречива.

2°. Корни отрицательны, если m удовлетворяет системе неравенств $m-5>0$, $m-2>0$, откуда $m>5$. Приняв во внимание условие $\Delta\geqslant 0$ действительности корней, получим совокупность двух промежутков

$$5<m\leqslant 6 \quad \text{и} \quad 14\leqslant m<+\infty.$$

При $m=6$ и $m=14$ трехчлен имеет двукратный отрицательный корень.

3°. Корни противоположны по знаку, если $m-5<0$, $\Delta\geqslant 0$. Из этой системы получим интервал $-\infty<m<5$.

4°. При $m=5$ один корень уравнения равен нулю, другой положителен.

9. Даны два действительные числа α и β, причем $\alpha<\beta$; определить расположение корней трехчлена с действительными корнями

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

относительно данных чисел.

Решение.

1°. Если $af(\alpha)<0$, $af(\beta)<0$, то числа α и β расположены в интервале корней:

$$x_1<\alpha<\beta<x_2$$

2°. Если $af(\alpha)<0$, $af(\beta)>0$, то

$$x_1<\alpha<x_2<\beta.$$

3°. Если $af(\alpha)>0$, $af(\beta)<0$, то

$$\alpha<x_1<\beta<x_2.$$

4°. Если $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$, то
или а) $\alpha < \beta < x_1 < x_2$, или b) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, или с) $x_1 < x_2 < \alpha < \beta$.

Случай а) характеризуется условием $\beta < \frac{x_1 + x_2}{2}$ или $\beta < -\frac{b}{2a}$. Аналогично, случай с) характеризуется условием $\alpha > -\frac{b}{2a}$; случай b) характеризуется условием $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$.

10. При каких значениях λ корни уравнения

$$\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + 1 = 0$$

различны и содержатся в интервале $(-1, 1)$.

Решение. Пусть $\lambda \neq 0$. Корни действительны и различны при условии $\Delta = 4\lambda^2 - 8\lambda + 1 > 0$.

Корни трехчлена

$$4x^2 - 8\lambda + 1 \quad \text{суть} \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Для λ получим совокупность трех (принять во внимание условие $\lambda \neq 0$) интервалов

$$-\infty < \lambda < 0, \quad 0 < \lambda < \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2} < \lambda < \infty. \qquad (1)$$

Расположение чисел $-1 < x_1 < x_2 < 1$ имеет место, если λ удовлетворяет системе неравенств (см. предыдущий пример):

$$\lambda f(1) = 3\lambda^2 > 0, \quad \lambda f(-1) = \lambda(2 - \lambda) > 0, \quad -1 < -\frac{2\lambda - 1}{2\lambda} < 1, \ \Delta > 0.$$

Из второго неравенства найдем интервал $0 < \lambda < 2$. В этом интервале первое неравенство выполняется. Из неравенств $-1 < -\frac{2\lambda - 1}{2\lambda} < 1$ найдем $-2\lambda < -2\lambda + 1 < 2\lambda$, откуда $\lambda > \frac{1}{4}$ (принять во внимание, что $\lambda > 0$).

Интервал $\frac{1}{4} < \lambda < 2$ с совокупностью интервалов (1) (где $\Delta > 0$) имеет общую часть в виде интервала

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} < \lambda < 2.$$

При этих значениях λ оба корня содержатся в интервале $(-1, 1)$. В особом случае $\lambda = 0$ уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

§ 84. Алгебраические уравнения над полем рациональных чисел

Алгебраическое уравнение с одним неизвестным над полем рациональных чисел имеет следующий вид:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (P)$$

где коэффициенты a_k и допустимые значения неизвестного суть рациональные числа.

Каноническим видом алгебраического уравнения над полем рациональных чисел считается уравнение (P), в котором коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0 суть целые взаимно простые (в совокупности) числа. К этому виду можно привести всякое алгебраическое уравнение над полем рациональных чисел: достаточно перенести все члены в левую часть, умножить уравнение на общее кратное знаменателей коэффициентов (если не все коэффициенты целые) и сократить на общий, отличный от ± 1, множитель всех коэффициентов (если такой множитель имеется).

Теорема. *Если уравнение с целыми коэффициентами*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{(P)}$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, *где* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{q}$ *взаимно просты, то* a_0 *делится на* $\boldsymbol{p}$, *а* a_n *делится на* $\boldsymbol{q}$.

Доказательство. Подставив в уравнение $x = \frac{p}{q}$ и умножив на q^n, получим:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^n = 0.$$

Откуда

$$a_0 q^n = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} q - \ldots - a_1 q^{n-1}).$$

Выражение, заключенное в скобки, в правой части есть целое число, следовательно, произведение $a_0 q^n$ делится на p, а так как p и q взаимно просты, то a_0 делится на p. Аналогично, из равенства

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} - \ldots - a_0 q^{n-1})$$

следует, что a_n делится на q, ч. т. д.

Итак, рациональным корнем уравнения (P) может быть лишь такая дробь $\frac{p}{q}$, числитель которой есть делитель a_0, а знаменатель делитель a_n. Если составить всевозможные отношения делителей свободного члена к делителям коэффициента старшего члена, то все рациональные корни уравнения (P) следует искать лишь среди этого (конечного) множества чисел. Следовательно, *все рациональные корни уравнения* (P) *можно найти конечным числом испытаний.*

Следствие I. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами есть делитель свободного члена.*

В самом деле, рациональный корень $x = \frac{p}{q}$ уравнения (P) является целым, если $q = 1$, тогда имеем $x = p$, где p — делитель числа a_0.

Таким образом, *при отыскании целых корней многочлена с целыми коэффициентами достаточно испытать лишь делители свободного члена.*

Следствие II. *Всякий рациональный корень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равном единице, есть целое число.*

В самом деле, если $a_n = 1$, то рациональными корнями уравнения (P) могут быть только целые числа, так как для знаменателя q возможны лишь значения $q = \pm 1$ (делители a_n).

Если многочлен с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равном 1, не имеет целых корней, то он не имеет и дробных корней.

Если свободный член многочлена с целыми коэффициентами имеет большое количество делителей, то следующий признак позволяет сократить число испытаний при нахождении целых корней.

Если α — корень многочлена $P(x)$, то $P(k)$ делится на $k - \alpha$, где k — произвольное целое число.

Доказательство. Если α — корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на $x - \alpha$:

$$P(x) = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0).$$

Так как α — целое число, то коэффициенты частного b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0 также целые числа (см. § 26, деление на $x - \alpha$).

Положив $x = k$, получим:

$$P(k) = (k - \alpha)N,$$

где $N = b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} + \ldots + b_0$ — целое число, т. е. $P(k)$ делится на $(k - \alpha)$, ч. т. д.

Положив в частности $k = \pm 1$, получим:

$$P(1) = (1 - \alpha)N_1; \quad P(-1) = (1 + \alpha)N_2.$$

Следовательно, испытанию подлежат лишь те делители свободного члена, для которых каждое из отношений $\frac{P(1)}{\alpha - 1}$ и $\frac{P(-1)}{1 + \alpha}$ есть целое число.

Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами можно свести к нахождению целых корней. Пусть требуется найти рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Умножив $P(x)$ на a_n^{n-1}, получим многочлен, имеющий те же корни:

$$a_n^{n-1}P(x) = a_n^nx^n + a_{n-1}a_n^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1a_n^{n-1}x + a_0a_n^{n-1}.$$

Заменив аргумент x аргументом $y = a_n x$, представим данный многочлен в виде:

$$a_n^{n-1} P(x) = Q(y) = y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 a_n^{n-2} y + a_0 a_n^{n-1}. \quad (1)$$

Все рациональные корни последнего многочлена суть целые числа. Отыскав все целые корни этого многочлена, из соотношения $x = \frac{y}{a_n}$ найдем все рациональные корни многочлена $P(x)$.

Примеры

1. Найти целые корни уравнения

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Решение Выписываем делители числа —6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Подставив $x = \pm 1$, получим $P(1) = -12$ и $P(-1) = -6$, следовательно, ± 1 не являются корнями. Составим отношения $\frac{P(1)}{\alpha - 1}$ и $\frac{P(-1)}{\alpha + 1}$; при $\alpha = 2$ получим целые числа, поэтому число 2 подлежит испытанию. Аналогично убедимся, что испытанию подлежат числа —2 и —3. Числа же 3 и ± 6 испытанию не подлежат. Так, при $\alpha = 3$ отношение $\frac{P(-1)}{\alpha + 1} = -\frac{3}{2}$ является дробным. Разделив данный многочлен на $x - 2$, получим в частном $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ и 0 в остатке, следовательно, 2 есть корень Число —2 не может быть корнем, ибо свободный член частного 3 не делится на —2. Делим частное на $x + 3$, получим второе частное $x^2 + x + 1$ и 0 в остатке, следовательно, —3 есть корень. Больше целых корней нет.

2. Найти рациональные корни многочлена:

$$4x^3 - 7x^3 - x + 3 = P(x).$$

Решение. Если $x = \frac{p}{q}$ корень многочлена, то для p и q возможны следующие значения: $p = \pm 1$; ± 3; $q = \pm 1$; ± 2; ± 4.

Ищем целые корни многочлена:

$$16P(x) = (4x)^3 - 7(4x)^2 - 4(4x) + 3 \cdot 4^2 = y^3 - 7y^2 - 4y + 48 = Q(y),$$

где $y = 4\frac{p}{q}$, для y возможны следующие значения: ± 1, ± 4, ± 2, ± 12, ± 6, ± 3 в соответствии с возможными значениями p и q.

При $\alpha = 2$ отношение $\frac{Q(-1)}{\alpha + 1} = \frac{44}{3}$ дробное, при $\alpha = -2$ отношение $\frac{Q(1)}{\alpha - 1} = \frac{38}{3}$ дробное, поэтому числа ± 2 отбрасываем. При $\alpha = 3$ оба отношения $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1} = \frac{38}{2}$ и $\frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1} = \frac{44}{4}$ целые. Разделив $Q(y)$ на $y - 3$, получим:

$$Q(y) = (y - 3)(y^2 - 4y - 16).$$

Квадратный трехчлен в скобках не имеет целых корней, поэтому единственным рациональным корнем является $x = \frac{y}{4} = \frac{3}{4}$.

3. Доказать, что если многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

с целыми коэффициентами при $x=0$ и при $x=1$ имеет нечетные значения, то он не имеет целых корней.

Решение. Пусть, вопреки утверждению, α — целый корень: $P(\alpha)=0$. Отношение $\frac{P(1)}{\alpha-1}$ при нечетном $P(1)$ может быть целым числом, если α есть четное число. Из условия

$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_0=0$ найдем $a_0=-\alpha(a_1+a_2\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}a_n)$,

следовательно, a_0 есть четное число. Но с другой стороны $f(0)=a_0$, а поэтому не может быть четным числом. Это противоречие доказывает теорему.

§ 85. Двучленные уравнения

Определение. *Уравнение вида*

$$x^n-a=0 \quad (\textit{где } \alpha \textit{ — данное число})$$

называется двучленным уравнением.

Уравнение вида

$$px^n+q=0,$$

где $p\neq 0$, эквивалентно двучленному уравнению

$$x^n+\frac{p}{q}=0 \quad \left(\text{здесь } a=-\frac{p}{q}\right).$$

Двучленное уравнение решается непосредственно извлечением корня степени n из числа a:

$$x=\sqrt[n]{a}\,.$$

На основании известных свойств извлечения корня (см. § 39 и 46) имеем:

1. *Если $a=0$, то уравнение имеет (в любом числовом поле) единственное решение $x=0$.*

2. *Если $a\neq 0$ — действительное число, то в поле действительных чисел при нечетном $n=2k+1$ уравнение имеет единственное решение*

$$x=\sqrt[2k+1]{a}\,.$$

Если $a>0$ и $n=2k$ — четное число, то уравнение в поле действительных чисел имеет два решения

$$x=\pm\sqrt[2k]{a}\,.$$

Если $a<0$ и $n=2k$ — четное число, то в поле действительных чисел уравнение не имеет решений.

3. *Если $a\neq 0$ произвольное комплексное (в частности действительное) число, то в поле комплексных чисел двучленное уравнение имеет **n** корней; этими корнями являются **n** различных значений радикала $\sqrt[n]{a}$.*

§ 86. Частные виды алгебраических уравнений высших степеней, решаемых элементарными методами

Задача алгебраического решения уравнения ставится следующим образом: *построить формулу, выражающую значения корней уравнения через его коэффициенты посредством шести алгебраических действий.*

Алгебраическое решение уравнения носит название решения уравнения в радикалах, ибо общая формула, выражающая корни уравнения данной степени $n > 1$ через коэффициенты (если только эта формула может быть построена), кроме рациональных операций над коэффициентами, непременно должна содержать действие извлечения корня. В самом деле, общая формула решения уравнения некоторой степени n (где $n > 1$) должна давать все n корней. Если бы эта формула не содержала радикалов, то она являлась бы рациональным выражением относительно коэффициентов. Поэтому, в силу однозначности рациональных операций, можно было бы по этой формуле вычислить лишь один, а не n корней уравнения. Действие извлечения корня можно толковать как решение двучленного уравнения, поэтому задачу решений уравнения в радикалах можно сформулировать следующим образом:

выразить корни данного уравнения через его коэффициенты посредством последовательного выполнения ряда рациональных операций и решения двучленных уравнений.

Из курса высшей алгебры известно, что

во-первых, *в общем виде в радикалах могут быть решены уравнения степени не выше 4-й. Уравнения же 5-й и более высоких степеней в общем виде не могут быть решены в радикалах;*

во-вторых, *существуют (как доказал Э. Галуа) конкретные уравнения (с числовыми коэффициентами), неразрешимые в радикалах.*

Для уравнения 2-й степени в § 80 была выведена формула, выражающая в общем виде, посредством алгебраических действий, значения корней через коэффициенты. Для уравнения 3-й и 4-й степеней соответствующие формулы приводятся в курсе высшей алгебры.

В ряде частных случаев уравнения высших степеней могут быть решены в радикалах; в задачу элементарной алгебры входит лишь указание отдельных видов уравнений высших степеней, решаемых алгебраически, и элементарных приемов решения этих уравнений. В практике решения уравнений умение пользоваться частными приемами имеет большое значение. Общие формулы решения уравнений 3-й и 4-й степеней достаточно громоздки; кроме того, препятствием при пользовании этими формулами являются так называемые «неприводимые случаи». Так, например, известно, что если кубическое уравнение имеет три различные действительные корня, то эти корни в общем случае не выражаются посредством действительных радикалов.

При решении уравнения степеней выше первой с параметрами в качестве особых случаев надо рассматривать системы значений параметров, при которых коэффициент при старшем члене обращается в нуль и получается уравнение более низкой степени.

Разложение левой части уравнения на множители

Пусть $P(x)$ — данный многочлен от аргумента x; если известно разложение $P(x)$ на множители:

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) \ldots P_k(x),$$

где ни один из множителей в правой части не является тривиальным делителем $P(x)$, то уравнение

$$P(x) = 0$$

эквивалентно совокупности уравнений (см. § 50):

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ \ldots, \ P_k(x) = 0.$$

Множество корней данного уравнения получается объединением в одно множество корней уравнений $P_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Если посредством применения известных методов удастся разложить многочлен $P(x)$ на множители (нетривиальные), то решение уравнения $P(x) = 0$ сведется к решению нескольких уравнений более низких степеней.

Примеры

1. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители:

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = (x^4 + 2x^3) + (5x^2 + 10x) - (6x + 12) =$$
$$= (x + 2)(x^3 + 5x - 6) = (x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 6).$$

Решение уравнения сводится к решению совокупности двух уравнений 1-й степени и одного уравнения 2-й степени:

$$x + 2 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x^2 + x + 6 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}.$$

В примерах 2—4 показано применение способа разложения на множители к извлечению корней в поле комплексных чисел.

2. Вычислить значение кубического корня из 1.

Решение. Требуется решить уравнение

$$x^3-1=0 \quad \text{или} \quad (x-1)(x^2+x+1)=0,$$

откуда

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x+1=0,$$

следовательно,

$$x_1=1, \quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Вычислить $\sqrt[4]{1}$.

Решим уравнение

$$x^4-1=0 \quad \text{или} \quad (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0,$$

откуда

$$x_1=1, \quad x_2=-1, \quad x_3=i, \quad x_4=-i.$$

4. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Решим уравнение $x^4+1=0$. Разложим левую часть на множители (стр. 83)

$$(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0.$$

Решив совокупность квадратных уравнений

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0 \quad \text{и} \quad x^2-x\sqrt{2}+1=0,$$

найдем:

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}, \quad x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

5. Решить уравнение

$$(9a+b-x^2)^2+(a+5b-3x^2)^2=(7a-b+x^2)^2+(7a+3b-5x^2)^2.$$

Решение. Имеем:

$$[(9a+b-x^2)^2-(7a-b+x^2)^2]-[(7a+3b-5x^2)^2-(a+5b-3x^2)^2]=0.$$

Разложив левую часть на множители, получим:

$$32a(a+b-x^2)-16(a+b-x^2)(3a-b-x^2)=0$$

и

$$16(a+b-x^2)(x^2+b-a)=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{a+b} \quad \text{и} \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{a-b}.$$

Трехчленные уравнения. Трехчленным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0 \quad (\text{где } a\neq 0).$$

Трехчленные уравнения решаются в радикалах. Введем новое неизвестное $y=x^n$, тогда получим вспомогательное квадратное уравнение

$$ay^2+by+c=0,$$

откуда

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Частным случаем трехчленного уравнения ($n = 2$) является биквадратное уравнение·

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Формула решения биквадратного уравнения

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

дает все четыре корня уравнения (среди корней могут быть и кратные). Исследуем корни биквадратного уравнения с действительными коэффициентами. Не нарушая общности, будем считать, что $a > 0$.

Случай 1°. $b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$, $b < 0$; корни вспомогательного квадратного уравнения

$$ay^2 + by + c = 0$$

положительны, для x^2 получим два различные положительные значения. Биквадратное уравнение имеет четыре действительные корня.

Случай 2°. $b^2 - 4ac > 0$, $c < 0$. Для x^2 получим два значения разных знаков, биквадратное уравнение имеет два действительные и два чисто мнимые корня.

Случай 3°. $b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Для x^2 получим два отрицательные значения, биквадратное уравнение имеет чисто мнимые корни.

Случай 4°. $c = 0$. Вспомогательное уравнение примет вид $ay^2 + by = 0$, откуда $y = x^2 = 0$ и $y = x^2 = -\frac{b}{a}$.

Если $b \neq 0$, то биквадратное уравнение имеет двукратный корень $x = 0$, прочие два корня действительны, если $b < 0$ и мнимы, если $b > 0$.

Если $b = c = 0$, то биквадратное уравнение имеет четырехкратный корень $x = 0$.

Случай 5°. $b^2 - 4ac < 0$. Для x^2 получаются два мнимые сопряженные значения, биквадратное уравнение имеет четыре мнимые различные (попарно сопряженные) корня.

Случай 6°. $b^2 - 4ac = 0$. Вспомогательное уравнение имеет двукратный корень

$$y = x^2 = -\frac{b}{2a}.$$

При $b > 0$ биквадратное уравнение имеет два мнимые двукратные корня, а при $b < 0$ — два действительные двукратные корня.

Примеры

1. Решить уравнение

$$x^6 - 3x^3 + 2 = 0.$$

Решение. Определяем $z = x^3$ из квадратного уравнения:

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Имеем: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, следовательно, получим совокупность двух уравнений: $x^3 = 1$ и $x^3 = 2$, из которой найдем:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \varepsilon, \quad x_3 = \varepsilon^2, \quad x_4 = \sqrt[3]{2}, \quad x_5 = \varepsilon\sqrt[3]{2}, \quad x_6 = \varepsilon^2\sqrt[3]{2},$$

где ε и ε^2 — мнимые кубические корни из 1. В поле действительных чисел данное уравнение имеет два решения $x = 1$ и $x = \sqrt[3]{2}$.

2. Разложить на множители биквадратный трехчлен

$$3x^4 + 26x^2 - 9.$$

Решение. Решим уравнение:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = 0;$$

имеем:

$$x^2 = \frac{-13 \pm \sqrt{196}}{3},$$

откуда

$$x_1 = 3i, \quad x_2 = -3i, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Над полем комплексных чисел:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 \equiv 3(x + 3i)(x - 3i)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \equiv$$

$$\equiv (x + 3i)(x - 3i)(\sqrt{3}\,x - 1)(\sqrt{3}\,x + 1);$$

над полем действительных чисел:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = (x^2 + 9)(\sqrt{3}\,x + 1)(\sqrt{3}\,x - 1);$$

над полем рациональных чисел:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = (x^2 + 9)(3x^2 - 1).$$

3. Найти значения $\sqrt[6]{-1}$ в поле комплексных чисел.

Решение. Решим уравнение $x^6 + 1 = 0$.

Имеем:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0,$$

данное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений.

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Первое есть биквадратное уравнение, из которого найдем:

$$x^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

По правилу извлечения квадратного корня из комплексного числа получим:

$$x_{1,2} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \quad x_{3,4} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

Решив второе уравнение (1), найдем: $x_{5,6} = \pm i$.

4. Решить уравнение

$$x^4 - 2(a^2 + 4ab - b^2)x^2 + (a-b)^4 = 0.$$

Решение. Находим:

$$x^2 = (a^2 + 4ab - b^2) \pm \sqrt{(a^2 + 4ab - b^2)^2 - (a-b)^4}.$$

Разложив подкоренное выражение на множители, получим:

$$x^2 = a(a+b) + b(3a-b) \pm 2\sqrt{ab(a+b)(3a-b)},$$

откуда

$$x = \pm\left[\sqrt{a(a+b)} \pm \sqrt{b(3a-b)}\right].$$

Графический способ решения уравнения четвертой степени

Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= R^2,\\ y &= x^2.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Исключив неизвестное y, получим уравнение:

$$x^4 + (1 - 2\beta)x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

Отсюда вытекает следующий графический способ нахождения действительных корней уравнения вида

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Из условий:

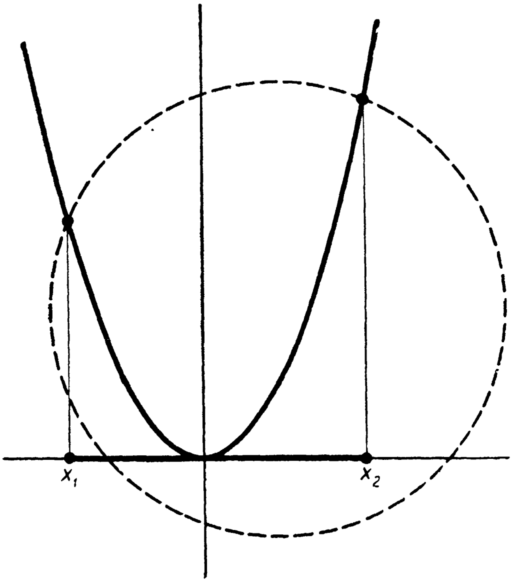
$$1 - 2\beta = p, \quad -2\alpha = q, \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = r$$

найдем значения параметров α, β и R, а затем построим параболу $y = x^2$ и окружность с центром в точке (α, β) и с радиусом равным R. Искомые корни суть абсциссы точек пересечения параболы и окружности.

Всякое уравнение четвертой степени

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

(без ущерба для общности, коэффициент при старшем члене можно считать равным 1) подстановкой $x = z - \frac{b}{4}$ можно привести к виду (1) и, следовательно, найти графически его действительные корни указанным построением.



Черт. 113

На чертеже 113 представлено графическое решение уравнения

$$x^4 - 3x^2 - 2x - 4 = 0;$$

имеем:

$$1 - 2\beta = -3, \quad -2\alpha = -2, \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = -4,$$

откуда

$$\beta = 2, \quad \alpha = 1, \quad R = 3.$$

Возвратные уравнения. Возвратным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0,$$

в котором коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца, одинаковы. Ни один из корней возвратного уравнения не равен нулю. В самом деле, если бы $x = 0$ был корнем уравнения, то мы имели бы $a = 0$, т. е. уравнение имело бы более низкую степень.

Возвратное уравнение обладает следующим свойством: если число α есть корень, то обратное число $\frac{1}{\alpha}$ также является его корнем. В самом деле,

$$a\frac{1}{\alpha^n} + b\frac{1}{\alpha^{n-1}} + \ldots + b\frac{1}{\alpha} + a = \frac{a + b\alpha + \ldots + b\alpha^{n-1} + a\alpha^n}{\alpha^n} = 0.$$

Рассмотрим сначала возвратное уравнение четной степени ($n = 2k$). Разделив уравнение почленно на x^k и сгруппировав члены, как показано ниже, получим:

$$a\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + l\left(x + \frac{1}{x}\right) + f = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) эквивалентно данному возвратному уравнению. В самом деле, при переходе к уравнению (1) происходит сужение области определения, так как из нее исключается значение $x = 0$. Однако потери решений не происходит, так как это значение не удовлетворяет данному уравнению.

Положив $x + \frac{1}{x} = y$, найдем последовательно:

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}; \quad y^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}, \ldots,$$

$$y^k = x^k + kx^{k-2} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{k-4} + \ldots + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{x^{k-4}} + k\frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + k\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots$$

Откуда найдем последовательно:

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \text{ и т. д.} \quad (2)$$

Подставив в (1), получим уравнение k-й степени относительно y. Соответствующие значения x найдем из квадратного уравнения

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

В частности, решение возвратного уравнения четвертой степени в общем случае сводится к решению трех квадратных уравнений: одного для определения вспомогательного неизвестного y и совокупности двух для определения x.

Решение возвратного уравнения нечетной степени ($n = 2k+1$) приводится к решению возвратного уравнения четной степени. Как видно непосредственно, уравнение

$$ax^{2k+1} + bx^{2k} + cx^{2k-1} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$$

имеет корень $x=-1$, следовательно, его левая часть делится на $x+1$. Представим левую часть в виде суммы слагаемых, каждое из которых делится на $x+1$:

$$a(x^{2k+1}+1)+bx(x^{2k-1}+1)+cx^2(x^{2k-3}+1)+\ldots+$$
$$+lx^k(x+1)=0.$$

Разделив каждый член на $x+1$, представим частное в следующем виде:

$$\begin{aligned} ax^{2k}-ax^{2k-1}+ax^{2k-2}-\ldots-ax+a&+\\ +bx^{2k-1}-bx^{2k-2}+\ldots+bx&+\\ +\ldots \qquad\qquad \ldots&+\\ +lx^k&. \end{aligned}$$

Коэффициенты членов частного, равноотстоящих от начала и конца, равны между собой; следовательно, данное уравнение можно представить в виде

$$(x+1)(ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a)=0.$$

Таким образом, задача сводится к решению возвратного уравнения четной степени:

$$ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a=0.$$

Уравнение

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0,$$

в котором коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца при четных степенях x, равны, а при нечетных степенях противоположны по знаку, подстановкой $y=x-\frac{1}{x}$ приведется к уравнению 2-й степени (предоставляем учащимся провести соответствующие рассуждения).

Примеры

1. Вычислить значения $\sqrt[5]{1}$ в поле комплексных чисел.

Решение. Решаем уравнение $x^5-1=0$. Левая часть разлагается на множители:

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

откуда получим совокупность двух уравнений:

$$x-1=0; \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Первое дает $x_1=1$. Второе уравнение возвратное: положив $x+\frac{1}{x}=y$, получим:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=y^2+y-1=0.$$

откуда

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Для определения x получим совокупность двух квадратных уравнений:

$$2x^2 - (-1 + \sqrt{5})x + 2 = 0, \quad 2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0,$$

из которой найдем:

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$x_{4,5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

2. Решить уравнение

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Решение. Один из корней данного уравнения $x_1 = 1$ — известен. Разделив левую часть на $x + 1$, получим для определения других корней возвратное уравнение:

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Положим $y = x + \frac{1}{x}$,

тогда получим:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0,$$

откуда

$$y_1 = -4, \quad y_2 = \frac{5}{2}.$$

Для определения x имеем совокупность двух уравнений·

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

из которой найдем:

$$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}, \quad x_4 = 2 \quad \text{и} \quad x_5 = \frac{1}{2}.$$

На нижеследующих примерах показаны различные частные приемы решения уравнений высших степеней, основанные на частных свойствах рассматриваемых уравнений. Эти приемы невозможно предусмотреть общей теорией.

Примеры

1. Решить уравнение

$$(a - x)^3 (x - b)^2 + (a - x)^2 (x - b)^3 = a^2 b^2 (a - b).$$

Решение. Разложим на множители левую часть:

$$(a - b)(a - x)^2 (x - b)^2 = a^2 b^2 (a - b).$$

Если $a \neq b$, то

$$(x - a)(x - b) = \pm ab,$$

откуда

$$x_1=0, \quad x_2=a+b, \quad x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(a+b\pm\sqrt{a^2-6ab+b^2}\right).$$

Особый случай $a=b$. Уравнение удовлетворяется тождественно.

2. Решить уравнение

$$(x+a)(x+a+1)(x+a+2)(x+a+3)=b.$$

Решение. Перемножим в левой части первый и четвертый, второй и третий множители:

$$[x^2+(2a+3)x+a^2+3a][x^2+(2a+3)x+a^2+3a+2]=b.$$

Введем вспомогательное неизвестное, положив

$$y=x^2+(2a+3)x+a^2+3a,$$

получим

$$y^2+2y-b=0, \quad \text{откуда} \quad y=-1\pm\sqrt{1+b}.$$

Для определения x получим совокупность двух квадратных уравнений:

$$x^2+(2a+3)x+a^2+3a+1+\sqrt{1+b}=0,$$

$$x^2+(2a+3)x+a^2+3a+1-\sqrt{1+b}=0.$$

3. Решить уравнение

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c.$$

Решение. Положив $y=x+\frac{a+b}{2}$, получим:

$$\left(y+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a-b}{2}\right)^4=c,$$

ли после упрощений:

$$y^4+6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2y^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4-\frac{c}{2}=0,$$

т. е. биквадратное уравнение.

4. Решить уравнение

$$(x+h)(x+2h)(x+3h)(x+4h)=(x+h)^2+(x+2h)^2+(x+3h)^2+(x+4h)^2.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное, положив

$$y=x+\frac{5}{2}h.$$

Преобразованное уравнение примет вид:

$$\left(y-\frac{3}{2}h\right)\left(y-\frac{h}{2}\right)\left(y+\frac{h}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}h\right)=\left(y-\frac{3}{2}h\right)^2+$$
$$+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2+\left(y+\frac{h}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}h\right)^2,$$

откуда

$$\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(y^2-\frac{9}{4}h^2\right)=4y^2+5h^2.$$

Для нахождения y получилось биквадратное уравнение

5. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 + x - a = 0.$$

Решение. Для разложения левой части на множители применим метод неопределенных коэффициентов, положив:

$$x^4 - 2x^3 + x - a = (x^2 - x + A)(x^2 - x + B);$$

сравнив коэффициенты при x^2, x и свободный член, получим систему уравнений:

$$A + B + 1 = 0, \quad -A - B = 1, \quad AB = -a.$$

Коэффициенты A и B суть корни квадратного уравнения

$$z^2 + z - a = 0.$$

Можно положить

$$A = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \qquad B = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Приравняв каждый множитель нулю, получим для определения x совокупность двух квадратных уравнений:

$$x^2 - x + \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} = 0.$$

6. Решить уравнение

$$x^4 - 12x + 323 = 0,$$

Решение. Заметив, что $323 = 18^2 - 1$, представим уравнение в виде:

$$x^4 + 18^2 = 12x + 1.$$

Прибавив к обеим частям $36x^2$, получим:

$$(x^2 + 18)^2 = (6x + 1)^2.$$

Отсюда получим совокупность двух квадратных уравнений:

$$x^2 + 18 = \pm (6x + 1).$$

7. Решить уравнение

$$\frac{1 - x^4}{1 - a^4} = \frac{1 - x}{1 - a}, \quad \text{где} \quad a^4 \neq 1.$$

Решение. Непосредственно очевидны два корня: $x = 1$ и $x = a$, следовательно, левая часть уравнения

$$(x^4 - 1)(a - 1) - (x - 1)(a^4 - 1) = 0$$

разделится на $x - 1$ и $x - a$. Разделив на $x - 1$ и сократив на $a - 1$, получим:

$$x^3 + x^2 + x - (a^3 + a + a) = 0.$$

Разделив на $x - a$, получим

$$x^2 + (a + 1)x + (a^2 + a + 1) = 0.$$

Корни уравнения суть:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = a \quad \text{и} \quad x_{3,4} = \frac{-a - 1 \pm i\sqrt{3a^2 + 2a + 3}}{2}$$

При действительном a корни $x_{3,4}$ мнимы, так как трехчлен (от параметра a) под радикалом знакоположителен.

8. Решить уравнение

$$(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3.$$

Решение. Так как $a+b-2x=(a-x)+(b-x)$, то уравнение можно представить в следующем виде:

$$(a-x)^3+(b-x)^3=[(a-x)+(b-x)]^3.$$

Откуда

$$3(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$$

и, следовательно,

$$x_1=a, \quad x_2=b, \quad x_3=\frac{a+b}{2}.$$

9. Решить уравнение

$$32x^4-48x^3-10x^2+21x+5=0.$$

Решение. Представим левую часть в виде

$$2(16x^4-24x^3+9x^2)-7(4x^2-3x)+5=0.$$

Положив $y=4x^2-3x$, получим:

$$2y^2-7y+5=0,$$

откуда $y_1=1$, $y_2=\frac{5}{2}$. Для определения x получим совокупность двух квадратных уравнений:

$$4x^2-3x-1=0 \quad \text{и} \quad 8x^2-6x-5=0.$$

10. Решить уравнение

$$x^4+ax^3+bx^2+adx+d^2=0, \quad \text{где} \quad d\neq 0.$$

Решение. Представим левую часть в виде

$$(x^4+d^2)+ax(x^2+d)+bx^2=0,$$

разделив на x^2, получим:

$$\left(x^2+\frac{d^2}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{d}{x}\right)+b=0.$$

Уравнение решается подстановкой $y=x+\frac{d}{x}$ по тому же способу как возвратное.

§ 87. Дробные уравнения

Определение. *Дробным рациональным уравнением называется уравнение вида*

$$R_1(x, y, \ldots, z)=R_2(x, y, \ldots, z), \tag{R}$$

где левая и правая части суть некоторые рациональные выражения от неизвестных $x, y, \ldots, z$.

Заменим это уравнение эквивалентным уравнением

$$R_1(x, y, \ldots, z)-R_2(x, y, \ldots, z)=0 \tag{1}$$

и приведем левую часть последнего уравнения к каноническому виду, тогда получим уравнение

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)} = 0, \tag{P/Q}$$

где числитель и знаменатель суть многочлены от неизвестных.

Уравнение (P/Q) будем называть **канонически м** видом рационального уравнения.

Всякая система значений неизвестных, удовлетворяющая уравнению (P/Q), обращает в нуль числитель левой части этого уравнения:

$$P(x, y, \ldots, z) = 0. \tag{P}$$

Всякое решение данного уравнения (R) удовлетворяет также и уравнению (P), однако, обратного (в общем случае) утверждать нельзя. В самом деле, так как при приведении рационального выражения к каноническому виду может расшириться его область определения, то область определения уравнения (P/Q) может оказаться шире области определения данного уравнения (R). Далее, так как область определения уравнения (P) в общем случае шире области определения уравнения (P/Q), то при переходе от уравнения (R) к уравнению (P) область определения может измениться лишь в сторону ее расширения, а потому возможно появление посторонних решений. Посторонним будет всякое такое решение алгебраического уравнения (P), при котором хотя бы одно из выражений $R_1(x, y, \ldots, z)$, либо $R_2(x, y, \ldots, z)$ теряет смысл. Следовательно, решения уравнения (P) должны быть подвергнуты проверке путем подстановки в данное уравнение.

Изложенное служит обоснованием нижеследующего правила решения дробных уравнений, которое обычно применяется в практике средней школы.

Правило. *Для решения дробного уравнения с одним неизвестным достаточно:*

1° *перенести все члены в левую часть;*

2° *полученное в левой части выражение представить в виде алгебраической дроби;*

3° *решить алгебраическое уравнение, приравняв нулю числитель полученной алгебраической дроби;*

4° *найденные решения проверить путем подстановки в данное уравнение.*

Примеры

1. Решить уравнение

$$\frac{\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}.$$

Решение Приводим левую часть к каноническому виду:

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{14-x}.$$

Перенеся все члены в левую часть, после приведения к канионическому виду получим

$$\frac{5(5-x)}{(x+1)(14-x)} = 0, \quad \text{откуда} \quad 5-x=0.$$

Уравнение имеет единственное решение $x = 5$, в чем убедимся проверкой.

2. Решить уравнение

$$1 - \frac{x-3}{x^2+x-2} = \frac{2x}{x^2+x-2}.$$

Решение. После переноса всех членов в левую часть, преобразования и сокращения получим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} = 0,$$

имеющее единственное решение $x = 1$. Это решение является посторонним для данного уравнения, так как при подстановке $x = 1$ его левая и правая части теряют смысл.

Примечание. Если принять дополнительное определение об особых решениях, что число $x = 1$ следует считать особым корнем данного уравнения, так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+2} = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решение. Сложим попарно следующие дроби: 1-ю и 6-ю, 2-ю и 5-ю, 3-ю и 4-ю, заметив, что для каждой пары свободные члены знаменателей имеют одинаковую сумму —5:

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x} - \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + \frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6} = 0.$$

Откуда $2x-5=0$ и $x_1 = \frac{5}{2}$. Для нахождения прочих корней получим уравнение:

$$\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} = 0.$$

Введем вспомогательное неизвестное

$$y = x^2 - 5x.$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{3}{y} + \frac{1}{y+4} + \frac{4}{y+6} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{2y^2+13y+18}{y(y+4)(y+6)} = 0,$$

откуда

$$2y^2 + 13y + 18 = 0 \quad \text{и} \quad y_1 = -\frac{9}{2}, \quad y_2 = -2.$$

Для определения x получим совокупность двух квадратных уравнений

$$x^2-5x+2=0 \quad \text{и} \quad 2x^2-10x+9=0.$$

Откуда найдем:

$$x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}, \quad x_{4,5}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Ни один из найденных корней не равен 0, 1, 2, 3, 4, 5, поэтому все эти корни принадлежат области определения данного уравнения, а поэтому являются его решениями.

На нижеследующих двух примерах показано решение и исследование дробных уравнений, содержащих параметры.

4. Решить уравнение

$$\frac{x+2a-b}{x+2b-a}\cdot\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{2x+2a-b}{2x+2b-a}. \tag{1}$$

Решение. Допустимые значения параметров определяются условием $b\neq 0$, a — произвольное число. При данной допустимой системе значений параметров область определения уравнения находится из условий:

$$x\neq -2b+a, \quad x\neq -b, \quad x\neq -b+\frac{a}{2}.$$

Перенесем все члены в левую часть, приведем полученную разность к общему знаменателю и приравняем нулю числитель, тогда получим алгебраическое уравнение:

$$b(x+2a-b)(2x+2b-a)(x+a)-a(x+2b-a)(2x+2a-b)(x+b)=0. \tag{2}$$

Левая часть есть многочлен третьей степени, для приведения его к каноническому виду применим метод неопределенных коэффициентов, положив:

$$b(x+2a-b)(2x+2b-a)(x+a)-a(x+2b-a)(2x+2a-b)(x+b)\equiv$$
$$\equiv Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

Приравняв коэффициенты при x^3, получим:

$$2b-2a=A, \quad \text{т. е.} \quad A=2(b-a).$$

Положив $x=0$, получим $D=0$.

Положив $x=-a$, а затем $x=-b$, получим:

$$\left.\begin{aligned}+2ab(b-a)^2&=-2a^3(b-a)+Ba^2-Ca,\\ -2ab(a-b)^2&=-2b^3(b-a)+Bb^2-Cb\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}a^2B-aC&=2a(b-a)(a^2-ab+b^2),\\ b^2B-bC&=2b(b-a)(a^2-ab+b^2).\end{aligned}\right\}$$

Исключим C, для чего умножим почленно первое уравнение на b, второе на a и вычтем, тогда получим:

$$ab(a-b)B=0.$$

Откуда при $a\neq 0$ и $a\neq b$ получим $B=0$ и далее

$$C=-2(b-a)(a^2-ab+b^2).$$

Случаи $a=0$ и $a=b$ должны рассматриваться как особые.

Подставив значения коэффициентов A, B, C и D, приведем уравнение (2) к следующему виду:

$$2(b-a)x(x^2-a^2+ab^2-b^2)=0, \tag{3}$$

откуда (так как $a \neq b$)

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \quad x_3 = -\sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Особые случаи. В качестве особых должны быть рассмотрены следующие случаи: $a = 0$, $a = b$, а также случай, когда при значениях x_1, x_2 и x_3 в уравнении (1) хотя бы один из знаменателей обращается в нуль.

Случай 1°. $a = 0$. Уравнение (1) примет вид: $\frac{x-b}{x+2b} \cdot \frac{x}{x+b} = 0$, откуда $x = 0$ и $x = b$.

Корень $x = -b$, который получится по формулам (3), при $a = 0$ оказывается посторонним.

Случай 2°. $a = b$ $(\neq 0)$. Уравнение (1) удовлетворяется во всей области определения, т. е. при $x \neq -b$ и $x \neq -\frac{b}{2}$.

Случай 3°. Если при $x = 0$ обращается в нуль знаменатель $x - 2b - a$, то $a = 2b$. При $a = 2b$ уравнение (1) примет вид:

$$\frac{x+3b}{x} \cdot \frac{x+2b}{x+b} = \frac{2x-3b}{x}. \tag{1'}$$

После приведения к каноническому виду приравняем нулю числитель, тогда получим:

$$x(x^2 - 3b^2) = 0, \quad \text{откуда} \quad x = \pm\sqrt{3}\, b$$

($x = 0$ — посторонний корень).

Случай 4°. При $x = 0$ знаменатель $x + b$ обращается в нуль, тогда $b = 0$. этот случай невозможен, так как по условию $b \neq 0$.

Случай 5°. Если $x = 0$, знаменатель $2x + 2b - a$ обращается в нуль, то $a = 2b$, т. е. имеет место случай 3°.

Случай 6°. Если $x = x_{2,3} = \pm\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, знаменатель $x - 2b - a$ обращается в нуль, то

$$\pm\sqrt{a^2 - ab + b^2} = 2b - a.$$

Откуда по возведении обеих частей в квадрат получим либо $b = 0$, что невозможно, либо $a = b$, т. е. случай 2°.

Случай 7°. Если при $x = x_{2,3}$ имеем $x + b = 0$, то $\pm\sqrt{a^2 - ab + b^2} = b$, откуда, либо $a = b$, т. е. имеет место случай 2°, либо $a = 0$, т. е. имеет место случай (1°).

Случай 8°. Если при $x = x_{2,3}$ имеем $2x + 2b - a = 0$, т. е.

$$\pm 2\sqrt{a^2 + ab + b^2} = 2b - a,$$

то $a = 0$, т. е. имеет место случай 1°.

Итак, особыми следует считать следующие системы значений параметров: $a = 0$, $b \neq 0$ (произвольное); $a = b\,(\neq 0)$ и $a = 2b$ $(\neq 0)$.

5. Решить уравнение:

$$\frac{x^2 + 2ax + ac}{x^2 + 2cx + ac} = \frac{ax}{(x+a)(x+c)} \tag{1}$$

Решение. Составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{2x^2 + 2(a+c)x + 2ac}{2(a-c)x} = \frac{ax + (x+a)(x+c)}{ax - (x+a)(x+c)}, \tag{2}$$

где $a \neq c$. Случай $a = c$ должен быть рассмотрен как особый. Введем вспомогательное неизестное, положив

$$\frac{(x+a)(x+c)}{x} = y \quad \text{или} \quad (x+a)(x+c) = xy, \tag{3}$$

подставив в уравнение, получим:

$$\frac{y}{a-c} = \frac{a+y}{a-y}. \tag{4}$$

Приведем последнее уравнение к каноническому виду и приравняем нулю числитель:

$$y^2 - cy + a(a-c) = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) найдем в общем случае два значения y и, подставив в (3), получим совокупность двух квадратных уравнений для определения x (выкладки опускаем).

Решение уравнения (5) не принадлежит области определения уравнения (4), если $y = a$ удовлетворяет уравнению (5):

$$a^2 - ac + a(a-c) = 0 \quad \text{или} \quad a(a-c) = 0,$$

откуда получим особый случай $a = 0$.

Формула подстановки (3) теряет смысл при $x = 0$ (сужение области определения). Однако потеря корня не может иметь места, так как при $x = 0$ уравнение (1) не удовлетворяется (проверить!).

При решении уравнения посредством производной пропорции (см. стр. 197) могут быть потеряны решения, удовлетворяющие условиям:

$$2(a-c)x = 0, \quad ax - (x+a)(x+c) = 0,$$

откуда $x = 0$, значит, потеря решений не может иметь места.

Значения x, найденные из (2), удовлетворяющие условию

$$x^2 + 2cx + ac = (x+a)(x+c) = 0,$$

могут появиться в качестве посторонних корней. Из этого условия следует $x(a-c) = 0$, откуда $x = 0$ не есть корень уравнения (2).

Особые случаи. Из изложенного следует, что подлежат особому рассмотрению следующие случаи $a = c$ и $a = 0$, $c \neq 0$.

Случай 1°. $a = c$, уравнение (1) примет вид:

$$\frac{ax}{(x+a)^2} = 1, \tag{6}$$

из которого в общем случае найдем два корня:

$$x^2 + ax + a^2 = 0 \quad \text{и} \quad x_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{3}a}{2}.$$

Посторонние решения возможны, если $x_{1,2} = -a$ или $-a \pm i\sqrt{a} = -2a$, откуда $a = 0$, но при $a = 0$ уравнение (6) противоречиво.

Случай 2°. $a = 0$, $c \neq 0$. Уравнение (1) примет вид: $\frac{x^2}{x^2+2cx} = 0$, это уравнение не имеет решений.

6. Нижеследующая система дробных уравнений обычно решается посредством введения новых неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_1}{a_1x + b_1y + c_1} + \frac{B_1}{a_2x + b_2y + c_2} &= D_1, \\ \frac{A_2}{a_1x + b_1y + c_1} + \frac{B_2}{a_2x + b_2y + c_2} &= D_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Положим

$$\frac{1}{a_1x+b_1y+c_1}=u, \quad \frac{1}{a_2x+b_2y+c_2}=v,$$

тогда получим

$$\left.\begin{aligned} A_1u+B_1v=D_1, \\ A_2u+B_2v=D_2. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Систему (A) надо решать при дополнительных условиях: числа u и v (каждое) отличны от нуля: $u\neq 0$, а также $v\neq 0$.

Положим: $\Delta=A_1B_2-A_2B_1$, $\Delta_1=D_1B_2-D_2B_1$, $\Delta_2=A_1D_2-A_2D_1$.

Случай 1°. $\Delta\neq 0$, $\Delta_1\neq 0$, $\Delta_2\neq 0$, система (A) имеет единственное решение

$$u=\frac{D_1B_2-D_2B_1}{A_1B_2-A_2B_1}; \quad v=\frac{A_1B_2-A_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1};$$

для нахождения x и y получим линейную систему:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=\frac{1}{u}-c_1, \\ a_2x+b_2y=\frac{1}{v}-c_2, \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

которая решается и исследуется обычными способами.

Случай 2°. $\Delta\neq 0$, $\Delta_1=0$ В этом случае $u=0$, дополнительное условие $u\neq 0$ не выполняется, система (1) не имеет решений.

Случай 3°. $\Delta\neq 0$, $\Delta_2=0$, имеем $v=0$, система (1) не имеет решений.

Случай 4° $\Delta=0$, но $\Delta_1\neq 0$ или $\Delta_2\neq 0$, система (A) противоречива, система (1) также противоречива

Случай 5° $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$, но хотя бы один из коэффициентов системы (A) отличен от нуля. Система (A) содержит одно независимое уравнение. Из первого уравнения получим (если, например, $B_1\neq 0$).

$$v=-\frac{A_1}{B_1}u+\frac{D_1}{B_1}=ku+l$$

В этом случае система (L) будет содержать параметр u, допустимые значения которого определяются условиями $u\neq 0$, $ku+l\neq 0$ (т е. $v\neq 0$).

Случай равенства нулю всех коэффициентов при неизвестных системы (A) не представляет интереса.

§ 88. Системы уравнений высших степеней

Вопрос о решении систем уравнений высших степеней в общем виде трактуется в курсе высшей алгебры в теории исключения. Однако применение общих правил исключения неизвестных (при помощи результантов) на практике оказывается чрезвычайно громоздким. Поэтому в практике решения систем уравнений высших степеней стараются избежать этих общих правил, а применять различные частные приемы, позволяющие в ряде конкретных случаев упростить процесс решения системы В задачу курса элеметарной алгебры входит лишь установление некоторых частных приемов решения систем алгебраических уравнений высших степеней, наиболее часто встречающихся на практике.

Системы, содержащие линейные уравнения. Рассмотрим систему

$$(\mathrm{L},\mathrm{F})\begin{cases}\left.\begin{array}{r}L_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0, L_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0, \\ \ldots, L_k(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0\end{array}\right\} (\mathrm{L}) \\ \left.\begin{array}{r}F_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0, F_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0, \\ \ldots, F_m(x, y, \ldots, u, v, \ldots, w)=0\end{array}\right\} (\mathrm{F})\end{cases}$$

уравнений с неизвестными $x, y, \ldots, u, v, \ldots, w$, в которой уравнения (L) являются линейными, прочие же уравнения (F) — алгебраическими степени выше 1.

Рассмотрим отдельно линейную систему (L).

Если система (L) противоречива, то и система (L, F) противоречива.

Если система (L) имеет единственное решение, то достаточно найденные из (L) численные значения неизвестных подставить в уравнения (F). Если все уравнения (F) удовлетворяются, то решение (L) является единственным решением системы (L, F); если же хотя бы одно из уравнений (F) не удовлетворяется, то система (L, F) не имеет решений.

Если система (L) имеет бесконечное множество решений, то формулы общего решения выражают некоторые неизвестные в виде линейных функций от прочих неизвестных, последним можно придавать произвольные значения. Пусть, например, из системы (L) неизвестные $u, v, \ldots, w$ выражены через неизвестные $x, y, \ldots$; подставив выражения $u, v, \ldots, w$ в уравнения (F), получим систему m уравнений (по числу уравнений (F)) с неизвестными $x, y, \ldots$. В данном случае решение системы (L, F) сводится к решению системы меньшего числа уравнений с меньшим числом неизвестных. Так как неизвестные $u, v, \ldots, w$ являются линейными функциями от неизвестных $x, y, \ldots$, то при подстановке в уравнения (F) степень каждого из этих уравнений не повысится. Следовательно, получится система уравнений, степени которых не превышают степеней соответственных уравнений первоначальной системы.

Геометрическая интерпретация. Решение системы уравнений

$$\left.\begin{array}{lr} Ax+By+C=0 & (\mathrm{l}), \\ \varphi(x, y)=0 & (\varphi)\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{l}, \varphi)$$

геометрически интерпретируется как нахождение точки пересечения линии (φ) с прямой линией (l). Число этих точек не превышает степени многочлена φ (x, y).

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$x-2y-8z=-13, \qquad (1)$$

$$5x+3y-z=0, \qquad (2)$$

$$2x^2+4y^2-z^2+6yz-8xz+15xy+51x+18y+8=0. \qquad (3)$$

Решение. Найдем общее решение системы уравнения (1) и (2). Умножив (1) на 5, вычитаем из (2), получим (после сокращения)

$$y+3z=5. \qquad (1,\ 2)$$

Из уравнений (1) и (1, 2) получим искомое общее решение в следующем виде:

$$x=-3+2z, \quad y=5-3z.$$

Подставив в уравнение (3) после упрощения, получим:

$$z^2-3z+2=0, \quad \text{откуда} \quad z_1=1, \quad z_2=2.$$

Система имеет два решения:

$$x_1=-1, \quad y_1=2, \quad z_1=1 \quad \text{и} \quad x_2=1, \quad y_2=-1, \quad z_2=2$$

2. Найти значения параметра m, при которых система уравнений

$$x-my-(2+m)=0 \quad \text{и} \quad x^2+9y^2-9=0$$

имеет единственное решение.

Решение. Общее решение первого уравнения можно представить в виде:

$$x=my+m+2.$$

Подставив во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно y:

$$y^2(m^2+9)+2m(m+2)y+m^2+4m-5=0. \qquad (1)$$

Случай 1°. $m^2+9=0$, т. е. $m=\pm 3i$, при каждом из этих значений m уравнение (1) линейное с коэффициентом, при y, отличном от нуля, и образующее совместно с первым уравнением системы линейную треугольную систему, последняя имеет единственное решение.

Случай 2°. Квадратное уравнение (1) имеет двукратный корень, если

$$\Delta=m^2(m+2)^2-(m^2+9)(m^2+4m-5)=45-36m=0,$$

откуда $m=\dfrac{4}{5}$.

Примечание. Случаи 1° и 2° имеют различный геометрический смысл, в случае 1° прямая $x-my-(2+m)=0$ имеет асимптотическое направление относительно линии, изображающей второе уравнение, а в случае 2° касается этой линии. Во втором случае (в отличие от первого) говорят, что система имеет двукратное решение (двукратная точка пересечения).

Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными.

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0, && (F)\\ &a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{12}y^2+2a'_1x+2a'_2y+a'_0=0 && (F') \end{aligned}\right\} (F, F')$$

или в сокращенной записи:

$$F=0, \quad F'=0.$$

Допустим, что оба уравнения содержат члены с квадратами обоих неизвестных, т. е. ни один из коэффициентов a_{11}, a'_{11}, a_{22}, a'_{22} не равен нулю. Из уравнений (1) и (2) можно исключить квадрат одного из неизвестных. Так, например, уравнение

$$a'_{22}F - a_{22}F' = 0$$

не содержит y^2 и вместе с одним из уравнений (F) или (F′) составляет систему, эквивалентную системе (F, F′). На основании изложенного достаточно рассмотреть систему (F, F′), с которой одно из уравнений, например, (F′) не содержит y^2, т. е. $a'_{22} = 0$:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0. \qquad (F')$$

Правая часть (F′) есть многочлен первой степени относительно y:

$$2(a'_{12}x + a'_2)y + (a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0) = 0.$$

Если $x \neq -\dfrac{a'_2}{a'_{12}}$, то из (F′) найдем:

$$y = -\frac{a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0}{a'_{12}x + a'_2}.$$

Подставив в уравнение (F), получим дробное уравнение:

$$a_{11}x_2 - 2a_{12}x\frac{a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0}{a'_{12}x + a'_2} + a_{22}\left(\frac{a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0}{a'_{12}x + a'_2}\right)^2 +$$
$$+ 2a_1x - 2a_2\frac{a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0}{a'_{12}x + a'_2} + a_0 = 0,$$

которое в общем случае приводится к алгебраическому уравнению четвертой степени. Следовательно, в общем случае система (F, F′) имеет четыре решения.

Изложенным приемом не могут быть найдены решения (если они существуют), для которых неизвестное x имеет значение $x = -\dfrac{a'_2}{a'_{12}}$. Если это значение x не удовлетворяет уравнению

$$a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0 = 0, \qquad (1)$$

то (F′), а следовательно, и система (F, F′) не имеет решений вида $\left(-\dfrac{a'_2}{a'_{12}}, y\right)$. Если значение $x = -\dfrac{a'_2}{a'_{12}}$ удовлетворяет уравнению (1), то (F′) при $x = -\dfrac{a'_2}{a'_{12}}$ удовлетворяется тождественно относительно y. Подставив $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ в уравнение (F), получим квадратное (в общем случае) уравнение для определения соответствующего значения y.

Примечание. Прямая $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ имеет асимптотическое направление относительно линии второго порядка, заданной уравнением

$$a_{11}'x^2 + 2a_{12}'xy + 2a_1'x + 2a_2'y + a_0' = 0. \tag{F'}$$

Если значение $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ удовлетворяет уравнению (1), то линия (F′) является распадающейся и прямая $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ входит в ее состав. Для нахождения решений вида $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ достаточно в этом случае найти точки пересечения прямой $x = -\frac{a_2'}{a_{12}'}$ и линии (F).

Геометрическая интерпретация. Каждое из уравнений (F) и (F′) в отдельности изображает линию второго порядка, решение системы (F, F′) есть нахождение точек пересечения этих линий. Две линии второго порядка могут иметь не больше четырех точек пересечения (черт. 114), некоторые точки могут быть кратными (касание). Если каждая из линий распадается на пару прямых, причем обе пары имеют общую прямую, то система (FF′) имеет бесконечное множество решений.

Примеры

1. **Решить систему**

$$x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0,$$
$$2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0.$$

Решение. Умножим (1) на 2 и вычтем из него (2):

$$3xy - 2y^2 - 3x + 9y - 7 = 0. \tag{1,2}$$

Откуда

$$3(y-1)x = 2y^2 - 9y + 7 \quad \text{и} \quad x = \frac{2y^2 - 9y + 7}{3(y-1)} \quad \text{при} \quad y \neq 1.$$

Подставив найденное выражение для x в (1), получим:

$$\frac{y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 2}{y-1} = 0.$$

Числитель имеет корни:

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -2 \quad \text{и} \quad y_{3,4} = 1.$$

Для корней $y_1=-1$ и $y_2=2$ найдем соответствующие решения системы:

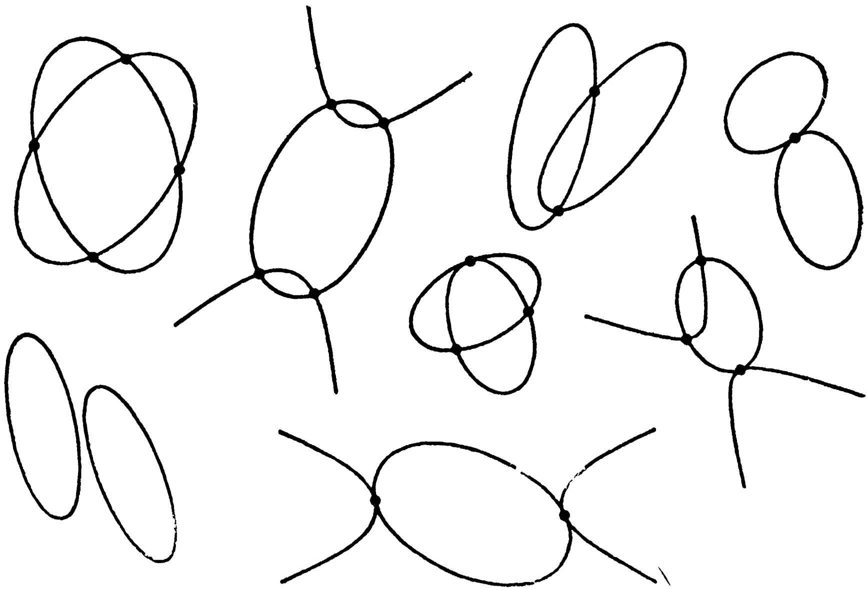
$$x_1 = -3, \quad y_1 = -1 \quad \text{и} \quad x_2 = -1, \quad y_2 = 2.$$

При значении $y = 1$ уравнение (1, 2) удовлетворяется тождественно, положив в уравнении (1) или (2) $y=1$, получим квадратное уравнение:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

и найдем еще два решения системы:

$$x_3 = 3, \quad y_3 = 1 \quad \text{и} \quad x_4 = 1, \quad y_4 = 1.$$



Черт. 114

§ 89. Уравнения однородные и приводящиеся к однородным

Однородным уравнением называется уравнение вида:

$$f(x, y, \ldots, z) = 0, \tag{f}$$

где $f(x, y, \ldots, z)$ — однородный многочлен.

Всякое однородное уравнение, а также всякая система однородных уравнений, имеет тривиальное решение $x=y=\ldots=z=0$. Существование нетривиальных решений однородных уравнений и систем подлежит специальному исследованию. Если однородное уравнение (или однородная система) имеет нетривиальное решение $x = a$, $y = b$, $\ldots$, $z = c$, то оно (или система) имеет бесконечное множество нетривиальных решений $x = at$, $y = bt$, ..., $z = ct$, где t — неравное 0 число. В самом деле, если система чисел $(a, b, ..., c)$ удовлетворяет однородному уравнению (f), то

$$f(a, b, \ldots, c) = 0,$$

но тогда

$$f(ta, tb, \ldots, tc) = t^n f(a, b, \ldots, c) = 0$$

при произвольном t. Всякому значению $t \neq 0$ соответствует нетривиальное решение уравнения (системы).

Рассмотрим однородное уравнение с двумя неизвестными

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n = 0. \quad (1)$$

Если в этом уравнении несколько первых коэффициентов, например a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-k+1}, равны нулю, а $a_{n-k} \neq 0$, то все члены левой части имеют общий множитель y^k. Аналогично, если несколько коэффициентов, считая (по порядку) от конца, обращаются в нуль, то члены левой части имеют общий множитель вида x^l. Следовательно, уравнение примет вид:

$$x^l y^k f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ — однородный многочлен с крайними коэффициентами, отличными от нуля. Приравняв нулю первый множитель (если $l \neq 0$), получим бесконечное множество решений вида:

$$x = 0, \ y, \quad \text{где } y\text{—произвольное число;}$$

аналогично получим (если $k \neq 0$) бесконечное множество решений вида:

$$x, \ y = 0, \quad \text{где } x\text{—произвольное число.}$$

Приравняв нулю третий множитель, получим уравнение вида (1) с коэффициентами крайних членов, отличными от нуля.

Итак, рассмотрим уравнение (1), считая коэффициенты крайних членов отличными от нуля. Введем новое неизвестное, положив:

$$y = tx, \text{ или } t = \frac{y}{x}.$$

Подставив в (1) и сократив на x^n, получим уравнение:

$$a_n + a_{n-1} t + \ldots + a_0 t^n = 0. \quad (t)$$

Пусть t_1, t_2,...,t_n — корни уравнения (t) в поле комплексных чисел. Всякому корню t_i соответствует бесконечное множество решений уравнения (1):

$$y = t_1 x, \quad \text{где } x\text{—произвольное число.}$$

Изложенным методом нельзя найти решения вида $x = 0$, y, где $y \neq 0$, но никакая такая пара чисел не удовлетворяет уравнению (1) (так как $a_0 \neq 0$).

Левую часть однородного уравнения можно разложить на линейные множители:

$$x^n (t - t_1)(t - t_2) \; . \; . \; . (t - t_n) =$$
$$= (xt - xt_1)(xt - xt_2) \; . \; . \; . (xt - xt_n) =$$
$$= (y - t_1 x)(y - t_2 x) \; . \; . \; . (y - t_n x)$$

(среди этих множителей могут быть одинаковые). Чтобы получить разложение однородного многочлена над полем действительных чисел, достаточно объединить попарно множители, соответствующие мнимым сопряженным корням уравнения (t). Пара мнимых сопряженных корней дает трехчлен

$$(y - tx)(y - \bar{t}x) = y^2 + pxy + qx^2.$$

В поле действительных чисел всякий такой трехчлен обращается в нуль лишь в одной точке $x = y = 0$. Итак, всякий однородный многочлен $f(x, y)$ над полем комплексных чисел разлагается на произведение линейных однородных множителей вида $ax + by$*.

Приравняв отдельно каждый из этих множителей нулю, получим бесконечное множество решений однородного уравнения.

Над полем действительных чисел однородный многочлен разлагается на произведение линейных множителей и однородных трехчленов второй степени $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ таких, что уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \qquad (*)$$

в поле действительных чисел имеет лишь тривиальное решение.

Геометрическая интерпретация. Линия, изображаемая однородным уравнением $f(x, y) = 0$, распадается на прямые линии по числу действительных линейных сомножителей левой части. Уравнение (*) геометрически изображает одну точку $O(0, 0)$.

Рассмотрим систему однородных уравнений с двумя неизвестными

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Если члены многочлена $f(x, y)$ имеют общий множитель x^{l_1}, а члены $\varphi(x, y)$ общий множитель x^{l_2}, то система имеет бесконечное множество решений вида $x = 0$, y (где y — произвольное число). Произвольному значению $y \neq 0$ соответствует нетривиальное решение. Для нахождения прочих нетривиальных ре-

---

* В частности, при $a=0$ получим множители вида y, а при $b=0$ множители вида x.

шений достаточно, сократив уравнения на множители x^{l_1} и x^{l_2}, исследовать полученную однородную систему. Итак, предположим, что ни один из многочленов f и φ не делится на одночлен вида x^k (где $k > 0$). Пусть m_1 и m_2 степени многочленов f и φ. Положив $y = tx$, получим:

$$x^{m_1} f(1, t) = 0, \quad x^{m_2} \varphi(1, t) = 0, \quad y = tx.$$

При $x = 0$ получим тривиальное решение системы. Нетривиальные решения могут получиться, если два уравнения

$$f(1, t) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(1, t) = 0$$

имеют хотя бы один общий корень. Если t_1 — общий корень этих уравнений, то данная система имеет бесконечное множество нетривиальных решений: ей удовлетворяет любая пара чисел, x, $y = t_1 x$ (при произвольном значении $x \neq 0$).

Рассмотрим систему (неоднородную):

$$f(x, y) = a; \quad \varphi(x, y) = b,$$

где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — однородные многочлены одной и той же степени n и, по крайней мере, одно из чисел a или b отлично от нуля. Эта система не может иметь тривиального решения. Введем новое неизвестное, положив $y = tx$, этой подстановкой можно найти решения, для которых $x \neq 0$, решения же вида $x = 0$, $y \neq 0$ (если они существуют) находятся путем непосредственного испытания. Итак, считаем $x \neq 0$; выполнив подстановку $y = tx$, получим:

$$x^n f(1, t) = a, \quad x^n \varphi(1, t) = b, \tag{2}$$

где n — степень данных многочленов. Умножив первое уравнение на b, а второе на a, после вычитания и сокращения на x^n получим уравнение с одним неизвестным t:

$$bf(1, t) - a\varphi(1, t) = 0.$$

Для каждого корня этого уравнения соответствующие значения x и y можно определить, воспользовавшись одним из уравнений (2) и соотношением $y = tx$.

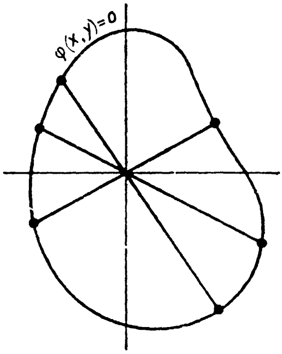
Рассмотрим систему уравнений

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

в которой первое уравнение однородное, а второе неоднородное. Решения, для которых $x = 0$, находятся непосредственным испытанием. Для нахождения прочих решений системы решаем первое уравнение (при дополнительном условии $x \neq 0$). Применив подстановку $y = tx$, получим:

$$y = t_1 x, \quad y = t_2 x, \quad \ldots, \quad y = t_k x.$$

Подставив $y = t_i x$ в уравнение $\varphi(x, y) = 0$, получим уравнение с одним неизвестным x, $\varphi(x, t_i x) = 0$; каждому корню этого уравнения соответствует значение $y = t_i x$.



Черт. 115

Геометрическая интерпретация. Решение данной системы означает нахождение точек пересечения прямых $y = t_i x$, изображающих уравнение $f(x, y) = 0$ с линией $\varphi(x, y) = 0$ (черт. 115).

Примечание. При решении рассмотренных видов уравнений для нахождения решений, удовлетворяющих условию $y \neq 0$, можно пользоваться подстановкой $x = ty$.

В зависимости от удобства можно применять любую из подстановок: или $y = tx$, или $x = ty$.

Примеры

1. Решить однородное уравнение

$$yx^3 + 3x^2y^2 + 5xy^3 + 6y^4 = 0.$$

Решение. Вынеся множитель y, получим бесконечное множество решений вида $y = 0$, x — произвольное число. Для нахождения прочих решений имеем уравнение

$$x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + 6y^3 = 0. \qquad (1)$$

Положив $x = ty$, получим уравнение:

$$t^3 + 3t^2 + 5t + 6 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $t = -2$; разделив левую часть на $t + 2$, получим:

$$t + 2)(t^2 + t + 3) = (t + 2)\left(t - \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}\right)\left(t - \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}\right).$$

В поле комплексных чисел уравнение (1) имеет следующие решения:

$$x = -2y, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2}y, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2}y$$

(где y — произвольное число).

В поле действительных чисел это же уравнение имеет решения:

$$x = -2y \text{ (где } y \text{—произвольное число)}$$

2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + 6y^3 &= 0, \\ 2y^2 - xy - x^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение Левая часть второго уравнения разлагается на множители $(x + 2y)(y - x) = 0$, подстановка $x = ty$ дает два корня $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$, система имеет бесконечное множество решений:

$$x = -2y \text{ (см. предыдущий пример).}$$

3. Решить систему

$$x^3+y^3=1,\quad x^2y+2xy^2+y^3=2.$$

Решение. Система не имеет решений вида $x=0$, y, так как, положив $x=0$, получим уравнения $y^3=1$ и $y^3=2$, не имеющие общих решений.

Положив $y=tx$, получим:

$$x^3(1+t^3)=1,\quad x^3(t+2t^2+t^3)=2,$$

откуда

$$2x^3(1+t^3)=x^3(t+2t^2+t^3), \tag{1}$$

Сократив на x^3, получим:

$$t^3-2t^2-t+2=0 \quad \text{или} \quad (t+1)(t-1)(t-2)=0.$$

Корни последнего уравнения суть:

$$t_1=-1,\ t_2=1,\ t_3=2.$$

При $t=-1$ система (1) становится противоречивой.

При $t=1$ из первого уравнения (1) получим:

$$2x^3=1 \text{ и } x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ x_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\ x_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}$$

и соответственно

$$y_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ y_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\ y_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}.$$

При $t=2$ получим:

$$9x^3=1,\ \text{откуда}\ x_4=\frac{1}{\sqrt[3]{9}},\ x_5=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\ x_6=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}},$$

и соответственно:

$$y_4=\frac{2}{\sqrt[3]{9}},\ y_5=\frac{2\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\ y_6=\frac{2\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}}.$$

3. Решить систему

$$2y^2+xy-x^2=0, \tag{1}$$

$$x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0. \tag{2}$$

Решение. Разложим левую часть первого уравнения на линейные множители:

$$(2y-x)(y+x)=0,$$

откуда $y=-x$ и $x=2y$.

Подставив $y=-x$ в уравнение (2), получим $x_1=1$, $x_2=3$. Откуда найдем два решения системы: $x_1=1$, $y_1=-1$ и $x_2=3$, $y_2=-3$.

Подставив $x=2y$ в уравнение (2), получим:

$$y^2+13y+3=0,$$

отсюда найдем еще два решения системы:

$$x_3=-13-\sqrt{157},\quad y_3=\frac{-13-\sqrt{157}}{2}$$

и

$$x_4 = -13 + \sqrt{157}, \quad y_4 = \frac{-13+\sqrt{157}}{2}.$$

§ 90. Примеры решения систем уравнений

На нижеследующих примерах показаны различные частные приемы решения систем уравнений.

1 Решить систему

$$x + y = p, \quad xy = q.$$

Решение. Числа x и y суть корни z_1 и z_2 квадратного уравнения

$$z^2 - pz + q = 0.$$

Система имеет два различные решения: $x = z_1$, $y = z_2$ и $x = z_2$, $y = z_1$, если $p^2 - 4q \neq 0$ и единственное решение $x = y = z$, если $p^2 - 4q = 0$ (в последнем случае при $q \neq 0$ прямая касается гиперболы).

2. Решить систему

$$x - y = p, \quad xy = q.$$

Решение. Система приводится к предыдущей, если положить $-y = v$:

$$x + v = p, \quad xv = -q$$

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^n + y^n &= p, \\ xy &= q. \end{aligned}\right\} \text{ (где } q \neq 0). \tag{1}$$

Решение. Возведем второе уравнение в степень n, тогда получим

$$x^n + y^n = p, \quad x^n y^n = q^n. \tag{2}$$

Пусть z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения:

$$z^2 - pz + q^n = 0, \tag{3}$$

тогда можно положить: $x^n = z_1$, $y^n = z_2$ или $x^n = z_2$, $y^n = z_1$.

Следовательно,

$$x = \sqrt[n]{z_1}, \quad y = \sqrt[n]{z_2} \quad \text{или} \quad x = \sqrt[n]{z_2}, \quad y = \sqrt[n]{z_1}.$$

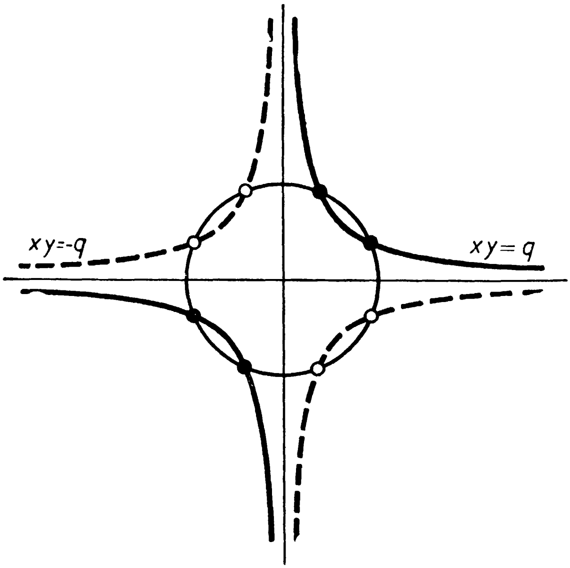
Взяв какое-нибудь значение для $\sqrt[n]{z_1}$ и положив $x = \sqrt[n]{z_1}$, нельзя для y взять произвольное значение корня, ибо значения x и y связаны соотношением $xy = q$, которое определит соответствующее значение для y.

Положив $x = \varepsilon^k \sqrt[n]{z}$ (где ε — мнимый корень n-й степени из 1), получим соответствующее значение:

$$y = \frac{q}{\varepsilon^k \sqrt[n]{z_1}} = \frac{q\,\varepsilon^{n-k}}{\sqrt[n]{z_1}}.$$

Если корни квадратного уравнения (3) различны, то система имеет $2n$ решений, если квадратное уравнение имеет двукратный корень, то система имеет n (различных) решений

Геометрическая интерпретация. Положим $n = 2$, требуется найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=p$ и гиперболы $xy=q$ (черт. 116). Переход к уравнению $x^2y^2 = q^2$ означает замену данной гиперболы парой сопряженных гипербол $xy = \pm q$. Точки пересечения гиперболы $xy = -q$ с окружностью суть посторонние решения.



Черт. 116

Для примера решим этим способом систему

$$x^3 + y^3 = 6, \quad xy = 2$$

Возведя в куб второе уравнение, имеем:

$$x^3y^3 = 8.$$

Составим вспомогательное квадратное уравнение $z^2 - 6z + 8 = 0$, из которого $z_1 = 2$, $z_2 = 4$. Следовательно, $x^3 = 2$, $y^3 = 4$, либо $x^3 = 4$, $y^3 = 2$. Откуда получим:

$$x_1 = \sqrt[3]{2}, \quad y_1 = \sqrt[3]{4}; \qquad x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{2}, \quad y_2 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{4};$$

$$x_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{2}, \quad y_3 = \varepsilon \sqrt[3]{4}; \qquad x_4 = \sqrt[3]{4}, \quad y_4 = \sqrt[3]{2};$$

$$x_5 = \varepsilon \sqrt[3]{4}, \quad y_5 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{2}; \qquad x_6 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{4}, \quad y_6 = \varepsilon \sqrt[3]{2}.$$

4. Систему

$$x^2 + y^2 = p, \quad xy = q \tag{1}$$

можно решить следующим способом: умножив второе уравнение на 2, а затем на -2, сложим с предыдущим, тогда получим систему, эквивалентную данной:

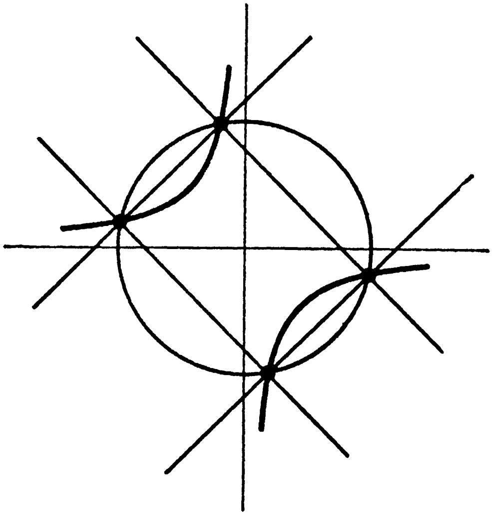
$$(x + y)^2 = p + 2q,$$

$$(x - y)^2 = p - 2q. \tag{2}$$

Из этих уравнений найдем:

$$x+y=\pm\sqrt{p+2q};$$

$$x-y=\pm\sqrt{p-2q}.$$



Черт. 117

Возможны четыре комбинации знаков, каждая комбиция дает линейную систему, имеющую единственное решение. Следовательно, решение данной системы сводится к решению четырех линейных систем.

Геометрическая интерпретация. Каждое из уравнений системы (2) изображает пару параллельных прямых Таким образом, данные окружности и гиперболы заменяются двумя парами параллельных прямых. пересекающихся в тех же точках (черт. 117).

5. Решить систему:

$$ax^n+by^n=p,\quad xy=q. \qquad (1)$$

Решение. Применим метод подстановки. Пусть $q\neq 0$, тогда второе уравнение (а следовательно, и система) не имеет решений вида $(0, y)$.

Взяв общее решение второго уравнения $y=\frac{q}{x}$ и подставив в первое, получим систему, эквивалентную данной:

$$y=\frac{q}{x},\quad ax^{2n}-px^n+bq^n=0 \qquad (2)$$

Если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то из второго уравнения найдем в общем случае $2n$ отличных от нуля значений x, подставив в первое уравнение, получим соответствующие значения y.

Если второе уравнение имеет двукратный корень, то число решений системы равно n

Особые случаи. Случай 1°. $q=0$, система примет вид:

$$ax^n+by^n=p,\quad xy=0,$$

эта система эквивалентна совокупности двух систем·

$$\left.\begin{aligned}ax^n+by^n&=p,\\ x&=0\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I}) \text{ и } \left.\begin{aligned}ax^n+by^n&=p,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II})$$

Система (I) при $b\neq 0$, $p\neq 0$ имеет n решений $x=0$, $y=\sqrt[n]{\frac{p}{b}}$, при $p=0$, $b\neq 0$ — единственное решение $x=y=0$, при $b=0$, $p\neq 0$ — противоречива, при $b=p=0$ — бесконечное множество решений $x=0$, y—произвольное число. Аналогично исследуется система (II).

Случай 2°. $a=0$, $q\neq 0$. Система (I) примет вид:

$$by^n=p,\quad xy=q.$$

Если $b \neq 0$, $p \neq 0$, то система имеет n решений, если $p = 0$, $b \neq 0$ либо $b = 0$, $p \neq 0$, то система противоречива, если $b = p = 0$, то система имеет бесконечное множество решений $x = \frac{q}{y}$, y (где y — произвольное число, неравное нулю).

Случай 3°, $b = 0$, $q \neq 0$ (второе уравнение (2) имеет нулевое решение) исследуется так же, как предыдущий.

6 Решить систему

$$x^n + y^n = a, \quad x^n - y^n = b.$$

Решение. Складывая и вычитая данные уравнения, получим:

$$x^n = \frac{a+b}{2}, \quad y^n = \frac{a-b}{2}, \text{ откуда } x = \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}},$$

$$y = \sqrt[n]{\frac{a-b}{2}}.$$

Если $b \neq \pm a$, то система в поле комплексных чисел имеет n^2 решений, которые получим, комбинируя всеми возможными способами n значений для x и n значений для y.

Если $b = a \neq 0$, то x имеет n различных значений, а $y = 0$ единственное значение, система имеет n (различных) решений.

Если $b = -a \neq 0$, то система имеет n различных решений (рассуждения аналогичны предыдущим).

Если $a = b = 0$, то система имеет единственное решение $x = y = 0$.

7. Решить систему

$$x^2 - y^2 = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Переписав первое уравнение в виде $(x+y)(x-y) = a$ и воспользовавшись вторым, заменим данную систему системой уравнений 1-й

$$b(x-y) = a, \quad x + y = b.$$

Если $b \neq 0$, то система имеет единственное решение. Если $b = 0$, то при $a \neq 0$ система противоречива. Если $a = b = 0$, то система имеет бесконечное множество решений: $x = -y$ (черт. 118).

8. Решить систему

$$x^n + y^n = a, \quad x + y = b.$$

Рассмотрим случаи $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$:

a) $n = 2$. Имеем:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy.$$

Положим $u = x + y$, $t = xy$, тогда система перепишется в виде

$$u^2 - 2t = a, \quad u = b.$$

Подставив в первое значение u, получим.

$$t = \frac{b^2 - a}{2},$$

и система приводится к уже рассмотренной:

$$x + y = b; \quad xy = \frac{b^2 - a}{2}.$$

b) $n = 3$. Имеем:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = u[u^2 - 3t].$$

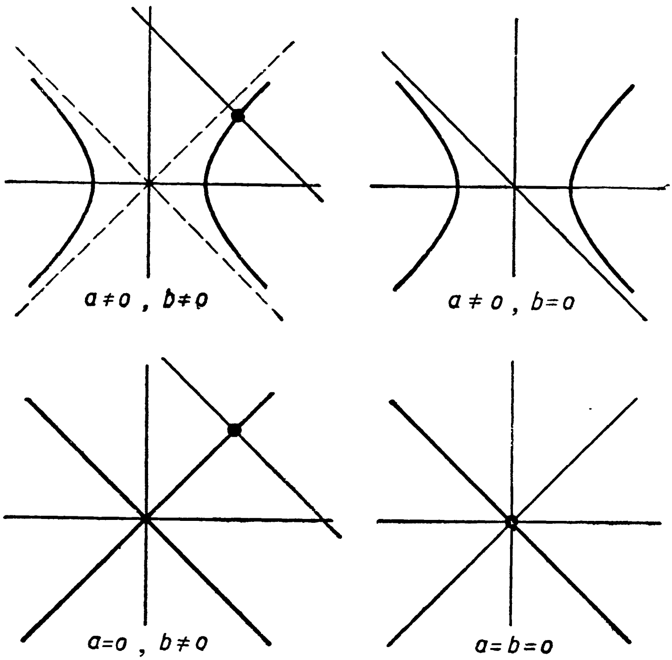
Система примет вид:

$$u[u^2 - 3t] = a; \; u = b.$$

Эта система решается подобно предыдущей

При $b \neq 0$ из 1-го уравнения находим единственное значение для t. Если $b = 0$, но $a \neq 0$, то система (1) (а следовательно, и данная система) противоречива. Если $a = b = 0$, то данная система примет вид:

$$x^3 + y^3 = 0, \quad x + y = 0,$$



Черт. 118

откуда получим бесконечное множество решений $x = -y$.

c) $n = 4$. Имеем:

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2t)^2 - 2t^2.$$

Данная система может быть переписана в виде:

$$(u^2 - 2t)^2 - 2t^2 = a, \quad u = b.$$

Подставив в первое $u = b$, получим квадратное уравнение:

$$2t^2 - 4b^2t + b^4 - a = 0.$$

Если дискриминант $\Delta = 2(b^4 + a) \neq 0$, то это уравнение имеет два решения

$$t = t_1 \text{ и } t = t_2,$$

откуда получим дзе линейные системы:

$$\left.\begin{aligned} x + y = b,\\ xy = t_1 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} x + y = b,\\ xy = t_2, \end{aligned}\right\}$$

каждая из которых дает два решения.

Если $\Delta = 0$, то $a = -b^4$, квадратное уравнение имеет двойной корень $t = b^2$ и для определения x и y получим систему уравнений:

$$x + y = b, \quad xy = b^2.$$

Следовательно, x и y являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - bz + b^2 = 0.$$

d) При произвольном натуральном n сумма $x^n + y^n$ может быть представлена в виде многочлена от основных симметрических функций $x + y = u$ и $xy = v$ (см. стр. 326). Подставив значение $u = b$, получим уравнение степени не выше $\frac{n}{2}$ для определения t.

9. Решить систему

$$(x^2 + y^2)(x - y) = 447, \quad xy(x - y) = 210.$$

Решение. Получим $x - y = v$, $xy = t$; имеем:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = v^2 + 2t.$$

В новых неизвестных система примет вид:

$$v^3 + 2vt = 447, \quad tv = 210.$$

Воспользовавшись вторым уравнением, получим:

$$v^3 + 420 = 447, \quad \text{откуда } v^3 = 27$$

и $v_1=3$, $v_2=3\varepsilon$, $v_3=3\varepsilon^2$ (где ε и ε^2 — кубические мнимые корни из 1), из второго уравнения получим соответственно:

$$t_1 = 70, \quad t_2 = \frac{210}{3\varepsilon} = 70\varepsilon^2 \quad \text{и} \quad t_3 = 70\varepsilon.$$

Взяв первое решение $v_1 = 3$, $t_1 = 70$, получим $x - y = 3$, $xy = 70$; числа x и $-y$ суть корни квадратного уравнения:

$$z^2 - 3z - 70 = 0, \quad \text{из которого:} \quad z_1 = 10 \text{ и } z_2 = -7,$$

следовательно,

$$x_1 = 10, \; y_1 = 7 \quad \text{и} \quad x_2 = -7, \; y_2 = -10$$

суть два решения системы. Поступив аналогично с решениями u_2, v_2 и u_3, v_3 вспомогательной системы, найдем 4 мнимые решения данной системы.

10. Решим систему

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 20, \quad x^4 + y^4 - z^4 = 560.$$

Решение. Решаем систему методом подстановки. Из первого найдем $z = -(x+y)$. Преобразуем левую часть второго: $x^2+y^2-z^2 = (x+y)^2 - 2xy - z^2$, выполнив подстановку, получим:

$$(-z)^2 - 2xy - z^2 = 20 \quad \text{или} \quad xy = -10.$$

Преобразуем левую часть третьего уравнения:

$$x^4 + y^4 - z^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - z^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 - z^4.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$(z^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - z^4 = 560$$

или $-4xyz^2 - 2x^2y^2 = 560$.

Система

$$z = -(x + y), \quad xy = -10, \quad -4xyz^2 + 2x^2y^2 = 560$$

эквивалентна данной.

Воспользовавшись вторым уравнением, исключим x и y из третьего:

$$40z^2 + 200 = 560, \quad \text{откуда} \quad z = \pm 3.$$

Для нахождения x и y получим совокупность двух систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3, \\ xy &= -10 \end{aligned}\right\} \text{при } z = -3 \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -3, \\ xy &= -10 \end{aligned}\right\} \text{при } z = 3,$$

из которых найдем:

$$\begin{aligned} &x_1 = 5, \quad &&y_1 = -2, \quad &&z_1 = -3; \quad &&x_3 = -5, \quad &&y_3 = 2, \quad &&z_3 = 3; \\ &x_2 = -2, \quad &&y_2 = 5, \quad &&z_2 = -3; \quad &&x_4 = 2 \quad &&y_4 = -5, \quad &&z_4 = 3. \end{aligned}$$

11. Решить систему

$$yz = ax, \quad zx = by, \quad xy = cz. \tag{A}$$

Решение. Перемножив почленно данные уравнения, получим следствие

$$(xyz)^2 = abc\,(xyz) \quad \text{или} \quad (xyz)(xyz - abc) = 0,$$

последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений

$$xyz = 0 \qquad (1) \quad \text{и} \quad xyz = abc. \qquad (2)$$

Случай 1° Ни одно из чисел a, b, c не равно нулю: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Уравнение (1) дает тривиальное решение системы (A) $x = y = z = 0$. В самом деле, уравнение (1) удовлетворяется лишь при условии, если значение хотя бы одного из неизвестных равно нулю. Положив, например, $x = 0$ и подставив в уравнения системы (A), получим $y = z = 0$.

Рассмотрим уравнение (2). В силу первого уравнения системы (A) получим $x^2 = bc$ и аналогично $y^2 = ac$, $z^2 = ab$. Откуда:

$$x = \pm\sqrt{bc}, \quad y = \pm\sqrt{ac}, \quad z = \pm\sqrt{ab}. \tag{3}$$

В этих формулах каждая из правых частей имеет два значения, однако эти значения нельзя выбирать произвольно, их надо брать так, чтобы соблюдалось условие $xyz = abc$. При таком выборе значений правых частей формулы (3) дают решение системы (A). Так, например,

$$yz = \frac{abc}{x} = a\frac{bc}{x} = a\frac{x^2}{x} = ax.$$

Случай 2°. Одно из чисел a, b и c равно нулю. Пусть, например, $a = 0$, $\neq 0$, $c \neq 0$ Система (A) примет вид:

$$yz = 0, \quad zx = by, \quad xy = cz.$$

Первое уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений $z = 0$ и $y = 0$. Подставив во второе уравнение $z = 0$, получим $y = 0$, третье удовлетворяется при произвольном x. Итак, получим бесконечное множество решений:

$$z = y = 0, \quad x \text{—произвольное число}.$$

То же множество решений получим, воспользовавшись уравнением $y = 0$.

Случай 3°. Два числа a, b и c равны нулю, пусть, например, $a = b = 0$, $c \neq 0$. Система (A) примет вид:

$$yz = 0, \quad zx = 0, \quad xy = cz,$$

откуда получим две серии решений:

a) $y = 0, \quad z = 0, \quad x$—произвольное число;

b) $z = 0, \quad x = 0, \quad y$—произвольное число.

Случай 4°. $a = b = c = 0$. Система (A) примет вид:

$$yz = 0, \quad zx = 0, \quad xy = 0,$$

откуда найдем следующие серии решений:

$y = 0, \quad z = 0, \quad x$—произвольное число,

$z = 0, \quad x = 0, \quad y$—произвольное число,

$x = 0, \quad y = 0, \quad z$—произвольное число.

12. Решить систему уравнений

$$\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}. \tag{1}$$

Решение. Множество допустимых систем значений параметров определяется следующим условием: из трех чисел, a, b и c два должны быть отличными от нуля. При решении системы над полем комплексных чисел, кроме того, следует поставить условие $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. При выполнении этих условий ни один из знаменателей не тождественен нулю.

Система не имеет решений, для которых хотя бы одно из неизвестных равно нулю. В самом деле, положив, например, $x = 0$, получили бы $y = z = 0$, но точка $x = y = z = 0$ не принадлежит области определения системы. Взяв обратные величины от данных отношений, получим:

$$\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = \frac{c}{z}+\frac{a}{x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{y} = \frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2},$$

обозначим

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=t, \quad \dfrac{c}{z}+\dfrac{a}{x}=t, \quad \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=t, \\ \dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=t. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Сложив первые три равенства, получим:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = \frac{3}{2}t.$$

Вычитая поочередно первое, второе и третье равенства (2), найдем:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{t}{2}.$$

Из четвертого равенства найдем:

$$\frac{t^2}{4} = t, \quad \text{откуда } t = 4 \text{ и } t = 0.$$

При $t = 0$ получим следствие $a^2+b^2+c^2 = 0$, противоречащее условию. При $t = 4$ получим единственное решение системы (2):

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

При изложенном способе решения системы потеря решений не может иметь места. В самом деле, потерянными могут быть решения, не принадлежащие области определения системы (2), т. е. такие, у которых хотя бы одно из неизвестных равно нулю, но таких решений система (1) не имеет.

Посторонними могут быть решения, не принадлежащие области определения системы (1), т. е. такие, которые обращают в нуль хотя бы один из знаменателей отношений (1). При найденных значениях неизвестных имеем:

$$bz+cy = bc, \quad cx+az = ac, \quad ay+bx = ab.$$

Если ни один из параметров не равен нулю, то система имеет единственное решение

Если один из параметров равен нулю, то найденное решение является посторонним, система не имеет решений.

13 Решить систему.

$$\left.\begin{aligned} x^2 - yz - a &= 0, \\ y^2 - xz - b &= 0, \\ z^2 - xy - c &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3) \end{aligned}$$

Решение. Умножим уравнения (1), (2) и (3) соответственно на y, z и x и сложим, а затем умножим их на z, x и y и сложим:

$$cx + ay + bz = 0, \tag{4}$$

$$bx + cy + az = 0. \tag{5}$$

Допустим, что хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля, пусть, например, $c \neq 0$.

Найдем общее решение системы линейных однородных уравнений (4) (5) (см. § 71, стр. 273):

$$x = (a^2 - bc)\,t, \quad y = (b^2 - ac)\,t, \quad z = (c^2 - ab)\,t \tag{6}$$

при условии, что хотя бы одно из чисел

$$a^2 - bc, \quad b^2 - ac, \quad c^2 - ab$$

отлично от нуля. Подставив значения x, y и z в уравнение (3), получим:

$$t^2\,[(c^2 - ab)^2 - (a^2 - bc)(b^2 - ac)] = c \quad \text{или} \quad t^2 c\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = c.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

$$t = \frac{1}{\pm\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}, \quad \text{если} \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \neq 0.$$

При данном способе решения система уравнений

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0 \tag{F}$$

заменяется системой:

$$\left.\begin{aligned} yF_1 + zF_2 + xF_3 &= 0 \qquad (1'), \\ zF_1 + xF_2 + yF_3 &= 0 \qquad (2'), \\ F_3 &= 0 \qquad (3'). \end{aligned}\right\} \tag{F'}$$

Всякое решение системы (F′) удовлетворяет системе

$$\left.\begin{aligned} yF_1 + zF_2 &= 0, \\ zF_1 + xF_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{F''}$$

Если последняя система, линейная однородная относительно F_1 и F_2, имеет лишь тривиальное решение $F_1 = F_2 = 0$, то системы (F) и (F′) эквивалентны. Нетривиальные решения (F″) возможны, если система (F′) имеет решения, удовлетворяющие условию

$$z^2 - xy = t^2 c\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0,$$

откуда

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0, \text{ ибо } \quad c \neq 0 \text{ и } t \neq 0$$

(так как при $t = 0$ получим $x = y = z = 0$, что не удовлетворяет уравнению (3)). Итак, данная система в общем случае имеет два решения, определенные формулами (6); нижеследующие особые случаи подлежат специальному рассмотрению.

Случай 1°. $a = b = c = 0$, данная система имеет нулевое решение $x = y = z = 0$. Пусть x, y, z есть ненулевое решение, предположим, например, что $x \neq 0$, тогда из условия $x^2 = yz$ следует, что $y \neq 0$ и $z \neq 0$, из уравнений (1), (2) и (3) при $a = b = c = 0$ найдем:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{x}, \quad \frac{y}{z} = \frac{x}{y}, \quad \frac{z}{x} = \frac{y}{z};$$

положив $x = ty$, получим $y = tz$, откуда $t^3 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = \varepsilon$, $t_3 = \varepsilon^2$. Следовательно, получим три серии решений, состоящих каждая из бесконечного множества решений

$$x = y = z; \quad x = \varepsilon z, \quad y = \varepsilon^2 z; \quad x = \varepsilon^2 z; \quad y = \varepsilon z,$$

где ε и ε^2 — комплексные кубические корни из 1, а z — произвольное число

Случай 2°. Хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю (например, $c \neq 0$), но $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab = 0$. Решив последнюю систему относительно a, b и c (см. предыдущий случай), получим $a = tc$, $b = t^2c$, где $t^3 = 1$, т е. $t = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$. В этом случае данная система примет вид:

$$x^2 - yz = tc, \quad y^2 - xz = t^2c, \quad z^2 - xy = c.$$

При $t = 1$ уравнения (4) и (5) совпадают:

$$x + y + z = 0, \tag{4'}$$

присоединив к (4′) два уравнения данной системы, например (2) и (3):

$$y^2 - xz = c \tag{2}$$

и

$$z^2 - xy = c, \tag{3}$$

получим систему, эквивалентную данной. В самом деле, обратимся к первым двум уравнениям системы (F′). В данном случае имеем:

$$yF_1 + zF_2 + xF_3 \equiv zF_1 + xF_2 + yF_3 \equiv -c\,(x + y + z) = 0.$$

В рассматриваемом случае система (2), (3), (4′) есть следствие системы (1), (2), (3); покажем обратное, что система (1), (2), (3) есть следствие системы (2), (3), (4′).

Если $F_2 = F_3 = 0$ и выполняется (4′), то при $F_1 \neq 0$ это возможно, когда $y = z = 0$, это противоречит условию $y^2 - zx = c \neq 0$. Следовательно, $F_1 = 0$.

Вычтя (3) из (2), получим:

$$(y - z)(x + y + z) = 0.$$

Это уравнение есть следствие (4′). В данном случае система эквивалентна системе двух уравнений:

$$x + y + z = 0, \quad y^2 - xz = c,$$

а (3) есть следствие этих уравнений. Имеем $z = -x - y$. Подставив во второе, получим квадратное уравнение, из которого y выразится через x. Система имеет бесконечное множество решений.

При $t = \varepsilon$ данная система примет вид:

$$x^2 - yz = c\,\varepsilon, \tag{1}$$

$$y^2 - zx = c\,\varepsilon^2, \tag{2}$$

$$z^2 - xy = c. \tag{3}$$

Уравнение (4) примет вид:

$$x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0, \tag{4''}$$

а (5) получится из (4) умножением на ε^2. Присоединив уравнения (2) и (3) так же, как в предыдущем случае, докажем, что система уравнений (4″), (2) и (3) эквивалентна данной. Умножив (3) на ε, вычтя из (2), получим

$$\varepsilon(y-\varepsilon z)(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)=0,$$

т. е. следствие (4″), как и в предыдущем случае, докажем, что система имеет бесконечное множество решений.

Аналогично рассматривается случай $t=\varepsilon^2$.

Случай 3° $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, но хотя бы одно из чисел a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab отлично от нуля, при этом хотя бы одно из чисел a, b и c также (например, c) должно быть отличным от нуля. В этом случае подстановка общего решения (6) однородной системы в уравнение системы (3) ведет к противоречивому следствию. Система не имеет решений.

§ 91. Неравенства и системы неравенств высших степеней с одним неизвестным

Алгебраическое неравенство после переноса всех членов в одну часть примет вид $P(x)\vee 0$, где $P(x)$ — многочлен над полем действительных чисел. Рассмотрим для определенности неравенство

$$P(x)>0. \qquad \text{(P)}$$

Многочлен $P(x)$ разлагается над полем действительных чисел на произведение линейных сомножителей и знакоположительных квадратных трехчленов (с мнимыми корнями):

$$P(x)=a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots$$

$$\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}.$$

Неравенство (P) эквивалентно неравенству

$$a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}>0.$$

Предположим, что действительные корни многочлена $P(x)$ расположены в порядке возрастания:

$$x_1<x_2<\ldots<x_k.$$

Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ суть общие граничные точки следующих интервалов:

$$(-\infty,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ \ldots,\ (x_k,\ +\infty).$$

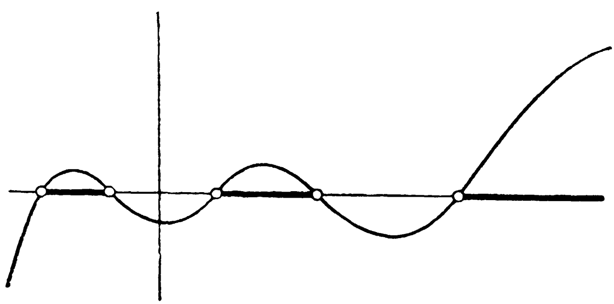
В этих интервалах каждый из сомножителей в левой части неравенства (1) знакопостоянен. Знак многочлена $P(x)$ в каждом интервале определяется по числу отрицательных сомножителей. Неравенство (P) выполняется в тех интервалах, в которых число отрицательных сомножителей четно (в частности, когда их нет). В прочих интервалах имеет место неравенство $P(x)<0$. Так, например, в случае простых корней $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_k=1$ имеем следующее распределение знаков.

	$(-\infty,\ x_1)$	$(x,\ x_2)$	$(x_2,\ x_3)$	. . .
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$	
. . .	. . .	. . .	. . .	
$x - x_k$	$-$	$-$	$-$	

Для $P(x)$ имеем:

$P(x)$	$(-\infty,\ x_1)$	$(x_1,\ x_2)$	$(x_2,\ x_3)$	. . .
$a > 0$, k четное	$+$	$-$	$+$	. . .
$a > 0$, k нечетное	$-$	$+$	$-$	. . .
$a < 0$, k четное	$-$	$+$	$-$	. .
$a < 0$, k нечетное	$+$	$-$	$+$	. .

Если разложение $P(x)$ не содержит линейных множителей, то неравенство $P(x) > 0$ эквивалентно неравенству $a > 0$, последнее либо удовлетворяется тождественно (если $a > 0$), либо противоречиво (если $a < 0$).



Черт. 119

Геометрическая интерпретация. Неравенство $P(x) > 0$ удовлетворяется в тех промежутках, в которых график функции $y = P(x)$ лежит выше оси абсцисс (черт. 119).

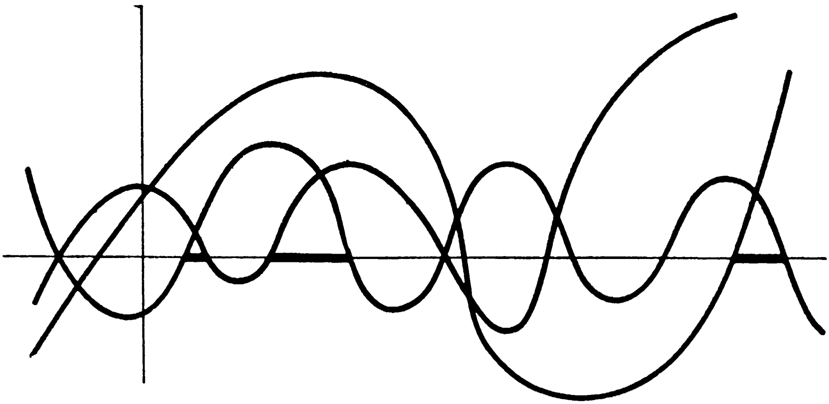
Системы неравенств. Рассмотрим, например, следующую систему алгебраических неравенств:

$$\varphi_1(x) > 0,\ \varphi_2(x) > 0,\ \ldots,\ \varphi_k(x) > 0. \qquad (\varphi)$$

Общим решением каждого из этих неравенств в отдельности служит некоторая совокупность интервалов. Пусть

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_k \qquad (\Delta)$$

— совокупность интервалов, являющихся общими решениями данных неравенств (соответственно), рассматриваемых в отдельности. Решением системы неравенств является общая часть совокупностей интервалов (Δ). Если эта общая часть есть пустое множество, то система (φ) не имеет решений.



Черт. 120

Геометрическая интерпретация. Система (φ) удовлетворяется в промежутках, в которых все графики $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ..., $y = \varphi_k(x)$ лежат выше оси абсцисс (черт. 120).

Дробные неравенства. Рассмотрим сначала неравенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \qquad \left(\frac{P}{Q}\right)$$

где левая часть — несократимая дробь (над полем действительных чисел). Необходимым и достаточным условием справедливости этого неравенства является выполнение одного из следующих двух условий:

$$\left.\begin{matrix} P(x) > 0, \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{matrix} P(x) < 0, \\ Q(x) < 0. \end{matrix}\right\}$$

Таким образом, задача приводится к решению совокупности двух систем алгебраических неравенств. Эти же условия являются необходимыми и достаточными для выполнения неравенства

$$P(x)\,Q(x) > 0, \qquad \text{(PQ)}$$

так как значения дроби $\frac{P}{Q}$ и произведения PQ одинаковы по знаку.

Итак, *дробное неравенство* $\left(\frac{P}{Q}\right)$ *эквивалентно целому алгебраическому неравенству* (PQ).

Примечание. Неравенство $\frac{P}{Q} \geqslant 0$ в общем случае не эквивалентно неравенству $PQ \geqslant 0$, именно: значения неизвестного, при которых $Q = 0$, являются решениями второго, но не являются решениями первого неравенства.

При решении дробных неравенств можно поступать так же, как и при решении целых алгебраических неравенств: *найти корни числителя и знаменателя, разложив* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *на множители (над полем действительных чисел), опустить в числителе и знаменателе знакоположительные квадратные трехчлены и определить знак дроби по знакам линейных сомножителей в каждом из интервалов, на которые делится множество всех действительных чисел корнями числителя и знаменателя.*

Дробное неравенство

$$R_1(x) > R_2(x), \tag{R}$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции, после перенесения $R_2(x)$ в левую часть и приведения разности $R_1(x) - R_2(x)$ к каноническому виду, запишется так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

Из решений этого последнего неравенства следует исключить те значения x (если такие значения существуют), которые не принадлежат области определения неравенства (R).

Примеры

1. Решить неравенство

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x-2) > 0$$

и определим знак $P(x)$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

неравенство $P(x) > 0$ выполняется в интервалах $-1 < x < 1$ и $2 < x < +\infty$.

2. Решить неравенство

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0.$$

Решение Разложим левую часть на множители.

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x^2 + x + 1) < 0.$$

Трехчлен $x^2 + x + 1$ знакоположителен, неравенство эквивалентно квадратному неравенству

$$(x - 1)(x - 3) < 0,$$

из которого найдем $1 < x < 3$.

3. Решить неравенство

$$1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}.$$

Решение. После переноса всех членов в одну часть получим:

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x-3)} > 0.$$

Корни числителя суть $2 \pm \sqrt{3}$, а корни знаменателя 1 и 3. Обозначим для краткости:

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2 + \sqrt{3}.$$

Определим знак дроби $\frac{P}{Q}$ в различных интервалах:

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	(x_3, x_4)	$(x_4, +\infty)$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - x_3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - x_4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{P}{Q}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

неравенство $\frac{P}{Q} > 0$ выполняется в **совокупности интервалов:**

$$(-\infty, 2 - \sqrt{3}), \quad (1, 3) \quad \text{и} \quad (2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

4. Найти область определения функции

$$F(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2 - 5x + 6}} + \sqrt{x^4 - x^2}.$$

Решение. Для нахождения области определения решим систему неравенств:

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} \geqslant 0, \quad x^4 - x^2 \geqslant 0.$$

Корни квадратного трехчлена x^2-5x+6 суть 2 и 3, корни многочлена

$$x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$$

суть: $x=0$ (двукратный), $x=-1$, $x=1$. В различных интервалах имеем следующее распределение знаков:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$1-x$	+	+	+	—	—	—
x^2-5x+6	+	+	+	+	—	+
x^4-x^2	+	—	—	+	+	+

Система неравенств выполняется в промежутках $(-\infty, -1)$ и $(2, 3)$, искомая область определения состоит из двух промежутков и из двух точек $x=0$ и $x=1$.

5. Решить неравенство

$$|x^2-5x-4| < 10.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно системе двух неравенств:

$$-10 < x^2-5x-4 < 10 \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} x^2-5x-14 < 0, \\ x^2-5x+6 > 0. \end{array}\right\}$$

Решив первое неравенство, получим интервал $(-2, 7)$. Решив второе неравенство, получим совокупность двух интервалов: $(-\infty, 2)$ и $(3, \infty)$. Интервал $(-2, 7)$ имеет с этой совокупностью общую часть в виде двух интервалов $(-2, 2)$ и $(3, 7)$.

6. Решить неравенство

$$\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{2(a-10)x+(3+16a)}{5x-4a} < 0. \tag{1}$$

Неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\left.\begin{array}{ll} 2(a-10)x+(3+16a) & > 0, \\ 5x-4a & < 0 \end{array}\right\} \tag{A}$$

и

$$\left.\begin{array}{ll} 2(a-10)x+(3+16a) & < 0 \\ 5x-4a & > 0. \end{array}\right\} \tag{B}$$

Случай 1°. $a < 10$; имеем: $a - 10 < 0$

Из системы неравенств (А) получим:

$$x < \frac{3 + 16a}{2(10 - a)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5}.$$

Сравним между собой числа $\frac{3 + 16a}{2(10 - a)}$ и $\frac{4a}{5}$,

$$\frac{4a}{5} - \frac{3 + 16a}{2(10 - a)} = \frac{-8a^2 - 15}{10(10 - a)} \left\} \begin{array}{l} < 0, \text{ при } a < 10, \\ > 0 \quad \text{при } a > 10. \end{array} \right.$$

Поэтому, при $a < 10$ получим интервал $-\infty < x < \frac{4a}{5}$.

Из системы неравенств (В) получим:

$$x > \frac{3 + 16a}{2(10 - a)} \quad \text{и} \quad x > \frac{4a}{5},$$

откуда получим интервал

$$\frac{3 + 16a}{2(10 - a)} < x < \infty.$$

Случай 2°. $a = 10$, неравенство (1), эквивалентное данному, выполняется при $x < 8$.

Случай 3°. $a > 10$; из системы неравенств (А) получим:

$$x > -\frac{3 + 16a}{2(a - 10)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5}.$$

Откуда получим интервал

$$-\frac{3 + 16a}{2(a - 10)} < x < \frac{4a}{5}.$$

Неравенства (В) противоречивы. Итак, имеем окончательно:

Значения параметра	Решение неравенства
1°. $a < 10$	совокупность двух интервалов: $-\infty < x < \frac{4a}{5}$ и $\frac{3 + 16a}{2(10 - a)} < x < +\infty$
2°. $a = 10$	интервал $-\infty < x < 8$
3°. $a > 10$	интервал $-\frac{3 + 16a}{2(a - 10)} < x < \frac{4a}{5}$

§ 92. Неравенства и системы неравенств с несколькими неизвестными, смешанные системы

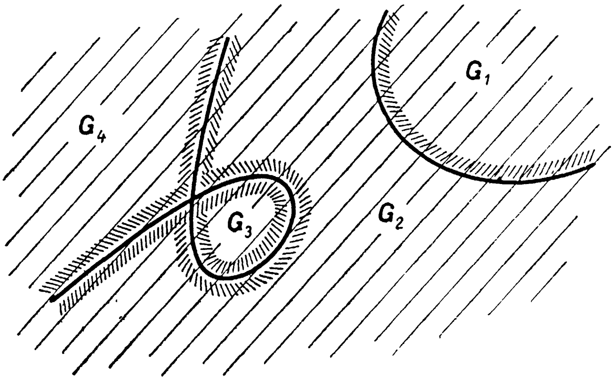
Алгебраическое решение неравенств (и систем) высших степеней с несколькими неизвестными обычно сопряжено со значительными трудностями.

При решении неравенств и систем с двумя (и тремя) неизвестными обычно пользуются геометрическими интерпретациями, которые во многих случаях дают представление о характере общего решения неравенства (системы) и позволяют наметить путь алгебраического решения.

Рассмотрим неравенство

$$P(x, y) > 0,$$

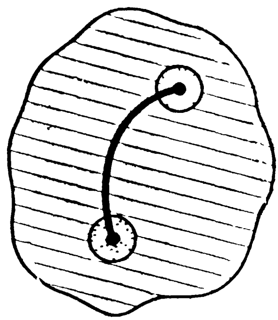
где $P(x, y)$ — многочлен от двух аргументов. Если уравнение $P(x, y) = 0$ определяет некоторую линию (действительную) на



Черт. 121

плоскости, то множество точек плоскости, не лежащих на этой линии, состоит из некоторого конечного числа областей G_1, $G_2, \ldots, G_k$ (черт. 121) *, ограниченных линией $P = 0$.

В каждой из областей G_i многочлен $P(x, y)$ отличен от нуля, так как точки, в которых $P(x, y) = 0$, принадлежат г р а н и ц а м этих областей.



Черт. 122

Теорема. *В каждой из областей G_i, на которые линия $P(x, y) = 0$ делит плоскость, многочлен $P(x, y)$ либо положителен, либо отрицателен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы в двух различных точках M_1 и M_2 одной и той же области G_i, значения $P(x, y)$ были противоположны по знаку, то согласно теореме о промежуточном

---

* Под областью мы понимаем открытое связное множество. Это значит, что всякая точка области содержится в ней вместе с некоторой своей окрестностью и всякие две точки области можно соединить простой дугой, содержащейся в области (черт. 122).

значении (доказываемой в курсе математического анализа) в области G_i существовали бы точки (внутренние), в которых $P(x, y)=0$, но, с другой стороны, таких точек область G_i не содержит, ч. т. д.

Таким образом, общее решение неравенства (Р) образует совокупность тех областей G_i, в которых значение многочлена $P(x, y)$ положительно. Для установления, какое из неравенств $P>0$ или $P<0$ выполняется в данной области, достаточно вычислить значение $P(x, y)$ в какой-нибудь определенной точке этой области. Если многочлен $P(x, y)$ не обращается в нуль ни в какой точке плоскости, то уравнение $P(x, y)=0$ не определяет никакой линии. В этом случае множество областей G_i состоит из одной области (вся плоскость) и неравенство $P(x, y)>0$ либо выполняется тождественно, либо противоречиво.

Алгебраическая линия

$$P(x, y)=C,$$

вдоль которой значение многочлена постоянно, называется линией уровня. При всевозможных положительных (отрицательных) значениях параметра C линии уровня заполняют те области, в которых выполняется неравенство $P>0$ (соответственно $P<0$).

Аналогично решение алгебраического неравенства с тремя (с большим числом) неизвестными $P(x, y, z)>0$ заключается в отыскании тех областей пространства (многомерного пространства), на которые делит все пространство алгебраическая поверхность $P(x, y, z)=0$ и в которых значение многочлена P положительно.

Решение системы алгебраических неравенств

$$P_1(x, y, \ldots, z)>0,\ P_2(x, y, \ldots, z)>0, \ldots$$
$$\ldots, P_k(x, y, \ldots, z)>0$$

заключается в отыскании для каждого из неравенств совокупности областей, в которых оно выполняется и в нахождении общей части всех этих совокупностей областей.

Решение алгебраического неравенства с двумя (или бóльшим числом) неизвестными:

$$\frac{P(x, y)}{P(x, y)}>0,$$

выполняется по правилам, установленным для дробных неравенств с одним неизвестным (только вместо интервалов на координатной прямой следует рассматривать области на координатной плоскости). Левую часть дробного неравенства следует рассматривать в областях, на которые плоскость делится парой алгебраических линий

$$P(x, y) = 0. \quad Q(x, y) = 0,$$

т. е. линией

$$P(x, y)\, Q(x, y) = 0.$$

Примеры

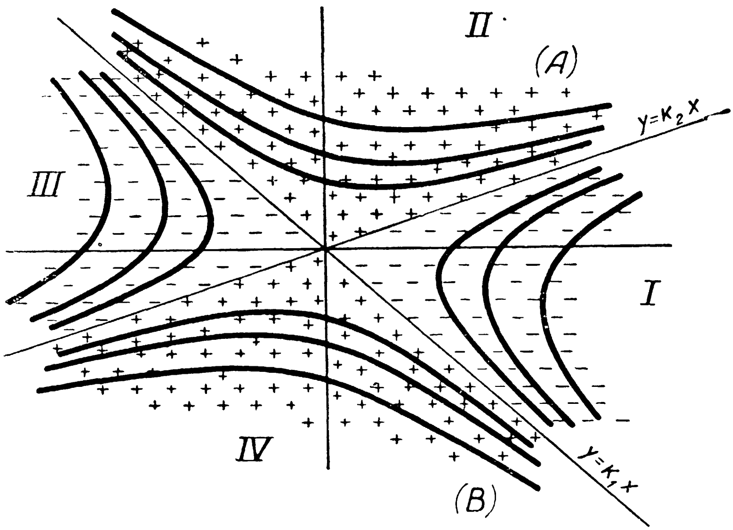
1. Решить неравенство

$$P(x, y) = y^2 + pxy + qx^2 > 0.$$

Случай 1°. Левая часть над полем действительных чисел разлагается на различные линейные множители:

$$(y - k_1x)(y - k_2x) > 0, \quad \text{где} \quad k_1 \leqslant k_2$$

Линия $P(x, y) = 0$ распадается на пару прямых, которая делит плоскость на 4 области (вертикальные углы). Неравенство выполняется в двух вертикальных углах, лежащих выше и ниже прямых $y = k_1x$ и $y = k_2x$.



Черт. 123

Алгебраическое решение. Неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\left.\begin{aligned} y - k_1x > 0, \\ y - k_2x > 0, \end{aligned}\right\} \quad (A) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} y - k_1x < 0, \\ y - k_2x < 0, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

так как при $x \geqslant 0$ имеем $k_1x \geqslant k_2x$, а при $x < 0$ имеем $k_2x < k_1x$, то

$$\left.\begin{aligned} y > k_2x \text{ при } x \geqslant 0, \\ y > k_1x \text{ при } x < 0 \end{aligned}\right\} \quad (A) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} y < k_1x \text{ при } x \geqslant 0, \\ y < k_2x \text{ при } x < 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Линиями уровня при $C \neq 0$ являются гиперболы

$$y^2 + pxy + qx^2 = C,$$

при $C < 0$ эти гиперболы располагаются в вертикальных углах I и III (черт. 123), а при $C > 0$ — в вертикальных углах II и IV.

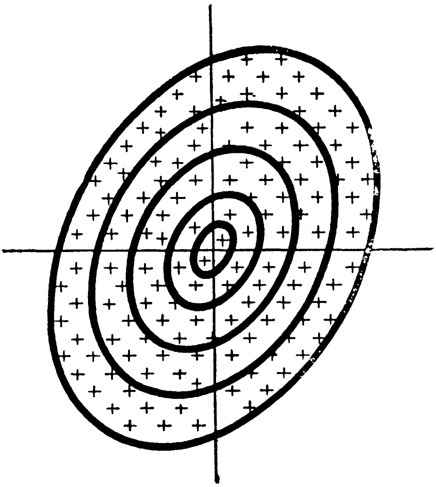
Случай 2°. Трехчлен $y^2 + pxy + qx^2$ не разлагается на действительные множители; в этом случае неравенство

$$y^2 + pxy + qx^2 = \left(y + \frac{p}{2}\,x\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) x^2 > 0$$

выполняется во всех точках плоскости, отличных от (0, 0). Линии уровня

$$y^2 + pxy + qx^2 = C \qquad (\text{где } C > 0)$$

суть подобные эллипсы с общим центром в начале координат (черт. 124).



Черт. 124

Случай 3°. $q - \dfrac{p^2}{4} = 0$.

Неравенство

$$P(x,\ y) = \left(y + \frac{p}{2}\,x\right)^2 > 0$$

выполняется во всей плоскости за исключением прямой $y = -\dfrac{p}{2}x$, т. е. в двух полуплоскостях $y > -\dfrac{p}{2}\,x$ и $y < -\dfrac{p}{2}x$. Линии уровня при $C > 0$ суть пары параллельных прямых

$$y + \frac{p}{2}\,x = \pm C \qquad (\text{черт. } 125).$$

2. Неравенство

$P(x,\ y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 > 0$ (где $a > 0$ и $b > 0$) выполняется вне эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$. В самом деле, этот эллипс делит плоскость на две области — внешнюю (неограниченную) и внутреннюю (ограниченную). В точке (0, 0) внутренней области имеем: $P(x,\ y) = -1 < 0$, а в точке $x = 2a$, $y = 0$ внешней области $P(x,\ y) = 3 > 0$

Алгебраическое решение. Имеем:

$$y^2 > \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2).$$

Если $|x| > a$, т. е $x < -a$ или $x > a$, то последнее неравенство выполняется при всех значениях y; получим две элементарные области.

$$\left.\begin{matrix} a < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{matrix}\right\} \mathrm{I} \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{matrix} -\infty < x < -a, \\ -\infty < y < +\infty. \end{matrix}\right\} \mathrm{II}$$

Если $|x| \leqslant a$, то неравенство выполняется в двух областях (с присоединенными лучами $x = \pm a$, $y \neq 0$ (черт. 126):

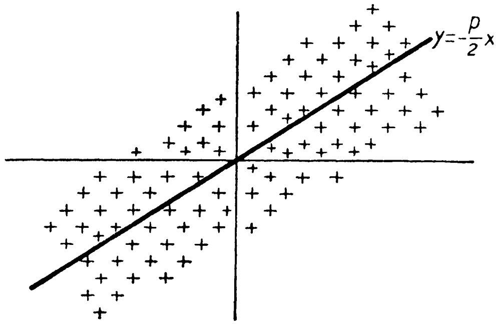
$$\left.\begin{matrix} -a \leqslant x \leqslant a, \\ \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} < y < +\infty \end{matrix}\right\} \mathrm{III} \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{matrix} -a \leqslant x \leqslant a, \\ -\infty < y < -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{matrix}\right\} \mathrm{IV}$$

Эти области в сумме составляют внешнюю область относительно эллипса.

3. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

делит плоскость на три части I, II и III (черт. 127). Взяв в части II точку (0, 0), получим $P(x, y)<0$. В точках $(\pm 2a, 0)$, лежащих в областях I и III, получим $P(\pm 2a, 0)=3>0$. Следовательно, неравенство $P(x, y)>0$ выполняется в двух областях I и III, ограниченных правой и левой ветвями гиперболы.

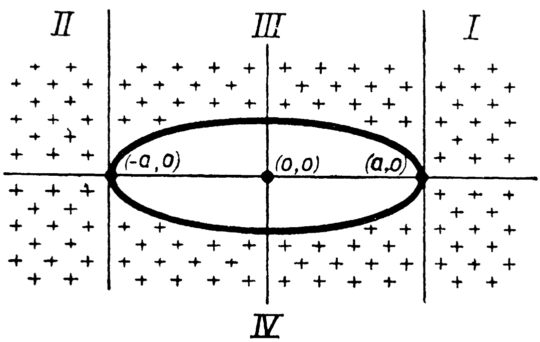


Черт. 125

Предоставляем учащимся выполнить алгебраическое решение.

4. Решить неравенство

$$|x|+|y|<1.$$



Черт. 126

Решение. Случай 1°. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (первый квадрант на координатной плоскости), имеем $|x|=x$, $|y|=y$, неравенство примет вид $x+y<1$ или $0<y<1-x$. Это есть треугольник (с исключенной гипотенузой):

$$0 \leqslant x<1, \quad 0 \leqslant y<1-x \qquad \text{(черт. 128).}$$

Случай 2°. $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ (второй квадрант), $|x|=-x$, $|y|=y$, неравенство примет вид: $y-x<1$, откуда получаем треугольник:

$$0 \leqslant y<x+1, \quad -1<x \leqslant 0.$$

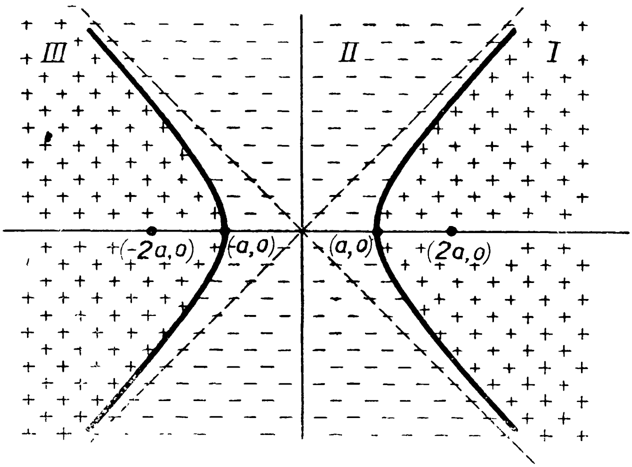
Аналогично рассматриваются прочие случаи.

Случай 3°. $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, имеем треугольник

$$0 \geqslant y > -x-1, \quad -1 < x \leqslant 0.$$

Случай 4° $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, имеем треугольник

$$0 \geqslant y > x-1, \quad 0 \leqslant x < 1.$$



Черт. 127

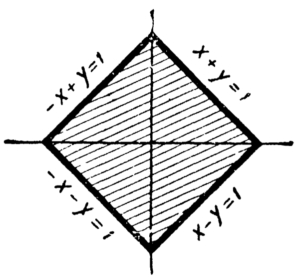
Эти треугольники в сумме определяют квадрат, ограниченный прямыми $y = \pm x \pm 1$:

$$x-1 < y < -x+1, \text{ если } \quad 0 \leqslant x < 1;$$

$$-x-1 < y < \quad x+1, \text{ если } -1 < x \leqslant 0.$$

5. Решить неравенство

$$(x^2+y^2)^2 < a^2(x^2-y^2), \quad \text{где } a > 0.$$



Черт. 128

Решение. Имеем:

$$y^4 + (2x^2+a^2)\,y^2 + x^2(x^2-a^2) < 0. \qquad (1)$$

Составим квадратное уравнение, положив $z = y^2$:

$$z^2 + (2x^2+a^2)\,z + x^2(x^2-a^2) = 0.$$

Так как

$$\Delta = (2x^2+a^2)^2 - 4x^2(x^2-a^2) = a^2(8x^2+a^2) > 0$$

и $z_1+z_2 = -(2x^2+a^2) < 0$, то корни этого уравнения действительны и различны, причем меньший корень отрицателен

Если $0 < |x| < a$, то $z_1z_2 = x^2(x^2-a^2) < 0$ и $z_1 < 0 < z_2$; если $|x| > a$, то $z_1 < z_2 < 0$; если $x = \pm a$ или $x = 0$, то $z_2 = 0$.

Неравенство (1) выполняется, если $z = y^2$ содержится между корнями z_1 и z_2, но так как $y^2 \geqslant 0$, то должны выполняться неравенства $0 \leqslant y^2 < z_2$. Это возможно, если $0 < |x| < a$. Если же $|x| \geqslant a$ или $x = 0$, то $z_2 \leqslant 0$ и неравенство (1) не может выполняться.

Итак, имеем $|y| < \sqrt{z_2}$, если $0 < |x| < a$, откуда получим две области

$$-\sqrt{\frac{a\sqrt{8x^2+a^2}-(2x^2+a^2)}{2}} < y < \sqrt{\frac{a\sqrt{8x^2+a^2}-(2x^2+a^2)}{2}},$$

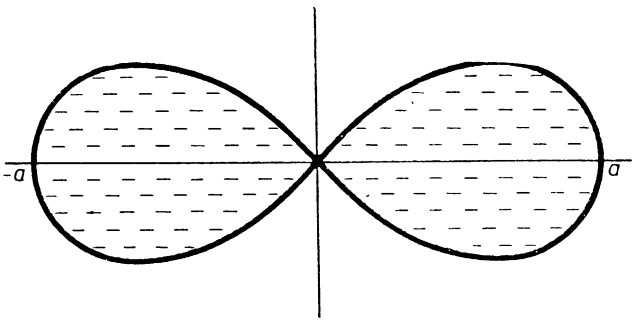
где

$$-a < x < 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < a$$

Геометрическая интерпретация. Уравнение

$$P(x,\ y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$$

изображает лемнискату Бернулли (черт. 129). Неравенство $P(x, y) < 0$ выполняется внутри двух областей, ограниченных петлями лемнискаты. Неравенство $P(x, y) > 0$ выполняется в области внешней относительно петель.



Черт. 129

6. Решить систему

$$y - x > 0, \quad y - x^3 < 0.$$

Решение. Данная система может быть переписана так:

$$x < y < x^3.$$

Эти неравенства могут выполняться при условии $x < x^3$ или $(x^3 - x) = (x+1)x(x-1) > 0$, откуда $-1 < x < 0$ и $1 < x < +\infty$. Следовательно, получим две области

$$\left.\begin{matrix} x < y < x^3, \\ -1 < x < 0 \end{matrix}\right\} (\mathrm{I}) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{matrix} x < y < x^3, \\ 1 < x < +\infty. \end{matrix}\right\} (\mathrm{II})$$

Общее решение состоит из двух областей, образованных точками, лежащими выше прямой $y = x$, но ниже кубической параболы $y = x^3$ (черт. 130).

7. Решить систему неравенств

$$y^2 - 2ax < 0, \quad x^2 + y^2 - 2ax > 0, \qquad \text{где } a > 0.$$

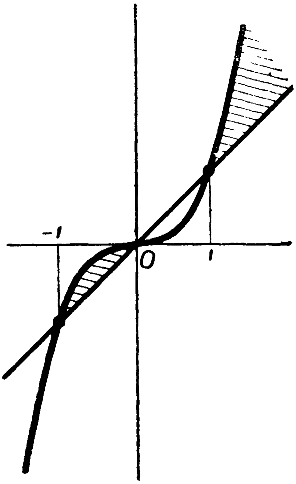
Геометрическое решение. Линия $y^2 = 2ax$ есть парабола, линия $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ есть окружность радиуса a с центром в точке $(a, 0)$. Окружность и парабола касаются оси ординат в точке $(0, 0)$.

Из уравнений окружности и параболы имеем (соответственно):

$$y = \pm\sqrt{2ax - x^2} \qquad \text{и} \qquad y = \pm\sqrt{2ax},$$

так как $\sqrt{2ax - x^2} < \sqrt{2ax}$, то окружность расположена между ветвями параболы (черт. 131).

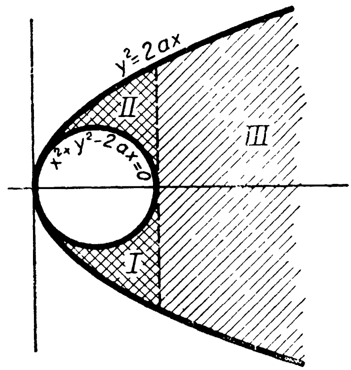
Первое неравенство системы определяет область, заключенную между ветвями параболы, второе определяет внешнюю область относительно окружности. Множество всех решений системы образует область внешнюю относительно окружности и заключенную между ветвями параболы.



Черт. 130

Алгебраическое решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$2ax - x^2 < y^2 < 2ax$$



Черт. 131

Из неравенств $0 < y^2 < 2ax$ следует $x > 0$. При $x > 0$ имеем:

$$2ax - x^2 = x(2a - x) \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \geqslant 0, & \text{если } 0 < x \leqslant 2a, \\ < 0, & \text{если } x > 2a. \end{matrix}$$

Следовательно, при $0 < x \leqslant 2a$ имеем:

$$\sqrt{2ax - x^2} < |y| < \sqrt{2ax},$$

т. е. получим две элементарные области I и II (черт. 133):

$$-\sqrt{2ax} < y < -\sqrt{2ax - x^2}, \quad 0 < x \leqslant 2a \tag{I}$$

и

$$\sqrt{2ax - x^2} < y < \sqrt{2ax}, \qquad 0 < x \leqslant 2a. \tag{II}$$

В интервале $2a < x < +\infty$ неравенство $2ax - x^2 < y^2$ выполняется тождественно. Следовательно, при $x > 2a$ имеем:

$|y| < \sqrt{2ax}$, т. е. получим элементарную область III;

$$-\sqrt{2ax} < y < \sqrt{2ax}, \quad 2a < x < +\infty. \tag{III}$$

8. Решить неравенство

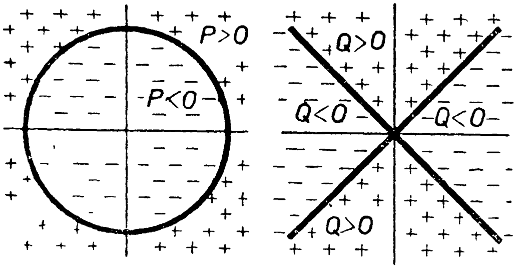
$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{y^2 - x^2} > 0.$$

Геометрическое решение. Линии $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$ суть окружность и пара прямых. На чертеже 132 показано распределение знаков числителя и знаменателя в различных частях плоскости. Система неравенств

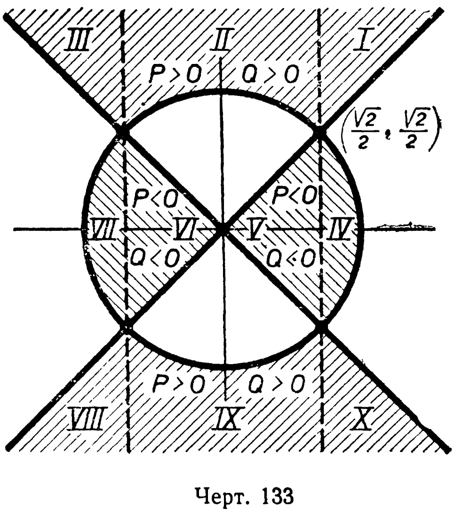
$P < 0$, $Q < 0$ выполняется в двух круговых секторах, а система $P > 0$, $Q > 0$ в двух «срезанных» углах (черт. 133). Дробное неравенство $\frac{P}{Q} > 0$ выполняется в указанных четырех областях Чтобы записать решение в виде неравенств

$$\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), \quad a < x < b,$$

надо эти неравенства записать отдельно для каждой из десяти элементарных областей, изображенных на черт. 135 (предоставляем это учащимся).



Черт. 132



Черт. 133

Алгебраическое решение. Установим, например, области, в которых $P < 0$, $Q < 0$. Имеем:

$$y^2 < 1 - x^2 \quad \text{и} \quad y^2 < x^2.$$

Так как $y^2 \geqslant 0$, то $1 - x^2 > 0$, откуда $0 \leqslant |x| < 1$. Так как $0 \leqslant y^2 < x^2$, то $|x| \neq 0$ (равенство $x = 0$ исключается). Определяем, какое из двух выражений $1 - x^2$ и x^2 является большим. Неравенство $1 - x^2 \leqslant x^2$ или $x^2 \geqslant \frac{1}{2}$ выполняется при $\quad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, неравенство $1-x^2 \geqslant x^2$ выполняется при $|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

откуда получим:

$$|y| < \begin{cases} |x|, & \text{если} \quad 0 < |x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |x| < 1. \end{cases}$$

Следовательно, при $x > 0$:

$$-x < y < x, \quad 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(область V)}$$

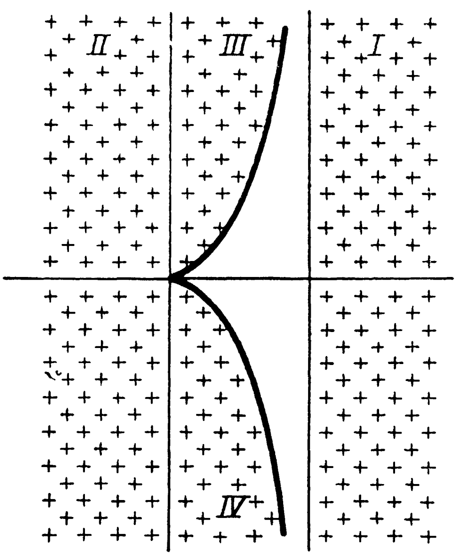
и

$$-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \text{ (область IV)},$$

а при $x < 0$

$$x < y < -x, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 0 \qquad \text{(область VI)}$$

и $$-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{(область VII)}.$$



Черт. 134

9. Решить неравенство

$$\frac{P}{Q} = \frac{(a-x)\,y^2 - x^3}{a-x} > 0$$

(где $a > 0$).

Решение. Решим неравенство

$$P = (a-x)\,y^2 - x^3 > 0 \quad (< 0).$$

Расположение линии

$$P(x,\ y) = 0 \text{ или}$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

(циссоиды) показано на чертеже 134. В самом деле, функция

$$x \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

имеет областью определения полусегмент $0 \leqslant x < a$, возрастает (ибо x возрастает, а $a-x$ убывает) и

$$\lim_{x \to a} |y| = +\infty.$$

Определим знаки $P(x, y)$ в двух областях, на которые циссоида делит плоскость. Если $x < 0$, $y = 0$, то $P(x, y) > 0$, если же $x > 0$, $y = 0$, то $P(x, y) < 0$. Следовательно, слева от циссоиды $P > 0$ и справа $P < 0$.

Рассмотрим знаменатель; имеем $Q>0$, если $x<a$, и $Q<0$, если $x>a$.

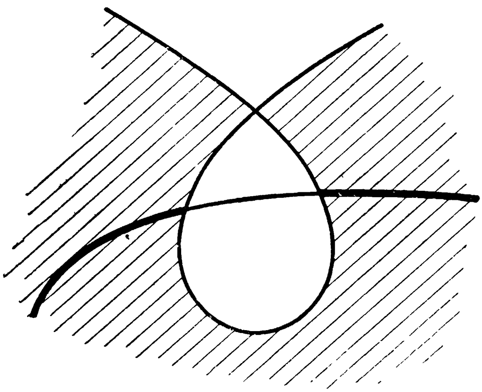
Данное дробное неравенство выполняется справа от прямой $x = a$ (где $P < 0$ и $Q < 0$ (и слева от циссоиды), где $P > 0$, $Q > 0$). Алгебраически решение запишется так:

$$a < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{I}$$

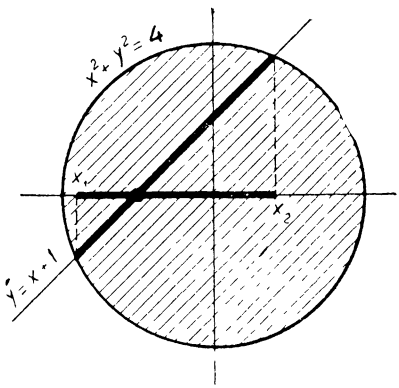
$$-\infty < x < 0, \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{II}$$

$$0 \leqslant x < a, \qquad x\sqrt{\frac{x}{a-x}} < y < +\infty, \tag{III}$$

$$0 \leqslant x < a, \qquad -\infty < y < -x\sqrt{\frac{x}{a-x}} \tag{IV}$$



Черт. 135



Черт. 136

Смешанные системы. Решение смешанной алгебраической системы

$$f(x, y) = 0, \tag{f}$$

$$\varphi(x, y) > 0 \tag{φ}$$

имеет следующую геометрическую интерпретацию. Уравнение (f) (если оно имеет решения в поле действительных чисел) определяет некоторую алгебраическую линию, а неравенство (φ) — совокупность областей G_1, G_2, ..., G_n. Обоим соотношениям (f) и (φ) удовлетворяют те дуги линии (f), которые принадлежат областям G_1, G_2, ..., G_n (черт. 135). Мы ограничимся рассмотрением конкретных примеров решения смешанных систем.

Примеры

1. Решить систему

$$x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x - y + 1 = 0.$$

Геометрическое решение. Неравенство определяет круг, уравнение определяет прямую линию, а смешанная система определяет хорду данного круга. Найдем точки пересечения окружности $x^2+y^2=4$ и прямой $x-y+1=0$:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \quad y_1=\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \quad y_2=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

(черт. 136).

Общее решение смешанной системы можно представить в виде:

$$y=x+1, \quad \text{где} \quad \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-1+\sqrt{7}}{2}. \tag{1}$$

Алгебраическое решение. Найдем общее решение уравнения $y=x+1$. В силу данного неравенства

$$x^2+(x+1)^2\leqslant 4 \quad \text{или} \quad 2x^2+2x-3\leqslant 0.$$

Решив последнее неравенство, для значений x получим сегмент:

$$\left[\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \ \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right],$$

общее решение можно представить в виде соотношений (1).

§ 93. Иррациональные уравнения

Определение. *Уравнение*

$$f(x, y, \ldots, z)=0 \tag{f}$$

называется иррациональным, если его левая часть есть алгебраическая иррациональная функция от неизвестных.

Преположим, что $f(x, y, \ldots, z)$ является явной иррациональной функцией, т. е. может быть задана выражением, содержащим радикалы.

Будем рассматривать иррациональное уравнение над полем комплексных чисел. Всякий радикал $\sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}$, содержащийся в левой части, при любой системе комплексных значений аргументов имеет n различных значений, если $R(x, y, \ldots, z)\neq 0$ Таким образом, *всякой данной (допустимой) системе комплексных значений аргументов соответствует некоторое множество (конечное) значений выражения $f(x, y, \ldots, z)$ (число значений зависит от количества радикалов и от их степеней).*

Определение. *Решением в поле комплексных чисел иррационального уравнения $f(x, y, \ldots, z)=0$ называется система значений неизвестных, при которой хотя бы одно из значений иррационального $f(x, y, \ldots, z)$ равно нулю.*

Если $x=a$, $y=b$, $\ldots$, $z=c$ есть решение иррационального уравнения (f), то при данных значениях неизвестных существует такая система значений радикалов (содержащихся в левой части), что значение левой части равно нулю. Таким образом, *в общем случае при $x = a$, $y = b$, ..., $z = c$ для каждого из радикалов следует взять некоторое вполне определенное значение и нельзя значения радикалов выбирать произвольно.*

Теорема. *Решение иррационального уравнения (или системы иррациональных уравнений) в поле комплексных чисел равносильно решению некоторой системы рациональных уравнений.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение, содержащее один радикал:

$$f\left(x, y, \ldots, z, \sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}\right) = 0, \qquad \text{(f)}$$

где $R(x, y, \ldots, z)$ — рациональная функция от неизвестных. Введем новое неизвестное u, положив:

$$u^n = R(x, y, \ldots, z). \qquad \text{(u)}$$

Решение данного уравнения равносильно решению рациональной системы

$$f(x, y, \ldots, z, u) = 0, \quad u^n = R(x, y, \ldots, z). \qquad \text{(f, u)}$$

В самом деле, выражение $f(x, y, \ldots, z, u)$ не содержит никаких других радикалов, а потому является рациональным относительно $x, y, \ldots, z, u$.

По определению корня n-й степени в поле комплексных чисел всякое значение u радикала $\sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}$ есть решение уравнения (u).

Вместо уравнения (f) можно рассматривать систему уравнений, содержащих данный радикал: достаточно присоединить уравнение (u) и заменить во всех уравнениях системы радикал новым неизвестным.

Если левая часть иррационального уравнения (или системы) содержит n простых радикалов

$$f\left(x, y, \ldots, z; \sqrt[k_1]{R_1}, \sqrt[k_2]{R_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{R_n}\right) = 0$$

(все подкоренные выражения рациональны), то для получения рациональной системы уравнений достаточно ввести новые неизвестные, положив:

$$u_1^{k_1} = R_1, \ u_2^{k_2} = R_2, \ \ldots, \ u_n^{k_n} = R_n.$$

Наконец, левая часть иррационального уравнения может содержать сложные радикалы, подкоренные выражения которых в свою очередь содержат радикалы, однако, действие извлечения корня должно выполняться конечное число раз. Пусть, например, $\sqrt[k_1]{R_1}$ — сложный радикал. Той же подстановкой получим систему уравнений:

$$f\left(x, y, \ldots, z, u_1, \sqrt[k_2]{R_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{R_n}\right) = 0, \quad u_1^{k_1} = R_1,$$

в которой действие извлечения корня выполняется на 1 меньшее число раз. Введение новых неизвестных можно продолжать далее: после каждой подстановки уменьшается число символов извлечения корня и увеличивается число уравнений. Так как число радикалов конечное, то после конечного числа шагов процесс закончится и полученная система уравнений окажется рациональной, ч. т. д.

Если после замены данного иррационального уравнения (или системы) системой рациональных уравнений исключить вновь введенные неизвестные, то получится алгебраическое уравнение (или система уравнений), содержащее лишь первоначальные неизвестные.

Рассмотрим, например, уравнение с одним неизвестным

$$f\left(x, \sqrt[n]{P(x)}\right) = 0, \qquad \text{(f)}$$

где $f(x, y)$ — многочлен от аргументов x и y, а $P(x)$ — многочлен. Заменим данное уравнение системой

$$f(x, y) = 0, \ y^n - P(x) = 0. \qquad \text{(f, u)}$$

Если из уравнений (f, u) исключить неизвестное y, то получится алгебраическое уравнение относительно x:

$$F(x) = 0, \qquad \text{(F)}$$

где $F(x)$ — многочлен от x.

Переход от иррационального уравнения (f) *к уравнению* (F), *являющемуся следствием* (f) *и не содержащему радикалов, называется исключением радикалов.*

Если при исключении радикалов применялись преобразования, могущие повлечь за собой появление посторонних решений, то последние надо устранить проверкой.

Во многих случаях при исключении радикалов не вводят новых неизвестных и выполняют ряд преобразований непосредственно над данным уравнением. При таком способе решения подлежит специальному исследованию, какие значения радикалов должны быть взяты при найденных значениях неизвестных. При введении новых неизвестных этот вопрос не требует дополнительных исследований, так как значения радикалов являются значениями вспомогательных неизвестных.

Пусть

$$f(x, y, \ldots, z) = 0 \qquad \text{(f)}$$

— иррациональное уравнение; если известен сопряженный множитель (см. § 40) $f_1(x, y, \ldots, z)$ в левой части, то, умножив уравнение (f) на этот множитель, получим уравнение, не содержащее радикалов:

$$f(x, y, \ldots, z) \cdot f_1(x, y, \ldots, z) = 0. \qquad (\mathrm{ff_1})$$

При этом способе исключения радикалов могут появиться посторонние решения, ими будут те решения уравнения

$$f_1(x, y, \ldots, z) = 0, \qquad (\mathrm{f_1})$$

которые не удовлетворяют уравнению (f).

Во многих случаях исключение радикалов может быть достигнуто посредством последовательного возведения обеих частей уравнения в степень. Так, например, уравнение вида:

$$P(x)\sqrt[n]{P_1(x)} = P_2(x), \qquad (\mathrm{P})$$

после возведения обеих частей в n-ю степень преобразуется в алгебраическое уравнение

$$P^n(x)P_1(x) = P_2^n(x). \qquad (\mathrm{P^n})$$

Над полем комплексных чисел уравнения (P) и (P^n) эквивалентны (под $\sqrt[n]{P_1(x)}$ можно подразумевать любое значение радикала).

Если уравнение содержит только лишь квадратные радикалы, то их можно исключить посредством последовательного возведения уравнения в квадрат. В самом деле, уравнение

$$f\left(x, y, \ldots, z, \sqrt{R_1(x, y, \ldots, z)}, \sqrt{R_2(x, y, \ldots, z)}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sqrt{R_k(x, y, \ldots, z)}\right) = 0,$$

где $f(x, y, \ldots, z, u_1, \ldots, u_k)$ — многочлен, может быть представлено в виде:

$$P\sqrt{R_1} + Q = 0 \quad \text{или} \quad P\sqrt{R_1} = -Q,$$

где P и Q суть многочлены относительно неизвестных и прочих квадратных радикалов. Возведя обе части в квадрат, получим уравнение:

$$P^2R_1 = Q^2,$$

не содержащее радикала $\sqrt{R_1}$. Этот прием можно последовательно применять к оставшимся радикалам, пока не получится уравнение, не содержащее радикалов *.

При решении иррациональных уравнений в поле действительных чисел допустимые значения для неизвестных и для радика-

* Общие методы исключения неизвестных излагаются в высшей алгебре.

лов должны удовлетворять дополнительным условиям, вытекающим из условий выполнимости извлечения корня и из смысла символа $\sqrt[n]{A}$ в поле действительных чисел, именно:

1°. *Системы значений неизвестных должны принадлежать области определения уравнения (системы) над полем действительных чисел, в силу чего значения всех подкоренных выражений для всех радикалов должны быть действительны, а для радикалов четной степени неотрицательны;*

2°. *Значения радикалов четной степени неотрицательны, т. е.* $\sqrt[2k]{A}$ *всегда обозначает арифметический корень* $\underset{+}{\sqrt[2k]{A}}$ *; значение корня нечетной степени* $\sqrt[2k+1]{A}$ *(при действительном A) есть единственное действительное его значение.*

Решение в поле действительных чисел иррационального уравнения

$$F\left(x, y, \ldots, z, \underset{+}{\sqrt[2k]{R(x, y, \ldots z)}}\right) = 0,$$

содержащего радикал четной степени, равносильно решению смешанной системы:

$$F(x, y, \ldots, z, u) = 0, \quad u^{2k} = R(x, y, \ldots, z), \ u \geqslant 0,$$

так как для всякого решения этой системы значения вспомогательного неизвестного u и подкоренного выражения R неотрицательны.

Если иррациональное уравнение (система) содержит несколько радикалов четных степеней, то при замене этого уравнения рациональной системой необходимо присоединить неравенства, выражающие неотрицательность вспомогательных неизвестных, которыми обозначены радикалы четных степеней.

Решение иррационального уравнения в поле действительных чисел методом исключения радикалов может привести к появлению посторонних решений. В самом деле, этим методом находятся все решения иррационального уравнения в поле комплексных чисел и из множества этих решений следует выбрать лишь те, которые удовлетворяют условиям 1° и 2°. Поэтому при решении иррациональных уравнений в поле действительных чисел посредством исключения радикалов необходима проверка решений путем подстановки в данное уравнение (если в процессе решения не производилось исследование выполнимости условий 1° и 2°).

Если в данном уравнении какое-либо значение радикала заменить другим его значением, то уравнение, получающееся в результате исключения радикала, не изменится. Из всех комплексных значений радикала четной степени $\sqrt[2k]{A}$ (где $A > 0$)

два его значения действительны: $\pm \sqrt[2k]{A}_{+}$. Поэтому при решении уравнения, содержащего действительные радикалы четной степени, посредством исключения радикалов могут появиться посторонние решения, принадлежащие уравнениям, получающимся из данного изменением знаков перед радикалами четной степени на противоположные.

Возведение обеих частей уравнения в нечетную степень приводит к уравнению, эквивалентному данному над полем действительных чисел. Возведение обеих частей уравнения в четную степень в общем случае приводит к уравнению, не эквивалентному данному (см. § 49 стр. 195). Уравнение

$$[F(x, y, \ldots z)]^{2k} = [\Phi(x, y, \ldots z)]^{2k} \qquad (F^{2k})$$

эквивалентно над полем действительных чисел совокупности двух уравнений:

$$F = \Phi \text{ и } F = -\Phi.$$

Если уравнение $F = -\Phi$ в поле действительных чисел не имеет решений, то в этом частном случае уравнение эквивалентно уравнению (F^{2k}).

Следствие. Уравнение

$$\sqrt[2k]{P(x, y, \ldots, z)} = Q(x, y, \ldots, z) \qquad (1)$$

над полем действительных чисел эквивалентно смешанной системе:

$$\left.\begin{aligned} P(x, y, \ldots, z) &= Q^{2k}(x, y, \ldots z), \\ Q(x, y, \ldots, z) &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В самом деле, уравнение $P = Q^{2k}$ эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\sqrt[2k]{P} = Q \text{ и } -\sqrt[2k]{P} = Q,$$

но при выполнении неравенства $Q > 0$ второе уравнение не имеет решений, так как $\sqrt[2k]{P}_{+} \geqslant 0$ (по определению арифметического радикала), если же $Q = 0$, то оба уравнения совпадают.

Примечание. При решении иррациональных уравнений в поле действительных чисел появление посторонних решений может произойти не только вследствие почленного возведения обеих частей в степень, но и вследствие расширения области определения уравнения при выполнении тождественных преобразований.

Примеры

1. Решить уравнение

$$x+\sqrt{x-1}=7.$$

Решение. Решим уравнение в поле комплексных чисел. Положив $\sqrt{x-1}=y$, получим систему:

$$x+y=7, \quad y^2=x-1.$$

Подставив y из первого во второе, исключим радикал и получим квадратное уравнение

$$x^2-15x+50=0.$$

Отсюда $x=5$ и $x=10$.

При $x=5$ имеем $y=2$, т. е. значение радикала следует взять равным числу 2.

При $x=10$ имеем $y=-3$, т. е. значение радикала следует взять равным числу -3. Исключить радикал можно возведением в квадрат обеих частей уравнения

$$\sqrt{x-1}=7-x,$$

после выполнения преобразований получим то же самое квадратное уравнение (2). В поле комплексных чисел уравнение имеет два решения.

При решении того же уравнения в поле действительных чисел надо присоединить неравенство $y\geqslant 0$; этому условию удовлетворяет лишь решение $x=5$. Таким образом, в поле действительных чисел уравнение имеет единственное решение.

Значение $x=10$ служит решением уравнения

$$x-\sqrt{x-1}=7.$$

Примечание. Уравнения

$$x+\sqrt{x-1}=7 \quad \text{и} \quad x-\sqrt{x-1}=7$$

над полем комплексных чисел не являются различными, так как множество значений обоих радикалов является одной и той же парой взаимно противоположных чисел. Над полем действительных чисел эти уравнения различны, так как в этом поле квадратные радикалы неотрицательны и

$$\underset{+}{\sqrt{x-1}}\neq-\underset{+}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{если } x\neq 1).$$

2. Решить в поле действительных чисел уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}.$$

Решение. Обе части уравнения неотрицательны, поэтому возведем уравнение почленно в квадрат и заменим его эквивалентной смешанной системой; после преобразований получим:

$$\left.\begin{array}{c} 2\sqrt{2x+3}\sqrt{5x+1}=5x+9, \\ x\geqslant\frac{-3}{2}, \quad x\geqslant-\frac{1}{5}, \quad x\geqslant-\frac{13}{12}. \end{array}\right\}$$

Снова возведем в квадрат и составим смешанную систему:

$$\left.\begin{array}{c} 4(2x+3)(5x+1)=25x^2+90x+81, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \quad x \geqslant -\dfrac{9}{5} \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{c} 15x^2-22x-69=0, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{5}. \end{array}\right\}$$

Корни квадратного уравнения суть $x_1 = -\dfrac{23}{15}$ и $x_2 = 3$, из которых неравенству удовлетворяет x_2.

В поле действительных чисел уравнение имеет единственное решение $x = 3$.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$$

Решение. Областью определения уравнения в поле комплексных чисел является множество всех чисел, отличных от нуля: $x \neq 0$. Для решения уравнения в поле комплексных чисел составим рациональную систему:

$$u-v=\frac{x-1}{x}, \quad u^2=x-\frac{1}{x}, \quad v^2=1-\frac{1}{x}. \tag{A}$$

Вычтем почленно третье уравнение из второго, получим:

$$(u+v)(u-v)=x-1.$$

Заменив третье уравнение этим последним уравнением, получим систему, эквивалентную данной:

$$u-v=\frac{x-1}{x}, \quad u^2=x-\frac{1}{x}, \quad (u+v)(u-v)=x-1. \tag{B}$$

Подставив разность $u-v$ из первого уравнения в третье, заменим систему эквивалентной ей системой:

$$u-v=\frac{x-1}{x}, \quad u^2=x-\frac{1}{x}, \quad (u+v)\frac{x-1}{x}=x-1. \tag{C}$$

При $x=1$ последнее уравнение удовлетворяется тождественно, а из первых двух найдем $u=v=0$. Итак, имеем решение системы (A) $x_1=1$, $u_1=v_1=0$.

Для нахождения прочих решений сократим последнее уравнение на $x-1$ и умножим на x, получим:

$$u+v=x$$

Из этого уравнения и из первого уравнения системы найдем:

$$u=\frac{x^2+x-1}{2x}, \qquad v=\frac{x^2-x+1}{2x}. \tag{u, v}$$

Подставим во второе уравнение системы:

$$\left(\frac{x^2+x-1}{2x}\right)^2=\frac{x^2-1}{x}.$$

После упрощения получим:

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=0;$$

это уравнение решается подстановкой $z = x - \frac{1}{x}$, которая дает квадратное уравнение

$$z^2 - 2z + 1 = 0; \quad \text{из последнего найдем;} \quad z = 1.$$

Из квадратного уравнения

$x^2 - x - 1 = 0$ найдем $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, формулы (u, v) дадут соответствующие значения радикалов. В поле комплексных чисел уравнение имеет три решения.

Для решения того же уравнения в поле действительных чисел ставим следующие условия: числа x, u, v действительны и $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ Корень $x_1 = 1$ удовлетворяет этим условиям. Для исследования корней x_2 и x_3 воспользуемся формулами (u, v); приняв во внимание, что x_2 и x_3 суть корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, имеем:

$$u = \frac{(x+1) + x - 1}{2x} = 1 \quad \text{и} \quad v = \frac{x + 1 - x + 1}{2x} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, при $x = x_2$, $u > 0$, $v < 0$, так как $x_2 < 0$, а при $x = x_3$, $u > 0$, $v > 0$, так как $x_3 > 0$ В поле действительных чисел уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Для решения уравнения

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1 \tag{1}$$

применим следующий прием: из тождества

$$(\sqrt{2x^2 + 5x - 2})^2 - (\sqrt{2x^2 + 5x - 9})^2 = 7$$

в силу (1), следует:

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 7. \tag{2}$$

Из системы уравнений (1) и (2) найдем:

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} = 4, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{9}{2}.$$

Оба корня удовлетворяют уравнению (1)

5. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \frac{a}{x}. \tag{1}$$

(где $a \neq 0$)

Решение. Образуем производную пропорцию:

$$\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}} = \frac{a + x}{a - x}. \tag{2}$$

Положив $t = \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}}$, получим: $t^2 = t_1$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$

Найдем корни уравнения (2):

$$x_1 = -a \text{ (при } t = 0) \quad \text{и} \quad x_2 = 0 \text{ (при } t = 1).$$

Значение $x_1 = -a$ не является особым для уравнений (1) и (2), оно удовлетворяет обоим этим уравнениям.

Значение $x = a$, не принадлежащее области определения уравнения (2), удовлетворяет уравнению (1) (т. е. имеет место потеря корня)

Корень $x = 0$ уравнения (2) не удовлетворяет уравнению (1), это есть постороннее решение.

6 Решить уравнение

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6}-(x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x}-\sqrt[5]{x-6}} = 30.$$

Решение. Заметив, что при $x = 39$ уравнение не удовлетворяется, разделим числитель и знаменатель левой части на $\sqrt[5]{39-x}$:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{39-x}}-(x-6)}{1-\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{39-x}}} = 30.$$

Положив

$$u^5 = \frac{x-6}{39-x},$$

получим систему:

$$\frac{(39-x)(u-u^5)}{1-u} = 30, \quad u^5 = \frac{x-6}{39-x}. \qquad (1)$$

Из второго уравнения

$$x = \frac{39u^5+6}{1+u^5} \quad \text{и} \quad 39-x = \frac{33}{1+u^5}, \quad \text{если } u^5 \neq -1.$$

Подставив в первое, получим:

$$\frac{33u(1-u^4)}{(1+u^5)(1-u)} = 30, \quad \text{или} \quad \frac{3(u+1)(10u^4-21u^3+10u^2-21u+10)}{1+u^5} = 0$$

Для определения u получаем возвратное уравнение:

$$10u^4-21u^3+10u^2-21u+10 = 0.$$

Посредством обычной подстановки $z = u + \dfrac{1}{u}$ найдем:

$$u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_{3,4} = \frac{-1 \pm 2i\sqrt{6}}{5}.$$

Откуда

$$x_1 = 38, \quad x_2 = 7, \quad x_{3,4} = \frac{39(-1 \pm 2i\sqrt{6})^5 + 6\cdot 5^5}{5^5 + (-1 \pm 2\sqrt{6}i)^5}.$$

При особых значениях $u^5 = -1$ второе уравнение системы (1) противоречиво, уравнение не имеет решений данного вида.

7. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{A(x, y, \ldots, z)} + \sqrt{B(x, y, \ldots, z)} - \sqrt{C(x, y, \ldots, z)} = 0 \quad (1)$$

над полем действительных чисел (A, B и C — рациональные выражения). Исключение радикалов можно выполнить двумя способами.

Первый способ. Применив метод последовательного возведения в квадрат, получим:

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C \quad \text{или} \quad 2\sqrt{A}\sqrt{B} = C - A - B. \qquad (1)$$

Возведя снова обе части в квадрат (1′), получим:

$$C^2 + A^2 + B^2 - 2CA - 2CB - 2AB = 0. \qquad (R)$$

Второй способ. Умножив обе части (1) на сопряженный множитель

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})(-\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})(\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}),$$

получим то же самое уравнение (R)

Предположим, что система чисел $x, y, \ldots, z$ есть решение смешанной системы, состоящей из уравнения (R) и из неравенств

$$A \geqslant 0, \quad B \geqslant 0, \quad C \geqslant 0,$$

которыми задается область определения уравнения (1). Так как левая часть (R) обращается в нуль, то обращается в нуль хотя бы один из ее сомножителей, т. е. система чисел $x, y, \ldots, z$ есть решение хотя бы одного из уравнений:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C} = 0, \qquad (1)$$

$$-\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0, \qquad (2)$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0, \qquad (3)$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0. \qquad (4)$$

Если удовлетворяется уравнение (1), то из (1′) следует, что значение $C - A - B$, равное $2\sqrt{AB}$, неотрицательно, т. е.

$$A + B \leqslant C. \qquad (a)$$

Аналогично, если удовлетворяется уравнение (2), то

$$B + C \leqslant A, \qquad (b)$$

если удовлетворяется (3), то

$$A + C \leqslant B. \qquad (c)$$

Если $A > 0$, $B > 0$ и $C > 0$, то соотношения (a), (b) и (c) взаимно исключают друг друга. В самом деле, если, например, выполняются неравенства (a), (b), то

$$2B + A + C \leqslant A + C, \quad \text{откуда} \quad 2B \leqslant 0.$$

В этом случае неравенства (a), (b) и (c) служат признаками, позволяющими судить, какое из уравнений (1), (2) или (3) удовлетворяется рассматриваемым решением уравнения (R).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{b + x} - \sqrt{c + x} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (R) примет вид:

$$f(x) = 3x^2 + 2(a + b + c)x - (a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac - 2ab) = 0, \qquad (R)$$

это квадратное уравнение с неотрицательным дискриминантом:

$$\Delta = 4(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab) = (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2$$

(применить преобразование выделения полных квадратов). Следовательно, при произвольных a, b и c корни (R) действительны. В данном примере

$$A = a + x, \quad B = b + x, \quad C = c + x.$$

Предположим для определенности, что $a < b < c$. Положив в левой части (R) $x = -a$, получим:

$$f(-a) = -(b - c)^2 < 0, \quad \text{и аналогично} \quad f(-b) < 0, \ f(-c) < 0.$$

Следовательно,

$$x_1 < -c < -b < -a < x_2,$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения (R), а потому при $x = x_1$ все радикалы мнимые, а при $x = x_2$ все три радикала действительны. Согласно изложенному, число x_2 есть корень одного из уравнений (1), (2), (3). Докажем, что при данном расположении чисел $a < b < c$ удовлетворяется уравнение (1). В самом деле, уравнение (2)

$$-\sqrt{a + x} + \sqrt{b + x} + \sqrt{c + x} = 0$$

не может удовлетворяться, так как

$$\left(\sqrt{c + x_2} - \sqrt{a + x_2}\right) + \sqrt{b + x_2} > 0.$$

Так же докажем, что не может удовлетворяться уравнение (3).

8. Решить в поле действительных чисел уравнение

$$x + \sqrt{x(a - x)} = b, \tag{1}$$

где a и b — положительные параметры.

Решение. Уединив радикал, получим:

$$\sqrt{x(a - x)} = b - x. \tag{2}$$

Возведем почленно уравнение (2) в квадрат и составим смешанную систему, эквивалентную этому уравнению:

$$2x^2 - (2b + a)x + b^2 = 0, \quad b - x \geqslant 0, \tag{3}$$

найдем корни квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{2b + a - \sqrt{a^2 + 4ab - 4b^2}}{4}, \quad x_2 = \frac{2b + a + \sqrt{a^2 + 4ab - 4b^2}}{4}.$$

Эти корни действительны при условии:

$$a^2 + 4ab - 4b^2 \equiv [a + 2(1 + \sqrt{2})b][a - 2(\sqrt{2} - 1)b] \geqslant 0.$$

При $a > 0$, $b > 0$ последнее неравенство выполняется, если

$$a \geqslant 2(\sqrt{2} - 1)b \approx 0{,}82b. \tag{4}$$

Чтобы выяснить, удовлетворяют ли корни квадратного уравнения неравенству смешанной системы (3), определим положение числа b относительно корней этого уравнения.

Имеем:

$$f(b) = b(b - a)\begin{cases} < 0, & \text{если } a > b, \\ \geqslant 0, & \text{если } a \leqslant b \end{cases}$$

При $a > b$ имеем: $x_1 < b < x_2$; неравенству удовлетворяет x_1

При $a \leqslant b$ число b не меньшее большего корня, так как

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2b + a}{4} < b$$

(равенство $x_2 = b$ при $b = a$) и $x_1 < x_2 \leqslant b$; оба корня удовлетворяют неравенству $b - x \geqslant 0$

Из изложенного следует, что в поле действительных чисел уравнение (1):

I) не имеет решений, если $a < 2(\sqrt{2} - 1)b$;

II) имеет единственное решение $x = x_1$, если $a > b$;

III) имеет два решения $x = x_1$ и $x = x_2$, если $2(\sqrt{2} - 1)b < a \leqslant b$;

IV) имеет единственное решение

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} b, \quad \text{если} \quad a = 2(\sqrt{2} - 1)b$$

9. Решить в поле действительных чисел уравнение

$$\sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10 + x - 6\sqrt{x+1}} = 1. \qquad (1)$$

Решение Положив $\sqrt{x+1} = y$, получим:

$$\sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1.$$

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\left|\sqrt{x+1} - 2\right| + \left|\sqrt{x+1} - 3\right| = 1.$$

Радикал $\sqrt{x+1}$ действителен, если $-1 < x$:

$$\left|\sqrt{x+1} - 2\right| = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2, & \text{если } \sqrt{x+1} \geqslant 2, \text{ т. е. } x \geqslant 3, \\ 2 - \sqrt{x+1}, & \text{если } -1 \leqslant x < 3; \end{cases}$$

$$\left|\sqrt{x+1} - 3\right| = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 3, & \text{если } x \geqslant 8, \\ 3 - \sqrt{x+1}, & \text{если } -1 \leqslant x < 8. \end{cases}$$

Следовательно, левая часть уравнения (1) равна

$$\begin{aligned} 5 - 2\sqrt{x+1}, &\quad \text{если } -1 \leqslant x < 3, \\ 1, &\quad \text{если } 3 \leqslant x \leqslant 8; \\ 2\sqrt{x+1} - 5, &\quad \text{если } 8 < x \end{aligned}$$

На сегменте $3 \leqslant x \leqslant 8$ уравнение удовлетворяется тождественно. В интервале $-1 < x < 3$ уравнение $5 - 2\sqrt{x+1} = 1$ не имеет решений, так как единственным его решением служит $x = 3$

Аналогично, уравнение (1) не имеет решений в интервале $8 < x < +\infty$.

Итак, уравнение (1) имеет бесконечное множество решений: $3 \leqslant x \leqslant 8$

В результате освобождения уравнения (1) от радикалов получится тождество. В поле комплексных чисел при всяком x значения радикалов могут быть взяты так, что их сумма равна 1.

§ 94. Иррациональные неравенства

Иррациональным неравенством называется неравенство вида

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z) \vee 0,$$

где $f(x, y, \ldots, z)$ — иррациональная функция от неизвестных. Будем считать $f(x, y, \ldots, z)$ явной алгебраической функцией. Рассмотрим, например, неравенство вида:

$$f\left(x,\ y,\ \ldots,\ z, \sqrt[n_1]{R_1},\ \sqrt[n_2]{R_2},\ \sqrt[n_k]{R_k}\right) > 0.$$

Решение иррационального неравенства равносильно решению в поле действительных чисел следующей смешанной системы:

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k) > 0,$$

$$u_1^{n_1} = R_1,\ u_2^{n_2} = R_2,\ \ldots,\ u_n^{n_k} = R_k$$

с присоединением неравенств, которым должны удовлетворять значения радикалов в поле действительных чисел. Именно, если, например, $n_1 = 2k$ — четное число, то кроме уравнения $u_1^{2k} = R_1$, следует присоединить неравенство $u_1 \geqslant 0$, при выполнении которого радикал $\sqrt[2k]{R_1}$ является арифметическим.

В частности, решение неравенства

$$f\left(x, \sqrt{\varphi(x)}\right) > 0 \qquad (\mathrm{I})$$

можно заменить решением смешанной системы

$$f(x,\ y) > 0, \quad y^2 = \varphi(x), \quad y \geqslant 0,$$

геометрически это значит, что отыскиваются дуги алгебраической линии $y^2 = \varphi(x)$, лежащие в верхней полуплоскости $(y \geqslant 0)$ и содержащиеся в областях, определяемых неравенством $f(x, y) > 0$. Решением неравенства (I) служит множество соответствующих этим дугам промежутков, в которых должен содержаться аргумент x (т. е. проекции этих дуг на ось абсцисс) (черт. 137).

При решении иррациональных неравенств нередко пользуются способом «уединения» радикала с последующим возведением обеих частей неравенства в степень, равную степени радикала.

При таком способе решения надо иметь в виду следующее:

1°. *Неравенство*

$$\sqrt[2n]{\varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z)} < f(x,\ y,\ \ldots,\ z)$$

эквивалентно системе неравенств:

$$\varphi < f^{2n}, \quad f > 0, \quad \varphi \geqslant 0$$

(для краткости аргументы не пишем).

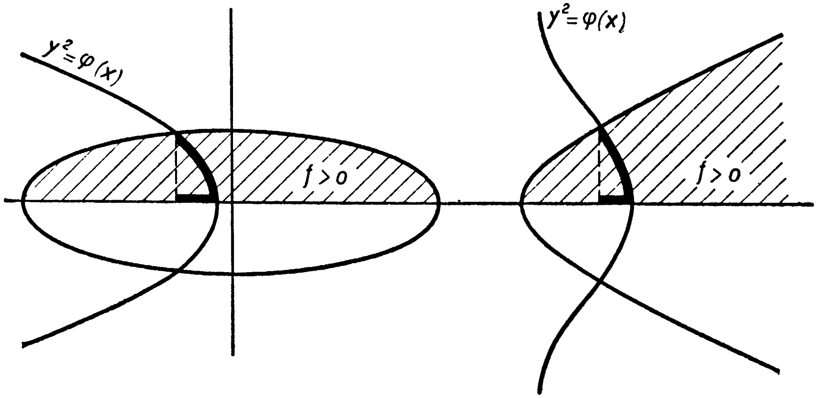
2°. *Неравенство*

$$\sqrt[2n]{\varphi(x, y, \ldots, z)} > f(x, y, \ldots, z) \qquad (1)$$

эквивалентно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\left.\begin{aligned} \varphi \geqslant 0, \\ f < 0 \end{aligned}\right\} \quad (A) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{aligned} \varphi > f^{2n}, \\ f \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

В самом деле, неравенство (1) удовлетворяется всеми допустимыми системами значений неизвестных, при которых правая



Черт. 137

часть отрицательна, а при неотрицательной правой части возможно почленное возведение неравенства в степень.

3°. *Неравенства*

$$\sqrt[2n+1]{\varphi} < f \quad \text{и} \quad \varphi < f^{2n+1}$$

эквивалентны.

Примеры

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} - 3 - x > 0.$$

Алгебраическое решение. **Уединим радикал:**

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 3 + x.$$

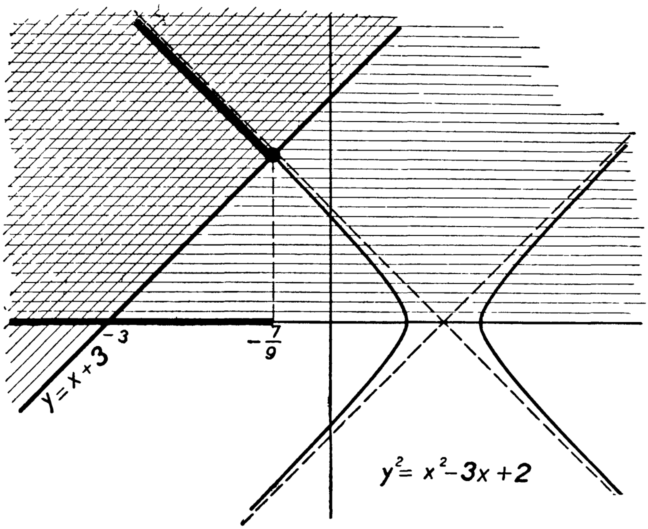
Это неравенство эквивалентно совокупности двух систем **рациональных** неравенств:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ 3 + x < 0 \end{aligned}\right\} \quad (A) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 > (3 + x)^2, \\ 3 + x \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Решим систему (А): квадратное неравенство выполняется в двух интервалах $-\infty < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < \infty$; общей частью совокупности этих интервалов и интервала $x < -3$ является интервал $-\infty < x < -3$.

Решим систему (В): первое неравенство эквивалентно линейному неравенству $-9x-7>0$, откуда $-\infty < x < -\frac{7}{9}$; общей частью этого интервала и полусегмента $-3 \leqslant x < \infty$ является полусегмент $-3 \leqslant x < -\frac{7}{9}$.

Интервал $(-\infty, -3)$ (общее решение A) и полусегмент $\left(-3, -\frac{7}{9}\right)$ (общее решение B) в сумме составляют интервал $-\infty < x < -\frac{7}{9}$.



Черт. 138

Геометрическое решение. Заменим неравенство смешанной системой

$$y-3-x>0, \quad y^2=x^2-3x+2, \quad y \geqslant 0.$$

Уравнение $y^2=x^2-3x+2$ изображает гиперболу (черт. 138) Ищем части гиперболы, расположенные в верхней полуплоскости выше прямой $y=x+3$ гипербола и прямая пересекаются в одной точке $x=-\frac{7}{9}$, $y=\frac{20}{9}$.

Поставленным условиям удовлетворяет часть гиперболы, соответствующая интервалу $-\infty < x < -\frac{7}{9}$.

2 Решить смешанную систему

$$x^2+y^2=4, \quad x-y+1>0.$$

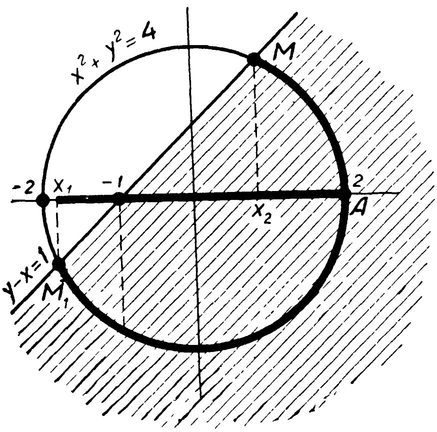
Геометрическое решение. Смешанная система определяет дугу M_1AM окружности $x^2 + y^2 = 4$, лежащую ниже секущей $y = x + 1$ (черт. 139).

Алгебраическое решение Найдем общее решение уравнения

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \quad \text{где} \quad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Взяв перед радикалом знак — (нижняя ветвь) и подставив в неравенство, получим иррациональное неравенство

$$\sqrt{4 - x^2} > -x - 1.$$



Черт. 139

Это неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\left.\begin{aligned} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x - 1 < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

и

$$\left.\begin{aligned} 4 - x^2 > (-x - 1)^2, \\ -x - 1 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Решив систему (A), получим полуинтервал $-1 < x \leqslant 2$. Решаем систему (B), из квадратного неравенства

$$4 - x^2 - (x + 1)^2 \equiv -2x^2 - 2x + 3 > 0$$

найдем интервал $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{2} < x < \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{2} = x_2$. Общей частью этого интервала и полуинтервала $-\infty < x \leqslant -1$ является полуинтервал $x_1 < x \leqslant -1$.

Множества всех решений систем (A) и (B) составляют в сумме полуинтервал $x_1 < x \leqslant 2$.

Взяв перед радикалом знак +, получим:

$$\sqrt{4 - x^2} < x + 1.$$

Заменим это неравенство эквивалентной ему смешанной системой

$$\left.\begin{aligned} -2 \leqslant x \leqslant 2, \ x + 1 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 < (x + 1)^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2x^2 - 2x + 3 < 0. \end{aligned}\right\}$$

Из квадратного неравенства получим совокупность двух интервалов $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$, которая с сегментом $[-1, 2]$ имеет общую часть в виде полуинтервала $(x_2, 2]$.

Множество всех решений смешанной системы можно представить в виде:

$$y = -\sqrt{4 - x^2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} < x \leqslant 2 \quad (\text{дуга } M_1A)$$

и

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < x \leqslant 2 \quad (\text{дуга } AM).$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3. \qquad (A)$$

Решение. Так как левая и правая части данного неравенства неотрицательны, то по возведении обеих его частей в квадрат можно составить эквивалентную ему систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} 25+7x+2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+7x}>9, \\ -5\leqslant x\leqslant 5, \quad x^2+7x\geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (B)$$

Третье неравенство данной системы определяет совокупность двух промежутков $(-\infty, -7]$ и $[0, \infty)$, которая имеет с сегментом общую часть в виде сегмента $[0, 5]$, поэтому данная система эквивалентна следующей системе неравенств:

$$2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+7x}>-7x-16, \quad 0\leqslant x\leqslant 5. \qquad (C)$$

Так как правая часть первого неравенства на сегменте $[0, 5]$ отрицательна, то множеством всех решений системы (A), (C), а следовательно, и эквивалентного ему данного неравенства, служит сегмент $0\leqslant x\leqslant 5$.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}>\sqrt{x+1}.$$

Решение. Неравенство, эквивалентное данному,

$$\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$$

имеет неотрицательные левую и правую части, а потому по возведении обеих частей в квадрат можно заменить неравенство эквивалентной ему системой неравенств:

$$x+6>3x-4+2\sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-5}, \quad x\geqslant -6, \quad x\geqslant -1, \quad x\geqslant \frac{5}{2}$$

или

$$5-x>\sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-5}, \quad x\geqslant \frac{5}{2}.$$

По возведении обеих частей в квадрат получим (после преобразований) систему

$$\left.\begin{array}{l} x^2+7x-30<0, \\ 5-x>0, \quad x\geqslant \dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad -10<x<3, \quad x<5, \quad \frac{5}{2}\leqslant x.$$

Множеством всех решений последней системы, а следовательно, и эквивалентной ей данной системы служит полусегмент $\frac{5}{2}\leqslant x<3$.

5. Решение иррациональных неравенств, содержащих параметры, может представить значительные трудности. Мы ограничимся рассмотрением лишь одного из классических примеров.

Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}<a-1. \qquad (1)$$

Решение. Левая часть неотрицательна, поэтому при $a\leqslant 1$ неравенство не имеет решений.

Предположим, что $a > 1$, тогда обе части неравенства (1) неотрицательны, и это неравенство можно заменить эквивалентной ему системой:

$$\frac{3x+a}{x-a} < (a-1)^2, \qquad \frac{3x+a}{x-a} \geqslant 0.$$

При $a > 1$ второе неравенство выполняется в совокупности двух промежутков $a < x < \infty$ и $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$. После преобразований первое неравенство примет вид:

$$\frac{x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2)}{x-a} < 0,$$

следовательно, данная система эквивалентна совокупности четырех систем линейных неравенств:

$$x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) > 0, \quad x-a<0, \quad -\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}; \qquad (A)$$

$$x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) > 0, \quad x-a<0, \quad a<x<\infty; \qquad (B)$$

$$x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) < 0, \quad x-a>0, \quad -\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}; \qquad (C)$$

$$(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) < 0, \quad x-a>0, \quad a<x<\infty. \qquad (D)$$

Системы (B) и (C) противоречивы, поэтому достаточно решить совокупность систем неравенств (A) и (D), заменив их эквивалентными системами:

$$x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) > 0, \quad -\infty < x < -\frac{a}{3} \qquad (I)$$

и

$$x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2) < 0, \quad a<x<\infty. \qquad (II)$$

Вычислим корни квадратных трехчленов

$$-a^2+2a+2 \quad \text{и} \quad a^2-2a+2$$

в интервале $1 < a < \infty$.

В интервале $(1, \infty)$ содержится один корень $a = 1+\sqrt{3}$ первого трехчлена.

Второй трехчлен имеет мнимые корни, а потому он знакоположителен.

Случай 1°. $1 < a < 1+\sqrt{3}$, в этом интервале $-a^2+2a+2>0$. Систему (I) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a+2} < x \leqslant -\frac{a}{3}.$$

Последние неравенства могут выполняться при условии:

$$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < -\frac{a}{3} \quad \text{или} \quad \frac{4a(a-1)^2}{a^2-2a-2} < 0.$$

Последнее условие выполняется (числитель положителен, знаменатель отрицателен).

Система (II) противоречива.

Случай 2°. $a = 1+\sqrt{3}$, тогда $-a^2+2a+2=0$.

Система (I) удовлетворяется в полуинтервале $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$, так как первое неравенство удовлетворяется тождественно; система (II) противоречива.

Случай 3°. $1+\sqrt{3} < a < +\infty$, в этом интервале $-a^2+2a+2<0$.

Из неравенств системы (I) получим: $x < \frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}$ и $x \leqslant -\frac{a}{3}$. Система удовлетворяется в полуинтервале $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$, так как правая часть первого неравенства положительна.

Из неравенств системы (II) получим: $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < x$ и $x < a$. Откуда получим интервал: $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < x < \infty$, так как $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2} > 1$ и $a \cdot \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2} > a$.

Итак, имеем следующий окончательный результат:

Значения параметра	Решение неравенства
1°. $1 < a < 1+\sqrt{3}$	полуинтервал: $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < x \leqslant -\frac{a}{3}$
2°. $a = 1+\sqrt{3}$	полуинтервал: $-\infty < x \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{3}$
3°. $a > 1+\sqrt{3}$	совокупность двух промежутков: $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$ и $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < x < +\infty$
4°. $a \leqslant 1$	не имеет решений

§ 95. Примеры решения текстовых задач

Общие указания, относящиеся к решению и исследованию текстовых задач, изложены в § 65. После записи посредством уравнений и неравенств всех условий, данных в задаче, дополнительных условий для неизвестных и параметров нередко получаются зависимые соотношения, из которых некоторые являются следствиями прочих соотношений. Во избежание бесполезных «исследований», которые в случае уравнений и неравенств высших степеней могут явиться достаточно трудоемкими, рекомендуется ограничиваться исследованием выполнения независимых условий. Исследование условий, которые выполняются сами собой при соблюдении прочих, является излишним. При решении уравнений и неравенств, в целях рационализации работы, рекомендуется в процессе самого решения отбрасывать те соотношения, которые заведомо не могут удовлетворять условию задачи.

Примеры

1. *Из двух городов A и B, расстояние между которыми* s *км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда и встретились через* t *час Известно, что первый поезд проезжает* m *км на* q *час быстрее второго. Найти скорость каждого поезда*

Решение. Пусть v_1 и v_2 — искомые скорости первого и второго поездов (соответственно). По смыслу задачи $v_2 < v_1$, а допустимые значения всех параметров положительны:

$$s > 0, \quad m > 0, \quad t > 0, \quad q > 0.$$

Так как встреча произошла через t *час*, то

$$s = t(v_1 + v_2).$$

Расстояние m *км* первый поезд пройдет за $\frac{m}{v_1}$, а второй за $\frac{m}{v_2}$ *час*; согласно условию:

$$\frac{m}{v_2} - \frac{m}{v_1} = q.$$

Имеем смешанную систему:

$$s = t(v_1 + v_2), \quad \frac{m}{v_2} - \frac{m}{v_1} = q, \quad 0 < v_2 < v_1. \tag{1}$$

Из первого уравнения системы (1) выразим v_2 через v_1 и, подставив во второе, получим квадратное уравнение

$$qtv_1^2 + (2mt - qs)v_1 - ms = 0; \tag{2}$$

корни уравнения (2) действительны:

$$\Delta = (2mt - qs)^2 + 4mstq = q^2s^2 + 4m^2t^2 > 0.$$

Так как произведение корней уравнения (2) $-\frac{ms}{qt}$ отрицательно, то больший корень положителен, а меньший отрицателен, поэтому берем больший корень:

$$v_1 = \frac{qs - 2mt + \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}.$$

Для v_2 найдем:

$$v_2 = \frac{s}{t} - v_1 = \frac{qs + 2mt - \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}.$$

Неравенства $0 < v_2 < v_1$ при $q > 0$ и $v_1 > 0$ выполняются в силу второго уравнения (1)

Примечание. Сравнительная простота решения задачи нередко зависит от выбора неизвестного; так, если в данной задаче за основное неизвестное взять v_2, то вместо (2) получится уравнение

$$qtv_2^2 - (2mt + qs)\,v_2 + ms = 0,$$

имеющее два положительные корня:

$$v_2 = \frac{qs + 2mt \pm \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}.$$

Для исследования пригодности корней следует воспользоваться условием

$$v_1 = \frac{s}{t} - v_2 = \frac{qs - 2mt - (\pm\sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2})}{2qt} > 0.$$

Отсюда очевидно, что перед радикалом следует взять знак —. При втором способе выбора неизвестного исследование несколько более громоздко.

2. *Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала кран I был открыт $\frac{1}{n}$ часть того времени, за которое наполняет бассейн один кран II. Затем кран II был открыт $\frac{1}{n}$ часть времени, за которое наполняет бассейн кран I. После этого оказалось наполненной $\frac{1}{k}$ часть бассейна. Оба крана вместе наполняют бассейн за a час. Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?*

Решение. Пусть x и y — искомые времена наполнения бассейна кранами I и II (соответственно). В 1 *час* кран I наполнит $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а за время $\frac{y}{n}$ наполнится $\frac{1}{n}\cdot\frac{y}{x}$ часть; аналогично кран II за время его действия наполнит $\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{y}$ часть бассейна. По условию задачи:

$$\frac{1}{n}\frac{y}{x} + \frac{1}{n}\frac{x}{y} = \frac{1}{k}; \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \quad x > 0, \quad y > 0. \tag{1}$$

По смыслу задачи значения всех параметров положительны $n > 0$, $k > 0$, $a > 0$. Заметив, что нулевые значения неизвестных не могут удовлетворять системе (1), умножим уравнения почленно на xy

$$x^2 + y^2 = \frac{n}{k}xy, \quad x + y = \frac{1}{a}xy. \tag{2}$$

Первое уравнение этой системы перепишем в виде:

$$(x + y)^2 = \left(\frac{n}{k} + 2\right)xy$$

или в силу (2)

$$\frac{1}{a^2}x^2y^2 = \left(\frac{n}{k} + 2\right)xy.$$

Сократив на xy, так как $xy \neq 0$, а затем, подставив xy во второе уравнение (2), получим:

$$xy = \frac{a^2}{k}(n+2k), \qquad x+y = \frac{a}{k}(n+2k).$$

Следовательно, x и y суть корни квадратного уравнения

$$kz^2 - a(n+2k)z + a^2(n+2k) = 0. \tag{3}$$

Найдем дискриминант уравнения (3):

$$\Delta = a^2(n+2k)^2 - 4a^2k(n+2k) = a^2(n+2k)(n-2k).$$

Уравнение имеет действительные корни, если $n \geqslant 2k$. При соблюдении этого условия оба корня уравнения (3) положительны, т. е. удовлетворяют неравенствам системы (1).

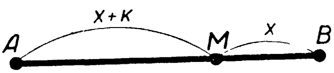
Итак, при $n \geqslant 2k$ один кран наполняет бассейн за

$$a\frac{(n+2k)-\sqrt{n^2-4k^2}}{2k}, \text{ а другой за } a\frac{(n+2k)+\sqrt{n^2-4k^2}}{2k} \text{ час.}$$

При $n < 2k$ задача не имеет решения.

Примечание. Так как $\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geqslant 2$, то условие $n \geqslant 2k$ следует из первого уравнения системы (1).

3. *Два курьера I и II выехали одновременно из городов (соответственно) A и B навстречу друг другу, при встрече оказалось, что I проехал на **k** км больше II. Продолжая путь, I прибыл в B через a час, а II в A через **b** час после встречи. Найти расстояние между городами.*



Черт. 140

Решение. Пусть M—пункт встречи (черт 140); обозначим $x=MB$.

По смыслу задачи $x>0$, $x+k>0$, ибо эти числа обозначают расстояния, пройденные курьерами, и $a>0$, $b>0$. Число k возможно считать как положительным, так и отрицательным, если толковать, что при $k<0$ курьер I проехал расстояние на k км меньше, чем II.

Скорости курьеров I и II соответственно равны:

$$v_1 = \frac{BM}{a} = \frac{x}{a}, \qquad v_2 = \frac{AM}{b} = \frac{x+k}{b}.$$

Курьер I прошел путь AM за то же время, за которое II прошел MB, откуда $\frac{x}{v_2} = \frac{x+k}{v_1}$. Подставим выражения v_1 и v_2 и составим смешанную систему:

$$bx^2 = a(x+k)^2, \quad x>0, \quad x+k>0; \tag{1}$$

эта система эквивалентна следующей:

$$x\sqrt{b} = \sqrt{a}\,(x+k), \quad x>0. \tag{2}$$

В самом деле, система (2) есть следствие (1), так как при положительных левой и правой частях равенства возможно почленное извлечение корня (арифметического), а отбрасывание второго неравенства не может сузить множества всех решений системы. Обратно, из системы (2) следует система (1). В самом деле, в отношении уравнения это очевидно, а при выполнении уравнения и неравенства системы (2) левая часть уравнения положительна и $\sqrt{a}>0$, откуда $x+k>0$.

Найдем решение уравнения (2) в поле действительных чисел:

$$x=\frac{ka}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}, \quad \text{если } a\neq b. \tag{3}$$

Неравенство $x>0$ выполняется при $k>0$, если $b>a$, и при $k<0$, если $a>b$ (толкование представляем учащимся). В этом случае

$$AB=2x+k=\frac{k(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Если $k>0$, но $a>b$ или $k<0$, но $b>a$, то задача не имеет решения (дать толкование).

Если $a=b$, но $k\neq 0$, задача не имеет решения (дать толкование). Если $a=b$, $k=0$, то задача имеет бесконечное множество решений $AB=2x$, где x произвольное положительное число.

4. *Камень брошен вертикально вверх с поверхности земли с начальной скоростью v_0. Определить, сколько времени камень будет находиться над изгородью высотой h.*

Решение. Согласно законам физики (сопротивлением воздуха пренебрегаем), в момент времени t камень будет находиться на расстоянии

$$s=v_0t-\frac{gt^2}{2}$$

от поверхности земли, где g — ускорение силы тяжести, а v_0 — начальная скорость.

Если в момент времени t камень находится над изгородью, то должно выполняться неравенство

$$v_0t-\frac{gt^2}{2}>h \quad \text{или} \quad gt^2-2v_0t+2h<0, \quad \text{где } t>0.$$

Допустимые значения параметров: $v_0>0$, $h>0$. Составим дискриминант квадратного трехчлена

$$\Delta=v_0^2-2gh.$$

Случай 1°. Если $\Delta\leqslant 0$, т. е. $v_0\leqslant\sqrt{2gh}$, то трехчлен неотрицателен и, следовательно, неравенство выполняться не может; задача не имеет решения (камень не поднимается выше изгороди).

Случай 2°. Если $\Delta>0$, т. е. $v_0>\sqrt{2gh}$, то корни t_1 и t_2 трехчлена положительны и различны, неравенство будет выполняться для значений t, содержащихся между корнями трехчлена:

$$\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gh}}{2}<t<\frac{v_0+\sqrt{v_0^2-2gh}}{2}.$$

Интервал (t_1, t_2) есть тот промежуток времени, в течение которого камень будет находиться над изгородью, величина этого промежутка равна

$$t_2-t_1=\sqrt{v_0^2-2gh}.$$

5. *Лодка спускается по течению реки на расстояние, равное s_1 км, а затем поднимается против течения реки на расстояние, равное s_2 км. Скорость течения реки равна v м в час. Какова должна быть собственная скорость лодки, чтобы путешествие продолжалось не более, чем t час?*

Решение. Пусть x — искомая собственная скорость лодки, тогда по смыслу задачи $v>0$, $s_1>0$, $s_2>0$, $t>0$ и $x>v$ (в противном случае невозможно движение против течения).

Времена движения лодки по течению, против течения и всего путешествия соответственно равны:

$$\frac{s_1}{x+v}, \quad \frac{s_2}{x-v} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{x+v}+\frac{s_2}{x-v}.$$

Согласно условию задачи требуется решить систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{s_1}{x+v}+\dfrac{s_2}{x-v}\leqslant t\\ v<x\end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{c}\dfrac{tx^2-(s_1+s_2)x+v(s_1-s_2)-tv^2}{(x+v)(x-v)}\geqslant 0\\ v<x.\end{array}\right\}$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$tx^2-(s_1+s_2)x+v(s_1-s_2)-tv^2\geqslant 0, \quad v<x.$$

Так как $f(v)=-s_2v<0$, где $f(x)$ — левая часть квадратного неравенства, то корни x_1 и x_2 трехчлена $f(x)$ действительны, различны и число v заключено между корнями $x_1<v<x_2$. В самом деле, если бы корни трехчлена были мнимые, то он не мог бы иметь отрицательных значений. Следовательно, условию задачи удовлетворяет любое значение x, большее бо́льшего корня трехчлена $f(x)$:

$$x>\frac{s_1+s_2+\sqrt{(s_1+s_2)^2-4tv(s_1-s_2-tv)}}{2t}.$$

6 *Малый предмет находится на расстоянии d от экрана. На каком расстоянии x от предмета следует поставить выпуклую линзу, чтобы на экране получилось отчетливое изображение?*

Решение. Пусть F—фокусное расстояние линзы, по смыслу задачи $F>0$, $d>0$ и $0<x<d$.

На расстоянии законов оптики можно составить следующую смешанную систему:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}=\frac{1}{F}, \quad 0<x<d.$$

Эта смешанная система эквивалентна следующей:

$$x^2-dx+dF=0, \quad 0<x<d. \qquad (1)$$

Так как $\Delta=d^2-4dF=d(d-4F)$, то корни уравнения действительны, если $d\geqslant 4F$, при этом условии оба корня положительны. Положив в левой части уравнения $x=d$, получим $f(d)=dF>0$. Следовательно (при $d\geqslant 4F$), число d больше бо́льшего корня: так как $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{d}{2}<d$.

Итак, при $d>4F$ задача имеет два решения:

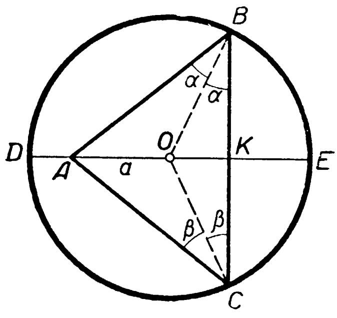
$$x_1=\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}-dF} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}-dF}$$

(выполнение условий $0<x_1<x_2<d$ ясно и непосредственно из полученных формул корней).

При $d=4F$ задача имеет единственное решение $x=\dfrac{d}{2}$.

При $d<4F$ задача не имеет решений.

7. *В точке A круглого биллиарда на расстоянии a от центра находится упругий шарик (размерами шарика можно пренебречь). В какую точку B борта надо пустить шарик, чтобы, дважды отразившись от борта, он снова вернулся в точку A?*



Черт. 141

Решение. Пусть точка A отлична от центра круга, $a \neq 0$; отразившись от борта в точке B шарик ударяется о борт в точке C и, снова отразившись в точке C, попадает в точку A (черт. 141). Пусть OB и OC — радиусы круга. По законам отражения $\angle ABO = \angle OBC = \alpha$ и $\angle BCO = \angle OCA = \beta$. Так как $OB = OC$, то треугольник BOC равнобедренный, а потому $\angle\alpha = \angle\beta$. В треугольниках AOC и AOB имеем $\alpha = \beta$, AO — общая сторона, $OB = OC$, следовательно, углы CAO и OAB, лежащие против равных сторон, либо равны, либо в сумме составляют π. Последнее невозможно, так как точка A отлична от O и точки A, B и C не лежат на одной прямой. Следовательно, $\angle BAO = \angle OAC$, а потому диаметр DE, проходящий через точку A, перпендикулярен хорде BC. Пусть $x = OK$ — расстояние точки пересечения диаметра DE с хордой BC. Задача сводится к следующей геометрической задаче: найти точку K так, чтобы $BK \perp DE$ и $\angle ABO = \angle OBK$.

Имеем: $\dfrac{BK}{AB} = \dfrac{x}{a}$ (по теореме о биссектрисе угла треугольника) и

$$AB^2 = a^2 + R^2 + 2ax, \quad BK^2 = R^2 - x^2.$$

Для определения x получим смешанную систему

$$\frac{\sqrt{a^2 + R^2 + 2ax}}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{a}{x}, \quad 0 < x < R. \tag{1}$$

Допустимые системы значений параметров должны удовлетворять неравенствам $0 < a < R$.

После почленного возведения иррационального уравнения в квадрат и освобождения от знаменателей получим:

$$x^2(a^2 + R^2 + 2ax) = a^2(R^2 - x^2).$$

Положительные корни этого уравнения должны быть меньшими R (левая часть положительна). Выполнив преобразования и сократив на $x + a$, получим смешанную систему, эквивалентную (1):

$$2ax^2 + R^2x - aR^2 = 0, \quad 0 < x.$$

Корни квадратного уравнения действительны и противоположны по знаку $x_1 < 0 < x_2$. Условию задачи удовлетворяет больший корень:

$$x_2 = \frac{-R^2 + \sqrt{R^4 + 8R^2a^2}}{4a}.$$

Отложив на продолжении радиуса OA от точки O отрезок $OK = x_2$ и восставив перпендикуляр в точке K к радиусу OK, получим в пересечении этого перпендикуляра с окружностью две точки B и C, дающие решения задачи.

Случай $a = 0$ подлежит особому рассмотрению. Если $a = 0$, то шарик находится в центре круга и в какую бы точку борта он ни был пущен, после отражения он снова вернется в центр.

8. *Вычислить радиус основания и высоту открытого сверху цилиндра, вписанного в шар данного радиуса R и имеющего данную поверхность S.*

Р е ш е н и е. Пусть x и y искомые радиус основания и высота цилиндра. Тогда имеем:

$$\pi x^2 + 2\pi xy = S.$$

Рассмотрев осевое сечение цилиндра, получим (см. черт. 50 стр. 228):

$$4x^2 + y^2 = 4R^2.$$

Обозначив для удобства $S = \pi m$, составим смешанную систему:

$$x^2 + 2xy = m, \quad 4x^2 + y^2 = 4R^2, \quad 0 < x < R, \quad 0 < y < 2R. \tag{A}$$

Допустимые значения параметров: $m>0$, $R>0$.

Решив первое уравнение, получим:

$$y = \frac{m - x^2}{2x}. \tag{1}$$

При $x>0$, $y>0$, в силу второго уравнения смешанной системы (А), неравенства $x<R$, $y<2R$ выполняются сами собой. При $x>0$ неравенство $y>0$, в силу уравнения (1) выполняется тогда и только тогда, когда $x<\sqrt{m}$. Поэтому, исключив из второго уравнения системы y, можно составить следующую смешанную систему, не содержащую y:

$$17x^4 - 2(m + 8R^2)x^2 + m^2 = 0, \quad 0 < x < \sqrt{m}, \tag{B}$$

которая вместе с уравнением (1) образует систему, эквивалентную данной.

Решим вспомогательную систему:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = 17z^2 - 2(m + 8R^2)z + m^2 = 0, \quad 0 < z < m, \\ x^2 = z, \quad x > 0. \end{array}\right\} \tag{C}$$

Корни квадратного уравнения действительны, если

$$\Delta = (m + 8R^2)^2 - 17m^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$m + 8R^2 \geqslant m\sqrt{17} \quad \text{и} \quad m \leqslant \frac{8R^2}{\sqrt{17} - 1} = \frac{R^2(\sqrt{17} + 1)}{2}.$$

При выполнении этого условия из квадратного уравнения найдем два положительные значения z_1 и z_2. Имеем:

$$f(m) \begin{cases} < 0, & \text{если } 0 < m < R^2, \\ = 0, & \text{если } m = R^2, \\ > 0, & \text{если } R^2 < m. \end{cases}$$

С л у ч а й 1°. Если $0<m<R^2$, то число m содержится в интервале корней $z_1<m<z_2$. Задача имеет одно решение:

$$x_1 = \sqrt{\frac{m + 8R^2 - \sqrt{\Delta}}{17}}$$

(значение y определяется из формулы (1)).

С л у ч а й 2°. $m = R^2$. Больший корень квадратного уравнения равен $z_2 = x_2^2 = R^2$ и не дает решения задачи; меньший корень $x_1 = \dfrac{R}{\sqrt{17}}$ дает единственное решение задачи.

Случай 3°. Если $R^2 < m \leqslant \frac{R^2(\sqrt{17}+1)}{2}$, то число m лежит вне интервала корней, будучи бо́льшим бо́льшего корня $z_1<z_2<m$, так как

$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{m+8R^2}{17} < m.$$

Задача имеет два решения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{m+8R^2-\sqrt{\Delta}}{17}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{\frac{m+8R^2+\sqrt{\Delta}}{17}}.$$

Случай 4°. $m = \frac{R^2(\sqrt{17}+1)}{2}$; квадратное уравнение имеет двукратный корень. Задача имеет одно решение.

Случай 5°. $m > \frac{R^2(\sqrt{17}+1)}{2}$; задача не имеет решений.

§ 96. Задачи на исследование функций и нахождение наибольших и наименьших значений

Общие методы исследования функций на монотонность и нахождения наибольших и наименьших значений для достаточно обширного класса функций излагаются в дифференциальном исчислении. Элементарная алгебра рассматривает приемы исследования функций и нахождения экстремальных значений «прямыми методами» путем непосредственного исследования множества значений функций, применения неравенств, исследования промежутков возрастания и убывания. Ряд таких элементарных приемов изложен ниже.

Задачи, приводящиеся к нахождению экстремума квадратного трехчлена. Как известно (см. § 83), квадратный трехчлен

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет минимум:

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{при } x = -\frac{b}{2a}, \quad \text{если } a > 0,$$

имеет максимум:

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{при } x = -\frac{b}{2a}, \quad \text{если } a < 0.$$

Это свойство позволяет в ряде случаев непосредственно находить экстремумы простейших функций от квадратного трехчлена, как, например, $\sqrt{P(x)}$, $\frac{1}{P(x)}$, $P^k(x)$ и т. п.

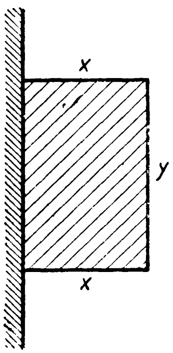
Примеры

1. Найти наибольшее значение дроби $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Решение. Знаменатель x^2+x+1 знакоположителен и имеет наименьшее значение $\frac{3}{4}$ при $x=-\frac{1}{2}$, следовательно, дробь имеет наибольшее значение $y=\frac{4}{3}$ при $x=-\frac{1}{2}$. Посредством преобразования выделения полного квадрата представим дробь в виде:

$$y=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Отсюда видно, что в полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ дробь возрастает от 0 до $\frac{4}{3}$ $\left(\text{так как знаменатель убывает от } +\infty \text{ до } \frac{3}{4}\right)$, а на полусегменте $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ убывает от $\frac{4}{3}$ до 0 $\left(\text{знаменатель возрастает от } \frac{3}{4} \text{ до } +\infty\right)$ функция имеет наибольшее значение $y_{\max}=\frac{4}{3}$.



Черт. 142

2. Требуется огородить проволокой данной длины l прямоугольный участок, прилегающий к стене (черт. 142). Каковы должны быть длина и ширина участка, чтобы он имел наибольшую площадь?

Решение. По условию $2x+y=l$. Площадь участка равна:

$$s=xy=lx-2x^2,$$

где по смыслу задачи $l>0$, $x>0$, $y>0$. Из условия $y>0$ следует

$l-2x<0$, а потому $0<x<\frac{l}{2}$. Трехчлен s имеет наибольшее значение $s_{\max}=\frac{l^2}{8}$ при $x_{\max}=\frac{l}{4}$; это значение содержится в интервале $\left(0, \frac{l}{2}\right)$. При $x_{\max}=\frac{l}{4}$ имеем: $y_{\max}=\frac{l}{2}$.

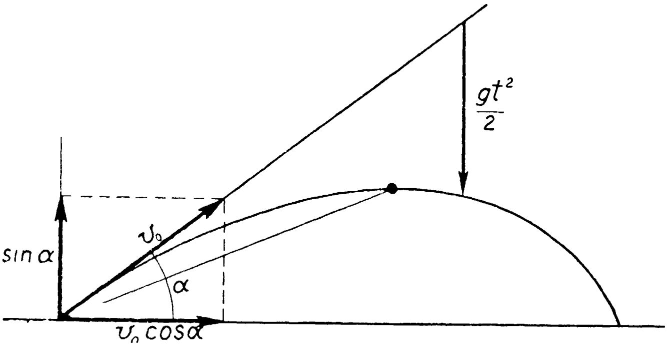
3. *Снаряд вылетел из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту; определить наибольшую высоту подъема снаряда.*

Решение. Выберем оси координат в плоскости траектории, как показано на чертеже 143. Составляющие начальной скорости по осям координат OX и OY соответственно равны $v_0\cos\alpha$ и $v_0\sin\alpha$. Вдоль оси OY действует сила тяготения. Если бы не было этой силы, то за время t снаряд поднялся бы на высоту $tv_0\sin\alpha$, но под действием силы тяготения он должен опуститься на расстояние $\frac{gt^2}{2}$ (g — ускорение силы тяжести). Следовательно, в момент времени t снаряд окажется на высоте (сопротивление воздуха не учитывается):

$$y=tv_0\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

Будучи квадратным трехчленом от аргумента t, высота y имеет наибольшее значение:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{при} \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} .$$



Черт. 143

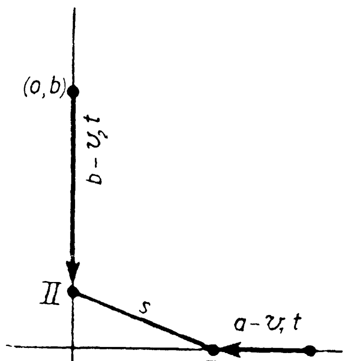
4 *Два тела I и II движутся по сторонам OX и OY прямого угла XOY со скоростями* v_1 *и* v_2 *по направлению к вершине O.*

В начале движения тело I находилось в точке $(a, 0)$, *а тело II в точке* $(0, b)$, *где* $a > 0$ и $b > 0$. *Найти наименьшее расстояние между телами I и II* (черт. 144).

Решение. По прошествии времени t тело I будет находиться в точке $(a-v_1t, 0)$, а тело II в точке $(0, b-v_2t)$, а расстояние между ними будет

$$s = \sqrt{(a-v_1t)^2 + (b-v_2t)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_1^2+v_2^2)\,t^2 - 2\,(av_1+bv_2)\,t + a^2 + b^2}$$



Черт. 144

Наименьшее значение s реализуется при том же значении t, при котором подкоренное выражение имеет наименьшее значение. Следовательно,

$$s_{\min} = \sqrt{\frac{(av_1+bv_2)^2 - (v_1^2+v_2^2)(a^2+b^2)}{v_1^2+v_2^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(v_1b - v_2a)^2}{v_1^2+v_2^2}} = \frac{|v_1b - v_2a|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

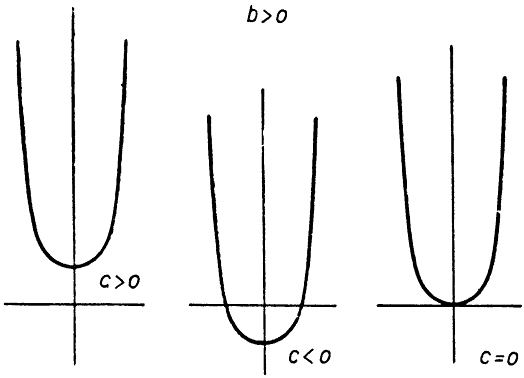
при $t = \dfrac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$.

Исследование биквадратного трехчлена

$$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (\text{где } a > 0).$$

Применим преобразование выделения полного квадрата

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$



Черт. 145

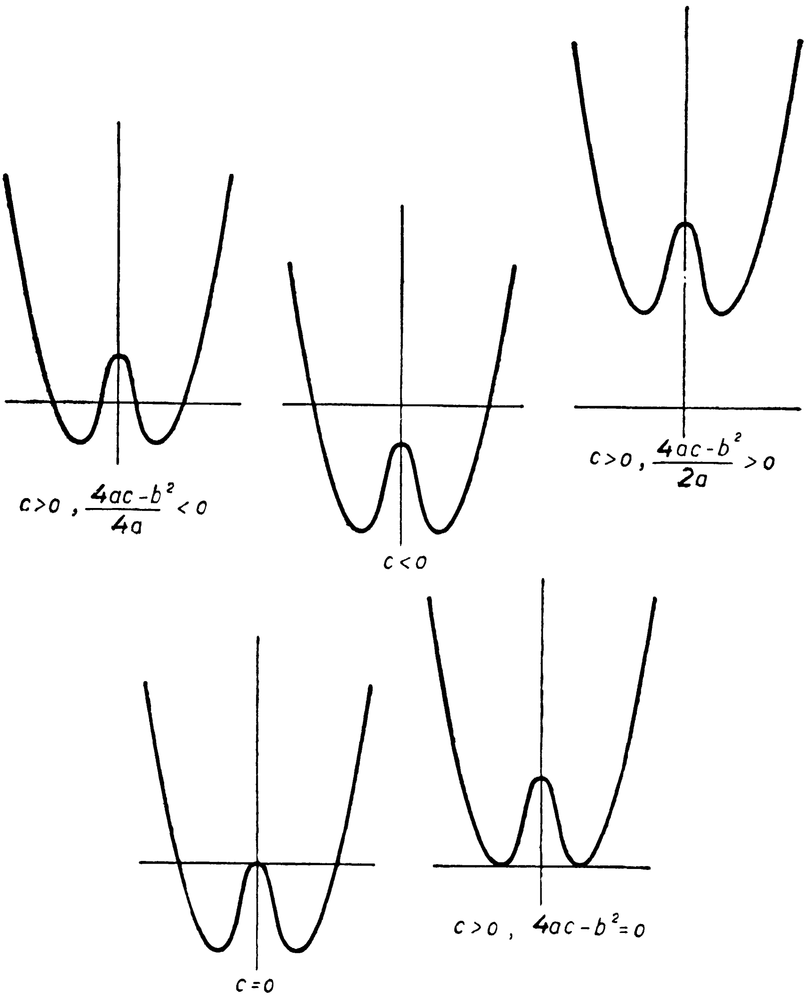
Биквадратный трехчлен есть четная функция, поэтому достаточно исследовать ее на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$.

Если $b > 0$, то $x^2 + \frac{b}{2a} > 0$ и на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$ возрастает от $\frac{b}{2a}$ до $+\infty$; а следовательно, y возрастает от c до $+\infty$. В полуинтервале $-\infty < x \leqslant 0$ функция y убывает от $+\infty$ до c. Наименьшее значение трехчлена равно c при $x = 0$ (черт. 145).

Если $b < 0$, то

$$y = a\left(x^2 - \frac{|b|}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

На сегменте $\left[0, \sqrt{\frac{|b|}{2a}}\right]$ слагаемое $\left(x^2 - \frac{|b|}{2a}\right)^2$ убывает от $\frac{|b|^2}{4a^2}$ до 0, а на полусегменте $\left[\sqrt{\frac{|b|}{2a}}, +\infty\right]$ возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно, в первом промежутке функция убывает от c до $\frac{4ac - b^2}{4a}$, а во втором возрастает от $\frac{4ac - b^2}{4a}$ до $+\infty$. В промежутках $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{|b|}{2a}}\right]$ и $\left[-\sqrt{\frac{|b|}{2a}}, 0\right]$ трехчлен (соответственно) убывает от $+\infty$ до $\frac{4ac-b^2}{4a}$ и возрастает от $\frac{4ac-b^2}{4a}$ до c. В точках $x = \pm\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ трехчлен имеет наименьшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$, а в точке $x = 0$ локальный максимум, равный c (черт. 146).



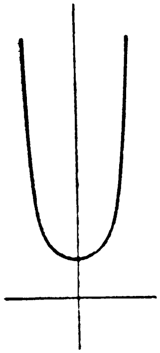
Черт. 146

При $b = 0$ имеем:

$$y = ax^4 + c.$$

График получается из параболы 4-го порядка $Y = X^4$ посредством растяжения от оси абсцисс из переноса в направлении оси ординат (черт. 147).

Возможные случаи при $a<0$ предлагаем рассмотреть учащимся; в качестве графиков получатся те же линии, но с ветвями, «обращенными вниз».



Черт. 147

Нахождение множества значений функции

Для нахождения множества значений функции $f(x)$ можно поступать следующим образом. Пусть y — данное действительное число; если существует значение (хотя бы одно) аргумента, при котором функция $f(x)$ имеет значение, равное y, т. е. если число y принадлежит множеству значений функции, то уравнение

$$f(x) - y = 0 \tag{f}$$

имеет в поле действительных чисел, хотя бы одно, решение. Будем рассматривать (f) как уравнение, содержащее действительный параметр y. Множество значений функции $f(x)$ есть множество всех значений параметра y, при которых уравнение (f) имеет решение (хотя бы одно) в поле действительных чисел.

Этим способом (в частности) можно найти множество значений функции вида:

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}.$$

Задача сводится к исследованию квадратного уравнения

$$(a_1 - a_2y)x^2 + (b_1 - b_2y)x + (c_1 - c_2y) = 0$$

с действительным параметром y. Это уравнение имеет действительные корни, если

$$\Delta = (b_1 - b_2y)^2 - 4(a_1 - a_2y)(c_1 - c_2y) \geqslant 0. \tag{Δ}$$

Множество значений функции есть множество всех решений квадратного неравенства (Δ).

Если известно множество значений функции, то наибольшее или наименьшее значение (если оно существует) находится непосредственно. Например, множество значений функции $y = x^{2k}$ есть множество всех неотрицательных чисел, т. е. полусегмент $0 \leqslant y < +\infty$, наименьшее значение есть $y = 0$; наибольшее значение не существует. Множество значений функции $y = \frac{1}{1+x^k}$ есть полуинтервал $0 < y \leqslant 1$, наибольшее значение есть $y = 1$ при $x = 0$; наименьшее значение не существует (черт. 148).

Примеры

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ построить график.

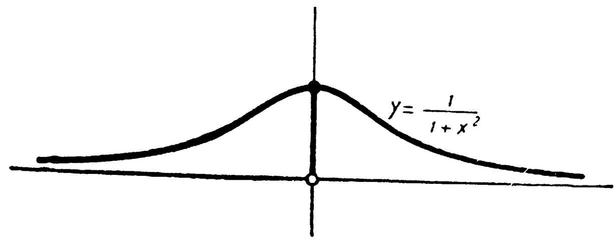
Решение. Областью определения функции является интервал $-\infty<x<+\infty$, так как $x^2-x+1>0$. Найдем множество значений функции, для чего исследуем квадратное уравнение:

$$(1-y)\,x^2+(y-5)\,x+(1-y)=0. \tag{1}$$

Корни этого уравнения действительные, если

$$(y-5)^2-4\,(1-y)^2=-3y^2-2y+21\geqslant 0. \tag{2}$$

Это неравенство выполняется на сегменте корней $-3\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{3}$. Следовательно, множество значений данной дроби есть сегмент $\left[-3,\ \dfrac{7}{3}\right]$ наи-



Черт. 148

меньшее и наибольшее значение соответственно суть $y_{\min}=-3$, $y_{\max}=\dfrac{7}{3}$. Из уравнения (1) найдем соответствующие значения аргумента $x_{\min}=1$, и $x_{\max}=-1$.

Из уравнения (1) следует, что всякое данное значение $y\neq 1$, взятое в интервале $-3<y<\dfrac{7}{3}$, дробь имеет при двух различных значениях аргумента; значение $y=1$ дробь имеет при $x=0$. График данной функции представлен на чертеже 149. Прямая $y=1$ есть асимптота, ибо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$. Точки пересечения линии с осью абсцисс находятся из уравнения $x^2-5x+1=0$

2. Исследовать (элементарными средствами) функцию

$$y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}.$$

Решение. Корни знаменателя действительны: $x_1=-3$, $x_2=1$.

Область определения функции состоит из грех интервалов $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ 1)$ и $(1,\ +\infty)$. Найдем множество значений функции; составим уравнение:

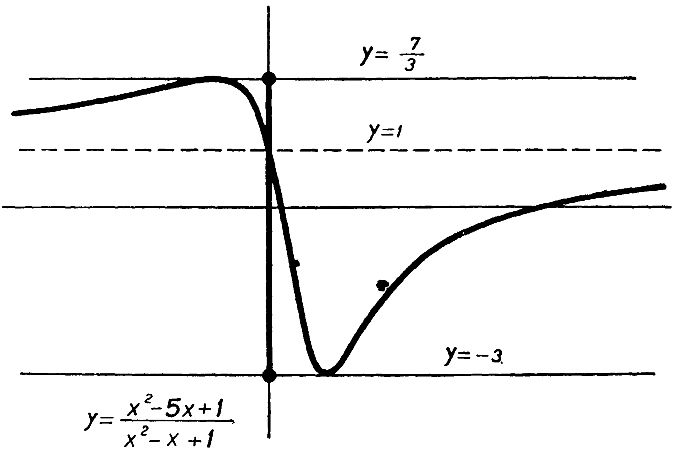
$$(1-y)\,x^2-2\,(1+y)\,x+3\,(1+y)=0.$$

Составим условие действительности корней:

$$\Delta=(1+y)^2-3\,(1-y^2)=2\,(2y^2+y-1)\geqslant 0.$$

Решив это неравенство, найдем множество значений функции в виде двух промежутков $-\infty<y\leqslant-1$, $\frac{1}{2}\leqslant y<+\infty$. Каждое данное значение $y\neq 1$, взятое в любом из интервалов $(-\infty, -1)$ и $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, дробь имеет в двух точках. Значение $y=1$ дробь имеет в точке $x=\frac{3}{2}$. Прямая $y=1$ есть асимптота, ибо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$. Исследуем дробь в каждом из интервалов

$(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ и $(1, \infty)$. Имеем:



Черт. 149

$$y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}=\frac{x^2-2x+3}{(x+3)(x-1)}.$$

Знак y определяется знаком знаменателя, ибо $x^2-2x+3>0$.

В интервале $-\infty<x<-3$ имеем $y>0$, и так как числитель больше знаменателя (в этом интервале $-2x>2x$), то $y>1$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$, а $\lim\limits_{x\to-3} y=+\infty$ (при $x>-3$), то в данном интервале множество значений y есть интервал $1<y<+\infty$ (черт. 150).

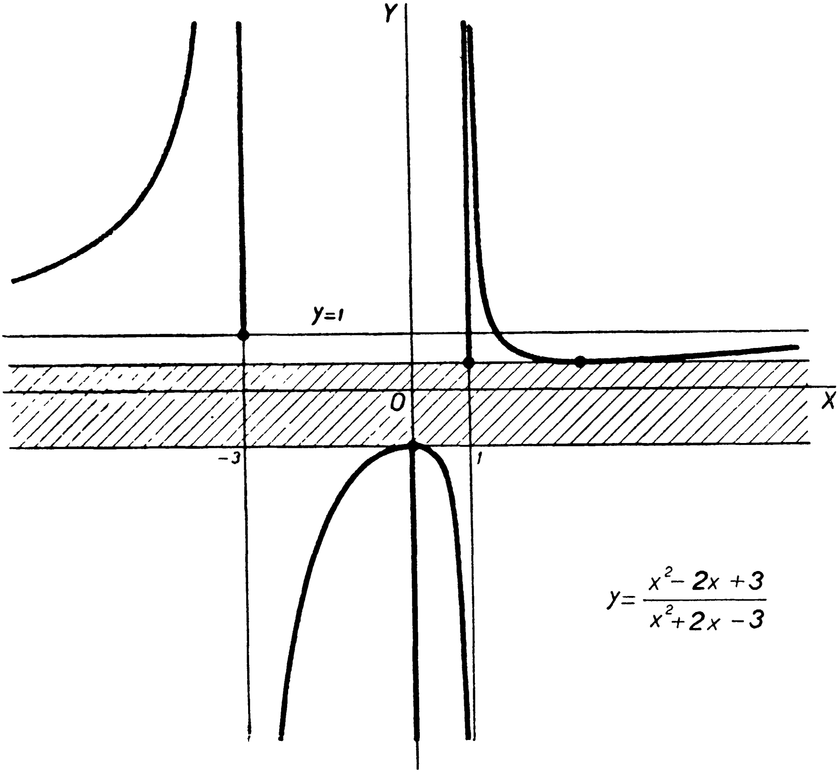
В интервале $-3<x<1$ имеем $y<0$ и

$$\lim_{x\to-3} y=-\infty \quad (\text{при } x>-3), \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1} y=-\infty \quad (\text{при } x<1).$$

В этом интервале функция имеет наибольшее значение $y_{max}=-1$ при $x_{max}=0$, а множество всех значений y образует полуинтервал $-\infty<y\leqslant-1$.

В интервале $(1, +\infty)$ имеем $y > 0$ и $\lim\limits_{x \to 1} y = +\infty$ (при $x > 1$) и $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$.

В этом интервале функция имеет наименьшее значение $y_{\min} = \frac{1}{2}$ при $x_{\min} = 3$. Если $x > \frac{3}{2}$, то $y < 1$; прямую $y = 1$ линия пересекает лишь в одной точке $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.



Черт. 150

3. *Из всех прямоугольных треугольников с данной высотой h, опущенной на гипотенузу, найти тот, который имеет наименьший периметр.*

Решение. Пусть x и y — катеты, z — гипотенуза, $2p$ — периметр искомого треугольника. В силу известных соотношений между элементами прямоугольного треугольника имеем:

$$xy = hz, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x + y + z = 2p,$$

где неизвестные x, y, z, а также h и p положительны. Определим множество возможных значений p. Из второго соотношения имеем:

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2,$$

или в силу прочих соотношений:

$$(2p - z)^2 - 2hz = z^2, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{2p^2}{h + 2p}.$$

Подставив z в первое и третье соотношения, получим:

$$x + y = 2p - z = \frac{2ph + 2p^2}{h + 2p} \quad \text{и} \quad xy = \frac{2p^2h}{h + 2p}.$$

Следовательно, x и y суть корни квадратного уравнения

$$(h + 2p) Z^2 - 2p (h + p) Z + 2p^2h = 0. \tag{1}$$

Корни уравнения (1) действительны, если

$$\Delta = p^2 (h + p)^2 - (h + 2p) 2p^2h = p^2 (p^2 - 2ph - h^2) \geqslant 0,$$

откуда

$$p^2 - 2ph - h^2 = [p - h(1 + \sqrt{2})][p + h(\sqrt{2} - 1)] \geqslant 0.$$

Второй множитель (заключенный в квадратные скобки) положителен, а потому

$$p - h(\sqrt{2} + 1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad p \geqslant h(\sqrt{2} + 1),$$

при этом условии $\Delta \geqslant 0$ и оба корня уравнения (1) положительны. Следовательно, множество возможных значений p есть полусегмент $h(\sqrt{2} + 1) \leqslant p < +\infty$, наименьшее значение p есть $p_{\min} = h(\sqrt{2} + 1)$. При этом значении p уравнение (1) имеет двукратный корень:

$$x_{\min} = y_{\min} = \frac{p(h + p)}{h + 2p} = h\sqrt{2},$$

и искомая фигура есть равнобедренный прямоугольный треугольник.

Примеры непосредственного исследования функций на возрастание и убывание

Чтобы непосредственно доказать, что в данном промежутке функция $f(x)$ возрастает (или убывает) следует установить справедливость неравенства

$$f(x_1) < f(x_2) \ (\text{или } f(x_1) > f(x_2)),$$

или, что то же,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (\text{соответственно } f(x_2) - f(x_1) < 0)$$

при произвольных двух значениях $x_1 < x_2$, взятых в данном промежутке. Если в промежутке $[a, c]$ функция возрастает (убывает), а в промежутке $[c, b]$ убывает (возрастает), то $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) значением $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Примеры

1. Исследовать функцию

$$f(x) = x + \frac{k}{x} \quad (\text{где } k > 0).$$

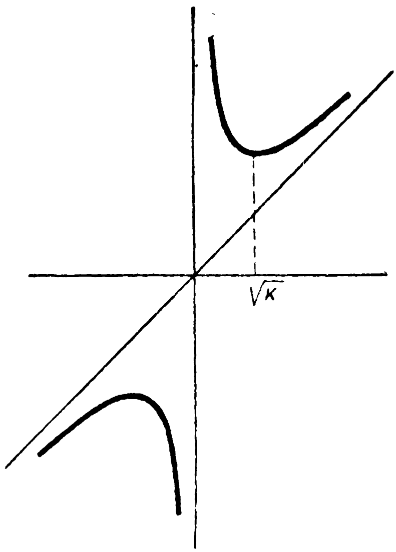
Функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$; исследуем ее в интервале $0 < x < +\infty$. Составим разность:

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{k}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{k}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{k}{x_2 x_1}\right).$$

Из рассмотрения этой разности очевидно, что

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} < 0, \text{ если } 0 < x_1 < x_2 \leqslant \sqrt{k}, \\ > 0, \text{ если } \sqrt{k} \leqslant x_1 < x_2 . \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f(x)$ убывает в полуинтервале $(0, \sqrt{k}]$ и возрастает на полусегменте $[\sqrt{k}, +\infty)$. Наименьшее значение в интервале $(0, +\infty)$ равно $f(\sqrt{k}) = 2\sqrt{k}$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция имеет наибольшее значение $-2\sqrt{k}$ при $x = -\sqrt{k}$. Для построения графика (гиперболы) следует принять во внимание, что $\lim\limits_{x \to 0} y = +\infty$ (при $x > 0$), что $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ и что $\lim\limits_{x \to +\infty} (y - x) = \lim \dfrac{k}{x} = 0$ (черт. 151).



Черт. 151

Примечание. Найти наименьшее значение (не исследуя на монотонность) $f(x)$ в интервале $(0, +\infty)$ можно, приняв во внимание, что $f(x)$ есть сумма двух положительных слагаемых x и $\dfrac{k}{x}$, имеющих данное произведение $x \cdot \dfrac{k}{x} = k$. Наименьшее значение имеет место при $x = \dfrac{x}{k}$, откуда $x = \sqrt{k}$.

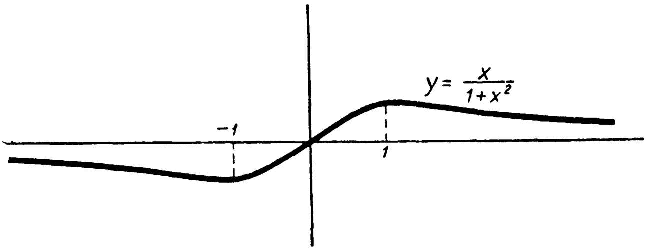
2. Исследовать функцию:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

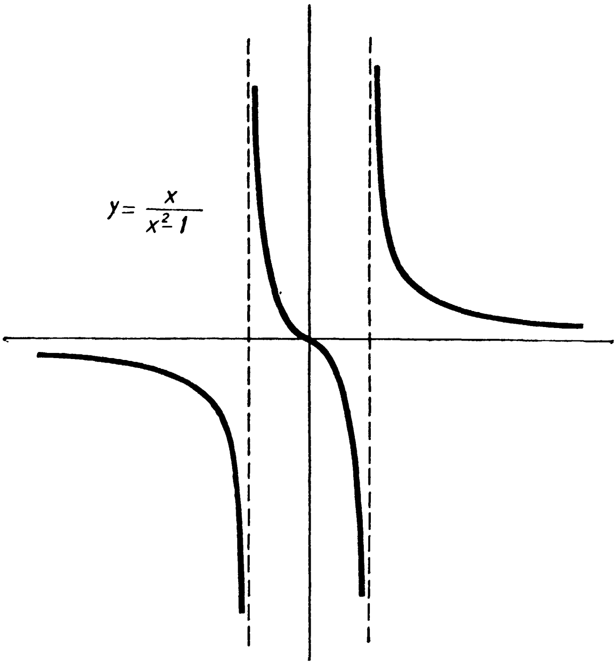
Решение. Функция нечетная $f(-x) = -f(x)$; исследуем ее в интервале $(0, +\infty)$. Имеем: $f(x) = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}$. Так как (см. предыдущий пример) $x + \dfrac{1}{x}$ в полуинтервале $(0, 1]$ убывает от $+\infty$ до 2, а на полусегменте $[1, +\infty)$ возрастает от 2 до $+\infty$, то $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ возрастает от 0 до $\dfrac{1}{2}$, а на полусегменте $[1, +\infty)$ убывает от $\dfrac{1}{2}$ до 0. В промежутках $(-\infty, -1]$ и

$[-1;0]$ (соответственно) функция убывает от 0 до $-\frac{1}{2}$ и возрастает от $-\frac{1}{2}$ до 0.

Функция имеет минимум $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ и максимум $y_{\max} = \frac{1}{2}$ (черт. 152).



Черт. 152



Черт. 153

3. Исследовать функцию

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Решение. Область определения состоит из трех интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. Составим уравнение:

$$yx^2 - x - y = 0. \qquad (1)$$

Имеем: $\Delta = 1 + 4y^2 > 0$; этому неравенству удовлетворяет произвольное действительное значение y. Следовательно, множество значений функции есть интервал $-\infty < y < +\infty$. Из (1) следует, что всякое данное значение $y \neq 0$ функция имеет в двух различных точках. Значение $y = 0$ дробь имеет при $x=0$. Ось абсцисс есть асимптота графика, ибо $\lim\limits_{x \to +\infty} y=0$. В каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ функция убывает. В каком бы из этих интервалов ни были взяты точки x_1 и x_2, разность

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2^2 - 1} - \frac{x_1}{x_1^2 - 1} = -\frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 + 1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} \tag{2}$$

отрицательная, если $x_1 < x_2$. В самом деле, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ при выполнении любого из следующих трех условий: $-\infty < x_1 < x_2 < -1$, или $-1 < x_1 < x_2 < 1$, или $1 < x_1 < x_2 + \infty$ (это вытекает непосредственно из формулы (2)). Следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, если $x_1 < x_2$ (в трех указанных интервалах). Значит, в этих интервалах функция убывает. Так как $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$ и $\lim\limits_{x \to -1} y = -\infty$ (при $x < -1$), то в интервале $(-\infty, -1)$ функция убывает от 0 до $-\infty$; аналогично докажем, что в интервале $(-1, 1)$ функция убывает от от $-\infty$ до $+\infty$, а в интервале $(1, +\infty)$ от $+\infty$ до 0 (черт. 153).

ГЛАВА VII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 97. Показательная функция на множестве рациональных чисел

Пусть $a > 0$ — данное действительное число; каждому рациональному числу r * соответствует единственное значение a^r, поэтому a^r есть функция аргумента r.

Определение. *Функция a^r где множеством допустимых значений для аргумента r считается множество всех рациональных чисел, называется показательной функцией на множестве рациональных чисел.*

При $a > 1$ функция a^r обладает следующими свойствами:

1°.

$$a^r \begin{cases} > 1 \text{ (если } r > 0), \\ < 1 \text{ (если } r < 0), \\ = 1 \text{ (если } r = 0). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), тогда $a^p > 1$, а значит, $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{1} = 1$. Если $r = -s < 0$, то $a^r = \frac{1}{a^s} < 1$. Если $r = 0$, то $a^r = 1$, ч. т. д.

2°. a^r возрастает.

Доказательство. Если $r_1 < r_2$, то имеем:

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) > 0$$

* Степень с иррациональным показателем еще не определена, а потому пока и не может рассматриваться.

ибо $a^{r_2 - r_1} > 1$ и $a^{r_1} > 0$), откуда $a^{r_2} > a^{r_1}$, ч. т. д.

3°. $$\lim_{r \to +\infty} a^r = +\infty.$$

Доказательство. Требуется доказать, что при любом заданном (как угодно большом) N существует такое число n, что $a^r > N$ при произвольном рациональном r, большем n. Положим $a = 1 + h$, имеем $h > 0$, так как $a > 1$. Пусть (в частности) n — натуральное число. Воспользуемся неравенством Бернулли (стр. 226):

$$(1 + h)^n > 1 + nh \quad \text{или} \quad a^n > 1 + n(a - 1).$$

Выберем натуральное число n настолько большим, чтобы имело место неравенство:

$$1 + n(a - 1) > N, \qquad \text{откуда} \qquad n > \frac{N-1}{a-1},$$

тогда получим и подавно $a^n > N$. В силу возрастания показательной функции неравенство $a^r > N$ будет выполняться при произвольном $r > n$, ч. т. д.

Лемма. *Предел последовательности* $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}, \ldots, \sqrt[n]{a}, \ldots$ *равен* 1:

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Доказательство. Требуется доказать, что при произвольном положительном (как угодно малом) ε существует такое число $N > 0$, что неравенство $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$ выполняется при любых значениях $n > N$.

Так как $\sqrt[n]{a} > 1$, то неравенство $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$ эквивалентно следующему:

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \quad \text{или} \quad a < (1 + \varepsilon)^n. \tag{1}$$

В силу неравенства Бернулли $1 + n\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n$. Следовательно, если выполняется неравенство $a < 1 + n\varepsilon$, откуда $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ $(= N)$, то неравенство (1) будет выполнено и подавно ч. т. д.

4°. $$\lim_{r \to 0} a^r = 1.$$

Доказательство. Требуется доказать, что при произвольном (как угодно малом) ε существует такая окрестность $(-h, h)$ точки 0, что неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$ выполняется при произвольном значении r из этой окрестности, т. е. при $|r| < h$.

Выберем натуральное число n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon.$$

Пусть $|r|<\frac{1}{n}$. Если $r>0$, то при $r<\frac{1}{n}$ имеем:

$$0<a^r-1<a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon.$$

Если $r<0$, то $a^r=a^{-|r|}$ и $a^{|r|}>1$; имеем:

$$0<1-a^r=1-a^{-|r|}=\frac{a^{|r|}-1}{a^{|r|}}<a^{|r|}-1<a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon.$$

Если $r=0$, то $a^r-1=0<\varepsilon$.
Итак,

$$|a^r-1|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad |r|<\frac{1}{n}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

5°.

$$\lim_{r\to-\infty} a^r=0.$$

Доказательство. Пусть $r=-k$, где $k>0$; требуется доказать, что при всех достаточно больших k имеют место неравенства:

$$0<a^{-k}<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — любое заданное (как угодно малое) число. В силу свойства 3°, $\lim\limits_{k\to\infty} a^k=+\infty$, следовательно, при всех достаточно больших значениях k будем иметь $a^k>\frac{1}{\varepsilon}$, но тогда $0<\frac{1}{a^k}<\varepsilon$, т. е. $0<a^{-k}<\varepsilon$, ч. т. д.

Если $0<a<1$, то соответствующие свойства функции a^r формулируются следующим образом.

1°.
$$a^r\begin{cases}<1, & \text{если } r>0,\\ >1, & \text{если } r<0,\\ =1, & \text{если } r=0.\end{cases}$$

2° a^r убывает. 3° $\lim\limits_{r\to+\infty} a^r=0$. 4° $\lim\limits_{r\to0} a^r=1$.5°. $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r=+\infty$.

Для доказательства этих свойств a^r при $0<a<1$ достаточно принять во внимание, что

$$a^r=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r} \quad \text{и что} \quad \frac{1}{a}>1.$$

Докажем, например, что a^r при $(a < 1)$ убывает. Так как $\left(\frac{1}{a}\right)^r$ возрастает:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{r_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{r_2}, \quad \text{где } r_1 < r_2, \quad \text{то} \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_1}} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_2}} \quad \text{или } a^{r_1} > a^{r_2},$$

т. е. a^r убывает (проверку справедливости остальных свойств предоставляем учащимся).

При $a = 1$ специальное изучение свойств показательной функции a^r интереса не представляет, так как в этом случае функция постоянна: $a^r = 1^r = 1$ при всех рациональных значениях r.

§ 98. Степень с иррациональным показателем

Пусть α — любое данное иррациональное число. Представим α в виде бесконечной десятичной дроби с положительной мантиссой*:

$$\alpha = p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots ,$$

где p — целое число, а $q_1, q_2, \ldots, p_n, \ldots$ — десятичные знаки.

Пусть α_n^- и α_n^+ — приближенные значения α по недостатку и по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$:

$$a_n^- = p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} \text{ и } a_n^+ = p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \ldots + \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

Имеем: $a_n^- < a < a_n^+$ при произвольном n.

Теорема. *При произвольном положительном* a *последовательность*

$$[a^{\alpha_1^-}, \quad a^{\alpha_1^+}], \quad [a^{\alpha_2^-}, \quad a^{\alpha_2^+}], \quad \ldots, [a^{\alpha_n^-}, \quad a^{\alpha_n^+}], \quad \ldots$$

есть последовательность стягивающихся сегментов.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a > 1$. Требуется доказать следующие утверждения:

1°. Последовательность

$$a^{\alpha_1^-}, \; a^{\alpha_2^-}, \; \ldots, \; a^{\alpha_n^-}, \; \ldots \qquad \left\{a^{\alpha_n^-}\right\}$$

не убывает, а последовательность

$$a^{\alpha_1^+}, \; a^{\alpha_2^+}, \; \ldots, \; a^{\alpha_n^+}, \; \ldots \qquad \left\{a^{\alpha_n^+}\right\}$$

не возрастает.

---

* Целая часть α, т. е. p может быть числом отрицательным: так, если $\alpha = -2{,}3751, \ldots$, то $\alpha = -2 - 0{,}3751 \ldots = \bar{3}{,}6248 \ldots$, имеем: $p = -3$, $q_1 = 6$, $q_2 = 2$, $q_3 = 4$ и т. д.

Это очевидно, так как при $a>1$ функция a^r возрастает и последовательность приближенных значений $\{\alpha_n^-\}$ числа α по недостатку не убывает, а последовательность $\{\alpha_n^+\}$ приближенных значений α по избытку не возрастает.

2°. При всех значениях n имеем:

$$a^{\alpha_n^-}<a^{\alpha_n^+}.$$

Это очевидно, так как a^r возрастает и $\alpha_n^-<\alpha_n^+$.

3°.
$$\lim(a^{\alpha_n^+}-a^{\alpha_n^-})=0.$$

В самом деле,

$$0<a^{\alpha_n^+}-a^{\alpha_n^-}=a^{\alpha_n^-}(a^{\alpha_n^+-\alpha_n^-}-1)<a^{p+1}(\sqrt[10^n]{a}-1)$$

$\left(\text{так как}\ \alpha_n^+-\alpha_n^-=\frac{1}{10^n}\ \text{и}\ \alpha_n^-<\alpha<p+1\right)$. Так как $\lim\sqrt[10^n]{a}=1$, то при любом заданном $\varepsilon>0$ и при всех достаточно больших n будем иметь:

$$\sqrt[10^n]{a}-1<\frac{\varepsilon}{a^{p+1}},\quad \text{но тогда}\quad 0<a^{\alpha_n^+}-a^{\alpha_n^-}<\varepsilon.$$

Случай $0<a<1$ рассматривается аналогично; в этом случае последовательность $\{a^{\alpha_n^-}\}$ не возрастает, а последовательность $\{a^{\alpha_n^+}\}$ не убывает (предлагаем учащимся провести подробно соответствующие рассуждения).

В случае $a=1$ имеем: $a^{\alpha_n^-}=a^{\alpha_n^+}=1$.

Из доказанного следует, что две монотонные последовательности $\{a^{\alpha_n^-}\}$ и $\{a^{\alpha_n^+}\}$ имеют общий предел:

$$\lim a^{\alpha_n^-}=\lim a^{\alpha_n^+},\qquad \text{ч. т. д.}$$

Этот предел есть единственное действительное число, при $a>1$ (при $a<1$) большее (меньшее) всех чисел вида $a^{\alpha_n^-}$ и меньшее (большее) всех чисел вида $a^{\alpha_n^+}$.

Определение. *Иррациональной степенью a^α, где α — иррациональное число, положительного числа a называется общий предел последовательностей $\{a^{\alpha_n^+}\}$ и $\{a^{\alpha_n^-}\}$:*

$$a^\alpha=\lim a^{\alpha_n^+}=\lim a^{\alpha_n^-}.$$

В силу изложенного a есть единственное действительное число, удовлетворяющее неравенствам при произвольном натуральном n:

$$a^{\overset{-}{\alpha_n}} < a^{\alpha} < a^{\overset{+}{\alpha_n}}, \quad \text{если } a > 1 \text{ и}$$

$$a^{\overset{-}{\alpha_n}} > a^{\alpha} > a^{\overset{+}{\alpha_n}}, \quad \text{если } a < 1.$$

Если $a = 1$, от $a^{\overset{-}{\alpha_n}} = a^{\overset{+}{\alpha_n}} = 1$ и $a^{\alpha} = \lim a^{\overset{-}{\alpha_n}} = \lim a^{\overset{+}{\alpha_n}} = 1$.

Следствие. *a^{α} есть предел функции a^r в точке α:*

$$a^{\alpha} = \lim_{r \to \alpha} a^r,$$

где α — произвольное действительное число.

В самом деле, выберем натуральное число n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $a^{\overset{+}{\alpha_n}} - a^{\overset{-}{\alpha_n}} < \varepsilon$, тогда (считаем для определенности $a > 1$):

$$a^{\overset{-}{\alpha_n}} < a^{\alpha} < a^{\overset{+}{\alpha_n}}.$$

При произвольном значении r, содержащемся в интервале $(\overset{-}{\alpha_n}, \overset{+}{\alpha_n})$, в силу возрастания a^r, будут выполняться неравенства

$$a^{\overset{-}{\alpha_n}} < a^r < a^{\overset{+}{\alpha_n}}.$$

Следовательно, имеем:

$$|a^r - a^{\alpha}| < a^{\overset{+}{\alpha_n}} - a^{\overset{-}{\alpha_n}} < \varepsilon, \quad \text{т. е. } \lim_{r \to \alpha} a^r = a^{\alpha}.$$

Теорема. *При любом $a > 0$ и при произвольном действительном α число a^{α} положительно.*

Доказательство. Если $\alpha = \frac{p}{q}$ рациональное число, где p и q целые числа, причем $q > 0$, то $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a^p} > 0$.

Если α иррациональное число (для определенности полагаем $a > 1$), то имеем $a^{\alpha} > a^{\overset{-}{\alpha_n}} > 0$, ч. т. д.

В элементарной математике иррациональные степени отрицательных чисел не рассматриваются, так как при $a < 0$ предел $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$ не существует. В самом деле, пусть $a < 0$, α — данное иррациональное число, $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Имеем:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} \begin{cases} > 0, & \text{если } p \text{ четное, } q \text{ нечетное,} \\ < 0, & \text{если } p \text{ и } q \text{ нечетные,} \\ - & \text{не имеет смысла в поле действительных чисел, если } p \text{ нечетное, } q \text{ — четное} \end{cases}$$

и $\lim\limits_{r \to \alpha} |a^r| = \lim |a|^r > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{r \to \alpha} a$ не существует.

Теорема. *При произвольных действительных* α *и* β *имеет место равенство:*

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}. \qquad (1)$$

Доказательство методом предельного перехода. Для рациональных показателей равенство (1) справедливо. Пусть хотя бы одно из чисел α и β иррационально. Рассмотрим две последовательности рациональных чисел $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, сходящиеся (соответственно) к α и β:

$$\lim\alpha_n=\alpha \quad \text{и} \quad \lim\beta_n=\beta, \quad \text{тогда} \quad \lim(\alpha_n+\beta_n)=\alpha+\beta.$$

Имеем:

$$a^{\alpha}=\lim a^{\alpha_n}; \qquad a^{\beta}=\lim a^{\beta_n}$$

и

$$a^{\alpha}a^{\beta}=\lim a^{\alpha_n}\lim a^{\beta_n}=\lim(a^{\alpha_n}a^{\beta_n})=\lim a^{\alpha_n+\beta_n}=a^{\alpha+\beta}, \text{ ч. т. д.}$$

Метод предельного перехода можно применить для доказательства справедливости прочих свойств действия возведения в степень в случае иррационального показателя:

$$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}, \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}=\frac{1}{a^{\alpha}}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$$

при произвольном иррациональном α. Так, например,

$$(ab)^{\alpha}=\lim(ab)^{\alpha_n}=\lim(a^{\alpha_n}b^{\alpha_n})=\lim a^{\alpha_n}\lim b^{\alpha_n}=a^{\alpha}b^{\alpha}.$$

Докажем справедливость равенства

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$$

при произвольных действительных α и β. Предположим сперва, что $a>1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, имеем:

$$1<a^{\alpha_n^-}<a^{\alpha}<a^{\alpha_n^+},$$

$(a^{\alpha_n^-})^{\beta_n^-}<(a^{\alpha})^{\beta_n^-}$ (монотонность степенной функции) или

$$a^{\alpha_n^-\beta_n^-}<(a^{\alpha})^{\beta_n^-} \quad \text{и аналогично}$$

$$(a^{\alpha})^{\beta_n^+}<a^{\alpha_n^+\beta_n^+},$$

откуда

$$a^{\alpha_n^-\beta_n^-}<(a^{\alpha})^{\beta_n^-}<(a^{\alpha})^{\beta_n^+}<a^{\alpha_n^+\beta_n^+}.$$

Так как

$$\lim\alpha_n^-\beta_n^-=\lim\alpha_n^+\beta_n^+=\alpha\beta, \qquad \lim(a^{\alpha})^{\beta_n^-}=\lim(a^{\alpha})^{\beta_n^+}=(a^{\alpha})^{\beta}$$

и

$$\lim a^{\alpha_n^{-} \beta_n^{-}} = \lim a^{\alpha_n^{+} \beta_n^{+}} = a^{\alpha\beta},$$

то

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

В случае $a < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ следует изменить лишь знак $<$ на $>$. Случай, когда хотя бы одно из чисел α и β отрицательно, рассматривается так же, как и для рациональных показателей.

Вычисление произвольной действительной степени положительного числа a можно выполнить элементарными способами с любой степенью точности. Один из таких способов излагается ниже. Однако надо иметь в виду, что элементарные способы вычисления a^{α} связаны с чрезвычайно громоздкой вычислительной работой. При современных вычислительных средствах (таблицы, счетные машины) эти элементарные способы не имеют никакого практического значения и могут служить лишь учебно-педагогическим целям (и то лишь в незначительной мере).

Достаточно уметь вычислять a^{α} при $\alpha > 0$.

Разложим положительное число α в двоичную дробь (конечную или бесконечную):

$$\alpha = p + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \ldots + \frac{p_n}{2^n} + \ldots,$$

где p — целое число, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — двоичные знаки (т. е. либо 0, либо 1).

Положим:

$$\alpha_n = p + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \ldots + \frac{p_n}{2^n}, \quad \text{имеем } \alpha = \lim \alpha_n,$$

поэтому α^{α_n} есть приближенное значение α :

$$a^{\alpha} \approx a^{\alpha_n} = a^{p}\left(\sqrt{a}\right)^{p_1}\left(\sqrt[4]{a}\right)^{p_2} \ldots \left(\sqrt[2^n]{a}\right)^{p_n}.$$

Множители вида $\sqrt[2^k]{a}$ могут быть вычислены с любой степенью точности путем последовательного извлечения квадратного корня. Взяв достаточно большое значение n, можно вычислить a с данной точностью.

Пример

Извлекая последовательно квадратный корень, найдем:

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16228\ldots, \qquad 10^{\frac{1}{128}} = 1{,}01815,$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3{,}16228\ldots} = 1{,}77828, \qquad 10^{\frac{1}{256}} = 1{,}00903,$$

$$10^{\frac{1}{8}} = 1,33352\ldots,\qquad 10^{\frac{1}{512}} = 1,00451,$$

$$10^{\frac{1}{16}} = 1,15478\ldots,\qquad 10^{\frac{1}{1024}} = 1,00225$$

$$10^{\frac{1}{32}} = 1,07461\ldots,\qquad \text{и т. д}$$

$$10^{\frac{1}{64}} = 1,03663\ldots,$$

При извлечении корня из чисел, близких к 1, следует пользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} \quad \text{(см. стр. 140),}$$

так например:

$$10^{\frac{1}{1024}} = \sqrt{1,00451\ldots} \approx 1,00225 \text{ с ошибкой меньшей } \frac{(0,005)^2}{8} < 0,000004.$$

Пользуясь составленной таблицей, можно приближенно вычислять произвольные степени числа 10. Вычислим, например, $10^{0,1}$, имеем:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{3}{80},\quad \frac{3}{80} - \frac{1}{32} = \frac{1}{160},\quad \frac{1}{160} - \frac{1}{256} = \frac{3}{1280} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно,

$$0,1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \ldots \quad \text{и}$$

$$10^{0,1} \approx 10^{\frac{1}{16}} \cdot 10^{\frac{1}{32}} \cdot 10^{\frac{1}{256}} \cdot 10^{\frac{1}{512}} \ldots \approx 1,26.$$

Непроизводительность этой работы с точки зрения современной вычислительной техники очевидна (для сравнения предлагаем найти $10^{0,1}$ по логарифмическим таблицам). Если не считаться с вычислительными трудностями, то можно составить, например, следующую таблицу степеней числа 10 через 0,1:

k	1,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10^k	1,259	1,584	1,995	2,512	3,162	3,981	5,012	6,310	7,943

§ 99. Показательная функция

***Определение.** Функция, заданная формулой*

$$y = a^x, \qquad \text{где} \quad a > 0,$$

называется показательной функцией.

Областью определения показательной функции служит интервал $-\infty < x < +\infty$, так как (см. предыдущий параграф) степень a^x (где $a > 0$) при произвольном данном действительном x имеет единственное значение.

При произвольном действительном x значение показательной функции положительно: $a^x > 0$ (см. предыдущий параграф).

Перечисленные в § 97 свойства 1°—5° показательной функции с рациональным показателем остаются в силе. Так, например, при $a > 1$ имеем:

1°. $a^x > 1$ (если $x > 0$).

В самом деле, возьмем какое-нибудь положительное рациональное приближенное значение числа x по недостатку $0 < \overline{x_n} < x$; тогда получим

$$1 < a^{\overline{x_n}} < a^x \qquad (\text{где } a > 1).$$

Аналогично легко доказать, что $a^x < 1$, если $x < 0$.

Рассуждения, на которых основаны доказательства прочих свойств 2°—5°, без изменения применимы к показательной функции с произвольным действительным показателем. Следовательно, при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает и

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to 0} a^x = 1;$$

при $a < 1$ функция a^x убывает и $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$;

при $a = 1$, $a^x = \text{const} = 1$.

Примечание. *Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то равенство степеней числа $\boldsymbol{a}$:*

$$a^k = a^l$$

имеет место лишь при условии равенства показателей $k = l$.

В самом деле, при $a \neq 1$ показательная функция a^x возрастает, либо убывает и, следовательно, равенство ее значений невозможно при различных значениях аргумента.

Показательная функция при отрицательном основании $\boldsymbol{a}$ *в элементарной математике не рассматривается,* так как не рассматриваются иррациональные степени отрицательных чисел.

Теорема. *Показательная функция a^x непрерывна при произвольном значении аргумента.*

Доказательство. Требуется доказать, что абсолютная величина приращения показательной функции $a^X - a^x$ может быть сделана как угодно малой:

$$|a^X - a^x| < \varepsilon$$

при достаточно малом (по абсолютной величине) приращении аргумента.

Имеем: $$|a^X - a^x| = a^x |a^{X-x} - 1|.$$

В силу свойства 4° при достаточно малом $|X-x|$, будем иметь:

$$|a^{X-x} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x},$$

но тогда $$|a^X - a^x| < \varepsilon,$$ ч. т. д.

Теорема. *Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то при любом данном положительном числе N существует единственное действительное число α такое, что α-я степень числа a равна N:*

$$a^\alpha = N.$$

Доказательство. Пусть для определенности $a > 1$; как известно, среди значений a^x существуют и как угодно большие и как угодно близкие к нулю. Рассмотрим целые степени числа a:

$$\ldots, \ a^{-2}, \ a^{-1}, \ a^0, \ a, \ a^2, \ \ldots$$

Пусть a^{p+1} наименьшее из этих чисел, большее N, имеем:

$$a^p \leqslant N < a^{p+1}.$$

Разделив сегмент от p до $p+1$ на десять равных частей, берем число q_1 при условии

$$a^{p + \frac{q_1}{10}} \leqslant N < a^{p + \frac{q_1 + 1}{10}}.$$

Продолжая неограниченно процесс деления сегмента на 10 равных частей, мы получим десятичную дробь, определяющую некоторое действительное число α:

$$\alpha = p, \quad q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

В силу способа определения десятичных знаков числа a для любых его приближенных значений имеем:

$$a^{\overset{-}{\alpha_n}} \leqslant N \leqslant a^{\overset{+}{\alpha_n}}.$$

Но единственное число, удовлетворяющее этим неравенствам, есть a^α, а потому $a^\alpha = N$.

Если $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному существует единственное число a такое, что $\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha = N$, но тогда $a^{-\alpha} = N$, ч. т. д.

Если $a = 1$, то теорема неверна, ибо $1^x = 1$ при любом действительном x.

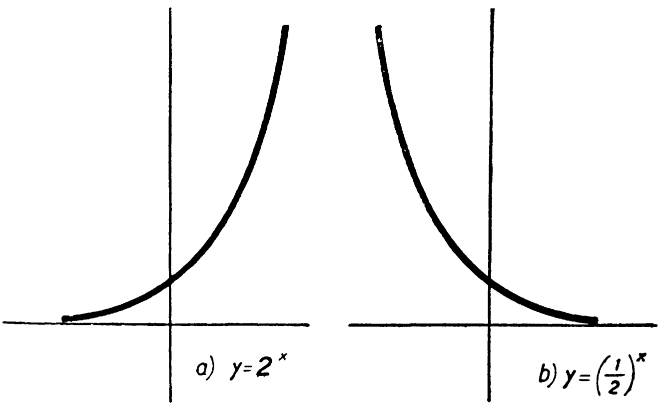
Теорема *При* $a > 1$ *(или* $a < 1$*) функция* a^x *в интервале* $(-\infty, +\infty)$ *возрастает (убывает) от* 0 *до* $+\infty$ (от $+\infty$ до 0).

Доказательство. Достаточно сопоставить между собой установленные выше свойства показательной функции:

во-первых, при $a > 1$ (при $a < 1$) функция a^x возрастает (убывает);

во-вторых,

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, при $a > 1$ и $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$, при $a < 1$;



Черт. 154

в-третьих, если $a \neq 1$ и N заданное положительное число, то в интервале $(-\infty, \infty)$ существует (и при том единственное) значение аргумента, при котором $a^x = N$, ч. т. д.

Линия a^x вогнута в интервале $(-\infty, +\infty)$ (см. стр. 218). В самом деле, пусть $x_1 < x_2$, тогда:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}.$$

Так как среднее геометрическое чисел a^{x_2} и a^{x_1} (неравных и положительных) меньше их среднего арифметического, то имеем:

$$\sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}.$$

Графики показательной функции $\left(\text{при } a = 2 \text{ и } a = \frac{1}{2}\right)$ представлены на чертеже 154.

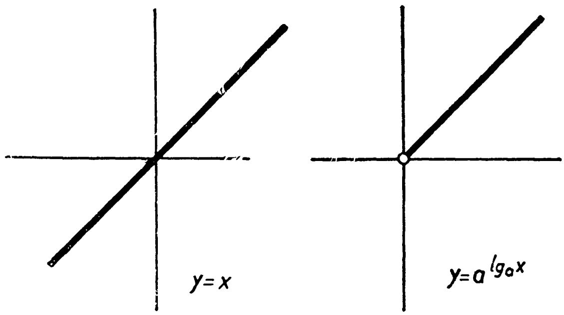
§ 100. Логарифмы и их свойства

Определение. *Логарифмом числа N при основании $a > 0$ и $a \neq 1$ называется показатель степени, при возвышении в которую числа a получается число N.*

Для обозначения логарифма числа N при основании a употребляется символ $\log N$. Таким образом, по определению логарифма имеем:

$$N = a^{\log_a N}. \tag{1}$$

Согласно теореме, показанной в § 99, существует единственное действительное число $\alpha = \log_a N$, удовлетворяющее условию



Черт. 155

(1) при произвольном положительном отличном от 1 основании a. Логарифмы при отрицательном основании в элементарной математике не рассматриваются. Так как основание логарифмов всегда считается положительным и отличным от 1, то в дальнейшем соответствующие оговорки делаться не будут.

Любая действительная степень положительного числа a есть положительное число, а потому ни при каком α степень a^α не может быть ни нулем, ни отрицательным числом. Следовательно, *нуль и отрицательные числа не имеют (в поле действительных чисел) логарифмов.*

Тождество

$$x = a^{\log_a x}$$

имеет место лишь в интервале $(0, +\infty)$. В самом деле, если $x \leqslant 0$, то $\log_a x$ не имеет смысла, тогда как функция $y = x$ имеет смысл при всех значениях x. Различие между функциями $y = x$ и $y = a^{\log_a x}$ графически показано на чертеже 155.

Теорема 1°. *Если два числа (при данном основании) имеют один и тот же логарифм, то эти числа равны.*

Доказательство. Пусть $\log_a N_1 = \log_a N_2$, тогда

$$N_1 = a^{\log_a N_1} = a^{\log_a N_2} = N_2, \qquad \text{ч. т. д.}$$

***Теорема** 2°. Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей.*

Доказательство. Пусть $x > 0$, $y > 0$, имеем:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y},$$

откуда $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. С другой стороны, по определению логарифма $xy = a^{\log_a (xy)}$. Следовательно,

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Примечание. Если $x < 0$, $y < 0$, то $xy > 0$ и $\log_a (xy)$ имеет смысл, но $\log_a x$ и $\log_a y$ не имеют действительных значений. В этом случае

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|.$$

***Теорема** 3°. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.*

Доказательство. Имеем:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{x}{y} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

и

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad \text{ч. т. д.}$$

***Теорема** 4°. Логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм данного числа.*

Доказательство. Пусть $N > 0$ данное число и k — произвольное действительное число, имеем:

$$N = a^{\log_a N} \qquad \text{и} \qquad N^k = a^{k \log_a N},$$

откуда

$$\log_a N^k = k \log_a N, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Выражение $\log_a N^{2n}$ (n — целое число) имеет смысл при произвольном действительном $N \neq 0$, а не только при положительном N. В общем случае имеет место следующая формула:

$$\log_a N^{2n} = 2n \log_a |N| = \begin{cases} 2n \log_a N, & \text{если } N > 0, \\ 2n \log_a (-N), & \text{если } N < 0. \end{cases}$$

Переход от одного основания логарифмов к другому. Известны логарифмы чисел при основании a, требуется найти логарифмы чисел при основании b.

Теорема. *Логарифмы чисел при основании a и b связаны соотношением*

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b}\log_a N.$$

Отсюда правило: *логарифм числа «по новому основанию» b равен логарифму того же числа по «старому основанию» a, умноженному на число $\frac{1}{\log_a b}$, обратное логарифму нового основания по старому.* Множитель $\frac{1}{\log_a b}$ называется модулем перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b.

Доказательство. По определению логарифма имеем:

$$N = b^{\log_b N},$$

взяв от обеих частей логарифмы по основанию a, получим

$$\log_a N = \log_b N \log_a b,$$

откуда следует (2), ч. т. д.

Примеры

1. Найти $\log_{a^k} a^l$. Решение. Так как $a^l = (a^k)^{\frac{l}{k}}$, то $\log_{a^k} a^l = \frac{l}{k}$.

В частности, $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4 = -4$ и т. д.

2. Найти основание x, при котором $\log_x a = b$ (где $a > 0$).

Решение. По условию $a = x^b$, откуда $x = a^{\frac{1}{b}}$.

3. Вычислить значение

$$\frac{\log_5 16}{\log_5 4}.$$

Имеем:

$$\frac{\log_5 16}{\log_5 4} = \frac{\log_5 2^4}{\log_5 2^2} = \frac{4\log_5 2}{2\log_5 2} = 2.$$

4. Известен $\log_{15} 3$, **вычислить** $\log_{15} 25$.
Решение.

$$\log_{15} 25 = 2\log_{15} 5 = 2\log_{15}\frac{15}{3} = 2(\log_{15} 15 - \log_{15} 3) = 2(1 - \log_{15} 3).$$

5. Известны логарифмы чисел при основании a, найти логарифмы при основании a^k.

Решение. По формуле перехода от одного основания логарифмов к другому имеем:

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k}. \qquad (1)$$

В частности,

$$\log_{a^2} N = \frac{\log_a N}{2}, \quad \log_{\sqrt{a}} N = 2\log_a N, \quad \log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N \quad \text{и т. д.}$$

Формулу (1) можно получить и непосредственно: если $N = a^{\log_a N}$, то $N = (a^k)^{\frac{\log_a N}{k}}$, откуда следует равенство (1).

6. Найти соотношение между числами $\log_a b$ и $\log_b a$.

Решение. Если в равенстве $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ положить $N = a$, то получим:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

7. Доказать, что отношение логарифмов двух данных чисел одинаково при любом основании.

Решение. Имеем:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \quad \text{и} \quad \log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M}.$$

8. Вычислить $\log_{abc \ldots k} x$, зная $\log_a x$, $\log_b x$, …, $\log_k x$ (где $x \neq 1$)

Решение. Имеем:

$$\log_{abc \ldots k} x = \frac{1}{\log_x (abc \ldots k)} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \ldots + \log_x k},$$

откуда

$$\log_{abc \ldots k} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \ldots + \frac{1}{\log_k x}}.$$

9. Доказать, что, если a, b и c — члены геометрической прогрессии, то

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}$$

Решение. Имеем по условию $b = \sqrt{ac}$, следовательно,

$$\log_b N = \frac{1}{\log_N b} = \frac{1}{\log_N \sqrt{ac}} = \frac{2}{\log_N a + \log_N c} =$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_c N}} = \frac{2\log_a N \log_c N}{\log_a N + \log_c N}.$$

Подставив в правую часть полученное выражение для $\log_b N$, после преобразования, получим левую часть.

10. Доказать, что если $(ac)^{\log_a b} = c^2$, то числа $\log_a N$, $\log_b N$ и $\log_c N$ образуют арифметическую прогрессию.

Решение. В силу данного соотношения имеем:

$$\log_a (ac)^{\log_a b} = 2\log_a c \quad \text{или} \quad \log_a b\,(1 + \log_a c) = 2\log_a c,$$

требуется доказать, что **при** этом условии

$$2\log_b N = \log_a N + \log_c N.$$

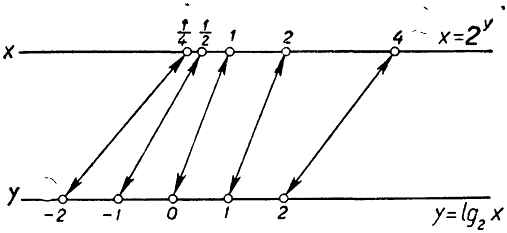
Преобразовав все логарифмы к основанию a, представим доказываемое равенство в следующем виде:

$$\frac{2\log_a N}{\log_a b} = \log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a c}.$$

Сократив на $\log_a N$, получим равенство, равносильное заданному соотношению.

§ 101. Логарифмическая функция

Определение. *Функция, заданная формулой $y = \log_a x$, называется логарифмической функцией.*



Черт. 156

Каждому положительному числу x соответствует единственное действительное число y. Обратно, каждому действительному числу y соответствует единственное положительное число $x = a^y$. Таким образом, между значениями x (где $0 < x < +\infty$) и y (где $-\infty < y < +\infty$) устанавливается взаимно однозначное соответствие (черт. 156). Следовательно, функции $y = \log_a x$ и $x = a^y$ взаимно обратные.

Теорема. *В интервале* $(0, +\infty)$ *логарифмическая функция* $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает от $-\infty$ до ∞, а при $0 < a < 1$ *убывает от* $+\infty$ *до* $-\infty$.

Доказательство. 1°. Показательная функция $x = a^y$ при $a > 1$ возрастает, а при $a < 1$ убывает, следовательно, и обратная функция при $a > 1$ возрастает, а при $a < 1$ убывает.

2°. Любое заданное значение b функции $y = \log_a x$ имеет при единственном значении аргумента $x = a^b$:

$$y = \log_a a^b = b.$$

3°. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$ при $a > 1$. В самом деле, если $x > a^N$, то $\log_a x > N$, где $N > 0$ — произвольное (как угодно большое) число.

Если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$, так как $\log_a x < -N$ при $x > a^{-N}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ при $a > 1$. В самом деле, $\log_a x < -N$ при $0 < x < a^{-N}$.

Если $a < 1$, то, $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$, так как $\log_a x > N$ при $0 < x < a^N$.

Теорема. *Логарифмическая функция непрерывна в интервале* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Докажем сначала, что функция $y = \log_a x$ непрерывна в точке $x = 1$, т. е., что

$$\lim_{x\to 1} \log_a x = \log_a 1 = 0.$$

Положим $x = 1 + h$; требуется доказать, что неравенство $|\log_a (1 + h)| < \varepsilon$, или что то же $-\varepsilon < \log_a (1 + h) < \varepsilon$ (1) выполняется при всех достаточно малых значениях $|h|$. В самом деле, система неравенства (1) равносильна системе неравенств (для определенности считаем $a > 1$):

$$a^{-\varepsilon} < 1 + h < a^{\varepsilon}.$$

Последняя система выполняется, если $|h|$ меньше наименьшего из чисел $1 - a^{-\varepsilon}$ и $a^{\varepsilon} - 1$.

Пусть x произвольное значение аргумента. Составим приращение логарифма:

$$\Delta y = \log_a (x + h) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

По доказанному неравенство $\left|\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right| < \varepsilon$ имеет место при всех достаточно малых значениях $|h|$ $\left(\text{заменить в формуле (1) } h \text{ на } \frac{h}{x}\right)$. Следовательно, функция $\log_a x$ непрерывна в точке x, ч. т. д.

Линия $y = \log_a x$ вогнута при $a > 1$ (выпукла при $a < 1$) в интервале $(0, +\infty)$ (см. стр. 218). Имеем при $0 < x_1 < x_2$:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \log_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

и

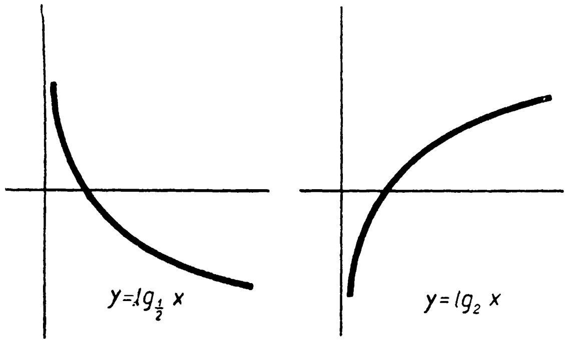
$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} = \log_a \sqrt{x_1 x_2}.$$

В силу свойств средних арифметического и геометрического и монотонности логарифма, имеем:

$$\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\log_a\sqrt{x_1x_2}\,,\quad \text{при } a>1;$$

$$\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\log_a\sqrt{x_1x_2}\,,\quad \text{при } a<1.$$

Графики логарифмической функции $\left(\text{при } a=2 \text{ на } a=\frac{1}{2}\right)$ представлены на чертеже 157.



Черт. 157

§ 102. Степенная функция с произвольным действительным показателем

Областью определения степенной функции $y=x^n$ при иррациональном n (случай рационального n рассмотрен выше) является при $n>0$ полусегмент $(0,+\infty)$, а при $n<0$ — интервал $(0,+\infty)$ (см. определение степени с иррациональным показателем).

Для изучения свойств степенной функции $y=x^n$ в интервале $(0,+\infty)$ при любом действительном n (рациональном или иррациональном) можно пользоваться следующим методом. Так как в интервале $(0,+\infty)$:

$$x=a^{\log_a x},\quad \text{то}\quad f(x)=x^n=a^{n\log_a x}$$

(считаем $a>1$), значит, степенная функция может быть представлена в виде сложной функции:

$$a^n=a^u,\quad \text{где}\quad u=n\log_a x.$$

1.°. Отсюда вытекают следующие свойства степенной функции:

$$\lim_{x\to+\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & (\text{если } n>0),\\ 0 & (\text{если } n<0).\end{cases}$$

В самом деле, если $n>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} u=+\infty$ и $\lim\limits_{u\to+\infty} a^u=+\infty$; если $n<0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} u=-\infty$ и $\lim\limits_{u\to-\infty} a^u=0$.

2°.

$$\lim_{x\to 0} x^n = \begin{cases} 0 & (\text{если } n>0), \\ +\infty & (\text{если } n<0). \end{cases}$$

Доказательство аналогично, если принять во внимание, что

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim n \log_a x = \begin{cases} -\infty & (\text{если } n>0), \\ +\infty & (\text{если } n<0). \end{cases}$$

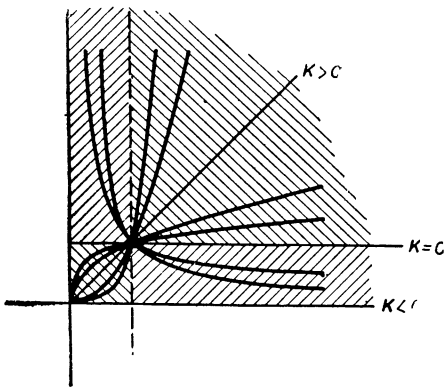
3°. Функция x^n непрерывна в интервале $(0, +\infty)$; это следует из теоремы о непрерывности сложной функции: при $x>0$ функция $u(x)$ непрерывна и a^u также непрерывна. Если $n>0$, то x^n непрерывна и в точке 0, ибо по свойству 2°:

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0 \quad \text{и} \quad 0^n = 0.$$

4°. Функция x^n при $n>0$ возрастает, при $n<0$ убывает.

В самом деле, в первом случае $u(x)=n\log_a x$ возрастает, а во втором убывает.

Сопоставим степенные функции x^{n_1} и x^{n_2} при двух различных действительных значениях показателя степени.



Черт. 158

Предположим для определенности, что $n_1<n_2$. Имеем:

$$x^{n_2}-x^{n_1}=x^{n_1}(x^{n_2-n_1}-1) \begin{cases} <0 & (\text{при } x<1), \\ =0 & (\text{при } x=1), \\ >0 & (\text{при } x>1). \end{cases}$$

Следовательно, $x^{n_1}<x^{n_2}$ в интервале $1<x<+\infty$ и $x^{n_1}>x^{n_2}$ в интервале $0<x<1$.

Геометрическая интерпретация: в интервале $(0,1)$ линия $y=x^{n_1}$ лежит выше линии $y=x^{n_2}$, а в интервале $(1,+\infty)$ линия $y=x^{n_1}$ лежит ниже линии $y=x^{n_2}$. Все линии $y=x^n$ проходят через точку $(1,1)$ (черт. 158).

§ 103. Сложная показательная функция

Сложной показательной функцией называется функция вида

$$F(x)=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

В общем случае значение функции $\varphi(x)$ являются действительными числами — как рациональными, так и иррациональными, и так как в поле действительных чисел рассматриваются иррациональные степени лишь положительных чисел, то область определения сложной показательной функции устанавливается из условия $f(x)>0$. При некоторых конкретных численных значениях x, при которых $f(x)<0$, выражение $[f(x)]^{\varphi(x)}$ может иметь смысл в поле действительных чисел, однако, все же эти значения x к области определения сложной показательной функции не причисляются.

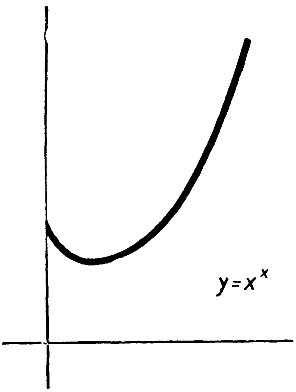
Так как в области определения сложной показательной функции $f(x)>0$, то $f(x)=a^{\log_a f(x)}$, а потому сложная показательная функция может быть представлена в следующем виде:

$$F(x)=a^{\varphi(x)\log_a f(x)}.$$

Исследование сложных показательных функций средствами элементарной математики обычно сопряжено со значительными трудностями.

Пример

Функция x^x рассматривается при положительных значениях аргумента $0<x<+\infty$. Если положить $x=-1$, то получим $(-1)^{-1}=-1$. Однако при этом значении x данная функция не рассматривается и -1 не считается ее значением (в поле действительных чисел).



Черт. 159

Имеем $y=a^{x\log_a x}$, для определенности считаем, что $a>1$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(x\log_a x)=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}y=1$*. Согласно принципу продолжения по непрерывности точку $x=0$ следует включить в область определения и считать значение функции x^x равным 1 при $x=0$. Итак, областью определения x^x считается промежуток $0\leqslant x<+\infty$. Исследование рассматриваемой функции на возрастание и убывание элементарными средствами затруднительно. Применением методов дифференциального исчисления без труда устанавливается (вычисления предлагаем провести учащимся), что x^x в промежутке $\left[0,\ \frac{1}{e}\right]$ убывает от 0 до $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, а в промежутке $\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ возрастает от $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ до $+\infty$ (черт. 159).

* Равенство нулю предела $\lim\limits_{x\to 0}x\log_a x$ известно из курса математического анализа, элементарное доказательство приведено ниже (см. § 108).

§ 104. Примеры исследования функций, заданных формулами, содержащими логарифмические и показательные операции

При установлении области определения функции, заданной формулой, содержащей показательные и логарифмические операции, надлежит руководствоваться следующими положениями:

$a^{f(x,\, y,\, \dots,\, z)}$ имеет смысл при всех значениях аргументов, при которых имеет смысл $f(x, y, \dots, z)$.

Функция $\log f(x, y, \dots, z)$ имеет смысл при тех значениях аргументов, при которых $f(x, y, \dots, z) > 0$.

В нижеследующих примерах 1—7 показано установление области определения функций.

Примеры

1.

Функция	Область определения
a^{x-1}	$-\infty < x < +\infty$
$\dfrac{1}{a^{x-1}}$	совокупность двух интервалов $-\infty < x < 1$, $1 < x < +\infty$
$a^{\sqrt{1-x}}$	полуинтервал $-\infty < x \leqslant 1$
$\dfrac{1}{a^{x} - b^{x}}$, где $a \neq b$	совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$

2. Найти область определения функции

$$\sqrt{x^2 - 1} - 2^{\frac{\sqrt{x}}{x-5}}.$$

Решение. Для нахождения искомой области определения надо решить систему неравенств:

$$x^2 \geqslant 1, \quad x \geqslant 0 \quad \text{при условии } x \neq 5,$$

откуда найти совокупность двух промежутков: $1 \leqslant x < 5$ и $5 < x < +\infty$.

3. Найти область определения функции

$$\sqrt{2^{2x+4} - 4^x - 30}.$$

Решение. Искомая область определения устанавливается неравенством

$$2^{2x+4} - 4^x - 30 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 2^{2x}(16 - 1) \geqslant 30,$$

откуда $2^{2x} \geqslant 2$ и, следовательно, $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

4. Найти область определения функции

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^x - k\beta^x}}, \quad \text{где } \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Решение. Требуется решить неравенство

$$\alpha^x - k\beta^x > 0 \quad \text{или} \quad \alpha^x > k\beta^x,$$

откуда $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x > k$. Положим $\frac{\alpha}{\beta} = a$; если $a>1$, то найдем $x > \log_a k$, если $a<1$, то $x<\log_a k$; если $a=1$, то подкоренное выражение равно $\alpha^x(1-k)$, при $k<1$ получим интервал $-\infty<x<+\infty$, при $k\geqslant 1$ данное выражение не определяет никакой функции (действительной).

5. Функция	Область определения
$\log_a(-x)$	интервал $(-\infty, 0)$
$\log_a(1-x^2)$	интервал $(-1, 1)$
$\log_a(1-x^2-y^2)$	внутренняя область круга $x^2+y^2<1$

6. Найти область определения функции $\log_a(\log_a(\log_a x))$.

Решение. 1°. Пусть $a>1$; требуется решить неравенство $\log_a(\log_a x)>0$; откуда $\log_a x > 1$ и, следовательно, получим интервал $a < x < +\infty$.

2°. Пусть $a < 1$; из неравенства $\log_a(\log_a x) > 0$ следует $0 < \log_a x < 1$, откуда (при $a < 1$) получим интервал $a < x < 1$.

7. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x^2-8x+15}} + \lg[\lg(x^2-5x+16)-1].$$

Решение. Искомая область определяется системой неравенств

$$\frac{1-x}{x^2-8x+15} \geqslant 0, \quad \lg(x^2-5x+16)-1>0.$$

Решим первое неравенство $\frac{1-x}{(x-3)(x-5)}$. Составим таблицу

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
$1-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$

Первое неравенство определяет совокупность промежутков $(-\infty, 1]$ и $(3, 5)$.

Решим второе неравенство $\lg(x^2-5x+16)>1$, откуда

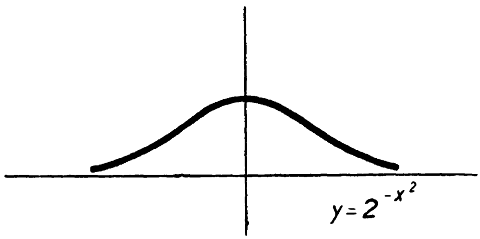
$$x^2-5x+16>10 \quad \text{или} \quad x^2-5x+6>0.$$

Неравенство определяет совокупность двух интервалов $(-\infty, 2)$ и $(3, \infty)$. Искомая область определения есть общая часть полученных двух совокупностей промежутков, т. е. совокупность двух промежутков $-\infty<x\leqslant 1$ и $3<x<5$

Ниже приводятся примеры исследования функций.

8. $y=2^{-x^2}$.

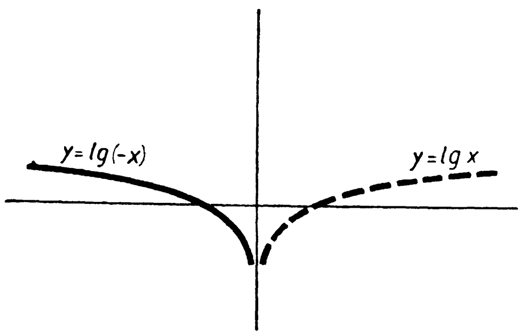
Область определения — интервал $-\infty<x<+\infty$; функция четная, исследуем ее на полусегменте $0\leqslant x<\infty$. На этом полусегменте показатель степени $-x^2$ убывает от 0 до $-\infty$, а $y=2^{-x^2}$ убывает от 1 до 0. В полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция y возрастает от 0 до 1. График представлен на чертеже 160.



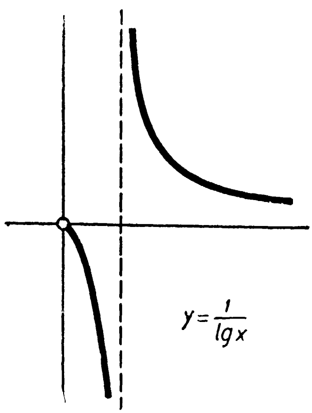
Черт. 160

Для уточнения графика можно составить, например, такую таблицу значений функции:

x	0	0,5	1	2
y	1	0,8	0,5	0,06



Черт. 161



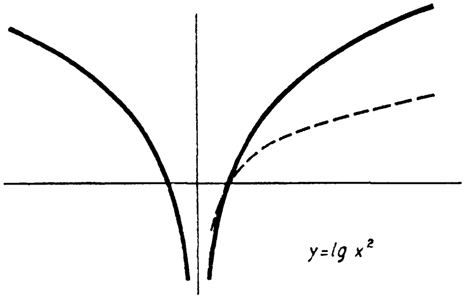
Черт. 162

9. Построить график $y=\log_a(-x)$, где $a>1$.

Область определения есть интервал $(-\infty, 0)$. В этом интервале y убывает от $+\infty$ до $-\infty$. График симметричен линии $y=\log_a x$ относительно оси ординат (черт. 161).

10. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{\log_a x}$ (для определенности считаем $a>1$).

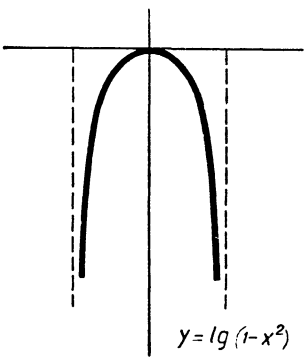
Область определения состоит из двух интервалов $0<x<1$ и $1<x<+\infty$. В первом интервале $\log_a x<0$ и возрастает от $-\infty$ до 0, а y убывает от 0 до $-\infty$; во втором интервале $\log_a x>0$ и возрастает от 0 до $+\infty$, а y убывает от $+\infty$ до 0 (черт. 162). Для уточнения графика предлагаем учащимся



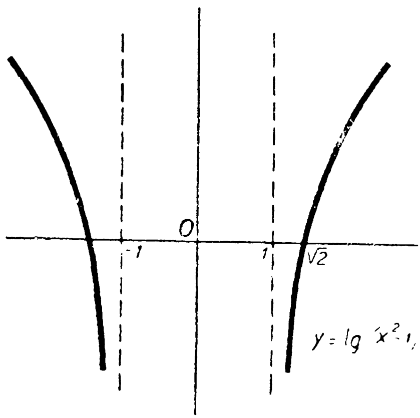
Черт. 163

составить таблицу значений при $x=0{,}1$; $0{,}2$; ...; $0{,}9$; $1{,}1$; $1{,}2$; ..., положив $a=10$.

11. Построить график $y=\log_a x^2$ (где $a>1$).



Черт. 164



Черт. 165

Область определения — множество всех действительных чисел, отличных от нуля, т. е. совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Функция четная. Исследуем ее в интервале $(0, +\infty)$. При $x>0$ имеем $\log_a x^2 = 2\log_a x$. Следовательно, в интервале $(0, +\infty)$ график (черт. 163) можно получить растяжением графика $y=\log_a x$ (пунктирная линия) в 2 раза от оси абсцисс.

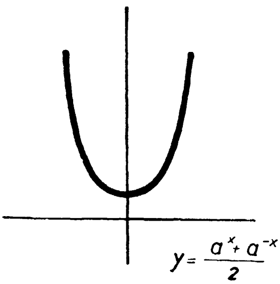
12. Построить график $y=\log_2(1-x^2)$.

Из условия $1-x^2>0$ или $x^2<1$ найдем область определения данной функции в виде интервала $-1<x<1$. Линия симметричная относительно оси

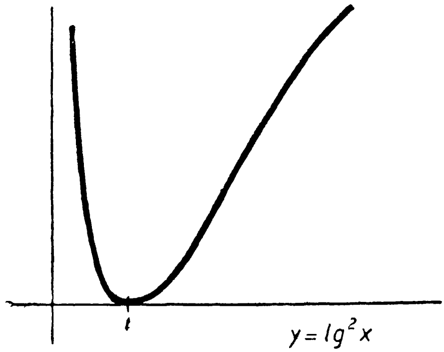
OY, поэтому достаточно исследовать данную функцию на полусегменте $0 \leqslant x < 1$. На этом полусегменте $1 - x^2$ убывает от 1 до 0, значит, y убывает от 0 до $-\infty$. График представлен на чертеже 164.

13. Исследовать функцию $y = \log_a (x^2 - 1)$ (считаем $a > 1$). Область определения есть совокупность из двух интервалов $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, функция четная. В интервале $(1, +\infty)$ функция $x^2 - 1$ возрастает от 0 до $+\infty$, а $y = \log_a (x^2 - 1)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Имеем $y < 0$, если $x^2 - 1 < 1$, т. е. $|x| < \sqrt{2}$ и $y > 0$, если $|x| > \sqrt{2}$; при $|x| = \sqrt{2}$ $y = 0$ (черт. 165).

14. Исследовать функцию $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ (где $a > 0$). Функция четная. Исследуем ее при $x \geqslant 0$. Положим $u = a^x$; имеем $u \geqslant 1$ (при $x \geqslant 0$). На полусегменте $0 \leqslant x < 1$ функции $u = a^x$ возрастает от 1 до $+\infty$, следовательно, $y = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$ возрастает (см. выше, стр. 436, пример 1) от 1 до $+\infty$. График (цепная линия) представлен на чертеже 166.



Черт. 166



Черт. 167

15. Исследовать функцию $y = \log_a^2 x$ (где $a > 1$).

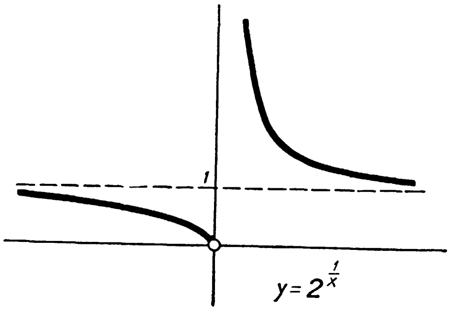
Область определения — интервал $(0, +\infty)$; в полуинтервале $(0, 1]$ функция $\log_a x$ возрастает от $-\infty$ до 0, а y убывает от $+\infty$ до 0. На полусегменте $[1, +\infty)$ $\log_a x$ возрастает от 0 до $+\infty$, а y также возрастает от 0 до $+\infty$ (черт. 167; для уточнения линии составить таблицу значений при $a = 10$).

16. Исследовать функцию $y = 2^{\frac{1}{x}}$

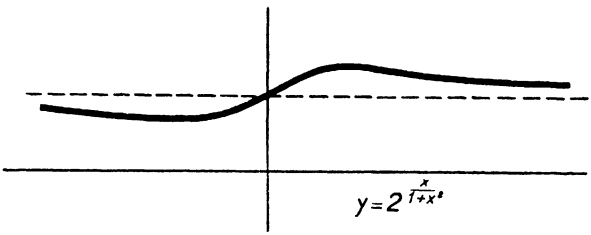
Область определения есть совокупность двух интервалов $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. В первом интервале $\dfrac{1}{x}$ убывает от 0 до $-\infty$, а y убывает от 1 до 0. Во втором интервале $\dfrac{1}{x}$ убывает от $+\infty$ до 0, а y убывает от $+\infty$ до 1 (черт. 168).

17. Исследовать функцию $y = 2^{-\frac{x}{1+x^2}}$.

Функция $\frac{x}{1+x^2}$ в полуинтервале $(-\infty, -1]$ убывает от 0 до $-\frac{1}{2}$ (см. пример 2, стр. 437), а y убывает от 1 до $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. На сегменте $[-1,1]$



Черт. 168



Черт. 169

функция $\frac{x}{1+x^2}$ возрастает от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$, а y возрастает от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до $\sqrt{2}$, наконец, на полусегменте $[1, +\infty)$ y убывает от $\sqrt{2}$ до 1. График представлен на чертеже 169.

§ 105. Логарифмические вычисления

Свойства логарифмов:

$$\log_a(NM) = \log_a N + \log_a M; \quad \log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M;$$

$$\log_a N^k = k \log_a N$$

(где N и M положительны) показывают, что действиям умножения, деления и возведения в степень над **положительными** числами соответствуют действия сложения, вычитания и умножения над логарифмами данных чисел. Всякому выражению, составленному из **положительных** чисел x, y, z, ..., w, посредством действий умножения, деления и возведения в степень:

$$V(x, y, \ldots, w) = \frac{x^k y^l \ldots z^m}{u^p v^q \ldots w^r} \qquad \text{(V)}$$

соответствует выражение:

$$\log_a V = k\log_a x + l\log_a y + \ldots + m\log_a z - p\log_a u - \\ - q\log_a v - \ldots - r\log_a w. \qquad (\log V)$$

При переходе от выражения (V) к выражению (log V) числа заменяются их логарифмами, действие умножение — сложением, деление — вычитанием, а возведение в степень — умножением на показатель степени. Этот переход называется логарифмированием выражения (V).

Обратный переход от выражения (log V) к выражению (V) называется потенцированием выражения (log V).

Примеры

1. Прологарифмировав выражение

$$V = \sqrt[3]{d^2}\sqrt[5]{\frac{b^2c^3}{f^4}},$$

получим

$$\log_a V = \frac{2}{3}\log_a d + \frac{1}{5}\log_a \frac{b^2c^3}{f^4} = \frac{2}{3}\log_a d + \frac{2}{5}\log_a b + \frac{3}{5}\log_a c - \\ - \frac{4}{5}\log_a f.$$

2. Дано соотношение между логарифмами

$$k\log_a x - \frac{1}{n}\log_a y - p = 0.$$

Потенцированием найти соответствующее соотношение между числами
Решение. Так как

$$p = \log_a a^p \quad \text{и} \quad \log_a 1 = 0,$$

то данное соотношение можно записать в виде:

$$k\log_a x - \frac{1}{n}\log_a y - \log_a a^p = \log_a 1,$$

откуда

$$\log_a \frac{x^k}{y^{\frac{1}{n}} a^p} = \log_a 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^k}{a^p\sqrt[n]{y}} = 1.$$

3. Прологарифмировать выражение

$$V = \frac{x^{2k}}{y^{2l}},$$

где x и y произвольные отличные от нуля действительные числа.

Решение.

$$\log_a V = 2k \log_a |x| - 2l \log_a |y|.$$

Следовательно,

$$\log_a V = \begin{cases} 2k \log_a x - 2l \log_a y, & \text{если } x > 0,\ y > 0, \\ 2k \log_a x - 2l \log_a (-y), & \text{если } x > 0,\ y < 0, \\ 2k \log_a (-x) - 2l \log_a y, & \text{если } x < 0,\ y > 0, \\ 2k \log_a (-x) - 2l \log_a (-y), & \text{если } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Практическое значение логарифмирования заключается в том, что оно заменяет умножение, деление и возведение в степень *более легко выполнимыми действиями*: сложением, вычитанием и умножением. Чтобы вычисления посредством логарифмирования действительно облегчали счетную работу, необходимо указать способ, позволяющий без затруднений находить логарифмы чисел и обратно, находить числа по их логарифмам. В вычислительной практике обычно пользуются заранее составленными таблицами, в которых значения логарифмов чисел (с данной степенью точности) даются в готовом виде.

Для практических вычислений обычно пользуются десятичными логарифмами, т. е. логарифмами, вычисленными при основании 10. Логарифм числа N при основании 10 обозначается так:

$$\lg N, \quad \text{т. е.} \quad \lg N = \log_{10} N.$$

Кроме десятичных логарифмов, применяются натуральные логарифмы, т. е. логарифмы при основании:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \ \ldots$$

При основании e ряд формул математического анализа получает наиболее простой вид. Логарифмы при этом основании наиболее просто вычисляются (средствами математического анализа).

Ниже указаны основные свойства десятичных логарифмов.

Теорема. *Рациональное число r в том и только в том случае имеет рациональный логарифм, если оно является целой степенью числа* 10:

$$r = 10^n.$$

Доказательство. Всякое число вида 10^n (где n — целое число) имеет рациональный логарифм:

$$\lg 10^n = n.$$

Обратно, пусть $\lg r = \frac{p}{q}$ —рациональное число, докажем, что r есть целая степень десяти. Пусть $r = \frac{P}{Q}$, где P и Q целые взаимно простые числа. По условию, имеем:

$$10^{\frac{p}{q}} = \frac{P}{Q}, \text{ откуда } 10^p = \frac{P^q}{Q^q}.$$

Разложим числа P и Q на простые множители:

$$P = l^\alpha m^\beta \ . \ . \ . n^\gamma, \quad Q = u^\lambda v^\mu \ . \ . \ . w^\nu.$$

Будем считать, что $q > 0$.

Случай 1°. $p > 0$, имеем:

$$10^p = 2^p \cdot 5^p = \frac{l^{\alpha q} m^{\beta q} \ . \ . \ . n^{\gamma q}}{u^{\lambda q} v^{\mu q} \ . \ . \ . w^{\nu q}}. \tag{1}$$

Так как числа P и Q не имеют общих множителей, отличных от 1, то равенство (1) возможно лишь при условии $Q = 1$. Откуда

$$2^p \cdot 5^p = l^{\alpha q} m^{\beta q} \ . \ . n^{\gamma q}.$$

В силу единственности разложения нагурального числа на множители, последнее возможно лишь, если правая часть не содержит никаких других множителей, кроме степеней чисел 2 и 5. Пусть, например, $l = 2$, $m = 5$, тогда

$$P = 2^p 5^p = 2^{\alpha q} \cdot 5^{\beta q},$$

откуда

$$p = \alpha q, \quad p = \beta q,$$

следовательно, $\lg r = \frac{p}{q} = \alpha = \beta$ есть натуральное число, а потому

$$r = \frac{P}{Q} = 10^{\frac{p}{q}} = 10^\alpha.$$

Случай 2°. $p < 0$; положим $p = -p'$; равенство $10^p = \frac{P^q}{Q^q}$ перепишется так: $10^{p'} = \frac{Q^q}{P^q}$. Теми же рассуждениями, как и в предыдущем случае, докажем, что $P = 1, \frac{Q}{P} = 10^\alpha$, где α — натуральное число, и

$$r = \frac{P}{Q} = 10^{-\alpha}.$$

Случай 3°. $p = 0$. Имеем $\lg r = 0$ и $r = 1 = 10^0$.

С л е д с т в и е. Десятичные логарифмы положительных рациональных чисел, отличных от

$$\ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots, \frac{1}{10}, 1, 10, \ldots, 10^n, \ldots,$$

иррациональны.

Десятичные логарифмы задаются в таблицах (с данной степенью точности) в виде десятичных дробей. Целая часть* логарифма называется его х а р а к т е р и с т и к о й, а дробная часть м а н т и с с о й. Характеристика логарифма может быть любым числом, а мантисса неотрицательна.

Пусть $N = p_k \ldots p_1 p_0, p_{-1} p_{-2} \ldots$ некоторое положительное число, заданное десятичной дробью; условимся счет мест, которые занимают десятичные знаки, вести по следующей схеме:

Десятичные знаки	...	p_2	p_1	p_0	p_{-1}	p_{-2}	...	p_{-n}	...
№ места	...	2	1	0	—1	—2		$-n$	...

Так, если $N = 23{,}41$, то нулевое место занимает 3, первое место занимает 2; (—1)-е место 4, и (—2)-е место занимает 1.

Теорема. *Если в изображении числа N десятичной дробью первая по порядку (считая слева направо) значащая цифра занимает n-е место, то характеристика логарифма N равна **n**.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p_n \neq 0$ первая значащая цифра, то $N = 10^n\left(p_n + \frac{p_{n-1}}{10} + \frac{p_{n-2}}{100} + \ldots\right)$ (где $0 < p_n \leqslant 9$), откуда

$$10^n \leqslant N < 10^n (p_n + 1) \leqslant 10^{n+1}$$

и, следовательно, $n \leqslant \lg N < n+1$, ч. т. д.

Теорема. *При умножении числа на 10^n (где **n**— произвольное целое число) мантисса логарифма данного числа не меняется, а к характеристике прибавляется число **n**.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\lg N = p + 0, p_1 p_2 \ldots p_k \ldots$, то $\lg(10^n N) = \lg 10^n + \lg N = n + p + 0, p_1 p_2 \ldots p_k \ldots$, ч.т.д

В таблицах десятичных логарифмов обычно даются м а н т и с с ы логарифмов всех натуральных чисел в некотором промежутке от 10^{n-1} до 10^n, т. е. мантиссы ц е л ы х n-значных

* Под целой частью действительного числа a, как обычно, понимаем наибольшее целое число, не больше a.

чисел. Эти мантиссы даются с данным числом десятичных знаков и с погрешностью (согласно общим правилам округления), не превосходящей 0,5 последнего десятичного знака. Таблицы называются k-значными, если в них мантиссы задаются с k десятичными знаками. Примерами могут служить четырехзначные таблицы Брадиса, пятизначные таблицы Пржевальского, семизначные таблицы Вега, в которых мантиссы даются (соответственно) с четырьмя, пятью и семью знаками.

По таблицам, в которых содержатся логарифмы n-значных целых чисел, непосредственно может быть найден логарифм любого числа, содержащего в своем десятичном изображении n значащих (либо меньшее число) цифр. В самом деле, все числа, имеющие одни и те же n значащие цифры, имеют одну и ту же мантиссу и отличаются лишь значением характеристики, равной номеру места, занимаемого первой значащей цифрой. Так, например, числа: 1035; 1 035 000; 1,035; 0,00135 имеют одну и ту же мантиссу и их характеристики соответственно суть 3, 6, 0, $\overline{3}$ (знак характеристики принято писать сверху).

Для нахождения мантисс логарифмов чисел с числом знаков большим, чем n, применяется линейная интерполяция. Так, например, в таблицах Пржевальского непосредственно даются пятизначные мантиссы четырехзначных чисел. Для вычисления же мантисс пятизначных чисел применяется линейная интерполяция. Согласно общему принципу линейной интерполяции в рассматриваемом малом промежутке функция (в данном случае логарифмическая) заменяется (приближенно) линейной функцией, имеющей те же значения в концах промежутка, что и данная функция. Для линейной функции приращение функции пропорционально приращению аргумента; поэтому считают (приближенно) приращение интерполируемой функции пропорциональным приращению аргумента. Пусть, например, требуется по таблицам Пржевальского найти мантиссу логарифма числа 25 917. Находим мантиссы логарифмов чисел 25 910 и 25 920 непосредственно из таблиц (это мантиссы логарифмов четырехзначных чисел 2591 и 2592). Пусть Δ разность между найденными мантиссами; эта разность соответствует приращению аргумента $\Delta x = 10$. Следовательно, согласно принципу интерполяции приращение функции (поправка) δ, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = 1$, найдется из пропорции:

$$\frac{\delta}{7} = \frac{\Delta}{10}, \quad \text{откуда} \quad \delta = 7\frac{\Delta}{10}.$$

Значения интерполяционных поправок обычно даются готовыми в виде небольших табличек (partes proportionales). Интерполяционную погрешность, возникающую благодаря замене данной функции линейной, удобнее всего оценить на основании общих формул оценки интерполяционных погрешностей (эти формулы приводятся в курсе математического анализа). Заметим, что интерполяционные погрешности заметного влияния на точность результатов вычислений не оказывают.

Для нахождения чисел по их логарифмам либо пользуются готовыми таблицами (таблицы «антилогарифмов», см., например, таблицы Брадиса), либо пользуются теми же таблицами логарифмов, но только с той лишь разницей, что данными считаются не числа, а мантиссы их логарифмов, а искомыми не мантиссы логарифмов, а числа. Найдя в таблицах мантиссу, наиболее близкую к данной, и соответствующее ей число, применяют принцип линейной интерполяции.

При пользовании таблицами логарифмов в основном надлежит руководствоваться следующим принципом: *при вычислениях над числами с k-значащими цифрами применяются k-значные логарифмические таблицы.*

Остановимся на четырехзначных логарифмических таблицах. В этих таблицах даются мантиссы логарифмов чисел от 1000 до 10 000. Оценим изменение мантиссы логарифма при изменении числа на 1. Пусть y — число, а x — его логарифм, $x=\lg y$, по условию $1\,000<y<10\,000$. Если $\Delta y=1$, то

$$\Delta x = \lg (y + \Delta y) - \lg y = \lg \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right).$$

Так как $0{,}0001 < \frac{\Delta y}{y} < 0{,}001$, то $\lg 1{,}0001 < \Delta x < \lg 1{,}001$,

откуда

$$0{,}00004 < \Delta x < 0{,}00043.$$

Следовательно, изменение числа на 1 в начале таблицы (при y, близком к 1000) вызывает изменение в четвертом знаке мантиссы примерно на 4 единицы (не более 5 единиц). В конце же таблицы (при y близком к 10 000) изменение числа на 1 окажет влияние лишь на пятый знак мантиссы.

Оценим изменение числа при изменении четвертого знака мантиссы на 1 единицу. Рассмотрим функцию $y=10^x$; положим $\Delta x=0{,}0001$; имеем:

$$\Delta y = 10^{x+\Delta x} - 10^x = 10^x (10^{\Delta x} - 1),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{y} = 10^{0{,}0001} - 1 \approx 0{,}00023.$$

Следовательно, изменение мантиссы на 0,0001 вызывает изменение числа с одной и той же относительной погрешностью, приближенно равной 0,00023.

При указанном изменении мантиссы логарифма четвертая значащая цифра числа изменится примерно на 2 единицы (не более, чем на 3 единицы). В частности, округление мантиссы с точностью до 0,5 четвертого знака может вызвать погрешность не бо́льшую, чем 1—2 единицы четвертой значащей цифры числа.

Из изложенного и следует, что при вычислениях посредством четырехзначных таблиц получаются результаты с четырьмя значащими цифрами, причем последняя цифра не вполне надежна. Чтобы иметь бо́льшую уверенность в четвертой цифре, можно применять пятизначные таблицы. Однако применение, например, семизначных таблиц явилось бы в данном случае напрасной затратой труда. В самом деле, если число дано (приближенно) с четырьмя значащими цифрами, то ошибка при округлении (не бо́льшая 0,5 четвертой значащей цифры) вызовет, вообще говоря, изменение в четвертом знаке мантиссы логарифма, и производить вычисления с семью знаками не имеет смысла. Вместе с тем вычисления по таблицам с меньшим чем 4 числом знаков не дадут требуемой точности. Так, например, если применять трехзначные таблицы, то погрешности, допускаемые самими таблицами (например, округление мантиссы), могут оказать влияние на третью значащую цифру и результат вычисления будет слишком грубым.

Мы не останавливаемся на описании правил пользования логарифмическими таблицами, так как к каждым таблицам прилагается соответствующее руководство (см., например, таблицы Пржевальского или Вега), в котором и даются правила применения данных таблиц. Подробное описание обычных четырехзначных таблиц и правила пользования ими изложены в школьном учебнике алгебры А. П. Киселева.

Для многих практических расчетов (например, в технике) оказываются вполне достаточными четырехзначные таблицы, а в повседневной практике инженера логарифмическая линейка (см. раздел о приближенных вычислениях в курсе арифметики). Необходимо заметить, что вычисления посредством многозначных таблиц логарифмов в настоящее время в значительной мере утратили свое значение. Применение счетных машин, начиная от арифмометра и кончая современными счетно-аналитическими машинами, дает возможность быстро и точно выполнять сложные вычисления. Разработка проблем вычислительной техники у нас в СССР ведется в широком масштабе. Академией наук СССР и другими научно-исследовательскими учреждениями разработаны конструкции машин, позволяющих механизировать сложнейшую вычислительную работу, которая потребовала бы огромной затраты труда многих вычислителей.

Для составления таблиц логарифмов надо уметь вычислять логарифмы чисел с данной степенью точности. В теории рядов выводятся формулы, позволяющие вычислять логарифмы чисел с любой заданной степенью точности и оценивать допускаемые погрешности. Эти формулы приводятся в курсе математического анализа, ими и пользуются в настоящее время при составлении таблиц.

Логарифмы чисел можно вычислять и элементарными средствами, однако, соответствующие вычисления (при современных вычислительных средствах) потребовали бы **бессмысленной** затраты огромного труда *. Поэтому рассмотрение элементарных способов вычисления логарифмов может служить (в весьма скромных границах) лишь учебно-педагогическим целям.

Логарифмы чисел с точностью до 1 вычисляются непосредственно. В самом деле, если первая значащая цифра занимает n-е место, то

$$n \leqslant \lg N < n+1;$$

чтобы найти $\lg N$ с точностью до $\frac{1}{k}$, возведем число N в k-ю степень и определим $\lg N^k$ с точностью до 1:

$$n < \lg N^k < n+1,$$

откуда

$$n < k \lg N < n+1 \quad \text{и} \quad \frac{n}{k} < \lg N < \frac{n+1}{k}.$$

Следовательно, $\frac{n}{k}$ и $\frac{n+1}{k}$ суть искомые приближенные значения $\lg N$ с точностью до $\frac{1}{k}$ с недостатком и с избытком.

Для вычисления логарифмов можно пользоваться таблицей значений показательной функции. Так, в таблице степеней 10 (см. пример, стр. 448), которую возможно (в принципе) составить элементарными средствами, числа верхней строки являются приближенными значениями логарифмов соответствующих чисел нижней строки.

Примеры

1. С точностью до 0,001 вычислить $\lg 2$ (пример и вычисления заимствованы из книги В. М. Брадиса, Средства и способы элементарных вычислений. Изд. Академии педагогических наук РСФСР, 1948). Имеем $2^8 = 2{,}56 \cdot 10^2$. Применяя таблицу квадратов чисел, находим последовательно

$$2^{16} = 6{,}554 \cdot 10^4, \qquad 2^{32} = 4{,}295 \cdot 10^9, \qquad 2^{64} = 1{,}844 \cdot 10^{19},$$
$$2^{128} = 3{,}410 \cdot 10^{28}, \qquad 2^{256} = 1{,}157 \cdot 10^{77}, \qquad 2^{512} = 1{,}339 \cdot 10^{154},$$
$$2^{1024} \approx 1{,}739 \cdot 10^{308}, \qquad 2^{2048} = 3{,}214 \cdot 10^{616}, \qquad 2^{4096} = 1{,}033 \cdot 10^{1233}.$$

Следовательно,

$$1233 < 4096 \lg 2 < 1234,$$

откуда

$$0{,}3010 < \lg 2 < 0{,}3012 \quad \text{и} \quad \lg 2 = 0{,}301.$$

---

* Примеры таких бесполезных вычислений см., например, в книге И. В. Арнольда, Логарифмы в курсе элементарной алгебры. Изд Академии педагогических наук РСФСР, 1949.

2. С точностью до 0,01 вычислить $\lg 3$ (пример и вычисления заимствованы из книги К. Ф. Лебединцева, Руководство алгебры, т. II, Госиздат, 1927). Непосредственными вычислениями находим $3^5=243$ и $3^{10}=59049$, следовательно,

$$59\cdot 10^3 < 3^{10} < 60\cdot 10^3.$$

Возвысив в квадрат, получим:

$$3481\cdot 10^6 < 3^{20} < 3600\cdot 10^6. \tag{1}$$

После округления получим:

$$34\cdot 10^8 < 3^{20} < 36\cdot 10^8.$$

Аналогично после возведения в квадрат и округления получим:

$$11\cdot 10^{18} < 3^{40} < 13\cdot 10^{18},$$

откуда

$$121\cdot 10^{36} < 3^{80} < 169\cdot 10^{36}.$$

Заменив 121 на 100, а 169 на 200, усилим неравенства:

$$10^{38} < 3^{80} < 2\cdot 10^{38};$$

перемножив почленно эти равенства и неравенства (1), получим:

$$34\cdot 10^{46} < 3^{100} < 72\cdot 10^{46}.$$

Заменив 34 на 10, а 72 на 100, усилим неравенства:

$$10^{47} < 3^{100} < 19^{48},$$

откуда

$$47 < 100\lg 3 < 48 \quad \text{и} \quad 0,47 < \lg 3 < 0,48.$$

§ 106. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Элементарными трансцендентными (или в дальнейшем трансцендентными) уравнениями называются уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ есть элементарная трансцендентная функция.

В общем случае *трансцендентное уравнение не может быть решено элементарными средствами.* Это значит, что нельзя установить правила, позволяющего получить каждое решение уравнения путем последовательного выполнения ряда арифметических действий и элементарных операций над данными числами (коэффициенты, параметры и пр.). Однако в ряде частных случаев общее решение трансцендентного уравнения можно получить в виде формулы (или нескольких формул), содержащей элементарные операции над известными числами. Элементарная математика ограничивается рассмотрением лишь весьма частных видов трансцендентных уравнений (и систем), допускающих решение элементарными средствами.

Многообразие различных видов элементарных трансцендентных уравнений и приемов их решения (если таковое может быть выполнено элементарно) делает затруднительным установление достаточно целесообразной классификации этих уравнений.

В элементарной алгебре под названием **показательных** и **логарифмических** уравнений рассматриваются частные виды уравнений, в которых неизвестные содержатся в показателях степени или под знаком логарифма.

Точное определение понятия показательного или логарифмического уравнения было бы плодотворным, если бы выделение класса уравнений, носящих данное название, связывалось с установлением общих методов их исследования и решения. На самом же деле речь идет о различных весьма частных видах трансцендентных уравнений и специальных приемах их решения, так что установление дробной классификации в соответствии с этими приемами не является целесообразным *.

В практических приложениях математики нередко требуется вычислить решение уравнения приближенно с данной степенью точности. Общие указания относительно элементарных приближенных методов решения уравнений даны в § 66; там же рассмотрено приближенное решение уравнения $2^x = 4x$, которое элементарными средствами «точно» решено быть не может.

Простейшие уравнения. 1°. Простейшим показательным уравнением называется уравнение:

$$a^x = c \quad (\text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1).$$

При $c > 0$ простейшее уравнение имеет единственное решение

$$x = \log_a c.$$

При $c \leqslant 0$ уравнение не имеет решений, так как значение показательной функции не может быть отрицательным или равным нулю.

2°. Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение:

$$\log_a x = c \quad (\text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1).$$

---

* Принятые во многих старых учебниках «определения» нельзя признать удачными. Например, под определение показательного уравнения как уравнения, содержащего неизвестное в показателе степени, подойдут многие уравнения, **неразрешимые** элементарными средствами. Примером может служить уравнение

$$2^x = 4x,$$

линейное относительно x и 2^x. Но с другой стороны, уравнение

$$x^x = x$$

приводится в школьных задачниках, так как оно без труда решается элементарными средствами.

Вопрос о том, следует или не следует считать данное уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени, показательным, не имеет принципиального значения. И не может возникнуть никаких недоразумений, когда название «показательное» или «логарифмическое» уравнение применяется к тем уравнениям, которые рассматриваются в данных конкретных случаях.

При любом действительном c уравнение имеет единственное решение

$$x = a^c.$$

На нижеследующих примерах пояснено решение показательных и логарифмических уравнений, приводящихся к простейшим.

Примеры

1. $$\log_2(5x+1) = 3.$$

Решение.

$$5x + 1 = 2^3, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{7}{5}.$$

2. $$7^{x^2 - 5x + 2} = 49.$$

Решение. Прологарифмировав обе части по основанию 7, получим:

$$x^2 - 5x + 2 = 2,$$

откуда $x_1 = 0, \quad x_2 = 5.$

3. $$\log_3(x^2 + x + 4) = 1.$$

Решение. $x^2+x+4=3$, откуда $x^2+x+1=0$.
Уравнение не имеет решений в поле действительных чисел.

4. $$\log_a\{\log_b[\log_c x]\} = 0.$$

Решение. Потенцируя последовательно, получим:

$$\log_b(\log_c x) = 1, \quad \log_c x = b, \quad x = c^b.$$

5. $a^{b^x} = c$, где $c>0$, a и b — положительные числа, отличные от 1.
Решение.

$$b^x = \log_a c;$$

последнее уравнение не имеет решений, если $\log_a c \leqslant 0$, т. е. если

$$c \begin{cases} \leqslant 1, & \text{при } a > 1, \\ \geqslant 1, & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

Если $c>1$ при $a>1$, либо $c<1$ при $a<1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \log_b \log_a c.$$

Примечание. Если $a = 1$, то при $c \neq 1$ уравнение не имеет решений, а при $c = 1$ удовлетворяется тождественно. Если $a \neq 1$, $b=1$, то уравнение не имеет решений при $a \neq c$ и удовлетворяется тождественно при $a = c$.

Пусть $u(x)$ некоторая трансцендентная функция, а $F(u)$ —алгебраическая функция аргумента u. Уравнение

$$F\big(u(x)\big) = 0 \tag{F}$$

при помощи подстановки $t=u(x)$ преобразуется в алгебраическое уравнение относительно нового неизвестного t:

$$F(t) = 0.$$

Если $t_1, t_2, \ldots, t_k$ действительные корни этого уравнения, то решение уравнения (F) сводится к решению k трансцендентных уравнений:

$$u(x) = t_1, \quad u(x) = t_2, \ \ldots, \ u(x) = t_k.$$

В частности, этот прием применяется к решению показательных уравнений вида:

$$c_n a^{nx} + c_{n-1} a^{(n-1)x} + \ldots + c_1 a^x + c_0 = 0. \qquad \text{(f)}$$

Положив $a^x = t$ и присоединив неравенство $t > 0$, получим алгебраическую смешанную систему:

$$c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 = 0, \ t > 0.$$

Если $t = t_i$ есть решение этой системы, то для соответствующего решения данного уравнения (f) получим простейшее уравнение

$$a^x = t_i, \quad \text{откуда} \quad x = \log_a t_i.$$

Примеры

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = m.$$

Решение. Умножим обе части на отличный от нуля множитель a^x. Положив $a^x = t$, составим смешанную систему

$$t^2 - 2mt + 1 = 0, \quad t > 0.$$

Корни уравнения суть:

$$t_1 = m - \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{и} \quad t_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}.$$

При $|m| < 1$ корни мнимые, при $m < 0$ оба корня отрицательны, при $m > 1$ оба корня положительны. Данное уравнение имеет два различные решения при $m > 1$:

$$x_1 = \log_a (m - \sqrt{m^2 - 1}) \quad \text{и} \quad x_2 = \log_a (m + \sqrt{m^2 - 1}),$$

одно решение $x = 1$ при $m = 1$ и не имеет решений при $m < 1$.

2. Решить уравнение

$$3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2.$$

Решение. Так как

$$3^{2x+5} = 3^5 \cdot 3^{2x} \quad \text{и} \quad 3^{x+2} = 3^2 \cdot 3^x,$$

то данное уравнение примет вид:

$$3^5 \cdot 3^{2x} - 3^2\, 3^x - 2 = 0.$$

Положив $t = 3$, составим смешанную систему

$$3^5 t^2 - 3^2 t - 2 = 0, \quad t > 0,$$

Корни уравнения действительны и противоположны по знаку; решение системы даст больший корень

$$t=\frac{3^2+\sqrt{3^4+8\cdot 3^5}}{2\cdot 3^5}=\frac{1}{9},$$

откуда $\quad 3^x=\frac{1}{9}\quad$ и $\quad x=-2$.

3. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} a^{2x}+a^{2y}=b, \\ a^{x+y}=c \end{array}\right\} \tag{1}$$

Решение. Если хотя бы одно из чисел b или c неположительно, то система не имеет решений. Пусть $b>0$, $c>0$, положив

$$a^x=u; \quad a^y=v,$$

составим смешанную систему

$$u^2+v^2=b, \quad uv=c, \quad u>0, \quad v>0. \tag{2}$$

Умножив второе уравнение на 2, сложив с первым и приняв во внимание неравенства, получим:

$$(u+v)^2=b+2c, \quad \text{откуда} \quad u+v=\sqrt{b+2c}.$$

Присоединив второе уравнение, получим систему

$$u+v=\sqrt{b+2c}, \quad uv=c, \quad u>0, \quad v>0$$

эквивалентную (2). Следовательно, u и v суть корни квадратного уравнения

$$z^2-\sqrt{b+2c}\cdot z+c=0.$$

Если $\Delta=b-2c<0$, то корни квадратного уравнения мнимые, система не имеет решений. Если $b-2c\geqslant 0$, то квадратное уравнение имеет положительные корни

$$z_{1,2}=\frac{\sqrt{b+2c}\pm\sqrt{b-2c}}{2}.$$

В этом случае система (2) имеет два решения:

$$u_1=z_1, \quad v_1=z_2 \quad \text{и} \quad u_2=z_2, \quad v_2=z_1,$$

откуда

$$a^x=z_1, \quad a^y=z_2 \quad \text{и} \quad a^x=z_2, \quad a^y=z_1.$$

Данная система имеет два решения:

$$x_1=\log_a\frac{\sqrt{b+2c}+\sqrt{b-2c}}{2}, \quad y_1=\log_a\frac{\sqrt{b+2c}-\sqrt{b-2c}}{2},$$

$$x_2=\log_a\frac{\sqrt{b+2c}-\sqrt{b-2c}}{2}, \quad y_2=\log_a\frac{\sqrt{b+2c}+\sqrt{b-2c}}{2}.$$

4. Решить систему

$$a^{2x}+a^{2y}=b, \quad d^{x+y}=c.$$

Решение. Система приводится к предыдущей: достаточно принять во внимание, что $d=a^{\log_a d}$ и, следовательно, второе уравнение перепишется так:

$$(a^{x+y})^{\log_a d}=c \quad \text{или} \quad a^{x+y}=c^{\frac{1}{\log_a d}}$$

Операции логарифмирования и потенцирования, которые часто применяются при решении показательных и логарифмических уравнений элементарными средствами, могут изменить область определения уравнения. Следовательно, при выполнении этих операций можно получить уравнение не эквивалентное данному. Рассмотрим преобразования, наиболее часто применяемые при решении показательных и логарифмических уравнений.

1°. Уравнения

$f(x, y, \ldots, z) = \varphi(x, y, \ldots, z)$ и $a^{f(x, y, \ldots, z)} = a^{\varphi(x, y, \ldots, z)}$

(где $a > 0$ и $a \neq 1$) эквивалентны.

В самом деле, второе уравнение есть следствие первого. Обратно, первое уравнение есть следствие второго, так как значения показательной функции (при данном основании) могут быть равными, лишь, когда равны показатели степени, в которую возводится основание.

На этом основан следующий прием решения показательных уравнений: представив уравнение в виде равенства степеней некоторого положительного числа (основания), приравнивают показатели степени правой и левой частей.

2°. Если функции $f(x, y, \ldots, z)$ и $\varphi(x, y, \ldots, z)$ положительны, то уравнения

$$f(x, y, \ldots, z) = \varphi(x, y, \ldots, z)$$

$$\text{и} \quad \log f(x, y, \ldots, z) = \log \varphi(x, y, \ldots, z)$$

эквивалентны (основание логарифмов произвольное). В самом деле, второе уравнение есть следствие первого. Обратно, первое уравнение есть следствие второго, так как из равенства логарифмов двух положительных чисел следует равенство этих чисел. На этом положении основан прием решения уравнений посредством логарифмирования обеих частей.

В частности, логарифмирование обеих частей применяется к решению уравнений вида

$$ka^{f(x, y, \ldots, z)} = lb^{\varphi(x, y, \ldots, z)},$$

где k, l, a и b — положительны. Прологарифмировав по произвольному основанию, получим уравнение:

$$\log k + f(x, y, \ldots, z) \log a = \log l + \varphi(x, y, \ldots, z) \log b,$$

эквивалентное данному, так как обе части данного уравнения положительны.

Если функции $f(x, y, \ldots, z)$ и $\varphi(x, y, \ldots, z)$ не являются положительными, то при переходе от первого уравнения ко второму может произойти потеря решений. Всякая система значений неизвестных $x = a$, $x = b$, $\ldots$, $z = c$, при которой

$$f(a, b, \ldots, c) = \varphi(a, b, \ldots, c) < 0$$

есть решение первого, но не есть решение второго уравнения.

3°. При применении формул логарифмирования произведения, частного и степени может произойти потеря решений.

Так, например, переход от уравнения

$$\log \frac{f_1 f_2}{f_3} = \log \varphi$$

(где f_1, f_2, f_3 и φ функции от неизвестных) к уравнению

$$\log f_1 + \log f_2 - \log f_3 = \log \varphi$$

возможен лишь при условии:

$$f_1 > 0,\ f_2 > 0,\ f_3 > 0,\ \varphi > 0.$$

Всякая система значений неизвестных, при которой $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, $f_3 < 0$, либо $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, $f_3 < 0$, либо $f_1 < 0$, $f_2 < 0$, $f_3 > 0$ и $\frac{f_1 f_2}{f_3} = \varphi > 0$, есть решение первого, но не есть решение второго уравнения.

При решении трансцендентных уравнений (и систем) нередко применяются различные частные и «искусственные» приемы, обусловленные специфическими свойствами рассматриваемых конкретных уравнений. Эти приемы общей теорией предусмотреть нельзя.

Примеры

1. Решить уравнение

$$\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}.$$

Решение. Представив обе части в виде степеней числа 3, получим:

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}, \quad \text{откуда} \quad x(x-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Уравнение имеет два решения:

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Решение. Запишем уравнение при помощи степеней чисел 2 и 3 так:

$$2^{2x} - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2},$$

откуда

$$3\sqrt{3}\cdot 2^{2x} = 8\cdot 3^x.$$

Прологарифмировав (при произвольном основании), получим:

$$\frac{3}{2}\log 3 + 2x\log 2 = 3\log 2 + x\log 3,$$

откуда

$$x = \frac{3}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$x^x = x.$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестного есть множество положительных чисел. Так как при $x > 0$ обе части уравнения положительны, то, прологарифмировав, получим эквивалентное уравнение

$$x \log x = \log x, \quad \text{откуда} \quad (x-1)\log x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1.$$

При подстановке $x = -1$ обе части данного уравнения имеют одно и то же значение -1. Однако здесь не имеет места потеря корня. В самом деле, число -1 не принадлежит области определения функции x^x, а потому не есть корень данного уравнения в поле действительных чисел.

4. Решить уравнение

$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log(x+2). \qquad (1)$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестного определяется системой неравенств:

$$x-1>0, \quad x-2>0, \quad x+2>0,$$

откуда $x > 2$. Преобразовав левую часть, получим:

$$\log[(x-1)(x-2)] = \log(x+2). \qquad (2)$$

Для последнего уравнения множество допустимых значений x определяется системой неравенств:

$$(x-1)(x-2)>0, \quad x+2>0,$$

откуда получим совокупность интервалов $-2 < x < 1$ и $2 < x < +\infty$. Решения уравнений (1) и (2) содержатся среди корней квадратного уравнения:

$$(x-1)(x-2) = x+2,$$

из которого найдем $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Оба корня удовлетворяют уравнению (2). Уравнению (1) удовлетворяет один корень $x = 4$. Постороннее решение $x = 0$ появилось при переходе от уравнения (1) к уравнению (2), который повлек за собой расширение области определения левой части.

5. Решить систему уравнений

$$x^{x+y} = y^{x-y}; \quad x^2 y = 1.$$

Решение. Область определения уравнения $x > 0$ и $y > 0$. Из второго уравнения имеем $y = x^{-2}$. Подставив в первое, получим:

$$x^{x+y} = x^{-2(x-y)}.$$

Это равенство возможно в двух случаях: $x = 1$, тогда $y = x^{-2} = 1$; $x \neq 1$, тогда $x + y = -2(x-y)$ или $3x = y$.

Система имеет два решения:

$$x = y = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad y = \sqrt[3]{9}.$$

6. Решить уравнение

$$\log_x 2 \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$$

Решение. Область определения уравнения: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq \frac{1}{4}$.

Воспользовавшись формулой $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 2x}=\frac{1}{\log_2 4x}$$

или

$$\log_2 x\ \log_2 2x=\log_2 4x,$$

или

$$\log_2 x\,(1+\log_2 x)=2+\log_2 x.$$

Получилось квадратное уравнение относительно $\log_2 x$:

$$(\log_2 x)^2=2,$$

откуда

$$\log_2 x=\pm\sqrt{2}\quad \text{и}\quad x=2^{\pm\sqrt{2}}.$$

7. Решить систему уравнений

$$x^a=y^b;\quad \log_c\frac{x}{y}=\frac{\log_c x}{\log_c y}.$$

Решение. Область определения уравнения: $x>0$, $y>0$ и $y\neq 1$. Прологарифмировав первое уравнение по основанию c, получим:

$$a\log_c x-b\log_c y=0. \qquad (1)$$

Если $a\neq 0$, то из (1) найдем (так как $\log_c y\neq 0$):

$$\frac{\log_c x}{\log_c y}=\frac{b}{a},$$

подставив во второе уравнение данной системы, получим:

$$a\log_c x-a\log_c y=b. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) образуют линейную систему относительно логарифмов неизвестных:

$$\left.\begin{aligned}a\log_c x-b\log_c y=0,\\ a\log_c x-a\log_c y=b.\end{aligned}\right\}$$

Если $a\neq b$, то:

$$\log_c x=\frac{b^2}{a(b-a)},\quad \log_c y=\frac{b}{b-a},\ \text{откуда}\ x=c^{\frac{b^2}{a(b-a)}},\quad y=c^{\frac{b}{b-a}},$$

где $b\neq 0$, если $b=0$, то полученное решение постороннее, т. к. $y=1$.

Если $a=b\neq 0$, то система (1), (2) противоречива, данная система не имеет решений.

При $a=0$ первое уравнение данной системы примет вид $y^b=1$. При $b\neq 0$ это уравнение имеет решение $y=1$, но тогда второе уравнение теряет смысл, система не имеет решений.

При $a=b=0$ первое уравнение удовлетворяется тождественно, из второго находим:

$$\log_c x\log_c y-\log_c^2 y=\log_c x,$$

откуда

$$\log_c x=\frac{\log_c^2 y}{\log_c y-1}\quad \text{и}\quad x=c^{\frac{\log_c^2 y}{\log_c y-1}},$$

где $y \neq 1$ произвольное положительное число, неравное c. При $y = c$ система не имеет решений.

8. Доказать, что система

$$\log_a x - \log_{a^2} y = m,$$
$$\log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n$$

приводится к линейной системе относительно $\log_a x$ и $\log_a y$.

Решение. В самом деле, достаточно принять по внимание, что

$$\log_{a^2} y = \frac{1}{2}\log_a y, \quad \log_{a^2} x = \frac{1}{2}\log_a x \quad \text{и} \quad \log_{a^3} y = \frac{1}{3}\log_a y.$$

9 Решить уравнение

$$\frac{\log 2x}{\log (x+k)} = 2 \qquad \text{(основание логарифмов — произвольное).}$$

Решение. Область определения уравнения

$$x > 0, \ x > -k \quad \text{и} \quad x + k \neq 1.$$

Имеем последовательно:

$$\log 2x = 2\log(x+k); \quad \log 2x = \log(x+k)^2$$
$$2x = (x+k)^2.$$

Откуда получим квадратное уравнение:

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0.$$

Данное уравнение эквивалентно смешанной системе:

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0, \quad x > 0, \quad x > -k, \quad x + k \neq 1.$$

Корни квадратного уравнения действительны, если $\Delta = 1 - 2k \geqslant 0$, откуда $k \leqslant \frac{1}{2}$. При $k \leqslant \frac{1}{2}$ и $k \neq 0$ оба корня квадратного уравнения положительны.

Положив в левой части квадратного уравнения $x = -k$, получим:

$$f(-k) = 2k \begin{cases} > 0 \text{ при } k > 0, \\ < 0 \text{ при } k < 0. \end{cases}$$

При $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$ оба корня удовлетворяют неравенству $x > -k$.

При $k < 0$ число $-k$ содержится между корнями уравнения и неравенству $x > -k$ удовлетворяет больший корень.

При $k = 0$ корни квадратного уравнения суть 0 и 2, смешанной системе удовлетворяет $x = 2$.

Условие $x + k \neq 1$ соблюдается, если число $1 - k$ не является корнем квадратного уравнения. Подстановкой убедимся, что число $1 - k$ является двукратным корнем уравнения при $k = \frac{1}{2}$, и тогда $x = \frac{1}{2}$ (двукратный корень). В этом случае левая часть данного уравнения теряет смысл.

Итак, если $0 < k < \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x = 1 - k \pm \sqrt{1 - 2k},$$

если $k \leqslant 0$, то уравнение имеет один корень:

$$x = 1 - k + \sqrt{1 - 2k}.$$

10. Решить систему уравнений

$$x^y = y^x, \quad a^x = b^y \qquad (\text{где } a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1).$$

Решение. Область определения уравнений: $x>0$, $y>0$. Если $a>1$, $b<1$ или $a<1$, $b>1$, то ни при каких положительных значениях x и y второе уравнение не может удовлетворяться, в этом случае система не имеет решений.

Предположим, что $a>1$, $b>1$ (или что $a<1$, $b<1$); прологарифмировав уравнения по любому основанию, большему (соответственно меньшему) 1, получим:

$$y \log x = x \log y, \qquad x \log a = y \log b.$$

Подставим выражение для y из второго уравнения в первое, выполним преобразования и сократим на x (заметим, что значение $x=0$ не принадлежит области определения уравнения), прологарифмировав затем второе уравнение, получим систему линейных уравнений относительно $\log x$ и $\log y$:

$$\left.\begin{aligned} \log a \log x - \log b \log y &= 0, \\ \log x - \log y &= \log\log b - \log\log a. \end{aligned}\right\}^{*}$$

Если $\Delta = \log b - \log a \neq 0$, то получим:

$$\log x = \frac{\log b\,(\log\log b - \log\log a)}{\log b - \log a},$$

откуда

$$x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log b - \log a}} \quad \text{и аналогично} \quad y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log b - \log a}}$$

(в виде упражнений показать непосредственно, что найденные значения не зависят от выбора основания логарифмов).

Если $\Delta=0$, то $\log a = \log b$, откуда $a=b$ и $\log x = \log y$. Система имеет бесконечное множество решений $y=x$ (где x — произвольное положительное число).

При решении неравенств (или систем неравенств), содержащих неизвестные в показателях степени или под знаком логарифма, надлежит руководствоваться общими свойствами неравенств, свойством монотонности показательной и логарифмической функций и допустимыми значениями для неизвестных.

Так,например, неравенство

$$\log_a f(x, y, \ldots, z) < \log_a \varphi(x, y, \ldots, z)$$

при $a>1$ эквивалентно следующей системе неравенств:

$$f(x, y, \ldots, z) < \varphi(x, y, \ldots, z),$$
$$f(x, y, \ldots, z) > 0, \quad \varphi(x, y, \ldots, z) > 0,$$

а при $a < 1$ системе:

$$f(x, y, \ldots, z) > \varphi(x, y, \ldots, z),$$
$$f(x, y, \ldots, z) > 0, \quad \varphi(x, y, \ldots, z) > 0.$$

Мы ограничимся рассмотрением конкретных примеров.

---

* $\log\log a$ и $\log\log b$ имеют смысл, так как в силу выбора основания логарифмов $\log a>0$ и $\log b>0$.

Примеры

1. Решить неравенство

$$2^{2x}-2^{x}-6<0.$$

Решение. Положим $2^x=z$, получим систему неравенств:

$$z^2-z-6<0, \quad z>0.$$

Первое неравенство выполняется в интервале $-2<z<3$; общей частью интервалов $-2<z<3$ и $0<z<\infty$ является интервал:

$$0<z<3 \quad \text{или} \quad 0<2^x<3;$$

откуда

$$-\infty<x<\log_2 3.$$

2. Решить неравенство

$$x^{(\log_a x+1)}>a^2x.$$

Решение. При $a>1$ прологарифмировав обе части, получим:

$$(\log_a x+1)\log_a x>\log_a x+2 \quad \text{или} \quad \log_a^2 x>2.$$

Для значений $\log_a x$ получаем два интервала:

$$-\infty<\log_a x<-\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{2}<\log_a x<+\infty,$$

откуда

$$0<x<a^{-\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad a^{\sqrt{2}}<x<+\infty.$$

При $0<a<1$ получим:

$$(\log_a x+1)\log_a x<\log_a x+2 \quad \text{и} \quad \log_a^2 x<2,$$

откуда

$$-\sqrt{2}<\log_a x<\sqrt{2}$$

и, следовательно,

$$a^{-\sqrt{2}}>x>a^{\sqrt{2}}, \quad \text{т. е.} \quad a^{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{a^{\sqrt{2}}}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_x\frac{8}{3}<\log_x\frac{1}{2}.$$

Решение. Так как $\frac{8}{3}>\frac{1}{2}$, то $\log_x y$ есть убывающая функция от аргумента y при данном x; это имеет место при

$$0<x<1.$$

4. Решить неравенство

$$\log x+\log(x+1)<\log(2x+6),$$

где логарифмы взяты при произвольном основании, большем 1.

Решение. Множество допустимых значений x найдем из условий:

$$x>0, \quad x+1>0, \quad 2x+6>0, \quad \text{откуда} \quad x>0.$$

Произведя потенцирование, получим последовательно:

$$\log[x(x+1)]<\log(2x+6), \quad x(x+1)<2x+6, \quad x^2-x-6<0.$$

Последнее неравенство удовлетворяется в интервале $-2<x<3$. Общим решением данного неравенства является общая часть интервалов $(-2, 3)$ и $(0, +\infty)$, т. е. интервал $0<x<3$.

5. Дана сходящаяся прогрессия с положительным знаменателем $1+q+\ldots+q^n+\ldots$ Найти значения n, при которых разность между суммой и n-й частной суммой прогрессии меньше данного числа $\varepsilon>0$.

Решение. По условию $0<q<1$. Составив разность между суммой прогрессии и ее n-й частной суммой, получим:

$$\frac{1}{1-q}-\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n}{1-q}.$$

Требуется решить неравенство:

$$\frac{q^n}{1-q}<\varepsilon.$$

Прологарифмировав по любому основанию, большему 1, получим: $n\log q-\log(1-q)<\log\varepsilon$, откуда $n\log q<\log\varepsilon+\log(1-q)$; а потому

$$n>\frac{\log\varepsilon+\log(1-q)}{\log q}\quad (\text{так как } q<1, \text{ то } \log q<0).$$

§107. О некоторых приложениях показательной функции и логарифмов

Рассмотрим последовательность

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots, \qquad \{s_n\}$$

для которой значение s_n определяется следующим условием: всякий последующий член равен сумме, первое слагаемое которой равно предшествующему члену, а второе пропорционально предшествующему с некоторым данным коэффициентом пропорциональности k. Изложенное условие является словесным описанием следующей рекуррентной формулы:

$$s_n=s_{n-1}+ks_{n-1}\quad\text{или}\quad s_n=s_{n-1}(1+k).$$

Следовательно, при переходе к последующему, предыдущий член умножается на один и тот же множитель $1+k$. Значит, последовательность $\{s\}$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем $1+k$, а потому имеем:

$$s_n=s_0(1+k)^n. \tag{I}$$

Формула (I) применяется к вычислению значений величин, изменение которых характеризуется следующим правилом: *при переходе от предыдущего значения к последующему величина получает приращение, пропорциональное ее предыдущему значению.*

Формула (I) называется нередко формулой «сложных процентов», благодаря интерпретации, которая вытекает из решения следующей задачи. *Вклад помещен в сберкассу на следующих условиях. Сберкасса выплачивает p% годовых, причем ежегодно к вкладу причисляются процентные деньги и в после-*

дующий год проценты исчисляются с наращенного вклада. Вычислить сумму, в которую обратится вклад по истечении t лет.

Решение. По прошествии каждого года к сумме, находившейся в кассе в истекшем году, прибавляется $\frac{p}{100}$ часть этой суммы. В частности, через один год вклад составит:

$$a + \frac{p}{100} a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a \text{ руб.}$$

Во второй год проценты будут исчисляться с $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ руб. и через два года вклад составит:

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{ руб. и т. д.}$$

По общей формуле (I) найдем, положив $s_0 = a$ и $k = 1 + \frac{p}{100}$ что через n лет вклад составит:

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ руб.} \qquad \text{(II)}$$

Формула (II) применяется не только для вычисления денежных сумм (это только одна из возможных ее интерпретаций), по этой формуле можно вычислять, например, количество населения, где p средний годовой прирост населения, выраженный в процентах.

Коэффициент k может быть отрицательным, рассмотрим, например, следующую задачу.

Сосуд, емкостью в v л, наполнен смесью спирта и воды. Из сосуда отливают r л смеси и доливают сосуд водой. Какое количество спирта будет в сосуде после n-кратного повторения этой операции, если первоначально раствор содержал a л спирта.

Решение. Если s_m — количество спирта в сосуде перед началом m-й операции, то в одном литре смеси содержится $\frac{s_{m-1}}{v}$ спирта; в r л смеси содержится $\frac{r}{v}s_{m-1}$ л спирта. После того, как будут отлиты r л смеси, в сосуде останется

$$s_m = s_{m-1} - \frac{r}{v}s_{m-1} = s_{m-1}\left(1 - \frac{r}{v}\right) \text{ л}$$

спирта. Положив в формуле (I) $s_0 = a$, $k = -\frac{r}{v}$, получим:

$$s_n = a\left(1 - \frac{r}{v}\right)^n.$$

Задача о «непрерывном начислении процентов». Предположим, что с суммы a сложные проценты исчисляются из расчета $\frac{p}{100}$ годовых, но начисление производится каждый раз по прошествии $\frac{1}{n}$ части года. Если за год приращение общей суммы составит $a\frac{p}{100}$ руб., то по прошествии $\frac{1}{n}$ части года это приращение должно составить $a\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{n}$ руб., и процент будет исчисляться с суммы $a\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{n}\right)$ руб. В конце второй части года вклад составит $a\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{n}\right)^2$ руб. При таком начислении процентов по прошествии года вклад составит:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{n}\right)^n \text{ руб.},$$

а по прошествии t лет

$$A_n(t)=a\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{n}\right)^{nt} \text{ руб.}$$

Предположим, что начисление процентов производится через все более и более мелкие части года, тогда, перейдя к пределу, получим:

$$\lim_{\to\infty} A_n(t)=a\lim\left(1+\frac{p}{100}\,\frac{1}{n}\right)^{nt}=a\left[\lim\left(1+\frac{1}{n100}\right)^n\right]^t=ae^{\frac{p}{100}t}\text{*}.$$

Таким образом, получается следующая формула:

$$A(t)=ae^{\frac{p}{100}t}$$

роста вклада при «непрерывном» начислении процентов. Как нетрудно видеть, скорость изменения вклада, т. е. $\frac{dA}{dt}$, пропорциональна его размеру в данный момент времени:

$$\frac{dA}{dt}=a\frac{p}{100}e^{\frac{p}{100}t}=\frac{p}{100}A.$$

Задача о «непрерывном» начислении процентов служит лишь удобной фабулой для иллюстрации соответствующих математических рассуждений.

---

* Мы пользуемся следующей формулой теории пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$$

Закону, в силу которого *скорость изменения величины пропорциональна ее значению во всякий данный момент,* подчиняются многие величины, изучающиеся в физике, химии и естествознании. В качестве примеров укажем, что этому закону подчиняется распад радиоактивных веществ, изменение количества вещества, участвующего в химической реакции, размножение микроорганизмов (органический рост), рост кристаллов и т. п.

Если y — значение данной величины в данный момент времени, y_0 — значение в начальный момент, $\frac{dy}{dt}$ — скорость изменения y в момент времени t, то имеем:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = kdt.$$

Проинтегрировав, найдем:

$$\int_0^t kdt = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} \quad \text{или} \quad kt = \ln y - \ln y_0,$$

откуда

$$y = y_0 e^{kt}.$$

Для примера остановимся на следующем вопросе: *какой процент радия останется через t лет, если известно, что половина наличного его запаса распадается через* 1600 *лет.*

Положив в общей формуле $t = 1600$ и $y = \frac{1}{2} y_0$, получим:

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{k1600}, \quad \text{откуда } e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}.$$

Следовательно, формула примет вид:

$$y = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} \quad \text{и} \quad \frac{y}{y_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

Искомый процент оставшегося радия по отношению к его первоначальному количеству равен:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} \cdot 100.$$

§ 108. Рост показательной и логарифмической функций

Теорема. *При произвольном* $k > 0$ и $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty.$$

Это свойство показательной функции формулируют условно следующим образом. *Показательная функция a^x при $a>1$ растет в бесконечности быстрее любой положительной степени аргумента.*

Доказательство. Предположим сначала, что k — натуральное число и $a=2$. Рассмотрим отношение $\frac{2^x}{x^k}$ при натуральных значениях аргумента $x=1, 2, \ldots, n, \ldots$ Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n^k}=+\infty$. В самом деле, при $n>k$, имеем:

$$\frac{2^n}{n^k}=\frac{(1+1)^n}{n^k}=\frac{1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n}{n^k}>\frac{C_n^{k+1}}{n^k}=\frac{(n-1)\ldots(n-k)}{n^{k-1}(k+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\ldots(n-k)}{n^{k-1}(k+1)!}=$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\lim\left[(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]=+\infty,$$

то имеем также:

$$\lim\frac{2^n}{n^k}=+\infty.$$

Пусть x — произвольное (достаточно большое) положительное число; обозначим через n его целую часть: $n\leqslant x<n+1$, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} n=+\infty \quad \text{и} \quad \frac{2^x}{x^k}>\frac{2^n}{(n+1)^k}=\frac{1}{2}\,\frac{2^{n+1}}{(n+1)^k}\to+\infty,$$

а потому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^k}=+\infty.$$

Предположим, что k произвольное положительное действительное число, пусть n любое натуральное число, большее k; так как (при достаточно больших значениях x)

$$\frac{2^x}{x^k}>\frac{2^x}{x^n}\to+\infty, \quad \text{то и} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^k}=+\infty.$$

Пусть α — произвольное положительное число, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\alpha x}}{x^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\alpha^k 2^y}{y^k}=+\infty \quad (\text{положим } y=\alpha x).$$

Если $a>1$ — произвольное основание, то имеем $a^x=2^{x\log_2 a}$; положив $\alpha=\log_2 a$, получим (в силу предыдущего):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Следствия. При $a>1$ и при любом $k>0$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim(a^{-x}x^k)=0.$$

При $a<1$ и при любом $k>0$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x x^k)=\lim\frac{x^k}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=0.$$

Теорема. *При $a>1$ и при произвольных положительных k и n имеем:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^k}{x^n}=0.$$

Это свойство логарифмической функции условно формулируют следующим образом: *любая положительная степень логарифма (при основании большем 1) растет в бесконечности медленнее любой положительной степени аргумента.*

Доказательство. Положим $\log_a x=y$ и тогда $x=a^y$, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^k}{x^n}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{a^{ny}}=0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Так, например, имеем в частности $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0.$

Следствие. При любых положительных n и k имеем:

$$\lim_{x\to 0}(x^n(\log_a x)^k)=0 \quad (\text{где } x>0).$$

В самом деле, положим $y=\frac{1}{x}$, имеем $\lim\limits_{x\to 0}y=+\infty$ (где $x>0$) и

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n(\log_a x)^k\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log_a\frac{1}{y}\right)^k}{y^n}=\lim\frac{(-\log_a y)^k}{y^n}=0.$$

§ 109. Трансцендентность показательной и логарифмической функций

Свойство трансцендентности показательной функции выражается следующей теоремой.

Теорема. *При основании a, отличном от 1, функция a^x не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.*

Доказательство. Требуется доказать следующее положение: *не существует отличного от нуля многочлена $P(x, y)$ такого, что в результате подстановки $y=a^x$ получится тождество:*

$$P(x, a^x)\equiv 0 \tag{1}$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Предположим противное, что многочлен $P(x, y)$ (отличный от нуль-многочлена), для которого имеет место тождество (1), существует. Расположив $P(x, y)$ по степеням y,

$$P(x, y) = p_n(x)\, y^n + p_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + p_0(x)$$

и подставив $y = a^x$, представим тождество (1) в следующем виде:

$$p_n(x)\, a^{nx} + p_{n-1}(x)\, a^{(n-1)x} + \ldots + p_0(x) \equiv 0. \qquad (2)$$

Пусть m — степень многочлена $p_n(x)$ (в частности, $m=0$, если $p_n(x)$ — число):

$$p_n(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

(где $b_m \neq 0$).

Для определенности будем считать, что $a > 1$. Вынесем за скобку $a^{nx}x^m$ в левой части тождества (2):

$$a^{nx}x^m\left[b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^m} + \frac{p_{n-1}(x)}{a^x x^m} + \frac{p_{n-2}(x)}{a^{2x}x^m} + \ldots + \frac{p_0(x)}{a^{nx}x^m}\right] \equiv 0.$$

Это равенство (вопреки предположению) тождественно выполняться не может, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\left[b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^n} + \frac{p_{n-1}(x)}{a^x x^m} + \frac{p_{n-2}(x)}{a^{2x}x^m} + \ldots + \frac{p_0(x)}{a^{nx}x^m}\right] =$$

$$= b_m \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} a^{nx}x^m = +\infty,$$

а потому абсолютная величина левой части в бесконечности имеет предел, равный $+\infty$, и при достаточно больших значениях $|x|$ равной нулю быть не может, ч. т. д.

Примечание. Случай $a < 1$ сводится к рассмотренному, достаточно заменить a^x на $\frac{1}{a_1^x}$, где $a_1 = \frac{1}{a} > 1$.

Следствие. *Логарифмическая функция трансцендентна.* В самом деле, допустим, что при подстановке $y = \log_a x$ в многочлен $P(x, y)$ получается тождество

$$P(x, \log_a x) \equiv 0. \qquad (3)$$

Взаимно обратными функциями (показательной и логарифмической) значения $y = \log_a x$ и $x = a^y$ ставятся во взаимно однозначное соответствие. Следовательно, если имеет место тождество (3), то должно иметь место и тождество

$$P(a^y, y) \equiv 0,$$

но по доказанному последнее невозможно.

Из доказанного следует, что *закон соответствия показательной и логарифмической функций не может быть выражен по-*

средством алгебраических действий над аргументом. В самом деле, если бы, например, показательная функция $y=a^x$ могла быть представлена формулой

$$a^x = Q(x),$$

где $Q(x)$ некоторое **алгебраическое** выражение, то она (вопреки доказанному) удовлетворяла бы некоторому алгебраическому уравнению:

$$P(x,\ y) = 0.$$

Это уравнение можно было бы получить, освободив уравнение

$$y - Q(x) = 0$$

от радикалов (если последние содержатся в выражении $Q(x)$).

Итак, *средствами элементарной математики невозможно построить формулы, выражающие значения показательной и логарифмической функций при помощи алгебраических действий над аргументом.* Формулы, известные из математического анализа, выражающие значения показательной и логарифмической функций непосредственно через значение аргумента, например:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \ldots$$

и т. п., кроме алгебраических действий, содержат операции предельного перехода (суммирование рядов, бесконечные произведения и пр.). Эти формулы дают возможность приближенно (с любой степенью точности) вычислять значения показательной и логарифмической функции посредством алгебраических действий над аргументом.

§ 110. Характеристические свойства показательной и логарифмической функций

Одним из способов задания функции может служить описание ее характеристических свойств, т. е. ряда таких ее свойств, которые в своей совокупности определяют эту функцию единственным образом. При таком способе задания функций широко применяются функциональные уравнения, т. е. соотношения, которым должна удовлетворять данная функция при всех значениях аргумента в области ее определения.

Так, например, линейная функция $f(x) = kx$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{так как} \quad k(x+y) = kx + ky.$$

Теорема. *Если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:*

1°. *Областью определения функции* $f(x)$ *является множество всех действительных чисел.*

2°. *Функция* $f(x)$ *монотонна (возрастает или убывает).*

3°. *Удовлетворяет функциональному уравнению:*

$$f(x)\ f(y) = f(x+y), \tag{f}$$

то $f(x)$ есть показательная функция a^x, где $a \neq 1$.

Следовательно, при основании $a \neq 1$ совокупность свойств 1°, 2°, 3° вполне определяет показательную функцию a^x, так как никакой другой функции, обладающей всеми перечисленными свойствами, не существует. Эти свойства и составляют систему характеристических свойств показательной функции.

Доказательство. Пусть $f(x)$ какая-либо функция, монотонная в интервале $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющая функциональному уравнению (f).

Из тождества (f) следует, что

$$f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n). \tag{1}$$

В самом деле, допустив, что равенство (1) верно для $n-1$ чисел:

$$f(x_1) f(x_2) \dots f(x_{n-1}) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}),$$

получим для n чисел:

$$f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) f(x_n) = \\ = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Будучи верным при $n = 2$, тождество (1) верно при произвольном натуральном $n \geqslant 2$.

Положив в тождестве (1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, получим:

$$[f(1)]^n = f(n) \quad \text{или} \quad f(n) = a^n, \quad \text{где} \quad a = f(1).$$

Положив в тождестве (1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, получим:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = f(1), \quad \text{откуда} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Так как по условию функция $f(x)$ определена при произвольных действительных значениях x, то $\sqrt[n]{a}$ должен иметь смысл (в поле действительных чисел) при произвольном натуральном n, откуда

$$f(1) = a \geqslant 0.$$

Положив в тождестве (1) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{m}$ (m — натуральное число), получим:

$$\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = \left[a^{\frac{1}{m}}\right]^n = a^{\frac{n}{m}} = f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Положив в тождестве (f) $y = 0$, получим при произвольном x:

$$f(x)\,f(0) = f(x)$$

и так как функция $f(x)$, будучи возрастающей (либо убывающей), не равна тождественно нулю, то

$$f(0) = 1 = a^0.$$

Положив в тождестве (f) $y = -x$, получим:

$$f(x)\,f(-x) = f(0) \quad \text{или} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Следовательно, при рациональном неотрицательном $x = \frac{n}{m}$:

$$f\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$$

и, значит, $a > 0$ (равенство $a = 0$ тем самым исключается).

Из изложенного вытекает, что при всех рациональных значениях x функция $f(x)$ имеет значение, равное a^x, т. е. на множестве рациональных чисел $f(x)$ является показательной функцией.

Пусть $x = \alpha$ — иррациональное число; тогда в силу предположенной монотонности будем иметь:

$$f(\alpha_n^-) < f(\alpha) < f(\alpha_n^+),$$

если $f(x)$ возрастает и

$$f(\alpha_n^-) > f(\alpha) > f(\alpha_n^+),$$

если $f(x)$ убывает, где α_n^- и α_n^+ десятичные приближенные значения α. Но так как

$$f(\alpha_n^-) = a^{\alpha_n^-} \quad \text{и} \quad f(\alpha_n^+) = a^{\alpha_n^+}$$

и единственным числом, содержащимся между $a^{\alpha_n^-}$ и $a^{\alpha_n^+}$ (при всех значениях n) является a^α, то $f(\alpha) = a^\alpha$.

Итак, $f(x) = a^x$ при произвольном действительном значении x, ч. т. д.

Примечание. Обычно в курсах математического анализа в совокупность характеристических свойств показательной функции вместо свойства 2° монотонности включают свойство непрерывности:

2′ функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(-\infty, \infty)$ и не равна тождественно нулю.*

Доказательство остается в силе, но со следующим изменением.

Изложенными в тексте рассуждениями устанавливается, что $f(r) = a^r$, где $a = f(1)$ и r — рациональное число. Далее рассуждают так: пусть α — иррациональное число, тогда в силу предположенной непрерывности функции $f(x)$, имеем: $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Предел $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ можно вычислить, рассматривая функцию $f(x)$ на множестве рациональных чисел, тогда получим: $\lim\limits_{r \to \alpha} f(r) = \lim\limits_{r \to \alpha} a^r = a^\alpha$ (по определению степени с иррациональным показателем).

Следовательно, $f(\alpha) = a^\alpha$.

Характеристические свойства логарифмической функции

Теорема. *Если функция $f(x)$ обладает содержащими свойствами:*

1°. *областью определения функции $f(x)$ является множество всех положительных чисел;*

2°. *функция $f(x)$ монотонна;*

3°. *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{f}$$

то $f(x)$ есть логарифмическая функция.

Доказательство. Положим в тождестве (f) $y = 1$:

$$f(x) = f(x) + f(1),$$

откуда $f(1) = 0$.

Из тождества (1) следует (применить метод индукции):

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n);$$

положив $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, получим:

$$f(x^n) = nf(x).$$

---

* Предложение заменить условие непрерывности более близким элементарной математике условием монотонности принадлежит редактору книги П. С. Моденову.

Заменив в последнем равенстве x на $\sqrt{x}$, получим:

$$f(x) = nf(\sqrt[n]{x}), \quad \text{откуда} \quad f(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} f(x).$$

Пусть $r = \frac{p}{q}$ — положительное рациональное число, имеем:

$$f(x^{\frac{p}{q}}) = f(\sqrt[q]{x^p}) = \frac{1}{q} f(x^p) = \frac{p}{q} f(x).$$

Положим в тождестве (f) $y = \frac{1}{x}$:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0,$$

откуда

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \text{или} \quad f(x^{-1}) = (-1)f(x).$$

Пусть r — положительное рациональное число, имеем:

$$f(x^{-r}) = f((x^r)^{-1}) = -f(x^r) = -rf(x).$$

Из изложенного следует, что при произвольном рациональном r

$$f(x^r) = rf(x).$$

Пусть α — иррациональное число, а α_n^- и α_n^+ — его десятичные приближенные значения по недостатку и по избытку. Пусть $x > 0$ произвольное данное число, тогда число x^α заключено между значениями $x^{\alpha_n^-}$ и $x^{\alpha_n^+}$:

$$x^{\alpha_n^-} < x^\alpha < x^{\alpha_n^+}, \quad \text{если} \quad x > 1,$$

$$x^{\alpha_n^-} > x^\alpha > x^{\alpha_n^+}, \quad \text{если} \quad x < 1,$$

$$x^{\alpha_n^-} = x^\alpha = x^{\alpha_n^+}, \quad \text{если} \quad x = 1.$$

В силу монотонности функции $f(x)$, значение $f(x^\alpha)$ заключено между числами $f(x^{\alpha_n^-})$ и $(x^{\alpha_n^+})$, т. е. между числами $\alpha_n^- f(x)$ и $\alpha_n^+ f(x)$. Но единственное действительное число, заключенное (при всех натуральных n) между этими последними числами есть $\alpha f(x)$.

Следовательно,

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x) \tag{1}$$

при произвольном действительном α.

Функция $f(x)$, будучи возрастающей (или убывающей), не равна тождественно нулю, поэтому существует такое значение аргумента $x=c$, что $f(c)\neq 0$. Положив в равенстве (1) $x=c$ и $\alpha=\frac{1}{f(c)}$, получим:

$$f\left(c^{\frac{1}{f(c)}}\right)=1.$$

Обозначим $c^{\frac{1}{f(c)}}=a$, тогда имеем:

$$f(a)=1 \quad \text{и} \quad f(a^y)=yf(a)=y,$$

где y — произвольное действительное число. Положив $x=a^y$ или $y=\log_a x$, получим:

$$f(x)=\log_a x,$$

следовательно, $y=\log_a x$ есть единственная моногонная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, ч. т. д.

Две монотонные функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (f), могут отличаться значением основания логарифмов a.

ГЛАВА VIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 111. Понятие последовательности

Пусть $\mathfrak{M}$ — данное (конечное или бесконечное) множество элементов

$$a,\ b,\ c,\ \ldots$$

Если каждому числу натурального ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

поставлен в соответствие некоторый элемент из множества $\mathfrak{M}$, то говорят, что задана последовательность элементов данного множества. Это соответствие есть функция, для которой значениями аргумента служат числа натурального ряда, а значениями функции — элементы данного множества.

Определение. *Функция, для которой областью определения является множество всех натуральных чисел, называется последовательностью (бесконечной).*

Знаечния этой функции называются членами последовательности.

Кратко говорят: *последовательность есть функция натурального аргумента.*

Членами последовательности могут быть какие угодно предметы: числа, линии, фигуры и т. д.

Члены последовательности принято обозначать одной буквой с индексом внизу, указывающим то натуральное число, которому данный член соответствует:

$$f(1) = u_1,\quad f(2) = u_2,\quad f(3) = u_3,\ \ldots,\quad f(n) = u_n,\ \ldots$$

Члены последовательности принято называть так: u_1 — первый член, u_2 — второй член, u_n — n-й член и т. д. Число n называется номером члена u_n в данной последовательности. Член u_{n-1} называется непосредственно предшествующим члену u_n, а член u_{n+1} непосредственно следующим за u_n. Символы, обозначающие члены последовательности, обычно пишут, располагая их в том порядке, как расположены числа натурального ряда: на первом месте пишут u_1, на втором пишут u_2 и т. д.:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Для обозначения последовательности пишут $\{u_n\}$.

Различным значениям аргумента может соответствовать одно и то же значение функции, в частности, в последовательность один и тот же элемент множества $\mathfrak{M}$ может входить под различными номерами. Иными словами, на различных «местах» в последовательности может находиться один и тот же элемент.

Иногда нумерация членов последовательности начинается не с 1, а с какого-нибудь другого числа. Так, нередко нумеруют члены последовательности, начиная с нуля:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Однако это не имеет существенного значения. В самом деле, номера членов:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

в свою очередь образуют последовательность и соответствие между числами натурального ряда и членами данной последовательности задается не непосредственно, а при помощи последовательности номеров:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} & \ldots
\end{array}$$

Кроме обычных последовательностей, рассматриваются двусторонние и конечные последовательности.

Определения. 1°. *Функция, для которой областью определения является множество всех целых чисел, называется двусторонней последовательностью.*

2°. *Функция, для которой областью определения является множество n первых натуральных чисел, называется конечной последовательностью.*

Двусторонняя и конечная последовательности обычно записываются следующим образом:

$$\ldots,\ u_{-n},\ \ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

и

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n.$$

Понятие последовательности имеет широкое применение в элементарной математике.

Примеры

1. В результате извлечения квадратного корня из числа 2 получается последовательность рациональных приближенных значений по недостатку числа $\sqrt{2}$:

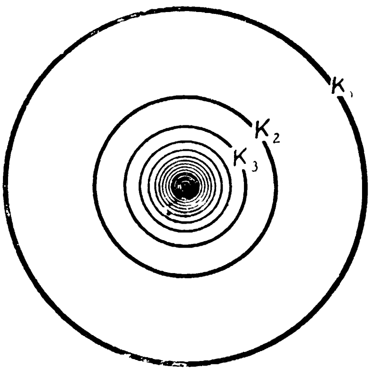
$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ \ldots$$

В этом примере члены последовательности суть числа. Множество $\mathfrak{M}$, которому принадлежат члены последовательности, есть множество рациональных чисел.

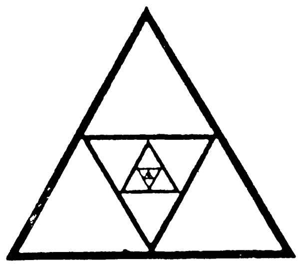
2. Десятичные знаки числа π:

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ \ldots$$

образуют последовательность, членами которой являются цифры 0, 1, 2, 3,..., 9. Множество $\mathfrak{M}$ этих цифр конечное. Так как дробь, изображающая π, бесконечная непериодическая, то по меньшей мере два знака должны повторяться бесконечное число раз.



Черт. 170



Черт. 171

3. При определении длины окружности в элементарной геометрии поступают следующим образом: берется какой-либо правильный вписанный многоугольник. Путем последовательного удвоения числа сторон получается последовательность правильных многоугольников, вписанных в данный круг. Здесь членами последовательности являются многоугольники. Периметры этих многоугольников образуют числовую последовательность, предел которой (по определению) есть длина окружности.

4. На чертеже 170, изображены концентрические окружности K_1, K_2, K_3,..., K_n, ..., радиусы которых равны $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ и т. д. единицы длины. В данном примере членами последовательности являются окружности.

5. На чертеже 171 изображена последовательность правильных треугольников, в этой последовательности вершины всякого последующего треугольника расположены в срединах сторон предыдущего треугольника.

6. Пусть, например,

$$\alpha = 1{,}13527\ \ldots$$

некоторое иррациональное число. Построим на числовой оси точки, изображающие приближенные значения α по недостатку и по избытку:

$$\alpha_0^- = 1; \quad \alpha_1^- = 1{,}1; \quad \alpha_2^- = 1{,}13; \quad \alpha_3^- = 1{,}135; \ \ldots$$

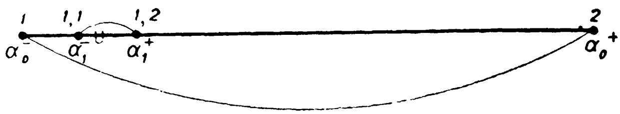
$$\alpha_0^+ = 2; \quad \alpha_1^+ = 1{,}2; \quad \alpha_2^+ = 1{,}14; \quad \alpha_3^+ = 1{,}136; \ \ldots$$

На числовой прямой получатся две последовательности точек, изображающих числа α_n^- и α_n^+. Отрезки с концами в точках α_n^- и α_n^+ образуют последовательность отрезков (черт. 172). Общей точкой всех этих отрезков является точка, изображающая число α.

7. Формула $u_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ определяет двустороннюю последовательность:

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}, \ \ldots$$

значений аргументов функции $\sin x$, при которых $|\sin x| = 1$.



Черт. 172

112. Числовые последовательности

Определение. *Последовательность $\{u_n\}$ называется числовой, если ее членами являются числа.*

Последовательность может быть задана разнообразными способами. Одним из возможных способов задания последовательности является задание ее посредством формулы. При этом способе член u_n задается посредством некоторого аналитического выражения:

$$u_n = f(n) \tag{u}$$

от натурального аргумента n. Элементарная математика преимущественно ограничивается случаем, когда $f(x)$ есть элементарная функция, для которой множество всех натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ принадлежат области ее определения; в этом случае значения $f(x)$ при $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ образуют последовательность

$$f(1), \ f(2), \ \ldots, \ f(n), \ \ldots$$

Формула (u) называется формулой общего члена последовательности.

Не всегда последовательность задается формулой. Так, например, последовательность десятичных приближенных значений $\sqrt{2}$ по недостатку задается не формулой, а описанием процесса, позволяющего для всякого заданного натурального n

найти приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Другим примером является последовательность простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots, p_n,\ \ldots \qquad \{p_n\}$$

Никакие формулы (содержащие лишь элементарные операции) для общего члена последовательности простых чисел неизвестны. Однако при помощи вполне определенного процесса (известное из арифметики «Эратосфеново решето») можно вычислить простое число, находящееся на любом данном месте в последовательности $\{p_n\}$.

Заданием конечного множества первых членов последовательность не определяется однозначно. В самом деле, если известны численные значения лишь k первых членов $u_1, u_2, \ldots, u_k$, то прочие члены $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots$ можно выбирать как угодно и получить сколько угодно различных последовательностей.

Пусть, например, даны 4 члена

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Положив при $k > 4$, $u_k = 0$, получим последовательность

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots;$$

положив $u_k = 1$, получим:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots;$$

положив $u_k = (-1)^k$, получим

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

По данным k первым членам можно построить различные формулы $u_n = f(n)$, так что при $n = 1, 2, \ldots, k$ получаются (соответственно) числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$.

Так, в рассмотренном выше примере, положив $u_n = n$ либо

$$u_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

получим две различные последовательности, первые четыре члена которых одинаковы: 1, 2, 3, 4, а прочие члены различны.

В упражнениях, в которых по нескольким данным первым членам предлагается составить формулы общего члена последовательности, требуется подобрать по возможности простую, но отнюдь не единственно возможную формулу для общего члена.

Примеры

1. Формулой $u_n = n^2$ определяется последовательность

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

Формулой $u_n = (-1)^{n-1}$ определяется последовательность

$$1,\ -1,\ 1,\ \ldots, (-1)^{n-1},\ \ldots$$

Формулой $u = n\frac{1-(-1)^n}{2}$ определяется последовательность

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{1-(-1)^n}{2},\ \ldots$$

2. Последовательности

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\},\quad \left\{\frac{1}{n!}\right\},\quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

в развернутом виде можно записать (соответственно) следующим образом:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,$$

$$1,\ \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

3. В каждом из нижеследующих примеров дано конечное множество членов последовательности, по которым составляется одна из возможных формул для общего члена:

$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots$; можно положить $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$;

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$; можно положить $u_n = 2n-1$;

$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \ldots$; можно положить $u_n = 2^n - 1$;

$1,\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{4},\ \ldots$; можно положить

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2n-2)}\cdot\frac{1}{n}\quad (\text{при } n > 1).$$

Одним из способов задания последовательности является ее задание посредством рекуррентных соотношений. Формула

$$u_n = f(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1}),$$

выражающая u_n через члены последовательности с меньшим номером, называется рекуррентной формулой. Нередко рекуррентное соотношение задается посредством уравнения

$$F(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = 0.$$

Ниже указан один весьма распространенный частный случай задания последовательности при помощи рекуррентных соотношений.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ некоторое аналитическое выражение от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Рассмотрим произвольную (допустимую) систему значений аргументов

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_k = a_k.$$

Последовательность $\{u_n\}$, определяемая системой уравнений

$$\begin{gathered} u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \ldots, \quad u_k = a_k, \\ u_{k+1} = F(u_1, u_2, \ldots, u_k), \\ u_{k+2} = F(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k+n} = F(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

называется последовательностью, заданной посредством рекуррентной формулы

$$u_{n+k} = F(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}). \tag{F}$$

Формула (F) определяет конкретную числовую последовательность, если задана «начальная» система значений

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,$$

k ее первых членов. Начальная система может быть задана произвольно из множества всех допустимых систем значений аргументов функции F.

Нередко задание последовательности при помощи рекуррентных соотношений позволяет найти формулу для общего члена.

Примеры

1. Последовательность определяется рекуррентной формулой

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

и начальными значениями: $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$.

Составить формулу для общего члена.

Решение. Для последовательного вычисления членов имеем формулу

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Из этой формулы следует, что все члены с нечетным индексом равны нулю. В самом деле, если $a_{2k-1}=0$, то и

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)\cdot 2k} a_{2k-1} = 0,$$

но так как $a_1 = 0$, то (в силу принципа индукции)

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2k+1} = 0.$$

Для вычисления a_{2k} имеем рекуррентную формулу

$$a_{2k+2} = \frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)} a_{2k}.$$

Следовательно,

$$a_4 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}, \quad a_6 = \frac{2 \cdot 2^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3}.$$

Докажем, что

$$a_{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ \ldots (2k-2)}{3 \cdot 5 \ \ldots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k}.$$

В самом деле, допустим, что формула верна для a_{2k}, тогда для a_{2k+2} получим:

$$a_{2k+2} = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1)(2k+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ \ldots (2k-2)}{3 \cdot 5 \ \ldots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ \ldots (2k-2)(2k)}{3 \cdot 5 \ \ldots (2k+1)(2k+1)} \cdot \frac{1}{k+1},$$

будучи верной для a_4, формула верна для произвольного a_{2k} при $k \geqslant 2$.

2. Дано рекуррентное соотношение

$$u_n = (\alpha + \beta) u_{n-1} - \alpha \beta u_{n-2}.$$

Найти формулу для u_n, **если**

$$u_1 = \alpha + \beta, \quad u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}.$$

Решение. Имеем:

$$u_3 = (\alpha + \beta) u_2 - \alpha \beta u_1 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^3 - \beta^3)}{\alpha - \beta} - \alpha \beta (\alpha + \beta) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}.$$

Предположим, что при некотором значении индекса n, а также при всех меньших его значениях имеет место формула

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Докажем, что в этом предположении формула верна для u_{n+1}.

В самом деле:

$$u_{n+2} = (\alpha + \beta) u_n - \alpha \beta u_{n-1} = (\alpha + \beta) \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \alpha \beta \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha \beta (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}.$$

Будучи верной при $n=1, 2, 3$, формула (в силу принципа полной индукции) верна при произвольном n.

3. Найти общий член последовательности $\{a_n\}$, определенной следующими рекуррентными соотношениями

$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 = 4a_2,$$

$$a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 = 8a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_k a_{n-k} + \ldots + a_n a_0 = 2^n a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Решение. Положив во второй и третьей строках $a_0 = a_1 = 1$, найдем:

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

Предположим, что при всех значениях k, меньших n, имеем $a_k = \frac{1}{k!}$; докажем, что в этом предположении $a_n = \frac{1}{n!}$ В самом деле:

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_k a_{n-k} + \ldots + a_n a_0 =$$
$$= a_n + \frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} + $$
$$+ a_n = 2^n a_n.$$

Так как

$$\frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} =$$
$$= \frac{1}{n!} (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n) - \frac{2}{n!} = \frac{2^n - 2}{n!}$$

(см. ниже § 124), то уравнение для определения a_n примет вид:

$$\frac{2^n - 2}{n!} + 2a_n = a_n 2^n, \text{ откуда } a_n = \frac{1}{n!}.$$

4. Числа Фобоначчи определяются посредством следующего рекуррентного соотношения:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

и начальных условий $u_0 = 1$, $u_1 = 1$. Производя вычисление по данной рекуррентной формуле, получим последовательно:

$$u_2 = 2, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 5, \quad u_5 = 8, \quad u_6 = 13 \text{ и т. д.}$$

Докажем, что общий член последовательности чисел Фибоначчи выражается формулой:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

В самом деле, положим:

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Докажем, что $u_n = v_n$. Достаточно доказать, что последовательность $\{v_n\}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению и тем же начальным условиям, что и $\{u_n\}$. В самом деле, положив $n=0$ и $n=1$, получим:

$$v_0 = v_1 = 1.$$

Составим сумму

$$v_n + v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

Имеем:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}$$

и аналогично

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}$$

и, следовательно,

$$v_n+v_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right]=v_{n+2}$$

Таким образом, при всех значениях n имеем $u_n=v_n$.

§ 113. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Определение. *Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная при помощи рекуррентной формулы:*

$$u_n=u_{n-1}+d. \qquad \{u_n\}$$

Иными словами, *арифметическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, сложенному с данным числом* d. *Число* d *называется* разностью прогрессии.

Теорема. *Общий член арифметической прогрессии выражается формулой:*

$$u_n=u_1+d(n-1).$$

Доказательство. Предположим, что формула верна для некоторого n; тогда

$$u_{n+1}=u_n+d=u_1+d(n-1)+d=u_1+nd.$$

Итак, будучи верной для n, формула верна для $n+1$; формула верна при $n=1$, следовательно, она верна и при произвольном натуральном n, ч. т. д.

Если в прогрессии счет членов вести с нуля:

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n,$$

то формула $\{u_n\}$ примет вид:

$$u_n=u_0+nd, \qquad \{u_n\}'$$

так как теперь u_n означает $n+1$-й по счету член.

Формула $\{u_n\}$ показывает, что арифметическая прогрессия есть последовательность значений линейной функции

$$f(x) = u_0 + dx,$$

соответствующая последовательности значений аргумента

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Если в формуле $\{u_n\}$ допустимыми значениями для n являются произвольные целые значения, то получится двусторонняя последовательность

$$\ldots,\ u_0 - nd,\ \ldots,\ u_0 - d,\ u_0,\ u_0 + d,\ \ldots,\ u_0 + nd,\ \ldots,$$

называемая двусторонней арифметической прогрессией.

Если множеством допустимых значений n является конечное множество последовательных чисел:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то соответствующая конечная последовательность

$$u_0,\ u_0 + d,\ u_0 + 2d,\ \ldots,\ u_0 + nd$$

называется конечной арифметической прогрессией.

Теорема. *При любом натуральном имеет место формула:*

$$u_p + u_q = u_{p+k} + u_{q-k}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как

$$u_{p+k} = u_0 + (p + k)\,d$$

и

$$u_{q-k} = u_0 + (q - k)\,d,$$

то

$$u_{p+k} + u_{q-k} = u_0 + pd + u_0 + qd = u_p + u_q, \quad \text{ч. т. д.}$$

Следствие. В конечной арифметической прогрессии

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n.$$

Достаточно положить $p=0$ и $q=n$.

Теорема. *Характеристическим свойством арифметической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}. \tag{2}$$

Следовательно: *всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.*

Доказательство. Для всякой арифметической прогрессии имеет место равенство (2), достаточно положить в тождестве (1) $p = q = n$ и $k = 1$. Обратно, всякая последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющая условию (2), есть арифметическая прогрессия. В самом деле, равенство (2) есть лишь иная запись рекуррентной формулы:

$$u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n.$$

Последнее равенство показывает, что разность между предыдущим и последующим членами последовательности есть одно и то же число:

$$d = u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \ldots = u_{n+1} - u_n = \ldots,$$

т. е., что данная последовательность есть арифметическая прогрессия со знаменателем d, ч. т. д.

Заданием двух начальных значений u_0 и u_1 определяются первый член прогрессии u_0 и ее разность $d = u_1 - u_0$.

Геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная при помощи рекуррентной формулы*

$$v_n = v_{n-1}q, \text{ где } q \neq 0.$$

Иными словами, *геометрическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, умноженному на данное отличное от нуля число* q.

Число q называется знаменателем прогрессии.

Теорема. *Общий член геометрической прогрессии выражается формулой:*

$$v_n = v_1 q^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна; предположив ее верной для v_n, получим для v_{n+1}:

$$v_{n+1} = v_n q = v_1 q^n.$$

В силу принципа математической индукции формула верна при произвольном n, ч. т. д.

Если в прогрессии вести счет членов от нуля: $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, то формула общего члена примет вид:

$$v_n = v_0 q^n.$$

Если в формуле $v_n = v_0 q^n$ считать для n допустимыми произвольные целые значения, то получится двусторонняя геометрическая прогрессия:

$$\ldots, \frac{v_0}{q^n}, \ldots, \frac{v_0}{q^2}, \frac{v_0}{q}, v_0, v_0 q, v_0 q^2, \ldots, v_0 q^n, \ldots$$

Если множество допустимых значений n есть конечное множество чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то получится конечная последовательность:

$$v_0,\ v_0q,\ v_0q^2,\ \ldots,\ v_0q^n,$$

называемая конечной геометрической прогрессией.

Если знаменатель q геометрической прогрессии положителен, то прогрессия является знакопостоянной последовательностью, все ее члены имеют один и тот же знак: они положительны при $v_0 > 0$ и отрицательны при $v_0 < 0$. Если знаменатель q отрицателен, то прогрессия является знакочередующейся последовательностью, в ней всякие два соседние члена противоположны по знаку. Знакопостоянная прогрессия есть последовательность значений функции v_0q^x, соответствующая последовательности значений аргумента: $x = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Для всякой геометрической прогрессии при произвольном целом k имеет место равенство:

$$v_p v_q = v_{p+k} v_{q-k}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства арифметической прогрессии.

В конечной геометрической прогрессии произведение двух членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов.

Теорема. *Характеристическим свойством знакоположительной геометрической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$v_n = \sqrt{v_{n-1} v_{n+1}}\ .$$

Следовательно, *всякий член знакоположительной геометрической прогрессии есть среднее геометрическое предыдущего и последующего членов.*

Доказательство. Для всякой знакоположительной геометрической прогрессии имеем:

$$\sqrt{v_{n-1} v_{n+1}} = \sqrt{v_0^2 q^{n-1} q^{n+1}} = v_0 q^n = v_n\ .$$

Обратно, если знакоположительная последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет условию

$$\sqrt{v_{n-1} v_{n+1}} = v_n \quad \text{или} \quad \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

то отношение всякого последующего члена к предыдущему есть одно и то же число:

$$q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \ \ldots = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ \ldots$$

Следовательно, $\{u_n\}$ есть геометрическая прогрессия.

§ 114. Суммирование конечных рядов

Всякой числовой последовательности

$$u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n, \; \ldots \qquad \{u_n\}$$

можно поставить в соответствие последовательность:

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; \ldots, \; s_n = u_1 + u_2 + \; \ldots + u_n, \ldots, \; \{s_n\}$$

n-й член s_n которой равен сумме n первых членов данной последовательности $\{u_n\}$.

Нахождение общего члена последовательности $\{s_n\}$

$$s_n = u_1 + u_2 + \; \ldots + u_n$$

называется суммированием «конечного ряда»:

$$u_1 + u_2 + \; \ldots + u_n.$$

Если члены последовательности $\{u_n\}$ заданы формулой, содержащей лишь элементарные операции (над натуральным аргументом), то общий член последовательности $\{s_n\}$ может не выражаться посредством формулы, содержащей элементарные операции. Суммирование конечных рядов элементарными средствами удается выполнить в сравнительно редких случаях, это суммирование даже для несложных последовательностей обычно сопряжено со значительными трудностями.

Если известна функция $f(x)$ такая, что

$$f(n) - f(n-1) = u_n,$$

то вычисление суммы s_n выполняется непосредственно:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \ldots +$$
$$+ [f(n) - f(n-1)] = f(n) - f(0).$$

Суммирование арифметической прогрессии

Суммирование арифметической прогрессии проще всего выполняется на основании известного ее свойства: *сумма членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.* Имеем:

$$s_n = u_1 + u_2 + \; \ldots + u_k + \; \ldots + u_n,$$
$$s_n = u_n + u_{n-1} + \; \ldots + u_{n-k+1} + \; \ldots + u_1,$$

откуда

$$2s_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \; \ldots +$$
$$+ (u_k + u_{n-k+1}) + \; \ldots + (u_n + u_1) = (u_1 + u_n)$$

и, следовательно:

$$s_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}, \text{ или, подставив } u_n = u_1 - d(n-1),$$

получим:

$$s_n = \frac{n[2u_1 + d(n-1)]}{2}.$$

Положив $u_1 = 1$, $d = 1$, получим, в частности, формулу для суммы n первых членов натурального ряда:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Суммирование геометрической прогрессии

Суммирование геометрической прогрессии выполняется непосредственно на основании формулы сокращенного умножения:

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = x^n - 1.$$

Имеем:

$$s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n =$$
$$= v_1 + v_1 q + v_1 q^2 + \ldots + v_1 q^{n-1} = v_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Укажем также на следующий простой (принятый в учебниках) способ суммирования геометрической прогрессии:

$$s_n = v_1 + v_1 q + \ldots + v_1 q^{n-1};$$

умножим на q:

$$q s_n = v_1 q + v_1 q^2 + \ldots + v_1 q^n.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$(q-1) s_n = v_1 (q^n - 1) \quad \text{и} \quad s_n = v_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ниже приведены примеры суммирования конечных рядов элементарными средствами.

Примеры

1. Найти сумму

$$s = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n.$$

Решение. Умножив на q, вычтем s из qs:

$$qs - s = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \ldots + nq^{n+1} - (q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n) =$$
$$= -q - q^2 - q^3 - \ldots - q^n + nq^{n+1} = -\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} + nq^{n+1},$$

откуда

$$s = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2}.$$

При $q = -1$ получим, в частности,

$$-1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^n n = \frac{n(-1)^{n+1}}{-2} - \frac{(-1)^{n+1} + 1}{4}.$$

Следовательно,

$$1 - 2 + 3 - \ldots + (-1)^{n-1} n = \frac{n(-1)^{n+1}}{2} + \frac{(-1)^{n+1} + 1}{4}.$$

2. Найти сумму

$$s = q + 4q^2 + 9q^3 + \ldots + n^2 q^n.$$

Решение. Применив тот же прием, как в предыдущем примере, получим:

$$qs - s = q^2 + 4q^3 + 9q^4 + \ldots + n^2 q^{n+1} - (q + 4q^2 + 9q^3 + \ldots + n^2 q^n) =$$
$$= -q - 3q^2 - 5q^3 - \ldots - (2n-1) q^n + n^2 q^{n+1} =$$
$$= -2 \sum_{k=1}^{n} kq^k + \sum_{k=1}^{n} q^k + n^2 q^{n+1} =$$
$$= -2 \left(\frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2} \right) + \frac{q^{n+1} - q}{q-1} + n^2 q^{n+1}.$$

Откуда

$$s = 2 \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^3} - \frac{(2n-1) q^{n+1} + q}{(q-1)^2} + \frac{n^2 q^{n+1}}{q-1}.$$

3. Вычислить сумму

$$s = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{k-1} + a_1 a_2 a_3 \ldots a_k + \ldots + a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1},$$

где $\{ a_n \}$ арифметическая прогрессия.

Решение. Положив

$$f(n) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k},$$

составим разность:

$$f(n) - f(n-1) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k} - a_{n-1} a_n \ldots a_{n+k-1} =$$
$$= a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1} (a_{n+k} - a_{n-1}) = (k+1) d a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1}.$$

Следовательно, разность $f(n) - f(n-1)$ отличается от членов рассматриваемой суммы лишь числовым множителем $(k+1)d$.

Имеем:

$$s = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} + \{[f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \ldots + [f(n) - f(n-1)]\} \frac{1}{(k+1)d}.$$

Откуда

$$s = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} + \frac{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k} - a_0 a_1 \ldots a_{k-1}}{(k+1) d}.$$

Положив в частности $a_0 = 0$, $d = 1$, $k = 2$, получим:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

При $a_0 = 0$, $d = 1$, $k = 3$ получим:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

4. Вычислить сумму

$$s = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} + \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1}},$$

где $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия.

Решение Положим:

$$f(n) = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-2}},$$

имеем:

$$f(n) - f(n+1) = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-2}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k-1}} =$$

$$= \frac{a_{n+k-1} - a_n}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1}} = \frac{(k-1\ d}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1}}.$$

Следовательно, имеем:

$$s = \frac{1}{(k-1)d}\left\{[f(1) - f(2)] + [f(2) - f(3)] + \dots + [f(n) - f(n+1)]\right\} =$$

$$= \frac{f(1) - f(n+1)}{(k-1)d}.$$

Итак,

$$s = \frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k-1}}\right).$$

Положив $a_1 = 1$, $d = 1$, $k = 2$, получим:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Примечание. Последнюю сумму s нетрудно вычислить, не прибегая к общей формуле, так как достаточно принять во внимание, что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

и преобразовать каждый член суммы:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Положив в общей формуле $a = 1$, $d = 1$ и $k = 3$, получим:

$$\frac{1}{1 \cdot 2\ \ 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

§ 115. Сходящиеся последовательности и суммирование рядов

Согласно определению, принятому в математическом анализе, *последовательность* $\{u_n\}$ *называется сходящейся, если существует конечный предел:*

$$u = \lim u_n.$$

Посредством неравенств это определение записывается так: *при любом заданном (как угодно малом)* $\varepsilon > 0$ *существует число* N *такое, что неравенство*

$$|u_n - u| < \varepsilon \tag{1}$$

выполняется при всех значениях $n > N$.

Число N для данной сходящейся последовательности определяется заданием ε. Говорят, что *неравенство* (1) *выполняется при всех достаточно больших значениях* n.

Последовательность $\{u_n\}$ называется расходящейся к $+\infty$, (или к $-\infty$), если

$$\lim u_n = +\infty \quad (\text{или} \quad \lim u_n = -\infty).$$

Посредством неравенств это определение записывается так: *при любом заданном* $M > 0$ *(как угодно большом) существует число* N *такое, что неравенство*

$$u_n > M \quad (\text{или} \quad u_n < -M)$$

выполняется при всех значениях $n > N$. Число N для данной последовательности определяется заданием M.

Последовательность $\{u_n\}$ *называется колеблющейся, если она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.* Колеблющаяся последовательность считается расходящейся. Примерами колеблющихся последовательностей могут служить

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 9, \quad \ldots, \quad 1, \ 0, \quad \ldots,$$
$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad \ldots, \quad (1-1)^{n-1}n, \quad \ldots,$$
$$1, \quad -10, \quad 100, \quad -1000, \quad \ldots, \quad (-10)^n, \quad \ldots,$$
$$1, \quad 2, \ 3, \ 1, \ 2, \ 3, \quad \ldots, \quad 1, \ 2, \ 3, \quad \ldots$$

и т. п.

Общие признаки существования предела последовательности устанавливаются в математическом анализе. Из этих общих признаков значительное применение в элементарной математике (в частности, в геометрии) имеет следующий признак.

Всякая монотонная (невозрастающая или неубывающая) ограниченная последовательность имеет предел (конечный).

Доказательство этого признака дается в курсах математического анализа.

В курсе математического анализа излагаются приемы нахождения пределов функций (и в частности последовательностей) на основании общих теорем о пределах. Ниже, не имея в виду повторять материал курса математического анализа, мы ограничимся рассмотрением ряда конкретных примеров на нахождение пределов последовательностей элементарными средствами путем непосредственного решения (неполного) соответствующих неравенств*.

Примеры

1. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ сходится, и найти ее предел.

Решение. Имеем:

$$\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Последовательность сходится к 1, так как $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$.

Неравенство

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

выполняется при всех значениях n, удовлетворяющих условию $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. при $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

2. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ сходится к нулю.

Решение. Требуется доказать, что при всех достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\frac{n}{n^2+1}<\varepsilon$ (знак абсолютной величины излишен, так как члены последовательности положительны). В самом деле, имеем:

$$\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

Если $\frac{1}{n}<\varepsilon$, т. е. $n>\frac{1}{\varepsilon}$, то доказываемое неравенство выполняется и подавно.

3. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right\}$ сходится, и найти ее предел.

Решение. Выделив целую часть, получим:

$$\frac{2n^2+1}{3n^2-2}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3(3n^2-2)}.$$

Последовательность сходится к $\frac{2}{3}$ Составим разность

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2-2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2-2)}$$

---

* Эти примеры имеют, главным образом, педагогическое значение.

(знак абсолютной величины излишен, так как правая часть последнего равенства положительна). Имеем:

$$\frac{7}{3(3n^2-2)} < \frac{3}{3n^2-2} \quad \left(\text{так как } \frac{7}{3} < 3\right).$$

Неравенство $\frac{3}{3n^2-2} < \varepsilon$ выполняется, если $3n^2 > \frac{3}{\varepsilon} + 2$, откуда $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{3}}$. При этих значениях n неравенство

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2-2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

выполняется и подавно и, следовательно,

$$\lim \frac{2n^2+1}{3n^2-2} = \frac{2}{3}.$$

4. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$ расходится к $+\infty$.

Решение. Имеем:

$$\frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2-1}{n+1} = n-1.$$

Если $n-1 > M$, т. е., если $n > M+1$, то и подавно $\frac{n^2+1}{n+1} > M$. Следовательно,

$$\lim \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty.$$

5. Известно, что $\lim (1,1)^n = +\infty$. Указать значения n, при которых наверное будет выполняться неравенство

$$(1,1)^n > 1000.$$

Решение. Применив неравенство Бернулли

$$(1+h)^n > 1+nh, \quad \text{получим} \quad (1+0,1)^n > 1 + \frac{n}{10}.$$

Если $1 + \frac{n}{10} > 1000$, т. е. $n > 9990$, то имеем и подавно $(1,1)^n > 1000$.

6. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ при любом $a > 0$ сходится к нулю.

Решение. Пусть k любое натуральное число большее, чем $2a$; при $n > k$ получим:

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1} \, \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n}\right) < \frac{a^k}{k!} \, \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{(2a)^k}{k!} \, \frac{1}{2^n}.$$

Неравенство

$$\frac{(2a)^k}{k!} \, \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

выполняется, если $2^n > \frac{(2a)^k}{\varepsilon \cdot k!}$.

Так как $2^n = (1+1)^n > 1+n$, то последнее неравенство имеет место и подавно, если

$$1+n > \frac{(2a)^k}{\varepsilon \cdot k!}, \quad \text{откуда} \quad n > \frac{(2a)^k}{\varepsilon \cdot k!} - 1.$$

При этих значениях n неравенство $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ наверное будет иметь место.

7. Найти предел последовательности

$$s_1 = \sqrt{a}, \quad s_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad s_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots,$$
$$s_n = \sqrt{a+s_{n-1}} \ldots,$$

где $a > 0$.

Решение. Данная последовательность возрастает:

$$s_1 < s_2 < s_3 \ldots < s_n < \ldots$$

Для доказательства сходимости последовательности $\{s_n\}$ достаточно установить ее ограниченность. Из рекуррентного соотношения

$$s_n = \sqrt{a+s_{n-1}} \quad \text{получим:} \quad s_n^2 = a + s_{n-1}, \tag{1}$$

откуда

$$s_n = \frac{a}{s_n} + \frac{s_{n-1}}{s_n} < \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1, \quad \text{так как } s_n > s_1 = \sqrt{a}$$

и $s_{n-1} < s_n$.

Итак, все члены $\{s_n\}$ меньше одного и того же числа $\sqrt{a}+1$, следовательно, $\{s_n\}$ ограничена, а потому (в силу монотонности) $\lim s_n = s$ существует. Перейдя к пределу в равенстве (1), найдем $\lim s_n^2 = a + \lim s_{n-1}$ или $s^2 = a + s$. Последнее уравнение имеет единственный положительный корень

$$s = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Суммирование бесконечных рядов

Согласно определению, принятому в математическом анализе, суммой s бесконечного ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется *предел последовательности его частных сумм*:

$$s = \lim s_n,$$

где

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; \ldots, \quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$$

Если $\lim s_n$ существует, то ряд называется сходящимся, если же этот предел не существует, то расходящимся. Расходящемуся ряду в качестве его суммы не приписывается никакого числа.

В анализе устанавливаются условия как необходимые, так и достаточные сходимости и расходимости рядов. Аппарат математического анализа позволяет во многих случаях вычислить сумму ряда. Средствами элементарной математики, путем непосредственного суммирования можно вычислить сумму ряда лишь в отдельных исключительных случаях. Мы ограничимся ниже указанием простейших случаев, в которых суммирование ряда можно выполнить элементарными средствами.

Примечание. Наивная уверенность в том, что всякий ряд имеет сумму и что с рядами всегда можно обращаться как с конечными суммами может привести к «парадоксам». Один из таких «парадоксов» приведен ниже. «Вычисляя» сумму ряда

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$$

различными «способами», получим:

1-й способ:

$$s = (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots = \\ = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0;$$

2-й способ:

$$s = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots - (1-1) - \ldots = \\ = 1 - 0 - 0 - \ldots - 0 - \ldots = 1;$$

3-й способ:

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s,$$

откуда $2s = 1$ и $s = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$s = 0 = 1 = \frac{1}{2}.$$

Несостоятельность этих рассуждений очевидна, в них даже не ставится вопроса о том, какой смысл имеет «сумма», не говоря уже о возможности применения законов действий.

Суммирование прогрессий

Ряд, члены которого образуют арифметическую прогрессию, расходится к $+\infty$, если разность прогрессии положительна, и к $-\infty$, если разность отрицательна. В самом деле, $n+1$-я частная сумма ряда

$$a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \ldots + (a_0 + nd) + \ldots$$

равна:

$$s_n = \frac{[2a_0 + nd](n+1)}{2}.$$

Если $d > 0$, то $\lim s_n = +\infty$, если же $d < 0$, то $\lim s_n = -\infty$.

Рассмотрим ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \text{ (где } a \neq 0).$$

Сам этот ряд нередко называют тем же термином «геометрическая прогрессия», как и последовательность его членов; n-я частная сумма геометрической прогрессии (при $q \neq 1$) выражается формулой

$$s_n = a\,\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

a) $|q| > 1$. В этом случае имеем:

$$\lim |q^n| = +\infty \quad \text{и} \quad |s_n| = \frac{|a|\,|q^n - 1|}{|q-1|} \geqslant \frac{|q|^n - 1}{|q-1|}\,|a|.$$

Следовательно, $\lim\ |s_n| = +\infty$.

При $a > 0$, $q > 1$ прогрессия расходится к $+\infty$, при $a < 0$, $q > 1$ — расходится к $-\infty$.

При $q < -1$ члены прогрессии и ее частные суммы образуют знакопеременные расходящиеся последовательности;

b) $|q| < 1$. В этом случае $\lim q^n = 0$. Прогрессия сходится, так как

$$\lim s^n = \frac{a}{1-q};$$

c) при $|q| = 1$ прогрессия расходится, так как, положив $q = 1$ и $q = -1$, получим расходящиеся ряды:

$$a + a + a + \ldots \qquad + a + \ldots,$$
$$a - a + a - a + \ldots + a - \ldots$$

Итак, геометрическая прогрессия является сходящейся при

$$|q| < 1$$

и расходящейся при $|q| \geqslant 1$ *.

П р е д с т а в л е н и е д е й с т в и т е л ь н о г о ч и с л а в в и д е д е с я т и ч н о й д р о б и. Всякое действительное число α может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha = p, \quad q_1 q_2 \ldots q_n \ldots \qquad (\alpha)$$

* Мы полагаем, что вместо термина «бесконечно убывающая прогрессия» (при $|q| < 1$) лучше пользоваться термином «сходящаяся прогрессия». В самом деле, при $-1 < q < 0$ члены прогрессии (а также все частные суммы) не образуют монотонной последовательности и традиционный школьный термин не согласуется с общепринятой в анализе терминологией.

Последовательность

$$\alpha_0^- = p, \quad \alpha_1^- = p + \frac{q_1}{10}, \ldots, \alpha_n^- = p + \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_n}{10^n}, \ldots$$

приближенных значений по недостатку числа α не убывает, а последовательность

$$\alpha_0^+ = p + 1, \quad \alpha_1^+ = p + \frac{q_1+1}{10}, \ \ldots, \ \alpha_n^+ = p + \frac{q_1}{10} + \ \ldots \ + \frac{q_n+1}{10^n}$$

приближенных значений числа α по избытку не возрастает. Обе последовательности $\{\alpha_n^-\}$ и $\{\alpha_n^+\}$ ограничены: при всех значениях n имеют место неравенства

$$\alpha_n^- \leqslant \alpha < \alpha_n^+.$$

Будучи монотонными и ограниченными обе рассматриваемые последовательности сходятся, число α является общим пределом последовательностей $\{\alpha_n^-\}$ и $\{\alpha_n^+\}$. В самом деле:

$$|\alpha - \alpha_n^-| < |\alpha_n^+ - \alpha_n^-| \quad \text{и} \quad |\alpha - \alpha_n^+| \leqslant |\alpha_n^+ - \alpha_n^-|.$$

Так как $\lim(\alpha_n^+ - \alpha_n^-) = \lim\frac{1}{10^n} = 0$, то неравенства

$$|\alpha - \alpha_n^-| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\alpha - \alpha_n^+| < \varepsilon$$

выполняются при всех значениях n, при которых $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, следовательно,

$$\lim \alpha_n^- = \lim \alpha_n^+ = \alpha.$$

Число α_n^- есть n-я частная сумма ряда

$$p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} + \ldots$$

Следовательно, этот ряд сходится к α. Из изложенного вытекает следующее представление действительного числа α в виде ряда:

$$\alpha = p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} + \ldots$$

Если, в частности, число α представлено в виде конечной десятичной дроби, то все члены ряда, начиная с некоторого номера, равны нулю и ряд обращается в сумму конечного числа членов.

Из арифметики известно, что число α рационально в том и только в том случае, когда изображающая его десятичная дробь является периодической (в частности конечной); непериодическая десятичная дробь изображает иррациональное число. Ниже приводится обоснование правила преобразования периодической дроби в обыкновенную. Достаточно ограничиться рассмотрением случая правильной периодической дроби. Пусть

$$0,\ p_1 p_2 \ldots p_k (q_1 q_2 \ldots q_m)$$

— периодическая дробь. Рассмотрим два целые числа: число

$$p_1 10^{k-1} + p_2 10^{k-2} + \ldots + p_k = P,$$

составленное цифрами, стоящими до периода, и число

$$q_1 10^{m-1} + q_2 10^{m-2} + \ldots + q_m = Q,$$

составленное из цифр, образующих период. Число α может быть представлено в виде следующего ряда:

$$\alpha = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_k}{10^k} + \frac{q_1}{10^{k+1}} + \ldots + \frac{q_m}{10^{k+m}} - \frac{q_1}{10^{k+m+1}} + \\ + \ldots + \frac{q_m}{10^{k+2m}} + \ldots$$

Для суммирования этого ряда сгруппируем его члены следующим образом*:

$$\alpha = \left(\frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_k}{10^k}\right) + \left(\frac{q_1}{10^{k+1}} + \ldots + \frac{q_m}{10^{k+m}}\right) + \\ + \left(\frac{q_1}{10^{k+m+1}} + \ldots + \frac{q_m}{10^{k+2m}}\right) + \ldots = \frac{P}{10^k} + \left(\frac{Q}{10^{k+m}} + \frac{Q}{10^{k+2m}} + \ldots\right)$$

В полученном выражении слагаемое, заключенное в скобки, есть сходящаяся геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{10^m}$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{P}{10^k} + \frac{Q}{10^{k+m}\left(1 - \frac{1}{10^m}\right)} = \frac{P}{10^k} + \frac{Q}{10^k\,(10^m - 1)}$$

и окончательно

$$\alpha = \frac{P \cdot 10^m + Q - P}{(10^m - 1)\, 10^k} = \frac{(p_1 10^{k+m-1} + \ldots + p_k 10^m + q_1 10^{m-1} + \ldots + q_m) - P}{\underbrace{999 \ldots 9}_{m \text{ раз}}\underbrace{000 \ldots 0}_{k \text{ раз}}}.$$

Словесная формулировка полученного результата известна из арифметики: *числитель есть число, составленное цифрами, стоящими от запятой до второго периода без числа, составленного цифрами, стоящими до периода, знаменатель есть число, в изображении которого цифра* 9 *повторяется столько раз, сколько*

* Из анализа известно, что сумма сходящегося ряда с положительными членами не изменяется при произвольной группировке его членов.

цифр в периоде, а затем 0 *повторяется столько раз, сколько цифр от запятой до периода.*

Ниже приводятся частные примеры суммирования рядов элементарными средствами.

Примеры

1. Доказать, что при $|q|<1$ ряд $q+2q^2+\ldots+nq^n+\ldots$ сходится и вычислить его сумму.

Решение. Составим n-ю частную сумму данного ряда (см. пример 1, стр. 514)

$$s_n=\frac{nq^{n+1}}{q-1}-\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}.$$

Так как при $|q|<1$

$$\lim(nq^{n+1})=0 \quad (\text{см. § } 108) \quad \text{и} \quad \lim q^{n+1}=0,$$

то имеем:

$$s=\lim s_n=\frac{q}{(q-1)^2}.$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Решение. Имеем (см. стр. 516):

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$s=\lim s_n=1$$

3. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}+\frac{1}{2\cdot 3\ldots(k+1)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}+\ldots$$

Решение. Имеем (см. стр. 516, пример 4, положить в общей формуле $a_1=1$, $d=1$):

$$s_n=\frac{1}{(k-1)}\left[\frac{1}{1\cdot 2\ldots(k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}\right].$$

Откуда

$$s=\lim s_n=\frac{1}{(k-1)(k-1)!}.$$

В частности, при $k=2$ получим ряд, рассмотренный в предыдущем примере.

4. Вычислить сумму ряда

$$q+4q^2+9q^3+\ldots+n^2q^n+\ldots,$$

где $|q|<1$.

Решение. Воспользуемся формулой, выведенной в примере 2 на стр. 515:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} i^2q^i=2\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^3}+\frac{(2n-1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2}+\frac{n^2q^{n+1}}{q-1}.$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} nq^{n+1} = \lim n^2 q^{n+1} = 0$.

Следовательно,

$$s = \lim s_n = \frac{2q}{(1-q)^3} - \frac{q}{(1-q)^2},$$

поэтому при $|q| < 1$ ряд сходится и его сумма равна:

$$s = \frac{2q}{(1-q)^3}.$$

ГЛАВА IX

КОМБИНАТОРИКА

§ 116. Сочетания

Пусть $\mathfrak{M}$ некоторое конечное множество, состоящее из n элементов:

$$\{a, b, \ldots, c\}.$$

Определение. *Сочетанием из n элементов, взятых по k, называется всякая часть, содержащая k элементов данного множества $\mathfrak{M}$, состоящего из n элементов.*

Два различные сочетания из данных n элементов, взятых по k, отличаются составом входящих в них элементов: именно, *если два сочетания различны, то в одном из них содержится хотя бы один элемент, не содержащийся в другом.*

Пример

Ниже выписаны всевозможные сочетания, составленные из 5 элементов 1, 2, 3, 4, по 3:

$$\begin{gathered}123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135,\ 145\\ 234,\ 235,\ 245\\ 345\end{gathered}$$

Так как в дальнейших рассуждениях *индивидуальные свойства элементов данного множества не существенны,* то возможно в качестве множества $\mathfrak{M}$ выбрать какое-либо определенное конечное множество, состоящее из n элементов. В качестве такого множества достаточно взять n первых чисел натурального ряда:

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Это множество натуральных чисел будет служить представителем класса конечных множеств, содержащих n элементов.

Символом C_n^k обозначается число различных сочетаний из элементов, взятых по k.

Так, например, C_n^1 есть число частей множества n элементов 1, 2,..., n, взятых по одному, эти части суть сами элементы 1, 2, 3, ..., n, количество таких частей равно n:

$$C_n^1 = n.$$

Далее, C_n^2 есть число частой рассматриваемого множества, содержащих по 2 элемента, все такие части можно вписать в следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccc}
\{1, 2\}, & \{1, 3\}, & \{1, 4\}, & \ldots, & \{1, n\}, \\
 & \{2, 3\}, & \{2, 4\}, & \ldots, & \{2, n\}, \\
 & & \{3, 4\}, & \ldots, & \{3, n\}, \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & \{n-1, n\}.
\end{array}$$

Число C_n^2 можно подсчитать непосредственно. Если каждый элемент данного множества поочередно комбинировать с каждым из прочих элементов, то получаются пары элементов, которые можно выписать в следующую таблицу:

$$\begin{array}{cccc}
\{1, 2\}, & \{1, 3\}, & \ldots, & \{1, n\}, \\
\{2, 1\}, & \{2, 3\}, & \ldots, & \{2, n\}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\{n-1, 1\}, & \{n-1, 2\}, & \ldots, & \{n-1, n\}, \\
\{n, 1\}, & \{n, 2\}, & \ldots, & \{n, n-1\}.
\end{array}$$

В этой таблице каждая пара выписана 2 раза, так, например, взяв элемент 1, присоединив к нему элемент 2, получим $\{1, 2\}$ ту же пару $\{2, 1\}$ получим, взяв элемент 2 и присоединив к нему 1. Число всех строк таблицы равно n, число столбцов $n-1$, общее число всех пар $n(n-1)$, из которых различными являются $\frac{n(n-1)}{2}$ пар, следовательно:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Всякое множество содержит две несобственные части, одной из которых является само данное множество, эта часть есть единственное сочетание из n элементов по n, поэтому

$$C_n^n = 1.$$

Другая несобственная часть есть пустое множество, не содержащее элементов, поэтому считаем:

$$C_n^0 = 1.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим общепринятым обозначением.

Если m — натуральное число, отличное от 1, то символом $m!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не бо́льших m;

$$m! = 1 \cdot 2 \ldots m.$$

Если $m = 1$, то считаем $1! = 1$.

Если $m = 0$, то считается $0! = 1$.

Для отрицательных и для дробных значений m символу $m!$ (в элементарной алгебре) не приписывается никакого смысла.

Теорема. *Число сочетаний из* $\boldsymbol{n}$ *элементов по* $\boldsymbol{k}$*, где* $0 \leqslant k \leqslant n$ *равно:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{или (при } k \neq 0) \quad C_n^k = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}.$$

Доказательство. При $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ формула справедлива, так как

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n, \quad C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Предположим, что составлены всевозможные сочетания из n элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ по $k-1$, где $k \leqslant n$. Если к каждому из этих сочетаний присоединить последовательно (по одному) каждый из $n-k+1$ элементов, в него не вошедших, то составятся всевозможные сочетания, взятые по k элементов, причем всякое из этих последних сочетаний окажется взятым k раз. В самом деле, рассмотрим произвольное сочетание, содержащее k элементов данного множества. Без ущерба для общности рассмотрим следующее сочетание:

$$\{1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k\}.$$

При описанном процессе образования сочетаний по k элементов это сочетание получится следующими k способами:

к сочетанию	$\{2,\ 3,\ \ldots,\ k-1,\ k\}$	присоединяется	$1,$
— — — — — —	$\{1,\ 3,\ \ldots,\ k-1,\ k\}$	— — — — — — — —	$2,$
— — — — — —	$\{1,\ 4,\ \ldots,\ k-1,\ k\}$	— — — — — — — —	$3,$
. . . . . .	. . . .	. . . .	.
— — — — — —	$\{1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\}$	— — — — — — — —	$k.$

Таким образом каждое из C_n^{k-1} сочетаний по $k-1$ элементов дает $n-k+1$ новых сочетаний: всего составится $(n-k+1)\,C_n^{k-1}$ сочетаний по k элементов, причем каждое из новых сочетаний войдет k раз, следовательно,

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}\,C_n^{k-1}.$$

Допустим, что формула числа сочетаний верна для сочетаний по $k-1$ элементам:

$$C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!};$$

тогда формула будет верна и для числа сочетаний по k элементам, так как

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = \frac{n!\,(n-k+1)}{(n-k+1)!\,(k-1)!\,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Будучи верной при $k = 1$ для произвольного натурального n, формула верна при любом k, где $0 \leqslant k \leqslant n$, а n произвольное натуральное число, ч. т. д.

Примеры

1. Найти число диагоналей n-угольника.

Решение. Вершины многоугольника образуют множество n точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой Соединив всевозможными способами попарно эти точки, получим:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

отрезков, из которых n отрезков являются сторонами многоугольника, а прочие

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

его диагоналями.

2. На плоскости даны n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой за исключением m точек, лежащих на одной прямой.

a) Сколькими прямыми можно соединить эти точки?

b) Сколько существует различных треугольников с вершинами в данных точках?

Решение. a) Если бы никакие три из данных точек не лежали на одной прямой, то существовало бы $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ различных прямых, соединяющих (попарно) данные точки. В этом случае m точек определяли бы $\frac{m(n-1)}{2}$ различных прямых. В силу условия задачи эти последние прямые сливаются в одну, следовательно, существует

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} + 1$$

различных прямых.

b) Рассуждениями, подобными изложенным, в предыдущем случае установим, что число различных треугольников равно $C_n^3 - C_m^3$.

3. Дано множество состоящее из n белых и m черных шаров, сколькими способами из данного множества можно выбрать p шаров, чтобы среди них, по крайней мере, два были белые.

Решение. Задача имеет решение при следующих условиях $n \geqslant 2$, $p \leqslant n + m$. При этих условиях всевозможные комбинации p шаров можно разделить на группы, по числу содержащихся в них белых шаров. Рассмотрим группу комбинаций, каждая из которых содержит k белых и $p-k$ черных шаров, где $k \leqslant n$. Так как $p-k$ черных шаров выбираются из m шаров, то должно быть $p-k \leqslant m$, откуда $k \geqslant p-m$ и, следовательно, допустимые значения для k определяются условиями $p-m \leqslant k \leqslant n$ и $2 \leqslant k \leqslant p$.

Из n белых шаров можно отобрать k шаров C_n^k различными способами. К отобранным k белым шарам можно присоединить $p-k$ черных шаров C_m^{p-k} различными способами. Таким образом, рассматриваемая группа содержит $C_n C_m^{p-k}$ различных комбинаций.

Полагая $k=2, 3, \ldots$, получим:

$$C_n^2 C_m^{p-2} + C_n^3 C_m^{p-3} \ldots = \sum C_n^k C_m^{p-k}$$

различных возможных комбинаций, где суммирование распространяется на все допустимые значения k

4. Дано множество $\mathfrak{M}$, содержащее n элементов, множество всех частей $\mathfrak{M}$ разобъем на группы, отнеся к одной и той же группе части, содержащие одинаковое количество элементов $\mathfrak{M}$. Какая из групп является наиболее многочисленной?

Решение. Группа всевозможных частей, содержащих k элементов данного множества, состоит из C_n^k частей. Следовательно, требуется определить, какое из чисел C_n^0, $C_n^1, \ldots, C_n^k$, C_n^n является наибольшим. Сравним между собой два соседние числа

Так как

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1},$$

то

$$C_n^{k-1} \leqslant C_n^k, \quad \text{если} \quad \frac{n-k+1}{k} \geqslant 1, \quad \text{откуда} \quad k \leqslant \frac{n+1}{2};$$

$$C_n^{k-1} \geqslant C_n^k, \quad \text{если} \quad \frac{n-k+1}{k} \leqslant 1, \quad \text{откуда} \quad k \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

Если C_n^k — наибольшее число, то $C_n^{k-1} \leqslant C_n^k$ и $C_n^k \geqslant C_n^{k+1}$, откуда $k \leqslant \frac{n+1}{2}$ и $k+1 \geqslant \frac{n+1}{2}$ и, следовательно, $\frac{n-1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}$.

Если $n=2m$ четное, то из всех чисел C_{2m}^k число C_{2m}^m является наибольшим. Если $n=2m+1$ — нечетное число, то числа C_{2m}^{m-1} и C_{2m}^{m+1} равны между собой:

$$C_{2m}^{m-1} = C_{2m}^{m+1} = \frac{(2m)!}{(m+1)!\,(m-1)!},$$

прочие же числа C_{2m}^k меньше этих чисел.

§ 117. Перестановки

В математике и в ее приложениях нередко рассматриваются множества (мы ограничиваемся лишь конечными множествами) упорядоченные, элементы которых задаются «в определенном порядке». Так, например, алфавит есть упорядоченное множество букв: в алфавите буквы выписываются в определенном порядке. Так, в русском алфавите буква *б* следует за *а*, *в* следует за *б* и т. д., буква *а* (первая) не следует ни за какой буквой, а за буквой *я* (последняя) не следует ни одной буквы.

Понятие упорядоченного конечного множества изучается в арифметике, поэтому мы ограничимся лишь указанием ряда необходимых для дальнейших положений.

Для упорядоченного конечного множества установлено понятие непосредственного следования элементов, при этом:

1°. *Существует единственный первый элемент, не следующий ни за одним элементом множества.*

2°. *Существует единственный последний элемент, за которым не следует ни один элемент множества.*

3°. *За всяким элементом, отличным от последнего, непосредственно следует единственный элемент упорядоченного множества.*

4°. *Конечное упорядоченное множество, содержащее n элементов, может быть приведено во взаимно однозначное соответствие с n первыми числами натурального ряда*

$$1, 2, \ldots, n,$$

причем первому элементу ставится в соответствие число 1, последнему число n; если некоторому элементу поставлено в соответствие число k, то непосредственно следующему за ним поставлено в соответствие число $k+1$. Это соответствие называется нумерацией элементов данного множества.

Отрезок натурального ряда 1, 2, ..., n, в котором непосредственно следующим считается число на 1 большее предыдущего, можно рассматривать как представителя различных конкретных упорядоченных множеств, содержащих n элементов.

Определение. *Всякое упорядоченное множество (конечное), называется перестановкой, образованной из его элементов.*

При записи перестановки обычно символ, обозначающий первый элемент, пишется на первом месте; символ, обозначающий второй элемент, на втором месте и т. д.

Всякое данное множество, содержащее более одного элемента, может быть упорядочено несколькими способами. Иными словами, из данных $n>1$ элементов можно образовать различные перестановки.

Пример

Ниже выписаны всевозможные перестановки из четырех элементов:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1432	2413	3412	4312
1423	2431	3421	4321

Теорема. *Число всевозможных перестановок, которые могут быть образованы из* n *элементов, равно:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Доказательство. Допустим, что теорема верна для множества, содержащего $n-1$ элементов, докажем, что при этом предположении теорема верна для множества, содержащего n элементов. Предположим, что из данных $n-1$ элементов $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ образованы всевозможные перестановки, и что число этих перестановок (по предположению) равно $(n-1)!$. Присоединим к данному множеству новый элемент n и составим всевозможные перестановки из n элементов. Во всякой данной перестановке из n элементов элемент n занимает некоторое вполне определенное место. Если n занимает k-е место, то перестановка имеет вид:

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, n, i_k, \ldots, i_{n-1},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ некоторая перестановка из $n-1$ элементов $1, 2, \ldots, n-1\}$. Число перестановок, в которых элемент n занимает k-е место, равно $(n-1)!$ (по числу перестановок из $n-1$ элементов). Эти перестановки различны, так как они отличаются порядком следования элементов $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Элемент n может занимать n различных мест 1-е, 2-е, ..., $n-1$-е и наконец n-е (последнее). Каждому возможному положению этого элемента (на данном месте) соответствует $(n-1)!$ перестановок из $n-1$ элементов, т. е. всего получается $(n-1)!\, n = n!$ различных перестановок из n элементов.

Будучи справедливой при $n = 1$, теорема верна при произвольном натуральном n, ч. т. д.

Рассмотрим данное упорядоченное множество n элементов. Без ущерба для общности возьмем отрезок натурального ряда

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Эти элементы, расположенные в данном порядке, образуют перестановку, которую будем называть начальной перестановкой. Пусть

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \tag{i}$$

некоторая перестановка из тех же элементов, отличная от начальной. Переход от начальной перестановки к данной перестановке (i) можно толковать как установление взаимно однозначного соответствия, в котором элементам данного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ ставятся в соответствие элементы того же множества, именно: 1 соответствует i_1, 2 соответствует i_2 и т. д.

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ i_1, & i_2 & ,\ldots, & i_n. \end{array}$$

Такое соответствие называется взаимно *однозначным отображением множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *на себя.* Иначе говорят, что элементы данного множества «перенумеровываются», именно элемент i_1 получает № 1, элемент i_2 получает № 2 и т. д., i_n получает № n. Из изложенного следует, что конечное множество, содержащее n элементов, может быть взаимно однозначно отображено на себя $n!$ различными способами (по числу различных перестановок).

Определение. *Операция взаимно однозначного отображения на себя конечного множества, содержащего* n *элементов, называется подстановкой (из данных* n *элементов).*

Для обозначения подстановки пишут друг под другом (в две строки) взаимно соответственные элементы, заключая обе строки в круглые скобки; так, символ

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix}$$

обозначает подстановку, в которой 1 заменяется на i_1, 2 заменяется на i_2 и т. д., n заменяется i_n. Подстановка, в которой все элементы ставятся в соответствие самим себе (элементы остаются на прежних местах), называется единичной:

$$E = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ 1, & 2, & \ldots, & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix}.$$

В символе, обозначающем данную подстановку в верхней (нижней) строке, элементы могут быть написаны в любом порядке существенно лишь, чтобы взаимно соответственные элементы писались друг под другом.

Так, например, символы

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 4, & 1, & 3, & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3, & 2, & 1, & 4 \\ 3, & 1, & 4, & 2 \end{pmatrix}$$

обозначают одну и ту же подстановку, заменяющую 1 на 4, 2 на 1, 4 на 2 оставляющую цифру 3 на прежнем месте.

Теория подстановок подробно излагается в высшей алгебре (теория конечных групп).

Примеры

1. Сколько различных чисел можно составить из цифр

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

причем:

a) каждая цифра в обозначении числа встречается один раз и

b) цифра 0 не должна занимать первое место?

Решение. Если не принимать во внимание условия b), то из 10 цифр можно составить 10! различных чисел, в которых каждая цифра содержится один раз. Из общего количества полученных чисел 9! чисел начинаются цифрой 0. Следовательно, искомое количество чисел равно:

$$10! - 9! = 9 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 3\,265\,920.$$

2. Дано m прописных букв $A, B, \ldots, K$ и n строчных букв $a, b, \ldots, l$. Сколько перестановок можно сделать из этих букв так, чтобы каждая перестановка начиналась прописной, а кончалась строчной буквой?

Решение. Взяв одну из прописных букв (например A) и одну из строчных букв (например, a), поставим их соответственно на первое и последнее места. Размещая прочие буквы всеми возможными способами, мы получим $(m+n-2)!$ различных перестановок (начинающихся буквой A и кончающихся буквой a). Для расстановки на первое и последнее места может быть взята любая пара букв, одна из которых прописная, а другая строчная. Число различных таких пар равно mn. Следовательно, число искомых перестановок равно $m \cdot n \cdot (m+n-2)!$

3. Даны k заглавных букв, m гласных и n согласных (всего $k+m+n$ букв). Сколько различных слов можно составить из этих букв, если в каждом слове на первом месте должна стоять заглавная буква, среди же прочих букв должно быть μ различных гласных (из числа данных m) и ν различных согласных (из числа данных n)?

Решение. Выберем одну заглавную букву, этот выбор можно сделать k способами. Затем из m гласных выберем μ букв, это можно сделать C_m^μ способами. Наконец, выберем ν согласных, что можно сделать C_n^ν способами. Итак, выбор необходимых букв для составления слова можно сделать $kC_m^\mu C_n^\nu$ способами. Произведя указанный выбор, поставим заглавную букву на первое место, тогда из прочих $\mu+\nu$ строчных букв можно составить $(\mu+\nu)!$ перестановок, каждая такая перестановка дает новое слово.

Итак, всего можно составить

$$kC_m^\mu C_n^\nu (\mu+\nu)!$$

различных слов.

4. На шахматной доске расставить 8 ладей так, чтобы ни одна из них не могла бить другую.

Решение. Как известно из правил шахматной игры две ладьи могут бить друг друга, если они находятся либо в одном вертикальном, либо в одном горизонтальном ряду полей шахматной доски Символом (i, j) будем обозначать поле, находящееся на пересечении i-го горизонтального и j-го вертикального ряда, где для i и j возможны значения $1, 2, \ldots, 8$. Две ладьи, находящиеся на полях (i, j) и (k, l), не могут бить друг друга в том и только в том случае, если $i \neq k$ и $j \neq l$. Если 8 ладей, расставленные на доске, занимают поля

$$(i_1, j_1), \quad (i_2, j_2), \quad \ldots, \quad (i_8, j_8) \qquad (\mathrm{i,j})$$

и не могут бить друг друга, то среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_8$ не может быть двух равных, так как никакие две ладьи не могут стоять в одном горизонтальном ряде. Следовательно, $i_1, i_2, \ldots, i_8$ есть перестановка из чисел $1, 2, \ldots, 8$. Аналогично установим, что $j_1, j_2, \ldots, j_8$ есть перестановка из тех же чисел. Расположим символы (i, j) так, чтобы числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ следовали в натуральном порядке

$$(1, j_1), \quad (2, j_2), \quad \ldots, \quad (8, j_8). \qquad (\mathrm{i,j})$$

Всякой перестановке $j_1, j_2, \ldots, j_8$ соответствует возможное расположение людей.

Итак, существует $8! = 40\,320$ различных возможных расстановок ладей.

5. Даны n элементов $1, 2, \ldots, n$; сколько имеется различных перестановок, в которых k данных элементов $1, 2, \ldots, k$ не занимают k мест подряд?

Решение. Подсчитаем число различных перестановок, в которых элементы $1, 2, \ldots, k$ занимают подряд k мест. Допустим, что группа элементов $1, 2, \ldots, k$ занимает места, начиная с m-го. Число возможных таких перестановок равно $k!\,(n-k)!$, по числу различных возможных способов расстановок элементов $1, 2, \ldots, k$ на указанных местах и прочих $n-k$ элементов. Для

m возможно любое из значений $m=1,\ 2,\ \ldots\ (n-k+1)$. Следовательно, существует

$$(n-k+1)\,k!\,(n-k)! = k!\,(n-k+1)!$$

перестановок, в которых элементы $1,\ 2,\ \ldots,\ k$ занимают k мест подряд, число прочих перестановок равно $n!-k!(n-k+1)!$

§ 118. Размещения

Определение. *Размещением из* $\boldsymbol{n}$ *элементов по* $\boldsymbol{k}$ *называется всякая упорядоченная часть данного множества* $\boldsymbol{n}$ *элементов, содержащая* $\boldsymbol{k}$ *элементов.*

Два различные размещения из данных n элементов, взятых по k, различаются либо составом входящих в них элементов, либо при одном и том же составе элементов порядком их расположения.

Число различных размещений, взятых из n элементов по k, обозначается символом A_n^k.

Пример

Ниже выписаны всевозможные размещения, составленные из четырех элементов по 3

1 2 3	1 2 4	1 3 4	2 3 4
1 3 2	1 4 2	1 4 3	2 4 3
2 1 3	2 1 4	3 1 4	3 2 4
2 3 1	2 4 1	3 4 1	3 4 2
3 1 2	4 1 2	4 1 3	4 1 3
3 2 1	4 2 1	4 3 1	4 3 1

Теорема. *Число различных размещений, взятых из* $\boldsymbol{n}$ *элементов по* $\boldsymbol{k}$, *выражается формулой:*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1) = \frac{k!}{(n-k)!}.$$

Доказательство. Всякое размещение из n элементов по k есть некоторая перестановка образования из k входящих в его состав элементов. В самом деле, для образования данного размещения достаточно сначала выбрать k из элементов, входящих в это размещение, а затем расположить их в требуемом порядке.

Составим всевозможные сочетания из n данных элементов, взятых по k. Таких сочетаний будет C_n^k. Далее взяв в отдельности каждое сочетание, составим из его элементов всевозможные перестановки; число таких перестановок (для данного сочетания) будет $k!$ Таким образом, всего получится $k!\,C_n^k$ всевозможных размещений из n элементов по k. Все эти размещения различны, так как они либо составлены из различных сочетаний и тогда они отличаются составом элементов, либо составлены из одного и того же сочетания и тогда они отличаются порядком следования элементов.

Следовательно,

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

В частности при $n = k$ значение A_n^0 равно $n!$, т. е. числу перестановок из n элементов.

Примеры

1 Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначении каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза?

Р е ш е н и е Из пяти данных цифр можно составить $A_5^5 = 5!$ различных размещений; эти размещения дадут всевозможные пятизначные числа за исключением тех размещений, которые начинаются нулем. Количество этих последних размещений равно A_4^4. Таким образом, из данных цифр можно составить:

$$A_5^5 - A_4^4 = 5 \cdot 4 \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$$

различных пятизначных чисел. Количество различных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, равно A_5^4 за вычетом количества тех размещений, которые начинаются нулем, т. е.

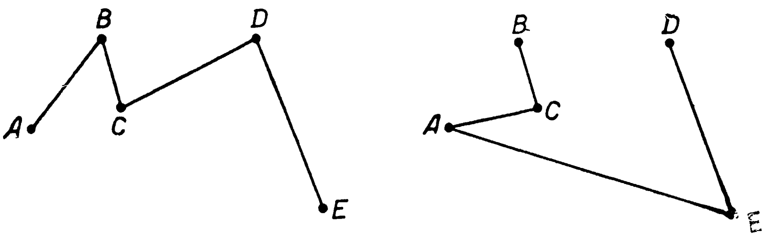
$$A_5^4 - A_4^3 = 5 \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$$

Аналогично количество различных трехзначных, двузначных и однозначных чисел будет равно соответственно

$$A_5^3 - A_4^2 = 48, \qquad A_5^2 - A_4^1 = 16 \quad \text{и} \quad 4$$

Всего получится 260 натуральных чисел

2. На плоскости даны n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько можно провести различных k-звенных не замкнутых и замкнутых ломаных линий с вершинами в данных точках?



Черт. 173

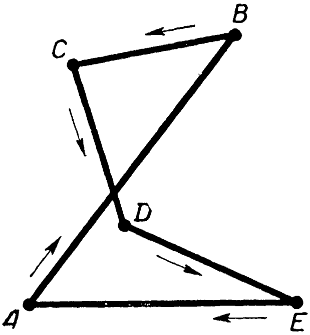
Р е ш е н и е. Если незамкнутая ломаная линия имеет k звеньев, то число ее вершин равно $k+1$. Следовательно, незамкнутые k-звенные ломаные можно проводить, если $n \geqslant k+1$. Если A, B, C, ..., K, L — данные точки, то всякое размещение из этих n точек по $k+1$ определяет на плоскости ломаную линию. Два различные размещения из одних и тех же $k+1$ точек определяют в о б щ е м с л у ч а е две различные ломаные линии (черт. 173). Допустим, что два различные размещения, например:

$$ABCDE \quad \text{и} \quad A_1B_1C_1D_1E_1$$

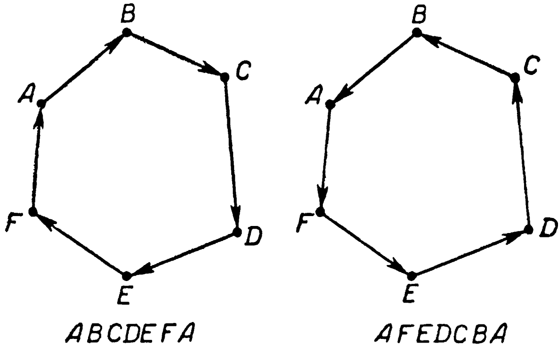
определяют одну и ту же ломаную линию Необходимым (но разумеется не достаточным) условием совпадения двух ломаных является совпадение их концов. Возможны два случая

1°. $A=A_1$. В этом случае звенья, выходящие из точки A_1, т. е AB и AB_1 тоже должны совпадать, т. е. $B=B_1$; из совпадения следующих звеньев найдем $C = C_1$ и т. д. В этом случае данные размещения совпадают.

2°. $A = E_1$. Такими же рассуждениями, как в предыдущем случае, найдем, что $B = D_1,\dots$, $E = A_1$. В этом случае данные размещения получаются друг из друга изменением порядка следования элементов (вершины): последний элемент E ставится на первое место, а всякий предыдущий становится последующим. Геометрически это значит, что одну и ту же ломаную можно задать двумя способами, соответствующими двум различным направлениям обхода вершин.



Черт. 174



Черт. 175

Итак, среди всевозможных размещений из n точек по $k+1$ каждая ломаная встретится два раза. Следовательно, искомое число незамкнутых ломаных равно

$$\frac{1}{2} A_n^{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k)}{2}.$$

Подсчитаем число различных k-звенных замкнутых ломаных Всякое размещение из n точек по k

$$A,\ P,\ \ldots,\ E$$

определяет замкнутую ломаную (в общем случае самопересекающуюся). Все размещения, получающиеся из данного круговой перестановкой букв, например, $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$ (черт. 174) определяют одну и ту же замкнутую ломаную (безразлично с какой вершины начинается обход замкнутой ломаной). Число различных размещений, получающихся из данного посредством последовательного выполнения круговой перестановки элементов, равно n.

Размещение, получающееся из данного изменением порядка следования элементов, а также все размещения, получающиеся из последнего посредством круговых перестановок, определяют ту же самую замкнутую ломаную (вершины замкнутой ломаной обходятся в противоположном направлении (черт. 175)).

Итак, среди всевозможных размещений из n точек по k каждая замкнутая ломаная встретится $2n$ раз, а потому искомое число замкнутых лома ных равно

$$\frac{A_n^k}{2n} = \frac{(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{2}.$$

119. Размещения с повторениями

Термином «размещение с повторениями», составленным из данных элементов:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \qquad \text{(a)}$$

по k в комбинаторике называется всякая конечная k-членная последовательность, членами которой являются данные элементы (a).

Два размещения с повторениями:

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \ldots,\ a_{i_k} \text{ и } a_{j_1},\ a_{j_2},\ \ldots,\ a_{j_k}$$

одинаковы в том и только в том случае, когда на одинаковых местах находятся одни и те же элементы:

$$a_{i_2} = a_{j_1},\quad a_{i_2} = a_{j_2},\quad \ldots,\quad a_{i_k} = a_{j_k}.$$

В размещении с повторениями (как и во всякой последовательности) один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах (см. стр. 501). Если в размещении с повторениями a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k} некоторый элемент занимает p различных мест, то говорят, что этот элемент повторяется в размещении p раз.

Пример

Ниже выписаны всевозможные размещения с повторениями из 4 элементов 1, 2, 3, 4 по 3:

111	112	121	211	113	131	311	114	141	411	222	221	212	223	232
322	224	242	422	333	331	313	133	332	323	134	343	433	444	441
414	144	442	424	244	123	124	213	214	132	334	443	434	344	312
314	142	143	412	413	241	243	421	423	431	432	342	341	321	324
231	234	122	233											

Теорема. *Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по k равно:*

$$n^k.$$

Доказательство. Без ущерба для общности в качестве n данных элементов (a) можно взять n первых чисел натурального ряда. Будем составлять различные размещения с повторениями, полагая последовательно $k=1, 2, \ldots, n$.

При $k=1$ получим n различных размещений:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

образованных самими данными числами. Если к каждому из этих чисел приписать последовательно каждое число из того же множества, то образуется n^2 пар чисел

$$\begin{array}{l} 11,\ 12,\ 13,\ \ldots,\ 1n, \\ 21,\ 22,\ 23,\ \ldots,\ 2n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n1,\ n2,\ n3,\ \ldots,\ nn, \end{array}$$

которые и являются всевозможными размещениями с повторениями из n элементов по 2. Если к каждой написанной паре приписать последовательно числа 1, 2, ..., n, то получится n^3 всевозможных размещений с повторениями из n элементов по 3 и т. д. Допустим, что число всевозможных различных размещений с повторениями из n элементов по k—1 равно n^{k-1}. Взяв произвольную $k-1$-членную последовательность из чисел 1, 2, ..., n:

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{k-1} \qquad (*)$$

будем на k-ом месте приписывать (последовательно) 1, 2, ..., n, тогда данное размещение (*) даст n различных размещений с повторениями из k элементов, всего же получится $n^{k-1}\cdot n=n^k$ размещений k-ого порядка. Из способа составления этих размещений видно, что все они различны. Всякое размещение с повторениями из n элементов по k содержится среди написанных n^k размещений k-го порядка, так как на последнем месте может стоять любое число 1, 2, ..., n (в силу способа образования размещений), а на каждом из предыдущих мест может стоять любое из этих чисел (по предположению были составлены всевозможные размещения k—1-го порядка). Следовательно, искомое число размещений k-го порядка равно n^k. В силу принципа математической индукции это утверждение верно при произвольном k, ч. т. д.

Пример

Имеется n различных книг, каждая в p экземплярах; сколькими способами можно сделать выбор книг из числа данных?

Решение. Перенумеруем в каком-либо порядке n данных книг. Если первая книга берется в k_1 экземплярах, вторая в k_2 экземплярах и т. д. n-я в k_n экземплярах, то указанному выбору соответствует размещение с повторениями:

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,$$

из $p+1$ чисел 0, 1, 2, ..., p, взятых по n (если $k_i=0$, то i-я книга не берется вовсе). Таким образом получается $(p+1)^n$ различных комбинаций, по числу размещений с повторениями из $p+1$ элементов по n. Исключив из рассмотрения комбинацию 0, 0, ..., 0, означающую, что не берется ни одна книга, мы получим $(p+1)^n-1$ различных способов выбора книг.

§ 120. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями являются частным видом размещений с повторениями, а именно это суть такие размещения, в которых для каждого элемента указывается число его повторений.

Пусть $\{a, b, \ldots, c\}$ — некоторое данное множество (конечное) элементов.

Определение. *Перестановкой с повторениями, в которой элемент a повторяется α раз, элемент b повторяется β раз и т. д., элемент c повторяется γ раз, где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — данные числа, называется всякое размещение с повторениями, составленное из данных элементов, в котором каждый из элементов повторяется указанное число раз. Число $m = \alpha+\beta+\ldots+\gamma$ называется порядком перестановки.*

Теорема. *Число различных перестановок с повторениями из элементов $\{a, b, \ldots, c\}$, в которых элементы $a, b, \ldots, c$ повторяются соответственно $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ раз, равно:*

$$\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!}.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторую перестановку с повторениями данного вида как функцию натурального аргумента:

$$\begin{matrix} p_1, & p_2, & \ldots, & p_m, \\ 1, & 2, & \ldots, & m, \end{matrix} \tag{I}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ элементы данного множества $\{a, b, \ldots, c\}$, а снизу под элементами перестановки подписаны номера занимаемых ими мест (т. е. значения аргумента). Обозначим номера тех α мест, которые занимает элемент a в перестановке, следующим образом: $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$, обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ номера мест, которые занимает элемент b, и так далее и, наконец, через $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$—номера мест, которые занимает элемент c. Перестановка с повторениями (I) вполне определяется распределением мест, на которых находятся элементы $a, b, \ldots, c$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)(b_1, b_2, \ldots, b_\beta)\ldots(c_1, c_2, \ldots, c_\gamma).$$

Рассмотрим произвольную подстановку

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m \\ n_1, & n_2, & \ldots, & n_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i \\ n_i \end{pmatrix}$$

переводящую начальную перестановку $1, 2, \ldots, m$ в перестановку $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Это подстановка преобразует перестановку с повторениями (I) в следующую перестановку с повторениями

$$p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_m}. \tag{II}$$

По числу различных подстановок, равному $m! = (\alpha + \beta + + \ldots + \gamma)$, получатся $m!$ соответствующих перестановок с повторениями. Путем надлежащего выбора подстановки $\begin{pmatrix} i \\ n_i \end{pmatrix}$ из перестановки (I) может быть получена любая перестановка с повторениями рассматриваемого вида.

В самом деле, пусть II заданная перестановка с повторениями и

$$(a'_1, a'_2, \ldots a'_\alpha)(b'_1 \ldots b'_\beta) \ldots (c'_1, \ldots, c'_\gamma)$$

распределение мест занимаемых в ней элементами $a, b, \ldots, c$. Подстановка

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2 & \ldots a_\alpha b_1 & \ldots b_\beta & \ldots c_1 & \ldots c_\gamma \\ a'_1, a'_2 & \ldots a'_\alpha b'_1 & \ldots b'_\beta & \ldots c'_1 & \ldots c'_\gamma \end{pmatrix}$$

переведет перестановку с повторениями (I) в перестановку с повторениями (II).

Среди $m!$ перестановок с повторениями, которые получатся посредством применения всевозможных подстановок $\begin{pmatrix} i \\ n \end{pmatrix}$, не все перестановки различны. В самом деле, в записи распределения мест, занимаемых каким-либо элементом, например, a, несущественно, в каком порядке записываются номера этих мест. Иными словами, вместо

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$$

можно взять любую перестановку из этих чисел. Если же множества чисел

$$a_1 a_2 \ldots a_\alpha \quad \text{и} \quad a'_1 a'_2 \ldots a'_\alpha$$

различны (т. е. в одном из этих множеств есть число, не содержащееся в другом), то перестановки с повторениями (I) и (II) также различны.

Из изложенного следует, что всякая данная перестановка (I) может быть записана $\alpha!\ \beta! \ldots \gamma!$ способами, так как в распределении мест, занимаемых элементом a, можно взять любую перестановку из чисел $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ (таких перестановок $\alpha!$), в распределении мест, занимаемых b, можно взять любую перестановку из чисел $b_1 b_2 \ldots b_\beta$ (таких перестановок $\beta!$) и т. д. и, наконец, в распределении мест, занимаемых элементом c, можно взять любую перестановку из чисел $c_1 c_2 \ldots c_\gamma$ (таких перестановок $\gamma!$).

Итак, во всем рассматриваемом множестве $m!$ перестановок с повторениями каждая перестановка записывается $\alpha!\ \beta! \ldots \gamma!$ раз.

Следовательно, число различных перестановок с повторениями равно

$$\frac{(\alpha + \beta + \ldots + \gamma)!}{\alpha!\ \beta! \ldots \gamma!}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Пример

Дано $p+q+r$ различных предметов; сколькими способами можно разбить эти предметы на 3 группы так, чтобы первая группа содержала p предметов, вторая q предметов, а третья r предметов?

Решение. Расположим все данные предметы в каком-нибудь определенном порядке:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{p+q+r}.$$

При распределении предметов по группам будем на месте каждого предмета писать номер той группы, в которую он попадает. Так, запись

$$2\,1\,2\,3\,\ldots\,1$$

означает, что первый предмет попал во вторую группу, второй в первую, третий во вторую и т. д., последний в первую. Всякому распределению предметов по группам взаимно однозначно соответствует перестановка из чисел 1, 2, 3, в которой 1 встречается p раз, 2 встречается q раз и 3 встречается r раза. Число возможных способов распределения предметов равно:

$$\frac{(p+q+r)!}{p!\;q!\;r!}.$$

§ 121. Сочетания с повторениями

Пусть a, b, c,..., d — данное конечное множество, содержащее n элементов. Поставим в соответствие каждому элементу этого множества некоторое целое неотрицательное число, называемое кратностью данного элемента. Это соответствие определяет функцию, для которой значениями аргумента являются данные элементы, а значениями функции — целые неотрицательные числа — кратности элементов. Пусть α — кратность элемента a, β — кратность элемента b, γ — кратность элемента c и т. д. Для обозначения рассматриваемого соответствия выписывают символ, обозначающий данный элемент столько раз, какова его кратность, если эта кратность положительна, если же кратность данного элемента равна нулю, то соответствующий символ не выписывается. Символы, обозначающие элементы, можно писать в каком угодно порядке, лишь бы каждый из них был написан столько раз, какова кратность соответствующего элемента. Так, например, записи

$$aaabbcdd, \quad ababacdd, \quad dbdbaaca$$

выражают одно и то же: кратность a равна 3, кратность b равна 2, кратность c равна 1 и кратность d равна 2. Говорят также, что данный элемент берется столько раз, какова его кратность. Так, в рассмотренном примере элемент a взят 3 раза, элемент b взят 2 раза, элемент c взят 1 раз и элемент d взят 2 раза.

Определение. *Если каждому элементу некоторого конечного множества поставлено в соответствие целое неотрицательное число — кратность данного элемента, то говорят, что* *задано сочетание с повторениями. Сумма* k *кратностей всех элементов называется порядком сочетания.*

Всякое сочетание с повторениями k-го порядка, составленное из множества, содержащего n элементов, называется также сочетанием с повторением из n элементов по k.

Если α, β, $\ldots$, γ — кратности элементов a, b, $\ldots$, c, то согласно определению $\alpha+\beta+\ldots+\gamma$ есть порядок сочетания

$$\overbrace{aaa\ldots a}^{\alpha \text{ раз}}\quad \overbrace{bb\ldots b}^{\beta \text{ раз}}\ \ldots\ \overbrace{cc\ \ldots c}^{\gamma \text{ раз}}$$

Теорема. *Число сочетаний с повторениями из* n *элементов по* k *выражается формулой*

$$\Gamma_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Доказательство. Расположим элементы данного множества в некотором определенном порядке, например, так:

$$a,\ b,\ \ldots,\ c$$

(для подсчета числа сочетаний порядок расположения элементов несущественен). Всякому сочетанию с повторениями, в котором элемент a встречается α раз, элемент b встречается β раз и т. д., элемент c встречается γ раз; поставим в соответствие символ

$$\overbrace{11\ldots 1}^{\alpha \text{ раз}}0\overbrace{11\ldots 1}^{\beta \text{ раз}}0\ \ldots\ 0\overbrace{11\ldots 1}^{\gamma \text{ раз}}$$

Если некоторый элемент не содержится в данном сочетании с повторениями, т. е. если его кратность равна нулю, то соответствующая группа единиц не пишется. Таким образом в рассматриваемом символе 0 может находиться несколько раз подряд. В символах, которые ставятся в соответствие сочетаниям с повторениями из n элементов по k, цифра 1 встречается k раз, а цифра 0 встречается $n-1$ раз. Эти символы суть «двоичные» перестановки с повторениями, составленные из двух элементов 0, 1, в которых 0 встречается $n-1$ раз, а 1 встречается k раз.

Таким образом, всякому сочетанию с повторениями соответствует некоторая вполне определенная двоичная перестановка. Обратно, всякой двоичной перестановке, в которой 0 встречается $n-1$ раз, а 1 встречается k раз, соответствует некоторое вполне определенное сочетание с повторениями из n элементов по k. Для составления этого сочетания достаточно каждый элемент (в установленном порядке) выписать столько раз, сколько раз 1 содержится на соответствующих местах.

Так, например, сочетаниям

$$aaabbcddd \text{ и } abbbbbbd$$

соответствуют символы

$$11101101011 \text{ и } 10111111001.$$

Символам

$$011100111111$$
и
$$110111010111$$

соответствуют сочетания

$$bbbdddddd \text{ и } aabbbcddd.$$

Установленное взаимно однозначное соответствие показывает, что искомое число Γ^n_k сочетаний с повторениями равно числу двоичных перестановок, в которых 0 встречается $n-1$, а 1 встречается k раз:

$$\Gamma^k_n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = C^k_{n+k-1}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Пример

Имеется n одинаковых предметов, сколькими способами можно распределить эти предметы между p лицами?

Решение. Если первое лицо получило α предметов, второе β предметов и т. д., последнее γ предметов, то будем данное распределение предметов символически записывать следующим образом:

$$\underbrace{1\,1\ \ldots\ 1}_{\alpha \text{ раз}}\quad \underbrace{2\,2\ \ldots\ 2}_{\beta \text{ раз}}\quad \underbrace{pp\ \ldots\ p}_{\gamma \text{ раз}},$$

где

$$\alpha+\beta+\ \ldots\ +\gamma = n$$

(если данное лицо, например, первое не получает предметов, то и цифра 1 не пишется в символе распределения). Отсюда видно, что число возможных распределений предметов равно числу сочетаний с повторениями из p по n, т. е.

$$C^n_{p+n-1}.$$

§ 122. Число членов в каноническом представлении многочлена

Излагаемые в настоящем параграфе теоремы о числе членов многочлена относятся к многочленам, заданным в общем виде с произвольными коэффициентами. Возможность обращения в нуль некоторых коэффициентов в различных частных случаях и связанное с этим уменьшение числа членов во внимание не принимается и на счет числа членов влияния не оказывает.

Теорема. *Каноническое представление однородного многочлена* n*-й степени, где* $n>0$ *от* k *аргументов содержит*

$$C^n_{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = C^{k-1}_{n+k-1} \text{ членов.}$$

Доказательство. Известно, что однородный многочлен

$$P(x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_k)$$

в каноническом представлении является суммой членов вида

$$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ . \ . \ . \ x_k^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$ и A — коэффициент.

В каждом члене x_1 повторяется сомножителем α_1 раз, x_2 повторяется α_2 раз и т. д. Общее число множителей равно n. Следовательно, многочлен в общем случае содержит столько различных членов, каково число сочетаний с повторениями из k элементов $x_1 x_2, \ldots, x_k$ по n, т. е.

$$C_{k+n-1}^n = \frac{(k+n-1)!}{n!\,(k-1)!} = C_{k+n-1}^{k-1}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

В частности, число членов однородного многочлена второй степени с двумя аргументами равно $\frac{3!}{2!\,1!} = 3$, с тремя аргументами равно $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$, с четырьмя аргументами равно $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$.

Число членов однородного многочлена третьей степени с двумя аргументами равно $\frac{4!}{3!\,1!} = 4$, с тремя аргументами равно $\frac{52}{2!\,3!} = 10$.

Теорема. *Каноническое представление многочлена степени* ***n*** от k аргументов содержит:

$$C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = C_{n+k}^k \ \textit{членов.}$$

Доказательство. Всякому неоднородному многочлену $P_n(x_1 x_2, \ldots, x_k)$ (заданному в общем виде) от k аргументов можно поставить во взаимно однозначное соответствие однородный многочлен степени n от $k+1$ аргументов, состоящий из стольких же членов, что и $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. В самом деле, если член $Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ имеет степень n, то оставим этот член без изменения; если же данный член имеет степень m, меньшую n, то присоединим к нему сомножитель t^{n-m}. Таким образом, получится однородный многочлен $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$ степени n от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_k, t$. Если дан однородный многочлен $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$ степени n, то для перехода к неоднородному многочлену $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ достаточно опустить аргумент t во всех членах, в которых он содержится.

Так, например:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + \\ + 2a_3z + a_0$$

и

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1xt + \\ + 2a_2yt + 2a_3zt + a_0t^2$$

суть взаимно соответственные неоднородный и однородный многочлены.

Число членов многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ равно числу членов $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$, т. е. C^n_{n+k}, ч. т. д.

В частности, число членов многочлена второй степени от двух аргументов равно $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$, от трех аргументов равно $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$.

Число членов многочлена третьей степени от двух аргументов равно $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$, от трех аргументов равно $\frac{6!}{3!\,3!} = 20$.

§ 123. Формулы произведения двучленов, бинома Ньютона и степени суммы

Рассмотрим произведение n двучленов следующего вида:

$$(x + a_1)(x + x_2) \ldots (x + a_n). \qquad (\Pi)$$

Теорема. *В каноническом представлении произведения* (П) *коэффициент при* x^{n-k} *равен сумме всевозможных произведений, составленных из чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *взятых по* $\boldsymbol{k}$.

Доказательство. Теорема верна для произведения двух биномов:

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2.$$

Предположим, что теорема верна для произведения $n - 1$ биномов, докажем, что в этом предположении она будет верна для произведения n биномов. По предположению имеем:

$$(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_{n-1}) =$$

$$= x^{n-1} + p_1x^{n-2} + p_2x^{n-3} + \ldots + p_{k-1}x^{n-k} + \ldots + p_{n-1},$$

где

$$p_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1},$$

$$p_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1},$$

и, вообще, p_{k-1} есть сумма всевозможных произведений чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, взятых по $k - 1$. Умножив на $(x + a_n)$, получим:

$$(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_{n-1})(x + a_n) =$$

$$= x^n + (p_1 + a_n)x^{n-1} + \ldots + (p_k + a_np_{k-1})x^{n-k} + \ldots + p_{n-1}a_n.$$

Коэффициент $p_k + a_n p_{k-1}$ есть сумма всевозможных произведений из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, взятых по k. В самом деле, p_k есть сумма всех тех произведений, составленных из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, взятых по k, которые не содержат a_n, а $a_n p_{k-1}$ есть сумма всех тех произведений, взятых по k, которые содержат a_n.

Будучи верной для произведения $n-1$ двучленов, формула верна для произведения n двучленов и, так как формула верна при $n=2$, то она верна для произведения любого числа двучленов.

Бином Ньютона является частным случаем доказанной формулы. Если положить

$$a_1 = a_2 = \ldots a_n = a,$$

то коэффициент при x^{n-k} примет следующий вид: $C_n^k a^k$, а потому получим:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + a^n.$$

В § 19 формула бинома Ньютона была выведена непосредственно; изложенное в настоящем параграфе другое доказательство дает объяснение того факта, что биномиальными коэффициентами являются числа всевозможных сочетаний, которые можно составить из n элементов (где n показатель степени бинома).

Теорема. *n-я степень суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ имеет следующее каноническое представление* (полиномиальная формула):

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n =$$
$$= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n} \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k},$$

где суммирование в правой части распространяется на всевозможные системы целых неотрицательных значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, удовлетворяющих условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$.

Формула бинома Ньютона является частным случаем доказываемой формулы (при $k=2$).

Доказательство. Для получения канонического представления левой части доказываемого тождества надо произвести умножение n сомножителей (равных):

$$x_1 + x_2 + \ldots x_k, \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 + \ldots x_k, \quad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2 + \ldots x_k. \quad (n)$$

Для выполнения этого умножения достаточно (по правилу умножения суммы на сумму) каждое слагаемое первой строки умножить на каждое слагаемое второй строки, каждое из полученных произведений умножить на каждое слагаемое третьей строки и т. д. и, наконец, все полученные произведения сложить. Если от первой строки берется x_{i_1}, от второй строки x_{i_2} и т. д., от n-й строки x_{i_n}, то такой выбор сомножителей даст в произведении член

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n},$$

где для каждого из индексов возможно произвольное значение 1. 2, ..., k. Число всех полученных произведений равно числу размещений с повторениями из k элементов x_1, x_2, ..., x_k по n, т. е. k^n. Среди полученных k^n слагаемых содержатся подобные члены. Все члены, в которых x_1 содержится сомножителем данное число α_1 раз, x_2 содержится α_2 раз и т. д., x_k содержится α_k раз, где $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n$, подобны. Каждый такой член соответствует размещению

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n},$$

в котором x_1 встречается α_1 раз, x_2 встречается α_2 раз и т. д и x_k встречается α_k раз; число всех этих членов равно числу всевозможных перестановок с повторениями, в которых каждый из элементов x_1, x_2, ..., x_k встречается указанное число раз, т. е. $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$. Следовательно, в каноническое представление $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ произведение $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_k^{\alpha_k}$ войдет с коэффициентом $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$, и искомое каноническое представление является суммой всех произведений данного вида, для которых $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n$, ч. т. д.

Пример

Представить в каноническом виде:

$$(x+y+z)^3.$$

Имеем:

$$(x+y+z)^3=\frac{3!}{3!\,0!\,0!}x^3+\frac{3!}{0!\,3!\,0!}y^3+\frac{3!}{0!\,0!\,3!}z^3+$$
$$+\frac{3!}{2!\,1!\,0!}x^2y+\frac{3!}{2!\,0!\,1!}x^2z+\frac{3!}{0!\,2!\,1!}y^2z+\frac{3!}{1!\,2!\,0!}y^2x+$$
$$+\frac{3!}{1!\,0!\,2!}xz^2+\frac{3!}{0!\,1!\,2!}yz^2+\frac{3!}{1!\,1!\,1!}xyz=$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+xz^2+yz^2)+6xyz.$$

§ 124. Комбинаторные тождества и методы их доказательства

Комбинаторными тождествами называются соотношения между выражениями для чисел различного вида соединений. Для доказательства комбинаторных тождеств могут применяться различные методы. В частности, эти тождества могут устанавливаться:

a) непосредственно из рассмотрения самих соединений,

b) при помощи тождественных преобразований,

c) косвенным путем на основании свойств многочленов (в частности применение формулы бинома Ньютона),

d) путем применения метода математической индукции.

Ниже на ряде конкретных примеров показаны различные методы доказательства комбинаторных тождеств:

1. *Число сочетаний из* n *элементов по* k *равно числу сочетаний из* n *элементов по* $n-k$:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{1}$$

Первое доказательство. Всякой части, содержащей k элементов данного множества из n элементов, соответствует единственная часть, содержащая $n-k$ оставшихся элементов. Обратно, всякой части из $n-k$ элементов соответствует единственная часть, содержащая k не вошедших в нее элементов. Это соответствие взаимно-однозначное. В самом деле, если две части, содержащие данное число элементов, различны, то различны и соответствующие части, образованные оставшимися элементами. Из установленного взаимно-однозначного соответствия следует, что число частей, содержащих k элементов, равно числу частей, содержащих $n-k$ элементов.

Второе доказательство. Достаточно принять во внимание, что C_n^k и C_n^{n-k} выражаются одной и той же формулой $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Третье доказательство. Достаточно принять во внимание, что C_n^k и C_n^{n-k} суть коэффициенты при $x^{n-k}y^k$ и x^ky^{n-k} в каноническом представлении симметрического многочлена $(x+y)^n$.

2. *Имеет место тождество*:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{2}$$

Первое доказательство. Выделим какой-либо один элемент из числа данных n элементов. Все сочетания из n элементов по k разделяется на две группы, содержащие данный элемент и не содержащие данного элемента. Первая группа состоит из C_{n-1}^{k-1}, вторая из C_{n-1}^{k} сочетаний, откуда и следует тождество (2).

Второе доказательство. Имеем:

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

3. *Имеет место тождество:*

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}. \tag{3}$$

Доказательство. Пользуясь тождеством (2), напишем ряд следующих тождеств:

$$C_k^k = C_{k+1}^{k+1} \quad (= 1),$$

$$C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1},$$

$$C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}.$$

Сложив почленно эти тождества, получим, после сокращения, тождество (3).

Следствие. В силу тождества (1) тождество (3) может быть переписано в виде

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}. \tag{3'}$$

4. *Имеет место тождество:*

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{4}$$

т. е. *сумма биномиальных коэффициентов равна* 2^n, *где* n — *степень бинома.*

Первое доказательство. Сумма $\sum C_n^k$, находящаяся в левой части, есть количество всевозможных частей * конечного множества из n элементов.

Подсчитаем другим способом число частей конечного множества. Расположим элементы данного множества в некотором определенном порядке:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Рассмотрим какую-нибудь часть данного множества: поставим 1 на месте элементов, вошедших в состав, и 0 на месте элементов, не вошедших в состав рассматриваемой части. В силу этого

* Включая и несобственные части, т. е. пустое множество и само множество.

всякой части множества ставится во взаимно-однозначное соответствие некоторое размещение с повторениями из двух элементов 0 и 1 по n. Число всех частей множества равно числу полученных размещений, а последнее равно 2^n.

Второе доказательство. Достаточно в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^n y^n$$

положить $x=y=1$.

5. *Сумма биномиальных коэффициентов, взятых с чередующимися знаками, равна нулю*

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (5)$$

Доказательство. Достаточно в формуле бинома Ньютона положить

$$x=1, \quad y=-1.$$

Следствие I. Имеют место равенства:

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Следовательно, сумма биномиальных коэффициентов (при данном n), занимающих четные места, равна сумме коэффициентов, занимающих нечетные места. В самом деле, в силу тождеств (4) и (5) имеем:

$$\sum C_n^{2k} + \sum C_n^{2k+1} = 2^n \text{ и } \sum C_n^{2k} - \sum C_n^{2k+1} = 0,$$

откуда следует равенство рассматриваемых сумм.

Следствие II. Общее число тех частей конечного множества, которые состоят из нечетного количества элементов, равно числу тех частей, которые состоят из четного числа элементов.

Это следует из предыдущего и из того, что C_n^k есть число всех частей конечного множества, содержащих k его элементов.

6. Доказать тождества:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right), \qquad (6')$$

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \qquad (6'')$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]. \qquad (6''')$$

Доказательство. Пусть ε — мнимый кубический корень из 1

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Положив в формуле бинома Ньютона $x = 1$, $y = 1$, затем $x = 1$, $y=\varepsilon$ и, наконец, $x=1$, $y=\varepsilon^2$, получим:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \quad . \; . \; . \; . \; . \; , \qquad \text{(a)}$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4 + \quad . \; . \; . \; , \qquad \text{(b)}$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \quad . \; . \; . \qquad \text{(c)}$$

Сложив почленно равенства (a), (b) и (c) и разделив на 3, получим в правой части сумму биномиальных коэффициентов, взятых через 2, начиная с C_n^0, а в правой части

$$\frac{1}{3}[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n].$$

Приняв во внимание, что

$$1+\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$1+\varepsilon^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

получим:

$$\frac{1}{3}[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right],$$

откуда следует тождество (6′).

Для доказательства тождеств (6″) и (6‴) следует составить суммы:

$$2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n$$

и

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n.$$

7. *Доказать тождество:*

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \quad . \; . \; . + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p. \qquad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество:

$$(x+1)^n (x+1)^m = (x+1)^{n+m}.$$

Воспользуемся каноническими представлениями сомножителей левой части:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \; . \; . \; . + C_n^p x^{n-p} + \quad . \; . \; . + C_n^n,$$

$$(x+1)^m = C_m^0 x^m + C_m^1 x^{m-1} + \; . \; . \; . + C_m^p x^{m-p} + \quad . \; . \; . + C_m^m.$$

Подсчитаем коэффициенты при x^{n+m-p}; этот коэффициент равен левой части тождества (7). С другой стороны, коэффициент при x^{n+m-p} найдем, применив формулу бинома Ньютона к

$(x+1)^{n+m}$, этот коэффициент равен C^{i}_{m+n}. Отсюда следует тождество (7).

8. *Имеет место следующая формула для суммы квадратов биномиальных коэффициентов:*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточно в формуле (7) положить $n=m=p$ и принять во внимание тождество $C_n^{n-k}=C_n^k$.

§ 125. Суммирование степеней чисел натурального ряда

Требуется вычислить сумму

$$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

Рассмотрим разность

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = C_{k+1}^1 m^k + C_{k+1}^2 m^{k-1} + \ldots + 1.$$

Полагая последовательность $m=0, 1, 2, \ldots, n$, получим равенства:

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1,\\
2^{k+1} - 1^{k+1} &= C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \ldots + 1,\\
3^{k+1} - 2^{k+1} &= C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^1 S_1 + n + 1.$$

Эта рекуррентная формула позволяет вычислить сумму S_k, если известны предыдущие суммы $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$.

Положив $k=1$, получим:

$$(n+1)^2 = 2S_1 + n + 1.$$

Откуда

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Положив $k=2$, получим:

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1 = 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Откуда

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Итак,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Положив $k=3$, получим:

$$(n+1)^4=4S_3+6S_2+4S_1+n+1.$$

Откуда

$$S_3=\frac{1}{4}[(n+1)^4-(n+1)-6S_2-4S_1]=$$

$$=\frac{1}{4}[(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)]=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Итак,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=S_1^2.$$

Полагая последовательно $n=4$, 5 и т. д., можно найти выражения для S_4, S_5 и т. д.

Укажем еще другой, так называемый индусский, или геометрический, способ суммирования степеней чисел натурального ряда.

Для вычисления суммы S_2 составим следующую таблицу с двойным входом:

1	2	3	4	5	. . . n
1	2	3	4	5	. . . n
1	2	3	4	5	. . . n
1	2	3	4	5	. . . n
1	2	3	4	5	. . . n
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . n
1	2	3	4	5	. . . n

	m
	.
	.
	.
	m
	m
1 2 3 . . .	m

Подсчитаем следующими двумя способами сумму всех чисел, написанных в таблице.

1-й способ. Сумма чисел каждой строки равна S_1, а сумма всех чисел таблицы равна nS_1.

2-й способ. Разобьем числа таблицы на группы по способу, поясненному в правой таблице. Сумма чисел, составляющих m-ю группу, равна:

$$1+2+3+\ldots+m+(m-1)m=\frac{m(m+1)}{2}+(m-1)m=\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m.$$

Просуммировав по $m=1, 2, ..., n$, получим сумму всех чисел таблицы:

$$\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n} m^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m = \frac{3}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1.$$

Сравнив результаты обоих способов суммирования, получим:

$$\frac{3}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1 = nS_1,$$

откуда

$$S_2 = \frac{2n+1}{3}S_1, \quad \text{т. е.} \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Если числа, написанные в таблице, заменить их квадратами и применить изложенный способ суммирования, то можно вычислить S_3 (предоставляем это учащимся в качестве упражнения).

Укажем также следующий способ суммирования кубов. Возьмем обычную Пифагорову таблицу умножения.

1	2	3			n
2	4	6			$2n$
3	6	9			$3n$
4	8	12			$4n$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .
n	$2n$	$3n$			n^2

Просуммируем числа Пифагоровой таблицы указанными выше двумя способами.

Просуммировав первым способом, получим:

$$S_1 + 2S_1 + \ldots + nS_1 = S_1(1+2+3+\ldots+n) = S_1^2.$$

Просуммировав вторым способом, найдем сначала сумму членов, образующих m-ю группу:

$$m(1+2+\ldots+m) + m(1+2+\ldots+m-1) = m\left(\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2}\right) = m^3.$$

Следовательно, сумма всех чисел таблицы равна

$$\sum_{m=1}^{n} m^3 = S_3, \quad \text{откуда получим формулу:} \quad S_3 = S_1^2.$$

Если заменить числа в Пифагоровой таблице их квадратами и применить описанный процесс суммирования (двумя способами), то получится формула

$$S_5 = \frac{3S_2^2 - S_3}{2}$$

(вычисления предоставляем учащимся).

Примеры

1. Вычислить суммы

$\sigma_1 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2$ и $\sigma_2 = 2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$.

Решение. Вычисление второй суммы не представляет затруднений:

$$\sigma_2 = 4(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Для вычисления σ_1 заметим, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

2. Вычислить сумму квадратов n первых натуральных чисел, взятых с чередующимися знаками:

$$1 - 4 + 9 - \ldots (-1)^{n-1} n^2.$$

Решение. Применим формулу, выведенную в примере 2 на стр. 515, положим в ней $q = -1$, тогда получим:

$$S_n = 2\,\frac{(-1)^{n+1} + 1}{(-2)^3} - \frac{(2n-1)(-1)^{n+1} - 1}{(-2)^2} + \frac{n^2(-1)^{n+1}}{-2},$$

откуда

$$S_n = 1 - 4 + 9 - \ldots (-1)^{n-1} n^2 = -\frac{1 + (-1)^{n+1}}{4} - \frac{(2n-1)(-1)^{n+1} - 1}{4} -$$

$$- \frac{n^2(-1)^{n+1}}{2} = \frac{(-1)^n n(n+2)}{2}.$$

Алфавитный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Многочлены

Глава II

Дробная рациональная функция

Глава III

Радикалы и иррациональные функции

Глава IV

Уравнения и неравенства

Глава V

Уравнения и неравенства первой степени

Глава VI

Уравнения и неравенства высших степеней

Глава VII

Показательная и логарифмическая функции над полем действительных чисел

Глава VIII

Последовательности

Глава IX

Комбинаторика

Сергей Иосифович Новоселов

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

Редактор *А. И. Селиверстова*
Художественный редактор *И Ф Муликова*
Технический редактор *Р. К. Воронина*
Корректор *Короткова Т. С*

Сдано в набор 2/VIII—61 г. Подписано к печати 4/VI—62 г
Бумага 60 × 90¹/₁₆ 35,25 печ. л. 30,42 уч.-изд. л
Тираж 50 000 экз. Т-07306 Изд. № Ф.М Х/76 Цена 1 р. 01 к. Зак. 1586

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, К-62. Подсосенский пер., 20

Типография Металлургиздата, Москва, Цветной бульвар, д. 30