

Ю. В. НОВОЖИЛОВ

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ



Ю. В. НОВОЖИЛОВ

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Введение в теорию элементарных частиц, Новожилков Ю. В., монография, изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972.

Монография посвящена систематическому изложению основ современной теории элементарных частиц и ее наиболее перспективных приложений. В вводной части книги рассматриваются исходные положения релятивистской теории рассеяния частиц и вводится представление о внутренней симметрии. Во второй части изучается релятивистская кинематика и отражения, а также уравнения движения для свободных полей. В третьей части книги излагаются изоспиновая и унитарная группы внутренней симметрии и их применения, а также кварковая модель и группа SU_6 . Четвертая часть книги содержит изложение ряда вопросов динамики, опирающейся на аналитические свойства и перекрестную симметрию амплитуды и алгебры токов. Эта часть включает и краткий обзор новейшего развития теории, связанного с концепцией дуальности и моделью Венециано.

Табл. 17, рис. 31, библи. 243 назв.

Юрий Викторович Новожилков

Введение в теорию элементарных частиц

М., 1972 г., 472 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Гладнева*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *Т. С. Плетнева, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 12/IX 1971 г. Подп. к печ. 25/1 1972 г. Бумага 60×90^{1/16}.
 Физ. печ. л. 117071, Условн. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 28,91.
 Тираж 6. 900 экз. Т-01522. Цена книги 2 руб. 06 коп. Заказ № 210

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 4 Главполиграфпрома Комитета по печати
 при Совете Министров СССР Москва, Б. Переяславская, 46
 Отпечатано во второй типографии изд-ва «Наука». Шубинский пер. 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Обозначения и нормировки	9

Часть I

ВВЕДЕНИЕ. СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Глава 1. Основы релятивистской квантовой теории	12
§ 1.1. Однородность пространства-времени и группа Пуанкаре	13
§ 1.2. Квантовая механика и теория относительности	17
§ 1.3. Основные величины	26
§ 1.4. Описание рассеяния. S -матрица	31
Глава 2. Основы феноменологического описания	37
§ 2.1. Взаимодействия и внутренняя симметрия	38
§ 2.2. Симметрия и проблема классификации частиц	43
§ 2.3. Нестабильные частицы	46

Часть II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА И ОТРАЖЕНИЯ

Глава 3. Группа Лоренца и группа $SL(2, c)$	55
§ 3.1. Унимодулярные матрицы второго порядка и преобразование Лоренца	55
§ 3.2. Спиноры	62
§ 3.3. Неприводимые представления и обобщенный спинорный анализ	66
§ 3.4. Приведение прямого произведения представлений и ковариантные коэффициенты Клебша—Гордана	73
§ 3.5. Представления унитарной группы SU_2	75
Глава 4. Квантовомеханическая группа Пуанкаре	79
§ 4.1. Вводные замечания	79
§ 4.2. Трансляции и импульсы. Малая группа и оператор Вигнера	81
§ 4.3. Унитарные представления. Случай $m^2 > 0$	88
§ 4.4. Спинорные функции и квантовые поля при $m^2 > 0$	97
§ 4.5. Унитарные представления в случае $m = 0$. Уравнения движения	103
§ 4.6. Многочастичные состояния	112

Глава 5. Волновые функции и уравнения движения для частиц с произвольным спином	119
§ 5.1. Волновые функции, билинейная эрмитова форма и уравнения движения	120
§ 5.2. Уравнение Дирака	125
§ 5.3. $2(2J + 1)$ -компонентные функции для спина J	139
§ 5.4. Частицы со спином $J = 1$	142
§ 5.5. Волновые функции Рариты—Швингера	145
§ 5.6. Волновые функции Баргмана—Вигнера	150
§ 5.7. Уравнение Деффина—Кеммера	154
Глава 6. Отражения	156
§ 6.1. Полное отражение θ , или СРТ	157
§ 6.2. Операции P , C и T	170
§ 6.3. Отражения и взаимодействия. Распады	180
§ 6.4. Сводка формул по преобразованиям отражения	187
Глава 7. Матрица рассеяния. Кинематика	192
§ 7.1. Задача кинематики	192
§ 7.2. Переменные s , t , u	195
§ 7.3. Сечения процессов. Унитарность и оптическая теорема	200
§ 7.4. Спиральные амплитуды	206
§ 7.5. Спинорные амплитуды (M -функции) и инвариантные амплитуды	211

Часть III

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ

Глава 8. Изоспиновая симметрия	224
§ 8.1. Изоспиновые мультиплеты, гиперзаряд и группа SU_3	224
§ 8.2. Изоспин и отражения. Состояния античастицы. G-четность	229
§ 8.3. Многочастичные состояния и изоспиновые амплитуды. Распады и соотношения между реакциями	234
Глава 9. Группа SU_3	241
§ 9.1. Матрицы λ_a и структурные константы	241
§ 9.2. Фундаментальное представление и кварки. U - и V -спины	244
§ 9.3. Представления группы SU_3	248
Глава 10. SU_3-симметрия и классификация частиц и резонансов	257
§ 10.1. Унитарные представления и мультиплеты	257
§ 10.2. Нарушение симметрии и расщепление масс	267
§ 10.3. Соотношения между амплитудами переходов	270
§ 10.4. Кварковая модель	275
§ 10.5. SU_6 -мультиплеты	278

Часть IV

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Глава 11. S-матрица, токи и кроссинг-симметрия	286
§ 11.1. Интерполирующие поля, токи и редукционная формула	286
§ 11.2. Перекрестная симметрия	293
§ 11.3. Кроссинг-матрицы в случае изоспиновой и унитарной групп	299
§ 11.4. Свойства вершинных частей	302

Глава 12. Аналитические свойства амплитуды рассеяния	308
§ 12.1. Унитарность и абсорбтивная часть	309
§ 12.2. Максимальная аналитичность	317
§ 12.3. Дисперсионные соотношения	321
§ 12.4. Парциальные амплитуды и дисперсионное соотношение при фиксированной энергии. Формула Грибова—Фруассара	328
§ 12.5. Аналитические свойства форм-факторов. Пионный форм-фактор	337
Глава 13. Асимптотика амплитуды рассеяния при высоких энергиях. Полюсы Редже	345
§ 13.1. Рассеяние при высоких энергиях (эксперимент)	345
§ 13.2. Оценка поведения амплитуды при высоких энергиях	349
§ 13.3. Гипотеза полюсов Редже и асимптотическая форма амплитуды	355
§ 13.4. Простейшие следствия гипотезы о полюсах Редже. Дифракционный пик и полное сечение	365
§ 13.5. Свойства траекторий полюсов Редже	375
Глава 14. Дуальность и модель Венециано	385
§ 14.1. Правила сумм при конечной энергии	385
§ 14.2. Дуальность. Дуальные диаграммы	391
§ 14.3. Модель Венециано	387
§ 14.4. Некоторые приложения модели Венециано	403
Глава 15. Электромагнитные и слабые токи. Алгебра токов	408
§ 15.1. Электромагнитные и слабые токи.	409
§ 15.2. Алгебра плотностей и зарядов Гелл-Манна. Группы $SU_2 \times SU_2$ и $SU_3 \times SU_3$	418
§ 15.3. Частичное сохранение аксиального тока	422
§ 15.4. Перенормировка аксиальной константы	426
§ 15.5. Асимптотическая киральная симметрия и спектральные правила сумм	430
§ 15.6. Нарушение CP-инвариантности.	436
Приложение	445
Литература	467

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный этап развития физики элементарных частиц начался в конце 50-х годов. За 60-е годы наши сведения об элементарных (или фундаментальных) частицах и их взаимодействиях необычайно расширились. Вместо двух десятков стабильных или почти стабильных частиц и нескольких резонансов в пион-нуклонном рассеянии нам известно сейчас более двух сотен частиц и резонансов. Наши представления о пространственно-временной симметрии претерпели еще одно изменение, связанное с открытием несохранения комбинированной четности CP (или неинвариантности относительно отражения времени T), и, следовательно, к трем основным типам взаимодействий, возможно, добавилось еще одно — сверхслабое взаимодействие. За это же время была накоплена значительная информация о рассеянии при высоких энергиях и свойствах резонансов.

Для теории элементарных частиц 60-е годы были эпохой симметрии, полюсов Редже, алгебры токов, дуальности. За это время были созданы плодотворные схемы внутренней симметрии, описываемые группами SU_3 и SU_6 , вместе с алгеброй токов и киральной симметрией. В эти же годы были выяснены основные черты асимптотики амплитуды рассеяния и установлен фундаментальный характер понятия траектории полюса Редже. Введенное в последние годы представление о дуальности может стать одним из основных представлений будущей теории.

Бурное развитие физики элементарных частиц сделало очевидным тот факт, что стандартная квантовая теория поля не может претендовать на роль теории элементарных частиц. Тем не менее локальная квантовая теория поля остается той основой, откуда заимствуются общие положения и с помощью которой строятся некоторые модели.

Современную теорию элементарных частиц можно было бы назвать конструктивной теорией. Цель такой теории состоит в том, чтобы, основываясь на хорошо проверенных положениях квантовой теории поля, эксперименте и догадках, отобрать и выработать понятия и представления, существенные для описания элементарных частиц и резонансов. Представления о траекториях Редже, унитарной и киральной симметриях, алгебре токов и дуальности являются успешными примерами конструктивного подхода; они опираются на локальную теорию, но не могут быть однозначно выведены из нее или доказаны. Введением в такую конструктивную теорию элементарных частиц предназначена служить данная книга. Автор надеется, что такая книга может быть полезна и при наличии других руководств по теории элементарных частиц [1—4].

Книга состоит из четырех частей. Первая часть, которая играет роль введения, знакомит читателя с основами описания элементарных частиц. Во второй части излагаются вопросы релятивистской квантовой кинематики; часть третья посвящена проблеме внутренней симметрии, а часть четвертая — тем новым динамическим подходам, которые, по-видимому, окажут наибольшее влияние на развитие теории в будущем. Квантовая электродинамика и перенормировка исключены из данной книги, ибо эти вопросы входят в стандартную квантовую теорию поля [5—7]. Автор не дает систематического обзора экспериментальных данных, а приводит лишь сведения, необходимые для иллюстрации картины явления и соответствия теории с опытом. Приложение книги содержит таблицы частиц, однако основным справочником по свойствам частиц для читателя должны быть специальные ежегодные обзоры [8].

В списке литературы приведены только работы, которые, по мнению автора, являются основными. С более полными списками работ читатель может ознакомиться в книгах [9—20] и в обзорах, включенных в список литературы.

План книги следует в основных чертах программе курсов по теории элементарных частиц, читаемых на физическом факультете Ленинградского университета.

Для чтения книги необходимо знание нерелятивистской квантовой механики и классической релятивистской теории. Весьма полезным также может быть предварительное ознакомление с основами лангранжевой формулировки квантовой теории поля и

диаграммами Фейнмана [5—7]. Курсу теории элементарных частиц обычно предшествует небольшой курс по теории групп. Мы предполагаем поэтому, что читателю известны основные сведения из теории групп [18, 19].

Автор благодарен А. А. Ансельму, М. А. Брауну, Б. В. Медведеву, И. А. Терентьеву и особенно Л. В. Прохорову, В. А. Франке и Ю. П. Щербину за ценные советы.

Автор благодарен сотрудникам и аспирантам кафедры теории ядра и элементарных частиц ЛГУ за помощь и обсуждения.

Некоторые главы первого варианта этой книги были написаны во время пребывания автора на факультете физики и астрофизики Делийского университета. Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою благодарность профессорам Д. С. Котари и Р. С. Мазумдару за гостеприимство и благоприятные условия для работы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И НОРМИРОВКИ

В книге используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Индексы и сокращения

Индексы, обозначенные греческими буквами μ, ν, ρ, \dots , пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Индексы, обозначенные латинскими буквами i, j, k, \dots , принимают значения 1, 2, 3.

Спинорные (изоспинорные) индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2$, но для дираковских биспиноров $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, 4$.

Индексы, обозначенные латинскими буквами a, b, c, \dots , принимают значения 1, 2, 3, ..., 8.

Контравариантные компоненты вектора имеют тот же знак, что и в нерелятивистской теории: $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$.

Метрический тензор $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру (+ - - -).

Произведение векторов: $a_\mu b^\mu = ab = a_0 b_0 - (\mathbf{a}\mathbf{b})$.

Сокращения: $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\square = \partial_0^2 - \partial^2$.

Антисимметричный псевдотензор $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ нормирован условием $\varepsilon_{0123} = -1$, или $\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$.

Элементы объема: $d^4a = da^0 d^3a$, $d^3a = da^1 da^2 da^3$.

Коммутаторы и антикоммутаторы: $AB - BA = [A, B]_- = [A, B]$, $AB + BA = [A, B]_+ = \{A, B\}$.

Операции эрмитова сопряжения, комплексного сопряжения и транспонирования обозначаются, соответственно, значками $+$, $*$ и т. д.

Векторы состояния и группа Лоренца

Спин: J ; спин-четность: J^P ; проекция спина на ось z : σ ; спиральность: λ .

Нормировка состояний:

$$\langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(p - p').$$

Плотность числа частиц, соответствующая этой нормировке:

$$2p_0/(2\pi)^3.$$

Инвариантный фазовый объем:

$$dR_n(p) = \delta\left(p - \sum_r^n p_r\right) \delta(p_1^2 - m_1^2) \dots \delta(p_n^2 - m_n^2) d^4 p_1 \dots d^4 p_n.$$

Представление группы SU_2 есть \mathcal{D}^J .

Конечномерное представление группы Лоренца: $\mathcal{D}^{(I_1, I_2)}$; обозначение: $\mathcal{D}^{(J, 0)} = D^J$.

2×2 -матрицы, сопоставляемые вектору p^μ :

$$p = \sigma_0 p^0 + \boldsymbol{\sigma} p, \quad \tilde{p} = \sigma_0 p^0 - \boldsymbol{\sigma} p.$$

Матрицы Дирака:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_5 = \gamma_5^\dagger = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \\ \gamma_4 \equiv \gamma_0, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \hat{a} = a^\mu \gamma_\mu.$$

Матрица \mathcal{C} : $\gamma_\mu^\tau = \mathcal{C}\gamma_\mu \mathcal{C}^{-1}$, $\mathcal{C}^\tau = -\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger = 1$.

Нормировка дираковских функций: $u^*(p)u(p) = 2p_0$.

Геометрическое (обычное) отражение пространства: P .

Геометрическое (вигнеровское) обращение времени: T .

Зарядовое сопряжение: C .

Полное отражение: $\theta = CPT$.

Внутренняя симметрия

Группа: \mathfrak{G} ; преобразование: G ; представление: $d(G)$; изоспин I_k , $I_3 = t$; генераторы группы $SU_3: F_a$.

Гиперзаряд: Y ; странность: $S = B + Y$.

Барионное число: B .

Лептонные числа: L_e, L_μ .

Амплитуда рассеяния

T -матрица определена равенством

$$\langle a | S - 1 | b \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b) \langle a | T | b \rangle.$$

Парциальная волна: a_J или a_l ; нормировка по двухчастичной унитарности (в случае равных масс):

$$\text{Im } a_J = \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} |a_J|^2.$$

Ссылки на формулы из других глав содержат впереди номер главы: (9.16) есть формула (16) из гл. 9.

ВВЕДЕНИЕ. СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Описание состояний элементарных частиц опирается прежде всего на квантовомеханические закономерности и представления о симметрии.

Принципы симметрии имеют более общий характер, нежели законы движения, и потому отыскание их представляет собой первый шаг к формулировке законов, что особенно важно в теории элементарных частиц, где уравнения движения неизвестны. Знание принципа симметрии или же группы симметрии позволяет сразу же найти естественный набор основных величин (генераторы группы и ее инварианты), с помощью которых описываются состояния частиц.

Для физики элементарных частиц как науки, в которой не все основные представления можно считать вполне установленными, существенна и другая сторона метода симметрии. Метод симметрии есть общий подход к физическому описанию любых явлений. Это есть метод введения логически замкнутого физического описания, в котором каждый этап приближения к действительности наделяется четкими свойствами симметрии. Именно благодаря этому на каждом этапе приближения существует точная физическая интерпретация теории, рассказывающая об описываемом ею идеализированном мире. Элементарная частица при этом определяется как объект, состояния которого образуют базис неприводимого представления группы симметрии.

Симметрии подразделяются на пространственно-временные (или геометрические) и внутренние (или динамические), отображающие свойства взаимодействий.

Глава 1

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Теория элементарных частиц представляет собой релятивистскую теорию. В основе ее аппарата находятся квантовомеханическое описание и принцип относительности Эйнштейна.

Принцип относительности Эйнштейна определяет группу пространственно-временной симметрии в классической физике как неоднородную группу Лоренца, или группу Пуанкаре \mathcal{P}_+^\dagger . В квантовой механике преобразования этой группы связывают «эквивалентные» положения классических приборов, участвующих в квантовом опыте и создающих квантовые состояния. При этом предполагается, что все преобразования действительно осуществимы, в том числе и те, которые соответствуют переходу к состояниям физических систем с бесконечно большими энергиями.

Как известно, квантовому состоянию соответствует не один, а множество векторов состояния («единичный луч») в гильбертовом пространстве. Это обстоятельство вместе с тем фактом, что пространство параметров группы \mathcal{P}_+^\dagger двусвязно, приводят в итоге к тому, что группой пространственно-временной симметрии в квантовой механике является не группа Пуанкаре \mathcal{P}_+^\dagger , а ее универсальная покрывающая группа $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$, или квантовомеханическая группа Пуанкаре. Неприводимые унитарные представления группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$ и описывают состояния элементарных частиц. Инварианты группы Пуанкаре — масса и спин — характеризуют инвариантные свойства частицы, а генераторы группы Пуанкаре — возможные наблюдаемые, т. е. переменные, независимые измерения которых фиксируют состояние релятивистской частицы.

Представления квантовомеханической группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$ содержат как однозначные, так и двузначные представления классической группы \mathcal{P}_+^\dagger . Это означает, что и целочисленные, и полуцелые значения спина отвечают однозначным представлениям квантовомеханической группы. Существование физических объектов с полуцелым спином является, таким образом, непосредственным следствием релятивистской квантовой теории.

После того, как установлены правила для описания одночастичных состояний, возникает задача описания рассеяния частиц.

В гл. 1 мы проследим (без доказательств) цепь рассуждений, приводящую к квантовомеханической группе Пуанкаре как группе симметрии, а также простейшие следствия, относящиеся к характеристике состояний частиц. Мы напомним также те исходные постулаты, которые лежат в основе квантовомеханической теории рассеяния.

§ 1.1. Однородность пространства-времени и группа Пуанкаре

В процессах с элементарными частицами гравитационное поле не играет существенной роли ввиду малости константы тяготения; во всяком случае, в настоящее время нет экспериментальных фактов или веских теоретических соображений, свидетельствующих о необходимости учета поля тяготения частиц. Поэтому в теории элементарных частиц можно считать пространство-время однородным и изотропным, а геометрию — псевдоевклидовой. В соответствии с этим должен выполняться принцип относительности, т. е. должна иметь место равноправность систем отсчета, отличающихся друг от друга по ориентации и местоположению в пространстве, выбору начального момента времени и относительной скорости (равномерного и прямолинейного) движения.

Все такие (инерциальные) системы эквивалентны в том отношении, что в любых двух системах соответственные физические явления протекают одинаково. Связывая координату x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) с системой отсчета, мы постулируем, следовательно, инвариантность физических законов относительно линейных преобразований от одной системы отсчета к другой:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1)$$

при условии, что сохраняется квадрат длины интервала

$$(x - y)^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu). \quad (2)$$

В определении (1) предполагается, что смещение совершается после однородного преобразования.

Линейные преобразования, сохраняющие форму (2), образуют неоднородную группу Лоренца, или группу Пуанкаре. Среди них содержатся не только смещения и вращения (обычные и гиперболические) в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, но и отражения пространства-времени P , T и $PT=I$:

$$\begin{aligned} Px^k &= -x^k, & Px^0 &= x^0; \\ Tx^k &= x^k, & Tx^0 &= -x^0; \\ PTx^\mu &= -x^\mu \\ (k &= 1, 2, 3; \quad \mu = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Интервал (2) остается неизменным, если коэффициенты Λ_{μ}^{ν} удовлетворяют условию

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda^{\mu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\nu}, \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\rho\beta} g^{\beta\nu}, \quad (4)$$

где отличные от нуля величины $g_{\mu\nu}$ равны $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Для матрицы преобразования Λ с матричными элементами Λ^{μ}_{σ} условие (4) принимает вид

$$\Lambda^T g \Lambda = g.$$

Из этого соотношения вытекает, что определитель матрицы Λ в общем случае равен

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (5)$$

Из равенства (4) следует также, что коэффициенты $\Lambda^{\mu\nu}$ обладают следующим свойством:

$$(\Lambda^{00})^2 - \sum (\Lambda^{0k})^2 = 1, \quad (6)$$

или же $(\Lambda^{00})^2 \geq 1$. Это значит, что существуют две возможности:

$$\Lambda^{00} \geq 1 \quad \text{и} \quad \Lambda^{00} \leq -1. \quad (7)$$

Таким образом, общие преобразования (1) могут быть подразделены на 4 класса, отличающиеся по знакам величин $\det \Lambda$ и Λ^{00} . Эти классы преобразований соответствуют следующим связным компонентам общей группы Пуанкаре.

1. $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$: $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^{00} \geq 1$. Направление времени остается неизменным, пространственное отражение также отсутствует. Преобразования (1) описывают вращения и смещения в псевдоевклидовом пространстве, образуя собственную ортохронную группу Пуанкаре $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$.

2. $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$: $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^{00} \leq -1$. Преобразования (1) включают и отражение времени. Так как, однако, преобразование унимодулярно, то оно должно содержать также и отражение пространственных координат. Иначе говоря, каждое преобразование этого класса можно представить в виде последовательности двух операций: преобразования, принадлежащего классу $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$, и отражения всех координат РТ. В частности, сама операция РТ содержится в $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$. Операции Р и Т в отдельности не входят в $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$ в силу условия $\det \Lambda = 1$. Преобразования классов $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ и $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$ образуют вместе собственную группу Пуанкаре \mathcal{P}_{+} .

3. $\mathcal{P}_{-}^{\uparrow}$: $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^{00} \geq 1$. Преобразования этого класса можно записать в виде произведения преобразования из класса $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ и отражения пространственных координат. Вместе с преобразованиями класса $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ они образуют ортохронную группу Пуанкаре.

4. $\mathcal{P}_{-}^{\downarrow}$: $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^{00} \leq -1$. Направление времени изменится. Каждое преобразование этого класса можно представить

в виде последовательности преобразования класса \mathcal{P}_+^\dagger и отражения времени.

Общая группа Пуанкаре может быть символически изображена в виде суммы

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_+^\dagger + \text{PT}\mathcal{P}_+^\dagger + \text{P}\mathcal{P}_+^\dagger + \text{T}\mathcal{P}_+^\dagger, \quad (8)$$

где отдельные слагаемые соответствуют компонентам 1—4.

Из всех компонент группы Пуанкаре только первая \mathcal{P}_+^\dagger содержит единичное преобразование. Поэтому преобразования, принадлежащие к различным классам, не могут быть связаны каким-либо непрерывным преобразованием, относящимся к \mathcal{P}_+^\dagger . Преобразования одного и того же класса могут быть получены друг из друга с помощью преобразований из \mathcal{P}_+^\dagger .

Классификация состояний частиц в первую очередь связана с изучением собственной ортохронной группы \mathcal{P}_+^\dagger . Элемент (a, Λ) группы \mathcal{P}_+^\dagger определяется 4-вектором смещения a^μ и ортохронным унимодулярным преобразованием Λ . Закон умножения двух элементов (a_1, Λ_1) и (a_2, Λ_2) есть

$$(a_1, \Lambda_1) (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2). \quad (9)$$

В частности, $(a, \Lambda) = (a, 1)(0, \Lambda)$ в согласии с определением (1) неоднородного преобразования как произведения однородного преобразования и последующего смещения. Единичный элемент группы \mathcal{P}_+^\dagger равен

$$E = (0, 1), \quad (10)$$

а обратный элемент записывается в виде

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}). \quad (11)$$

Закон умножения (9) элементов группы можно формально представить в виде матричного закона умножения, если ввести матрицы 5-го порядка

$$(a, \Lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

осуществляющие неунитарное представление группы Пуанкаре.

Преобразование (a, Λ) характеризуется 10 параметрами: 4 смещениями a^μ , 3 параметрами трехмерных вращений и 3 параметрами, связанными с переходом к другой инерциальной системе («гиперболическими вращениями»). Шесть параметров лоренцева преобразования Λ удобно ввести, воспользовавшись тем фактом, что любое Λ можно представить как произведение чисто лоренцева преобразования H (без вращения осей) и трехмерного вращения R :

$$\Lambda = RH. \quad (13)$$

Произвольное чисто лоренцево преобразование $x' = Hx$ характеризуется полностью заданием направления движения \mathbf{v} ($\mathbf{v}^2 = 1$) и величиной скорости $v = \text{th } \beta$ ($0 < \beta < \infty$):

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \text{ch } \beta + (\mathbf{v}\mathbf{x})\text{sh } \beta, \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + x^0 \mathbf{v} \text{sh } \beta + \mathbf{v}(\mathbf{x}\mathbf{v})(\text{ch } \beta - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

Если направление \mathbf{v} закреплено, то

$$H(\mathbf{v}, \beta_1) H(\mathbf{v}, \beta_2) = H(\mathbf{v}, \beta_1 + \beta_2).$$

Произвольное вращение $y = Rx'$ всегда может быть представлено как вращение вокруг некоторой оси \mathbf{n} ($\mathbf{n}^2 = 1$):

$$\begin{aligned} y^0 &= x'^0, \\ \mathbf{y} &= R(\mathbf{n}, \alpha) \mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cos \alpha + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x}') (1 - \cos \alpha) + [\mathbf{x}' \mathbf{n}] \sin \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

$$(0 \leq \alpha \leq \pi).$$

Нормали \mathbf{n} и \mathbf{v} могут быть выражены через углы в полярных координатах:

$$\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

$$\mathbf{v} = (\sin \gamma \cos \delta, \sin \gamma \sin \delta, \cos \gamma) \quad (0 \leq \delta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi).$$

Тогда в качестве 6 параметров преобразования Λ удобно выбрать ξ_k и η_k ($k = 1, 2, 3$):

$$\xi = \alpha \mathbf{n}, \quad \eta = \beta \mathbf{v}. \quad (16)$$

Единичному преобразованию соответствует $\xi = \eta = 0$.

Пространство параметров ξ, η является двусвязным. Действительно, если, согласно (14), между лоренцевым преобразованием и параметрами η_1, η_2, η_3 существует взаимно однозначное соответствие, то наборы параметров $\xi = \pi \mathbf{n}$ и $\xi = -\pi \mathbf{n}$, согласно (15), описывают одно и то же вращение. Следовательно, эти точки ξ -пространства должны быть отождествлены, что и делает ξ -пространство двусвязным. Пространство ξ есть сфера радиуса π с центром в $\xi = 0$, внутри которой каждая точка $\xi = \alpha \mathbf{n}$ сопоставляется вращению $R(\mathbf{n}, \alpha)$, а точки на концах диаметра идентичны (рис. 1), так что диаметр следует рассматривать как замкнутый путь. Каждая точка

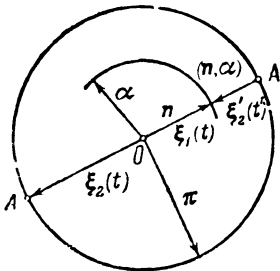


Рис. 1.

(\mathbf{n}, α) может быть поэтому достигнута из центра двумя неэквивалентными путями 1 и 2, которые нельзя совместить непрерывными деформациями: либо непосредственно из центра, например, по линии

$\xi_1(t) = n\alpha t$ ($0 < t < 1$) — путь l_1 , либо со скачком через диаметр, например, по линии $\xi_2(t) = -n\pi t$ ($0 < t < 1$) и затем по линии $\xi_2'(t') = n(\alpha - \pi)t' + n\pi$ ($0 < t' < 1$) — путь l_2 .

В квантовой механике односвязность пространства параметров становится существенной. Существует известный способ перехода от многосвязной топологической группы \mathfrak{G} к односвязной покрывающей группе $\bar{\mathfrak{G}}$, элемент которой $\bar{g} = \{g, l(t)\}$ характеризуется элементом исходной группы g и путем $l(t)$ от единичного элемента до g . В случае вращений R по путям 1 и 2 покрывающая группа \bar{R} имеет элементы

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(n, \alpha) &= \{R(n, \alpha), l_1 = R(n, t\alpha)\}, \\ \bar{R}_2(n, \alpha) &= \{R(n, \alpha), l_2 = R(-n, (2\pi - t\alpha))\}, \end{aligned} \quad (17)$$

ибо формально $R(n, \alpha) = R(-n, 2\pi - \alpha)$ при $\pi < \alpha < 2\pi$.

Комбинируя (14) и (17), нетрудно написать элемент покрывающей группы Лоренца.

§ 1.2. Квантовая механика и теория относительности

Напомним характерные черты квантовомеханического описания. В квантовой механике физические величины изображаются самосопряженными операторами α , которые действуют на векторы состояния $|\gamma\rangle$, образующие гильбертово пространство \mathcal{H} . Вектор состояния $|\gamma\rangle$ описывает физическую систему вероятностным образом: если система находится в состоянии γ , то величина $W_{\rho\gamma} = |\langle\rho|\gamma\rangle|^2$ равна вероятности обнаружения системы в состоянии ρ , при этом $\sum_{\rho} W_{\rho\gamma} = 1$. Поэтому векторы $|\gamma\rangle$ и $u|\gamma\rangle$, отличающиеся фазовым множителем u ($|u| = 1$), описывают одно и то же состояние, так что соответствие между физическим состоянием γ и вектором $|\gamma\rangle$ неоднозначно.

Совокупность векторов гильбертова пространства $|\gamma\rangle$, отличающихся друг от друга лишь фазовыми множителями, называют единичным лучом γ ; все векторы единичного луча могут быть получены путем умножения одного из них на фазовые множители. Таким образом, каждому состоянию сопоставляется взаимно однозначно единичный луч.

Когда α имеет определенное значение α' в некотором состоянии $|\alpha'\rangle$, то выполняется равенство

$$\alpha|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle. \quad (18)$$

Если операторы α_1 и α_2 коммутируют ($[\alpha_1, \alpha_2] = 0$), то существует состояние $|\alpha'_1, \alpha'_2\rangle$, возникающее вследствие совместного измерения этих величин. В квантовой механике предполагается, что для каждой физической системы существует полный набор взаимно коммутирующих операторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, по собственным значениям которого

$\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ можно было бы полностью охарактеризовать состояние $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle$. Состояния, принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны:

$$\langle \alpha''_1, \dots, \alpha''_n | \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle = \delta_{\alpha''_1 \alpha'_1} \dots \delta_{\alpha''_n \alpha'_n}. \quad (19)$$

Очевидно, можно рассматривать различные наборы взаимно коммутирующих операторов. Любая физическая величина должна входить по крайней мере в один из полных наборов, так как всегда существуют такие состояния, в которых она имеет определенное значение (постулат о существовании «чистых состояний»). Согласно этому постулату, в частности, состояние системы может быть установлено с окончательной точностью с помощью однократного измерения каждой из величин, входящих в полный набор.

Далее, в квантовой механике постулируется, что множеством векторов $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle$ с различными значениями $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ исчерпываются все возможные состояния системы (постулат о полноте).

Произвольное состояние системы может быть представлено в виде суперпозиции базисных состояний (принцип суперпозиции):

$$|\gamma\rangle = \sum_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n} \psi_\gamma(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) |\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle. \quad (20)$$

Коэффициенты разложения $\psi_\gamma(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n | \gamma \rangle$ называются иногда волновой функцией в $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -представлении.

Рассматриваемые нами состояния есть состояния гейзенберговского типа. Такое состояние $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle$ может быть получено в результате серии последовательных измерений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые, вообще говоря, могут выполняться в любое время изучения системы. Оно описывает свойства системы, включая, например, и взаимодействие между ее отдельными частями. Операторы α в этом случае могут зависеть от времени. Это значит, что наблюдение величины α в момент x^0 может потребовать иного эксперимента, а не того, который использовался для наблюдения α в момент $x^{0'}$.

Состояния $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle$ следует отличать от состояний шредингеровского типа, которые создаются в итоге мгновенного измерения всех величин $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в один и тот же момент x^0 . Совокупность шредингеровских состояний, относящихся к различным временам, содержит ту же информацию, что и состояние $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\rangle$.

Правило свертотбора. Не любой самосопряженный оператор может быть наблюдаемым, так же как и не любой вектор $|\rho\rangle$ соответствует физическому состоянию. Такое положение возникает, например, когда среди наблюдаемых существуют величины Q_i , входящие во все полные наборы. Операторы Q_i тогда коммутируют со всеми остальными операторами физических величин. В этом случае разложение (20) физического состояния $|\gamma\rangle$ может содержать

в правой части только векторы, относящиеся к одной и той же совокупности собственных значений Q_i' .

Действительно, если $|\gamma\rangle$ — физическое состояние, то должен быть наблюдаемым и оператор проектирования на это состояние $P(\gamma) = |\gamma\rangle\langle\gamma|$. Так как по условию Q_i коммутирует со всеми наблюдаемыми, то $[Q_i, P(\gamma)] = 0$. Равенство $Q_i |\gamma\rangle\langle\gamma| - |\gamma\rangle\langle\gamma| Q_i = 0$ выполняется, лишь если $|\gamma\rangle$ есть собственный вектор Q_i . Гильбертово пространство физических состояний в этом случае разлагается в прямую сумму когерентных пространств, в каждом из которых состояния отвечают одному и тому же набору значений Q_i' . Разложение физического состояния $|\gamma\rangle$ по базисным следует тогда писать в виде

$$|\gamma\rangle = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \psi_\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) |\alpha_1, \dots, \alpha_n, (Q_i')\rangle, \quad (21)$$

где значения $(Q_i') = Q_1', \dots, Q_n'$ одинаковы для всех базисных векторов в данном когерентном пространстве. Это правило, ограничивающее принцип суперпозиции, называется правилом свертотбора [21, 22]. К величинам типа Q_i относятся строго сохраняющиеся аддитивные квантовые числа: электрический, барионный и лептонные заряды.

Согласно правилу свертотбора операторы наблюдаемых величин не могут иметь матричных элементов перехода между состояниями, принадлежащими различным когерентным пространствам. Действительно, если самосопряженный оператор B обладает матричными элементами $\langle Q'' | B | Q' \rangle \neq 0$, соединяющими разные когерентные пространства, то он не может коммутировать с Q . Но в этом случае оператор B не содержится ни в одном из полных наборов наблюдаемых (всегда включающих Q).

Симметрия и инвариантность. Чтобы пояснить эти понятия, обратимся к роли приборов ¹⁾ в квантовомеханическом описании. Приборы участвуют в квантовомеханическом описании дважды: сначала с помощью некоторого прибора готовится состояние квантового объекта, затем с помощью другого прибора производится измерение над объектом. Эти приборы называют приготовляющим и измерительным. В результате приготовления состояния γ возникает, как мы говорили ранее, единичный луч γ в гильбертовом пространстве. Приготовленный квантовый объект затем взаимодействует с измерительным прибором. Если в процессе измерения нужно выяснить, находится ли объект в состоянии ρ , то измерительному прибору соответствует в гильбертовом пространстве единичный луч ρ .

¹⁾Как обычно, под прибором понимается устройство, изменение состояния которого при взаимодействии с изучаемой физической системой мы можем регистрировать. Прибор должен поэтому завершаться макроскопическим указателем, фиксирующим результат наблюдения в терминах классической физики.

Вероятность найти объект в состоянии ρ , если он был приготовлен в состоянии γ , равна $W_{\rho\gamma} = |\langle \rho | \gamma \rangle|^2$, где $|\rho\rangle$, $|\gamma\rangle$ — какие-либо векторы, принадлежащие соответственно лучам ρ и γ . Вероятности переходов $W_{\rho\gamma}$ вместе со средними значениями физических величин $\bar{\alpha} = \langle \gamma | \alpha | \gamma \rangle$ представляют собой непосредственные результаты экспериментального изучения физической системы. Именно по значениям $W_{\rho\gamma}$ и $\bar{\alpha}$ мы судим о степени приближенности модельных представлений о системе.

Две системы a и b , наблюдаемые с помощью одних и тех же приборов (лаборатории) X , будут тождественны, если одинаковы совокупности их возможных физических состояний: $\{\gamma(a)\} = \{\gamma(b)\}$. Состояния $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ этих систем будут, вообще говоря, различны.

Так как наборы $\{\gamma(a)\}$ и $\{\gamma(b)\}$ одинаковы, то между их отдельными членами существует взаимно однозначное соответствие $\gamma(a) \leftrightarrow \gamma(b)$. Изменив порядок наблюдений над a , мы можем установить такое соответствие и иным образом: $\gamma(a) \leftrightarrow \gamma'(b)$ и т. д. Все подобные соответствия образуют группу отображений $\gamma \leftrightarrow \gamma'$ состояний набора $\{\gamma\}$ на себя. Произведение ее элементов есть последовательность отображений $\gamma \rightarrow \gamma' \rightarrow \gamma'' = \gamma \rightarrow \gamma''$, которая соответствует единственному отображению первоначального наблюдения на конечное, а единичный элемент есть $\gamma \rightarrow \gamma$. Обратный элемент к $\gamma \rightarrow \gamma'$ есть, очевидно, $\gamma' \rightarrow \gamma$.

Общая группа взаимных отображений физических состояний $\gamma \rightarrow \gamma'$ включает в себя подгруппу отображений, оставляющих неизменной вероятность перехода $1 \rightarrow 2$:

$$|\langle \gamma_2 | \gamma_1 \rangle|^2 = |\langle \gamma'_2 | \gamma'_1 \rangle|^2. \quad (22)$$

Свойства таких отображений характеризуются следующей общей теоремой Вигнера [18, 23], которую мы приводим без доказательства.

«Всякое взаимно однозначное отображение $\gamma \rightarrow \gamma'$ множества единичных лучей γ гильбертова пространства \mathcal{H} на множество единичных лучей γ' гильбертова пространства $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, которое удовлетворяет условию

$$|\langle \gamma_2 | \gamma_1 \rangle|^2 = |\langle \gamma'_2 | \gamma'_1 \rangle|^2,$$

порождается либо унитарным, либо антиунитарным оператором, определенным с точностью до фазового множителя».

Унитарное преобразование U обладает свойствами:

$$U(c_1 |\alpha'_1\rangle + c_2 |\alpha'_2\rangle) = c_1 U |\alpha'_1\rangle + c_2 U |\alpha'_2\rangle, \\ UU^+ = U^+ U = 1,$$

где c_1, c_2 — любые комплексные числа. При преобразовании

$$|\gamma'\rangle = U |\gamma\rangle, \quad \alpha' = U \alpha U^{-1} \quad (23)$$

амплитуды вероятности и матричные элементы наблюдаемых не меняются:

$$\langle \gamma'_2 | \gamma'_1 \rangle = \langle \gamma_2 | \gamma_1 \rangle, \quad \langle \gamma'_2 | \alpha' | \gamma'_1 \rangle = \langle \gamma_2 | \alpha | \gamma_1 \rangle.$$

Антиунитарное преобразование A содержит в себе операцию комплексного сопряжения:

$$A(c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle) = c_1^* A |\alpha_1\rangle + c_2^* A |\alpha_2\rangle;$$

оно заменяет амплитуду вероятности на комплексно сопряженную величину:

$$\langle A\gamma_1 | A\gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1 | \gamma_2 \rangle^* = \langle \gamma_2 | \gamma_1 \rangle. \quad (24)$$

Таким образом, операции симметрии описываются унитарными или антиунитарными операторами. Однако, разумеется, не любое отображение, относительно которого инвариантна вероятность переходов, можно сопоставить операции симметрии. Например, некоторые отображения могут описывать особенности взаимодействия в данной частной задаче. Унитарное преобразование U может также описывать «перенумерацию» базисных векторов состояния $|\alpha'\rangle$.

К принципам симметрии относятся обычно постулаты о достаточно универсальных свойствах физических систем. Пространственно-временная симметрия выражает релятивистскую инвариантность законов движения. Внутренняя симметрия характеризует свойства взаимодействий данного класса. Процессы с элементарными частицами могут отличаться также по отношению к операциям дискретной симметрии (отражениям пространства-времени).

Среди симметрий различного типа пространственно-временная симметрия занимает особое место: только в этом случае можно дать точный рецепт осуществления любых преобразований симметрии. Невозможно указать реальный способ создания приборной установки с обращенным направлением времени. Преобразования внутренней симметрии, как правило, выводят вектор состояния из когерентного пространства, превращая тем самым это состояние в нефизическое (см. § 9.1).

Релятивистская инвариантность. В квантовой механике «инерциальная система отсчета X » связывается с совокупностью X макроскопических приборов (лабораторией), необходимых для полного описания изучаемой физической системы и движущихся неускоренно. С помощью этих приборов можно готовить и измерять любые состояния данной физической системы.

Преобразованию группы Пуанкаре, характеризующему элементом $g = (a, \Lambda)$, можно придать двойкий смысл. С одной стороны, оно может описывать изменение пространственно-временного расположения физической системы при двух измерениях в одной и той же системе отсчета, т. е. различие в расположении двух тождественных физических систем относительно данной системы отсчета

(«активная точка зрения»). С другой стороны, это преобразование может характеризовать отличие двух инерциальных систем отсчета, в которых рассматривается одна и та же физическая система («пассивная точка зрения»).

При «активной» интерпретации релятивистского преобразования с элементом $g = (a, \Lambda)$ каждому физическому состоянию γ сопоставляется преобразованное состояние γ_g . Состояние γ_g отличается от состояния γ расположением приготавливающих приборов. При приготовлении состояния γ_g установка с приготавливающими приборами сдвинута, повернута или движется равномерно относительно прежнего положения (сообразно геометрическому смыслу g). Следовательно, преобразование g порождает взаимно однозначное отображение на себя $\gamma \rightarrow \gamma_g$ множества всех тех единичных лучей в гильбертовом пространстве, которые отвечают физическим состояниям. Отсюда вытекает, что все множество векторов состояния, образующее гильбертово пространство, инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре.

Аналогичным образом, каждому состоянию ρ , создаваемому измерительными приборами, можно сопоставить преобразованное состояние ρ_g . Чтобы найти вероятность перехода $\gamma_g \rightarrow \rho_g$, нам нужно повторить опыт $\gamma \rightarrow \rho$ (над той же или тождественной физической системой), но со всеми приборами (и приготавливающими, и измерительными), передвинутыми или движущимися относительно первоначального положения согласно смыслу $g = (a, \Lambda)$. Существование пространственно-временной симметрии проявляется в равенстве вероятностей переходов $\gamma \rightarrow \rho$ и $\gamma_g \rightarrow \rho_g$, т. е. в инвариантности теории относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$|\langle \rho | \gamma \rangle|^2 = |\langle \rho_g | \gamma_g \rangle|^2. \quad (25)$$

Здесь $|\gamma\rangle, |\rho\rangle$ — любые векторы, входящие в состав лучей γ, ρ .

В «пассивной» интерпретации преобразований $g = (a, \Lambda)$ сравниваются описания одной и той же физической системы в двух инерциальных системах отсчета X и Y , т. е. в двух лабораториях X и $Y = gX$. Эти лаборатории предполагаются эквивалентными в том смысле, что наборы возможных наблюдений в X и Y одинаковы. Элементы группы Пуанкаре описывают взаимное расположение эквивалентных лабораторий, и все такие эквивалентные лаборатории могут быть перечислены и занумерованы относительно какой-либо фиксированной лаборатории с помощью характеристик группы. Эквивалентные лаборатории не следует мыслить как экземпляры одной лаборатории, так как при этом уже используется представление о группе движений в пространстве-времени.

Эквивалентность лабораторий X и Y означает, что имеется взаимно однозначное соответствие $\alpha_i(X) \leftrightarrow \alpha_i(Y)$ между всеми операторами $\alpha_i(X)$ и $\alpha_i(Y)$, составляющими полные наборы наблюдаемых, которые создаются в X и Y . Операторы $\alpha(X)$ и $\alpha(Y)$ описывают одну

и ту же наблюдаемую с точки зрения систем X и Y ; $\alpha(Y)$ есть такой оператор для некоторого момента x^0 в системе X , который с точки зрения системы Y имеет тот же вид, что и оператор $\alpha(X)$ в системе X в этот же момент x^0 . Отображение $\alpha(X) \rightarrow \alpha(Y)$ представляет собой «перевод» языка системы отсчета X на язык эквивалентной системы Y .

Пассивные преобразования «перевода» могут, вообще говоря, и не совпадать с преобразованиями симметрии; группа «перевода» обеспечивает только возможность пересчета наблюдаемых из одной системы отсчета в другую, т. е. ковариантность описания. Если, например, учитываются эффекты тяготения, то группа «перевода», будет существовать, хотя инвариантность относительно преобразований группы Пуанкаре отсутствует.

Преобразования «перевода» становятся преобразованиями симметрии, когда выполняется принцип относительности, согласно которому физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. В этом случае вероятность перехода между состояниями системы a $\gamma(a, X)$ и $\rho(a, X)$ в системе отсчета X будет равна вероятности перехода между состояниями $\gamma(a, Y)$ и $\rho(a, Y)$ той же физической системы a , описываемыми с точки зрения системы отсчета Y .

Унитарность и непрерывность представлений группы \mathcal{P}_+^\uparrow . Мы будем придерживаться активной интерпретации преобразований группы Пуанкаре. Рассмотрим отображение векторов состояния, вызываемое преобразованием собственной ортохронной группы $g = (a, \Lambda)$:

$$|\gamma\rangle \rightarrow |\gamma_g\rangle = U(g)|\gamma\rangle, \quad (26)$$

которое сохраняет вероятность (25), и выясним свойства оператора $U(g)$. Само обозначение оператора, осуществляющее отображение в (26), предполагает, что оператор $U(g)$ может зависеть только от свойств преобразования g , но не от свойств состояния $|\gamma\rangle$. В противном случае влияние свойств конкретного состояния нельзя было бы отделить от физических закономерностей. Мы увидим, что для преобразований $g = (a, \Lambda)$ оператор $U(g)$ унитарен и непрерывен по g . Далее мы увидим, что неопределенность в выборе фазового множителя у вектора состояния вместе с двусвязностью пространства параметров группы Лоренца приводят к тому, что векторы состояния преобразуются по унитарным представлениям универсальной покрывающей группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ группы Пуанкаре \mathcal{P}_+^\uparrow .

Правила свертывания требуют, чтобы единичные лучи γ и ρ в (25) лежали в одном и том же когерентном пространстве. Соответственные лучи γ_g и ρ_g должны содержаться в одном когерентном пространстве. Иначе вектор $(|\gamma_g\rangle + |\rho_g\rangle)/\sqrt{2}$ не будет описывать физического состояния, в то время как вектор $(|\gamma\rangle + |\rho\rangle)/\sqrt{2}$

такое состояние описывает. Таким образом, при отражении $\gamma \rightarrow \gamma_g$, связанном с преобразованием группы Пуанкаре (1), отдельные когерентные пространства переходят либо в себя, либо друг в друга.

Акт измерения в квантовой механике производится с помощью приборов, описываемых классически. Преобразование системы отсчета, связанной с приборами, есть макроскопическое преобразование. Мы постулируем поэтому, что вероятность перехода

$$W_{\rho \gamma_g} = |\langle \rho | \gamma_g \rangle|^2 = |\langle \rho | U(g) | \gamma \rangle|^2 \quad (27)$$

является непрерывной функцией параметров, от которых зависит преобразование $g = (a, \Lambda)$. Здесь γ — единичный луч, отвечающий физическому состоянию в системе отсчета X , а γ_g — «соответственный» луч, отнесенный к системе отсчета Y . Система Y получается из X преобразованием $g = (a, \Lambda)$. Наконец, ρ обозначает любой фиксированный луч.

Из непрерывности (27) следует, что матричные элементы оператора $U(g)$ непрерывны. Далее, группа \mathcal{P}_+^\uparrow содержит тождественное преобразование, а различные когерентные пространства взаимно ортогональны. Это значит, что постулированная непрерывность может иметь место только при условии, что каждое когерентное пространство переходит в себя.

Последовательное применение двух преобразований (26) дает

$$|\gamma_{g_1 g_2}\rangle = U(g_1) U(g_2) |\gamma\rangle. \quad (28)$$

Результат должен быть эквивалентен прямому преобразованию $|\gamma\rangle \rightarrow |\gamma_{g_3}\rangle$ при $g_3 = g_1 g_2$. Однако вектор состояния $|\gamma\rangle$ определен лишь с точностью до неопределенного фазового множителя ω , так что $|\gamma_g\rangle$ и $\omega |\gamma_g\rangle$ описывают одно и то же состояние. Итак, в общем случае следует писать

$$|\gamma_{g_1 g_2}\rangle = \omega(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2) |\gamma\rangle$$

и правило умножения преобразований есть

$$U(g_1 g_2) = \omega(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2). \quad (29)$$

Унитарность оператора $U(g)$ для преобразований группы \mathcal{P}_+^\uparrow вытекает из того факта, что \mathcal{P}_+^\uparrow содержит тождественное преобразование $E = (0, 1)$. Каждое малое (но конечное) преобразование g вблизи E можно представить как квадрат $g = g'^2$ некоторого другого преобразования g' . Это значит, согласно (29), что $U(g) = \omega(g', g') U^2(g')$. Квадрат как унитарного U , так и антиунитарного оператора A есть унитарный оператор:

$$A^2(c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle) = c_1 A^2 |\alpha_1\rangle + c_2 A^2 |\alpha_2\rangle,$$

$$\langle A^2 \rho | A^2 \gamma \rangle = \langle \rho | \gamma \rangle.$$

Поэтому $U(g)$ всегда унитарно в конечной окрестности E . Произвольное же преобразование получается применением конечного числа операторов $U(g)$ и потому всегда унитарно.

Комплексный множитель $\omega(g_1, g_2)$ в (29) зависит от выбора формы представления $U(g)$. Унитарный оператор $U(g)$ можно умножить на фазовый множитель $U'(g) = \varphi(g)U(g)$ ($|\varphi(g)| = 1$), не изменив унитарного характера $U(g)$. Множитель $\omega(g_1, g_2)$ тогда заменяется другим:

$$\omega'(g_1, g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\omega(g_1, g_2)\varphi^{-1}(g_1 g_2). \quad (30)$$

Оба множителя ω и ω' равноправны с точки зрения унитарных представлений $U(g)$. Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы устранить фазовый произвол в правиле умножения (29) для случая преобразований g_2 , мало отличающихся от тождественного E , когда $g_1 = E$ в (30). Однако этот результат может быть распространен на конечные преобразования только в том случае, когда область изменения параметров односвязна. В случае же преобразований Лоренца пространство параметров ξ_k (формула (17)) оказывается двусвязным. Поэтому, если сделать пространство ξ односвязным и перейти от \mathcal{P}_+^\uparrow к покрывающей группе $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, то множитель ω в (29) исчезнет, но под U следует понимать унитарное представление группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ [23]. Обозначая посредством \bar{g} элемент группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, имеем

$$U(\bar{g}_1)U(\bar{g}_2) = U(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \quad (31)$$

или обычное правило умножения представлений группы. Доказательство формулы (31) было дано Баргманом [24].

Таким образом, условие релятивистской инвариантности в квантовой механике эквивалентно требованию, чтобы векторы состояния преобразовывались по непрерывным унитарным представлениям универсальной покрывающей группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ группы Пуанкаре, не содержащей отражений. Группу $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ мы будем называть квантово-механической группой Пуанкаре¹⁾.

При переходе к другой системе отсчета наблюдаемые α преобразуются по правилу (23):

$$\alpha \rightarrow \alpha_{\bar{g}} = U(\bar{g})\alpha U^{-1}(\bar{g}),$$

так что их матричные элементы остаются неизменными:

$$\langle \rho_{\bar{g}} | \alpha_{\bar{g}} | \gamma_{\bar{g}} \rangle = \langle \rho | \alpha | \gamma \rangle.$$

Физические величины Q_i , по которым осуществляется правило сверхотбора, инвариантны относительно преобразований группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$.

¹⁾ Обзор геометрических принципов инвариантности дан в работе [25].

§ 1.3. Основные величины

В предыдущем параграфе предполагалось неявно, что нам уже известны те величины, которые служат динамическими переменными. В действительности выбор этих величин предопределяется соображениями симметрии, т. е. выбранной группой инвариантности. Для целей предыдущего параграфа было достаточно лишь существования динамических переменных. В этом параграфе мы выясним, какие наблюдаемые связаны с группой Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, или же со свойствами однородности и изотропности пространства-времени. Разумеется, фактически эти величины (импульс, момент количества движения, спин) известны из эксперимента и нерелятивистской теории.

Обратимся к бесконечно малым преобразованиям. Формулу (1) мы перепишем в виде

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (32)$$

где бесконечно малые параметры ε^{μ} и $\omega_{\mu\nu}$ вещественны ($\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ — антисимметрично в силу условия (4)). Бесконечно малое преобразование координат (32) влечет за собой изменение векторов состояния $|\gamma\rangle \rightarrow (1 + \delta U)|\gamma\rangle$, которое вследствие непрерывности преобразования будет также бесконечно мало:

$$\delta U = iP_{\mu} \varepsilon^{\mu} - i \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}. \quad (33)$$

Формулой (33) мы ввели операторы P_{μ} и $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, имеющие эрмитов характер, так как $1 + \delta U$ унитарно. В силу (31) эти операторы коммутируют со всеми величинами Q_i , по которым осуществляется сверхотбор. Величины P_{μ} и $M_{\mu\nu}$, следовательно, могут быть наблюдаемыми. Выясним их смысл.

Согласно (32) и (33) оператор

$$1 + iP_{\mu} \varepsilon^{\mu} \quad (34)$$

описывает инфинитезимальное смещение, порожденное сдвигом системы отсчета:

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}.$$

Инфинитезимальные трехмерные вращения и лоренцевы преобразования описываются оператором

$$1 - i \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}. \quad (35)$$

Например, преобразование

$$1 - iM_{12} \omega^{12} \quad (36)$$

описывает изменение вектора состояния, вызываемое вращением:

$$\begin{aligned}x'^0 &= x^0, & x'^1 &= x^1 - \omega^{12} x^2, \\x'^2 &= x^2 + \omega^{12} x^1, & x'^3 &= x^3.\end{aligned}$$

Лоренцево преобразование к движущейся инерциальной системе

$$\begin{aligned}x'^0 &= x^0 - x^1 \omega^{01}, & x'^1 &= x^1 - x^0 \omega^{01}, \\x'^2 &= x^2, & x'^3 &= x^3\end{aligned}$$

вызывает преобразование вектора состояния с помощью оператора

$$1 - iM_{01} \omega^{01}. \quad (37)$$

Таким образом, величина iP_μ есть генератор смещений по оси x^μ , $-iM_{jk}$ — генератор вращений в плоскости (jk) , а величина $-iM_{0j}$ — генератор чисто лоренцева преобразования. Перечисленные 10 генераторов, соответствующих 10 однопараметрическим преобразованиям группы Пуанкаре, и являются основными величинами в релятивистской квантовой механике. Величину P_μ называют вектором энергии-импульса или 4-импульсом; 3-вектор

$$M = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$$

есть момент количества движения. Вместо компонент M_{0j} часто вводится 3-вектор

$$N = (M_{01}, M_{02}, M_{03}).$$

Если $\Phi(x)$ есть оператор некоторой физической величины, зависящей от координаты x , то из (23) и (34) следует:

$$i[P_\mu, \Phi(x)] = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^\mu}.$$

Развитие во времени динамических переменных системы определяется оператором P_0 , или гамильтонианом системы. Задание гамильтониана (т. е. P_0) как функции динамических переменных позволяет полностью охарактеризовать ее развитие.

Найдем перестановочные соотношения между операторами P_μ и $M_{\lambda\nu}$. Для этого мы воспользуемся групповым законом умножения (9) и тем обстоятельством, что перестановочные соотношения одинаковы как для генераторов группы, так и для генераторов ее покрывающей группы. Поэтому в законе умножения для унитарных представлений мы можем положить $\omega(g_1, g_2) = 1$. Тогда согласно (9) и (29)

$$\begin{aligned}U(a_1, \Lambda_1) U(a_2, \Lambda_2) &= U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2), \\U(a, \Lambda)^{-1} &= U(-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}).\end{aligned} \quad (38)$$

Здесь учтено, что $g_1 = (a_1, \Lambda_1)$ и $g_2 = (a_2, \Lambda_2)$.

Выведем предварительно правило преобразования генераторов при лоренцевом преобразовании Λ . В случае импульса будем исходить из равенства

$$U(0, \Lambda^{-1}) U(a, 1) U(0, \Lambda) = U(\Lambda^{-1} a, 1),$$

которое после подстановки в него инфинитезимальной формы (34):

$$U(\varepsilon, 1) \approx 1 + iP_\mu \varepsilon^\mu,$$

можно переписать в виде

$$U^{-1}(0, \Lambda) P_\mu \varepsilon^\mu U(0, \Lambda) = P_\mu (\Lambda^{-1} \varepsilon)^\mu.$$

Отсюда в силу (4) мы находим преобразование оператора импульса P_μ :

$$U^{-1}(0, \Lambda) P^\mu U(0, \Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu. \quad (39)$$

Преобразование генератора $M_{\mu\nu}$ можно вывести, исходя из равенства

$$U(0, \Lambda^{-1}) U(0, \Lambda') U(0, \Lambda) = U(0, \Lambda^{-1} \Lambda' \Lambda),$$

в котором $U(0, \Lambda')$ выражается через $M_{\mu\nu}$ посредством (35). Правая часть равенства записывается в виде

$$U(0, \Lambda^{-1} \Lambda' \Lambda) \approx 1 - i \frac{1}{2} (\Lambda^{-1})^\mu_\rho \Lambda'^\nu_\lambda \omega^{\rho\lambda} M_{\mu\nu}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\omega^{\mu\nu}$ и пользуясь (4), мы приходим к формуле для преобразования $M_{\mu\nu}$:

$$U(0, \Lambda^{-1}) M^{\mu\nu} U(0, \Lambda) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda M^{\rho\lambda}. \quad (40)$$

Чтобы получить перестановочные соотношения между генераторами группы Пуанкаре, теперь достаточно в формулы (39) и (40) подставить выражение (35) для инфинитезимального преобразования $U(0, \Lambda)$, связанного с преобразованием координат $x^\mu \rightarrow (\Lambda x)^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$.

В итоге перестановочные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] &= i [g_{\mu\sigma} M_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\lambda}], \\ [M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= i [g_{\nu\lambda} P_\mu - g_{\mu\lambda} P_\nu], \quad [P_\mu, P_\nu] = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Соотношение между компонентами импульса получается непосредственно из группового закона умножения (38) как следствие коммутативности трансляций в разных направлениях.

Перестановочные соотношения для $M_{\mu\nu}$ эквивалентны следующим соотношениям для момента количества движения M и лоренцева генератора N :

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i \varepsilon_{ijl} M_l, & [N_i, N_j] &= -i \varepsilon_{ijl} M_l, \\ [M_i, N_j] &= i \varepsilon_{ijl} N_l & (i, j, l &= 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где ε_{ijkl} полностью антисимметрично ($\varepsilon_{123} = 1$). Комбинации этих операторов

$$\mathcal{L}_j^\pm = \frac{1}{2} (M_j \pm iN_j)$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям для углового момента:

$$[\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_j] = i\varepsilon_{kjl} \mathcal{L}_l, \quad [\mathcal{L}_i^+, \mathcal{L}_j^-] = 0,$$

причем \mathcal{L}_i^+ и \mathcal{L}_j^- независимы.

По бесконечно малому преобразованию (33) можно построить конечное преобразование. Таким образом, унитарные операторы $U(a, 1)$ и $U(0, \Lambda)$ имеют следующий общий вид:

$$U(a, 1) = e^{iP_\mu a^\mu}, \quad U(0, \Lambda) = e^{-i\frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}}. \quad (42)$$

Построим теперь из генераторов $M_{\mu\nu}$ и P_μ величины, коммутирующие со всеми генераторами. Такие величины не меняются при преобразованиях группы и в каждом неприводимом представлении будут пропорциональны единичной матрице. По значениям этих величин можно классифицировать неприводимые представления.

Из компонент импульса можно составить только одну инвариантную величину

$$m^2 = P_\mu P^\mu. \quad (43)$$

Будучи скаляром, m^2 коммутирует с $M_{\lambda\sigma}$; как функция импульса m^2 коммутирует с P_λ .

При $m^2 \geq 0$ величине m^2 придается смысл квадрата массы покоя. В этом случае существует вторая инвариантная величина, построенная из импульсов, — оператор знака энергии

$$\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|} \quad (44)$$

с собственными значениями $\varepsilon' = \pm 1$. Инвариантность ε вытекает из того обстоятельства, что собственные ортохронные преобразования \mathcal{P}_\pm^\dagger не меняют знака временной компоненты времениподобного вектора.

Из одних лишь величин $M_{\lambda\nu}$ нельзя составить инвариантного оператора. Легко проверить, что имеется только одна комбинация генераторов $M_{\lambda\nu}$ и P_μ , которая коммутирует с импульсами P_λ , а именно псевдовектор

$$w_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma \quad (45)$$

со свойством

$$w_\mu P^\mu = 0, \quad [w_\nu, P_\lambda] = 0. \quad (46)$$

Квадрат псевдовектора ω_μ есть скаляр и, следовательно, коммутирует с $M_{\mu\nu}$. Поэтому $\omega^2 = \omega_\mu \omega^\mu$ коммутирует со всеми 10 генераторами. Явное выражение для ω^2 есть

$$\omega^2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} P_\lambda P^\lambda - M_{\mu\sigma} M^{\nu\sigma} P^\mu P_\nu. \quad (47)$$

Физический смысл инварианта ω^2 выясняется просто при $m^2 > 0$. Выберем 4-импульсы P_μ диагональными. Тогда в системе покоя, т. е. при действии на вектор состояния $|\mathbf{p} = 0, m\rangle$ инвариант ω^2 равен¹⁾

$$\omega^2 |\mathbf{p} = 0, m\rangle = -m^2 (M_{12}^2 + M_{23}^2 + M_{31}^2) |\mathbf{p} = 0, m\rangle = -m^2 M^2 |\mathbf{p} = 0, m\rangle. \quad (48)$$

Иначе говоря, величина $-\omega^2/m^2$ равна квадрату момента количества движения M^2 в состоянии покоя, т. е. квадрату спина. Собственные значения M^2 , как известно из квантовой механики, имеют вид $J(J+1)$, где $J = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Так как ω^2 есть инвариантный оператор, то в любой системе отсчета в применении к состоянию $|\mathbf{p}, m\rangle$, преобразующемуся по неприводимому представлению \mathcal{P}^\dagger_+ , будет выполняться равенство

$$\omega^2 |\mathbf{p}; m, J\rangle = -m^2 J(J+1) |\mathbf{p}; m, J\rangle. \quad (49)$$

Чтобы установить ковариантную связь между ω_μ и оператором спина J_k , введем пространственноподобные нормали $n_\mu^{(r)}$ ($r = 1, 2, 3$): $n_\mu^{(r)} n^{(r')\mu} = -\delta_{rr'}$, $(n_\mu^{(r)} p^\mu) = 0$. Вместе со скоростью $v_\mu = p_\mu/m \equiv n_\mu^{(0)}$ они образуют полную систему 4-нормалей: $n_\mu^{(\alpha)} g^{\mu\nu} n_\nu^{(\beta)} = g^{\alpha\beta}$.

Так как $\omega^\lambda n_\lambda^{(0)} = 0$, то имеются только три независимые пространственноподобные составляющие ω_μ ; в ковариантной записи:

$$\omega_\lambda = m \sum_{k=1}^3 J^k n_\lambda^{(k)}, \quad J^k = -\frac{1}{m} \omega^\lambda n_\lambda^{(k)}. \quad (50)$$

Введя вектор $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$, мы находим прямым вычислением:

$$\omega^2 = -m\mathbf{J}^2, \quad [J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k, \quad (51)$$

т. е. действительно вектор \mathbf{J} обладает свойствами оператора спина. Собственные значения J_z , как известно, пробегают $2J+1$ значений $J_z' \equiv \sigma = -J, -J+1, \dots, J-1, J$.

Помимо основных инвариантов ω^2 , m^2 и ε (при $m^2 \geq 0$) в группе Пуанкаре существует еще один оператор:

$$z = e^{i2\pi M_s} = (-1)^{2M_s} = (-1)^{2J}, \quad (52)$$

¹⁾ Будем обозначать собственные значения оператора P_μ в одночастичных состояниях посредством p_μ .

который коммутирует со всеми генераторами группы \mathcal{P}_+^\dagger . Величина z принимает значение $z = +1$ в состояниях с целочисленным моментом количества движения или спином и значения $z = -1$ в состояниях с полуцелым моментом или спином. Вращение на 360° физически неотличимо от тождественного преобразования, и потому физические свойства системы не могут изменяться при таком вращении. Следовательно, по величине z должно осуществляться правило сверхотбора (см. § 1.2), так что суперпозиция состояний с полуцелыми и целочисленными моментами количества движения невозможна, а операторы всех наблюдаемых величин должны коммутировать с z [21, 22].

Таким образом, неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре выделяется по значениям спина J , массы m и знака энергии (при $m^2 > 0$). Энергия физических состояний всегда положительна, или всегда $\varepsilon > 0$. Частицы с целочисленным спином, $J = 0, 1, 2, 3, \dots$, называются бозонами; частицы с полуцелым спином, $J = 1/2, 3/2, \dots$, — фермионами. Векторы состояния, образующие базис неприводимого представления, могут отмечаться по собственным значениям операторов, входящих в один из полных наборов. Эти операторы представляют собой функции от генераторов P_λ и $M_{\mu\nu}$. В качестве примера мы приведем один из базисов — канонический базис, применимый при $m^2 > 0$.

В каноническом базисе диагональны компоненты импульса p_j и проекция спина J_3 на заданную фиксированную ось, ортогональную 4-импульсу p_μ . Иначе говоря, полный набор взаимно коммутирующих величин содержит в этом случае операторы

$$\begin{aligned} m^2, \quad J^2, \quad p_j, \quad J_3 = \frac{1}{m} \omega^\lambda n_\lambda^{(3)} = \sigma, \\ (n^{(3)})^2 = -1, \quad p^\lambda n_\lambda^{(3)} = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

а вектор состояния запишется в виде $|\mathbf{p}, \sigma; m, J\rangle$.

Подробно представления группы Пуанкаре будут рассмотрены в гл. 4.

§ 1.4. Описание рассеяния. S-матрица

В предыдущем параграфе было выяснено, какими величинами следует описывать изолированную систему в релятивистской квантовой механике. Однако понятие об изолированной системе играет лишь вспомогательную роль, ибо частицы не существуют вне взаимодействий и могут наблюдаться только благодаря взаимодействиям. Теория элементарных частиц есть в первую очередь теория взаимодействий. Обратимся к описанию процессов с элементарными частицами.

Сведения об элементарных частицах доставляют эксперименты по столкновению частиц. Во всех известных экспериментах в итоге

столкновения частиц наблюдаются либо первоначальные частицы (упругое рассеяние), либо другие частицы. В опытах по распаду частиц в качестве продуктов распада наблюдаются также только частицы. Ни в одном из экспериментов не было обнаружено квантовых объектов, которые были бы отличны от частиц (элементарных или составных). Мы полагаем поэтому, что частицы представляют собой единственное проявление материи в квантовой области. Следовательно, возможные состояния («полный набор»), которые мы будем рассматривать, представляют собой все возможные состояния частиц.

До и после взаимодействия частицы регистрируются на больших расстояниях друг от друга (по сравнению с областью взаимодействия), когда частицы могут считаться практически свободными. Действительно, в отсутствие частиц с нулевой массой силы между частицами спадают экспоненциально с увеличением расстояния между ними, так что при бесконечно больших расстояниях они становятся свободными. Асимптотические состояния такого типа и выбираются в качестве начального и конечного состояний при описании столкновений; они обозначаются соответственно α_{in} и β_{out} и определяют однозначно в гильбертовых пространствах \mathcal{H}_{in} и \mathcal{H}_{out} единичные лучи. Входящие в эти лучи векторы состояния отличаются фазой от $|\alpha, \text{in}\rangle$ и $|\beta, \text{out}\rangle$.

Набор всех векторов $|\alpha, \text{in}\rangle$, относящихся к начальным конфигурациям частиц, является полным вследствие предположения о корпускулярном проявлении свойств материи (аксиома асимптотической полноты). Аналогичным образом, будет полным и набор всех возможных векторов состояний $|\beta, \text{out}\rangle$, относящихся к конечным конфигурациям частиц. Очевидно, гильбертовы пространства \mathcal{H}_{in} и \mathcal{H}_{out} , образованные векторами состояния $|\alpha, \text{in}\rangle$ и $|\beta, \text{out}\rangle$, будут совпадать, в силу аксиомы об асимптотической полноте, с полным пространством состояний \mathcal{H} : $\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}} = \mathcal{H}$.

При высоких энергиях соударяющихся частиц возможно образование новых частиц. В каждом отдельном опыте мы наблюдаем определенное число частиц. Состояние с n частицами может быть охарактеризовано волновой функцией $\varphi_n(k_1, \dots, k_n)$, зависящей от переменных k_1, \dots, k_n , описывающих эти частицы. Поскольку число частиц может быть произвольным (но конечным), то вектор состояния, возникающего при столкновении, можно представить в виде суперпозиции состояний с определенным числом частиц, или в виде столбца Фока [26]:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(k_1) \\ \dots \\ \varphi_n(k_1, \dots, k_n) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Если положить для простоты, что переменные k_1, \dots, k_n пробегают дискретные значения, то столбец (54) с 1 на n -м месте (n частиц с переменными k_1, \dots, k_n) и остальными $\varphi_i = 0$ есть вектор состояния $|k_1, \dots, k_n\rangle$, так что

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n} \varphi_n(k_1, \dots, k_n) |k_1, \dots, k_n\rangle. \quad (55)$$

Пространство состояний \mathcal{H} представляет собой, таким образом, прямую сумму пространств \mathcal{H}_n , образованных векторами состояний с определенным числом частиц n .

Скалярное произведение векторов $|\Psi\rangle$ и $|\Psi'\rangle$ имеет вид

$$\langle\Psi'|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n} \varphi_n'^*(k_1, \dots, k_n) \varphi_n(k_1, \dots, k_n) \mu_n, \quad (56)$$

где μ_n есть релятивистски инвариантная мера.

Вследствие своего асимптотического характера функции $\varphi_n(k_1, \dots, k_n)$ обладают следующими свойствами¹⁾.

1. В случае тождественных частиц $\varphi_n(k_1, \dots, k_n)$ представляет собой симметризованное или антисимметризованное произведение одночастичных функций:

$$\varphi_n(k_1, \dots, k_n) = \{\psi_1(k_1) \dots \psi_n(k_n)\}_{\pm}, \quad (57)$$

или

$$|k_1, \dots, k_n\rangle = \{|k_1\rangle \dots |k_n\rangle\}_{\pm},$$

где символ $\{\}_{\pm}$ обозначает симметризацию или антисимметризацию вместе с нормировочными множителями. Это свойство симметрии волновой функции для тождественных частиц известно из квантовой механики.

Характер симметрии всегда одинаков для частиц данного типа; если волновая функция двух протонов антисимметрична, то будет антисимметричной и волновая функция системы из трех протонов и т. д. Если волновая функция системы тождественных частиц симметрична в in-состоянии, то это свойство симметрии сохраняется и в out-состоянии. Характер симметрии волновой функции системы тождественных частиц связан со спином: частицы с полуцелым спином (фермионы) описываются антисимметричными функциями, а частицы с целочисленным спином (бозоны) — симметричными функциями. Это утверждение («теорема о связи спина и статистики») доказано с помощью различных подходов [28—33]. В § 4.4 будет приведена иллюстрация этой теоремы.

¹⁾ Основные положения теории рассеяния частиц рассмотрены в обзоре [27].

2. При преобразовании симметрии $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha_g\rangle$ (где g может относиться не только к преобразованиям из группы Пуанкаре) каждое одночастичное состояние преобразуется отдельно:

$$|(k_1, \dots, k_n)_g\rangle = U(g) |k_1, \dots, k_n\rangle = \{U(g) |k_1\rangle \dots U(g) |k_n\rangle\}_{\pm}.$$

Это свойство асимптотических состояний опирается на возможность представления такого состояния в виде суммы произведений одночастичных состояний.

Из свойства факторизуемости преобразований следует, что одночастичные состояния $|k\rangle$ преобразуются по унитарным представлениям квантовомеханической группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$. Математическим выражением простоты представления служит его неприводимость. Поэтому элементарные частицы описываются неприводимыми представлениями \mathcal{P}_+^{\uparrow} , как содержащими наименьшую совокупность состояний, инвариантную относительно преобразований группы Пуанкаре.

Итак, классификация элементарных частиц, вытекающая из релятивистской инвариантности теории, совпадает с классификацией унитарных представлений квантовомеханической группы Пуанкаре. Величины, характеризующие неприводимые представления (масса и спин), описывают инвариантные свойства частицы. Квантовые числа, характеризующие базис неприводимого представления представляют собой переменные, описывающие состояния частиц, (например, импульс и проекция спина в каноническом базисе).

Таким образом, при преобразованиях группы Пуанкаре вектор состояния с n частицами преобразуется как прямое произведение унитарных неприводимых представлений этой группы, соответствующих спинам J_1, \dots, J_n и массам m_1, \dots, m_n частиц.

Перейдем к определению S -матрицы. Будем рассматривать частицы, обладающие массой, так как для частиц без массы введение асимптотических состояний и S -матрицы вызывает затруднения (инфракрасная расходимость). Разложим вектор состояния $|\alpha, \text{in}\rangle$, соответствующий начальной конфигурации частиц, по системе $|\beta, \text{out}\rangle$:

$$|\alpha, \text{in}\rangle = \sum_{\beta} S_{\beta\alpha} |\beta, \text{out}\rangle, \quad (58)$$

предполагая, что обе системы ортонормированы:

$$\langle \alpha, \text{in} | \beta, \text{in} \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (59)$$

$S_{\beta\alpha}$ равна амплитуде вероятности перехода $\alpha_{\text{in}} \rightarrow \beta_{\text{out}}$. Матрица с элементами $S_{\beta\alpha}$ называется S -матрицей:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{out} | S | \alpha, \text{out} \rangle; \quad (60)$$

она зависит от параметров начального и конечного состояний. S -матрица унитарна, так как она связывает два ортонормированных базиса в одном и том же пространстве \mathcal{H} :

$$SS^+ = S^+ S = 1. \quad (61)$$

При наличии правил сверхотбора S -матрица подразделяется на блоки, соответствующие когерентным пространствам, так как в силу правил сверхотбора переходы между различными когерентными пространствами запрещены. Если, например, мы напишем S -матрицу в представлении, где барионное число B диагонально, то S -матрица будет иметь блочную структуру:

$$S = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ & S(-1) & & & \\ & & S(0) & & \\ & & & S(1) & \\ & & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Здесь $S(B)$ обозначает блок S -матрицы, относящийся к барионному числу B . Такой вид S -матрицы выражает сохранение зарядов Q_i , по которым осуществляется правило сверхотбора:

$$[S, Q_i] = 0 \quad \text{или} \quad (Q_i(\beta) - Q_i(\alpha)) \langle \beta | S | \alpha \rangle = 0. \quad (62)$$

Величины Q_i , следовательно, представляют собой такие заряды, которые сохраняются точно при всех превращениях. Согласно экспериментальным данным, абсолютно сохраняются электрический заряд Q , барионный B и лептонные L_e, L_μ заряды (см. гл. 2).

Амплитуда вероятности $S_{\beta\alpha}$ релятивистски инвариантна:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta_g, \text{out} | \alpha_g, \text{in} \rangle. \quad (63)$$

Она не изменяется при переходе к преобразованному состоянию в новой системе отсчета, смещенной, повернутой или движущейся равномерно по отношению к старой системе. Поскольку согласно (26), $|\beta_g\rangle = U(g)|\beta\rangle$, то инвариантность S -матрицы эквивалентна условию

$$U^{-1}(g) S U(g) = S. \quad (64)$$

Переходя к инфинитезимальному преобразованию $U(g)$ и подставляя в (64) выражение (33), мы приходим к известной еще в классической механике связи между инвариантностью и законами сохранения. Инвариантность S -матрицы относительно смещений пространства и времени выражается посредством закона сохранения 4-импульса p_μ :

$$[P_\mu, S] = 0 \quad \text{или} \quad (p_\mu(\alpha) - p_\mu(\beta)) S_{\alpha\beta} = 0. \quad (65)$$

Инвариантность S -матрицы относительно вращений и лоренцевых преобразований влечет за собой закон сохранения момента количества

движения, или

$$[M_{\mu\nu}, S] = 0. \quad (66)$$

В качестве частного случая рассмотрим условие релятивистской инвариантности S -матрицы (63) относительно вращения вокруг третьей оси на угол 2π ; в этом случае $U = e^{i2\pi M_3} = z = U^{-1}$ (см. (52)) и

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = \langle \beta | e^{i2\pi M_3} S e^{i2\pi M_3} | \alpha \rangle = (-1)^{2\sum J_i} \langle \beta | S | \alpha \rangle.$$

Здесь $\sum J_i$ есть сумма спинов всех частиц в состояниях α и β . Частицы с целочисленными спинами не вносят вклада в определение знака, так что $2\sum J_i$ равно (по «модулю 2») сумме числа фермионов ($J = 1/2, 3/2, \dots$) в состояниях α и β . Следовательно, в любом процессе общее число фермионов, участвующих в начальном и конечном состояниях, должно быть четным.

Если 4-импульсы p_μ диагональны, то согласно (65) $S_{\beta\alpha}$ пропорциональна δ -функции от $p_\mu(\alpha) - p_\mu(\beta)$. Выделим из S -матрицы $\delta_{\alpha\beta}$ -часть, соответствующую отсутствию рассеяния; тогда можно записать, введя матрицу рассеяния T :

$$\langle \beta | S - 1 | \alpha \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) \langle \beta | T | \alpha \rangle. \quad (67)$$

Условие унитарности (61) превращается в равенство

$$\frac{1}{i} \langle \beta | (T - T^\dagger) | \alpha \rangle = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) \langle \beta | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | \alpha \rangle, \quad (68)$$

где суммируется по полной системе состояний n , ограниченной законами сохранения, при этом $p_\mu(\alpha) = p_\mu(\beta)$. Вероятность перехода $\alpha \rightarrow \beta$ равна

$$\begin{aligned} |\langle \beta | S - 1 | \alpha \rangle|^2 &= (2\pi)^8 \delta^4(0) \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2 = \\ &= \lim_{V, t \rightarrow \infty} (2\pi)^4 V t \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2, \end{aligned} \quad (69)$$

где V — объем, а t — промежуток времени.

Таким образом, вероятность перехода $\alpha \rightarrow \beta$ в единицу времени и в единицу объема есть

$$\begin{aligned} w(\alpha \rightarrow \beta) &= \lim_{V, t \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{d}{dt} |\langle \beta | S - 1 | \alpha \rangle|^2 = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Полная вероятность перехода \mathcal{W} из состояния α в любое состояние получается суммированием (и интегрированием) функции $w(\alpha \rightarrow \beta)$ по всем конечным состояниям β :

$$\mathcal{W}(\alpha) = \sum_\beta w(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 \sum_\beta \delta^4(p(\alpha) - p(\beta)) |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2. \quad (71)$$

Подробнее свойства S -матрицы рассматриваются в гл. 7.

Глава 2

ОСНОВЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Релятивистская квантовая теория определяет полностью только кинематику процесса, т. е. ту часть матрицы рассеяния, которая зависит от свойств свободных частиц. Представление о взаимодействии должно быть введено дополнительно: при одной и той же кинематике возможны различные динамические модели.

В классической физике существует только два типа сил между частицами — электромагнитные и гравитационные. Способность частиц к взаимодействию характеризуется зарядами — электрическим и массой. В физике элементарных частиц кроме электромагнитного существует несколько типов взаимодействий, явный вид которых (в лагранжевой или иной форме) пока неизвестен. Общие свойства этих взаимодействий изучаются в первую очередь на основе теоретико-группового подхода и введения представления о внутренних симметриях различного типа. Такой путь приближения к сути явления (т. е. построение аппроксимаций, наделенных четкими свойствами симметрии) обладает тем достоинством, что он всегда логически непротиворечив.

Однако конкретные группы внутренней симметрии не обладают той универсальностью, которая присуща пространственно-временной симметрии. За исключением простейших симметрий, связанных с правилом сверхотбора, внутренние симметрии имеют приближенный характер. Найдено несколько групп, описывающих (в различных приближениях) симметрию взаимодействий: группы SU_2 , SU_3 , SU_6 , $SU_2 \times SU_2$, ... Но до сих пор еще не открыт тот принцип, который указывал бы необходимую последовательность приближенных групп внутренней симметрии. Поэтому модельные представления, догадки и гипотезы составляют важную часть современного теоретико-группового подхода в физике элементарных частиц.

подавляющее число сильно взаимодействующих частиц нестабильно и наблюдается лишь в виде резонансов в реакциях с другими частицами. Между тем представления квантовомеханической группы Пуанкаре, о которых говорилось в гл. 1, относятся только к абсолютно стабильным частицам. В последовательной релятивистской квантовой теории нестабильные частицы появились бы при изучении динамики и приближений. В физике элементарных частиц понятие

о нестабильной частице следует считать столь же фундаментальным, как и понятие о стабильной частице. При (приближенной) трактовке внутренних симметрий не делается различия между стабильными и нестабильными частицами. Это различие не столь существенно и в основной задаче физики элементарных частиц — объяснении спектра масс частиц. Таким образом, в отличие от гл. 1, в этой главе мы рассматриваем практически только приближенные понятия. И именно сочетание точных и приближенных понятий специфично для современной теории элементарных частиц.

§ 2.1. Взаимодействия и внутренняя симметрия

Анализ экспериментальных значений для вероятностей показывает, что взаимодействия элементарных частиц подразделяются на следующие три основных класса: сильные, электромагнитные и слабые. Численными характеристиками взаимодействия служат безразмерные константы, входящие линейно в матричный элемент S -матрицы при низких энергиях. Сравнение этих констант дает представление об относительной величине взаимодействий разных классов:

сильные взаимодействия, $g_s^2 \approx 1 - 10$;

электромагнитные взаимодействия, $\alpha \equiv e^2 = 1/137$;

слабые взаимодействия, $Gm_p^2 \equiv g_w^2 = 10^{-5}$, где m_p — масса протона.

В случае гравитационного взаимодействия безразмерная константа равна $\gamma m_p^2 \approx 10^{-20}$, что оправдывает пренебрежение гравитационными явлениями в физике элементарных частиц. В классе сильных взаимодействий можно выделить умеренно-сильное взаимодействие с константой $\sim g^2/10$; кроме того, возможно, существует сверхслабое взаимодействие с константой $G_{sw} \sim 10^{-9}G$.

По отношению к взаимодействиям различных классов частицы объединяются в три группы.

1. Адроны — частицы, которые могут участвовать во всех взаимодействиях. К адронам принадлежит большинство частиц. Разумеется, в электромагнитном взаимодействии принимают участие лишь электрически заряженные адроны.

2. Лептоны — частицы, которые участвуют в электромагнитных и слабых взаимодействиях (заряженные лептоны e и μ) или только в слабых (нейтральные лептоны ν_e и ν_μ).

3. Фотон — единственная частица, участвующая только в электромагнитных взаимодействиях.

Все известные сейчас бозоны с массой $m \neq 0$ — это адроны. Фермионы могут быть как адронами, так и лептонами. Фермионы-адроны называются барионами.

Взаимодействия характеризуются не только своей «силой», определяемой присущей им безразмерной константой типа g^2 или α , но и свойствами симметрии. Существование свойств симметрии у вза-

имедействий хорошо известно еще из ядерной физики: ядерные силы не зависят от электрического заряда протона и нейтрона. Развитие идеи о зарядовой независимости ядерных сил привело затем к введению нового приближенно сохраняющегося квантового числа — изотопического спина, или изоспина, и к классификации частиц по изоспину.

В физике элементарных частиц хорошо изучена только теория взаимодействия лептонов с электромагнитным полем — квантовая электродинамика (которая в данной книге не рассматривается). Изучение симметрии сильных и слабых взаимодействий оказывается одним из немногих эффективных способов выявления свойств этих взаимодействий и поэтому приобретает первостепенное значение.

В нерелятивистской квантовой механике и ядерной физике симметрия потенциала взаимодействия может повлечь за собой инвариантность S -матрицы относительно преобразований данной симметрии, а также появление новых сохраняющихся квантовых чисел. По этим квантовым числам можно отмечать состояния системы.

Аналогичным образом, в физике элементарных частиц установление симметрии взаимодействия может означать отыскание новых законов сохранения и, следовательно, тех квантовых чисел по которым классифицируются частицы; кроме того, симметрия взаимодействия влечет за собой появление связи между амплитудами переходов для различных процессов.

Описание внутренней симметрии. Предположим, что взаимодействие между частицами обладает некоторой симметрией и полная характеристика каждой частицы включает теперь новые квантовые числа ζ_i' , так что вектор состояния записывается в виде

$$|\dots; m, J; \zeta_i'\rangle. \quad (1)$$

Здесь точками обозначены переменные группы Пуанкаре (например, импульс и проекция спина). В отличие от пространственно-временной (или геометрической) симметрии, дополнительную симметрию, связанную с характером взаимодействия, называют внутренней (или динамической).

Отправной точкой описания внутренней симметрии служит представление о полной независимости обоих типов симметрий — пространственно-временной и внутренней (точная внутренняя симметрия). Сама запись вектора состояния в виде (1) уже предполагает, что величины ζ_i коммутируют с массой, спином и переменными группы Пуанкаре. Это эквивалентно тому, что операторы ζ_i коммутируют со всеми генераторами $P_{\mu\nu}$ и $M_{\mu\nu}$:

$$[\zeta_i, P_\lambda] = 0, \quad [\zeta_i, M_{\mu\nu}] = 0, \quad (2)$$

и, следовательно, преобразования координат $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$ не изменяют величин ζ_i : $U(a, \Lambda)\zeta_i U^{-1}(a, \Lambda) = \zeta_i$. Очевидно, что ζ_i

не зависят от координат. В частности, величины ζ_i не зависят от времени.

Преобразования $\tilde{\zeta} = G\zeta$ переменных ζ_i , не изменяющие амплитуды вероятности, представляют собой преобразования внутренней симметрии. Соответствующее преобразование $u(G)$ вектора состояния должно быть унитарно:

$$\begin{aligned} | \dots; mJ; \tilde{\zeta}' \rangle &= u(G) | \dots; mJ; \zeta' \rangle = \\ &= \sum_{\zeta'} | \dots; mJ; \zeta' \rangle \langle \dots; mJ; \zeta' | u(G) | \dots; mJ; \tilde{\zeta}' \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Унитарные матрицы $u_{\zeta'\zeta''} = \langle \dots; mJ; \zeta' | u(G) | \dots; mJ; \zeta'' \rangle$ образуют группу, ибо $u_1 u_2$ также унитарно и $u = 1$ при $G = E$.

Инвариантность S -матрицы при преобразованиях внутренней симметрии означает равенство

$$u(G) S = S u(G). \quad (4)$$

Группы преобразований внутренней симметрии могут быть дискретными и непрерывными. Наиболее интересны непрерывные группы, так как они приводят к аддитивным законам сохранения. Непрерывные группы могут быть компактными и некомпактными. Унитарные представления компактных групп конечномерны и соответствуют мультиплетам с конечным числом частиц. Унитарные представления некомпактных групп бесконечномерны, т. е. мультиплет в этом случае включает бесконечно большое число частиц. В дальнейшем мы будем изучать только компактные группы.

Пусть \mathcal{G} — компактная группа внутренней симметрии. Представим инфинитезимальное унитарное преобразование в виде

$$u = 1 + iF_r \varepsilon_r \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

где ε_r — бесконечно малые вещественные параметры, а генераторы F_r эрмитовы ввиду унитарности u . Конечное преобразование тогда есть

$$u = e^{iF_r \alpha_r}, \quad (6)$$

где α_r вещественно и конечно.

Группа \mathcal{G} характеризуется законом умножения преобразований (6), или же перестановочными соотношениями между генераторами

$$[F_r, F_t] = ic_{rts} F_s \quad (r, t, s = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Структурные константы c_{rts} вещественны и могут быть выбраны антисимметричными по всем индексам. Они удовлетворяют тождеству Якоби:

$$c_{rtp} c_{psu} + c_{tsp} c_{pru} + c_{srp} c_{ptu} = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует, в частности, что N матриц c_r с матричными элементами $(c_r)_{tp} = -ic_{rtp}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (7) и, следовательно, образуют унитарное N -мерное представление генераторов (присоединенное или регулярное представление).

Генераторы F_r представляют собой физические величины, вводимые группой внутренней симметрии. Величины ζ_i , по которым отмечаются состояния, должны быть построены из F_r . Размерность неприводимых представлений группы (или число строк в матрицах генераторов F_r) дает непосредственно число частиц в мультиплетах, описываемых группой \mathcal{G} . В частности, с помощью присоединенного представления описывается мультиплет с N частицами, т. е. с числом частиц, равным числу параметров группы.

Мультиплет или неприводимое представление характеризуется собственными значениями инвариантных величин (операторов Казимира) z_i , которые коммутируют со всеми генераторами F_r . Отдельные частицы в мультиплете можно отмечать по собственным значениям тех генераторов F_r , которые допускают одновременное приведение к диагональному виду, так что $\{\zeta_i\} = \{h_\alpha, z_i\}$. Собственные значения h_α являются аддитивными квантовыми числами, т. е. собственное значение $h(1+2)$ в двухчастичном состоянии $1+2$ равно сумме собственных значений $h(1) + h(2)$ в одночастичных состояниях 1 и 2. Аддитивность действия генераторов на асимптотические многочастичные состояния вытекает из свойства 2 асимптотических состояний (см. § 1.4). Действительно, с помощью (5) мы получаем

$$u(G)|\zeta_1, \zeta_2\rangle \sim \{1 + i(F_r(1) + F_r(2))\}^i |\zeta_1\rangle |\zeta_2\rangle, \quad (9)$$

где тильда \sim означает: «преобразуется, как ...», а $F_r(i)$ есть генератор, примененный к состоянию i -й частицы. Число диагональных генераторов равно, как известно [19], рангу группы.

Операторы Казимира z_i , будучи по меньшей мере билинейными величинами, не являются аддитивными квантовыми числами, за исключением простейшего случая $N = 1$.

Преобразования внутренней симметрии (6) коммутирует с преобразованиями неоднородной группы Лоренца. Поэтому все генераторы внутренней симметрии F_r коммутируют с генераторами группы Пуанкаре:

$$[F_r, P_\lambda] = 0, \quad [F_r, M_{\nu\mu}] = 0. \quad (10)$$

Таким образом, все генераторы F_r — релятивистски инвариантные величины. Вследствие (4) они коммутируют с S -матрицей:

$$[F_r, S] = 0, \quad (11)$$

и, следовательно, в процессах взаимодействия частиц можно наблюдать законы сохранения диагональных операторов h_α и опера-

торов Казимира z_i . Например, в случае реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ будут выполняться равенства

$$\begin{aligned} h_\alpha(1) + h_\alpha(2) &= h_\alpha(3) + h_\alpha(4), \\ z_i(1 + 2) &= z_i(3 + 4), \end{aligned} \quad (12)$$

где $z_i(1 + 2)$ — собственное значение z_i в двухчастичном состоянии $1 + 2$.

Аддитивные величины могут быть диагональны одновременно как в одночастичных, так и в многочастичных состояниях, и потому, если с помощью h_α отмечаются одночастичные состояния, то по h_α может существовать правило сверхотбора. В случае же неаддитивных величин z_i диагональности z_i в одночастичных состояниях не влечет, вообще говоря, диагональности z_i в многочастичных состояниях, и, следовательно, правила сверхотбора по z_i не существует.

По аддитивным величинам, или зарядам h_α , частицу отличают от античастицы. Античастицей (по отношению к частице a) называется такая частица \bar{a} , которая отличается от a только знаком заряда: $h_\alpha(\bar{a}) = -h_\alpha(a)$. Масса и спин, а также неаддитивные квантовые числа частицы и античастицы одинаковы. Во всех случаях, доступных экспериментальной проверке, каждой частице можно сопоставить античастицу. Поэтому существование античастиц считается строгой закономерностью и в таблице частиц античастицы не перечисляются (за исключением особых случаев, когда это вызвано дополнительными соображениями).

С помощью представления о зарядах можно ввести понятие о нейтральной частице. Обобщая определение электрически нейтральной частицы, мы будем называть нейтральной частицей (иногда говорят, истинно нейтральной) такую частицу, все заряды которой равны нулю: $h_\alpha = 0$. Очевидно, что нейтральная частица совпадает со своей античастицей. Нейтральными частицами являются, в частности, фотон, пион π^0 , мезоны η , ρ^0 , ω , ϕ .

Обратимся теперь к свойствам мультиплета, определяемого операторами Казимира z_i . Каждая частица в нем характеризуется набором квантовых чисел h_α . Преобразования внутренней симметрии (согласно (3)) связывают состояния с различными значениями h_α внутри данного мультиплета, т. е. с различными частицами мультиплета. В силу (10) генераторы F_i этих преобразований будут коммутировать с операторами массы $m^2 = P_\mu P^\mu$ и инвариантного спина w^2 , где $w_\mu = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$. Это значит, что в случае точной симметрии все частицы мультиплета будут иметь одинаковые массу и спин.

Рассмотрим теперь амплитуду перехода процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, в котором все участвующие частицы принадлежат одному и тому же мультиpletу. Произведем преобразование внутренней

симметрии и воспользуемся инвариантностью (4) матрицы рассеяния. Тогда с помощью (3) мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \langle h(3), h(4) | S | h(1), h(2) \rangle &= \langle h(3), h(4) | u^{-1} S u | h(1), h(2) \rangle = \\ &= \sum_{h'(i)} \langle h'(3), h'(4) | S | h'(1), h'(2) \rangle \times \\ &\quad \times d_{h'(1)h(1)} d_{h'(2)h(2)} d_{h(3)h'(3)}^* d_{h(4)h'(4)}^*, \quad (13) \end{aligned}$$

где $d_{h'h} \equiv d_{h'h}(G)$. Это соотношение связывает амплитуду первоначального процесса с амплитудой процесса $1' + 2' \rightarrow 3' + 4'$, в котором участвуют, вообще говоря, другие частицы данного мультиплетта (с квантовыми числами $h'(i)$).

Таким образом, внутренняя симметрия может проявиться посредством мультиплетной структуры спектра масс, законов сохранения для аддитивных и неаддитивных квантовых чисел, а также существования соотношений между сечениями различных процессов.

§ 2.2. Симметрия и проблема классификации частиц

Следует различать точные и приближенные внутренние симметрии. Точные симметрии выполняются для всех взаимодействий. Приближенные симметрии описывают свойства более сильных взаимодействий.

Точные симметрии. Различие лептонов и барионов выражается с помощью понятий о барионном B и лептонных L_e, L_μ зарядах. Величины B, L_e, L_μ для физических систем могут принимать значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$; значения этих величин для элементарных частиц ограничиваются числами $0, \pm 1$. Способность к сильному взаимодействию у фермионов связывается с отличным от нуля барионным зарядом, так что для элементарных барионов $B = \pm 1$, а для лептонов $B = 0$. Аналогичным образом, лептонные заряды лептонов равны $L_e = \pm 1, L_\mu = \pm 1$, в то время как для барионов $L_e = L_\mu = 0$. Все мезоны и фотон имеют $B = L_e = L_\mu = 0$.

Опыт показывает, что, подобно электрическому заряду Q , барионный B и лептонные L_e, L_μ заряды принадлежат к аддитивным величинам, сохраняющимся во всех взаимодействиях.

Сохранение барионного заряда выражает тот факт, что превращения барионов в лептоны, фотоны и мезоны не наблюдается. Отсутствие превращений лептонов в мезоны и фотоны типа $e + \mu \rightarrow \pi + \gamma$ объясняется сохранением лептонного заряда $L = L_e + L_\mu$. Чтобы объяснить отсутствие реакций $\mu^\pm \rightarrow 2e^\pm + e^\mp$ или $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$, необходимо иметь два различных лептонных заряда L_e и L_μ с отдельными законами сохранения. В свою

очередь, различие зарядов L_e и L_μ приводит к двум сортам нейтрино: ν_e и ν_μ . Существование двух нейтрино следует из экспериментов

$$\nu_\mu + p \rightarrow p + \mu^-, \quad \nu_\mu + p \not\rightarrow p + e^-,$$

в которых были зарегистрированы лишь мюоны, но не электроны. Обычно лептонам приписываются следующие заряды:

$$\begin{aligned} \text{нейтрино } \nu_e: & \quad Q = 0, \quad L_e = 1, \quad L_\mu = 0; \\ \text{нейтрино } \nu_\mu: & \quad Q = 0, \quad L_e = 0, \quad L_\mu = 1; \\ \text{электрон } e: & \quad Q = -1, \quad L_e = 1, \quad L_\mu = 0; \\ \text{мюон } \mu: & \quad Q = -1, \quad L_e = 0, \quad L_\mu = 1. \end{aligned}$$

Математически сохранение зарядов B , L_e , L_μ , Q эквивалентно инвариантности амплитуды вероятности (или матрицы рассеяния) относительно фазовых преобразований $u_B, u_{L_e}, u_{L_\mu}, u_Q$, где, например,

$$u_B = e^{iB\alpha} \quad (14)$$

(α — вещественный параметр). Преобразования (14) образуют одномерную унитарную группу $U_B(1)$. Аналогично определены U_{L_e}, U_{L_μ}, U_Q . Заряды B, L_e, L_μ, Q являются сохраняющимися величинами. Именно по этим величинам и осуществляется правило сверхотбора (см. § 1.2). Поскольку заряды B, L_e, L_μ, Q предполагаются независимыми, то только оператор z может быть функцией других величин, т. е. зарядов. Изучение таблицы частиц показывает, что выполняется соотношение

$$z = (-1)^{2J} = (-1)^{B+L_e+L_\mu}.$$

Представления одномерных групп типа $U_B(1)$ одномерны, т. е. из точной симметрии не вытекает существования мультиплетов частиц (и, следовательно, соотношений между вероятностями различных процессов). Таким образом, известные ныне точные симметрии проявляются только посредством законов сохранения для зарядов B, Q, L_e, L_μ .

Приближенные симметрии. Каждый класс взаимодействий характеризуется присущими ему свойствами симметрии; при этом более сильные взаимодействия обнаруживают большую степень симметрии. Такая (экспериментальная) взаимосвязь между силой взаимодействия и его симметрией позволяет ввести важное понятие о приближенной (или нарушенной) симметрии как симметрии некоторой группы более сильных взаимодействий. Точная симметрия, как общая симметрия всех взаимодействий, оказывается более низкой по сравнению с приближенной.

Выясним, что изменится в результатах § 2.1, если симметрия, описываемая группой \mathcal{G} (формулы (4)–(7)), является в действительности приближенной.

Предположим, что компактная группа \mathcal{G} есть группа симметрии более сильной части взаимодействий. Тогда формулы (10) и (11), которые выражают независимость внутренней и пространственно-временной симметрии, могут выполняться только приближенно — в пренебрежении всеми более слабыми взаимодействиями. При учете же этих взаимодействий генераторы F_r могут зависеть, вообще говоря, от времени:

$$[F_r, P_0] \neq 0, \quad [F_r, M_{0k}] \neq 0, \quad (15)$$

а полная S -матрица становится инвариантной относительно преобразований группы \mathcal{G} , т. е.

$$[F_r, S] \neq 0 \quad (16)$$

для некоторых r .

Приближенность симметрии не изменяет, разумеется, группу \mathcal{G} , которая по-прежнему характеризуется теми же перестановочными соотношениями (7) для генераторов F_r ; неприводимые представления группы \mathcal{G} не зависят от того, точна ли симметрия. Следовательно, если соответствие

базис неприводимого представления

$$\leftrightarrow \text{мультиплет частиц} \quad (17)$$

группы внутренней симметрии \mathcal{G}

имеет место при приближенном характере симметрии, то классификация частиц по мультиплетам группы \mathcal{G} будет такая же, как и в случае точной симметрии. При этом значения спинов всех частиц мультиплета предполагаются одинаковыми.

Соответствие (17) дает физическое толкование приближенным симметриям. Вместе с характеристиками, заимствованными из групп Пуанкаре и точной симметрии, оно определяет понятие частицы в случае приближенной симметрии.

По сравнению с чисто кинематическим определением в § 1.4, которое связывало элементарность с неприводимостью представления группы Пуанкаре, это определение элементарной частицы имеет дополнительные черты. Во-первых, в него привнесен динамический элемент, поскольку частицы характеризуются также зарядами Q_i (в число которых входит и электрический заряд) и квантовыми числами z_i, h_α , отмечающими частицы в мультиплете группы симметрии взаимодействия. Во-вторых, понятие частицы теперь стало приближенным. Частица с квантовыми числами J, Q_i', z_i, h_α определена с точностью до более слабых взаимодействий; тем самым предполагается, что такая частица обязана своим существованием только тому взаимодействию, группа симметрии которого есть \mathcal{G} . Она рождается в процессах, вызываемых этим взаимодействием.

Согласно (1) и (17) вектор состояния частицы может быть приближенно записан в виде

$$|\dots; m, J; Q'_i, z_i, h_\alpha\rangle, \quad (18)$$

где, как и в (1), опущены переменные группы Пуанкаре. Приближенный характер вектора состояния (18) явствует, например, из того, что вследствие (15) масса не будет, вообще говоря, коммутировать с операторами величин z_i и h_α и в таком случае не может иметь определенного значения в состоянии (18), где фиксированы z_i и h_α . Но тогда частицу следует описывать распределением масс, что влечет за собой ее нестабильность (см. § 2.3). Величине m в (18) при этом можно придать смысл средней массы.

Далее, в присутствии более слабых взаимодействий, которые нарушают симметрию и вызывают переходы между состояниями с различными z_i и h_α , может оказаться невозможным отличить одно из состояний типа (18) от некоторой суперпозиции его с другими состояниями.

Определение (17) мультиплета в случае приближенной симметрии не зависит от того, сильно или слабо нарушена симметрия. Оно действует до тех пор, пока можно проследить хотя бы «генетическую» связь наблюдаемых в эксперименте частиц с предполагаемой группой симметрии. При сильно нарушенной симметрии труднее установить количественно следствия нарушения (расщепление масс и т. д.) и оправдать предполагаемую группу симметрии.

Таким образом, приближенные симметрии несут в себе большую информацию о частицах и взаимодействиях, нежели точные симметрии. Введение таких симметрий составляет первый этап в теоретической обработке данных об элементарных частицах. Именно с помощью приближенных симметрий можно понять мультиплетную структуру спектра масс. Приближенные симметрии представляют собой удобный (а иногда единственный) язык для описания сильно взаимодействующих частиц. Поэтому выявление последовательных ступеней симметрии, соответствующих взаимодействиям все увеличивающейся силы, составляет одну из главных проблем классификации. Группы приближенных симметрий SU_2 , SU_3 и SU_6 будут изучаться в ч. III, а группы $SU_2 \times SU_2$ и $SU_3 \times SU_3$ — в гл. 15.

§ 2.3. Нестабильные частицы

Среди множества элементарных частиц имеется только пять абсолютно стабильных частиц: оба нейтрино, фотон, электрон и протон, а также их античастицы. Остальные частицы нестабильны. Нестабильные частицы можно подразделить на два класса: метастабильные частицы и резонансы.

Метастабильные частицы распадаются вследствие слабого или электромагнитного взаимодействий. Ввиду слабости этих взаимодей-

ствий время жизни метастабильных частиц велико, так что обратное время жизни Γ мало по сравнению с массой частицы m . Для метастабильных частиц отношение Γ/m не превышает величины $5 \cdot 10^{-6}$ (η -мезон). Метастабильные частицы обычно включаются в группу стабильных частиц. Таблица стабильных частиц (табл. П.1) содержит как абсолютно стабильные, так и метастабильные частицы. Все эти частицы устойчивы по отношению к распаду, вызываемому сильными взаимодействиями.

Частицы-резонансы рождаются в сильных взаимодействиях и распадаются благодаря сильным взаимодействиям. Эти частицы не наблюдаются в «свободном» состоянии; они проявляют себя при рассеянии в виде своего рода квазистационарных состояний двух или трех сильно взаимодействующих частиц. Резонансы обладают свойствами частиц, а именно: а) спин резонансов имеет определенное значение; б) резонансы можно характеризовать внутренними квантовыми числами, сохраняющимися при сильных взаимодействиях (например, изоспин и гиперзаряд). Однако, в отличие от стабильных частиц, резонансы не имеют определенного или почти определенного значения массы. Резонансы описываются спектром масс дисперсионного типа, и максимум этого спектра обычно называется массой резонанса. Ширина спектра масс резонанса Γ может быть сравнима по порядку величины с массой частицы. В случае ρ -мезона отношение Γ/m достигает 0,2. Для κ -мезона, который наблюдался в нескольких экспериментах [34, 35], это отношение составляет 0,3.

Природа нестабильной частицы наиболее точно, по-видимому, описывается введением понятия о квазистационарном состоянии, которое хорошо известно еще из нерелятивистской квантовой механики. Рассматривая нестабильную частицу a , мы можем записать полный оператор энергии H в виде суммы двух частей: $H = H_a + H'$. В пренебрежении H' частица a становится стабильной, а состояния (стабильной) частицы $|a\rangle$ оказываются собственными состояниями оператора H_a . «Включение» H' вызывает распад частицы a . В случае метастабильной частицы H' содержит слабые и электромагнитные взаимодействия, а в случае резонансов — кроме того, и часть сильных взаимодействий. При учете H' состояния частицы a являются квазистационарными.

Такая картина, однако, может быть проверена только в ее наиболее общих чертах. Оператор H' известен лишь для электромагнитного взаимодействия. В случае слабого взаимодействия пока установлено то выражение для H' , которое можно использовать в первом приближении теории возмущений. В наиболее же интересном случае сильных взаимодействий нет ни надежных выражений для H' , ни методов решений задачи вне рамок теории возмущений. Поэтому определение резонанса как физического объекта может опираться только на те свойства квазистационарных состояний,

которые не зависят от конкретного вида взаимодействий. Этим характерным свойством может служить вид спектра масс нестабильной частицы.

Связь спектра масс с законом распада. Связь закона распада квазистационарного состояния с функцией распределения энергии устанавливается теоремой Крылова—Фока [36].

Пусть $|\psi(\alpha, x^0 = 0)\rangle$ есть начальное состояние системы. Здесь α обозначает совокупность переменных, по которым отмечаются состояния системы. Представим $|\psi(\alpha, 0)\rangle$ в виде интеграла по собственным функциям оператора энергии E :

$$|\psi(\alpha, 0)\rangle = \int c(E) |\alpha, E\rangle dE. \quad (19)$$

Тогда состояние системы в момент времени x^0 будет

$$|\psi(\alpha, x^0)\rangle = \int e^{-iEx^0} c(E) |\alpha, E\rangle dE. \quad (20)$$

Вероятность того, что через время x^0 система все еще будет находиться в начальном состоянии, равна

$$L(x^0) = |p(x^0)|^2,$$

где

$$p(x^0) = \int \langle \psi(\alpha, 0) | \psi(\alpha, x^0) \rangle d\alpha = \int e^{-iEx^0} |c(E)|^2 dE.$$

Но величина

$$|c(E)|^2 dE = w(E) dE = dW(E) \quad (21)$$

есть функция распределения энергии для начального состояния (и, следовательно, и для состояния $|\psi(\alpha, x^0)\rangle$). Поэтому

$$L(x^0) = \left| \int e^{-iEx^0} dW(E) \right|^2, \quad (22)$$

т. е. закон распада состояния $|\psi(\alpha, 0)\rangle$ зависит только от функции распределения энергии в этом состоянии (теорема Крылова—Фока).

В случае нестабильной частицы в состоянии покоя распределение энергии $dW(E)$ есть не что иное, как спектр масс частицы. Состояния $|\alpha, E\rangle$ при этом включают и состояния продуктов распада. Необходимым и достаточным условием наличия распада является непрерывность интегральной функции распределения $W(E)$, что исключает дискретный спектр масс. Действительно, только в случае непрерывной функции $W(E)$ вероятность $L(x^0) \rightarrow 0$ при $x^0 \rightarrow \infty$.

Теорема Крылова—Фока (22) весьма обща; она применима к распаду любого нестационарного состояния — как нестабильной частицы, так и, например, волнового пакета для стабильной частицы.

Обычная (экспоненциальная) форма закона распада квазистационарных состояний

$$L'(x^0) \approx e^{-\Gamma x^0} \quad (23)$$

получается в предположении о мероморфном характере $\omega(E)$ как функции комплексной переменной E . Так как при вещественных значениях E функция $\omega(E)$ будет вещественной, то полюсы ее будут расположены симметрично относительно вещественной оси, причем вычеты в полюсах будут комплексно сопряженными. Если бы функция $\omega(E)$ имела только одну пару полюсов $E = E_0 \pm i \frac{\Gamma}{2}$ ($\Gamma > 0$), то можно было бы положить

$$\omega(E) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{i\pi\Gamma/2}}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (24)$$

Подстановка этого выражения в (22) приводит к экспоненциальному закону распада (23) при больших временах и $\Gamma \ll E_0$.

Если функция $\omega(E)$ имеет несколько пар полюсов, то главный вклад в асимптотику $L(x^0)$ при больших временах x^0 вносит ближайшая к вещественной оси пара полюсов. Пусть следующая пара полюсов имеет мнимую часть $\Gamma' > \Gamma$. Тогда экспоненциальный закон (23) с шириной Γ определяет картину распада при временах x^0 , удовлетворяющих условию

$$(\Gamma' - \Gamma) x^0 \gg 1. \quad (25)$$

Таким образом, в простейшем случае, когда распад частицы определяется одной экспонентой (23), распределение масс покоящейся нестабильной частицы должно носить дисперсионный характер (24) и будет определяться двумя параметрами — массой m (положением максимума) и шириной пика Γ . Стабильная частица получается отсюда переходом к пределу $\Gamma \rightarrow 0$.

Нестабильные частицы в релятивистской квантовой теории. Описание нестабильных частиц в релятивистской квантовой теории представляет собой в первую очередь описание с точки зрения группы Пуанкаре и в рамках матрицы рассеяния.

Поскольку нестабильные частицы характеризуются спектром масс, то с точки зрения группы Пуанкаре они должны описываться приводимыми представлениями (ибо неприводимые представления соответствуют определенным значениям массы). Но теоретико-групповое определение элементарности предполагает неприводимость представления, пространство состояний элементарной частицы должно быть неприводимым. Это значит, что нестабильные частицы нельзя считать элементарными в теоретико-групповом смысле.

Однако с физической точки зрения такой подход к роли нестабильных частиц трудно оправдать. Нестабильные частицы следо-

Пусть резонанс Y распадается на стабильные частицы d и f , так что окончательными продуктами реакции являются c_1, \dots, d, f . При таком рассеянии энергия и импульс частиц a и b распределяются между группами частиц $c_1 + \dots$ и $d + f$ в конечном состоянии. Если бы резонанс Y был стабильной частицей, то в системе покоя Y его энергия E (т. е. масса) имела бы определенное значение. Но резонанс Y нестабилен и характеризуется распределением $\omega(E) = |c(E)|^2$. Функция $\omega(E)$ связана непосредственно со спектром масс частиц — продуктов распада $Y \rightarrow d + f$ при

$$E = E_d + E_f, \quad p_d + p_f = 0.$$

Предположим для простоты, что частицы d и f — единственно возможные продукты распада резонанса Y . Тогда в системе ц. и. полный набор состояний, входящих в (19), есть набор тех двухчастичных состояний $|d, f; E\rangle$, которые имеет те же спин и внутренние квантовые числа, что и частица Y . При этом коэффициент $c(E)$ в (19) будет равен $\langle d, f; E | Y \rangle$, а спектр масс частиц — продуктов распада d и f совпадает со спектром масс Y .

Таким образом, изучая распределения масс комплексов частиц в конечных состояниях реакций, можно непосредственно получать распределения по массам нестабильных частиц, являющихся «резонансными состояниями» таких комплексов, т. е. имеющих те же внутренние квантовые числа, но большие массу и спин. Это не означает, разумеется, что каждый пик в распределениях масс частиц — продуктов реакции можно сопоставить нестабильной частице-резонансу; возможны кинематические пики, присущие только данной реакции. Понятие же частицы-резонанса является универсальным: ее существование должно проявляться во всех реакциях, связанных с сильным взаимодействием, где допустимы состояния с квантовыми числами резонанса.

Резонансные пики, отвечающие частицам-резонансам, обнаруживаются также как в амплитуде упругого рассеяния $d + f \rightarrow Y \rightarrow d + f$, так и в полном сечении реакций, начинаемых частицами d и f . Этот случай отличается от рассмотренного ранее тем, что интервал энергий ΔE , в пределах которого определено состояние $d + f$, значительно меньше ширины резонанса Γ_Y : $\Delta E \ll \Gamma_Y$. Поэтому система $d + f$ будет локализована в объеме с линейным размером порядка $\Delta x \approx 1/\Delta p \approx v/\Delta E$, который значительно превосходит то расстояние v/Γ_Y , которое частица-резонанс Y могла бы пройти за свое среднее время жизни. Следовательно, резонанс Y в этом случае оказывается виртуальным промежуточным состоянием при рассеянии.

Если рассеяние $d + f$ происходит практически только посредством образования виртуального резонанса Y , то полное сечение df -рассеяния будет зависеть от энергии E вблизи резонанса по тому

же закону (25), что и распределение масс $\omega(E)$ (с точностью до кинематических множителей). Полное сечение будет иметь максимум в области энергий сталкивающихся частиц E (в системе ц. и.), равной массе резонанса, и частицы в конечном состоянии будут появляться с запаздыванием по сравнению с рассеянием без образования резонанса.

Например, полное сечение рассеяния пионов π^+ на протонах имеет четко выраженный пик в области энергий $E = p^0(\pi^+) + p^0(p) \approx 1150 - 1300$ Мэв с шириной $\Gamma \approx 120$ Мэв, соответствующий состоянию с полным спином $J = 3/2$ (рис. 2 [37]). Этот

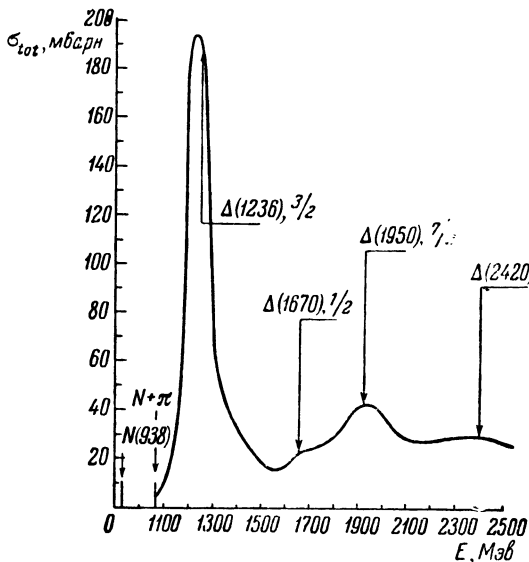
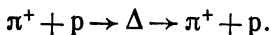


Рис. 2.

пик интерпретируется как свидетельство существования частицы-резонанса Δ со средней массой $m_\Delta = 1236$ Мэв, со спином $J = 3/2$ и с теми же остальными квантовыми числами, что и у π^+ -р-системы. В этой области энергий π^+ -р-рассеяние состоит из последовательных процессов образования частицы Δ и ее распада:



Изучение полного сечения π^+ -р-рассеяния при более высокой энергии позволяет установить существование еще трех резонансов с внутренними квантовыми числами π^+ -р-системы, но с различными спинами и массами: $\Delta(1670)$ со спином $1/2$, $\Delta(1950)$ со спином $7/2$ и $\Delta(2420)$ со спином $11/2$. Цифра в скобках при символе частицы обозначает массу резонансов.

Вероятность распада. Распады можно подразделить на быстрые, электромагнитные и медленные. Быстрые распады вызываются сильным взаимодействием, медленные распады — слабым взаимодействием. Пусть оператор энергии есть $H = H_a + H'$, где H' — распадное взаимодействие. Напишем формулу для вероятности распада в первом приближении по H' .

Мы рассматриваем распад частицы Y в многочастичное состояние $|a, b, \dots; \text{out}\rangle: Y \rightarrow a + b + \dots$. Поскольку распад рассматривается в первом приближении, то состояние $|Y\rangle$ есть собственное состояние оператора H_a . Многочастичные состояния также определены в пренебрежении взаимодействием $H'(x^0)$. Так как энергия и импульс сохраняются, то амплитуду распада можно представить в виде

$$S(Y \rightarrow a + b + \dots) = i(2\pi)^4 \delta^4(p_Y - p_a - p_b - \dots) \langle Y | T | a, b, \dots; \text{out} \rangle \quad (26)$$

и в первом приближении

$$\langle Y | T | a, b, \dots \rangle = -i \langle Y | H'(0) | a, b, \dots \rangle. \quad (27)$$

Вероятность распада $\omega(Y \rightarrow a + b + \dots)$ вычисляется стандартным образом, описанным в § 1.4:

$$\omega(Y \rightarrow a + b + \dots) = \frac{1}{Vt} |S(Y \rightarrow a + b + \dots)|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_Y - p_a - p_b - \dots) |\langle Y | T | a, b, \dots \rangle|^2. \quad (28)$$

Формула (28) дает вероятность распада, если распадающаяся частица и продукты распада находятся в определенных состояниях. В эксперименте наблюдается обычно распад частицы, находящейся в произвольном спиновом состоянии. Поэтому выражение (28) следует усреднить по спиновым состояниям начальной частицы.

Полная вероятность распада с заданными продуктами a, b, \dots получается суммированием (28) по всем возможным конечным состояниям частиц a, b, \dots

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА И ОТРАЖЕНИЯ

Релятивистская кинематика есть непосредственное следствие инвариантности теории относительно преобразований группы Пуанкаре. Релятивистская кинематика изучает вопросы, связанные с трансформационными свойствами состояний *in, out* и матрицы рассеяния. Ее задача — дать простое и удобное разложение матрицы рассеяния по неприводимым амплитудам, которое может служить исходным для динамических теорий.

Отделение кинематического аспекта от динамического может быть сделано, вообще говоря, различными способами. Мы рассматриваем подход к параметризации амплитуды с помощью спинорных состояний или *M*-функций, а также разложение по спиральным амплитудам. Однако волновые функции для частиц с высшими спинами даны в различных формах, что позволит читателю испробовать и другие представления амплитуды, в которых легко учесть инвариантность теории относительно отражений.

Релятивистская инвариантность теории сама по себе не подразумевает ее инвариантности относительно отражений пространства и времени в отдельности. Но поскольку теория опирается на локальную квантовую теорию поля, то она автоматически инвариантна относительно полного отражения пространства и времени. Кроме того, сильные и электромагнитные взаимодействия инвариантны относительно отражений, и, следовательно, в этих случаях отражения составляют часть кинематики.

Глава 3

ГРУППА ЛОРЕНЦА И ГРУППА $SL(2, c)$

Как было выяснено в § 1.2, релятивистская инвариантность в квантовой механике означает, что физические состояния должны преобразовываться при преобразованиях Лоренца по унитарным представлениям не самой группы Пуанкаре \mathcal{P}_+^\dagger , а ее универсальной покрывающей группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$, или квантовомеханической группы Пуанкаре. По отношению к однородной группе Лоренца универсальной покрывающей группой служит группа комплексных унимодулярных 2×2 -матриц второго порядка $SL(2, c)$.

В классической физике ковариантные уравнения формулируются на языке тензоров — величин, преобразующихся по неприводимым (неунитарным) представлениям группы Лоренца. В релятивистской квантовой теории аналогичная роль принадлежит величинам, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы $SL(2, c)$. Эти величины называются спинорами (различных рангов) [38, 41]. Только спиноры четного ранга выражаются через тензоры. Спиноры нечетного ранга являются величинами, которые нельзя получить в рамках однозначных представлений группы Лоренца, — они преобразуются по двузначным представлениям этой группы.

В настоящей главе излагается спинорный анализ. Кроме того, в §§ 3.4 и 3.5, будут вкратце приведены сведения о коэффициентах Клебша—Гордана и представлениях (однозначных и двузначных) группы вращений.

§ 3.1. Унимодулярные матрицы второго порядка и преобразование Лоренца

Рассмотрим комплексную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где комплексные параметры α , β , γ , δ ограничены условием унимодулярности

$$\det A = \alpha\delta - \gamma\beta = 1. \quad (2)$$

Матрица A зависит, таким образом, от шести вещественных параметров.

Произведение $A_1 A_2$ двух унимодулярных матриц A_1 и A_2 будет также унимодулярной матрицей: $\det(A_1 A_2) = 1$. Единичная матрица E есть

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Обратная матрица всегда существует, ибо $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Мы видим, что матрицы типа A образуют бинарную группу. В стандартных обозначениях эта группа есть $SL(2, c)$.

Среди матриц A особая роль принадлежит матрице C :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -C^* = -C^{-1}. \quad (5)$$

С помощью этой матрицы устанавливается связь между транспонированной матрицей A^T и обратной A^{-1} :

$$A^{-1} = C^{-1} A^T C. \quad (6)$$

Иначе говоря, матрицы $AC^{-1}A^TC$ и $C^{-1}A^TCA$ эквивалентны единичной матрице.

Базисными матрицами для матриц второго порядка служат матрицы σ_μ , включающие матрицы Паули σ_k и единичную матрицу:

$$\sigma_0 = E, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрицы Паули обладают следующими коммутационными свойствами:

$$[\sigma_k, \sigma_q] = i2\epsilon_{kqp} \sigma_p, \quad \{\sigma_k, \sigma_q\} = 2\delta_{kq}, \quad (8)$$

где ϵ_{kqp} — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{123} = 1$. Матрицы Паули ортогональны в том смысле, что

$$\text{Sp}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Между матричными элементами σ_k существуют соотношения

$$\sum_{k=1}^3 (\sigma_k)_{ij} (\sigma_k)_{ln} = 2\delta_{in} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{ln}, \quad (10)$$

которые могут быть легко проверены прямым вычислением.

Вследствие коммутационных свойств (8) произведение любого числа матриц σ_μ выражается линейно посредством этих же матриц.

Поэтому произвольная матрица второго порядка O может быть представлена в виде линейной комбинации базисных матриц:

$$O = \sum_{\mu} O(\mu) \sigma_{\mu}, \quad (11)$$

с комплексными коэффициентами $O(\mu)$, которые в силу ортогональности матриц σ_{ν} в смысле (9) могут быть определены однозначно по матрице O :

$$O(\mu) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_{\mu} O). \quad (12)$$

Если матрица O унимодулярна, то выполняется условие (2), или

$$O^2(0) - \sum_{k=1}^3 O^2(k) = 1. \quad (13)$$

Установим теперь соответствие между матрицами и лоренцевыми 4-векторами. Сопоставим каждому вещественному 4-вектору x^{μ} эрмитову матрицу X , составленную по правилу

$$X = x^{\mu} \sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Соответствие x^{μ} и X однозначно; обратная формула есть

$$x^{\mu} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_{\mu} X). \quad (15)$$

Таким образом, каждой точке пространства x^{μ} приводится в соответствие своя эрмитова матрица X . Определитель матрицы X

$$\det X = x^{02} - x^k x^k = x^2 \quad (16)$$

есть не что иное, как квадрат 4-вектора x^{μ} .

Рассмотрим преобразование $X \rightarrow X'$, осуществляемое унимодулярной матрицей A :

$$X' = AXA^+. \quad (17)$$

Это есть линейное преобразование 4-вектора x^{μ} , при котором свойство эрмитовости матрицы X сохраняется, т. е. вещественные x^{μ} переходят в вещественные же x'^{μ} . Так как $\det A = \det A^+ = 1$, то при преобразовании (17) определитель матрицы X не изменяется: $\det X = \det X'$, что согласно (16) означает инвариантность x^2 . Но линейное преобразование 4-вектора $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$, при котором его длина не изменяется ($x'^2 = x^2$), есть преобразование группы Лоренца. Итак, (17) описывает преобразование группы Лоренца для 4-вектора x^{μ} .

Выясним соответствие между преобразованием матрицы X по (17) и преобразованием 4-вектора $x'_\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. В подробной записи формула (17) гласит:

$$X' = \sigma_\mu x'^\mu = \sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu = A X A^+ = A \sigma_\nu A^+ x^\nu, \quad (18)$$

откуда согласно (15) мы получаем $x'_\mu = 1/2 \text{Sp}(\sigma_\mu X')$, или

$$\Lambda^\mu_\nu(A) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+). \quad (19)$$

Из формулы (19) мы заключаем, что каждое преобразование Λ^μ_ν может вызываться двумя матрицами $\pm A$, отличающимися знаком: $\Lambda^\mu_\nu(A) = \Lambda^\mu_\nu(-A)$.

Опуская верхний индекс в (19), мы приходим к коэффициентам лоренцева преобразования с нижними индексами:

$$\Lambda_{\mu\nu}(A) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\tilde{\sigma}_\mu A \sigma_\nu A^+), \quad (20)$$

которые выражаются через матрицу

$$\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) = \hat{C}^{-1} \sigma_\mu^T \hat{C}. \quad (21)$$

При преобразованиях иногда удобно пользоваться одновременно матрицами σ_μ и $\tilde{\sigma}_\nu$, поскольку тогда соотношения записываются в релятивистски ковариантном виде. Вместо формул (8) и (9) можно использовать формулы

$$\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu = g_{\mu\nu} + i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \sigma^\lambda \tilde{\sigma}^\tau, \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(\tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = g_{\mu\nu}. \quad (23)$$

Формула (10) переписывается в виде

$$(\sigma_\nu)_{ij} (\tilde{\sigma}_\mu)_{ln} g_{\mu\nu} = 2\delta_{in} \delta_{jl}. \quad (24)$$

Покажем, что величины $\Lambda_{\mu\nu}(A)$ действительно обладают всеми свойствами коэффициентов преобразования Лоренца. Мы получаем

$$\Lambda^\mu_\nu(A) \Lambda^\nu_\rho(A) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+) \text{Sp}(\tilde{\sigma}_\rho A \tilde{\sigma}_\nu A^+) = \delta^\mu_\rho,$$

или условие ортогональности преобразования Лоренца (19). Аналогичным образом легко убедиться, что $\Lambda(A_1)\Lambda(A_2) = \Lambda(A_1 A_2)$ и, в частности, $\Lambda(A^{-1}) = \Lambda^{-1}(A)$. Все коэффициенты Λ^μ_ν вещественны:

$$\Lambda^{*\mu}_\nu(A) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+)^+ = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+) = \Lambda^\mu_\nu(A).$$

Условие ортохронности преобразования $\Lambda^{00} \geq 1$ налагает на матрицу A условие

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{2} \text{Sp} (AA^+) \geq 1. \quad (25)$$

Кроме матрицы X с законом преобразования (17) можно также рассматривать матрицу

$$\tilde{X} = x^\mu \tilde{\sigma}_\mu = C^{-1} X^* C.$$

Отсюда и из (17) находим преобразовательные свойства \tilde{X}

$$\tilde{X}' = C^{-1} A^* X^* A^{*+} C = A^{-1+} \tilde{X} A^{-1}.$$

Иначе говоря, при переходе $X \rightarrow \tilde{X}$ необходимо произвести замену $A \rightarrow A^{-1+}$. Произведение матриц X и \tilde{Y} преобразуется по правилу $(X\tilde{Y})' = AX\tilde{Y}A^{-1}$, так что если в некоторой системе отсчета это произведение пропорционально единичной матрице, то такое свойство сохраняется во всех системах. Нетрудно проверить, что для произвольных X и Y выполняется следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \text{Sp} (X\tilde{Y}) = x_\mu y^\mu, \quad (26)$$

дающее скалярное произведение двух 4-векторов.

Обратимся к изучению преобразований A . Матрица A может быть в общем случае представлена в виде произведения эрмитовой матрицы H и унитарной матрицы R :

$$A = RH. \quad (27)$$

Вследствие унитарности R матрица H определяется по A : $A^+A = HR^{-1}RH = H^2$. Отсюда $R = AH^{-1} = A(A^+A)^{1/2}$. Как мы увидим, эрмитовы матрицы A^+ описывают чисто лоренцевы преобразования, а унитарные матрицы $A^+ = A^{-1}$ — пространственные вращения.

Пусть A_H — эрмитова матрица. Общее выражение для нее через матрицы σ_μ есть

$$A_H = \sum_{\mu} A(\mu) \sigma_{\mu},$$

где коэффициенты $A(\mu)$ теперь вещественны. Чтобы удовлетворить условию унимодулярности, положим

$$A(0) = \text{ch} \frac{\theta}{2}, \quad A(k) = n_k \text{sh} \frac{\theta}{2} \quad (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1).$$

Тогда A_H принимает форму

$$A_H = \sigma_0 \text{ch} \frac{\theta}{2} + (\sigma_n) \text{sh} \frac{\theta}{2} = \exp \left[(\sigma_n) \frac{\theta}{2} \right]. \quad (28)$$

Преобразование матрицы $X \rightarrow X' = A_H X A_H^+$ соответствует преобразованию 4-вектора $x^\mu \rightarrow x'^\mu$:

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \operatorname{ch} \theta + (\mathbf{n}\mathbf{x}) \operatorname{sh} \theta, & [\mathbf{n}, \mathbf{x}'] &= [\mathbf{n}, \mathbf{x}], \\ (\mathbf{n}\mathbf{x}') &= (\mathbf{n}\mathbf{x}) \operatorname{ch} \theta + x_0 \operatorname{sh} \theta, \end{aligned} \quad (29)$$

где \mathbf{x} — пространственный вектор с компонентами x^1, x^2, x^3 . Это есть преобразование Лоренца для 4-вектора x^μ от системы O к системе O' , движущейся относительно O в направлении \mathbf{n} со скоростью $v = \operatorname{th} \theta$.

Пусть теперь A_R унитарно. В этом случае вместо (28) можно написать для A_R следующее общее выражение:

$$A_R = \sigma_0 \cos \frac{\omega}{2} + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \sin \frac{\omega}{2} = \exp \left[i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \frac{\omega}{2} \right]. \quad (30)$$

Формула (19) позволяет сразу же написать преобразование x^μ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} \cos \omega + (\mathbf{x}\mathbf{n}) \mathbf{n} (1 - \cos \omega) + [\mathbf{n}\mathbf{x}] \sin \omega, \\ x'^0 &= x^0. \end{aligned}$$

Это есть вращение вокруг оси \mathbf{n} на угол ω .

Унитарные преобразования (30) составляют унитарную подгруппу $SU(2)$ группы $SL(2, c)$, голоморфную группе R_3 пространственных вращений. В этом случае

$$x_k' = R_{kl} x_l, \quad x_0' = x_0$$

и матрица R удовлетворяет условию ортогональности

$$R^T R = 1.$$

Вместо полной матрицы X достаточно ограничиться преобразованиями только ее пространственной части

$$X_R = x^k \sigma_k,$$

которая трансформируется по правилу

$$X_R' = A_R X_R A_R^{-1}, \quad A_R^\dagger = A_R^{-1},$$

где $\det A_R = 1$ в отсутствие отражений. Соответствие между коэффициентами R_{kl} преобразования группы вращений R_3 и матрицей преобразования A_R группы $SU(2)$ дается формулой (см. (19))

$$R_{kl}(A) = -\frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\sigma_k A_R \sigma_l A_R^{-1}). \quad (31)$$

Из (31) видно, что это соответствие двузначно: $R(A) = R(-A)$. В частности, единичному вращению, т. е. вращению на угол $\omega = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), соответствуют матрицы $\pm E$.

Если нас интересует общее преобразование Лоренца, включающее как чисто лоренцево преобразование, так и вращение, то матрицу A можно принять в форме

$$A = \exp\left(\frac{1}{2} \sigma \alpha\right), \quad (32)$$

где α — комплексный 3-вектор.

Иная параметризация унимодулярной матрицы A , которая часто используется в приложениях, имеет вид

$$A = RBN, \quad (33)$$

где R описывает произвольное вращение (в эйлеровых углах):

$$R = e^{-i \frac{1}{2} \sigma_3 \varphi} e^{-i \frac{1}{2} \sigma_1 \psi} e^{-i \frac{1}{2} \sigma_3 \psi} \quad (0 \leq \varphi + \psi \leq 4\pi, \quad -2\pi \leq \varphi - \psi \leq 2\pi); \quad (34)$$

матрица B относится к абелевой подгруппе:

$$B = e^{-\frac{1}{2} \sigma_3 \beta} \quad (-\infty < \beta < \infty); \quad (35)$$

матрица N треугольна:

$$N = 1 + \frac{1}{2} (\sigma_1 - i\sigma_2) z. \quad (36)$$

(Здесь z -произвольное комплексное число.) Матричные элементы матрицы A равны:

$$A_{11} = e^{-\frac{\beta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi + \psi}{2}} - e^{\frac{\beta}{2}} z \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi - \psi}{2}},$$

$$A_{12} = -e^{\frac{\beta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\varphi - \psi}{2}},$$

$$A_{21} = e^{-\frac{\beta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi - \psi}{2}} + e^{\frac{\beta}{2}} z \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi + \psi}{2}},$$

$$A_{22} = e^{\frac{\beta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\varphi + \psi}{2}}.$$

В заключение параграфа убедимся, что группа унимодулярных 2×2 -матриц $SL(2, c)$ действительно представляет собой покрывающую группу. Для этого необходимо установить изоморфизм между элементами определенной в §1.1 покрывающей группы \bar{L} и $SL(2, c)$. Согласно (1.13) и (1.17) соответствие между \bar{L} и 2×2 -матрицами A устанавливается формулами

$$\bar{L}_0 = [H\bar{R}]_0 = HR(n, \theta) \leftrightarrow A(n, \theta),$$

$$\bar{L}_1 = [HR]_1 = HR_1(n, \theta) \leftrightarrow -A(n, \theta),$$

так как согласно (30)

$$R(\mathbf{n}, \theta) = -R(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta).$$

Матрицы $A(\mathbf{n}, \theta)$ имеют тот же закон умножения, что и HR , и, следовательно, матрицы A образуют покрывающую группу \bar{L} .

§ 3.2. Спиноры

Как мы выяснили в предыдущем параграфе, в группе $SL(2, c)$ каждому 4-вектору x^μ сопоставляется эрмитова матрица X и в пространстве этих матриц лоренцево преобразование $x' = \Lambda x$ задается как линейное преобразование $X' = AXA^+$, вызываемое унитарной матрицей A .

Рассмотрим теперь другие величины, закон преобразования которых определяется по матрице A .

Двухкомпонентный спинор (или спинор первого ранга)

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

представляет собой пару комплексных чисел ξ_1, ξ_2 , которые преобразуются по правилу

$$\xi'_\alpha = A_{\alpha\beta} \xi_\beta \quad \text{или} \quad \xi' = A\xi. \quad (38)$$

Спинор ξ можно трактовать как вектор в линейном комплексном пространстве двух измерений, связанный с некоторой системой отсчета в пространстве лоренцевых 4-векторов. При переходе к другой системе отсчета ξ переходит в ξ' согласно (38). Поскольку соответствие $\Lambda \leftrightarrow \pm A$ двузначно, то спинор в каждой системе отсчета может быть задан лишь с точностью до знака.

Мы будем обозначать компоненты спинора ξ еще и так: $\xi_1 = \xi_{1/2}$ и $\xi_2 = \xi_{-1/2}$, имея в виду действие матрицы $1/2\sigma_3$ на ξ .

Определим спинор с верхним индексом η^α условием инвариантности свертки $\eta^\alpha \xi_\alpha$ относительно преобразований группы. Из (38) следует, что η^α должно преобразовываться с помощью матрицы $A^{-1\tau}$:

$$\eta'^\alpha = A^{-1\tau\alpha}_\beta \eta^\beta. \quad (39)$$

Полагая $A^{-1\tau\alpha}_\beta = (C^{-1}AC)^\alpha_\beta$ согласно (6), мы убеждаемся, что для того, чтобы выполнялось правило свертывания по верхним и нижним индексам, матричные элементы C и C^{-1} следует записать как $C_{\alpha\beta}$ и $C^{-1\alpha\beta}$. Спинор $\xi^\alpha = C^{-1\alpha\beta} \xi_\beta$ преобразуется по правилу (39), а спинор $\eta_\alpha = C_{\alpha\beta} \eta^\beta$ — по формуле (38). Иначе говоря, спиноры с верхними индексами ξ^α и спиноры с нижними индексами ξ_α преобразуются по унитарно эквивалентным представлениям.

Билинейная форма

$$\eta^\alpha \xi_\alpha = \eta^\alpha C_{\alpha\beta} \xi^\beta = -\eta_\beta C^{-1\beta\alpha} \xi_\alpha = -\eta_\beta \xi^\beta \quad (40)$$

остается инвариантной при преобразованиях Лоренца. C и C^{-1} играют роль метрических матриц. При этом правило поднятия и опускания индексов относится только к свертыванию по правому индексу в C и C^{-1} , ибо $C^T = C^{-1}$, т. е. свойства C и C^T различны в этом отношении.

Каждой матрице A можно сопоставить комплексно сопряженную матрицу A^* , которая также унимодулярна. При лоренцевом преобразовании комплексно сопряженная пара чисел $\xi_{1/2}^*$ и $\xi_{-1/2}^*$, образующая комплексно сопряженный спинор ξ_α^* , будет преобразовываться с помощью матрицы A^* :

$$\xi_\alpha^* = A^*_{\alpha\beta} \xi_\beta^*.$$

Вместо ξ_α^* обычно пишут $\xi_{\dot{\alpha}}$, а матричные элементы A^* записывают как $A^*_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Таким образом, комплексно сопряженный спинор $\xi_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ преобразуется по формуле

$$\xi_{\dot{\alpha}} = A^*_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}. \quad (41)$$

Матрицу A^* нельзя получить из A с помощью какого-либо линейного преобразования, ибо такой переход включает замену всех параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (1) на комплексно сопряженные, что не является линейной операцией. Следовательно, представление с A^* не эквивалентно представлению, осуществляемому матрицами A . Спиноры ξ_α и $\xi_{\dot{\alpha}}$ преобразуются неэквивалентным образом. Если, однако, A унитарно, то $A^* = A^{-1T}$. Это означает согласно (39) и (41), что при пространственных вращениях спиноры ξ^α и $\xi_{\dot{\alpha}}$ преобразуются одинаково, т. е. в унитарной группе SU_2 нет различия между спинором с верхним индексом и комплексно сопряженным спинором.

По аналогии с (39) можно ввести контравариантные комплексно сопряженные спиноры $\xi^{\dot{\alpha}}$, имеющие верхний пунктирный индекс:

$$\xi^{\dot{\alpha}} = A^{-1+\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}. \quad (42)$$

Метрические матрицы при этом имеют тот же вид:

$$\xi_{\dot{\alpha}} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi^{\dot{\beta}}, \quad \xi^{\dot{\alpha}} = C^{-1\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}, \quad (43)$$

$$C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -C^{-1\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -C^{-1\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2. \quad (44)$$

Легко проверить, что величина

$$\eta^{\dot{\alpha}} \xi_{\dot{\alpha}} = -\eta_{\dot{\alpha}} \xi^{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{\alpha}} C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi^{\dot{\beta}}$$

есть инвариант. Матричные элементы единичной матрицы E мы будем записывать как $E_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ и $E_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Как явствует из способа их введения, пунктирный и непунктирный индексы независимы, т. е. нельзя, например, сворачивать $\eta_{\dot{\alpha}} \xi^{\alpha}$ по индексам различного рода. Отсюда следует, что только из спиноров одного типа невозможно составить инвариантную билинейную эрмитову форму.

Чтобы выяснить, как нужно записывать матричные элементы X , обратимся к формуле преобразования $X' = AXA^+$. Матрицы A и A^+ имеют матричные элементы A_{α}^{β} и $A^{+\dot{\lambda}}_{\dot{\tau}}$, поэтому матричные элементы X нужно обозначать $X_{\beta\dot{\lambda}}$, т. е. $X_{\beta\dot{\lambda}}$ представляет собой смешанный спинор второго ранга:

$$X = \begin{pmatrix} X_{\frac{1}{2}\dot{1}} & X_{\frac{1}{2}\dot{2}} \\ X_{-\frac{1}{2}\dot{1}} & X_{-\frac{1}{2}\dot{2}} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Трансформационные свойства $X_{\beta\dot{\lambda}}$ совпадают со свойствами $\xi_{\beta}\xi_{\dot{\lambda}}$:

$$X_{\beta\dot{\lambda}} \sim \xi_{\beta}\xi_{\dot{\lambda}},$$

где тильда имеет смысл «преобразуется как». Но матрица X построена на базисных матрицах Паули σ_{μ} . Поэтому те матрицы Паули, которые входят в X (или, разумеется, в любую другую матрицу Y с тем же законом преобразования), обладают матричными элементами $(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}$.

Вид матричных элементов $\tilde{\sigma}_{\mu}$ устанавливается из определения $\tilde{\sigma}_{\mu} = C^{-1}\sigma_{\mu}^T C$. Используем C^{-1} для поднятия пунктирного индекса и записываем матрицу $C_{\alpha\dot{\beta}}$ в виде $C^{-1\dot{\beta}\alpha}$ (свертывать можно только по правому индексу C и C^{-1}); в итоге получим

$$\tilde{\sigma}_{\mu} \equiv (\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}. \quad (46)$$

Следовательно, контравариантная матрица координат \tilde{X} есть $\tilde{X} = X^{\dot{\alpha}\beta}$ и

$$X^{\dot{\alpha}\beta} \sim \xi^{\dot{\alpha}} \xi^{\beta}. \quad (47)$$

Условие ортогональности (24) следует теперь записывать в виде

$$(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} (\tilde{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}'\alpha'} = 2\delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}'}. \quad (48)$$

Пользуясь (45) и определением (14) для матриц X , нетрудно получить свойства компонент 4-вектора x^μ относительно преобразований бинарной группы:

$$\begin{aligned} x^0 &\sim \frac{1}{2} (\xi_{1/2} \xi_{1/2} + \xi_{-1/2} \xi_{-1/2}), & x^1 &\sim \frac{1}{2} (\xi_{1/2} \xi_{-1/2} + \xi_{-1/2} \xi_{1/2}), \\ x^2 &\sim \frac{1}{2} i (\xi_{1/2} \xi_{-1/2} - \xi_{-1/2} \xi_{1/2}), & x^3 &\sim \frac{1}{2} (\xi_{1/2} \xi_{1/2} - \xi_{-1/2} \xi_{-1/2}). \end{aligned} \quad (49)$$

Спиноры высшего ранга (спин-тензоры) с нижними индексами представляют собой величины, преобразующиеся как произведения (различных) спиноров:

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m} \sim \xi_{\alpha_1} \dots \eta_{\alpha_n} \zeta_{\beta_1} \dots \chi_{\beta_m}. \quad (50)$$

Поднятие индекса осуществляется с помощью матриц $C^{-1\alpha\beta}$ и $C^{-1\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Поэтому определения (50) достаточно и для введения понятия о спинорах высшего ранга с верхними индексами или же понятия о смешанных спин-тензорах. Таким образом, при преобразовании Лоренца спинор $\Psi_{\alpha \dots \beta \dots \dot{\alpha} \dots \dot{\beta} \dots}$ преобразуется с помощью унимодулярной матрицы по каждому индексу, а именно: нижние непунктирные индексы — с помощью матрицы $A_\alpha^{\alpha'}$, нижние пунктирные — с помощью $A_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}'}$, верхние непунктирные — с помощью $A^{-1\tau\beta'}_{\beta}$, верхние пунктирные — по правилу $A^{-1+\dot{\beta}'}_{\dot{\beta}}$:

$$\begin{aligned} \Psi'_{\alpha' \dots \dot{\alpha}' \dots \beta' \dots \dot{\beta}' \dots} &= \\ &= A_{\alpha'}^{\alpha} \dots A^{-1\tau\beta'}_{\beta} \dots A_{\dot{\alpha}'}^{\dot{\alpha}} \dots A^{-1+\dot{\beta}'}_{\dot{\beta}} \Psi_{\alpha \dots \dot{\alpha} \dots \beta \dots \dot{\beta} \dots}. \end{aligned} \quad (51)$$

Спинор высшего ранга ψ может быть образован из спиноров низшего ранга φ и χ умножением: $\psi = \varphi\chi$. При этом спинор ψ сохраняет все индексы спиноров φ и χ . Произведение спинора с (n, m) индексами (n непунктирными и m пунктирными) на спинор с (n', m') индексами дает спинор с $(n + n', m + m')$ индексами, или спинор $(n + n' + m + m')$ -го ранга. Например, перемножая два спинора второго ранга

$$\varphi_{\alpha\dot{\beta}} \chi_{\beta\dot{\sigma}} = \psi_{\alpha\dot{\beta}\beta\dot{\sigma}}, \quad (52)$$

мы приходим к спинору четвертого ранга.

Из спиноров высшего ранга можно получить спиноры низшего ранга упрощением (суммированием) по нижним и верхним индексам

одинакового типа. Например, поднимая индекс β в (52) и суммируя, мы образуем пунктирный спинор второго ранга

$$\eta_{\dot{\rho}\dot{\sigma}} = \Phi_{\alpha\dot{\rho}} \chi^{\alpha}_{\dot{\sigma}}.$$

Поднимая один из пунктирных индексов и суммируя, мы приходим к инварианту

$$\eta = \eta^{\dot{\rho}}_{\dot{\rho}} = \Phi_{\alpha\dot{\rho}} \chi^{\alpha\dot{\rho}}.$$

Спиноры высшего ранга, которые нельзя упростить (т. е. которые при упрощении дают нуль), преобразуются по неприводимым представлениям бинарной группы. Так как метрические матрицы C и C^{-1} антисимметричны ($C = -C^T$), то нельзя упростить любой спинор высшего ранга, симметричный в отдельности как по пунктирным, так и по непунктирным индексам одинакового характера (либо все индексы — верхние, либо все индексы — нижние). Действительно, $C^{-1\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} = 0$ и $C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \dots = 0$, если $\psi_{\alpha\beta}$ и $\psi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ симметрично в $\alpha\beta$ и в $\dot{\alpha}\dot{\beta}$. Примером спинора, симметричного в индексах обоого типа, может служить произведение одинаковых спиноров

$$\xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \xi_{\alpha_n} \xi_{\dot{\beta}_1} \xi_{\dot{\beta}_2} \dots \xi_{\dot{\beta}_m}. \quad (53)$$

Произвольный спинор (50) имеет, вообще говоря, 2^{m+n} компонент. Симметричный спинор (53) имеет $(2m+1)(2n+1)$ компонент, ибо каждый индекс принимает только два значения: $\pm 1/2$ для α, β, \dots и $\pm 1/2$ для $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$

§ 3.3. Неприводимые представления и обобщенный спинорный анализ

Симметричные спиноры описывают высшие представления группы $SL(2, c)$. Так как порядок расположения индексов не имеет значения для симметричных спиноров, то определяющим для спинора типа (53) будет лишь число индексов, имеющих значения $\pm 1/2$ или $\pm 1/2$. Поэтому мы запишем (53) в виде

$$\xi_{\frac{1}{2}}^{n-s} \xi_{-\frac{1}{2}}^s \eta_{\frac{1}{2}}^{m-r} \eta_{-\frac{1}{2}}^r,$$

где n и m — числа непунктирных и пунктирных спиноров ξ и η , а s и r — числа компонент этих спиноров с проекцией $1/2\sigma_3 = -1/2$. Очевидно, что $0 \leq r \leq m$, $0 \leq s \leq n$.

Чтобы перейти к обычным обозначениям, положим $n = 2j_1$, $m = 2j_2$, $n - s = j_1 + \sigma$, $s = j_1 - \sigma$, $m - r = j_2 + \rho$, $r = j_2 - \rho$.

Тогда j_1 и j_2 принимают целые и полужелые неотрицательные значения, а σ и ρ пробегает соответственно $2j_1 + 1$ и $2j_2 + 1$ значений $\sigma = j_1, j_1 - 1, \dots, -j_1 + 1, -j_1$ и $\rho = j_2, j_2 - 1, \dots, -j_2 + 1, -j_2$. Иначе говоря, квантовые числа σ и ρ обладают свойствами проекций спина на третью ось, а j_1 и j_2 — собственных значений спина.

Следовательно, мы характеризуем спинор ранга $(2j_1, 2j_2)$ числами j_1 и j_2 , имеющими свойства собственных значений момента количества движения. Компоненты этого спинора отмечаются по проекциям σ, ρ на третью ось. Переходя к новым обозначениям, запишем симметричный спинор $F(j_1, j_2)$ с нижними индексами в виде

$$F_{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) = a(j_1, j_2; \sigma, \dot{\rho}) \xi_{\frac{1}{2}j_1 + \sigma} \xi_{-\frac{1}{2}j_1 - \sigma} \eta_{\frac{1}{2}j_2 + \dot{\rho}} \eta_{-\frac{1}{2}j_2 - \dot{\rho}}, \quad (54)$$

где $a(j_1, j_2; \sigma, \dot{\rho})$ есть число.

Аналогичным образом определим спинор $\Phi(j_1, j_2)$ с верхними индексами:

$$\begin{aligned} \Phi^{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) &= \\ &= a(j_1, j_2; \sigma, \dot{\rho}) \xi'^{\frac{1}{2}j_1 + \sigma} \xi'^{-\frac{1}{2}j_1 - \sigma} \eta'^{\frac{1}{2}j_2 + \dot{\rho}} \eta'^{-\frac{1}{2}j_2 - \dot{\rho}}, \end{aligned} \quad (55)$$

где ξ', η' — спиноры первого ранга, отличные от ξ, η .

Выражения (54) и (55) согласуются друг с другом только при определенном выборе общего для них множителя $a(j_1, j_2; \sigma, \dot{\rho})$. Действительно, записи (54) и (55) с индексами в разном положении предполагают, что величина

$$F_{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) \Phi^{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) = \text{inv} \quad (56)$$

инвариантна относительно преобразований.

Если подставить в (56) выражения (54) и (55), то мы получим некоторый полином степени $(4j_1, 4j_2)$ относительно спиноров ξ, ξ', η, η' . Этот полином может быть инвариантен лишь в том случае, если ξ и ξ' входят в него в инвариантной комбинации $\xi_\alpha \xi'^\alpha$, а η и η' — посредством инварианта $\eta_\alpha \eta'^\alpha$. Следовательно, (56) должно иметь вид

$$(\xi_\alpha \xi'^\alpha)^{2j_1} (\eta_\beta \eta'^\beta)^{2j_2} c(j_1, j_2), \quad (57)$$

где $c(j_1, j_2)$ — инвариантный множитель, зависящий только от j_1 и j_2 , т. е. от числа спиноров разного типа. Сравнивая (57) с результатами подстановки (54) и (55) в (56), мы получаем

$$a^2(j_1, j_2; \sigma, \dot{\rho}) = \frac{(2j_1)! (2j_2)! c(j_1, j_2)}{(j_1 + \sigma)! (j_1 - \sigma)! (j_2 + \dot{\rho})! (j_2 - \dot{\rho})!}. \quad (58)$$

Множители, зависящие лишь от j_1 и j_2 , одинаковы для всех компонент симметричного спинора высшего ранга. Поэтому их можно отбросить.

Таким образом, базисные симметричные спиноры высшего ранга записываются в виде

$$F_{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) = \frac{\xi_{\frac{1}{2}}^{j_1+\sigma} \xi_{-\frac{1}{2}}^{j_1-\sigma} \eta_{\frac{1}{2}}^{j_2+\dot{\rho}} \eta_{-\frac{1}{2}}^{j_2-\dot{\rho}}}{[(j_1+\sigma)! (j_1-\sigma)! (j_2+\dot{\rho})! (j_2-\dot{\rho})!]^{\frac{1}{2}}}, \quad (59)$$

где $-j_1 \leq \sigma \leq j_1$, $-j_2 \leq \dot{\rho} \leq j_2$; квантовые числа j_1, j_2 могут быть неотрицательными целыми и полуцелыми, а соседние значения σ и $\dot{\rho}$ отличаются на единицу. Спиноры ξ и η следовало бы записывать как $F_{\sigma}(1/2, 0)$ и $F_{\dot{\rho}}(0, 1/2)$.

Обратимся к трансформационным свойствам спиноров (59). При преобразовании Лоренца $(2j_1+1)(2j_2+1)$ компонент спинора (59) преобразуются друг через друга; поэтому должно существовать представление группы $SL(2, c)$ посредством квадратных матриц $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$ с $(2j_1+1)(2j_2+1)$ строками, с помощью которых и осуществляется преобразование спинора (59):

$$F'_{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) = \{\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)\}_{\sigma\dot{\rho}}^{\lambda\dot{\tau}} F_{\lambda\dot{\tau}}(j_1, j_2). \quad (60)$$

Матрицы $\mathcal{D}(A)$ должны определяться однозначно заданием матрицы A .

Способ построения матриц $\mathcal{D}(A)$ вытекает из определения базисного спинора (59). Преобразованный спинор $F'(j_1, j_2)$ дается той же формулой (59), но с преобразованными спинорами $\xi' = A\xi$ и $\eta' = A^*\eta$ вместо спиноров ξ и η в исходной системе отсчета:

$$F'_{\sigma\dot{\rho}}(j_1, j_2) = \frac{(A\xi)_{\frac{1}{2}}^{j_1+\sigma} (A\xi)_{-\frac{1}{2}}^{j_1-\sigma} (A^*\eta)_{\frac{1}{2}}^{j_2+\dot{\rho}} (A^*\eta)_{-\frac{1}{2}}^{j_2-\dot{\rho}}}{[(j_1+\sigma)! (j_1-\sigma)! (j_2+\dot{\rho})! (j_2-\dot{\rho})!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (61)$$

Сравнение (60) и (61) позволяет найти матрицы $\mathcal{D}(A)$. Для этого в (61) необходимо разложить каждый множитель типа

$$(A\xi)_{\alpha}^{j+\sigma} = (A_{\alpha}^1 \xi_{\frac{1}{2}} + A_{\alpha}^2 \xi_{-\frac{1}{2}})^{j+\sigma}$$

по биномиальной формуле, затем перестроить полином по $\xi_{\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}$, собрав члены с $F_{\lambda\dot{\tau}}(j_1, j_2)$, после чего, сравнивая с (61), можно выписать матричные элементы $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$. Так как полиномы с ξ и η независимы, то мы можем найти отдельно матрицы с пунктирными и непунктирными индексами.

Спиноры (59) и (61) можно представить в виде произведения спиноров $f_\rho(j_1)$ и $\tilde{f}_\sigma(j_2)$, каждый из которых связан только с пунктирными или непунктирными индексами:

$$F_{\rho\dot{\sigma}}(j_1, j_2) = f_\rho(j_1) \tilde{f}_\sigma(j_2).$$

Очевидно, что

$$f_\rho(j_1) = F_{\rho\dot{0}}(j_1, 0), \quad \tilde{f}_\sigma(j_2) = F_{0\dot{\sigma}}(0, j_2).$$

Полагая $j_2 = 0$, мы получаем матрицу $\mathcal{D}^{(j_1, 0)}(A)$, преобразующую только спинорные компоненты с непунктирными нижними индексами:

$$f_\rho(j_1) = [(j_1 + \rho)! (j_1 - \rho)!]^{-1/2} \xi_{1/2}^{j_1 + \rho} \xi_{-1/2}^{j_1 - \rho}. \quad (62)$$

Полагая $j_1 = 0$, мы находим матрицу $\mathcal{D}^{(0, j_2)}(A^*)$, преобразующую только компоненты с пунктирными индексами:

$$\tilde{f}_\sigma(j_2) = [(j_2 + \dot{\sigma})! (j_2 - \dot{\sigma})!]^{-1/2} \eta_{1/2}^{j_2 + \dot{\sigma}} \eta_{-1/2}^{j_2 - \dot{\sigma}}.$$

В общем случае матрица $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$ есть прямое произведение матриц $\mathcal{D}^{(j_1, 0)}(A)$ и $\mathcal{D}^{(0, j_2)}(A)$:

$$\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A) = \mathcal{D}^{(j_1, 0)}(A) \times \mathcal{D}^{(0, j_2)}(A). \quad (63)$$

Сравним теперь матрицы $\mathcal{D}^{(0, l)}(A)$ и $\mathcal{D}^{(l, 0)}(A)$. Спинорные компоненты $f_\rho(j)$ и $\tilde{f}_\rho(j)$ составлены по одинаковому правилу соответственно из спиноров ξ_α и η_α . Различие в матрицах $\mathcal{D}^{(l, 0)}(A)$ и $\mathcal{D}^{(0, l)}(A)$, следовательно, возникает вследствие того, что ξ преобразуется матрицей A , а η — комплексно сопряженной матрицей A^* . Иначе говоря, если мы произведем замену $A \rightarrow A^*$, то из $\mathcal{D}^{(l, 0)}(A)$ получим $\mathcal{D}^{(0, l)}(A)$:

$$\mathcal{D}^{(0, l)}(A) = \mathcal{D}^{(l, 0)}(A^*).$$

Но $f_\rho(j)$ содержит вещественные коэффициенты $[(j + \rho)! (j - \rho)!]^{-1/2}$ при степенях комплексных чисел $\xi_{1/2}$ и $\xi_{-1/2}$. Поэтому (как легко убедиться и непосредственно из (61)) будет

$$\mathcal{D}^{(l, 0)}(A^*) = [\mathcal{D}^{(l, 0)}(A)]^* = \mathcal{D}^{(0, l)}(A). \quad (64)$$

Отсюда вытекает, что матрицы $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$ и $\mathcal{D}^{(j_2, j_1)}(A)$ комплексно сопряжены:

$$\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A) = [\mathcal{D}^{(j_2, j_1)}(A)]^*. \quad (65)$$

Это значит, что преобразование вещественно, если $j_1 = j_2$.

Основываясь на соотношениях (62)—(64), мы можем выяснить свойства $\mathcal{D}^{(i_1, i_2)}(A)$, изучая только

$$\mathcal{D}^{(i, 0)}(A) \equiv D^i(A) \quad (66)$$

или же матрицы $\mathcal{D}^{(0, i)}(A)$.

Рассмотрим матрицы $D^j(A)$. Они образуют представления бинарной группы. Тожественное преобразование при $A = E$ есть

$$D^j_{\alpha^\beta}(E) = \delta_{\alpha^\beta}. \quad (67)$$

Производя два последовательных преобразования A_1 и A_2 , мы получаем из (60) и (61)

$$\begin{aligned} (A_2 A_1 \xi)_{1/2}^{j+\alpha} (A_2 A_1 \xi)_{-1/2}^{j-\alpha} &= [(j+\alpha)! (j-\alpha)!]^{1/2} D^j(A_2 A_1)_{\alpha^\beta} f_\beta(j) = \\ &= [(j+\alpha)! (j-\alpha)!]^{1/2} D^j(A_2)_{\alpha^\rho} (A_1 \xi)_{1/2}^{j+\rho} (A_1 \xi)_{-1/2}^{j-\rho} [(j+\rho)! (j-\rho)!]^{-1/2}, \end{aligned}$$

или

$$D^j(A_2) D^j(A_1) = D^j(A_2 A_1). \quad (68)$$

Следствием (68) будет

$$D^j(A^{-1}) = [D^j(A)]^{-1} \equiv D^{j-1}(A). \quad (69)$$

Аналогичным образом показывается, что

$$D^j(A^\tau) = [D^j(A)]^\tau \equiv D^{j\tau}(A). \quad (70)$$

Соотношение между обратной A^{-1} и транспонированной A^τ 2×2 -матрицами записывалось ранее в виде (6), или $A^{-1} = C^{-1} A^\tau C$. Соответствующая связь между $(2j+1) \times (2j+1)$ -матрицами $D^{j-1}(A)$ и $D^{j\tau}(A)$ может быть установлена, если воспользоваться правилом умножения (68) и формулами (69), (70):

$$D^{j-1}(A) = D^j(C^{-1}) D^{j\tau}(A) D^j(C). \quad (71)$$

Таким образом, эта связь совершенно аналогична связи между 2×2 -матрицами.

Если мы ограничимся унитарными матрицами $A^+ = A^{-1}$, то представление $D^j(A)$ совпадет с представлениями $\mathcal{D}^j(A)$ группы пространственных вращений R_3 , или унитарной группы SU_2 , которые, как известно, неприводимы. Группа SU_2 является подгруппой бинарной группы, и, следовательно, представления $D^j(A)$ также неприводимы. Отсюда следует сразу же и неприводимость представлений $\mathcal{D}^{(i_1, i_2)}(A)$.

Матрицы $D^i(A)$, в отличие от $\mathcal{F}^i(A)$, определены и для неунитарных преобразований A . Общим для матриц D^i и \mathcal{D}^i является правило построения представления в пространстве базисных спиноров $f_\sigma(j)$. Поэтому в случае матриц D^i можно воспользоваться теми результатами, полученными для \mathcal{D}^i , которые основаны только на виде $f_\sigma(j)$ и преобразованного спинора $f'_\sigma(j)$.

Умножим теперь каждый спинор в формуле (62) для $f_\sigma(j)$ на постоянное (комплексное) число a , тогда мы получим

$$f'_{\sigma'}(j; \xi) \equiv f_\sigma(j; a\xi) = a^{2j} f_\sigma(j, \xi).$$

Переход $\xi \rightarrow a\xi$ можно трактовать как преобразование, вызываемое неунимодулярной 2×2 -матрицей $a \cdot E$ ($\det(aE) = a^2$). Если сохранить прежнее определение $D^i(A)$ (формулы (61) и (62)), данное тогда для унимодулярных матриц A , то можно написать, что

$$D^i(aE) = a^{2j} D^i(E) = a^{2j} E^{(j)},$$

где $E^{(j)}$ обозначает единичную матрицу в пространстве $2j + 1$ функций $f_\sigma(j)$.

Рассуждая аналогичным образом, можно вывести, что

$$D^i(aB) = a^{2j} D^i(B), \quad (72)$$

где B — произвольная 2×2 -матрица, не ограниченная условием унимодулярности. Из (72) нетрудно заключить также, что D^i образуют представление группы 2×2 -матриц (все комплексные 2×2 -матрицы B). Для этого заметим, что если $\det B = b^2 \neq 0$, то можно положить $B = bA$, где $\det A = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} D^i(B_1) D^i(B_2) &= D^i(b_1 A_1) D^i(b_2 A_2) = (b_1 b_2)^{2j} D^i(A_1 A_2) = \\ &= D^i(b_1 b_2 A_1 A_2) = D^i(B_1 B_2), \end{aligned} \quad (73)$$

или $D^i(B)$ есть представление группы матриц B с отличным от нуля определителем (несингулярные матрицы). Но представления $D^i(B)$ являются непрерывными функциями матричных элементов $B_{\alpha\beta}$ (см., например, (61)). Поэтому (73) остается в силе и для сингулярных матриц B , когда $\det B = 0$.

До сих пор мы изучали спиноры с нижними индексами. По аналогии с (55) и (62) мы можем определить спинор с верхним индексом:

$$f^\sigma(j) = [(j + \sigma)! (j - \sigma)!]^{-1/2} \xi^{1/2 j + \sigma} \xi^{-1/2 j - \sigma}. \quad (74)$$

Переход от спиноров f_σ к спинору f^σ (поднимание индекса) осуществляется согласно определению (74) с помощью операции, когда у каждого спинора ξ_α в (62) поднимается индекс метрической

матрицей C^{-1} . Иначе говоря, поднимание индекса у спинора f_σ производится с помощью матрицы $D^j(C^{-1})$:

$$f^\rho(j) = D^{j\rho\sigma}(C^{-1})f_\sigma(j). \quad (75)$$

Так как $(C^{-1}\xi)^{-1/2} = -\xi_{1/2}$, $(C^{-1}\xi)^{1/2} = \xi_{-1/2}$, то по определению $D^j(A)$ мы можем найти матричные элементы

$$D^{j\rho\sigma}(C^{-1}) = (-1)^{j-\rho} \delta_\rho^{-\sigma}. \quad (76)$$

Опускание индекса осуществляется с помощью матрицы $D^j(C)$. Из (76) находим

$$D^{j\rho\sigma}(C) = (-1)^{j+\rho} \delta_\rho^{-\sigma}. \quad (77)$$

Матрицы $D^j(C)$ и $D^j(C^{-1})$ симметричны для целых значений j и антисимметричны для полуцелых j :

$$D^{j\rho\sigma}(C) = (-1)^{2j} D^{j\rho\sigma}(C^{-1}), \quad D^{j\rho\sigma}(C) = (-1)^{2j} D^{j\sigma\rho}(C). \quad (78)$$

Отсюда, в частности, следует обобщение (40) для свертки двух спиноров:

$$f^\beta \varphi_\beta = (-1)^{2j} f_\beta \varphi^\beta. \quad (79)$$

Для спиноров с пунктирными индексами $\psi^{\dot{\rho}}(j)$ и $\chi_{\dot{\sigma}}(j)$ и представлений $D^j(A^*) = \mathcal{D}^{(0, 1)}(A)$ мы могли бы повторить все выкладки, начиная с (64), и получить в итоге все вышеприведенные формулы, но с пунктирными индексами, в том числе и формулу

$$D^j_{\dot{\rho}\dot{\sigma}}(C) = (-1)^{2j} D^{j\dot{\rho}\dot{\sigma}}(C^{-1}) = (-1)^{j+\dot{\rho}} \delta_{\dot{\rho}}^{-\dot{\sigma}}. \quad (80)$$

Таким образом, спинорная алгебра в случае спиноров типа $f_\sigma(j)$ представляет собой непосредственное обобщение алгебры для простейших спиноров ξ, η . Вместо двух значений $\rho, \dot{\sigma} = \pm 1/2$ индексы теперь пробегают $2j + 1$ значений $\rho, \dot{\sigma} = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$. Эти спиноры преобразуются с помощью матриц $D^j(A)$ с $(2j + 1)^2$ матричными элементами; при этом тип индексов у D^j в точности соответствует типу индексов у аргумента A . Мы пишем $D^j_{\alpha\beta}(A)$, $D^{j\beta}_\alpha(A^{-1*})$, $D^j_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(A^*)$, $D^{j\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}(A^{-1*})$ и вместо метрических тензоров $C_{\alpha\beta}$, $C_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ и $C^{-1\alpha\beta}$, $C^{-1\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ пользуемся матрицами $D^j_{\alpha\beta}(C)$, $D^j_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(C)$, $D^{j\alpha\beta}(C^{-1})$ и $D^{j\dot{\alpha}\dot{\beta}}(C^{-1})$. Разумеется, численно все четыре матрицы $D^j_{\alpha\beta}(B)$, $D^{j\alpha\beta}(B)$, $D^j_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(B)$, $D^{j\dot{\alpha}\dot{\beta}}(B)$ будут одинаковы для одной и той же численной матрицы B . Согласно (64), (69)

и (70) матрицы $D^l(A)$ унитарны, если унитарна матрица A . Матрицы $D^l(A)$ эрмитовы, если эрмитова матрица A .

Однозначная связь между свойствами матриц $D^l(B)$ и B позволяет упростить написание индексов; мы можем, например, писать только нижние индексы, восстанавливая легко их истинный смысл по свойствам B . Например, $D^l_{\sigma\sigma'}(A) \equiv D^l_{\sigma'\sigma}(A)$, $D^l_{\sigma\sigma'}(A^*) \equiv D^l_{\sigma'\sigma}(A^*)$, $D^l_{\sigma\sigma'}(C^{-1}) \equiv D^l_{\sigma'\sigma}(C^{-1})$, $D^l_{j\sigma\sigma'}(X) \equiv D^l_{\sigma'\sigma j}(X)$, $D^l_{\sigma\sigma'}(\tilde{X}) = D^l_{\sigma'\sigma}(\tilde{X})$. Такая запись индексов будет использоваться в дальнейшем в гл. 4.

Подведем итоги. Неприводимое конечномерное представление $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$ унимодулярной группы $SL(2, c)$ характеризуется двумя числами (j_1, j_2) , каждое из которых может принимать целые или полуцелые неотрицательные значения. Размерность представления (j_1, j_2) равна $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Матрицы $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}(A)$ записываются в виде прямого произведения матриц $D^{j_1}(A)$ и $D^{j_2}(A)$: $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)} = D^{j_1} \times D^{j_2}$. Представление $\mathcal{D}^{(j_1, j_2)}$ неунитарно.

Представление (j_1, j_2) группы $SL(2, c)$ при целочисленной сумме $j_1 + j_2$ не зависит от перехода $A \rightarrow -A$ (см. (62) и (72)) и соответствует (однозначным) представлениям группы Лоренца. Если $j_1 + j_2$ — полуцелое число, то представление (j_1, j_2) можно назвать двухзначным представлением группы Лоренца.

§ 3.4. Приведение прямого произведения представлений и ковариантные коэффициенты Клебша — Гордана

Произведение двух спиноров $f_\sigma(j_1)$ и $f_\rho(j_2)$ преобразуется по приводимому представлению $D^{j_1} D^{j_2}$. С помощью (62) легко устанавливается, что $D^{j_1} D^{j_2}$ распадается на сумму представлений D^j с

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, |j_1 + j_2| \quad (81)$$

или

$$f_{\sigma_1}(j_1) f_{\sigma_2}(j_2) = \sum_j \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle f_\sigma(j), \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (82)$$

Коэффициенты разложения $\langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle$ определены для $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ и $2j + 1$ значений j , перечисленных в (81). При фиксированных j_1, j_2, j эти коэффициенты представляют собой прямоугольные матрицы, где σ_1 изменяется от $-j_1$ до $+j_1$, а σ_2 пробегает значения от $-j_2$ до $+j_2$. Коэффициенты не зависят от вида матрицы A и поэтому могут быть найдены для унитарных A , когда представления D^l совпадают с представлениями \mathcal{D}^l группы вращений SU_2 . Следовательно, коэффициенты в (82) совпадают с обычными коэффициентами Клебша—Гордана:

$$\langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle = C(j_1 j_2 j; \sigma_1 \sigma_2 \sigma), \quad (83)$$

и представляют собой матричные элементы унитарного преобразования от базиса $f(j_1)f(j_2)$ к базису $f(j)$ со значениями j по (81).

Из унитарности преобразования следует ортогональность коэффициентов (83):

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle \langle j_1 j_2 \sigma'_1 \sigma'_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle = \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2}, \quad (84)$$

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j' \sigma' \rangle \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle = \delta_{j j'}, \delta_{\sigma \sigma'}.$$

Произведем преобразование Лоренца A в обеих частях формулы (82). Независимость коэффициентов Клебша—Гордана от вида матриц A означает, что должно выполняться равенство

$$\langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle =$$

$$= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} D^{j_1 \sigma_1}_{\sigma_1} (A^{-1}) D^{j_2 \sigma_2}_{\sigma_2} (A^{-1}) D^{j \sigma}_{\sigma} (A) \langle j_1 j_2 \sigma_1' \sigma_2' | j_1 j_2 j \sigma' \rangle. \quad (85)$$

Формула (85) определяет трансформационные свойства коэффициентов $\langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle$ при преобразованиях Лоренца: они преобразуются как $f^{\sigma_1}(j_1) f^{\sigma_2}(j_2) f_{\sigma}(j)$. В итоге коэффициенты Клебша—Гордана имеют одно и то же численное значение во всех инерциальных системах отсчета.

Переходя от матриц A к матрицам A^* , мы получаем из представления $\mathcal{D}^{(j, 0)}$ представление $\mathcal{D}^{(0, j)} = D^{j*}$ с пунктирными индексами. В силу независимости от матриц A коэффициенты Клебша—Гордана одинаковы как для D^j , так и для D^{j*} . Отсюда следует также, что они вещественны.

Чтобы подчеркнуть спинорные свойства коэффициентов (82), иногда вводятся обозначения

$$\langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle = [j j_1 j_2]_{\sigma}^{\sigma_1 \sigma_2} = [j j_1 j_2]_{\sigma}^{\dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_2}. \quad (86)$$

Ковариантный коэффициент Клебша—Гордана имеет только верхние спинорные индексы [18, 42]:

$$\left(\begin{array}{c} j_1 \ j_2 \ | \ j \\ \sigma_1 \ \sigma_2 \ | \ \sigma \end{array} \right) \equiv [j j_1 j_2]^{\sigma \sigma_1 \sigma_2} = D^{j \sigma \sigma'} (C^{-1}) [j j_1 j_2]_{\sigma'}^{\sigma_1 \sigma_2} =$$

$$= (-1)^{j-\sigma} \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j -\sigma \rangle =$$

$$= (-1)^{j-j_1-j_2} \sqrt{2j+1} \left(\begin{array}{c} j_1 \ j_2 \ j \\ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma \end{array} \right), \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (87)$$

где $\left(\begin{array}{c} j_1 \ j_2 \ j \\ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma \end{array} \right)$ — обычный $3j$ -символ Вигнера.

Коэффициенты Клебша—Гордана обладают следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1 j_2 -\sigma_1 -\sigma_2 | j_1 j_2 j -\sigma \rangle, \\ \langle j_1 j_2 \sigma_1 \sigma_2 | j_1 j_2 j \sigma \rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 j_1 \sigma_2 \sigma_1 | j_2 j_1 j \sigma \rangle. \end{aligned} \quad (88)$$

Отметим также следующие равенства:

$$\begin{aligned} [j j_1 j_2]_{\sigma_1 \sigma_2} &= (-1)^{2j} [j j_1 j_2]_{\sigma_1 \sigma_2} \equiv (-1)^{2j} [j_1 j_2 j]_{\sigma_1 \sigma_2}, \\ [0 j j]_{\sigma_1 \sigma_2} &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} D^{j \sigma_1 \sigma_2} (C^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (-1)^{j-\sigma_1} \delta_{\sigma_1 -\sigma_2}, \\ [j j 0]_{\sigma_1 \sigma_2} &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} D^{j \sigma_1 \sigma_2} (C) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (-1)^{j+\sigma_1} \delta_{\sigma_1 -\sigma_2}. \end{aligned} \quad (89)$$

§ 3.5. Представления унитарной группы SU_2

Представления унитарной группы SU_2 могут быть получены из представлений $(J, 0)$ группы $SL(2, c)$, если мы ограничимся унитарными 2×2 -матрицами R . Обозначив посредством \mathcal{D}^J матрицу представления группы SU_2 , мы имеем

$$D^J(R) = \mathcal{D}^J(R).$$

Матрицы \mathcal{D}^J обычно изучаются в курсе нерелятивистской квантовой механики. В релятивистской квантовой теории они также важны, ибо, как мы увидим ниже в гл. 4, именно матрицы \mathcal{D}^J входят в закон преобразования вектора состояния массивных частиц. Поэтому мы остановимся на свойствах этих матриц.

Инфинитезимальная форма унитарной 2×2 -матрицы R , описывающей вращение, записывается в виде

$$R = 1 - i \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega}),$$

где параметры поворота ω_k вещественны. В J -м представлении группы SU_2 этой форме соответствует инфинитезимальная форма матрицы $\mathcal{D}^J(R)$:

$$\mathcal{D}^J(R) = 1 - i (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}). \quad (90)$$

Введенные формулой (90) генераторы J_k являются самосопряженными операторами и удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k,$$

что и в частном случае представления $J = 1/2$, когда $J_k = 1/2 \sigma_k$. Для конечных преобразований $R = \exp \{ -i^{1/2}(\sigma \omega) \}$ мы должны вместо (90) писать

$$\mathcal{D}^J(R) = \exp \{ -i(\mathbf{J}\omega) \}.$$

Очевидно, что если R параметризовано с помощью эйлеровых углов (выражение (34)), то

$$\mathcal{D}^J(R) \equiv \mathcal{D}^J(\varphi, \vartheta, \psi) = e^{-iJ_3 \varphi} e^{-iJ_2 \vartheta} e^{-iJ_3 \psi}. \quad (91)$$

Базисом представления \mathcal{D}^J служит набор $2J + 1$ функций Φ_σ^J , отмечаемый по рангу $2n = 2J$ неприводимого мультиспинора или же по собственному значению инварианта J^2 :

$$(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) \Phi_\sigma^J = J(J+1) \Phi_\sigma^J.$$

Функции базиса Φ_σ^J отличаются друг от друга по собственному значению σ оператора J_3 :

$$J_3 \Phi_\sigma^J = \sigma \Phi_\sigma^J;$$

величина σ может принимать следующие значения: $-J, -J+1, \dots, J-1, J$. При преобразовании, задаваемом 2×2 -матрицей R , базисные функции Φ_σ^J преобразуются по правилу

$$\Phi_\sigma^J \xrightarrow{R} \Phi_{\sigma'}^J = \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(R) \Phi_{\sigma'}^J. \quad (92)$$

Так как преобразования группы SU_2 унитарны, то мы можем ввести квантовомеханические обозначения для базисных функций:

$$\Phi_\sigma^J \equiv |\sigma, J\rangle,$$

и записывать (92) в виде

$$|\sigma, J\rangle' = \mathcal{D}^J(R) |\sigma, J\rangle = \sum_{\sigma'} |\sigma', J\rangle \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(R).$$

Матрица $\mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J$ образована, таким образом, из матричных элементов унитарного оператора \mathcal{D}^J :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(R) &= \langle \sigma', J | U(R) | \sigma, J \rangle = \\ &= \langle \sigma', J | e^{-iJ_3 \varphi} e^{-iJ_2 \vartheta} e^{-iJ_3 \psi} | \sigma, J \rangle \equiv \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi). \end{aligned} \quad (93)$$

Второе равенство (93) выполняется, если для R выбрана параметризация (34) или же выбрано выражение (91) для оператора $U(R)$. Такая параметризация удобна, так как оператор J_3 обычно предполагается диагональным.

Введенные в (93) функции $\mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi)$ представляют собой матричные элементы произвольного поворота $U(R)$ в неприводимом представлении J . Они являются теми фундаментальными функциями, которые связаны с группой SU_2 и полностью ее характеризуют. Функции \mathcal{D}^J удовлетворяют уравнению

$$\left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2 \cos \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi} \right) \right\} \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi) = -J(J+1) \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi), \quad (94)$$

причем

$$\begin{aligned} \sigma' \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi) &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi), \\ \sigma \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi) &= -i \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi). \end{aligned}$$

Условие ортогональности для $\mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{D}_{\sigma'\gamma}^{J*}(\varphi, \vartheta, \psi) \mathcal{D}_{\sigma'\gamma'}^J(\varphi, \vartheta, \psi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\psi = \\ = \frac{1}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (95) \end{aligned}$$

Если углы φ и ψ связаны так, что $\varphi + \psi = 0$, то имеет место равенство

$$\int \mathcal{D}_{\sigma'\gamma}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \mathcal{D}_{\sigma'\gamma'}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (96)$$

$\mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\varphi, \vartheta, \psi)$ как функции углов Эйлера при различных значениях J , σ и σ' составляют полный набор, или же

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \sum_{J\sigma\sigma'} (2J+1) \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^{J*}(\varphi, \vartheta, \psi) \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi', \vartheta', \psi') = \\ = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\psi - \psi'). \quad (97) \end{aligned}$$

Соотношение (97) удовлетворяется отдельно для целых и для полужелых значений J .

Так как σ есть собственное значение J_z , то согласно (93) из функции $\mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J$ можно выделить зависимость от углов φ и ψ :

$$\mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\varphi, \vartheta, \psi) = e^{-i\sigma'\varphi - i\sigma\psi} d_{\sigma'\sigma}^J(\vartheta), \quad (98)$$

где

$$d_{\sigma'\sigma}^J(\vartheta) = \langle \sigma', J | e^{-iJ_z \vartheta} | \sigma, J \rangle.$$

Функции $d^J(\vartheta)$ были вычислены Вигнером [18]. Они обладают следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} d_{\sigma'\sigma}^J(\vartheta) &= (-1)^{\sigma'-\sigma} d_{\sigma\sigma'}^J(\vartheta) = (-1)^{\sigma'-\sigma} d_{-\sigma'-\sigma}^J(\vartheta), \\ d_{\sigma'-\sigma}^J(\vartheta) &= (-1)^{J+\sigma'} d_{\sigma'\sigma}^J(\pi-\vartheta). \end{aligned} \quad (99)$$

Формулы (95) и (97) эквивалентны следующим соотношениям для $d^J(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d_{\sigma'\sigma}^J(\vartheta) d_{\sigma\sigma'}^J(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta &= \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'}, \\ \sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) d_{\sigma\sigma'}^J(\vartheta') d_{\sigma\sigma'}^J(\vartheta) &= \delta(\cos \vartheta' - \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (100)$$

Явное выражение для $d^J(\vartheta)$ довольно громоздко:

$$\begin{aligned} d_{\sigma'\sigma}^J(\vartheta) &= \sum_l (-1)^{l+\sigma'-\sigma} \frac{V(J+\sigma)!(J-\sigma)!(J+\sigma')!(J-\sigma')!}{(J-\sigma'-l)!(J+\sigma-l)!l!(l+\sigma'-\sigma)!} \times \\ &\times \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right)^{2J+\sigma-\sigma'-2l} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{2l+\sigma'-\sigma}. \end{aligned} \quad (101)$$

Глава 4

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ ГРУППА ПУАНКАРЕ

Релятивистская динамика свободной частицы определяется полностью поведением ее вектора состояния при преобразованиях \bar{g} квантовомеханической группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$. Знание явного вида оператора $U(\bar{g})$, действующего на вектор состояния частицы, равносильно решению уравнения движения для свободной частицы. В частности, после построения $U(\bar{g})$ переход к локальным полям становится очевидным.

При изучении процесса рассеяния эффекты, связанные с движением свободных частиц, составляют кинематику процесса. Поэтому для взаимодействующих частиц знание $U(\bar{g})$ позволяет отделить кинематику от динамики.

В случае элементарных частиц операторы $U(\bar{g})$ осуществляют неприводимое унитарное представление квантовомеханической группы Пуанкаре (см. § 1.2). Нам необходимо, следовательно, построить явное выражение $U(\bar{g})$ для масс $m > 0$ и $m = 0$.

§ 4.1. Вводные замечания

Как было показано в §§ 1.3 и 1.4, в рамках группы Пуанкаре элементарные частицы должны классифицироваться по двум инвариантам — массе m и спину J ($m^2 = P_\mu P^\mu$ и $J(J + 1) = -\omega^2/m^2$). Мы рассматриваем только случай $m^2 \geq 0$. Вектор поляризации w_μ (или вектор Паули—Любанского) при этом определяется формулой

$$w_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma.$$

Третий инвариант — знак собственного значения оператора P^0 — всегда положителен для физических состояний.

В каноническом базисе, введенном в § 1.3, в качестве величин, образующих полный набор взаимно коммутирующих операторов,

выбираются (помимо массы и спина) импульс p и одна из составляющих вектора спина

$$J^k = -\frac{1}{m} \omega^\lambda n_\lambda^{(k)},$$

где $n_\lambda^{(k)}$ — единичный 4-вектор, ортогональный 4-импульсу p_μ . Поэтому полное обозначение вектора состояния частицы есть

$$|p, \sigma; m, J; \zeta\rangle, \quad (1)$$

где σ — собственное значение оператора J^3 , а ζ относится ко всем остальным переменным. Мы будем иногда опускать для краткости буквы m, J, ζ из (1) (если это не вызывает недоразумений) и писать вместо (1) просто

$$|p, \sigma\rangle.$$

Наша задача заключается в отыскании явного вида унитарного преобразования вектора состояния (1):

$$|p, \sigma\rangle \rightarrow U(\bar{g}) |p, \sigma\rangle, \quad (2)$$

вызываемого элементом квантовомеханической группы Пуанкаре \bar{g} .

Преобразование классической группы Пуанкаре $g = (a, \Lambda)$ задается 4-вектором смещения a^μ и вещественной 4×4 -матрицей преобразования Лоренца Λ . В квантовомеханической группе однородное преобразование описывается унимодулярной комплексной 2×2 -матрицей A , а 4-вектору a^μ сопоставляется эрмитова матрица $a = \sigma_\mu a^\mu$, так что элемент этой группы \bar{g} есть $\bar{g} = (a, A)$. Лоренцева матрица Λ определяется по матрице A , а именно, преобразованию матрицы $b = \sigma_\mu b^\mu$

$$b' = AbA^+$$

соответствует преобразование Лоренца

$$b'^\mu = \Lambda^\mu_\nu b^\nu, \quad (3)$$

причем $\Lambda(\pm A) = \Lambda(A)$ (см. гл. 3). Вместо закона умножения классической группы Пуанкаре

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

в квантовомеханической группе выполняется закон умножения

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + A_1 a_2 A_1^+, A_1 A_2). \quad (4)$$

Единичный элемент есть $(0, 1)$; обратный элемент равен

$$(a, A)^{-1} = (-A^{-1}aA^{-1+}, A^{-1}). \quad (5)$$

Неоднородное преобразование (a, A) было определено как однородное преобразование $(0, A)$ с последующей трансляцией $(a, 1)$; действительно, в этом частном случае (4) выглядит так:

$$(a, A) = (a, 1)(0, A) = (0, A)(A^{-1}aA^{-1+}, 1). \quad (6)$$

Поэтому для отыскания унитарных представлений $U(a, A)$ достаточно найти отдельно унитарные представления подгруппы трансляций $U(a, 1)$ и однородной подгруппы $U(0, A)$.

Унитарные представления $U(a, A)$ квантовомеханической группы Пуанкаре были найдены Вигнером [23]. Используемый для построения $U(a, A)$ метод индуцированных представлений опирается на понятие малой, или стационарной, группы. Мы не будем касаться математических вопросов, связанных с этим методом и его применением к группе Пуанкаре, отсылая читателя к специальной литературе [43].

§ 4.2. Трансляции и импульсы. Малая группа и оператор Вигнера

Рассмотрим подгруппу трансляций. Ее представления удовлетворяют коммутативному закону умножения:

$$U(a_1, 1)U(a_2, 1) = U(a_1 + a_2, 1), \quad U(0, 1) = 1, \quad (7)$$

отражающему то обстоятельство, что трансляции в различных направлениях не влияют друг на друга. Так как соответствие между матрицей a и 4-вектором a^μ взаимно однозначно, то представления (7) совпадают с представлениями подгруппы трансляций классической группы Пуанкаре. Трансляции образуют абелеву подгруппу с четырьмя непрерывными параметрами a^μ . Оператор бесконечно малого преобразования $(\delta a, 1)$, согласно (1.34), равен $U(\delta a, 1) = 1 + iP_\mu \delta a^\mu$, так что конечное преобразование $U(a, 1)$ есть

$$U(a, 1) = e^{iP_\mu a^\mu}. \quad (8)$$

В применении к состояниям (1), когда импульс диагонален, мы получаем

$$U(a, 1)|p, \sigma\rangle = e^{i p a} |p, \sigma\rangle.$$

Если отвлечься от переменных, не связанных с пространственно-временной симметрией, то состояниями (1) исчерпываются возможные состояния свободной элементарной частицы массы m и

спина J . Условие полноты системы состояний (1) при заданных m и J мы запишем в виде

$$\sum_{\sigma} \int d\mu(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \sigma\rangle \langle \mathbf{p}, \sigma| = 1, \quad (9)$$

где $d\mu(\mathbf{p})$ — инвариантный элемент объема в импульсном пространстве. Любое состояние в (9) мы можем получить из некоторого выбранного состояния с помощью преобразования Лоренца, ибо по определению состояния элементарной частицы преобразуются по неприводимым представлениям. Учитывая, что значение массы $m^2 = p^2$ задано, мы находим

$$d\mu(\mathbf{p}) = \mu_0 \delta(p^2 - m^2) d^4 p = \mu_0 \frac{d^3 p}{2p_0} \quad (p_0 > 0), \quad (10)$$

где μ_0 — инвариантный множитель, который мы положим равным 1. При таком выборе $d\mu(\mathbf{p})$ условие ортогональности состояний (1) следует записать в виде

$$\langle \mathbf{p}', \sigma' | \mathbf{p}, \sigma \rangle = 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'} \quad (p_0 > 0). \quad (11)$$

Произвольное состояние элементарной частицы $|\Psi\rangle$ может быть представлено в виде разложения по базисным состояниям $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{2p_0} |\mathbf{p}, \sigma\rangle \psi(\mathbf{p}, \sigma), \quad (12)$$

где функцию $\psi(\mathbf{p}, \sigma)$ можно назвать вигнеровской волновой функцией частицы. Скалярное произведение двух состояний $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ выражается через их вигнеровские волновые функции:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \varphi^*(\mathbf{p}, \sigma) \psi(\mathbf{p}, \sigma). \quad (13)$$

Как и обычно в квантовой механике, для существования скалярного произведения (13) необходимо, чтобы волновые функции φ и ψ были квадратично интегрируемыми. Матрица 4-импульсов $p = \sigma_{\mu} p^{\mu}$ преобразуется по формуле (см. (3.17))

$$p' = A p A^{\dagger}, \quad p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(A) p^{\nu}. \quad (14)$$

Выделим среди преобразований A такие $\tilde{A}(p)$, которые оставляют матрицу импульсов неизменной:

$$\tilde{A}(p) p \tilde{A}^{\dagger}(p) = p. \quad (15)$$

Вид матрицы $\tilde{A}(p)$ будет, разумеется, зависеть от выбранного импульса p . Произведение $\tilde{A}_1(p)\tilde{A}_2(p)$ двух матриц $\tilde{A}_1(p)$ и $\tilde{A}_2(p)$ со свойством (15) также не изменяет p , т. е. совокупность матриц $\tilde{A}(p)$ образует подгруппу унимодулярной группы. Эта подгруппа называется стационарной подгруппой $L(p)$ импульса p или малой группой, принадлежащей импульсу p .

Итак, для каждого значения импульса p можно определить малую группу $L(p)$, и, следовательно, рассматривая разные импульсы, мы должны ввести совокупность малых групп $L(p_1)$, $L(p_2)$, ...

Естественно ожидать, что малые группы $L(p)$ и $L(\dot{p})$, принадлежащие импульсам p и \dot{p} , имеют одинаковый тип (т. е. изоморфны), если импульсы p и \dot{p} могут быть связаны преобразованием Лоренца. Действительно, положим

$$p = \alpha(p, \dot{p}) \dot{p} \alpha^+(p, \dot{p}). \quad (16)$$

Легко проверить, что если $\tilde{A}(p)$ относится к малой группе $L(p)$, т. е. $\tilde{A}(p)p\tilde{A}^+(p) = p$, то матрица

$$\tilde{A}(\dot{p}) = \alpha^{-1}(p, \dot{p}) \tilde{A}(p) \alpha(p, \dot{p})$$

принадлежит к малой группе $L(\dot{p})$ импульса \dot{p} , т. е. выполняется соотношение $\tilde{A}(\dot{p})\dot{p}\tilde{A}^+(\dot{p}) = \dot{p}$. Фиксировав $\alpha(p, \dot{p})$, мы можем каждой матрице $\tilde{A}(p)$ сопоставить матрицу $\tilde{A}(\dot{p})$, и наоборот. Иначе говоря, между совокупностями матриц $\tilde{A}(p)$ и $\tilde{A}(\dot{p})$ существует взаимно однозначное соответствие, а группы $L(p)$ и $L(\dot{p})$ имеют тождественную структуру. Вследствие этого для импульсов p с одним и тем же значением инварианта p^2 достаточно рассматривать малую группу, принадлежащую какому-то избранному импульсу \dot{p} . Импульс \dot{p} называется стандартным.

Преобразование (16), переводящее стандартный импульс \dot{p} в импульс p , определено неоднозначно. Очевидно, что два преобразования $\alpha(p, \dot{p})$ и $\alpha(p, \dot{p})\tilde{A}(\dot{p})$, отличающиеся на матрицу $\tilde{A}(\dot{p})$ из малой группы $L(\dot{p})$ стандартного импульса, будут приводить к одному и тому же результату:

$$\alpha(p, \dot{p}) \tilde{A}(\dot{p}) \dot{p} \tilde{A}^+(\dot{p}) \alpha^+(p, \dot{p}) = \alpha(p, \dot{p}) \dot{p} \alpha^+(p, \dot{p}).$$

Мы можем, однако, фиксировать $\alpha(p, \dot{p})$, условившись всегда выбирать его определенным образом. Оператор α называют оператором Вигнера. Установив вид оператора Вигнера, мы можем найти связь

между произвольным унимодулярным преобразованием A и соответствующим ему преобразованием малой группы $\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$.

Пусть преобразование A переводит импульс p в p' :

$$ApA^+ = p'. \quad (17)$$

Импульсы p и p' могут быть получены из стандартного импульса $\overset{\circ}{p}$ с помощью $\alpha(p, \overset{\circ}{p}) \equiv \alpha(p)$:

$$\alpha(p) \overset{\circ}{p} \alpha^+(p) = p, \quad \alpha(p') \overset{\circ}{p} \alpha^+(p') = p'. \quad (18)$$

Подставив выражения (18) в (17) и умножив слева на $\alpha^{-1}(p')$, а справа на $\alpha^{-1+}(p')$, мы получаем равенство

$$\alpha^{-1}(p') A \alpha(p) \overset{\circ}{p} \alpha^+(p) A^+ \alpha^{-1+}(p') = \overset{\circ}{p}.$$

Это значит, что матрица

$$\alpha^{-1}(p') A \alpha(p) = \tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A) \quad (19)$$

принадлежит малой группе стандартного импульса $\overset{\circ}{p}$. Отсюда мы заключаем, что любое унимодулярное преобразование A может быть представлено в виде произведения трех матриц:

$$A = \alpha(p') \tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A) \alpha^{-1}(p). \quad (20)$$

Фиксировав оператор Вигнера α , мы тем самым установили однозначное соответствие между преобразованиями однородной группы A и преобразованиями малой группы $\tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A)$. Этот факт является ключевым при построении унитарных представлений группы Пуанкаре.

Малая группа и оператор Вигнера для $m^2 > 0$. В этом случае удобно в качестве стандартного импульса $\overset{\circ}{p}$ выбрать импульс в состоянии покоя: $\overset{\circ}{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Тогда матрица стандартного импульса есть $\overset{\circ}{p} = mE$, т. е. пропорциональна единичной матрице. Преобразования малой группы $L(\overset{\circ}{p})$, принадлежащей такому стандартному импульсу, должны, согласно (15), удовлетворять условию

$$\tilde{A}(\overset{\circ}{p}) \tilde{A}^+(\overset{\circ}{p}) = E, \quad (21)$$

которое представляет собой не что иное, как условие унитарности матрицы $\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$. Следовательно, малая группа в случае времениподобных импульсов есть подгруппа унитарных преобразований $SU(2)$, которая является покрывающей группой группы вращений

Оператор Вигнера $\alpha(\mathbf{p})$ в случае $m^2 > 0$ определен равенством (16) с точностью до унитарных преобразований R из $SU(2)$, а именно, матрицы α и αR приводят к одинаковым результатам. Воспользуемся этим произволом и выберем в качестве «стандартного» оператора α такой оператор $\alpha(\mathbf{p})$, который переводит 4-импульс покоя $\dot{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$ в заданный 4-импульс p^μ с помощью чисто лоренцева преобразования, без вращений. Как мы видели в § 3.1, чисто лоренцевы преобразования описываются эрмитовыми матрицами A ; поэтому наш выбор оператора α равносильно наложению эрмитовости на α :

$$\alpha^\dagger(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}). \quad (22)$$

Преобразование $\alpha(\mathbf{p})\alpha(\mathbf{p}) = K$, где $\dot{p} = 0$, отображает трехмерную плоскость, ортогональную вектору \dot{p} (и состоящую из векторов k), на трехмерную плоскость, ортогональную вектору p (и состоящую из векторов K). Как можно показать, условие (22) означает, что те из векторов k , которые одновременно ортогональны векторам \dot{p} и p (т. е. принадлежат обоим трехмерным плоскостям), при преобразовании не смещаются.

Уравнение (16) для α может быть переписано в виде

$$\alpha(\mathbf{p}) \dot{p} \alpha^\dagger(\mathbf{p}) = m \alpha^2(\mathbf{p}) = p. \quad (23)$$

Вычисление оператора α сводится, таким образом, к извлечению своего рода квадратного корня из матрицы импульсов p . Чтобы найти α , положим, как и в (3.28),

$$\alpha(\mathbf{p}) = \text{ch} \frac{\beta}{2} + (\sigma \mathbf{n}) \text{sh} \frac{\beta}{2} \quad (n^2 = 1).$$

Из уравнения (23) мы находим $\text{ch} \beta = p_0/m$, $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, откуда мы получаем искомое выражение для оператора Вигнера:

$$\alpha(\mathbf{p}) = \frac{m + p_0 + (\sigma \mathbf{p})}{[2m(m + p_0)]^{1/2}}. \quad (24)$$

Если в качестве стандартного импульса выбирается импульс k , отличный от импульса покоя $\dot{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$, то наиболее общее выражение для α в (16) есть

$$\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{p}) R \alpha^{-1}(\mathbf{k}), \quad (25)$$

где R — произвольная унитарная 2×2 -матрица, а $\alpha(\mathbf{p})$ имеет прежний смысл (24). Оператор (25), вообще говоря, не эрмитов.

Выбор оператора α в виде (24) (т. е. с ограничением (22)) удобен при записи векторов состояния в каноническом базисе. В случае базисов спирального и E_2 целесообразно иное построение (см. § 4.3).

Малая группа и оператор Вигнера для $m^2 = 0$. Импульс частиц нулевой массы светоподобен; $p^2 = 0$. Выберем стандартный импульс в виде $\dot{p}^\mu = k(1, 0, 0, 1)$, так что матрица стандартного импульса есть $\dot{p} = k(1 + \sigma_3)$. Малая группа, принадлежащая этому импульсу, находится из условия (15), т. е.

$$\tilde{A}(1 + \sigma_3)\tilde{A}^+ = 1 + \sigma_3. \quad (26)$$

Будем искать унимодулярное преобразование \tilde{A} в виде

$$\tilde{A} = \sum_{\mu} c(\mu) \sigma_{\mu}, \quad \det \tilde{A} = 1.$$

Из (26) мы находим коэффициенты $c(\mu)$. В итоге

$$\tilde{A} = e^{-i\frac{1}{2}\sigma_3\theta} + \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)ze^{i\frac{1}{2}\theta}, \quad (27)$$

где z — произвольное комплексное число, а θ — вещественный параметр ($0 \leq \theta \leq 4\pi$). Треугольная матрица (27) представляет собой произведение диагональной унитарной матрицы $u(\theta) = e^{-i\frac{1}{2}\sigma_3\theta}$ и треугольной унимодулярной матрицы $t(z) = 1 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)z$:

$$\tilde{A} = t(z)u(\theta). \quad (28)$$

Унитарные преобразования $u(\theta)$ образуют абелеву подгруппу $U(1)$, изоморфную группе вращений в двумерном евклидовом пространстве (вращения вокруг третьей оси):

$$u(\theta_1)u(\theta_2) = u(\theta_1 + \theta_2). \quad (29)$$

Преобразования $t(z)$ также составляют абелеву подгруппу:

$$t(z_1)t(z_2) = t(z_1 + z_2). \quad (30)$$

Преобразования $t(z)$ и $u(\theta)$ не коммутируют:

$$u(\theta)t(z) = t(ze^{-i\theta})u(\theta). \quad (31)$$

Если ввести вещественные переменные y_1, y_2 ($z = y_1 + iy_2$), то $u(\theta)$ будет описывать вращение координат плоскости (y_1, y_2) на угол θ , а $t(z)$ — смещения в плоскости (y_1, y_2) . Формула (31) пред-

ставляет собой правило умножения (4) для случая двумерного евклидова пространства.

Итак, малая группа (27) светоподобного импульса изоморфна неоднородной группе преобразований в двумерном евклидовом пространстве. Эта группа есть группа «обобщенных» вращений трехмерной плоскости, касательной к световому конусу, которая имеет вырожденную метрику

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь оператор Вигнера α для светоподобного импульса. При матрице стандартного импульса $\dot{p} = k(1 + \sigma_3)$ определение (16) записывается в виде

$$\alpha(p) k(1 + \sigma_3) \alpha^+(p) = |p| \sigma_0 + (\sigma p).$$

Заметим, что при действии на матрицу стандартного импульса $\dot{p} = k(1 + \sigma_3)$ матрицы $1/2(\sigma_1 + i\sigma_2)$ и $(1 - \sigma_3)$ дают нуль. Поэтому оператор Вигнера может быть также представлен в виде

$$\alpha(p) = \sigma_0 b_0 + \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) b_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) b \quad (32)$$

или же, в силу унимодулярности $\alpha(p)$, в виде

$$\alpha = (a_{11})^{-1/2} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

с вещественным a_{11} и комплексным a_{21} . Связь матричных элементов (33) с компонентами импульса находится с помощью формулы $\alpha k(1 + \sigma_3) \alpha^+ = p$, откуда

$$p = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}^* \\ a_{21} & \frac{a_{21} a_{21}^*}{a_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix}; \quad (34)$$

отсюда

$$a_{11} = \frac{p^0 + p^3}{k}, \quad a_{21} = \frac{p^1 + ip^2}{k}. \quad (35)$$

Формулы (33) и (35) дают наиболее экономное выражение для оператора α . Другая часто употребляемая форма для α получается, если выбрать α в виде произведения чисто лоренцева преобразова-

ния $H(|p\rangle)$ вдоль оси 3 и трехмерного поворота $V(p)$ от оси 3 к направлению p :

$$\alpha(p) = V(p)H(|p\rangle). \quad (36)$$

Матрица вращения $V(p)$ имеет вид

$$V(p) = \exp\left\{i \frac{1}{2} \beta (\sigma n)\right\}; \quad (37)$$

$$\cos \beta = \frac{|p^3|}{|p|}, \quad n = -\frac{[p e_3]}{|[p e_3]|},$$

а лоренцево преобразование $H(|p\rangle)$ есть

$$H(|p\rangle) = H^+(|p\rangle) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{|p|} \left[\frac{|p|}{k} + 1 + \sigma_3 \left(\frac{|p|}{k} - 1 \right) \right]}. \quad (38)$$

Формулы (36)—(38) читатель может проверить в качестве упражнения.

§ 4.3. Унитарные представления. Случай $m^2 > 0$

Перейдем к построению специального класса неприводимых унитарных представлений $U(0, A)$ однородной подгруппы квантовомеханической группы Пуанкаре для $m^2 > 0$. Согласно (6) и (8) это позволит получить унитарные представления самой группы Пуанкаре. При преобразовании Лоренца A вектор состояния частицы в каноническом базисе $|p, \sigma\rangle$ испытывает унитарное преобразование

$$|p, \sigma\rangle \rightarrow U(0, A)|p, \sigma\rangle,$$

причем состояния нормированы согласно (11). Так как импульс p при этом переходит в $p' = \Lambda(A)p$, то преобразованное состояние должно принадлежать новому собственному значению p'_μ оператора импульса P_μ :

$$P_\mu U(0, A)|p, \sigma\rangle = U(0, A)\Lambda_\mu^\nu P_\nu |p, \sigma\rangle = p'_\mu U(0, A)|p, \sigma\rangle. \quad (39)$$

Мы воспользовались здесь определением (1.39) преобразованного оператора P_μ :

$$U^{-1}(0, A)P_\mu U(0, A) = \Lambda_\mu^\nu(A)P_\nu.$$

Лоренцево преобразование A сопровождается не только изменением импульса, но и преобразованием в пространстве спиновых

переменных σ . Поэтому преобразованный вектор состояния $U(0, A)|p, \sigma\rangle$ можно представить в следующем виде:

$$U(0, A)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |p', \sigma'\rangle V_{\sigma'\sigma}(p, A), \quad p' = \Lambda(A)p, \quad (40)$$

где матрица $V(p, A)$ действует на спиновые переменные σ . Найдем эту матрицу. Выясним прежде всего условия, налагаемые унитарностью преобразования $U(0, A)$. В силу (9) и (40) мы находим

$$\begin{aligned} U(0, A)U^+(0, A) &= \\ &= \int d\mu(p) \sum_{\sigma} U(0, A)|p, \sigma\rangle \langle p, \sigma| U^+(0, A) = \\ &= \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \sum_{\sigma, \sigma', \sigma''} V_{\sigma'\sigma}(\Lambda^{-1}p, A) |p, \sigma'\rangle \langle p, \sigma''| V_{\sigma''\sigma}^*(\Lambda^{-1}p, A). \end{aligned}$$

Следовательно, $U(0, A)U^+(0, A) = 1$, если матрица V унитарна:

$$V(p, A)V^+(p, A) = 1. \quad (41)$$

Смысл матрицы $V(p, A)$ можно выяснить, если в качестве A выбрать одну из матриц \tilde{A} малой группы импульса p , так что $\tilde{A}(p) p \tilde{A}^+(p) = p$. Тогда (40) превращается в

$$U(0, \tilde{A}(p))|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |p, \sigma'\rangle V_{\sigma'\sigma}(p, \tilde{A}(p)). \quad (42)$$

Матрицы $V(p, \tilde{A}(p)) \equiv V(\tilde{A}(p))$ образуют представление малой группы $L(p)$, принадлежащей импульсу p .

Как мы убедились в предыдущем параграфе, малые группы $L(p)$, отвечающие разным импульсам, изоморфны между собой, и соответствие между их элементами устанавливается с помощью оператора Вигнера α :

$$\tilde{A}(p) = \alpha(p) \tilde{A}(\overset{\circ}{p}) \alpha^{-1}(p).$$

Вследствие этого достаточно рассматривать матрицы $V(\tilde{A}(\overset{\circ}{p}))$ лишь для стандартного импульса $\overset{\circ}{p}$, фиксируя предварительно оператор $\alpha(p)$. Тем самым мы определим базис векторов состояния при импульсе p , отличном от стандартного, через векторы состояния при стандартном импульсе, т. е. мы фиксируем то преобразование $U(0, \alpha(p))$, при котором (по условию) внутренние переменные не

изменяются. При ином выборе $\alpha(\mathbf{p})$ мы придем, очевидно, к унитарно эквивалентному представлению.

Итак, положим

$$|\mathbf{p}, \sigma\rangle = U(0, \alpha(\mathbf{p}))|\mathring{\mathbf{p}}, \sigma\rangle, \quad (43)$$

выбрав $\alpha(\mathbf{p})$ определенным образом.

С помощью условия (43) мы можем выразить матрицу $V(\mathbf{p}, A)$ для произвольного преобразования A через матрицы $V(\tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}}))$ для стандартного импульса $\mathring{\mathbf{p}}$. Умножив (40) на $U^{-1}(0, \alpha(\mathbf{p}'))$, мы находим, в соответствии с (1.29), (4) и (43),

$$\begin{aligned} U^{-1}(0, \alpha(\mathbf{p}'))U(0, A)|\mathbf{p}, \sigma\rangle &= U(0, \alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\alpha(\mathbf{p}))|\mathring{\mathbf{p}}, \sigma\rangle = \\ &= U(0, \tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}}))|\mathring{\mathbf{p}}, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'}|\mathring{\mathbf{p}}, \sigma'\rangle V_{\sigma'\sigma}(\tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}})). \end{aligned} \quad (44)$$

Сравнение с (42) показывает, что матрицы $V(\mathbf{p}, A)$ осуществляют представления малой группы стандартного импульса $\mathring{\mathbf{p}}$.

Неприводимые представления квантовомеханической группы мы получим, если выберем матрицы V , соответствующие неприводимому представлению малой группы. При этом каждому преобразованию A при заданном \mathbf{p} ставится в соответствие преобразование малой группы $\tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}})$ стандартного импульса $\mathring{\mathbf{p}}$:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}, A) &\equiv V(\tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}})), \\ \tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}}) &= \alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\alpha(\mathbf{p}) \equiv \tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}}, A), \\ \mathbf{p}' &= \Lambda(A)\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (45)$$

Как было показано в § 4.2, малая группа импульса $\mathbf{p}^{\mathring{0}} = (m, 0, 0, 0)$ есть унитарная группа SU_2 , рассмотренная в гл. 3. Унитарность преобразования $\tilde{A}(\mathring{\mathbf{p}}, A)$ легко проверяется:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{A}^{\dagger} &= \alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\alpha^2(\mathbf{p})A^{\dagger}\alpha^{-1}(\mathbf{p}') = \\ &= \alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\frac{p}{m}A^{\dagger}\alpha^{-1}(\mathbf{p}') = \tilde{A}^{\dagger}\tilde{A} = 1. \end{aligned}$$

Матрица $V(\tilde{A})$, таким образом, совпадает в случае спина J с унитарными $(2J + 1) \times (2J + 1)$ -матрицами $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$ группы SU_2 , изученными в гл. 3:

$$V_{\sigma\sigma'}(\tilde{A}) = \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\tilde{A}). \quad (46)$$

Теперь можно получить унитарные представления самой квантовомеханической группы Пуанкаре. Добавляя в (44) трансляции (8) и подставляя (45) и (46), мы приходим к окончательной формуле для унитарного неприводимого представления $U(a, A)$ квантовомеханической группы Пуанкаре для спина J в каноническом базисе:

$$U(a, A) |p, \sigma\rangle = e^{i p' a} \sum_{\sigma'} |p', \sigma'\rangle \mathcal{D}'_{\sigma'\sigma}(\tilde{A}(\dot{p})), \quad (47)$$

где \mathcal{D}'^J есть неприводимое (унитарное) представление группы SU_2 , \tilde{A} дается формулой (45), а σ равно проекции спина на третью ось:

$$M_3 |\dot{p}, \sigma\rangle = \sigma |\dot{p}, \sigma\rangle. \quad (48)$$

В состоянии покоя оператор спина J равен моменту количества движения M , т. е. может быть найден по 3-вектору поляризации: $J = -(1/m)\omega$. Переходя к векторам состояния с импульсом p по (43), мы находим общее выражение для вектора спина в каноническом базисе [44]:

$$J = -\frac{1}{m} \left[\omega - p \frac{\omega^0}{p^0 + m} \right], \quad (49)$$

где

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} p^\sigma.$$

Нахождение генераторов $M_{\mu\nu}$ по известным операторам конечного преобразования не составляет особого труда. Эрмитовы генераторы $M_{\mu\nu}$ или M_k, N_k в унитарном представлении были введены формулой (1.33) таким образом, что в инфинитезимальной форме преобразование $U(0, A)$ записывалось как

$$U(0, A) = 1 - i \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} = 1 + iM\omega + iN\beta. \quad (50)$$

Параметры ω и β одинаковы как в (50), так и в инфинитезимальной матрице A :

$$A = 1 + i \frac{1}{2} \sigma\omega + \frac{1}{2} \sigma\beta. \quad (51)$$

Чтобы найти представление для M и N , нам нужно вычислить правую часть (47) при $a^\mu = 0$ и инфинитезимальном A , а левую часть переписать с помощью (50).

Рассмотрим сначала частицы без спина ($J = 0$). В отсутствие внутренних переменных σ правая часть (47) зависит от A только посредством импульса $p' = \Lambda(A)p$. Мы получаем отсюда для генераторов бесспинового представления следующие выражения:

$$\begin{aligned} M^0 |p, J=0\rangle &= -i \left[p \frac{\partial}{\partial p} \right] |p, J=0\rangle, \\ N^0 |p, J=0\rangle &= -ip^0 \frac{\partial}{\partial p} |p, J=0\rangle, \\ p^0 &= (p^2 + m^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Величины M^0 и N^0 составляют релятивистский орбитальный момент количества движения.

Если спин частицы отличен от нуля, то вектор состояния изменяется также и за счет вращения спинового базиса, которое описывается в (47) матрицей $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$. Запишем инфинитезимальную форму $\tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A)$ в виде

$$\tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A) = 1 + i \frac{1}{2} \sigma \theta(\omega, \beta). \quad (53)$$

Тогда бесконечно малое преобразование \mathcal{D}^J есть

$$\mathcal{D}^J(\tilde{A}) = 1 + i\mathfrak{M}\theta(\omega, \beta) = 1 + i\mathfrak{M}\omega + i\mathfrak{M}\beta. \quad (54)$$

Подставляя в $\tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A) = \alpha^{-1}(p') A \alpha(p)$ матрицы α и A по формулам (24) и (51), мы находим простым вычислением

$$\tilde{A}(\overset{\circ}{p}, A) = 1 + i \frac{1}{2} \left\{ \sigma \omega + \frac{([\rho \sigma] \beta)}{m + p^0} \right\}. \quad (55)$$

Следовательно, момент количества движения в каноническом базисе унитарного представления имеет следующий вид [44—46]:

$$M = M^0 + \mathfrak{M} = M^0 + J, \quad (56)$$

$$N = N^0 + \mathfrak{N} = N^0 + \frac{[\rho J]}{p_0 + m}. \quad (57)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы M и N удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.41).

Приведем без вычислений формулу для конечного вращения $V(p, A)$ спина, вызванного преобразованием Лоренца. Если A описывает вращение ($A = A^{-1+} = R$), то (как следует из (56), (57)) вращение $V(p, A)$ совпадает с вращением R : $V(p, A) = R$. Когда

A — чисто лоренцево преобразование³ ($A = A^+ = \exp \{1/2(\sigma \mathbf{n})\beta\}$), характеризующее относительной 4-скоростью $u^\mu = (\text{ch } \beta, \mathbf{n} \text{sh } \beta)$, то вращение спинового базиса определяется матрицей

$$V(p, A) = \frac{(p^0 + m)(u^0 + 1) - (\mathbf{u}p) + i(\sigma[\mathbf{p}\mathbf{u}])}{[2(p^0 + m)(u^0 + 1)((\mathbf{u}p) + m)]^{1/2}} \equiv \\ \equiv \exp \left\{ i \frac{1}{2} \Omega(p, A) \frac{(\sigma[\mathbf{p}\mathbf{u}])}{|[\mathbf{p}\mathbf{u}]|} \right\}. \quad (58)$$

Матрица (58) описывает вращение вокруг оси $[\mathbf{p}\mathbf{u}]$ на угол Ω :

$$\sin \Omega = \frac{2b}{b^2 + |[\mathbf{p}\mathbf{u}]|^2} |[\mathbf{p}\mathbf{u}]|,$$

где

$$b = (u^0 + 1)(p^0 + m) + (\mathbf{u}p).$$

Как явствует из (58), спиновый базис не испытывает вращения, если \mathbf{p} и \mathbf{u} параллельны. Этот результат вытекает и непосредственно из определения (43) спинового базиса при импульсе \mathbf{p} , ибо в этом случае $A\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}')$.

Спиральный базис. Для ряда приложений удобен спиральный базис, который отличается от канонического тем, что в набор переменных вместо $J^3 = (1/m)\omega^\lambda n_\lambda^{(3)}$ входит спиральность

$$\lambda = -\frac{\omega^0}{|\mathbf{p}|} = \frac{(\mathbf{M}\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|},$$

или проекция полного момента количества движения на направление движения. Очевидно, что спиральность инвариантна относительно трехмерных вращений (и смещений).

Ковариантное выражение для спиральности через псевдовектор ω^λ или спин J имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{m} \omega^\lambda \tilde{n}_\lambda^{(3)} = (\mathbf{J}\tilde{\mathbf{n}}^{(3)}), \quad (59)$$

причем единичный вектор $\tilde{n}_\lambda^{(3)}$ ортогонален импульсу, $\tilde{n}_\lambda^{(3)} p^\lambda = 0$, $(\tilde{n}^{(3)})^2 = -1$, и принадлежит двумерной плоскости, проходящей через векторы p^μ и $\dot{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Очевидно, что собственные значения λ такие же, как у проекции спина $\lambda = -J, -J + 1, \dots, J$.

Пусть импульс образует угол ϑ с осью z , а φ — угол между проекцией \mathbf{p} на плоскость (x, y) и осью x . Выберем α в виде

$$\alpha(p) = R(\varphi, \vartheta, -\varphi) e^{1/2 \sigma_3 \beta} \equiv h(p) \equiv h(p, \vartheta, \varphi), \quad (60)$$

где

$$\text{sh } \beta = |\mathbf{p}| / m \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi).$$

Оператор (60) соответствует такому преобразованию стандартного импульса \mathring{p} , когда сначала с помощью чисто лоренцева преобразования $e^{i/2 \sigma_3 \beta}$ «вводится» импульс $|\mathbf{p}| \equiv p$ вдоль положительной оси z , а затем производится его вращение

$$R(\varphi, \vartheta, -\varphi) = e^{-i/2 \sigma_3 \varphi} e^{-i/2 \sigma_2 \vartheta} e^{i/2 \sigma_3 \varphi}$$

до совмещения с импульсом p . При этом параметризация импульса имеет вид

$$p^\mu = m (\text{ch } \beta, \quad \text{sh } \beta \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \text{sh } \beta \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \text{sh } \beta \cos \vartheta).$$

В случае движения с импульсом $|\mathbf{p}|$ вдоль отрицательной оси z R следует выбирать в виде $R(0, \pi, 0)$.

Таким образом, спиральный базис состоит из $2J + 1$ состояний с $-J \leq \lambda \leq J$, определенных по формуле (43) с оператором $\alpha(\mathbf{p})$ в виде (60), или

$$|\mathbf{p}, \lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}, \vartheta, \varphi, \lambda\rangle = U(h(\mathbf{p}, \vartheta, \varphi)) |\mathring{p}, \lambda\rangle, \quad (61)$$

где $\lambda = J^3 = \sigma$ в состоянии покоя. Общие формулы (43), (45) и (47) применимы и в спиральном базисе, но оператор $\alpha(\mathbf{p})$ выбирается теперь иным образом, нежели в каноническом базисе.

Вращения (45), принадлежащие малой группе, в спиральном базисе нужно вычислять с помощью оператора $h(\mathbf{p})$ (см. (60)):

$$\tilde{A}(\mathring{p}, A) = h^{-1}(\mathbf{p}') A h(\mathbf{p}), \quad (62)$$

где $\mathbf{p}' = \Lambda(A)\mathbf{p}$.⁵ Если A описывает вращение, $A^+ = A^{-1}$, то $\tilde{A}(\mathring{p}, A)$ соответствует вращению спинового базиса вокруг направления импульса. При этом состояние $|\mathbf{p}, \vartheta, \varphi; \lambda\rangle$ умножается на фазовый множитель (спиральность не меняется).

Если A представляет собой чисто лоренцево преобразование вдоль отрицательной оси z , так что в итоге $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{p}$, то $V = e^{i/2 \sigma_2 \pi}$. При этом спиральный базис в (46) испытывает вращение

$$\mathcal{F}_{\lambda' \lambda}^J(e^{i/2 \sigma_2 \pi}) = \mathcal{D}_{\lambda' \lambda}^J(i\sigma_2) = (-1)^{J+\lambda} \delta_{\lambda' -\lambda},$$

т. е. спиральность меняет знак.

Выбор $\alpha(\mathbf{p})$ в виде (60) выделяет положительное направление оси z . При переходе к состоянию покоя по (61) спиральность частицы

λ всегда становится равной проекции ($J e_z$) на положительную ось z . Мы могли бы вместо (60) определить иной оператор $h^-(p, \vartheta, \varphi)$, для которого выделенной была бы отрицательная ось z :

$$h^-(p, \vartheta, \varphi) = R(\varphi, \vartheta, -\varphi) e^{-\frac{1}{2}\sigma_3 \beta}.$$

При действии им на состояние покоя мы получили бы частицу импульса $-\mathbf{p}$, а спиральность λ соответствовала бы проекции $-J^3$ в состоянии покоя:

$$|-\mathbf{p}, \lambda\rangle^- = U(h^-(p, \vartheta, \varphi)) |\overset{\circ}{p}, \sigma\rangle |_{\sigma=-\lambda}. \quad (63)$$

Заметим, что операторы h и h^- содержат одинаковые вращения $R(\varphi, \vartheta, -\varphi)$. При $\varphi = \vartheta = 0$ связь между состояниями (61) и (63) имеет вид

$$|-\mathbf{p}, \lambda\rangle^- = (-1)^{J-\lambda} e^{-i\pi J_2} |\mathbf{p}, \lambda\rangle. \quad (64)$$

Следовательно, переход от состояния (61) к состояниям (63) включает не только поворот на π вокруг оси y , но и введение дополнительного фазового множителя. Состояния типа (63) наряду с (61) используются для описания двухчастичных состояний (см. § 4.6).

Другие базисы. В экспериментах по рассеянию частицы характеризуются своим импульсом. Поэтому наиболее часто используются канонический и спиральный базисы, в которых импульсы диагональны.

Разложению состояния по угловым моментам соответствует базис угловых моментов [47]. В качестве переменных, описывающих состояние частицы, в нем выбираются квадрат момента количества движения M^2 , его проекция M_3 , спиральность λ и энергия P^0 .

В другом базисе угловых моментов — (LJ)-базисе [48] — состояния характеризуются собственными значениями операторов L^2 , L_3 , J_3 , где

$$L \equiv M^0 = -i \left[\mathbf{P} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \right]$$

— орбитальная часть генератора M (см. (56)).

В некоторых релятивистских приложениях, а также в теории бесконечных мультиплетов применяется базис однородной группы Лоренца [49, 50]. В нем диагональны операторы $M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ и $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\mu\nu} M^{\lambda\sigma}$, являющиеся инвариантами однородной группы, а также M^2 и M_3 .

В приложениях, связанных с использованием системы отсчета с бесконечно большим импульсом, удобны $E(2)$ -базисы [51], в которых

диагональны операторы

$$\begin{aligned} E_1 &= M_{01} + M_{31} = N_1 + M_2, \\ E_2 &= M_{02} + M_{32} = N_2 - M_1. \end{aligned} \quad (65)$$

Вместе с $M_{12} = M_3$ операторы E_1 и E_2 образуют систему генераторов евклидовой подгруппы $E(2)$:

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [M_3, E_1] = iE_2, \quad [M_3, E_2] = -iE_1. \quad (66)$$

Преобразования этой подгруппы $E(2)$ оставляют инвариантной плоскость $x^0 - x^3 = 0$, касательную к световому конусу.

В зависимости от выбора полной системы диагональных операторов различают два $E(2)$ -базиса (при заданных J и m):

$$\begin{aligned} E_1, E_2, P_E = P^0 - P^3, \quad J_3^E = \frac{\omega^0 - \omega^3}{P^0 - P^3} \quad (E\text{-базис}), \\ E_1, E_2, F = -\frac{1}{4} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad G = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\mu\nu} M^{\lambda\sigma} \quad (\tilde{E}\text{-базис}). \end{aligned} \quad (67)$$

В E -базисе оператор J_3^E имеет смысл проекции спина. Действительно, с одной стороны, $[J_3^E, P_\mu] = 0$, а с другой стороны, в системе покоя J_3^E совпадает с проекцией M_3 момента количества движения M . Поэтому собственные значения J_3^E равны $-J, -J + 1, \dots, J - 1, J$. Выражения для компонент J_1^E и J_2^E могут быть найдены с помощью перестановочных соотношений (1.41), (1.51), а именно:

$$J_{1,2}^E = \frac{1}{m} (\omega_{1,2} - P_{1,2} J_3^E). \quad (68)$$

Операторы $J_k^E (k = 1, 2, 3)$ образуют вектор «углового момента количества движения», т. е. удовлетворяют соотношениям

$$[J_i^E, J_j^E] = i\varepsilon_{ijk} J_k^E.$$

В отличие от оператора спина J_k в каноническом базисе, оператор J_k^E коммутирует с генераторами E_1 и E_2 . Вследствие равенства

$$\omega^2 = -m^2 (J^E)^2 = -m^2 J(J+1)$$

собственные значения $(J^E)^2$ совпадают с собственными значениями спина, т. е. вектор J^E определяет спин в E -базисе.

§ 4.4. Спинорные функции и квантовые поля при $m^2 > 0$

Представление $U(a, A)$ квантовомеханической группы Пуанкаре (формула (47)) зависит от импульса. Одному и тому же лоренцеву преобразованию A в состояниях с разными импульсами и спином $J \neq 0$ сопоставляются различные унитарные матрицы $\tilde{A} = \alpha^{-1}(p')A\alpha(p)$, описывающие вращения в спиновом пространстве. Если бы мы перешли к координатному пространству с помощью преобразования Фурье, то мы пришли бы к нелокальному закону преобразования. Эта зависимость от импульса носит, разумеется, кинематический характер.

Перейдем к новому — спинорному базису состояний, закон преобразования которого не зависит от импульса. Рассмотрим сначала частицы со спином $1/2$ и массой $m \neq 0$. Унитарная матрица \tilde{A} в этом случае равна $\tilde{A} = \alpha^{-1}(p')A\alpha(p)$ ($p' = \Lambda(A)p$), т. е. произведению трех унимодулярных матриц.

Введем спинорные состояния [52, 53] ¹⁾

$$|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |p, \sigma'\rangle \alpha_{\sigma'\sigma}^{-1}(p). \quad (69)$$

Из формулы преобразования (47) или

$$U(0, A)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |p', \sigma'\rangle (\alpha^{-1}(p')A\alpha(p))_{\sigma'\sigma}$$

мы заключаем, что преобразование состояний (69) не зависит от импульса:

$$U(0, A)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |p', \sigma'\rangle A_{\sigma'\sigma}, \quad (70)$$

и дается непосредственно матрицей A , как и в случае спинорного (фундаментального) представления однородной группы.

Условие нормировки для состояний (69) есть

$$\begin{aligned} \langle p', \sigma' | p, \sigma \rangle &= \langle p', \sigma' | p, \rho \rangle \alpha_{\sigma'\rho}^{-1+} \alpha_{\rho\sigma}^{-1} = \\ &= 2p_0 \delta(p - p') (\alpha^{-2})_{\sigma'\sigma} = 2p_0 \delta(p - p') \frac{(\sigma_0 p_0 - \sigma p)_{\sigma'\sigma}}{m}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\alpha^{-2} = mp^{-1} = \frac{\tilde{p}}{m} = (\alpha\alpha^+)^{-1},$$

¹⁾ Напоминаем, что истинный характер индексов матриц B и $D^J(B)$ определяется свойствами матрицы B (см. конец § 3.3).

т. е. переход к простым трансформационным свойствам повлек за собой утрату ортогональности. Полнота системы состояний выражается теперь формулой

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \int |\mathbf{p}, \sigma\rangle \frac{p_{\sigma\sigma'}}{m} (\mathbf{p}, \sigma' | \frac{d^3p}{2p_0} = 1. \quad (72)$$

В случае частиц со спином $J > 1/2$ и массой $m > 0$ унитарная матрица $V(\tilde{A})$ равна матрице $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$, известной по группе вращений. Матрица $\mathcal{L}^J(\tilde{A})$ определена только по отношению к унитарным матрицам \tilde{A} ; поэтому для вычисления $\mathcal{D}^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\alpha(\mathbf{p}))$ с неунитарными α и A мы не можем воспользоваться групповым законом умножения. Однако, как было выяснено в гл. 3, матрица $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$ совпадает с матрицей $\mathcal{L}^{(J, 0)}(\tilde{A}) \equiv D^J(\tilde{A})$ при унитарных \tilde{A} . Матрицы $D^J(A)$, будучи представлениями группы $SL(2, c)$, при этом определены и для неунитарных унимодулярных матриц A . Поэтому, пользуясь групповым правилом умножения, мы можем расщепить $D^J(\tilde{A})$ на три множителя:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^J(\tilde{A}) &= D^J(\tilde{A}) = D^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p}')A\alpha(\mathbf{p})) = \\ &= D^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p}')) D^J(A) D^J(\alpha(\mathbf{p})). \end{aligned}$$

Действуя далее по аналогии со случаем спина $J = 1/2$, мы вводим новые базисные состояния [52, 53]:

$$|\mathbf{p}, \sigma; J\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}, \sigma'; J\rangle D_{\sigma'\sigma}^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p})). \quad (73)$$

Закон преобразования этих состояний не зависит от импульса; при $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \Lambda(A)\mathbf{p}$ вместо (70) мы получаем

$$U(0, A)|\mathbf{p}, \sigma; J\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}', \sigma'; J\rangle D_{\sigma'\sigma}^J(A). \quad (74)$$

Условие нормировки (71) в общем случае заменяется условием

$$(\mathbf{p}, \sigma; J | \mathbf{p}', \sigma'; J) = 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') D_{\sigma\sigma'}^J\left(\frac{\tilde{\mathbf{p}}}{m}\right), \quad (75)$$

а условие полноты состояний с заданной массой $m > 0$ и спином J есть

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \int |\mathbf{p}, \sigma\rangle D_{\sigma\sigma'}^J\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right) (\mathbf{p}, \sigma' | \frac{d^3p}{2p_0} = 1. \quad (76)$$

Роль матрицы импульсов p в случае высших спинов играет матрица $D^J(p)$, причем

$$D^{1/2}(p) = p. \quad (77)$$

Генераторы инфинитезимальных преобразований M_k и N_k в спином базисе вычисляются непосредственно из (74):

$$M_k = M_k^0 + J_k, \quad N_k = N_k^0 - iJ_k, \quad (78)$$

где J_k — $(2J + 1)$ -рядные матрицы спина, $J^2 = J(J + 1)$, а M_k^0 и N_k^0 описывают орбитальный момент количества движения. Если $A = e^{1/2\sigma(i\omega + \beta)}$ — 2×2 -матрица преобразования Лоренца, то $(2J + 1) \times (2J + 1)$ -матрица $D^J(A)$ есть

$$D^J(A) = e^{1/2J(i\omega + \beta)}. \quad (79)$$

В частном случае, когда $A = p/m = e^{1/2\sigma\theta}$, формула (79) дает

$$D^J\left(\frac{p}{m}\right) = \exp \frac{\beta(Jp)}{|p|}, \quad \theta^i = \beta \frac{p^i}{|p|}, \quad (80)$$

где $\text{sh } \beta = |p|/m$, J — оператор спина.

Формулы (73)—(76) описывают свойства спиновых состояний. Локальный характер преобразований (70), (74) этих состояний делает их весьма удобными в качестве отправной точки при введении локально преобразующихся квантовых полей $\varphi(x)$, зависящих от координат x как от параметров.

Введем теперь операторы рождения и поглощения. Одночастичное состояние $|p, \sigma; J, m\rangle$ можно представить как результат применения оператора рождения $a^+(p, \sigma; J, m)$ к вакуумному состоянию $|0\rangle$:

$$|p, \sigma; J, m\rangle = a^+(p, \sigma; J, m)|0\rangle. \quad (81)$$

Поскольку ниже будут рассматриваться только частицы с массой m и спином J , можно опустить m и J из идентификации состояния.

Вакуум $|0\rangle$ есть однородное и изотропное состояние наименьшей энергии:

$$P^\mu |0\rangle = 0, \quad M_{\mu\nu} |0\rangle = 0,$$

и, следовательно, инвариантное относительно релятивистских преобразований:

$$U(a, A)|0\rangle = |0\rangle. \quad (82)$$

. Зная трансформационные свойства состояний, нетрудно с помощью (81) и (82) найти, как преобразуется a^+ . Чтобы выполнялось (47):

$$U(a, A) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} e^{ip'a} |p', \sigma'\rangle \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\alpha^{-1}(p') A \alpha(p)),$$

$$p' = \Lambda(A) p,$$

a^+ должно преобразовываться по формуле

$$U(a, A) a^+(p, \sigma) U^{-1}(a, A) =$$

$$= \sum_{\sigma'} e^{ip'a} a^+(p', \sigma') \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}^J(\alpha^{-1}(p') A \alpha(p)). \quad (83)$$

Оператор поглощения a эрмитово сопряжен к a^+ . Ввиду выбранной нормировки $\langle p', \sigma' | p, \sigma \rangle = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(p - p')$ перестановочное соотношение между a и a^+ имеет вид

$$[a(p, \sigma), a^+(p', \sigma')]_{\mp} = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(p - p'), \quad (84)$$

где знак \mp относится к перестановке (антиперестановке) в случае статистики Бозе—Эйнштейна (Ферми—Дирака). Мы предполагаем, что статистика частиц известна. В дальнейшем мы остановимся на связи спина и статистики.

Формула, эрмитово сопряженная к (83), описывает трансформационные свойства оператора поглощения a :

$$U(a, A) a(p, \sigma) U^{-1}(a, A) =$$

$$= \sum_{\sigma'} e^{-ip'a} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1}(p) A^{-1} \alpha(p')) a(p', \sigma'). \quad (85)$$

В (85) учтено, что \mathcal{D}^J — унитарная матрица.

В дальнейшем будет удобно иметь иную запись формулы (83) для a^+ . Так как $A^{-1} = C^{-1} A C$ (см. гл. 2), то вместо (83) можно написать

$$\sum_{\sigma'} U(a, A) \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(C^{-1}) a^+(p, \sigma') U^{-1}(a, A) =$$

$$= \sum_{\sigma', \sigma''} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1}(p) A^{-1} \alpha(p')) \mathcal{D}_{\sigma'\sigma''}^J(C^{-1}) a^+(p', \sigma''). \quad (86)$$

Это значит, что $D^J(C^{-1}) a^+(p) \equiv \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(C^{-1}) a^+(p, \sigma')$ преобразуется точно так же, как и оператор поглощения.

От операторов a и a^+ можно перейти к спинорным операторам $D^J(\alpha)a$ и $D^J(\alpha C^{-1})a^+$, которые преобразуются локально по $(J, 0)$ -представлению группы Лоренца, например:

$$U(0, A) [D^J(\alpha(p))a(p)] U^{-1}(0, A) = D^J(A^{-1}) [D^J(\alpha(p'))a(p')].$$

На основе спинорных операторов $D^J(\alpha)a$ и $D^J(\alpha C^{-1})a^+$ можно построить операторы квантованных полей $\varphi_a^{(+)}$ и $\varphi_a^{(-)}$ [54, 55]:

$$\varphi_{a\sigma}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha) a(p, \sigma') e^{-ipx}, \quad (87)$$

$$\varphi_{a\sigma}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha C^{-1}) a^+(p, \sigma') e^{ipx}, \quad (88)$$

где вид экспоненты определен по формулам (83) и (85).

Унитарное преобразование $U(a, A)$ при действии на поля $\varphi_a^{(+)}(x)$ и $\varphi_a^{(-)}(x)$ превращает их в поля

$$U(a, A) \varphi_{a\sigma}^{(\pm)}(x) U^{-1}(a, A) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J(A^{-1}) \varphi_{a\sigma'}^{(\pm)}(\Lambda x + a), \quad (89)$$

т. е. $U(a, A)$ действительно производит смещения и вращения в x -пространстве в соответствии со смыслом элемента $g = (a, A)$ группы Пуанкаре \mathcal{P}_+^{\uparrow} .

До сих пор при рассмотрении группы Пуанкаре мы не интересовались различием между частицами и античастицами, так как их релятивистские свойства одинаковы. Однако при построении локального оператора поля $\varphi(x)$, содержащего как операторы рождения, так и операторы поглощения, естественно ввести требование, чтобы поле $\varphi(x)$ имело простой закон фазовых преобразований $\varphi(x) \rightarrow \rightarrow e^{i\theta} \varphi(x)$. При фазовых преобразованиях операторы рождения частицы a^+ и античастицы b^+ преобразуются противоположным образом: если $a^+ \rightarrow a^+ e^{-i\theta}$, то $b^+ \rightarrow b^+ e^{i\theta}$. Поэтому мы должны записать поле φ в виде

$$\varphi(x) = \varphi_a^{(+)}(x) + \eta \varphi_b^{(-)}(x), \quad (90)$$

где $\varphi_b^{(-)}$ дается той же формулой (88), но с оператором $b^+(p, \sigma)$ вместо $a^+(p, \sigma)$, η — фазовый множитель.

В силу (89) поле $\varphi(x)$ преобразуется локально при преобразованиях Лоренца. Выясним теперь, может ли поле считаться локальным в том смысле, что коммутатор или антикоммутатор $[\varphi(x), \varphi^{\pm}(y)]_{\pm}$ исчезает при пространственноподобных интервалах

$(x-y)^2$, т. е. будет ли выполняться принцип причинности для $\varphi(x)$. Составляя коммутатор (антикоммутатор), с помощью (87), (88) и (90) находим

$$\begin{aligned} [\varphi_\sigma(x), \varphi_{\sigma'}^\pm(y)]_\pm &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p_0} D_{\sigma\sigma'}^J \left(\frac{p}{m} \right) \{e^{ip(x-y)} \pm \eta\eta^* e^{-ip(x-y)}\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} D_{\sigma\sigma'}^J \left(\frac{-i\partial}{m} \right) \int \frac{d^3p}{2p_0} \{e^{ip(x-y)} \pm (-1)^{2J} \eta\eta^* e^{-ip(x-y)}\} \end{aligned}$$

где были использованы равенства $m\alpha\alpha^+ = p$ и $D^J(-1) = (-1)^{2J}$.

Правая часть $[\varphi(x), \varphi^\pm(y)]_\pm$ равна нулю при $(x-y)^2 < 0$, если в скобке под интегралом стоит разность экспонент, т. е. при

$$\pm (-1)^{2J} \eta\eta^* = -1. \quad (91)$$

Равенство (91) возможно только при

$$\eta\eta^* = 1, \quad \pm (-1)^{2J} = -1. \quad (92)$$

Здесь верхний знак относится к антикоммутатору, или статистике Ферми—Дирака, а нижний знак — к коммутатору, или статистике Бозе—Эйнштейна.

Формула (92) выражает известную связь спина со статистикой: частицы с полуцелым спином $J = 1/2, 3/2, \dots$ подчиняются статистике Ферми—Дирака, а частицы с целочисленным спином, равным 0, 1, ..., — статистике Бозе—Эйнштейна. Таким образом, $(2J + 1)$ -компонентные поля

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \{D^J(\alpha) a(p) e^{-ipx} + D^J(\alpha C^{-1}) b^+(p) e^{ipx}\} \quad (93)$$

не только преобразуется локально в силу (89):

$$U(a, A) \varphi(x) U^{-1}(a, A) = D^J(A^{-1}) \varphi(\Lambda x + a), \quad (94)$$

но и удовлетворяют условию локальности в виде

$$[\varphi(x), \varphi^+(y)]_\pm = 0, \quad (x-y)^2 < 0. \quad (95)$$

Это условие выполняется, если между спином и статистикой частиц существует нормальная связь.

Заметим, что поле $\varphi(x)$ может и не обладать плотностью энергии-импульса $T_{\nu\mu}(x)$ и другими локальными наблюдаемыми. В случае высших спинов $J \geq 3/2$ определение таких локальных величин встречается с трудностями.

В заключение параграфа обсудим использованный выше способ описания системы с $m^2 \neq 0$ и спином J . В этом способе в качестве стандартного состояния выбиралось состояние покоя $|0, \sigma_0; m, J\rangle$. Состояния с произвольным импульсом $|\mathbf{p}, \sigma_0; m, J\rangle$ и той же проекцией спина σ_0 получались из стандартного состояния преобразованием Лоренца $U(0, \alpha(\mathbf{p}))$. Это соответствует тому, что одно и то же состояние $|0, \sigma_0; J, m\rangle$, заданное в неподвижной системе координат, наблюдается из начала координат различных систем отсчета, движущихся со скоростями $\mathbf{v} = -\mathbf{p}/p_0$, где \mathbf{v} пробегает все значения $0 \leq |\mathbf{v}| < 1$ и все направления $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Вращая систему отсчета, мы можем получить состояния $|\mathbf{p}, \sigma; m, J\rangle$ с различными σ ($-J \leq \sigma \leq J$).

Таким образом, чтобы получить полную систему состояний $|\mathbf{p}, \sigma; m, J\rangle$, достаточно стандартное состояние $|0, \sigma_0; J, m\rangle$ подвергнуть всем преобразованиям однородной группы Лоренца.

Переходя от измерительных приборов, расположенных в начале координат движущейся системы, к приборам, находящимся (в этой же системе) в некоторой точке x , мы производим смещение $U(x, 1)$ и для произвольного оператора рождения $a^+(\mathbf{p}, \sigma)$ или поглощения $b(\mathbf{p}, \sigma)$ определяем смещенные операторы $a^+(\mathbf{p}, \sigma)e^{i\mathbf{p}x}$ и $b(\mathbf{p}, \sigma)e^{-i\mathbf{p}x}$. Совокупность всех смещенных операторов рождения и поглощения доставляет нам полное описание поля. Инвариантная сумма всех этих смещенных операторов $U(x, 1) a(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(x, 1)$, взятая с весом $D(\alpha(\mathbf{p}))$, и есть оператор поля $\phi(x)$. Следовательно, существование операторов поля $\phi(x)$ тесно связано с группой Пуанкаре.

§ 4.5. Унитарные представления в случае $m = 0$. Уравнения движения

Вигнеровский метод построения унитарных представлений [23], изложенный в § 4.3 (формулы (39)—(45)), сохраняет силу и для случая частиц нулевой массы покоя. Неприводимые унитарные представления при $p^2 = 0$ и $p_0 > 0$ также определяются неприводимыми представлениями малой группы стандартного импульса. В § 4.2 было установлено, что малая группа светоподобного импульса $p^2 = 0$ изоморфна группе вращений и трансляций евклидовой плоскости $E(2)$ (см. формулы (28)—(31)). Если мы найдем ее неприводимые унитарные представления, то тем самым будет получен и закон преобразования вектора состояния частицы с $m = 0$ при преобразованиях группы Пуанкаре.

Преобразование группы $E(2)$ задается унимодулярной 2×2 -матрицей K следующего вида (см. (28)):

$$K = t(z)u(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)z\right) e^{-i^{1/2}\sigma_3\theta}, \quad (96)$$

где $z = y_1 + iy_2$, параметры y_1, y_2 и θ вещественны, а стандартный импульс равен $\overset{\circ}{p}^\mu = k(1, 0, 0, 1)$.

Пусть $Y_{\xi\xi'}^\rho$ — искомая матрица неприводимого унитарного представления ρ группы $E(2)$, соответствующая преобразованию (96) с параметрами y_1, y_2 и θ . Величины ξ имеют смысл переменных, характеризующих компоненты представления группы $E(2)$. Ввиду некомпактности этой группы ее представления могут быть бесконечномерными и переменные ξ могут пробегать непрерывный ряд значений. Вектор состояния частицы с $m = 0$ можно тогда записать в виде $|\rho, \xi; \rho\rangle$.

Закон преобразования вектора состояния $|\rho, \xi; \rho\rangle$, вызванного переходом к новой системе отсчета $x \rightarrow x' = \Lambda(A)x + a$, получается непосредственно из общей формулы (40) заменой переменных $\sigma \rightarrow \xi$ и матриц

$$V_{\sigma'\sigma}(\rho, A) \equiv V_{\sigma'\sigma}(\tilde{A}(\overset{\circ}{\rho})) \rightarrow Y_{\xi\xi'}^\rho(K), \quad (97)$$

а именно:

$$U(0, A)|\rho, \xi; \rho\rangle = \sum_{\xi'} |\rho', \xi'; \rho\rangle Y_{\xi\xi'}^\rho(K). \quad (98)$$

Вид матрицы K дается формулой (96), а зависимость K от импульса и преобразованная матрица A находятся из равенства (19) или (45):

$$K(\rho, A) = \tilde{A}(\rho, A)|_{m=0} = \alpha^{-1}(\rho') A \alpha(\rho), \quad \rho' = \Lambda\rho.$$

Так как группа $E(2)$ подобна \mathcal{P}_+^\dagger в том отношении, что $E(2)$ — также неоднородная группа, то для изучения матрицы можно воспользоваться аппаратом, развитым в § 4.3.

Чтобы сделать аналогию явственнее, мы обозначим трансляции в $E(2)$ посредством $t(z) \equiv [y, 1]$, а вращения в плоскости (y_1, y_2) — посредством $u(\theta) \equiv [0, u]$. Элемент группы $E(2)$ есть $[y, u] = [y, 1][0, u]$, а матрицу Y можно записать в виде

$$Y(y, u) \equiv U^E[y, u] = U^E[y, 1]U^E[0, u]. \quad (99)$$

Оператор $U^E[y, u]$ действует лишь на внутренние переменные ξ вектора состояния $|\rho, \xi; \rho\rangle$, который мы для краткости будем писать просто как $|\xi\rangle$, и является аналогом оператора $U(a, A)$. Переменные ξ можно формально подразделить на две части: $\xi = (t, \gamma)$; величины t_1, t_2 связаны с представлением подгруппы трансляций $U^E[y, 1]$ в (99) и заменяют импульсы, а переменные γ характеризуют «внутреннее» состояние вектора $|\xi\rangle$ и связаны с малой группой стандартного «импульса» $\overset{\circ}{t}$.

По аналогии с (47) мы можем сразу же написать общий вид унитарного представления $U^E[y, u]$ группы $E(2)$:

$$U^E[y, u] |t, \gamma\rangle = e^{iyt'} \sum_{\gamma'} |t', \gamma'\rangle V_{\gamma'\gamma}^E(t, u), \quad (100)$$

где матрица $V_{\gamma'\gamma}^E$ действует только на переменные γ и реализует представление малой группы, принадлежащей стандартному «импульсу» \dot{t} ; $t' = \Lambda(u)t$, $yt = y_1 t_1 + y_2 t_2$.

При вращениях в евклидовой плоскости величина $t^2 = t_1^2 + t_2^2$ остается неизменной, и поэтому представления (100) разбиваются на два класса: $t^2 > 0$ и $t^2 = 0$ (или $t_1 = t_2 = 0$). Если $t^2 > 0$, то «импульсы» отличны от нуля и пробегают непрерывный ряд значений, соответствующих точкам окружности радиуса $|t|$ в плоскости (t_1, t_2) .

Если $t^2 = 0$, то $U^E[y, 1] = 1$ в (99), а матрицы $U^E[0, u] = Y(0, u)$ образуют представление группы вращений в плоскости, или, точнее, — группы $U(1)$. Эти представления, как известно, одномерны и характеризуются целым или полуцелым числом λ , так что если $u(\theta) = e^{-i^{1/2}\sigma_3\theta}$, то

$$Y^\lambda(0, u) = e^{-i\lambda\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 4\pi; \lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots). \quad (101)$$

Остается выяснить смысл инвариантной величины t^2 , и, следовательно, смысл величин t_1 и t_2 . Так как вторым инвариантом групп Пуанкаре является ω^2 , то следует прежде всего найти вектор поляризации $\omega_\mu = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$ для состояния $|\dot{p}, t; \lambda\rangle$ со стандартным импульсом $\dot{p}^\mu = k(1, 0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} \omega^\mu(\dot{p}) &= k(-M_{12}, E_2, -E_1, -M_{12}), \\ E_1 &= M_{01} + M_{31}, \quad E_2 = M_{02} + M_{32}. \end{aligned} \quad (102)$$

Операторы E_1 , E_2 и M_{12} удовлетворяют перестановочным соотношениям для группы $E(2)$:

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [M_{12}, E_2] = -iE_1, \quad [M_{12}, E_1] = iE_2,$$

коммутируют с импульсом \dot{p} и потому могут быть отождествлены с генераторами малой группы светоподобного импульса \dot{p} . Это значит, что t_1 и t_2 — собственные значения генераторов E_1 и E_2 . Инвариантный спин ω^2 в состоянии $|\dot{p}, t; \lambda\rangle$ равен

$$\omega^2 |\dot{p}, t; \lambda\rangle = -t^2 k^2 |\dot{p}, t; \lambda\rangle, \quad \dot{p}^\mu = k(1, 0, 0, 1).$$

Следовательно, t^2 выражается через инвариантный оператор спина ω^2 .

Таким образом, в отличие от случая частиц с массой $m \neq 0$, когда возможны только конечномерные неприводимые представления \mathcal{D}^J , при массе $m = 0$ среди представлений малой группы имеются как конечномерные (при $t^2 = 0$), так и бесконечномерные (при $t^2 > 0$) неприводимые унитарные представления. Бесконечномерные представления следовало бы интерпретировать как проявление бесконечного спина. Но частиц с бесконечным спином в природе не наблюдается, и поэтому мы отбросим такие представления. Остающиеся физические представления одномерны: $Y_{\lambda, \lambda}^0 = e^{-i\lambda\theta} \delta_{\lambda, \lambda}$, и характеризуются квантовым числом λ , имеющим, согласно (102), смысл спиральности: $\lambda = (\mathbf{M}\mathbf{P} / |\mathbf{P}|)$ ((102) написано в системе, где $\dot{p}^\mu = k(1, 0, 0, 1)$ и $\lambda = M_{12}$).

Так как для физических представлений собственные значения операторов E_1 и E_2 равны нулю: $t_1 = t_2 = 0$, то формула (102) означает равенства $\omega_0 = -\lambda p_0$, $\omega_3 = -\lambda p_3$, т. е. в ковариантной форме

$$\omega_\mu = -\lambda p_\mu.$$

Изменение знака λ означает, вообще говоря, переход к другой частице (которая может и не существовать). Абсолютное значение λ называют спином безмассовой частицы.

Итак, физические состояния с нулевой массой ($m = 0$) классифицируются по спиральности λ . Каждому значению спиральности соответствует одно независимое состояние (одно состояние поляризации). Спиральность λ может принимать значения $0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$

При преобразовании группы Пуанкаре $x \rightarrow x' = \Lambda(A)x + a$ вектор состояния частицы нулевой массы $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$ приобретает фазовый множитель и изменяется импульс частицы:

$$U(a, A)|\mathbf{p}, \lambda\rangle = e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{a}} e^{-i\lambda\theta} |\mathbf{p}', \lambda\rangle. \quad (103)$$

При этом состояние с импульсом \mathbf{p} определено через состояние со стандартным импульсом $\dot{\mathbf{p}}$ равенством (43):

$$|\mathbf{p}, \lambda\rangle = U(0, \alpha(\mathbf{p})) |\dot{\mathbf{p}}, \lambda\rangle,$$

не содержащим дополнительной фазы θ . Угол $\theta = \theta(\mathbf{p}, A)$ зависит от импульса \mathbf{p} и преобразования A . Эту зависимость можно установить в соответствии с (27), исходя из соотношения

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{1}/2 \cdot \theta} \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) &= \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \tilde{A}(\mathbf{p}, A) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \alpha^{-1}(\mathbf{p}') A \alpha(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3), \quad \mathbf{p}' = \Lambda(A)\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (104)$$

ибо $e^{-i^{1/2}\theta}$ равно матричному элементу \widetilde{A}_{11} . В том случае, когда оператор Вигнера $\alpha(\rho)$ есть (32), прямое вычисление (104) дает

$$e^{-i^{1/2}\theta} = \frac{(A\rho)_{11}}{|(A\rho)_{11}|}, \quad (105)$$

где $B_{ij} = (A\rho)_{ij}$ обозначает матричные элементы 2×2 -матрицы B .

В (104) матрица $^{1/2}(1 + \sigma_3)$ играет роль проектора на представления с $\omega^2 = t^2 = 0$. Действительно, умножение треугольной матрицы K на $^{1/2}(1 + \sigma_3)$ дает матрицу $u^{1/2}(1 + \sigma_3)$, и, следовательно, «смещения» в евклидовом пространстве малой группы $t(z) = 1 + ^{1/2}(\sigma_1 + i\sigma_2)z$ не изменяют состояния:

$$t(z) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_3).$$

Сравним представление группы Пуанкаре для частиц с $m \neq 0$ (в спиральном базисе) и для частиц с нулевой массой. При $m \neq 0$ частица со спином J обладает $2J + 1$ независимыми состояниями, отличающимися по спиральности λ ($-J \leq \lambda \leq J$); в случае же $m=0$ у частиц со спином J существует только одно независимое состояние либо с левовинтовой спиральностью ($\lambda = -J$), либо с правовинтовой спиральностью ($\lambda = J$). Волновую функцию частицы со спином J и $m \neq 0$ можно представить в виде $(2J + 1)$ -рядного столбца, составленного из $\psi_{\lambda}^J(\rho)$; при $m = 0$ остается одна функция $\Phi_{+}^J(\rho)$ или $\Phi_{-}^J(\rho)$. При преобразованиях Лоренца $2J + 1$ компоненты ψ_{λ}^J при $m \neq 0$ преобразуются друг через друга, ибо спиральность частицы с массой не является инвариантной величиной. В случае же $m = 0$ спиральность — релятивистски инвариантный оператор, и единственный вид преобразования Φ_{\pm}^J заключается в умножении на фазовый множитель.

Заметим, что одномерное представление со спиральностью для $m = 0$ может быть получено предельным переходом $m \rightarrow 0$ из представления с $m \neq 0$ и спином $J = |\lambda|$.

У фотона, как известно, существует два независимых состояния поляризации, а не одно, как это следовало бы из классификации по неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Это значит, что фотон описывается приводимым представлением. Действительно, левая и правая круговые поляризации фотона соответствуют спиральности $\lambda = \pm 1$. При пространственном отражении левая (правая) поляризация переходит в правую (левую); два состояния поляризации фотона будут преобразовываться по неприводимому представлению группы Пуанкаре с отражением (см. гл. 6).

Найдем генераторы M и N в унитарном представлении для $m = 0$. При инфинитезимальном преобразовании

$$A = 1 + \delta A = 1 + i \frac{1}{2} (\sigma\omega) + \frac{1}{2} (\sigma\beta)$$

правая часть (103) изменяется как вследствие вариации $\theta(p, A)$, так и вследствие вариации импульса в $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$. Спиновые части \mathfrak{M} и \mathfrak{N} операторов M и N определяются вариацией $\theta(p, A)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \delta (e^{-i\lambda\theta}) &= 2\lambda \left(\delta\alpha^{-1}\alpha + \alpha^{-1} \delta A \alpha \right) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \equiv \\ &\equiv i ((\mathfrak{M}\omega) + (\mathfrak{N}\beta)) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3). \end{aligned}$$

Отсюда после подстановки выражения (32) для α получаем [44]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \left(\frac{p^1}{p^0 + p^3}, \frac{p^2}{p^0 + p^3}, 1 \right) \lambda, \\ \mathfrak{N} &= \left(-\frac{p^2}{p^0 + p^3}, \frac{p^1}{p^0 + p^3}, 0 \right) \lambda. \end{aligned} \quad (106)$$

Все операторы \mathfrak{M}_k и \mathfrak{N}_k коммутируют друг с другом; генераторы же $M = M^0 + \mathfrak{M}$, $N = N^0 + \mathfrak{N}$, включающие и орбитальные части M^0 и N^0 (см. (52)), удовлетворяют требуемым перестановочным соотношениям (см. § 1.3).

Спинорные состояния и уравнения движения. В случае частиц нулевой массы можно также построить спинорные состояния, закон преобразования которых не зависит от импульсов [56, 57]. Однако при $m = 0$ имеется дополнительное условие, выделяющее физические состояния, а именно: лишь одномерные представления малой группы $E(2)$, характеризуемые инвариантом $\omega^2 = \iota^2 = 0$, соответствуют физическим состояниям. При переходе же к спинорным состояниям вводятся нефизические $(2J + 1)$ -мерные неунитарные представления. Поэтому из совокупности найденных спинорных состояний необходимо выделить физическую часть. Связанное с этим дополнительное условие эквивалентно уравнению движения для спинорной функции.

Пусть $\lambda = 1/2$. Чтобы воспользоваться аналогией со случаем $m \neq 0$, будем рассматривать вектор состояния $|\mathbf{p}, 1/2\rangle$ как компоненту вектор-строки $\varphi_{1/2}^+(\mathbf{p})$ с $\varphi_{\pm 1/2}^+(\mathbf{p}) = 0$:

$$\varphi_{\sigma}^+(\mathbf{p}) = (|\mathbf{p}, 1/2\rangle, 0), \quad \sigma = \pm 1/2. \quad (107)$$

Введем вспомогательный вектор-строку Φ_σ , первая компонента которого совпадает с $\varphi_{1/2}^+(\mathbf{p})$:

$$\varphi^+(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3). \quad (108)$$

Спинорное состояние $|\mathbf{p}, \sigma; 1/2\rangle$ для частицы с нулевой массой можно теперь определить по аналогии с (69):

$$|\mathbf{p}, \sigma; 1/2\rangle = \sum_{\sigma'} \Phi_{\sigma'}(\mathbf{p}) \alpha_{\sigma'\sigma}^{-1}(\mathbf{p}). \quad (109)$$

Придерживаясь аналогии со случаем $m \neq 0$, мы постулируем, что спинорные состояния (109) преобразуются по правилу (70), или

$$|\mathbf{p}', \sigma; 1/2\rangle' \equiv U(0, A) |\mathbf{p}, \sigma; 1/2\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}', \sigma'; 1/2\rangle A_{\sigma'\sigma}. \quad (110)$$

Такие преобразовательные свойства спинорного состояния должны быть совместны с формулой (103) для вектора физического состояния $|\mathbf{p}, 1/2\rangle$, которая с помощью (104) и (107) может быть переписана в матричном виде для величин $\varphi_\sigma^+(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} U(0, A) \varphi_\sigma^+(\mathbf{p}) &= \\ &= \sum_{\sigma'} \varphi_{\sigma'}^+(\mathbf{p}') \left\{ \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \alpha^{-1}(\mathbf{p}') A \alpha(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \right\}_{\sigma'\sigma}. \end{aligned} \quad (111)$$

Формулы (110) и (111) могут выполняться одновременно лишь в том случае, когда спинорное состояние (109) удовлетворяет соотношению

$$|\mathbf{p}, \sigma; 1/2\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}, \sigma'; 1/2\rangle \Delta_{\sigma'\sigma}(\mathbf{p}), \quad (112)$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \alpha^{-1}(\mathbf{p}).$$

Матрица $\Delta(\mathbf{p})$ есть ковариантный оператор проектирования на компоненту $\sigma = 1/2$. Условие (112) определяет светоподобный спинор.

Матрица $\Delta(\mathbf{p})$ легко находится, если все вычисления проводятся с помощью оператора Вигнера $\alpha(\mathbf{p}) = VH$ (формула (36)); тогда

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{p}) &= VH \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) (VH)^{-1} = \\ &= V \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) V^+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\sigma\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \right). \end{aligned} \quad (113)$$

Соотношение (112) эквивалентно уравнению движения для $|\mathbf{p}, \sigma; 1/2\rangle$ при $\lambda = 1/2 > 0$. Умножив (112) на $\sigma_0 p^0 - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})$ и подставив (113), мы находим

$$\sum_{\sigma'} |\mathbf{p}, \sigma'; 1/2\rangle (\sigma_0 p^0 - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}))_{\sigma'\rho} = 0. \quad (114)$$

Обобщение полученного результата на случай произвольной спиральности $\lambda = \pm J$ ($J > 0$) не представляет труда, если заметить, что матрица $D_{\sigma\sigma'}^J(1/2(1 \pm \sigma_3))$ имеет только матричные элементы с $\sigma = \sigma' = \pm J$. (Матрицы $D^J(B)$, зависящие от матриц B с $\det B = 0$, были определены в гл. 3.) Для этого мы заменяем $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$ $(2J + 1)$ -компонентной строкой

$$\varphi_{\sigma}^+(\mathbf{p}, J) = (|\mathbf{p}, \lambda\rangle, 0, \dots, 0), \quad \lambda = J > 0, \quad (115)$$

затем вводим спинорное состояние с $2J + 1$ компонентами

$$\varphi_{\sigma}^+(\mathbf{p}, J) = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}, \sigma'; J\rangle D_{\sigma'\sigma}^J \left(\alpha \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \right),$$

для которого постулируется закон преобразования

$$U(0, A) |\mathbf{p}, \sigma; J\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}', \sigma'; J\rangle D_{\sigma'\sigma}^J(A).$$

Вместо формулы (111) трансформационные свойства физических состояний (115) согласно (103) и (104) описываются формулой

$$U(0, A) \varphi_{\sigma}^+(\mathbf{p}, J) = \left\{ \varphi^+(\mathbf{p}', J) D^J \left(\frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \tilde{A} \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \right) \right\}_{\sigma}.$$

Ковариантный оператор проектирования на компоненту $\sigma = J$ спинорного состояния теперь равен $D^J(\Delta(\mathbf{p}))$, а условие светоподобности спинорного состояния гласит:

$$|\mathbf{p}, \sigma; J\rangle = \sum_{\sigma'} |\mathbf{p}, \sigma'; J\rangle D_{\sigma'\sigma}^J(\Delta(\mathbf{p})). \quad (116)$$

Условие (116) равносильно уравнению движения для светоподобного спинора спиральности J :

$$\sum_{\sigma} |\mathbf{p}, \sigma; J\rangle (J\mathbf{p} - Jp^0)_{\sigma\sigma'} = 0. \quad (117)$$

Здесь J — матрица спина в представлении D^J .

Введем сопряженные состояния. Опуская выкладки, повторяющие во многом вывод от (115) до (117), мы приведем результат для спиральности $\lambda = J$:

$$\begin{aligned}
 (\rho, \sigma; J | U^{-1}(0, A) &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J (A^{-1}) (\rho', \sigma'; J |, \\
 \varphi_{\sigma}(\rho, J) &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J \left(\frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \alpha^{-1} \right) (\rho, \sigma; J |, \\
 \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^J (\Delta(\rho)) (\rho, \sigma'; J | &= (\rho, \sigma; J |,
 \end{aligned}$$

где $\varphi(\rho, J)$ — состояние, сопряженное состоянию (115).

Введя операторы рождения $a^+(\rho, \lambda)$ и поглощения $a(\rho, \lambda)$ по тем же формулам (81) и (84), что и для массивных частиц, нетрудно из (103) и сопряженного равенства получить правило преобразования этих операторов под действием $U(a, A)$. Следующий этап — построение квантовых полей также оказывается тривиальным, коль скоро известны процедура построения полей для $m \neq 0$ (см. § 4.4) и светоподобные спинорные состояния.

Уравнение для нейтрино. Эксперименты по бета-распаду пионов показывают, что нейтрино ν_e и ν_{μ} имеют отрицательную, или левовинтовую, спиральность ($\lambda(\nu) = -1/2$), а антинейтрино $\bar{\nu}_e$ и $\bar{\nu}_{\mu}$ — положительную, или правовинтовую, спиральность ($\lambda(\bar{\nu}) = 1/2$). Состояния (107) описывают, таким образом, антинейтрино. Двухкомпонентное нейтринное поле $\nu(x)$ можно записать в виде (см. (93))

$$\begin{aligned}
 \nu_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \{ (\alpha(\rho))_{\sigma-J} a(\rho) e^{-ipx} + \\
 + (\alpha(\rho))_{\sigma+J} b^+(\rho) e^{ipx} \}, \quad J = 1/2, \quad (118)
 \end{aligned}$$

где $a(\rho)$ — оператор поглощения нейтрино ($\lambda = -1/2$), а $b^+(\rho)$ — оператор рождения антинейтрино ($\lambda = 1/2$). При преобразованиях $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$ поле $\nu_{\sigma}(x)$ испытывает преобразование

$$U(a, A) \nu_{\sigma}(x) U^{-1}(a, A) = \sum_{\sigma'} A_{\sigma\sigma'}^{-1} \nu_{\sigma'}(\Lambda x + a).$$

Уравнения типа (114) для спинорных состояний влекут за собой уравнение Вейля для поля $\nu(x)$:

$$((\sigma\nabla) - \partial_0) \nu(x) = 0. \quad (119)$$

Заметим, что выбор $\alpha(\rho)$ в виде (36) позволяет переписать «волновую функцию» $(\alpha(\rho))_{\sigma-J}$ в виде

$$(\alpha(\rho))_{\sigma-J} = (2|\rho|)^J V(\rho).$$

Как и в случае полей с $m \neq 0$, можно проверить, что для полей с $m = 0$ должна выполняться обычная связь между спином и статистикой, т. е. частицы с нулевой массой являются бозонами при $\lambda = 0, \pm 1, \dots$ и фермионами при $\lambda = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$

§ 4.6. Многочастичные состояния

Асимптотические состояния *in* и *out* обладают свойствами состояний свободных частиц. Каждая частица r в комплексе *in* или *out* находится на массовой поверхности $p_r^2 = m_r^2$, а вектор состояния n частиц $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ представляет собой симметризованное или антисимметризованное (для тождественных частиц) произведение одночастичных состояний $|\alpha\rangle$ (см. § 1.4). Поэтому состояния *in* и *out* могут быть построены с помощью операторов рождения и поглощения (для свободных частиц).

Пусть $a^+(\mathbf{p}\lambda, mJ)$ и $a(\mathbf{p}\lambda, mJ)$ — операторы рождения и поглощения частицы со спином J , массой m , имеющей импульс \mathbf{p} и спиральность λ . Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям:

в случае бозонов

$$[a(\mathbf{p}\lambda, mJ), a^+(\mathbf{p}'\lambda', m'J')]_- = \delta_{mm'} \delta_{JJ'} 2p_0 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (120)$$

в случае фермионов

$$[a(\mathbf{p}\lambda, mJ), a^+(\mathbf{p}'\lambda', m'J')]_+ = \delta_{mm'} \delta_{JJ'} 2p_0 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (121)$$

Эти соотношения предполагают, что фермионные операторы для различных масс и спинов антикоммутируют. (Этот результат доказан в аксиоматической квантовой теории поля [32].) Тогда произведение n операторов рождения, будучи применено к вакууму $|0\rangle$, дает состояние с n частицами:

$$\begin{aligned} &|p_1\lambda_1, m_1J_1; \dots; p_n\lambda_n, m_nJ_n\rangle = \\ &= A a^+(p_1\lambda_1, m_1J_1) \dots a^+(p_n\lambda_n, m_nJ_n) |0\rangle, \quad (122) \end{aligned}$$

где A учитывает возможное существование тождественных бозонов: для n одинаковых бозонов $A = (n!)^{-1/2}$.

При преобразованиях Лоренца состояния (122) преобразуются как произведение операторов рождения. В явном виде трансформационные свойства состояний (122) легко устанавливаются с помощью (47). Эти состояния, следовательно, преобразуются по приводимому представлению группы Пуанкаре.

Чтобы описать многочастичное состояние с точки зрения группы Пуанкаре, мы должны найти базисные векторы неприводимых представлений, зависящие инвариантным образом от всех специфиче-

ских степеней свободы многочастичного состояния. Далее, необходимо разложить векторы состояний (122) по этим многочастичным базисным векторам, т. е. произвести разложение произведения представлений на неприводимые представления [58—62]. Случай n частиц может быть изучен на простейшем примере $n = 2$.

Рассмотрим двухчастичное состояние нетождественных частиц

$$|1, 2\rangle \equiv |p_1 \lambda_1, m_1 J_1; p_2 \lambda_2, m_2 J_2\rangle = |1\rangle |2\rangle. \quad (123)$$

Эти состояния нормированы условием

$$\langle 1', 2' | 1, 2\rangle = 2p_0 2p_0' \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'} \delta(p_1 - p_1') \delta(p_2 - p_2'), \quad (124)$$

вытекающим из нормировки (11) одночастичных состояний.

Генераторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ в пространстве двухчастичных состояний (123) можно представить в виде суммы:

$$P_\mu = P_\mu(1) + P_\mu(2), \quad M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(1) + M_{\mu\nu}(2), \quad (125)$$

где $P_\mu(i)$ и $M_{\mu\nu}(i)$ ($i = 1, 2$) действуют только на одночастичные состояния $|i\rangle$. Масса m_i и спин J_i состояния $|i\rangle$ определяются по собственным значениям операторов:

$$P^2(i)|i\rangle = m_i^2|i\rangle, \quad \omega^2(i)|i\rangle = -m_i^2 J_i(J_i + 1)|i\rangle, \quad (126)$$

где

$$\omega(i) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} M_{\nu\lambda}(i) P_\sigma(i). \quad (127)$$

Неприводимые представления группы Пуанкаре характеризуются, как известно из § 1.3, значениями инвариантов массы m и спина J . В нашем случае

$$P_\mu P^\mu = (P_\mu(1) + P_\mu(2))(P^\mu(1) + P^\mu(2)) = m^2 > 0 \quad (128)$$

и, следовательно, полный спин J равен полному моменту количества движения в системе центра инерции:

$$P = p_1 + p_2 = 0;$$

при этом

$$\omega^2 = \omega_\mu \omega^\mu = -m^2 J(J + 1), \quad (129)$$

где

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} (M^{\nu\lambda}(1) + M^{\nu\lambda}(2))(P^\sigma(1) + P^\sigma(2)). \quad (130)$$

Канонический или спиральный базис в случае одночастичного состояния содержит 4 переменные: импульс p_i и проекцию спина J_{i3} или спиральность λ_i . В случае двухчастичного состояния аналогичные переменные — полный импульс P , проекция J_{i3} или полная спиральность $\Lambda = (JP)/|P|$ — не описывают всех 8 степеней свободы. Эти переменные вместе с $m^2 = s$ и J соответствуют лишь 6 степеням свободы, так что мы должны построить две дополнительные переменные для того, чтобы характеризовать однозначно каждое двухчастичное состояние в неприводимом базисе группы Пуанкаре.

Обозначим две дополнительные переменные посредством γ_1 и γ_2 . Двухчастичный вектор состояния тогда можно записать в виде

$$|P, m; J, \Lambda; \gamma_1, \gamma_2\rangle, \quad (131)$$

где мы использовали для собственного значения полного импульса тот же символ, что и для самого генератора. Величины γ_1 и γ_2 должны быть измеримы одновременно со всеми остальными величинами в (131), поэтому операторы γ_1 и γ_2 коммутируют между собой и со всеми операторами, характеризующими базис неприводимого представления группы Пуанкаре. Следовательно, γ_1 и γ_2 должны быть инвариантными операторами, т. е. коммутирующими со всеми генераторами P_λ и $M_{\mu\nu}$ ($i = 1, 2$):

$$[\gamma_i, P_\mu] = 0, \quad [\gamma_i, M_{\mu\nu}] = 0. \quad (132)$$

Построим из $P_\mu(i)$ и $M_{\mu\nu}(i)$ набор таких двух инвариантных операторов, которые не сводятся к одночастичным, содержащим $P_\mu(i)$ и $M_{\mu\nu}(i)$ с одним и тем же индексом i . Легко проверить, что операторы

$$\gamma_1 = \omega_\mu(1) P^\mu, \quad \gamma_2 = \omega_\mu(2) P^\mu \quad (133)$$

удовлетворяют этим требованиям. Вместо γ_1 и γ_2 удобно выбрать другие инвариантные операторы:

$$\lambda_i = [(p_i^\mu P_\mu)^2 - m_i^2 m^2]^{-1/2} \gamma_i. \quad (134)$$

В системе центра инерции $P = 0$ величина λ_i имеет смысл спиральности i -й частицы.

Таким образом, базисное двухчастичное состояние для неприводимого представления (m, J) группы Пуанкаре есть

$$|P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle_2, \quad (135)$$

где λ_1 и λ_2 — спиральности частиц в системе ц. и., а остальные величины даны формулами (125), (128) и (129). В системе ц. и. $\lambda_1 - \lambda_2$ есть проекция спина J на направление

$$p_{12} = \frac{1}{2} (p_1 - p_2),$$

поэтому λ_1 и λ_2 ограничены условием

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J. \quad (136)$$

При преобразованиях Лоренца и сдвигах величины λ_1 и λ_2 остаются неизменными, так что при $J \geq J_1 + J_2$ (когда (136) не ограничивают λ_1 и λ_2 в (125)) имеется $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)$ различных состояний (125), преобразующихся независимо.

Инвариантное условие нормировки для состояний (135) будет записываться в виде

$$\begin{aligned} \langle P, m, J; \Lambda; \lambda_1, \lambda_2 | P', \Lambda'; m', J'; \lambda_1', \lambda_2' \rangle = \\ = \frac{P_0}{m} \delta(P - P') \delta(m - m') \delta_{\Lambda\Lambda'} \delta_{JJ'} \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'}. \end{aligned} \quad (137)$$

Установим связь между произведением одночастичных состояний (123) в спиральном базисе и базисным (двухчастичным) состоянием (135) неприводимого представления группы Пуанкаре с массой m и спином J . Перейдем сначала к двухчастичным переменным P и p_{12} . Вместо относительного импульса p_{12} в системе ц. и. введем инвариантную массу $m = \sqrt{s}$ двухчастичного состояния

$$p_{12}^2 = \frac{1}{4s} (s + (m_1 + m_2)^2) (s - (m_1 - m_2)^2), \quad p_{12} = |p_{12}|, \quad (138)$$

и два эйлеровых угла φ и ϑ , описывающих вращение $R(\varphi, \vartheta, -\varphi)$ от оси z к направлению p_{12} . Тогда в системе ц. и. произведение одночастичных состояний (123) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_{12}, \lambda_1; m_1, J_1 \rangle | -p_{12}, \lambda_2; m_2, J_2 \rangle = \\ = U(R(\varphi, \vartheta, -\varphi)) \{ |p_{12} e_z, \lambda_1; m_1, J_1 \rangle | -p_{12} e_z, \lambda_2; m_2, J_2 \rangle \} \equiv \\ \equiv \sqrt{\frac{4m}{p_{12}}} |0, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (139)$$

Здесь мы воспользовались формулой (61) для частицы 1 и формулой (63) для частицы 2 так, чтобы произвольное двухчастичное состояние в системе ц. и. получилось с помощью одного и того же

вращения $R(\varphi, \vartheta, -\varphi)$ из двухчастичного состояния, где имеются лишь составляющие импульса по оси z . Выбор нормировочного множителя в (139) следует из равенства

$$p_1^0 p_2^0 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2') = \frac{m}{|\mathbf{p}_{12}|} \delta^4(p - p') \delta^2(\Omega - \Omega').$$

Лоренцево преобразование состояния (139) от системы ц. и. к системе, движущейся со скоростью \mathbf{P}/P_0 , определяет двухчастичное спиральное состояние общего вида:

$$|\mathbf{P}, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2\rangle \equiv U(h(\mathbf{P})) |0, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (140)$$

где $h(\mathbf{P})$ — оператор Вигнера (61) в спиральном базисе. Состояния (140) ортонормированы в смысле

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2 | \mathbf{P}', m'; \varphi', \vartheta'; \lambda_1', \lambda_2' \rangle = \\ = \delta^4(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta^2(\Omega - \Omega') \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'}. \end{aligned} \quad (141)$$

Искомая связь базисов (123) и (135) или (135) и (140) выражается функцией преобразования [58]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}', m'; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2 | \mathbf{P}, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1', \lambda_2' \rangle = \\ = \frac{P_0}{m} N(J) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta(m - m') \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'} \times \\ \times \langle 0; J; \Lambda | U(R(\varphi, \vartheta, -\varphi)) | 0; \varphi = \vartheta = 0; \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda \rangle = \\ = \frac{P_0}{m} N(J) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta(m - m') \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'} \mathcal{D}_{\Lambda\lambda}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi). \end{aligned} \quad (142)$$

Для вывода (142) необходимо воспользоваться формулами (139), (140), а также (при отыскании зависимости от J, Λ, φ) лоренц-инвариантностью всех нормировок ($N(J)$ — нормировочный множитель). Заметим, что в системе ц. и., где $\mathbf{p}_{12} = \mathbf{e}_z |\mathbf{p}_{12}|$, полная спиральность равна

$$\Lambda = \frac{JP}{|\mathbf{P}|} = \frac{1}{|\mathbf{p}_{12}|} [(J_1 \mathbf{p}_{12}) + (J_2 \mathbf{p}_{12})] = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Разложение состояния (140) (т. е. фактически произведения (123) одночастичных состояний) может быть, следовательно, записано в виде ($\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$)

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \\ = \sum_J \sum_{\Lambda=-J}^J N(J) \mathcal{D}_{\Lambda\lambda}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi) |\mathbf{P}, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle. \end{aligned} \quad (143)$$

Чтобы сохранить обычную нормировку (3.95) функций \mathcal{D}^J при учете нормировки (124) и соотношения (137), необходимо выбрать

$$N(J) = \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right)^{1/2}. \quad (144)$$

Обращая (143) с помощью (3.96), мы находим выражение для базисного состояния неприводимого представления (m, J) через двухчастичное состояние с диагональным относительным импульсом $p_{12}(m, \vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} |P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \\ = N(J) \int D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi) |P, m; \varphi, \vartheta; \lambda_1, \lambda_2\rangle d\Omega. \end{aligned} \quad (145)$$

Обратимся теперь к случаю, когда частицы 1 и 2 тождественны. Правило построения состояний с заданным J для одинаковых частиц можно вывести с помощью (139) и (145), исходя из известных свойств одночастичных состояний.

Пусть A_{12} — оператор перестановки частиц 1 и 2:

$$A_{12} \{ |p_1, \lambda_1; 1\rangle |p_2, \lambda_2; 2\rangle^- \} = |p_1, \lambda_1; 2\rangle |p_2, \lambda_2; 1\rangle^-.$$

Воспользовавшись (63) и (64), находим появляющийся при перестановке фазовый множитель:

$$\begin{aligned} A_{12} \{ |pe_z, \lambda_1; 1\rangle | -pe_z, \lambda_2; 2\rangle^- \} = \\ = (-1)^{2j - (\lambda_1 - \lambda_2)} e^{i\pi j} \{ |pe_z, \lambda_2; 1\rangle | -pe_z, \lambda_1; 2\rangle^- \}, \end{aligned} \quad (146)$$

где $j = J_1 = J_2$ и $J = J_1 + J_2$. Но в силу (145) этот результат означает, что

$$A_{12} |P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle = (-1)^{2j+J} |P, m; J, \Lambda; \lambda_2, \lambda_1\rangle, \quad (147)$$

так как $e^{i\pi j} |J, \lambda\rangle = (-1)^{J-\lambda} |J, -\lambda\rangle$. Следовательно, симметричная (антисимметричная) комбинация соответствует выбору знака $+$ ($-$) в

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle \pm (-1)^{2j+J} |P, m; J, \Lambda; \lambda_2, \lambda_1\rangle) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle + (-1)^J |P, m; J, \Lambda; \lambda_2, \lambda_1\rangle). \end{aligned} \quad (148)$$

Мы устранили знаки \pm в правой части (148), воспользовавшись тем, что симметризация (антисимметризация) необходима для целых (полуцелых) спинов J , так что $(-1)^{2i} (j - \text{целое}) = -(-1)^{2i} (j - \text{полуцелое}) = 1$.

Из (148) вытекает, что в случае нечетных J спиральности частиц должны быть различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) как для бозонов, так и для фермионов. Например, не существует двухфотонного состояния с $J = 1$ и с одинаковыми поляризациями $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$. Точно так же не существует двухнуклонного состояния с $J = 1$ и одинаковыми спиральностями нуклонов.

Глава 5

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

В предыдущей главе было выяснено, что в случае частиц с нулевой массой уравнения движения представляют собой условия, налагаемые на спинорные функции для того, чтобы они правильно описывали физические состояния, преобразующиеся по неприводимым (одномерным) представлениям квантовомеханической группы Пуанкаре. Иначе говоря, уравнения движения при $m = 0$ были получены как следствие релятивистских свойств такой квантовой системы. Подобное соотношение между уравнениями движения и физическими представлениями квантовомеханической группы является общей чертой подхода и характерно также для состояний, обладающих массой покоя.

Роль уравнений движения заключается в описании развития во времени физического состояния. Уравнения движения всегда содержат оператор смещения во времени P_0 , что вследствие релятивистской ковариантности уравнений влечет за собой появление и операторов пространственных смещений P_k . Но эти операторы являются генераторами группы Пуанкаре, так же как и момент количества движения $M_{\mu\nu}$, с помощью которого формулируется условие релятивистской инвариантности.

Формулы (4.47), (4.89) и (4.103) для неприводимых представлений группы Пуанкаре определяют также состояния свободной частицы во времени, т. е. решают проблему, которая обычно ставится после написания уравнений движения. Поэтому уравнения движения как источник информации о невзаимодействующей системе не представляют самостоятельного интереса, и задача их построения — это задача восстановления уравнения по уже известному решению — оператору поля $\Psi(x)$ или волновой функции

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = (2\pi)^{3/2} \langle 0 | \Psi(0) | \mathbf{p}, \sigma \rangle, \quad (1)$$

т. е. в конечном счете по свойствам состояния $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$. Однако знание различных видов записи волновых функций и соответствующих

им уравнений оказывается весьма полезным при параметризации матричных элементов и введении феноменологических взаимодействий.

Первоначально уравнения движения рассматривались как основной источник информации о свойствах релятивистских частиц. Начиная с работ Дирака, Фирца и Паули [63—65], было предложено много линейных уравнений различных типов, описывающих частицы с высшими спинами.

Мы рассмотрим только уравнения Деффина—Кеммера [66, 67], Рариты—Швингера [68] и Баргмана—Вигнера [69], которые чаще используются, хотя уравнения другого типа [70—74] также обладают своими достоинствами.

В последнее десятилетие в связи с открытием резонансов проблема описания частиц с высшими спинами приобрела практическое значение. Это оживило также интерес и к уравнениям движения (см. например, [75—79]).

§ 5.1. Волновые функции, билинейная эрмитова форма и уравнения движения

Рассмотрим общую методику построения волновых функций (1) и вывода уравнений движения для них. При преобразовании координат $x \rightarrow x' = \Lambda(A)x + a$ операторы поглощения $a(p, \sigma)$ и $b(p, \sigma)$ частицы и античастицы массы m и спина J преобразуются одинаково по правилу (4.85):

$$U(a, A) b(p, \sigma) U^{-1}(a, A) = e^{-ip'a} \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1}(p) A^{-1} \alpha(p')) b(p', \sigma'), \quad (2)$$

$$p' = \Lambda(A) p.$$

Аналогичным образом преобразуются при однородных преобразованиях и операторы

$$\sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(C^{-1}) b^+(p, \sigma'), \quad \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(C^{-1}) a^+(p, \sigma'),$$

содержащие операторы рождения b^+ и a^+ .

Введем поле $\Psi_r(x)$ для частиц с массой m и спином J :

$$\Psi_r(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{2p_0} \{u_r(p, \sigma) a(p, \sigma) e^{-ipx} + v_r(p, \sigma) b^+(p, \sigma) e^{ipx}\}, \quad (3)$$

которое отличается от рассмотренных ранее (см. § 4.4) спинорных полей заменой матриц $D_{r\sigma}^J(\alpha)$ и $D_{r\sigma}^J(\alpha C^{-1})$ на (еще не определенные) «волновые функции» $u_r(p, \sigma)$ и $v_r(p, \sigma)$. Эти волновые функции

должны быть такими, чтобы поле $\Psi(x)$ обладало следующими двойствами.

1. При преобразовании Лоренца $x' = \Lambda(A)x$ поле $\Psi(x)$ должно преобразовываться по конечному (неунитарному) представлению L однородной группы Лоренца. При этом

$$U(0, A) \Psi_r(x) U^{-1}(0, A) = \sum_r L_{rr'}(A^{-1}) \Psi_{r'}(\Lambda x) \quad (4)$$

(представление L может быть приводимым, а число компонент $\Psi_r(x)$ может превышать $2J + 1$).

2. Поля $\Psi_r(x)$ должны допускать построение инвариантной билинейной эрмитовой формы. Это условие равносильно требованию, чтобы существовал такой эрмитов оператор \bar{g} , что

$$\Psi_r^+(x) \bar{g}_{rr'} \Psi_{r'}(x) = \Psi_r^+(\Lambda x) \bar{g}_{rr'} \Psi_{r'}(\Lambda x). \quad (5)$$

Оператор \bar{g} предполагается не зависящим от импульса.

3. Поле Ψ_r должно удовлетворять некоторому ковариантному уравнению движения в импульсном или координатном пространстве и дополнительным условиям, вследствие чего число независимых компонент Ψ_r сокращается до $2J + 1$.

Условие 1 допускает широкий класс полей. Привлечение представлений однородной группы Лоренца для построения полей связано со стремлением иметь локально преобразующиеся величины вместо нелокального закона преобразования (2). Как уже обсуждалось в § 4.4, для устранения нелокальности в законе преобразования необходимо подразделить входящую в (2) матрицу $\mathcal{D}^J(\alpha^{-1} A^{-1} \alpha')$ на произведение трех матриц другого типа, зависящих соответственно от α^{-1} , A^{-1} и α' . Эти другие матрицы должны относиться к представлению группы Лоренца, а не группы вращений, ибо группа вращений не содержит неунитарных преобразований α и A . Группа Лоренца, таким образом, играет здесь роль вспомогательной группы, необходимой для удобного представления трансформационных свойств.

Наиболее экономное построение приводит к спинорным полям $\Phi^J(x)$ (см. § 4.4), имеющим $2(2J + 1)$ компонент.

Спинорные функции преобразуются по представлению $(0, J)$ или $(J, 0)$ группы Лоренца. Если ограничиваться неприводимыми представлениями группы Лоренца, то волновая функция $\Psi_r(x)$ для спина J может преобразовываться по представлению (j_1, j_2) группы Лоренца, если только число J встречается среди чисел $|j_1 - j_2|$, $|j_1 - j_2| + 1$, ..., $j_1 + j_2$. Использование приводимых представлений L открывает широкие возможности для введения различных волновых функций. Частицу со спином J можно, например, описать, посредством тензора J -го ранга или спинора $2J$ -го ранга.

Условие 2 существенно ограничивает возможные представления группы Лоренца, по которым может преобразовываться Ψ_r . Согласно (5) матрица L должна быть такова, чтобы выполнялось

$$L^+ \bar{g} L = \bar{g}. \quad (6)$$

Следовательно, матрицы L и L^{-1+} должны принадлежать одному и тому же представлению группы Лоренца, используемому для построения поля Ψ . Как было показано в § 3.3, это представление должно иметь вид (j, j) или $(j_1, j_2) + (j_2, j_1)$ или же быть прямым произведением представлений такого типа.

Установим связь между матрицами L , входящими в правило (4) преобразования поля $\Psi(x)$, и волновой функцией $u_r(\mathbf{p}, \sigma)$. Пусть $e_r(L)$ — выбранный нами базис представления L . Векторы состояния покоя образуют базис представления группы вращений: $|0, \sigma, J\rangle \equiv e_\sigma(J)$. Матрица перехода от базиса $e_r(L)$ к базису $e_\sigma(J)$ есть

$$(e_r(L), e_\sigma(J)) = c_{r\sigma}(L, J).$$

Если L относится к представлению $(J, 0)$, то

$$(e_\sigma(J), e_r((J, 0))) = (e_r((J, 0)), e_\sigma(J)) = \delta_{\sigma r}.$$

Итак, матрица \mathcal{D}^J в (2), описывающая вращение спина, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p})A^{-1}\alpha(\mathbf{p}')) &= \\ &= \sum_{rr'} c_{\sigma r}(J, L) L_{rr'}(\alpha^{-1}(\mathbf{p})A^{-1}\alpha(\mathbf{p}')) c_{r'\sigma'}(L, J). \end{aligned} \quad (7)$$

Но лоренцевы матрицы L определены и для неунитарных матриц α и A , и мы можем разбить $L(\alpha^{-1}A^{-1}\alpha')$ на три множителя, как и в случае спинорных полей (§ 4.4). Поэтому волновая функция $u_r(\mathbf{p}, \sigma)$ для частицы со спином J есть

$$u_r(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{r'} L_{rr'}(\alpha(\mathbf{p})) c_{r'\sigma}(L, J) = \sum_{r'} L_{rr'}(\alpha(\mathbf{p})) u_{r'}(0, \sigma). \quad (8)$$

Здесь $\alpha(\mathbf{p})$ есть оператор Вигнера, так что $\Lambda(\alpha)$ есть лоренцево преобразование от состояния покоя $\dot{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$ к импульсу p^μ .

С помощью (2), (7) и (8) легко проверить, что оператор

$$u_r(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} u_r(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) \quad (9)$$

преобразуется при $x \rightarrow \Lambda(A)x$ по правилу

$$\begin{aligned} U(0, A) u_r(\mathbf{p}) U^{-1}(0, A) &\equiv u_{r'}(\mathbf{p}') = \\ &= \sum_{r'} L_{rr'}(A^{-1}) u_{r'}(\mathbf{p}'), \quad \mathbf{p}' \equiv \Lambda(A)\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичным образом преобразуется и оператор

$$v_r(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} v_r(\mathbf{p}, \sigma) b^+(\mathbf{p}, \sigma), \quad (11)$$

где функция

$$v_r(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{r'} L_{rr'}(\alpha(\mathbf{p})C^{-1}) c_{r'\sigma}(L, J). \quad (12)$$

Очевидно, что свойства полей $\Psi(x)$ полностью определяются волновыми функциями u_r и v_r . Построение волновых функций сводится, согласно (8) и (12), к вычислению матрицы $L(\alpha(\mathbf{p}))$ лоренцева преобразования $\alpha(\mathbf{p})$ в представлении L и к установлению соответствия $c_{r\sigma}(L, J) = u_r(0, \sigma)$ между базисом группы вращений (спин J , компонента r) и базисом группы Лоренца (представление L , компонента r) или же к выбору волновой функции $u_r(0, \sigma)$ в состоянии покоя.

Выбор соответствия $u_r(0, \sigma) = c_{r\sigma}(L, J)$ определяет уравнения движения и дополнительные условия, которым удовлетворяет волновая функция $u(\mathbf{p}, \sigma)$ при произвольном импульсе. Эти уравнения движения и условия представляют собой не что иное, как ковариантное выражение соотношений, определяющих базис $u(0, \sigma)$.

В качестве примера рассмотрим вывод уравнения движения для $u(\mathbf{p}, \sigma)$. Пусть волновая функция в состоянии покоя $u(0, \sigma)$ является собственным состоянием оператора \bar{g} , введенного формулами (5) и (6):

$$\bar{g}u(0, \sigma) = \gamma u(0, \sigma), \quad (13)$$

где γ — вещественное число. Имея в виду, что согласно (8)

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = L(\alpha(\mathbf{p}))u(0, \sigma),$$

мы можем с помощью (6) переписать условие (13) в виде

$$L(\alpha(\mathbf{p})\alpha^+(\mathbf{p}))\bar{g}u(\mathbf{p}, \sigma) = \gamma u(\mathbf{p}, \sigma)$$

или же

$$L\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)\bar{g}u(\mathbf{p}, \sigma) = \gamma u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (14)$$

Это есть уравнение движения для $u(\mathbf{p}, \sigma)$. При подходящем выборе представления L это уравнение может быть линейным по \mathbf{p} .

Уравнение (14) является ковариантным по способу его построения, начиная с (13). Однако, чтобы убедиться в релятивистской инвариантности уравнения (14) обычным путем, необходимо знать трансформационные свойства волновых функций $u(\mathbf{p}, \sigma)$. До сих пор мы рассматривали преобразования $U(a, A)$ в гильбертовом пространстве векторов состояния $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$, а не в пространстве функций $u(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v(\mathbf{p}, \sigma)$. Между тем трансформационные свойства функций используются при введении спинорных амплитуд (см. § 7.5).

Преобразованная волновая функция может быть введена, исходя из равенств (9) и (10), как такая функция, которая определяет преобразованный оператор $u'(\mathbf{p})$:

$$u_r'(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} u_r'(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}', \sigma), \quad \mathbf{p}' = \Lambda(A)\mathbf{p}.$$

Следовательно,

$$u_r'(\mathbf{p}, \sigma) = L_r' (A^{-1}) u_r'(\mathbf{p}', \sigma). \quad (15)$$

Но преобразованная волновая функция (15) не имеет, вообще говоря, того же вида, что и $u(\mathbf{p}, \sigma)$, так как соотношение $A\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}')$ выполняется только для специального класса матриц A .

В общем случае (см. (4.19))

$$A\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}') \alpha^{-1}(\mathbf{p}') A\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}') \tilde{A}(\dot{\mathbf{p}}, A),$$

так что $A\alpha(\mathbf{p})$ отличается $\alpha(\mathbf{p}')$ на спиновое вращение $\tilde{A}(\dot{\mathbf{p}}, A)$, которому подвергаются функции $u_r(0, \sigma)$. Поэтому u выражается через u' следующим образом:

$$u_r'(\mathbf{p}', \sigma) = \sum_{\sigma'} u_r(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{D}_{\sigma'\sigma}(\tilde{A}(\dot{\mathbf{p}}, A)), \quad (16)$$

где мы воспользовались также равенством (7), $\mathbf{p}' = \Lambda\mathbf{p}$.

По волновой функции $u(\mathbf{p}, \sigma)$ можно построить сопряженную волновую функцию $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) = u^+(\mathbf{p}, \sigma)\bar{g}$. В силу (6) и (15) эта функция преобразуется по правилу

$$\bar{u}'(\mathbf{p}', \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) L(A^{-1}),$$

так что существует инвариантная билинейная эрмитова форма

$$\bar{u}'(\mathbf{p}', \sigma) u'(\mathbf{p}', \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) u(\mathbf{p}, \sigma).$$

Возвратимся к уравнению движения (14). Чтобы убедиться в его инвариантности, достаточно найти, как преобразуется матрица $L(p/m)\bar{g}$. Мы имеем

$$L(A)L\left(\frac{p}{m}\right)\bar{g}L(A^{-1}) = L\left(A\frac{p}{m}A^+\right)\bar{g} = L\left(\frac{p'}{m}\right)\bar{g},$$

где $p' = \Lambda(A)p$. Вместе с (15) из этого равенства следует, что уравнение (14) после замены $p \rightarrow p'$ будет выполняться для преобразованной функции $u'(p', \sigma)$, что и требовалось показать.

В следующем параграфе мы рассмотрим подробно способ введения и свойства волновых функций на примере дираковских волновых функций.

§ 5.2. Уравнение Дирака

В случае частиц со спином $1/2$ простейшее поле $\psi(x)$, обладающее инвариантной плотностью (5), будет преобразовываться по приводимому представлению $(1/2, 0) + (0, 1/2)$ группы Лоренца.

Двухкомпонентное спинорное поле $\varphi(x)$, преобразующееся по представлению $(1/2, 0)$, было изучено ранее, в § 4.4:

$$U(0, A)\varphi_\sigma(x)U^{-1}(0, A) = \sum_{\sigma'} A_{\sigma\sigma'}^{-1} \varphi_{\sigma'}(\Lambda(A)x).$$

Из поля $\varphi(x)$ нельзя образовать инвариантной билинейной эрмитовой формы типа (5) с коэффициентами, не зависящими от импульса, так как не существует 2×2 -матрицы \bar{g} со свойством $\bar{g}A\bar{g}^{-1} = A^{-1+}$. Поэтому условие (6) может быть выполнено тогда, когда число компонент поля удваивается вследствие перехода к приводимому представлению $(1/2, 0) + (0, 1/2)$ и \bar{g} описывается 4×4 -матрицей. Мы должны, следовательно, наряду с полем $\varphi(x)$ рассматривать также поле $\chi(x)$, преобразующееся с помощью матрицы A^+ :

$$U(0, A)\chi_\sigma(x)U^{-1}(0, A) = \sum_{\sigma'} A_{\sigma\sigma'}^+ \chi_{\sigma'}(\Lambda(A)x).$$

Если теперь перейти к четырехкомпонентному (биспинорному) полю $\psi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$):

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

то оно будет преобразовываться по представлению $(1/2, 0) + (0, 1/2)$:

$$U(0, A)\psi(x)U^{-1}(0, A) = S(A^{-1})\psi(\Lambda(A)x), \quad (18)$$

где матрица $S(A)$ есть

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1+} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Введем матрицы 4×4 :

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

где, как и в (19), каждая цифра обозначает матрицу 2×2 . Матрица γ_5 отличает представления $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$, а матрица γ_4 переставляет их. Следовательно, матрица γ_4 заменяет матрицу $S(A)$ на эрмитово сопряженную к обратной $S^{-1+}(A)$:

$$\gamma_4 S(A) \gamma_4 = S(A^{-1+}) = S^{-1+}(A). \quad (21)$$

При этом сопряженный биспинор $\bar{\psi} = \psi^+(x)\gamma_4$ преобразуется по правилу

$$U(0, A) \bar{\psi}(x) U^{-1}(0, A) = \bar{\psi}(\Lambda(A)x) S(A) \quad (22)$$

и билинейные эрмитовы формы

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) = \psi^+(x) \gamma_4 \psi(x), \quad i \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \quad (23)$$

инвариантны в смысле (5) с $\bar{g} = \gamma_4$, $i\gamma_4\gamma_5$.

Поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ можно разложить по операторам рождения и поглощения частицы и античастицы:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{2p_0} \{ u_\alpha(p, \sigma) a(p, \sigma) e^{-ipx} + \\ + v_\alpha(p, \sigma) b^\dagger(p, \sigma) e^{ipx} \}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{2p_0} \{ \bar{u}^\alpha(p, \sigma) a^\dagger(p, \sigma) e^{ipx} + \\ + \bar{v}^\alpha(p, \sigma) b(p, \sigma) e^{-ipx} \}. \end{aligned}$$

Этими разложениями мы ввели новые величины $u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)$ — четырехкомпонентные волновые функции.

Рассмотрим сначала u_α . Эта волновая функция определяется выражением (8), или же в нашем случае

$$u_\beta(\mathbf{p}, \sigma) = S_\beta^{\beta'}(\alpha(\mathbf{p})) u_{\beta'}(0, \sigma). \quad (25)$$

Волновая функция в состоянии покоя $u_\beta(0, \sigma)$ характеризуется проекцией спина σ . Она обладает вдвое большим числом компонент, чем это необходимо для описания спина $1/2$. Верхние и нижние компоненты $u(0, \sigma)$ (при диагональном γ_5) преобразуются одинаково при вращениях R , ибо $R = R^{-1+}$. Поэтому, выбрав $\xi(\sigma)$ в качестве независимой двухкомпонентной функции, мы можем записать $u(0, \sigma)$ в виде

$$u(0, \sigma) = \begin{pmatrix} \xi(\sigma) \\ \pm \xi(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Обычная дираковская функция получается при выборе знака $+$, если подчинить $u_\beta(0, \sigma)$ дополнительному условию

$$\gamma_4 u(0, \sigma) = u(0, \sigma), \quad (26)$$

исключающему две излишние компоненты $u(0, \sigma)$. Как мы увидим ниже, выбор собственного значения $\gamma_4 = -1$ приводит к функции $v(\mathbf{p}, \sigma)$.

Найдем уравнение типа (14), решением которого служит u . Для этого мы подставим в (26) выражение $u(0, \sigma) = S^{-1}(\alpha) u(\mathbf{p}, \sigma)$ из (25):

$$\begin{aligned} S(\alpha) (\gamma_4 - 1) S^{-1}(\alpha) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_4 \alpha \alpha^+ + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \gamma_4 (\alpha \alpha^+)^{-1} - 1 \right\} u(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \end{aligned}$$

Но двухрядная матрица $\alpha(\mathbf{p}) \alpha^+(\mathbf{p})$ есть не что иное, как матрица импульсов $\mathbf{p}/m = (1/m)(\sigma_0 p^0 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})$. Поэтому, если мы перейдем к обозначениям посредством γ -матриц ($\gamma^0 = \gamma_0 \equiv \gamma_4$):

$$\gamma^k = \gamma_4 \gamma_5 \sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (27)$$

то это соотношение принимает вид уравнения Дирака в импульсном пространстве:

$$(\hat{\mathbf{p}} - m) u \equiv (\gamma_4 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - m) u = 0. \quad (28)$$

Таким образом, условие (26), выделяющее из четырехкомпонентной величины физическую двухкомпонентную функцию, равносильно уравнению Дирака.

Сопряженный биспинор $\bar{u} = u^* \gamma_4$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u} (\hat{p} - m) = 0.$$

Если бы мы ограничились двухкомпонентным полем $\varphi(x)$ (или $\chi(x)$), то ковариантного уравнения нельзя было бы написать. Действительно, двухрядная матрица импульсов p , с помощью которой можно было бы пытаться составить уравнение для $\varphi(p) = = 1/2(1 + \gamma_5)u(p)$, преобразуется как $p' = ApA^+$, так что трансформационные свойства $p\varphi$ и $m\varphi$ не совпадают. Только при $m=0$ возможно ковариантное уравнение: в этом случае уравнение Дирака распадается на отдельные уравнения (ср. уравнение Вейля (4.119)) для компонент $v = 1/2(1 + \gamma_5)\psi$ и $\tilde{v} = 1/2(1 - \gamma_5)\psi$. Функции v и \tilde{v} , разумеется, двухкомпонентны только в таком представлении γ -матриц, где диагонально γ_5 .

Явное выражение для дираковской функции $u(p, \sigma)$ находится подстановкой в (25) конкретного выражения для $\alpha(p)$ (при условии (26)). Например, в каноническом базисе, где α дается формулой (4.24), мы имеем

$$\begin{aligned} u(p, \sigma) &= \begin{pmatrix} \alpha(p) \xi(\sigma) \\ \alpha^{-1}(p) \xi(\sigma) \end{pmatrix} \sqrt{m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 + m)^{-1/2} \begin{pmatrix} (m + p^0 + (\sigma p)) \xi(\sigma) \\ (m + p^0 - (\sigma p)) \xi(\sigma) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\xi(\sigma)$ — нормированная спиновая волновая функция в состоянии покоя, компоненты $\sigma = \pm 1/2$, которой отличаются по собственным значениям проекции спина $1/2 \sigma_3$, так что

$$\xi_{\sigma'}(\sigma) = \delta_{\sigma'\sigma}, \quad \sigma, \sigma' = \pm 1/2.$$

Волновые функции (25) и (29) ортонормированы согласно

$$\bar{u}(p, \sigma') u(p, \sigma) \equiv \bar{u}^\beta(p, \sigma') u_\beta(p, \sigma) = 2m \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (30)$$

$$u^*(p, \sigma') u(p, \sigma) = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Часто используется другое выражение для u , которое соответствует представлению γ -матриц с диагональной γ_4 . Диагоналируя

γ_4 с помощью унитарного преобразования $\exp(\gamma_5 \gamma_4 \pi/4)$, мы получаем

$$u(p, \sigma) = (m + p_0)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi(\sigma) \\ \frac{\sigma p}{m + p_0} \xi(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Уравнение (28) для волновой функции $u(p, \sigma)$ позволяет написать на основе (24) уравнение для той части поля $\psi(x)$, которая содержит эту функцию. Но уравнение для $\psi(x)$ должно быть одинаково как для части с операторами рождения, так и для части с операторами поглощения. Следовательно, $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (32)$$

а сопряженное поле $\bar{\psi}(x)$ — уравнению

$$(i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m\bar{\psi}(x)) = 0.$$

Обратимся теперь к изучению входящей в поле $\psi(x)$ волновой функции $v(p, \sigma)$. Ее явный вид может быть найден из того же выражения (8), так как операторы

$$u_\beta(p) = \sum_\sigma u_\beta(p, \sigma) a(p, \sigma) \quad \text{и} \quad v_\beta(p) = \sum_\sigma v_\beta(p, \sigma) b^\dagger(p, \sigma) \quad (33)$$

обладают одинаковыми трансформационными свойствами относительно однородного преобразования Лоренца. Тогда

$$v_\beta(p, \sigma) = S_\beta^{\beta'}(\alpha(p)) v_{\beta'}(0, \sigma). \quad (34)$$

Из выражения (24) для поля $\psi(x)$ и уравнения Дирака (32) явствует, что $v(p, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p} + m) v(p, \sigma) = 0. \quad (35)$$

Если проследить в обратном порядке вывод уравнения (28) для $u(p, \sigma)$, то нетрудно найти то условие на $v(0, \sigma)$ (выделяющее физические компоненты), которое равносильно уравнению (35). Это условие имеет вид

$$\gamma_4 v(0, \sigma) = -v(0, \sigma), \quad (36)$$

т. е. $v(0, \sigma)$ должно принадлежать другому собственному значению γ_4 , нежели $u(0, \sigma)$. Если не обращаться к уравнению Дирака (32), но потребовать, чтобы были независимы функции $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$

для состояния покоя, то из условия (26) однозначно будет вытекать условие (36). Очевидно, что функции u и v ортогональны:

$$\bar{u}^\alpha(\mathbf{p}, \sigma) v_\alpha(\mathbf{p}, \sigma') = \bar{u}^\alpha(0, \sigma) v_\alpha(0, \sigma') = 0. \quad (37)$$

Выражение (34) для $v(\mathbf{p}, \sigma)$ можно теперь записать в виде

$$v(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{p}) C \xi^*(\sigma) \\ -\alpha^{-1+}(\mathbf{p}) C \xi^*(\sigma) \end{pmatrix} \sqrt{m}, \quad (38)$$

где $C = -i\sigma_2$, а спиновые функции $\xi(\sigma)$ те же, что и в (29). В (38) предполагается, что функция $v(\mathbf{p}, \sigma)$ нормирована согласно

$$\begin{aligned} \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) v(\mathbf{p}, \sigma') &= -2m \delta_{\sigma\sigma'}, \\ v^+(\mathbf{p}, \sigma) v(\mathbf{p}, \sigma') &= 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \quad (39)$$

Функции u и v называют иногда дираковскими волновыми функциями для состояний соответственно с положительной и отрицательной энергией.

Трансформационные свойства волновых функций. Мы рассматривали до сих пор правила преобразования векторов состояния или операторов поля, построенных линейно из операторов рождения и поглощения. Обратимся к преобразованиям волновых функций.

Оператор $u(\mathbf{p})$, в который входит волновая функция $u(\mathbf{p}, \sigma)$ (формула (33)), преобразуется согласно общей формуле (10), или же в случае биспинора

$$U(0, A)u(\mathbf{p})U^{-1}(0, A) = S(A^{-1})u(\mathbf{p}'). \quad (40)$$

Определим преобразованную функцию $u'(\mathbf{p}, \sigma)$ равенством

$$U(0, A)u(\mathbf{p})U^{-1}(0, A) = \sum_{\sigma'} u'(\mathbf{p}, \sigma') a(\mathbf{p}', \sigma') \quad (41)$$

и вычислим матричный элемент от обеих частей формулы (40) между вакуумом $|0\rangle$ и одночастичным состоянием $|\mathbf{p}', \sigma; a\rangle = |a^+(\mathbf{p}', \sigma)|0\rangle$. Мы имеем

$$u'_\beta(\mathbf{p}, \sigma) 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = S_\beta^\gamma(A^{-1}) u_\gamma(\mathbf{p}', \sigma) 2p_0' \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}').$$

Так как $2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ инвариантно относительно лоренцевых преобразований, то мы находим отсюда выражение для $u'_\beta(\mathbf{p}, \sigma)$:

$$u'_\beta(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (U(0, A)u)_\beta(\mathbf{p}, \sigma) = S_\beta^\gamma(A^{-1}) u_\gamma(\mathbf{p}', \sigma). \quad (42)$$

Это есть правило преобразования волновой функции $u(\mathbf{p}, \sigma)$. Другая удобная форма (42) есть

$$u_{\beta'}(\mathbf{p}', \sigma) = S_{\beta'}^{\gamma}(A) u_{\gamma}(\mathbf{p}, \sigma).$$

При таком определении u' будут инвариантны билинейные эрмитовы величины

$$\begin{aligned} \bar{u}'(\mathbf{p}', \sigma) u'(\mathbf{p}', \sigma) &= \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) u(\mathbf{p}, \sigma), \\ \bar{u}'(\mathbf{p}', \sigma) \gamma_5 u'(\mathbf{p}', \sigma) &= \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \gamma_5 u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned}$$

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x^{\nu}$ и найдем из (42) генераторы $M_{\mu\nu}$ для дираковских функций. Этому преобразованию соответствует матрица

$$A = 1 - i \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \frac{1}{2} \sigma_l \omega^{ik} - \frac{1}{2} \sigma_i \omega^{0i}. \quad (43)$$

Если вычислить $S(A)$ по (19) и (27), то мы получим

$$S(A) = 1 - i \frac{1}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}, \quad (44)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = i \frac{1}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \quad (45)$$

В случае инфинитезимального преобразования (43) левая часть (42) выражается через генераторы $M_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$u_{\beta'}(\mathbf{p}, \sigma) = \left(1 + i \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right)_{\beta}^{\gamma} u_{\gamma}(\mathbf{p}, \sigma).$$

Следовательно, генераторы $M_{\mu\nu}$ в случае дираковских функций $u(\mathbf{p}, \sigma)$ имеют вид

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{i} \left(p_{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\nu}} - p_{\nu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \right), \quad (46)$$

т. е. $\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}$ может быть названо спиновой частью $M_{\mu\nu}$.

Перестановочные соотношения между матрицами $\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}$ и γ_{λ} те же, что и между генераторами $M_{\mu\nu}$ и P_{λ} :

$$\begin{aligned} [\gamma_{\lambda}, \sigma_{\mu\nu}] &= 2i (g_{\lambda\mu} \gamma_{\nu} - g_{\lambda\nu} \gamma_{\mu}), \\ [\sigma_{\rho\lambda}, \sigma_{\mu\nu}] &= 2i (g_{\rho\nu} \sigma_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu} \sigma_{\rho\nu} - g_{\rho\mu} \sigma_{\lambda\nu} - g_{\lambda\nu} \sigma_{\rho\mu}). \end{aligned} \quad (47)$$

Следовательно, в линейном преобразовании матриц γ^μ :

$$\gamma'^\mu = S(A)\gamma^\mu S^{-1}(A) = \Lambda_{\nu}^{\mu}(A)\gamma^\nu, \quad (48)$$

коэффициенты совпадают с коэффициентами лоренцева преобразования вектора $\Lambda_{\nu}^{\mu}(A)$. Это означает, что матрица \hat{p} не изменяется, если одновременно с лоренцевым преобразованием импульсов $p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu}(A)p^\nu$ производится замена матриц γ^μ на γ'^μ по (48):

$$\gamma'^\mu p'_\mu = \gamma^\mu p_\mu = \hat{p}.$$

Мы можем заключить отсюда, что уравнение Дирака инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p'_\mu - m) u'(p', \sigma) &= (\gamma^\mu p'_\mu - m) S^{-1} u(p, \sigma) = \\ &= S^{-1} S (\gamma^\mu p_\mu - m) S^{-1} u(p, \sigma) = S^{-1} (\gamma^\mu p_\mu - m) u(p, \sigma) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку (согласно (48)) индекс μ у матриц γ^μ можно считать векторным, то легко определяются трансформационные свойства произведений матриц $\gamma^\mu \gamma^\nu \dots$, если эти матрицы стоят между дираковскими функциями. Величины $\bar{u}u$, $\bar{u}\gamma_\mu u$, $\bar{u}\sigma_{\mu\nu} u$ являются соответственно скаляром, вектором, тензором, и, как мы убедимся ниже, величины $\bar{u}\gamma_5 u$ и $i\bar{u}\gamma_5 \gamma_\mu u$ — это псевдоскаляр и псевдовектор.

С помощью генераторов $M_{\mu\nu}$ можно написать выражение для ковариантного оператора спина. Согласно (1.50) он определяется как

$$J_l = -\frac{1}{m} \omega_\mu n_{(l)}^\mu, \quad \omega_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} p^\sigma,$$

где

$$n_{(l)}^\mu n_{(k)}^\nu g_{\mu\nu} = -\delta_{lk}, \quad p_\mu n_{(k)}^\mu = 0.$$

Подставляя (46) в выражение для J_l , мы находим

$$J_l = -\frac{1}{2m} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \sigma^{\mu\nu} p^\rho n_{(l)}^\lambda = -\frac{i}{2m} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} n_{(l)}^\mu p^\nu. \quad (49)$$

В состоянии покоя $p = 0$, $n_0 = 0$ и проекция спина J_l есть

$$J_l = -i \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma_{k0} = -\frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_4 \gamma_k n_{(l)}^k = \frac{1}{2} \Sigma n_{(l)}.$$

Здесь под матрицей Σ_k подразумевается матрица $\sigma_k \times \mathbf{1}$, которая в представлении γ -матриц (20), (27) имеет 2×2 -матрицу σ_k в качестве обоих диагональных блоков.

Полнота системы дираковских функций и операторы проектирования. Дираковские функции $u(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v(\mathbf{p}, \sigma)$ образуют при заданном импульсе \mathbf{p} полную систему четырехкомпонентных функций. Это обстоятельство явствует из того, что свойством полноты обладает система четырех независимых функций $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$, $\sigma = \pm 1/2$, в состоянии покоя ($\mathbf{p} = 0$). Функции $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$ отличаются по собственным значениям матрицы γ_4 и могут быть выделены операторами проектирования

$$\Lambda_{\pm}(0) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_4),$$

$$\Lambda_+(0) u(0, \sigma) = u(0, \sigma).$$

Состояния с проекцией спина $\sigma = \pm 1/2$ на направление \mathbf{n} могут быть выделены оператором проектирования

$$\Lambda(0, \pm 1/2) = \frac{1}{2} (1 \pm \Sigma \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \gamma_4 \gamma \mathbf{n}).$$

Выберем такое представление γ -матриц, в котором γ_4 и $\Sigma \mathbf{n}$ диагональны:

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда функции u и v примут вид

$$\begin{aligned} u_{\beta}(0, 1/2) &= \sqrt{2m} \delta_{\beta 1}, & v_{\beta}(0, 1/2) &= \sqrt{2m} \delta_{\beta 3}, \\ u_{\beta}(0, -1/2) &= \sqrt{2m} \delta_{\beta 2}, & v_{\beta}(0, -1/2) &= \sqrt{2m} \delta_{\beta 4}. \end{aligned} \quad (50)$$

Условия нормировки и ортогональности (30), (37), (39) выполняются автоматически, а операторы проектирования $\Lambda_{\pm}(0, \sigma)$ равны

$$\Lambda_{+\beta}{}^{\gamma}(0, 1/2) = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \Sigma \mathbf{n}) \frac{1}{2} (1 + \gamma_4) \right\}_{\beta}{}^{\gamma} = \frac{1}{2m} u_{\beta}(0, 1/2) \bar{u}^{\gamma}(0, 1/2),$$

$$\Lambda_{+\beta}{}^{\gamma}(0) = (\Lambda_+(0, 1/2) + \Lambda_+(0, -1/2))_{\beta}{}^{\gamma} = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma} u_{\beta}(0, \sigma) \bar{u}^{\gamma}(0, \sigma),$$

$$\Lambda_{-\beta}{}^{\gamma}(0) = -\frac{1}{2m} \sum_{\sigma} v_{\beta}(0, \sigma) \bar{v}^{\gamma}(0, \sigma).$$

Из явного вида системы функций $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$ непосредственно вытекает ее полнота. Единичная 4×4 -матрица есть

$$\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma} \{u_{\beta}(0, \sigma) \bar{u}_{\gamma}(0, \sigma) - v_{\beta}(0, \sigma) \bar{v}_{\gamma}(0, \sigma)\} = [\Lambda_{+}(0) + \Lambda_{-}(0)]_{\beta\gamma}.$$

Чтобы перейти к случаю произвольного импульса, можно воспользоваться соотношениями (25) и (34), согласно которым все выражения для $p = 0$ следует подвергнуть преобразованию $S(\alpha)$:

$$\Lambda_{\pm}(p) = S(\alpha(p)) \Lambda_{\pm}(0) S^{-1}(\alpha(p)) = \frac{m \pm \hat{p}}{2m}. \quad (51)$$

Условие полноты теперь имеет вид

$$\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma} \{u_{\beta}(p, \sigma) \bar{u}_{\gamma}(p, \sigma) - v_{\beta}(p, \sigma) \bar{v}_{\gamma}(p, \sigma)\}. \quad (52)$$

Преобразовывая оператор проектирования $\Lambda_{+}(0, 1/2)$ к состоянию с импульсом p , мы находим

$$\begin{aligned} \Lambda_{+}(p, 1/2) &= S(\alpha(p)) \Lambda_{+}(0, 1/2) S^{-1}(\alpha(p)) = \\ &= \frac{1}{4m} \left(1 + \gamma_5 \hat{n} \frac{\hat{p}}{m} \right) (\hat{p} + m) = \frac{1}{4m} (1 + \gamma_5 \hat{n}) (\hat{p} + m). \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь вектор n^{μ} удовлетворяет тем же условиям, что и в (49). Так как n и p ортогональны, матрицы \hat{n} и \hat{p} коммутируют. Таким образом, при $p \neq 0$ каждая из функций $u(p, \sigma)$ и $v(p, \sigma)$ является собственной функцией операторов \hat{p}/m и $\gamma_5 \hat{n}$, собственные значения которых равны ± 1 .

Условия нормировки волновых функций (30) и (39) взаимосвязаны с выражением (24) для поля $\psi(x)$ и перестановочными соотношениями между операторами рождения и поглощения:

$$\{a(p, \sigma), a^{\dagger}(p', \sigma')\} = 2\rho_0 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(p - p').$$

В итоге коммутатор полей $\psi(x)$ и $\psi^{\dagger}(y)$ при одинаковых временах записывается в обычном виде:

$$\delta(x_0 - y_0) \{\psi_{\alpha}(x), \psi^{\dagger\beta}(y)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^4(x - y). \quad (54)$$

При вычислении (54) следует воспользоваться выражениями (51) для операторов проектирования,

Свойства дираковских матриц. Матрицы γ^μ и $\sigma^{\lambda\nu}$ являются примерами 4×4 -матриц, действующих на дираковские функции u и v . Изучим свойства 4×4 -матриц. В случае 4×4 -матриц имеется 16 независимых матриц γ^R , которые будут выбраны так, чтобы величина $\bar{u}\gamma^R u$ была вещественной:

$$\gamma^R = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \sigma_5^\mu = \gamma^\mu \gamma_5, i\gamma_5\}. \quad (55)$$

Матрицы γ^R ортонормированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma^R \gamma^{R'}) &= 0, & R \neq R', \\ \text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= -\text{Sp}(\sigma_5^\mu \sigma_5^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \\ \text{Sp}(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\sigma}) &= 4(g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda} g^{\mu\sigma}), \\ \text{Sp} \gamma_5^2 &= 4. \end{aligned} \quad (56)$$

Произвольная 4×4 -матрица O может быть разложена по полной системе γ^R :

$$O = \sum_{R=1}^{16} O_R \gamma^R, \quad O_R = \frac{\text{Sp}(O\gamma^R)}{\text{Sp} \gamma^R}. \quad (57)$$

Условие эрмитовости для O имеет вид

$$O^\dagger = \gamma_4 O \gamma_4, \quad (58)$$

что в силу (55) сводится к вещественности O_R .

Матрицы γ^R в (55) представляют собой не что иное, как матрицы γ^μ и их произведения вплоть до четырех сомножителей, ибо

$$\gamma_5 = -i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

В наборе (55) матрицы γ^R классифицируются по их трансформационным свойствам. Конкретный вид матриц γ^R зависит от того, какие из них выбираются диагональными.

Удобно иметь набор фиксированных базисных (эрмитовых) матриц Γ_R . Эти матрицы можно выразить посредством прямого произведения двух систем матриц Паули σ_k и ρ_l , а также единичных матриц σ_0 и ρ_0 :

$$\Gamma_{00} = \rho_0 \times \sigma_0, \quad \Gamma_{0k} = \rho_0 \times \sigma_k, \quad \Gamma_{l0} = \rho_l \times \sigma_0, \quad \Gamma_{lk} = \rho_l \times \sigma_k. \quad (59)$$

Среди 16 матриц Γ_R шесть матриц антисимметричны: Γ_{02} , Γ_{20} , Γ_{12} , Γ_{21} , Γ_{23} , Γ_{32} ; остальные матрицы симметричны.

Лоренцево преобразование $S(A)$ распадается на два блока (19) в таком представлении, в котором

$$\gamma_5 = \rho_3 \times \sigma_0, \quad \gamma_4 = \rho_1 \times \sigma_0, \quad \gamma^k = -i\rho_2 \times \sigma_k. \quad (60)$$

Именно матрицы (60) были использованы ранее (см. (20) и (27)) при введении четырехкомпонентного поля $\psi(x)$. Волновые функции $u(\rho, \sigma)$ и $v(\rho, \sigma)$ даются формулами (29) и (38).

В стандартном дираковском представлении γ -матриц

$$\gamma_5 = \rho_1 \times \sigma_0, \quad \gamma_4 = \rho_3 \times \sigma_0, \quad \gamma^k = -i\rho_2 \times \sigma_k. \quad (61)$$

Волновая функция при этом имеет вид (31).

В представлении Майорана

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= -\rho_2 \times \sigma_3, & \gamma^1 &= \rho_3 \times \sigma_0, & \gamma^2 &= \rho_2 \times \sigma_2, \\ \gamma^3 &= -\rho_1 \times \sigma_0, & \gamma_4 &= \rho_2 \times \sigma_1. \end{aligned} \quad (62)$$

Любые два набора 4×4 -матриц γ^μ , подчиненных условию $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, связаны соотношением подобия

$$\gamma'^\mu = X\gamma^\mu X^{-1}, \quad (63)$$

где X — некоторая 4×4 -матрица. Если, кроме того, наложено условие $\gamma^0 = \gamma_4 = \gamma_4^+$, $\gamma^j = -\gamma^{j+}$, которое сохраняется при преобразовании (63), то X — унитарная матрица. Мы будем считать, что условие $\gamma_4 = \gamma_4^+$, $\gamma^j = -\gamma^{j+}$ всегда выполнено.

Обратимся к свойствам симметрии матриц γ^R . Симметрия матриц γ^R зависит от представления, так как они, подобно лоренцевой матрице $S_{\beta\gamma}(A)$, имеют смешанные индексы.

Введем специальные матрицы $\mathcal{C}^{-1\beta\gamma}$ и $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$, обладающие соответственно только верхними и только нижними индексами, с помощью которых можно поднимать или опускать спинорные индексы:

$$u^\beta = \mathcal{C}^{-1\beta\gamma} u_\gamma, \quad w_\beta = \mathcal{C}_{\beta\gamma} w^\gamma.$$

Такое обозначение подразумевает, что билинейные комбинации $\mathcal{C}^{-1\beta\gamma} u_\beta w_\gamma$ инвариантны относительно преобразования $u'_\alpha = S_\alpha^\beta u_\beta$, $w'_\gamma = S_\gamma^\rho w_\rho$. Это накладывает на \mathcal{C} условие

$$\mathcal{C}^{-1} S = (\mathcal{C} S^\tau)^{-1},$$

которое выполняется, если

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma_\mu \mathcal{C} = \pm \gamma_\mu^\tau. \quad (64)$$

Пусть $S(A)$ записано в квазидиагональном виде (19). Тогда существует два оператора

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_2 = \gamma_5 \mathcal{C}_1,$$

где C — 2×2 -матрица (3.5) спинорной группы, с помощью которой можно выполнить (64). Матрица C обладает тем свойством, что $A = C^{-1} A^{-1\tau} C$.

Оба оператора $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ антисимметричны и унитарны:

$$\mathcal{C}^+ \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{C}^+ = 1, \quad \mathcal{C}^\tau = -\mathcal{C}. \quad (65)$$

Это свойство симметрии матрицы \mathcal{C} сохраняется при переходе к другим наборам матриц γ^μ с помощью унитарного преобразования (63); при этом \mathcal{C} превращается в

$$\mathcal{C}' = X \mathcal{C} X^\tau,$$

а условие (64) выполняется для новых γ'^μ и \mathcal{C}' .

Матрица \mathcal{C}_1 не меняет собственных значений γ_4 и \hat{p} , матрица \mathcal{C}_2 изменяет их знак. Следовательно, \mathcal{C}_2 может связывать функции $u(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v(\mathbf{p}, \sigma')$: $\mathcal{C}_2^{-1} \hat{p} \mathcal{C}_2 = -\hat{p}^\tau$. Составим из некоторых операторов $u_\alpha(\mathbf{p}), w_\beta(\mathbf{p})$ типа (33), обладающих одинаковыми свойствами относительно лоренцевых преобразований, билинейную форму $\mathcal{C}^{-1 \alpha\beta} u_\alpha(\mathbf{p}) w_\beta(\mathbf{p})$. Эта форма будет инвариантна и относительно смещений только при $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$. Поэтому целесообразно выбрать \mathcal{C}_2 в качестве метрической матрицы \mathcal{C} . Таким образом,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Теперь можно сформулировать свойства симметрии матриц γ^R . Вследствие (64) — (66) матрицы

$$\gamma^\mu \mathcal{C}, \quad \sigma^{\mu\nu} \mathcal{C}$$

симметричны, а матрицы

$$\mathcal{C}, \quad \gamma_5 \gamma^\mu \mathcal{C}, \quad \gamma_5 \mathcal{C}$$

антисимметричны.

Связь между функциями u и v , относящимися к решениям с положительной и отрицательной энергией, имеет вид

$$\bar{u}^\beta = \mathcal{C}^{-1\beta\gamma} v_\gamma. \quad (67)$$

Соотношение (67) может быть проверено обращением к явному виду функций u, v и матрицы \mathcal{C} .

Приведем также выражение для матрицы \mathcal{C} для случая (61):

$$\mathcal{C} = i\rho_1 \times \sigma_2. \quad (6)$$

В представлении Майорана (62) матрица \mathcal{G} есть

$$\mathcal{G} = i\rho_2 \times \sigma_1 = i\gamma_4. \quad (69)$$

Перечислим также некоторые коммутаторы и антикоммутаторы, содержащие матрицы γ^R :

$$\begin{aligned} [\gamma_\lambda, \sigma_{\mu\nu}]_+ &= -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \sigma_\rho^0, \\ [\sigma_{\rho\lambda}, \sigma_{\mu\nu}]_+ &= 2(g_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu}) - 2i\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \gamma_5, \\ [i\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}]_+ &= i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \sigma^{\rho\lambda}, \\ [\sigma_{\rho 5}, \sigma_{\mu\nu}]_- &= i(g_{\rho\mu} \sigma_{\nu 5} - g_{\rho\nu} \sigma_{\mu 5}). \end{aligned} \quad (70)$$

Вместе с соотношениями (27) и (47) равенства (70) дают правила умножения любых двух матриц γ^R .

Случай $m = 0$ и эрмитовы поля. В заключение параграфа остановимся кратко на описании частиц нулевой массы с помощью эрмитова биспинорного поля $\eta(x) = \eta^+(x)$.

Пусть $\psi(x)$ — неэрмитово поле с $m = 0$. В представлении (27) матриц γ^μ с диагональным γ_5 это поле, согласно (19), можно разбить на части

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad (71)$$

которые преобразуются отдельно (и различно) при преобразованиях Лоренца. Уравнение Дирака (32) при этом принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_0 + \sigma\partial \\ \partial_0 - \sigma\partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(x) \\ \tilde{\mathbf{v}}(x) \end{pmatrix} = 0$$

и, следовательно, распадается на два отдельных уравнения Вейля — для нейтринного $\mathbf{v}(x)$ и антинейтринного поля $\tilde{\mathbf{v}}(x)$. Эти уравнения были ранее получены в § 4.5.

Вместо неэрмитовых полей $\psi, \bar{\psi}$ иногда рассматриваются эрмитовы поля

$$\eta_1 = \psi + \psi^\dagger, \quad \eta_2 = \frac{1}{i}(\psi - \psi^\dagger), \quad \bar{\eta} = \eta\gamma_4.$$

Чтобы свойство эрмитовости сохранялось при преобразовании Лоренца, должно выполняться равенство

$$\gamma_4 S^{-1}(A) \gamma_4 = S^\tau(A), \quad \text{или} \quad (\gamma_4 \sigma_{\mu\nu} \gamma_4)^\tau = \sigma_{\mu\nu}. \quad (72)$$

Это равенство равносильно условию, чтобы γ_k было симметричной матрицей, а γ_4 — антисимметричной. При этом γ_5 также антисимметрично. Такое представление γ -матриц есть представление Майорана (62). Так как γ_5 не является диагональной матрицей в представлении Майорана, то $S(A)$ также не подразделяется на блоки 2×2 , и релятивистская инвариантность требует, чтобы эрмитово поле $\eta(x)$ было по меньшей мере четырехкомпонентным, даже в случае частицы нулевой массы.

Оператор \hat{p} или $\hat{\delta}$ становится вещественным в таком представлении, и, следовательно, уравнение Дирака действительно допускает вещественные функции или эрмитовы поля в качестве решений.

В случае частиц нулевой массы возможно релятивистски инвариантное выделение неэрмитовых полей, описывающих, например, нейтрино $\nu(x)$ и антинейтрино $\tilde{\nu}(x)$, из одного общего эрмитова поля типа $\eta_1(x)$ или $\eta_2(x)$. Действительно, в силу (71) поля $\nu(x)$ и $\tilde{\nu}(x)$ удовлетворяют релятивистски инвариантным условиям

$$\gamma_5 \nu(x) = \nu(x), \quad \gamma_5 \tilde{\nu}(x) = -\tilde{\nu}(x).$$

Эти условия, разумеется, не зависят от выбора представления для матриц γ^μ . Поэтому, если $\eta(x)$ ($= \eta_1(x)$) есть общее эрмитово нейтринное поле, то собственно нейтринное поле $\nu(x)$ и поле античастиц $\tilde{\nu}(x)$ выделяются из $\eta(x)$ проектированием по γ_5 :

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \eta(x), \\ \tilde{\nu}(x) &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \eta(x) = \nu^+(x). \end{aligned} \tag{73}$$

Можно убедиться и прямым путем, что в представлении Майорана $\tilde{\nu}(x) = \nu^+(x)$. В этом представлении матрица γ_5 антисимметрична и эрмитова. Следовательно, если мы рассмотрим условие, эрмитово сопряженное к условию $\gamma_5 \nu(x) = \nu(x)$, то получим равенство $\gamma_5 \nu^+(x) = -\nu^+(x)$, определяющее поле антинейтрино $\tilde{\nu}(x)$.

§ 5.3. 2(2J + 1)-компонентные функции для спина J

В § 3.3 были построены спинорные функции, преобразующиеся по $(J, 0)$ -представлению группы Лоренца. Чтобы получить возможность построения билинейных эрмитовых инвариантов, мы должны, в соответствии с соображениями § 5.2, удвоить пространство функции, включив в него также величины, преобразующиеся по

представлению $(0, J)$. В предыдущем параграфе на примере уравнения Дирака и его решений были прослежены этапы перехода от спинорного поля к биспинорному полю. $(2J + 1)$ -компонентные поля вводятся аналогичным образом [54, 55].

Перепишем формулу (4.94) для преобразования спинорного поля $\varphi(x)$ частиц со спином J :

$$U(a, A) \varphi(x) U^{-1}(a, A) = D^J(A^{-1}) \varphi(\Lambda(A)x + a), \quad (74)$$

где D^J — представление $(J, 0)$ спинорной группы (см. 3.3). Наряду с $\varphi(x)$ будем рассматривать также поле $\chi(x)$, преобразующееся по представлению $(0, J)$:

$$U(a, A) \chi(x) U^{-1}(a, A) = D^{J+}(A) \chi(\Lambda(A)x + a), \quad (75)$$

где D^J есть та же матрица, что и в (74).

Составим теперь $2(2J + 1)$ -компонентное поле

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (76)$$

которое согласно (74) и (75) будет преобразовываться как

$$U(a, A) \Psi(x) U^{-1}(a, A) = S(A^{-1}) \Psi(\Lambda x + a),$$

$$S(A) = \begin{pmatrix} D^J(A) & 0 \\ 0 & D^{J+}(A^{-1}) \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Если теперь ввести матрицы

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

где каждая цифра обозначает $(2J + 1)$ -рядную матрицу, то

$$\gamma_4 S^+(A^{-1}) \gamma_4 = S(A). \quad (79)$$

Матрицы S^{-1+} и S эквивалентны. Поэтому, как и в случае поля Дирака, можно определить сопряженное поле $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma_4$, так что

$$U(0, A) \bar{\Psi}(x) \Psi(x) U^{-1}(0, A) = \bar{\Psi}(\Lambda x) \Psi(\Lambda x).$$

Явное выражение для поля $\Psi(x)$ может быть написано сразу же, если заметить, что переход от спина $1/2$ к произвольному J влечет за собой замену вигнеровских операторов $\alpha(\mathbf{p})$ на $D^J(\alpha)$ и $\alpha(\mathbf{p})C^{-1}$

на $D^J(\alpha(\mathbf{p})C^{-1})$. Тогда мы можем представить $\chi(x)$ в виде

$$\chi_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \sum_{\sigma'} \{ D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1+}(\mathbf{p})) a(\mathbf{p}, \sigma') e^{-ipx} + \\ + (-1)^{2J} \eta D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha^{-1+}(\mathbf{p}) C^{-1}) b^+(\mathbf{p}, \sigma') e^{ipx} \}, \quad (80)$$

в то время как для $\varphi(x)$ мы перепишем старое выражение (4.93):

$$\varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \sum_{\sigma'} \{ D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha(\mathbf{p})) a(\mathbf{p}, \sigma') e^{-ipx} + \\ + D_{\sigma\sigma'}^J(\alpha(\mathbf{p}) C^{-1}) b^+(\mathbf{p}, \sigma') e^{ipx} \}. \quad (81)$$

Выражение (80) определено с точностью до фазового множителя η из условия исчезновения перестановки $[\chi(x), \chi^+(y)]_{\pm}$ для пространственноподобных интервалов. Если наложить еще требование, чтобы $[\chi(x), \varphi^+(y)]_{\pm} = 0$ в пространственноподобной области $(x-y)^2 < 0$, то мы получаем

$$[\chi(x), \varphi^+(y)]_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \{ e^{-ip(x-y)} \pm (-1)^{2J} \eta e^{ip(x-y)} \},$$

или же $\eta = 1$.

Поле $\Psi(x)$ подчиняется волновому уравнению

$$(\square - m^2) \Psi(x) = 0.$$

Чтобы получить уравнение движения, заменяющее в этом случае уравнение Дирака, повторим вывод последнего, заменяя $\alpha(\mathbf{p})$ на $D^J(\alpha)$. Волновые функции состояний с положительной энергией

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} D^J(\alpha(\mathbf{p})) & \varphi^J(\sigma) \\ D^J(\alpha^{-1+}(\mathbf{p})) & \varphi^J(\sigma) \end{pmatrix} \quad (82)$$

при $\mathbf{p} = 0$ удовлетворяют условию $(\gamma_4 - 1)u(\mathbf{p}) = 0$. Здесь $\varphi(\sigma) = (2J+1)$ -компонентные спинорные функции. Поскольку $u(\mathbf{p}) = S(\alpha)u(0)$, то, аналогично (22), мы находим $S(\alpha)(\gamma_4 - 1)S^{-1}(\alpha)u(\mathbf{p}) = 0$. Это означает, что $u(\mathbf{p})$ есть решение уравнения

$$\left\{ \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_4 D^J(p^0 \sigma_0 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \gamma_4 D^J(p^0 \sigma_0 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) - m^2 \right\} u(\mathbf{p}) = 0, \quad (83)$$

где были использованы равенства $m\alpha\alpha^+ = p^0\sigma_0 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}$, $D^J(m) = m^{2J}$.

Волновые функции состояний с отрицательной энергией

$$v(p) = \begin{pmatrix} D^J(\alpha(p) C^{-1}) & \varphi^{J*}(\sigma) \\ D^J(\alpha^{-1+}(p) C^{-1})(-1)^{2J} & \varphi^{J*}(\sigma) \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условию $(\gamma_4 - (-1)^{2J})v(0) = 0$. Отсюда вытекает, что $v(p)$ есть решение уравнения

$$\left\{ \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\gamma_4 D^J(p^0\sigma_0 + \sigma p) + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\gamma_4 D^J(p^0\sigma_0 - \sigma p) - (-1)^{2J} m^{2J} \right\} v(p) = 0. \quad (84)$$

Оба уравнения (83) и (84) соответствуют одному и тому же уравнению в координатном пространстве для поля $\Psi(x)$:

$$\begin{pmatrix} -m^{2J} & D^J(i\partial) \\ D^J(i\tilde{\partial}) & -m^{2J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad \partial = \sigma_0 \partial^0 + (\sigma \partial), \quad (85)$$

ибо множитель $(-1)^{2J}$ поглощается при замене $D^J(i\partial)$ на $D^J(-i\partial)$ в силу того, что $D^J(-1) = (-1)^{2J}$.

Таким образом, уравнение Дирака оказывается единственным линейным уравнением типа (85), содержащим производные в первой степени. В общем случае (85) содержит $(i\partial)^{2J}$. Кроме того, только в случае спина $1/2$ волновое уравнение является следствием уравнения Дирака. При $J > 1/2$ из (85) нельзя получить волновое уравнение (82), и оно должно быть постулировано дополнительно.

§ 5.4. Частицы со спином $J=1$

В качестве следующего примера рассмотрим описание частиц со спином 1 с помощью векторного представления $(1/2, 1/2)$ группы Лоренца. Волновая функция векторной частицы есть 4-вектор, который мы обозначим $\varepsilon_\mu(p)$, т. е. индекс r в (8) имеет смысл векторного значка μ , а $L_{rr'}$ представляет собой обычное лоренцево преобразование $\Lambda_\mu^{\nu'}$. Функция преобразования от базиса малой группы при $p=0$ к 4-векторному базису есть $\varepsilon_\mu(0, \sigma)$:

$$\begin{aligned} c_{r\sigma}(1/2, 1/2, J) &= \varepsilon_\mu(0, \sigma), \\ \Lambda_\mu^{\nu'}(\alpha) \varepsilon_\nu(0, \sigma) &= \varepsilon_\mu(p, \sigma), \end{aligned} \quad (86)$$

где, как и ранее, $\Lambda_\mu^{\nu'}(\alpha)$ — это преобразование Лоренца от системы покоя к системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{p}/p_0$.

Величины $\varepsilon_\mu(0, \sigma)$, образующие базис для векторного представления трехмерной группы вращений, легко находятся из соответствия между спинорами и векторами группы вращений (см. (3.49) и (3.62)):

$$\begin{aligned}\varepsilon_\mu(0, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \\ \varepsilon_\mu(0, 0) &= (0, 0, 0, -1), \\ \varepsilon_\mu(0, -1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, i, 0).\end{aligned}\quad (87)$$

Очевидно, что в системе покоя для всех проекций спина нулевая компонента ε_0 равна нулю, или $p^0\varepsilon_0(0, \sigma) = 0$. Ковариантная форма этого равенства может быть записана как

$$p^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \quad (88)$$

При этом предполагается, что импульсы p_μ связаны соотношением $p_\mu p^\mu = m^2$.

Нормировочное условие для ε_μ может быть получено из (86) и (87), ибо оно не зависит от импульса частицы:

$$g^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^+(\mathbf{p}, \sigma) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \sigma') = -\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (89)$$

Явное выражение для $\varepsilon_\mu(\mathbf{p})$ как функции импульса, согласно (86), имеет вид

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{p}) = \varepsilon_\mu(0) - \frac{p_\mu + g_{0\mu} m}{p_0 + m} \frac{\varepsilon(0) p}{m}. \quad (90)$$

Приведем выражение для проектора на состояния со спином 1:

$$X_{\mu\nu} = -\sum_{\sigma} \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \sigma) \varepsilon_\nu^+(\mathbf{p}, \sigma) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (91)$$

Тензор $X_{\mu\nu}$ обладает свойством

$$X_{\mu\nu} X^\nu{}_\sigma = X_{\mu\sigma}, \quad (92)$$

характеризующим его как оператор проецирования; кроме того, выполняется

$$p^\mu X_{\mu\nu} = p^\nu X_{\mu\nu} = 0. \quad (93)$$

Функция $\varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ при преобразовании Лоренца преобразуется по правилу

$$\varepsilon_\mu'(\mathbf{p}) = \Lambda_\mu^\nu \varepsilon_\nu(\Lambda^{-1} \mathbf{p}), \quad (94)$$

откуда можно сразу же найти оператор момента количества движения:

$$(M_{\rho\sigma})_\mu^\nu = -i \left(p_\rho \frac{\partial}{\partial p_\sigma} - p_\sigma \frac{\partial}{\partial p_\rho} \right) \delta_\mu^\nu - i (g_{\mu\rho} \delta^\nu_\sigma - g_{\mu\sigma} \delta^\nu_\rho). \quad (95)$$

Второе слагаемое в (95) дает спиновую часть общего момента; в системе покоя спиновый момент равен пространственной части этой величины:

$$(J_k)_{il} = -i e_{kil}. \quad (96)$$

В общем случае проекция спина на направление n_μ , $n_\mu p^\mu = 0$, $n_\mu n^\mu = -1$, равна $J_n = (1/m) \omega_\mu n^\mu$; ее матричные элементы равны

$$(J_n)_{\sigma\rho} = i \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\nu\sigma\rho} n_\lambda p_\nu. \quad (97)$$

Таким образом, частица со спином 1 может быть описана как в рамках формализма с трехкомпонентными функциями (§ 4.3), так и с помощью 4-векторной функции ε_μ . В последнем случае функция удовлетворяет дополнительному условию (88), гарантирующему отсутствие частиц со спином 0.

Вводя операторы рождения и поглощения частиц $a^+(\mathbf{p}, \sigma)$, $a(\mathbf{p}, \sigma)$ и античастиц и имея в виду, что волновая функция античастицы есть также $\varepsilon_\mu(\mathbf{p})$, можно написать по известному образцу оператор поля:

$$B_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3 p}{2p_0} \{ \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ipx} + \\ + \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \sigma) b^+(\mathbf{p}, \sigma) e^{ipx} \}, \quad (98)$$

где операторы a , a^+ и b , b^+ подчиняются стандартным перестановочным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^+(\mathbf{p}', \sigma')] = [b(\mathbf{p}, \sigma), b^+(\mathbf{p}', \sigma')] = 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (99)$$

Иногда вместо операторов $a(\mathbf{p}, \sigma)$ используются их линейные

комбинации

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a(-1) - a(1)), \quad a_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a(1) + a(-1)), \quad (100)$$

$$a_3 = a(0), \quad a(p, \sigma) \equiv a(\sigma).$$

Тогда выражение для поля принимает вид

$$B_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 p}{2p_0} \varepsilon_\mu(p, \lambda) \{ a_\lambda(p) e^{-ipx} + b_\lambda^+(p) e^{ipx} \}, \quad (101)$$

где векторы $\varepsilon_\mu(0, \lambda)$ имеют компоненты $\varepsilon_\mu(0, \lambda) = -\delta_{\mu\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$).

При преобразовании $\bar{g} = (a, A)$ группы Пуанкаре поле $B_\mu(x)$ преобразуется согласно

$$U(a, A) B_\mu(x) U^{-1}(a, A) = \Lambda_\mu^\nu(A^{-1}) B_\nu(\Lambda x + a), \quad (102)$$

что легко проверяется с помощью выписанных ранее формул.

§ 5.5. Волновые функции Рариты — Швингера

В формализме Рариты—Швингера волновые функции частиц с полуцелым спином $J = j + 1/2$ описываются с помощью функций, преобразующихся как произведение спинора Дирака и тензора ранга j . В случае целочисленного спина J предполагается, что волновые функции имеют трансформационные свойства тензора ранга J [68].

Спин $3/2$. Обратимся сначала к волновым функциям частиц со спином $3/2$. Волновая функция $\psi_{\alpha\mu}(p, \sigma)$ имеет один дираковский индекс α и один 4-векторный μ . Следовательно, в матрице преобразования $c_{r\sigma}(L, J)$ значок L обозначает прямое произведение представлений $L = ((1/2, 0) + (0, 1/2)) \times (1/2, 1/2)$, а $r = (\alpha, \mu)$. Воспользуемся формулой (8). Для построения $\psi_{\alpha\mu}(0, \sigma) = c_{\alpha\mu, \sigma}(L, 3/2)$ привлечем волновую функцию частицы со спином 1 $\varepsilon_\mu(0, \gamma)$ и дираковский спинор в системе покоя $u_\alpha(0, \lambda)$. По правилу сложения угловых моментов

$$c_{\alpha\mu, \sigma}(L, 3/2) = \sum_{\gamma, \lambda} \langle 1/2 \ 1\lambda \gamma | 1/2 \ 1^3/2 \ \sigma \rangle \varepsilon_\mu(0, \gamma) u_\alpha(0, \lambda) \equiv \psi_{\alpha\mu}(0, \sigma). \quad (103)$$

Отсюда, производя преобразование Лоренца от импульса $\hat{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$ к импульсу p^μ , находим

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\mu}(p, \sigma) &= \Lambda_{\mu}^\nu(\alpha) S_\alpha^\beta(\alpha) \psi_{\beta\nu}(0, \sigma) = \\ &= \sum_{\gamma, \lambda} \langle 1/2 \ 1\lambda \gamma | 1/2 \ 1^3/2 \ \sigma \rangle \varepsilon_\mu(p, \gamma) u_\alpha(p, \lambda). \end{aligned} \quad (104)$$

Вид матрицы $\alpha(p)$ определяется выбором канонического или спирального базиса (см. § 4.3).

По построению в $\psi_{\alpha\mu}$ не содержится спина $J = 1/2$. Это значит, что из $\psi_{\alpha\mu}$ нельзя образовать спинора умножением на векторы γ^μ и p^μ . Легко проверить непосредственно, что $\gamma^\mu \psi_\mu(0) = 0$. Переходя к функции $\psi_\mu(p, \sigma)$ по (104) и имея в виду, что согласно (35) γ^μ преобразуется как вектор, находим

$$\gamma^\mu \psi_\mu(p, \sigma) = 0. \quad (105)$$

Из формулы (104) явствует, что в силу $p^\mu \varepsilon_\mu(p, \gamma) = 0$ имеет место равенство

$$p^\mu \psi_{\alpha\mu}(p, \sigma) = 0. \quad (106)$$

Так как дираковский спинор $u(p)$ удовлетворяет уравнению $(\hat{p} - m)u(p) = 0$, то $\psi_{\alpha\mu}$ есть также решение уравнения

$$(\hat{p} - m)_\alpha^\beta \psi_{\beta\mu}(p, \sigma) = 0. \quad (107)$$

Условие (106) не является независимым; оно вытекает из (105) и (107).

Определим сопряженную функцию

$$\bar{\psi}_\mu(p, \sigma) = \psi_\mu^+(p, \sigma) \gamma_4. \quad (108)$$

Тогда условие нормировки запишется в виде

$$\bar{\psi}_\mu^\alpha(p, \sigma) \psi_{\alpha\mu}^\mu(p, \sigma') = -2m\delta_{\sigma\sigma'}; \quad (109)$$

оно выполняется в силу свойств коэффициентов Клебша—Гордана.

Проектор на состояния со спином $3/2$ равен

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= \sum_\sigma \psi_\mu(p, \sigma) \bar{\psi}_\nu(p, \sigma) (2m)^{-1} = \\ &= -\frac{\hat{p} + m}{2m} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{2p_\mu p_\nu}{3m^2} + \frac{p_\mu \gamma_\nu - p_\nu \gamma_\mu}{3m} \right); \quad (110) \end{aligned}$$

при этом $X_{\mu\nu} X^{\nu\lambda} = -X_{\mu\lambda}$.

Таким образом, волновая функция Рариты—Швингера для спина $3/2$ может быть определена как решение уравнения Дирака (107) с дополнительным условием (105).

Спин 2. Волновая функция для частиц со спином 2 строится аналогичным образом. Волновая функция в этом случае описывает

ся тензором второго ранга $\Phi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \gamma)$, где γ есть проекция спина J_3 или спиральность. Волновая функция в состоянии покоя $\Phi_{\mu\nu}(0, \gamma) = c_{\mu\nu, \gamma}(L, 2)$ строится из волновых функций со спином 1 $\varepsilon_\mu(0, \lambda_1)$ и $\varepsilon_\nu(0, \lambda_2)$.

Складывая два спиновых момента в спиновый момент 2, получаем

$$\Phi_{\mu\nu}(0, \nu) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle 11\lambda_1 \lambda_2 | 112\gamma \rangle \varepsilon_\mu(0, \lambda_1) \varepsilon_\nu(0, \lambda_2). \quad (111)$$

По построению эта функция симметрична: $\Phi_{\mu\nu}(0, \gamma) = \Phi_{\nu\mu}(0, \gamma)$.

Переходя к движущейся системе отсчета, находим

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \gamma) &= \Lambda_{\mu}{}^{\mu'}(\alpha) \Lambda_{\nu}{}^{\nu'}(\alpha) \Phi_{\mu'\nu'}(0, \gamma) = \\ &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle 11\lambda_1 \lambda_2 | 112\gamma \rangle \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda_1) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda_2). \end{aligned} \quad (112)$$

Волновая функция не содержит младших спинов ($J = 0$ и $J = 1$), если любые векторы и скаляры, построенные из $\Phi_{\mu\nu}$, p_λ и $g_{\mu\nu}$, обращаются тождественно в нуль. Действительно, по построению

$$p^\mu \Phi_{\mu\nu} = 0 \quad (113)$$

и (легко проверяется для $\mathbf{p} = 0$)

$$g^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} = 0. \quad (114)$$

Уравнением движения в этом случае служит волновое уравнение

$$(p^2 - m^2) \Phi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (115)$$

поскольку в (112) импульс лежит на поверхности масс.

Нормировочное условие имеет вид

$$\Phi_{\mu\nu}^+(\mathbf{p}, \gamma) \Phi^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \gamma') = \delta_{\gamma\gamma'}, \quad (116)$$

что следует из (112) и свойств коэффициентов Клебша—Гордана.

Оператор проецирования на состояния со спином 2 равен

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu, \lambda\rho} &= \sum_{\gamma} \Phi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \gamma) \Phi_{\lambda\rho}^+(\mathbf{p}, \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} X_{\mu\lambda} X_{\nu\rho} + \frac{1}{2} X_{\mu\rho} X_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} X_{\mu\nu} X_{\lambda\rho}, \end{aligned} \quad (117)$$

где $X_{\mu\nu}$ есть проектор (93) на состояния со спином 1.

Полуцелые спины. Обобщение изложенной методики построения волновых функций Рариты—Швингера на случай произвольного

спина не представляет труда. Состояния с полуцелым спином $J = j \pm 1/2$ описывается функцией $\psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_j}(\mathbf{p}, \gamma)$ ($-J \leq \gamma \leq J$), где γ — проекция спина J_z или спиральность. Функция $\psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_j}$ конструируется рекуррентным образом из $\psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_{j-1}}$ и волновой функции ϵ_{μ_j} для спина 1:

$$\psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_j}(\mathbf{p}, \gamma) = \sum_{\lambda, \lambda'} \langle 1j-1\lambda\lambda' | 1j-1j\gamma \rangle \epsilon_{\mu_j}(\mathbf{p}, \lambda') \psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_{j-1}}(\mathbf{p}, \lambda). \quad (118)$$

Младшая функция $\psi_{\alpha\mu}$, описывающая спин $3/2$, нам известна, и потому (118) вполне определено. При $\mathbf{p} = 0$ выражение (118) превращается в $(2J + 1)$ -компонентный базис группы вращений с моментом количества движения J .

По построению $\psi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ симметрично относительно μ_1, \dots, μ_j , поэтому условие

$$\gamma^{\mu_1} \psi_{\mu_1 \dots \mu_j} = 0 \quad (119)$$

выполняется, если оно выполняется для спина $J = 3/2$. Симметрия $\psi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ может быть проверена и непосредственно, если воспользоваться явным выражением для коэффициентов $\langle 1j-1\lambda\lambda' | 1j-1j\gamma \rangle$ при сложении моментов $j-1$ и 1 в максимальный момент j . Тогда выражение (118) для волновой функции приобретает вид

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_j}(\mathbf{p}, \gamma) = & \left[\frac{2^j (j+1/2+\gamma)! (j+1/2-\gamma)!}{(2j+1)!} \right]^{1/2} \times \\ & \times \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_j} [(1+\lambda_1)! (1-\lambda_1)! \dots (1+\lambda_j)! (1-\lambda_j)!]^{-1/2} \times \\ & \times \epsilon_{\mu_1}(\mathbf{p}, \lambda_1) \dots \epsilon_{\mu_j}(\mathbf{p}, \lambda_j) u_{\alpha}(\mathbf{p}, \gamma - \lambda_1 - \dots - \lambda_j). \quad (120) \end{aligned}$$

Волновая функция (118) или (120) удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p} - m) \psi_{\mu_1 \dots \mu_j}(\mathbf{p}) = 0. \quad (121)$$

Как следствие (119) и (121) имеют место соотношения

$$p^{\mu} \psi_{\mu\mu_2 \dots \mu_j}(\mathbf{p}) = 0, \quad (122)$$

$$g^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu \dots \mu_j}(\mathbf{p}) = 0. \quad (123)$$

Если сопряженная функция определена обычным образом: $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$, то нормировочное условие гласит:

$$\bar{\psi}_{\mu_1 \dots \mu_j}^\alpha(p, \gamma) \psi_{\alpha^{\mu_1} \dots \mu_j}(p, \gamma') = (-1)^{J-1/2} \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (124)$$

Оно следует из способа построения (118) и свойств $\varepsilon_\mu(p)$.

Целочисленные спины. В случае целочисленных спинов J в качестве базиса выбирается тензор J -го ранга $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(\sigma, \gamma)$, который также строится рекуррентным образом:

$$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(p, \gamma) = \sum_{\lambda, \lambda'} \langle 1J\lambda\lambda' | 1J-1J\gamma \rangle \varepsilon_{\mu_j}(p, \lambda') \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{j-1}}(p, \lambda). \quad (125)$$

В состоянии покоя ($p = 0$) $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ превращается в $(2J + 1)$ -базис для момента количества движения J . Как и ранее, $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(p)$ получается из $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(0)$ преобразованием Лоренца, задаваемым оператором α , вид которого зависит от смысла квантового числа γ (проекция спина или спиральность):

$$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(p, \gamma) = \Lambda_{\mu_1}^{\mu_1'}(\alpha) \dots \Lambda_{\mu_j}^{\mu_j'}(\alpha) \Phi_{\mu_1' \dots \mu_j'}(0, \gamma). \quad (126)$$

$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ симметрично в индексах μ_1, \dots, μ_j , ибо моменты $j-1$ и 1 складываются в максимальный момент j ($j = 2, 3, \dots, J$). Поэтому условие

$$g^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu \dots \mu_j} = 0 \quad (127)$$

выполняется, если оно выполняется для $J = 2$.

Так как каждый векторный индекс ведет свое происхождение от волновой функции частицы со спином 1, всегда выполняется

$$p^\mu \Phi_{\mu\mu_2 \dots \mu_j}(p) = 0. \quad (128)$$

Условия (127) и (128) являются следствием того, что $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ не содержит младших спинов $J-1, J-2, \dots, 1, 0$. Волновые функции (126) нормированы согласно

$$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}^+(p, \gamma) \Phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(p, \gamma') = (-1)^J \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (129)$$

Как для целых, так и для полуцелых спинов оператор проецирования на состояния со спином J записывается в общем виде как

$$X_{(\mu)}^J(\nu) = \sum_{\gamma=-J}^J \Psi_{(\mu)}(\rho, \gamma) \bar{\Psi}_{(\nu)}(\rho, \gamma), \quad (130)$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma_4$ для полуцелых спинов и $\bar{\Psi} = \Psi^+$ для целочисленных спинов. Очевидно, что вследствие принятой нормировки (124) и (129) имеем

$$(X^J)^2 = \begin{cases} (-1)^J X^J & \text{для целых спинов,} \\ (-1)^{J-1/2} X^J & \text{для полуцелых спинов.} \end{cases}$$

Уравнения для волновых функций частиц с высшими спинами были получены выше как следствие того, что исходная функция (для состояния покоя) описывает частицы с заданным спином. Использование волновых функций (118) и (125) для параметризации матричных элементов представляет существенные удобства ввиду простоты уравнений и их тензорного характера.

§ 5.6. Волновые функции Баргмана — Вигнера

В состоянии покоя, когда спиновый момент количества движения совпадает с полным моментом, волновая функция частицы со спином $J = n/2$ представляет собой симметричный спинор n -го ранга $\varphi_{\sigma_1} \dots \sigma_n$, где σ_r может принимать два значения: $\sigma_r = 1, 2$ или $\sigma_r = \pm 1/2$ (см. § 3.2).

В случае спина $1/2$ функции $\varphi(\sigma)$ мы сопоставляли дираковскую волновую функцию $u(0, \sigma)$, ограниченную условием $(1 - \gamma_4)u = 0$, а именно $\varphi = 1/2(1 + \gamma_4)u(0)$, если γ_4 выбрано диагональной матрицей. Аналогичным образом, спинору $\varphi_{\sigma_1} \dots \sigma_n$ можно сопоставить волновую функцию Баргмана — Вигнера в системе покоя, или симметричный дираковский спинор n -го ранга $u_{\alpha_1} \dots \alpha_n(\rho)$, который удовлетворяет условию $(\gamma_4 - 1)_{\beta}^{\alpha} u_{\beta}^{\beta_1} \dots \beta_n(0) = 0$ по каждому индексу β_1, \dots, β_n и при диагональной матрице γ_4 совпадает с $\varphi_{\sigma_1} \dots \sigma_n$ [69].

Волновая функция частицы с импульсом ρ получается из $u_{\beta_1} \dots \beta_n(0)$ с помощью стандартного преобразования Лоренца:

$$u_{\beta_1 \dots \beta_n}(\rho) = S_{\beta_1}^{\beta_1'}(\alpha(\rho)) \dots S_{\beta_n}^{\beta_n'}(\alpha(\rho)) u_{\beta_1' \dots \beta_n'}(0), \quad (131)$$

где $S(A)$ есть матрица преобразования волновой функции Дирака. Вследствие такого способа построения функция (131) удовлетворяет по каждому индексу уравнению Дирака (см. § 5.2):

$$(\hat{p} - m)_{\beta}^{\beta'} u_{\beta}^{\beta_1} \dots \beta_n(\rho) = 0. \quad (132)$$

При преобразовании Лоренца и смещениях $g = (a, A)$ волновая функция $u_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p})$ превращается в функцию

$$u'_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}) = e^{-i p a} S_{\beta_1}^{\beta_1'}(A) \dots S_{\beta_n}^{\beta_n'}(A) u_{\beta_1' \dots \beta_n'}(\Lambda^{-1} \mathbf{p}). \quad (133)$$

Введем сопряженную функцию

$$\bar{u}^{\beta_1 \dots \beta_n} = u^{+\beta_1' \dots \beta_n'} (\gamma_4)_{\beta_1'}^{\beta_1} \dots (\gamma_4)_{\beta_n'}^{\beta_n}. \quad (134)$$

Тогда величина $\bar{u}^{(\beta)} u_{(\beta)}$ инвариантна в том смысле, что

$$\bar{u}'(\mathbf{p}) u'(\mathbf{p}) = \bar{u}(\Lambda^{-1} \mathbf{p}) u(\Lambda^{-1} \mathbf{p}).$$

Поскольку для дираковского спинора $u(\mathbf{p})$ имеет место равенство $u^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = (p_0/m)\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p})$, то для функции (131)

$$u^{+\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}) u_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^n \bar{u}^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}) u_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}). \quad (135)$$

Следовательно, скалярное произведение должно быть определено формулой

$$(u_1, u_2) = \int \frac{d^3 p}{2p_0^{n+1}} \bar{u}^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}) u_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p}), \quad p_0 > 0. \quad (136)$$

При таком определении скалярного произведения преобразования (133) унитарны.

Тензор момента количества движения $M_{\mu\nu}$ находится из (133), как непосредственное обобщение выражения (46) для $M_{\mu\nu}$ в случае спина $1/2$. Спиновая часть $M_{\mu\nu}$ равна

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sigma_{\mu\nu}^{(r)}, \quad (137)$$

где матрица $\sigma_{\mu\nu}^{(r)}$ действует только на r -й индекс:

$$(\sigma_{\mu\nu}^{(r)})_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_{r-1}}^{\beta_{r-1}} (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha_r}^{\beta_r} \delta_{\alpha_{r+1}}^{\beta_{r+1}} \dots \delta_{\alpha_n}^{\beta_n}.$$

Чтобы найти выражение для случая отрицательных энергий, можно воспользоваться соотношением (69), связывающим в случае уравнения Дирака решения с положительной и отрицательной энергиями, или же формулой (38) для $v(\mathbf{p})$. При $\mathbf{p} = 0$ функция $v(\mathbf{p})$ удовлетворяет условию $(\gamma_4 + 1)\beta^{\beta'} v_{\beta' \beta_2 \dots \beta_n}(0) = 0$ по каждому индексу, а в общем случае $v_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{p})$ подчиняется уравнению

$$(\hat{p} + m)\beta^{\beta'} v_{\beta' \beta_2 \dots \beta_n} = 0, \quad (138)$$

также по каждому индексу. $v_{\beta_1 \dots \beta_n}$ симметрично в β_1, \dots, β_n .

Зная $u_{\beta_1 \dots \beta_n}$ и $u_{\beta_1 \dots \beta_n}$, мы можем стандартным образом построить квантовое поле частиц со спином $J = n/2$:

$$\psi_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 I_2} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \sum_{\gamma} \{u_{(\beta)}(p, \gamma) a(p, \gamma) e^{-ipx} + \dots\}, \quad (139)$$

где операторы рождения и поглощения удовлетворяют обычным перестаночным соотношениям (4.84).

Параметризация симметричных спиноров $u_{\beta_1 \dots \beta_n}$ существенно облегчается знанием свойств симметрии (67) и (68) матриц γ_{μ} . Например, общий вид симметричного спинора второго ранга есть

$$u_{\alpha\beta} = \left[\gamma^{\mu} \mathcal{E} \Phi_{\mu} + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} \mathcal{E}) \Phi_{\mu\nu} \right]_{\alpha\beta}, \quad (140)$$

так как $\gamma_{\mu} \mathcal{E}$ и $\sigma_{\mu\nu} \mathcal{E}$ — это единственные симметричные матрицы 4×4 с нижними индексами. Уравнения Баргмана—Вигнера

$$(\hat{p} - m)_{\alpha}^{\alpha'} u_{\alpha'\beta} = 0, \quad (\hat{p} - m)_{\beta}^{\beta'} u_{\alpha\beta'} = 0 \quad (141)$$

после умножения их на матрицы с верхними индексами $(\mathcal{E}^{-1} \sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}$ и $(\mathcal{E}^{-1} \gamma_{\lambda})^{\alpha\beta}$ и сворачивания индексов оказываются эквивалентными следующим уравнениям для частицы со спином 1:

$$p^{\mu} \Phi_{\mu\nu} = -im\Phi_{\nu}, \quad p_{\mu} \Phi_{\nu} - p_{\nu} \Phi_{\mu} = im\Phi_{\mu\nu}. \quad (142)$$

Таким образом, если в $2(2J + 1)$ -компонентном формализме частицы со спином 1 описываются фактически тензором $\Phi_{\mu\nu}$, а в обычном формализме (соответствующем по духу формализму Рариты—Швингера) — 4-вектором, то согласно Баргману—Вигнеру эти же частицы следует описывать совместно вектором Φ_{ν} и тензором $\Phi_{\mu\nu}$.

В случае частицы со спином $3/2$ волновая функция Баргмана—Вигнера есть симметричный спинор третьего ранга, который в силу свойств симметрии матриц γ^{μ} может быть записан в виде

$$u_{\alpha\beta\gamma} = \Psi_{\alpha\mu} (\gamma^{\mu} \mathcal{E})_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \Psi_{\alpha\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu} \mathcal{E})_{\beta\gamma}. \quad (143)$$

В (143) учтена только симметрия по β и γ . Антисимметричные матрицы \mathcal{E}^{-1} , $\mathcal{E}^{-1} \gamma_5$, $\mathcal{E}^{-1} \gamma^{\mu} \gamma_5$ при свертывании с симметричным спинором $u_{\alpha\beta\gamma}$ должны дать нуль. Отсюда вытекают условия симметрии $u_{\alpha\beta\gamma}$ по остальным индексам:

$$\gamma^{\mu} \Psi_{\mu}(\mathbf{p}) = 0, \quad \gamma^{\mu} \Psi_{\mu\nu}(\mathbf{p}) + i\Psi_{\nu}(\mathbf{p}) = 0. \quad (144)$$

Аналогичным образом уравнение

$$(\hat{p} - m) \alpha^{\alpha'} u_{\alpha' \beta \gamma}(\rho) = 0 \quad (145)$$

может быть превращено в систему уравнений для спинор-вектора ψ_μ и спинор-тензора $\psi_{\mu\nu}$:

$$(\hat{p} - m) \psi_\mu = 0, \quad \rho^\nu \psi_{\nu\mu} = -im\psi_\mu, \quad \rho_\mu \psi_\nu - \rho_\nu \psi_\mu = im \psi_{\mu\nu}. \quad (146)$$

Сравнение системы (146) и условий (144) с уравнениями Париты—Швингера (105), (106) и (107) показывает эквивалентность обоих способов описания.

Ограничение симметричными спинорами возникает вследствие того, что в состоянии покоя волновая функция должна превращаться в неприводимый (т. е. симметричный) спинор группы вращений, описывающий заданный спин. Если же мы предполагаем описать с помощью одного спинора высшего ранга несколько спинов, то следует, вообще говоря, пользоваться приводимыми спинорами. Точно так же возможны случаи, когда спиноры высшего ранга n следует использовать для описания младших спинов $J < n/2$. В частности, в кварковой модели барионы со спином $1/2$ приходится описывать с помощью спинора третьего ранга со смешанной симметрией, а частицы со спином 0 — антисимметричным спинором второго ранга.

Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — спинор второго ранга. Разложим 4×4 -матрицу $\Phi_{\alpha\beta}$ по полной системе матриц $(\gamma^R)_{\alpha\beta}$:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \left(\varphi + i\gamma_5 \varphi_5 + \gamma^\mu \gamma_5 \varphi_{\mu 5} + \gamma^\mu \varphi_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} \right)_{\alpha\beta}, \quad (147)$$

и воспользуемся уравнениями Баргмана—Вигнера (132), справедливость которых не зависит от свойств симметрии спинора:

$$[\hat{p}, \Phi]_- = 2m\Phi, \quad [\hat{p}, \Phi]_+ = 0. \quad (148)$$

Первое из уравнений (148) приводит к уравнениям (142) для функций φ_μ и $\varphi_{\mu\nu}$, а также к следующим уравнениям для φ_5 и $\varphi_{\mu 5}$:

$$\rho_\mu \varphi_5 = im\varphi_{\mu 5}, \quad \rho_\mu \varphi_{\mu 5} = -im\varphi_5. \quad (149)$$

Второе уравнение (148) дает лишь одно новое равенство $\varphi = 0$, остальные же равенства выполняются тождественно в силу (142) и (149). Таким образом, в общем случае спинор второго ранга (147) описывает как частицы с спином 1 (симметричная часть $(\Phi \mathcal{E})_{\alpha\beta}$), так и частицы со спином 0 (антисимметричная часть $(\Phi \mathcal{E})_{\alpha\beta}$).

§ 5.7. Уравнение Деффина — Кеммера

В случае частиц со спином 0 и 1 уравнения движения можно записать в виде одного уравнения, напоминающего уравнение Дирака, но с другими матрицами β_μ вместо γ_μ . Обратимся вновь к спинору второго ранга (147) и запишем его с нижними индексами $\tilde{\Phi} = \Phi \mathcal{C}$, предполагая, что $\varphi = 0$. Для спинора $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}$ второе из уравнений (148) переписывается в виде

$$(\hat{p}_\alpha^{\alpha'} + \hat{p}_\beta^{\beta'}) \tilde{\Phi}_{\alpha'\beta'} = 2m \tilde{\Phi}_{\alpha\beta}, \quad (150)$$

второе же уравнение (148) может быть отброшено, ибо при $\varphi = 0$ оно является следствием первого. Введем матрицы 16×16 :

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu 1' + 1 \gamma_\mu'), \quad (151)$$

где нештрихованные матрицы 1, γ_μ действуют на первый индекс в $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}$, а штрихованные — на второй. В этих обозначениях уравнение (150) приобретает вид

$$(\beta^\mu p_\mu - m) \tilde{\Phi} = 0. \quad (152)$$

Оно называется уравнением Деффина—Кеммера [66, 67].

Матрицы β^μ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \quad (153)$$

которые вытекают непосредственно из свойств матриц γ^μ и (151). В частности (суммирование по μ не производится),

$$(\beta^\mu)^3 = g_{\mu\mu} \beta^\mu, \quad \beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = 0, \quad \nu \neq \mu. \quad (154)$$

Из второго равенства (154) можно заключить, что матрицы β^μ не имеют обратных.

Кроме матриц β_μ удобно ввести эрмитовы матрицы

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - g_{\mu\mu} = \gamma_\mu \gamma_\mu' \quad (155)$$

со свойствами

$$\begin{aligned} \eta_\mu^2 &= 1, & \eta_\mu \eta_\nu &= \eta_\nu \eta_\mu, \\ \beta_\mu \eta_\mu &= \eta_\mu \beta_\mu, & \beta_\mu \eta_\nu &= -\eta_\nu \beta_\mu \end{aligned} \quad (156)$$

(по μ не суммируется, $\nu \neq \mu$).

С помощью матрицы η_4 можно определить сопряженную функцию $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\eta_4$, которая удовлетворяет уравнению

$$\bar{\Phi} (\beta^\mu p_\mu - m) = 0. \quad (157)$$

Из свойств матриц γ^μ и (151) явствует, что матрицы β^μ преобразуются как вектор:

$$S^{-1}(A) S'^{-1}(A) \beta^\mu S(A) S'(A) = \Lambda^\mu_\nu(A) \beta^\nu. \quad (158)$$

Здесь $S(A)$ и $S'(A)$ действуют соответственно на нештрихованные и штрихованные матрицы γ_μ в (151). Обозначим $SS' = \tilde{S}$. Тогда при $\bar{\Phi}' = \tilde{S}\bar{\Phi}$ будет $\bar{\Phi}' = \bar{\Phi}\tilde{S}^{-1}$, так что $\bar{\Phi}\Phi$ есть инвариант.

Волновое уравнение

$$(\rho^2 - m^2) \Phi = 0 \quad (159)$$

является следствием уравнения Деффина—Кеммера (152). Это обстоятельство можно усмотреть непосредственно из того, что уравнения (152) и (150) или (148) эквивалентны.

Шестнадцатирядные матрицы β_μ распадаются на пятирядные и десятирядные неприводимые представления, а также тривиальное одномерное представление $\beta_\mu = 0$. Пятирядное представление соответствует спину 0, а десятирядное — спину 1. В терминах функций Баргмана—Вигнера пятирядные матрицы β_μ действуют на антисимметричный спинор второго ранга, а десятирядные матрицы β_μ — на симметричный спинор $\Phi\mathcal{E}$ со следом Φ , равным нулю: $\text{Sp } \Phi = 0$.

Глава 6

ОТРАЖЕНИЯ

Среди преобразований, оставляющих неизменным квадрат интервала $s^2 = (x - y)^2$, имеются также отражения пространства и времени. Вместе с преобразованиями (a, Λ) собственной ортохронной группы Пуанкаре $\mathcal{P} \uparrow$ они образуют полную группу Пуанкаре \mathcal{P} .

В отличие от группы $\mathcal{P} \uparrow$, полная группа \mathcal{P} не является группой симметрии законов природы. В 1956 г. было обнаружено нарушение симметрии относительно пространственных отражений [80] (предугаданное Ли и Янгом [81]), а в 1964 г. была найдена реакция [82], в которой нарушалась инвариантность относительно обращения времени. Однако количественно степень нарушения обеих симметрий невелика. Приблизительно (в явлениях, вызываемых сильным и электромагнитным взаимодействиями) группу \mathcal{P} можно считать группой симметрии, и существуют квантовые объекты, свойства которых определяются этой группой.

Ранее (в § 1.3 и в гл. 4) мы рассмотрели переход от классической собственной группы Пуанкаре $\mathcal{P} \uparrow$ к квантовомеханической группе $\overline{\mathcal{P}} \uparrow$ и нашли унитарные представления последней. Основываясь на этих результатах, мы выясним в этой главе, какова полная квантовомеханическая группа Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}$ (включающая отражения), и найдем ее неприводимые представления.

Существует глубокое различие между преобразованиями группы $\overline{\mathcal{P}} \uparrow$ и отражениями.

Лоренцево преобразование и сдвиги непрерывны, и мы можем обеспечить идентичность объекта в разных инерциальных системах, применяя последовательно бесконечно малые преобразования. Такая процедура невозможна при пространственном отражении, где мы не можем сравнивать одно и то же состояние в разных системах отсчета (исходной и отраженной), но всегда сравниваем различные состояния. Если делать акцент на инерциальных системах отсчета, то в случае отражений эти системы несопоставимы. В случае отражения времени соответствующей инерциальной системы отсчета в буквальном смысле не существует. Отражение времени обычно понимается в смысле обращения движения. Идентичность объекта

при прямом и обращенном движении также не может быть обеспечена.

В квантовой теории состояние системы описывается единичным лучом в гильбертовом пространстве. Преобразования векторов, связанные непрерывно с тождественным преобразованием, всегда унитарны (см. § 1.3). Дискретные преобразования могут быть либо унитарны, либо антиунитарны. Как мы увидим ниже, антиунитарность преобразования оказывается необходимой в случае, когда начальное состояние преобразуется в конечное, т. е. при отражении времени. Непрерывные преобразования группы $\mathcal{P} \uparrow$ связывают состояния одного и того же когерентного пространства; дискретные операции могут связывать различные когерентные пространства, но квадрат отражения не может выводить вектор состояния из данного когерентного пространства.

При наличии внутренней симметрии операции отражения определены, вообще говоря, неоднозначно, ибо если произвести преобразование внутренней симметрии, то полученное состояние будет неотличимо от первоначального.

Среди дискретных операций симметрий особое положение занимает операция θ , связанная с полным отражением пространства-времени $x_\mu \rightarrow -x_\mu$. В теориях, обладающих симметрией относительно пространственного отражения P , отражения времени T и зарядового сопряжения C (операции замены частиц на античастицы), операция θ равна произведению СРТ. Согласно СРТ-теореме [29, 83, 84] релятивистски инвариантная локальная теория автоматически инвариантна относительно дискретного преобразования θ . Эта теорема хорошо подтверждается экспериментальными данными. Она доказана в аксиоматической квантовой теории поля [85, 86] и служит одним из исходных постулатов аксиоматической теории S -матрицы. В аксиоматической теории доказано также, что преобразование θ коммутирует с преобразованиями внутренней симметрии G :

$$\theta G = G \theta. \quad (1)$$

Мы будем рассматривать θ -инвариантность теории в качестве исходного постулата. Следует заметить, что пока не удалось построить ни одной непротиворечивой теории, в которой нарушалась бы θ -инвариантность. Вырождение состояний в квантовой механике, связанное с комплексностью волновой функции, было замечено впервые Крамерсом [87] и сформулировано Вигнером [88] на языке антиунитарных операторов обращения времени.

§ 6.1. Полное отражение θ , или СРТ

В классической физике отражение пространства-времени I изменяет знак координат:

$$I x_\mu = -x_\mu, \quad I^2 = 1, \quad (2)$$

но не изменяет матрицу лоренцева преобразования:

$$I\Lambda_\mu{}^\nu I^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu,$$

так что действие I на элемент $g = (a, \Lambda)$ группы Пуанкаре есть

$$I(a, \Lambda)I^{-1} = (-a, \Lambda). \quad (3)$$

Присоединяя к собственной ортохронной группе \mathcal{P}_+^\dagger отражение I , мы приходим к расширенной группе

$$\mathcal{P}_+ = \{\mathcal{P}_+^\dagger, I\mathcal{P}_+^\dagger\}.$$

Отражение времени понимается не как переход к течению времени вспять, но как обращение движения. Вместо движения с импульсом p от точки q к точке q' , где частица имеет импульс p' , после обращения времени рассматривается обращенное движение от точки q' с импульсом $-p'$ к точке q с импульсом $-p$. Добавляя отражение пространства, мы получаем в итоге инверсии I движение от точки $-q'$ с начальным импульсом $-p'$ к точке $-q$, где конечный импульс равен p .

В квантовой теории вероятность перехода из состояния a в состояние b характеризуется матричным элементом

$$\langle b, \text{out} | a, \text{in} \rangle = \langle b | S | a \rangle.$$

Обращенное движение, получаемое заменой начального состояния на конечное, описывается матричными элементами типа

$$\langle a_\theta, \text{out} | b_\theta, \text{in} \rangle = \langle a_\theta | S_\theta | b_\theta \rangle.$$

Здесь a_θ и b_θ относятся к состояниям, возникшим в итоге инверсии I , а S_θ определено по отношению к состояниям $|a_\theta\rangle$:

$$S_\theta |a_\theta, \text{out}\rangle = |a_\theta, \text{in}\rangle. \quad (4)$$

Если вероятность перехода $a \rightarrow b$ инвариантна относительно инверсии I , то

$$|\langle b, \text{out} | a, \text{in} \rangle|^2 = |\langle a_\theta, \text{out} | b_\theta, \text{in} \rangle|^2. \quad (5)$$

Замена начального состояния конечным представляет собой неунитарную операцию, при которой

$$\langle b, \text{out} | a, \text{in} \rangle \neq \langle a_\theta, \text{out} | b_\theta, \text{in} \rangle. \quad (6)$$

Для матрицы рассеяния мы получаем из (4) и (6) соотношение

$$\langle b | S | a \rangle = \langle a_\theta | S_\theta | b_\theta \rangle, \quad (7)$$

определяющее смысл преобразованного оператора S_θ . Формула типа (7) будет использоваться также и для того, чтобы придать смысл любому оператору H_θ , действующему на состояния $| a_\theta \rangle$:

$$\langle b | H | a \rangle = \langle a_\theta | H_\theta | b_\theta \rangle. \quad (8)$$

Преобразование от состояний $| a \rangle$ и операторов H к состояниям обращенного движения $| a_\theta \rangle$ и операторам H_θ (с соблюдением соотношений (6), (8)) может быть произведено двумя способами: либо с помощью антиунитарного оператора (Вигнер) [18, 89], либо с помощью оператора транспонирования (Швингер) [83]. Мы пользуемся вигнеровской трактовкой инверсии I ; ее связь со швингеровской трактовкой поясняется в конце параграфа.

Антиунитарным оператором A называется оператор со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} A(c_1 | a_1 \rangle + c_2 | a_2 \rangle) &= c_1^* A | a_1 \rangle + c_2^* A | a_2 \rangle, \\ \langle Aa | Ab \rangle &= \langle b | a \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

т. е. A включает в себя комплексное сопряжение, что символически можно записать как $Ac = c^* A$ или $Ai = -iA$. Антиунитарное преобразование A оставляет неизменной вероятность перехода $|\langle b | a \rangle|^2$.

В отличие от квадрата унитарного оператора, квадрат антиунитарного оператора A^2 инвариантен относительно фазового преобразования: при $A' = e^{i\omega} A$ будет $A'^2 = A^2$. Согласно (9) оператор A^2 унитарен.

Антиунитарный оператор A можно представить в виде

$$A = \beta K, \quad K^2 = 1, \quad A^2 = \beta^* \beta, \quad (10)$$

где K есть оператор комплексного сопряжения, а оператор β унитарен.

Отражение пространства-времени (2) в гильбертовом пространстве состояний мы будем описывать антиунитарным оператором θ :

$$| a_\theta, \text{out} \rangle = \theta | a, \text{in} \rangle, \quad | b_\theta, \text{in} \rangle = \theta | b, \text{out} \rangle, \quad (11)$$

полагая при этом, что вакуум $| 0 \rangle$ инвариантен относительно полного отражения θ :

$$\theta | 0 \rangle \equiv | 0_\theta \rangle = | 0 \rangle.$$

Амплитуда перехода в этом случае удовлетворяет условию (6):

$$\langle a_\theta, \text{out} | b_\theta, \text{in} \rangle = \langle \theta a, \text{in} | \theta b, \text{out} \rangle = \langle a, \text{in} | b, \text{out} \rangle^*.$$

Найдем теперь в явном виде преобразование операторов $H \rightarrow H_\theta$, определенное равенством (8). Согласно (6) и (11)

$$\begin{aligned} \langle a_\theta, \text{out} | H_\theta | b_\theta, \text{in} \rangle &= \\ &= \langle \theta^{-1} H_\theta b_\theta, \text{in} | \theta^{-1} a_\theta, \text{out} \rangle = \langle \theta^{-1} \theta a, \text{in} | \theta^{-1} H_\theta \theta | b, \text{out} \rangle^* = \\ &= \langle b, \text{out} | (\theta^{-1} H_\theta \theta)^+ | a, \text{in} \rangle, \end{aligned}$$

что вместе с определением (8) ведет к формуле

$$H_\theta = \theta H^+ \theta^{-1}. \quad (12)$$

Следовательно, условие инвариантности оператора H относительно отражений θ в вигнеровской трактовке имеет вид

$$H_\theta = H = \theta H^+ \theta^{-1}. \quad (13)$$

Чтобы найти преобразование генераторов группы Пуанкаре, воспользуемся групповым законом умножения (3), переписав его предварительно для квантовомеханической группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$:

$$I(a, A) I^{-1} = (-a, A). \quad (14)$$

Перейдя к операторам θ и $U(a, A)$, действующим на векторы состояния, получаем

$$\theta U(a, A) \theta^{-1} = U(-a, A); \quad (15)$$

поэтому

$$\theta e^{iP_\mu a^\mu} \theta^{-1} = e^{-iP_\mu a^\mu}, \quad (16)$$

$$\theta e^{iM_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}} \theta^{-1} = e^{iM_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}}. \quad (17)$$

Так как антилинейный оператор θ «антикоммутирует» с i , то соотношения (16) и (17) эквивалентны следующим правилам преобразования импульса и момента количества движения при отражении θ :

$$P_{\theta\mu} = \theta P_\mu \theta^{-1} = P_\mu, \quad M_{\theta\mu\nu} = \theta M_{\mu\nu} \theta^{-1} = -M_{\mu\nu}. \quad (18)$$

Таким образом, отражение θ не изменяет инвариантов группы Пуанкаре — массы m и спина J , а также знака энергии. При отражении θ импульс неизменен, а вектор спина J меняет знак. Если бы

отражение θ не изображалось антиунитарным оператором, то знак энергии изменился бы, в противоречии с наблюдаемой положительностью энергии. Действительно, если бы θ было унитарно, то из (16) следовало бы $\theta P_\mu \theta^{-1} = -P_\mu$.

Правила преобразования (18) не противоречат перестановочным соотношениям. Применим отражение θ к обеим частям перестановочного соотношения некоторых эрмитовых операторов M , M' и M'' :

$$[M, M'] = iM''.$$

Тогда коммутатор преобразованных операторов есть

$$[M_\theta, M'_\theta] = -iM''_\theta,$$

так что операторы $-M_\theta$ в применении к $|a_\theta\rangle$ и вакууму $|0\rangle$ обладают свойствами операторов M , действующих на $|a\rangle$ и $|0\rangle$. Легко проверить, что операторы (18) удовлетворяют преобразованным перестановочным соотношениям (1.41).

Условие независимости (1) отражения θ и преобразований внутренней симметрии позволяет вывести правило преобразования самосопряженных генераторов F_r группы внутренней симметрии \mathcal{G} . Подставив в (1) выражение $u(G) = \exp\{iF_r\alpha_r\}$ для унитарного представления группы \mathcal{G} , мы получаем

$$\theta e^{iF_r\alpha_r} \theta^{-1} = e^{iF_r\alpha_r}, \quad \theta F_r \theta^{-1} = -F_r, \quad (19)$$

(параметры α_r вещественны). В частности, все аддитивные квантовые числа, т. е. все заряды Q_i , меняют знак при отражении θ . Отсюда следует важный вывод: при отражении θ частица переходит в античастицу.

С теоретико-групповой точки зрения наша задача заключается в отыскании неприводимых представлений или, точнее, сопредставлений квантовомеханической группы Пуанкаре с отражением θ . Сопредставления (corepresentations) заменяют представления в том случае, когда группа содержит как линейные, так и антилинейные преобразования. Унитарная эквивалентность представлений R и R' означает:

$$R' = URU^\dagger, \quad UU^\dagger = 1. \quad (20)$$

В случае сопредставлений переход к другому унитарно эквивалентному базису влечет за собой (для антиунитарных A) преобразование

$$O(A) = O'(A) = UO(A)U^\dagger, \quad (21)$$

превращающееся в преобразование подобия для вещественных U . Сопредставление называется неприводимым, если оно не может быть разбито на диагональные блоки с помощью преобразований (20) и (21).

Если мы фиксируем оператор θ в пространстве состояний, то мы можем перейти от классической группы \mathcal{P}_+ к квантовомеханической группе с отражением

$$\overline{\mathcal{P}}_+ = \{\overline{\mathcal{P}}_+, \theta \overline{\mathcal{P}}_+\}.$$

Однако, хотя есть только одна классическая группа \mathcal{P}_+ , в квантовом случае существует несколько групп $\overline{\mathcal{P}}_+$, отличающихся значениями оператора θ^2 .

Квадрат классической инверсии I^2 равен единице; он переводит в себя каждое физическое состояние, а следовательно, и каждый единичный луч в гильбертовом пространстве векторов состояния. Это значит, что квадрат квантовомеханического оператора инверсии $\theta^2 = \varepsilon_\theta$ должен быть фазовым множителем. Вследствие унитарности θ^2 фазовые множители должны быть одинаковы в каждом когерентном пространстве. В силу соотношения $\theta^3 = \varepsilon_\theta \theta = \theta \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^* \theta$ величина ε_θ вещественна, и, следовательно,

$$\theta^2 = \varepsilon_\theta = \pm 1. \quad (22)$$

Знак ε_θ может быть различным в разных когерентных пространствах.

Предположим временно, что рассматриваемая нами система не обладает внутренней симметрией. Вид оператора θ определяется тогда только группой Пуанкаре. Применим отражение θ к лоренц-преобразованному состоянию и учтем, что вследствие антиунитарности θ матрицы преобразований должны быть заменены на комплексно сопряженные:

$$\begin{aligned} 0e^{-i/2 M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}} |p, \lambda; Q_i\rangle = \\ = \theta \sum_{\lambda'} \mathcal{D}_{\lambda', \lambda}^J(\tilde{A}) |p', \lambda'; Q_i\rangle = \sum_{\lambda'} \mathcal{D}_{\lambda', \lambda}^{J*}(\tilde{A}) \theta |p', \lambda'; Q_i\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$ — унитарная матрица группы вращений, зависящая от вignerовского вращения \tilde{A} (мы использовали (4.47)).

Таким образом, добавив отражение θ , мы должны, наряду с базисными состояниями $|a\rangle$ неприводимого представления группы \mathcal{P}_+ , рассматривать состояния $\theta|a\rangle$, которые преобразуются с помощью комплексно сопряженных матриц.

Матрицы \mathcal{D}^J и \mathcal{D}^{J*} унитарно эквивалентны:

$$\mathcal{D}^{J*}(\tilde{A}) = \mathcal{D}^J(C^{-1}) \mathcal{D}^J(\tilde{A}) \mathcal{D}^J(C), \quad C = -i\sigma_2. \quad (24)$$

Поэтому, применяя к (23) еще раз операцию θ , мы находим

$$\theta^2 \mathcal{D}^J(\tilde{A}) \theta^{-2} = (\mathcal{D}^J(CC^*))^{-1} \mathcal{D}^J(\tilde{A}) \mathcal{D}^J(CC^*),$$

откуда заключаем, что

$$\varepsilon_\theta = \theta^2 = \pm \mathcal{D}^J(CC^*) = \pm \mathcal{I}^J(-1) = \pm (-1)^{2J}. \quad (25)$$

В зависимости от выбора знака в (25) мы приходим к двум характерным типам операторов θ .

1. При выборе знака $+$ в (25) (*тип 1*) преобразование θ^2 принадлежит группе Пуанкаре:

$$\theta^2 = U(0, -E) = (-1)^{2J}. \quad (26)$$

Здесь E — единичная матрица. Число состояний не изменяется; состояния $\theta|a\rangle$ относятся к тому же представлению $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$, что и состояния $|a\rangle$. Действительно, согласно (10) и (25) следует положить (для спина J)

$$\theta|p, \lambda; Q_r = 0\rangle = \sum_{\lambda'} (K|p, \lambda'; Q_r = 0\rangle) \mathcal{D}_{\lambda', \lambda}^J(C^*), \quad (27a)$$

что можно записать символически в виде

$$\theta = \mathcal{D}^J(C^*) K. \quad (27b)$$

Здесь K — антиунитарный оператор, удовлетворяющий условию

$$K|p, \lambda; Q_r = 0, \text{in}\rangle = |p, \lambda; Q_r = 0, \text{out}\rangle, \quad (28)$$

которое определяет K однозначно (ибо он применяется к состояниям нейтральных частиц).

2. При выборе знака $-$ в (25) (*тип 2*) унитарное преобразование $\theta^2 = -U(0, -E)$ не принадлежит группе Пуанкаре и число состояний удваивается, хотя $|a\rangle$ и $\theta|a\rangle$ преобразуются одинаково при лоренцевых преобразованиях. Будем различать эти состояния по новому квантовому числу $r_{1,2} = \pm 1$, так что базисными состояниями теперь служат $|a, r_1 = +1\rangle$ и $|a, r_2 = -1\rangle$. В этом базисе преобразование Лоренца $O(a, A)$ имеет диагональный вид:

$$O(a, A) = \begin{pmatrix} U(a, A) & 0 \\ 0 & U(a, A) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

а отражение θ (в случае спина J) есть

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^J(C^*) \\ -\mathcal{D}^J(C^*) & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^2 = -(-1)^{2J}. \quad (30)$$

Итак, для типа 2 характерно то, что нейтральная частица (в смысле $Q_i = 0$) не переводится сама в себя при операции θ , но переходит в другую частицу, отличающуюся знаком квантового числа r . Иначе говоря, если включить квантовое число r в характеристику частиц ($r_1 = 1$) и античастиц ($r_2 = -1$), то в случае $\theta^2 = -(-1)^{2J}$ не существует нейтральных частиц (в смысле $Q_r = 0$, $r_1 = r_2$).

Физический интерес представляет тип 1. Именно этот тип отражения наблюдается в экспериментах и является единственно возможным в аксиоматической квантовой теории поля [86]. Только к этому случаю относится СРТ-теорема. Поэтому из возможных типов операторов θ мы выбираем только тип 1, где $\theta^2 = (-1)^{2J}$ не зависит от существования внутренней симметрии.

Таким образом, мы получили нужное нам решение задачи о неприводимых сопредставлениях квантовомеханической группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+$ с отражением θ . При отражении θ нейтральная частица со спином J , импульсом \mathbf{p} и спиральностью λ изменяет спиральность на $-\lambda$; при этом начальное и конечное состояния меняются местами и (в силу (27)) появляется фазовый множитель:

$$\theta |p, \lambda; J, m; Q_i = 0, \text{in}\rangle = (-1)^{J-\lambda} |p, -\lambda; J, m; Q_i = 0, \text{out}\rangle. \quad (31)$$

Для стабильных частиц одночастичные состояния в (31) не нуждаются в символах in, out, ибо они стационарны и не зависят от граничных условий. Тем не менее мы будем сохранять в дальнейшем эти символы во всех формулах для отражений θ (а затем и для обращения времени T). Это позволит нам перейти автоматически от формул типа (31) для одночастичных состояний к аналогичным формулам для многочастичных состояний.

Заметим, что ввиду соотношения (26) полученная группа $\overline{\mathcal{P}}_+$ будет только полупрямым (но не прямым) произведением квантовомеханической группы $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ и конечной инверсионной группы (в отличие от классической группы \mathcal{P}_+) [90].

Учет внутренней симметрии. Общая группа инвариантности включает помимо θ и $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ также и группу внутренней симметрии.

Возвратимся к (23) и учтем внутреннюю симметрию [91], полагая $\theta^2 = (-1)^{2J}$. Для простоты будем считать частицу покоящейся. Чтобы освободиться от двузначности, введем оператор

$$\theta_0 = 0e^{i\pi M_{31}}, \quad \theta_0^2 = -1, \quad (32)$$

описывающий отражение θ с поворотом на π вокруг второй оси. В спиновом пространстве θ_0 эквивалентно $\mathcal{D}^J(C)\theta$ и, вследствие (21), коммутирует с вращениями:

$$\mathcal{D}^J(C)\theta\mathcal{D}^J(V) = \mathcal{D}^J(C)\mathcal{D}^J(V^*)\theta = \mathcal{L}^J(V)\mathcal{D}^J(C)\theta.$$

Следовательно, оператор θ_0 является скаляром в спиновом пространстве частицы и в применении к мультиплету в состоянии покоя результат зависит только от свойств внутренней симметрии, связанных с группой \mathfrak{G} . Опуская спиновые переменные и импульс, мы получаем аналогично (23):

$$\theta_0 e^{iF_i a^i} |\alpha\rangle = e^{iF_i a_i} \theta_0 |\alpha\rangle = \theta_0 \sum_{\beta} d_{\beta\alpha}(G) |\beta\rangle = \sum_{\beta} d_{\beta\alpha}^*(G) \theta_0 |\beta\rangle, \quad (33)$$

где α обозначает компоненту мультиплета, преобразующегося по неприводимому представлению d группы \mathfrak{G} . Таким образом, состояния $\theta_0 |\alpha\rangle$ образуют сопряженный мультиплет — базис сопряженного представления d^* .

Найдем представления \tilde{d} группы внутренней симметрии \mathfrak{G} с отражением θ_0 , или группы

$$\mathfrak{G}_\theta = \{G, \theta_0 G\},$$

содержащей в качестве элементов преобразования G и $\theta_0 G$. Согласно (33) мультиплетность сопредставления \tilde{d} будет отлична от d , если набор $|\alpha\rangle$ не содержит в себе состояний $\theta_0 |\alpha\rangle$.

В зависимости от свойств d и d^* возможны три типа сопредставлений группы \mathfrak{G}_θ .

Если представления d и d^* унитарно эквивалентны:

$$d^*(G) = \beta^{-1} d(G) \beta, \quad \beta\beta^+ = 1, \quad (34)$$

то, применяя к (33) еще раз θ_0 , мы получаем

$$d(G) = (\beta\beta^*)^{-1} d(G) \beta\beta^*,$$

что вследствие неприводимости d и унитарности β означает

$$\beta\beta^* = \pm 1. \quad (35)$$

Здесь возможны три случая.

1. Если $\beta\beta^* = +1$ ($\beta \equiv \beta_+$), то $\theta_0 |\alpha\rangle$ содержится в наборе $|\alpha\rangle$ и, следовательно, оператор $\tilde{\alpha}(\theta_0) \equiv \theta_0$ действует внутри мультиплета. Неприводимые сопредставления d имеют вид

$$\tilde{d}(G) = d(G), \quad \tilde{d}(\theta_0) = \beta_+. \quad (36)$$

В качестве примера можно привести регулярные и другие вещественные неприводимые представления конечномерных компактных групп, в частности групп SU_2 и SU_3 (см. гл. 8 и 9).

2. Если $\beta\beta^* = -1$, то, аналогично случаю $\theta^2 = -1$, для групп Пуанкаре (формулы (29), (30)), число состояний должно быть удвоено, так как иначе нельзя построить θ_0 . Произведем унитарное преобразование состояний $\theta_0|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha_2\rangle = -\theta_0\beta|\alpha\rangle$. Тогда по отношению к столбцу, составленному из $|\alpha_1\rangle \equiv |\alpha\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$, неприводимые представления \tilde{d} будут иметь вид

$$\tilde{d}(G) = d(G) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}(\theta_0) = \beta \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

При этом будут выполняться групповые соотношения

$$\tilde{d}(\theta_0 G) = \tilde{d}(\theta_0) \tilde{d}^*(G), \quad \tilde{d}(\theta_0^2) = \tilde{d}(\theta_0) \tilde{d}^*(\theta_0). \quad (38)$$

Иллюстрацией этого случая могут служить представления изоспиновой группы SU_2 с полуцелым изоспином (см. гл. 8).

3. Представления d и d^* не эквивалентны, так что нельзя найти унитарный оператор β со свойствами $d^* = \beta d \beta^{-1}$. Этот случай не имеет аналога для отражений θ в группе Пуанкаре. Неприводимые представления \tilde{d} тогда имеют удвоенную размерность:

$$\tilde{d}(G) = \begin{pmatrix} d(G) & 0 \\ 0 & d^*(G) \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}(\theta_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

а базисом сопредставления служит столбец

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle \\ \theta_0|\alpha\rangle \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В случаях 2 и 3 вторая строка набора состояний описывает античастицы. Следовательно, только для представлений группы внутренней симметрии, удовлетворяющих условию (34) для случая 1, частицы и античастицы могут находиться в одном мультиплете.

Случай точной симметрии. Простейшим примером внутренней симметрии, приводящей к типу 3, может служить группа точной симметрии \mathcal{G}^0 , преобразование которой имеет вид

$$d(\gamma, \delta, \rho_e, \rho_\mu) = \exp\{i(Q\gamma + B\delta + L_e \rho_e + L_\mu \rho_\mu)\}, \quad (41)$$

где $Q_i = Q, B, L_e, L_\mu$ — электрический, барионный и лептонные заряды, а $\gamma, \delta, \rho_e, \rho_\mu$ — параметры преобразования.

Неприводимые представления каждой из четырех одномерных унитарных групп в (41) одномерны; например, значения Q и $-Q$ характеризуют различные неприводимые представления групп

пы $U_Q(1)$. Поэтому, ограничиваясь неприводимыми представлениями, нельзя связать унитарным преобразованием (34) операции умножения на d и d^* ; оператор β не существует. Состояние $|\alpha\rangle$ в случае группы точной симметрии определяется зарядами $Q_i = Q, B, L_e, L_\mu$; если $|\alpha\rangle \equiv |Q_i', \text{in}\rangle$, то состояние $\theta_0|\alpha\rangle$ тогда есть $\theta_0|\alpha\rangle \equiv | -Q_i', \text{out}\rangle$.

Формулы (39) и (40) дают матрицы неприводимого сопредставления группы точной симметрии с отражением θ_0 :

$$\tilde{d}(\gamma, \delta, \rho_e, \rho_\mu) = \begin{pmatrix} \exp\{i(Q\gamma + B\delta + L_e\rho_e + L_\mu\rho_\mu)\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i(Q\gamma + B\delta + L_e\rho_e + L_\mu\rho_\mu)\} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\tilde{d}(\theta_0) \equiv \theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{Q}_i'\rangle = \begin{pmatrix} |Q_i', \text{in}\rangle \\ | -Q_i', \text{out}\rangle \end{pmatrix}.$$

Все состояния внутренней симметрии $|\alpha\rangle$ были определены для покоящихся частиц. Вернемся теперь, в соответствии с (32), к полному оператору $0 = \theta_0 \exp\{i\pi M_{31}\}$ и перейдем с помощью преобразования Лоренца к системе отсчета, где частица имеет импульс p . Тогда столбец $|\tilde{Q}_i'\rangle$ в (42) заменится столбцом

$$\begin{pmatrix} |p, \lambda; J, m; Q_i', \text{in}\rangle \\ |p, -\lambda; J, m; Q_i', \text{out}\rangle \end{pmatrix}, \quad (43)$$

оператор θ пр иобретает вид (для спина J)

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^J(C) \\ \mathcal{D}^J(C^*) & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Обычно под оператором θ понимаются как θ_{12} , так и θ_{21} в (44) (что не ведет к путанице, ибо θ_{12} и θ_{21} действуют на различные строки в (43)). В обычной записи (спиральный базис)

$$\theta |p, \lambda; J, m; Q_i', \text{in}\rangle = (-1)^{J-\lambda} |p, -\lambda; J, m; -Q_i', \text{out}\rangle. \quad (45)$$

Формула (45) определяет преобразование θ для любой пары частицы — античастица независимо от наличия у частицы других свойств внутренней симметрии (которая будет приближенной, ибо вся точная симметрия исчерпывается группой преобразований (41)).

Если принять во внимание приближенную внутреннюю симметрию (группа \mathcal{G}'), то частицы будут связываться с неприводимыми представлениями f группы \mathcal{G}' . Эти представления могут приводить к любому типу для оператора θ_0 . Обозначая посредством α компоненту мультиплетта f группы приближенной симметрии и выделяя

отдельно точно сохраняющиеся заряды Q_i , мы получаем в силу (36) и (37) для типов 1 и 2

$$\begin{aligned} \theta |p, \lambda; J, m; f, \alpha, Q_i', \text{in}\rangle = \\ = (-1)^{J-\lambda} \sum_{\alpha'} |p, -\lambda; J, m; \bar{f}, \alpha', -Q_i', \text{out}\rangle \beta_{\alpha'\alpha}^f, \end{aligned} \quad (46)$$

где \bar{f} относится к мультиплету античастиц, матрица $\beta^f \cdot \bar{\beta}^{\bar{f}} = \beta_+$ для типа 1; $\beta^f = -\bar{\beta}^{\bar{f}} = \beta$ для типа 2. В правой части (46) суммируется по состояниям α' мультиплета \bar{f} античастиц. Согласно (36) и (37) мультиплеты f и \bar{f} преобразуются одинаковым образом.

Сравнивая (45) и (46), можно найти состояние античастицы по состоянию соответствующей частицы. Если квантовые числа (f, α) обозначают частицу α в мультиплете f , то античастица будет иметь квантовые числа $(\bar{f}, \bar{\alpha})$ и описываться состоянием

$$\begin{aligned} |p, -\lambda; J, m; (\bar{f}, \bar{\alpha}), -Q_i', \text{out}\rangle = \\ = \sum_{\alpha'} |p, -\lambda; J, m; \bar{f}, \alpha'; -Q_i', \text{out}\rangle \beta_{\alpha'\alpha}^f. \end{aligned} \quad (47)$$

Вследствие унитарности матриц β при вычислении амплитуды вероятности эти матрицы исчезают.

Будем обозначать в дальнейшем совокупности инвариантных чисел частицы и античастицы посредством a, b, \dots и \bar{a}, \bar{b}, \dots . Многочастичные in- и out-состояния

$$|p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots; \text{in(out)}\rangle$$

при отражении θ преобразуются как произведение одночастичных состояний. Например, для двухчастичного состояния

$$\begin{aligned} \theta |p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \text{in(out)}\rangle = \\ = (-1)^{J_a + J_b - \lambda_a - \lambda_b} |p_a, -\lambda_a, \bar{a}; p_b, -\lambda_b, \bar{b}; \text{out(in)}\rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Такое правило композиции преобразований θ можно либо постулировать, опираясь на свойства асимптотических полей, либо вывести из квантовой теории поля, основываясь на явном представлении многочастичного состояния через операторы рождения.

Инвариантность S -матрицы относительно отражения θ означает, что $S_\theta = S$, или же

$$S = \theta S + \theta^{-1}.$$

Отражение θ связывает амплитуду процесса с участием частиц $a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots$ с амплитудой процесса для античастиц

$\bar{c} + \bar{d} + \dots \rightarrow \bar{a} + \bar{b} + \dots$, обладающих спиральностями противоположного знака:

$$\langle p_c, \lambda_c, c; p_d, \lambda_d, d; \dots | S | p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots \rangle = \\ = \eta_\theta \langle p_a, -\lambda_a, \bar{a}; p_b, -\lambda_b, \bar{b}; \dots | S | p_c', -\lambda_c, \bar{c}; p_d, -\lambda_d, \bar{d}; \dots \rangle, \quad (49)$$

где η_θ равно произведению сомножителей $(-1)^{J-\lambda}$ для всех участвующих в процессе частиц. Согласно СРТ-теореме инвариантность в смысле (49) является автоматическим следствием релятивистской инвариантности и локальности (при положительности энергетического спектра).

Преобразование операторов рождения и поглощения, вытекающее из (46), имеет вид

$$\theta a_{in}^+(\rho, \lambda) \theta^{-1} = \beta_a (-1)^{J_a - \lambda} b_{out}^+(\rho, -\lambda), \quad (50)$$

где a^+ относится к частице, а b^+ — к античастице. Следовательно, (неэрмитовы) $2(2J + 1)$ -компонентные поля $\Phi^J(x)$ (см. § 5.3) преобразуются по правилу

$$\theta \Phi_{in}^J(x) \theta^{-1} = \Phi_{out}^{+J}(-x), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \\ \theta \Phi_{in}^J(x) \theta^{-1} = \gamma_5 \Phi_{out}^{+J}(-x), \quad J = 1/2, 3/2, \dots \quad (51)$$

Заметим, что согласно (51) $(2J + 1)$ -компонентные поля $1/2(1 \pm \gamma_5)\Phi^J$ преобразуются отдельно. В случае векторного поля B_μ отражение означает

$$\theta B_\mu(x) \theta^{-1} = -B_\mu^+(-x). \quad (52)$$

Зная отражение векторного и спинорного поля, легко выписать правило отражения поля Рариты—Швингера:

$$\theta \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) \theta^{-1} = \gamma_5 (-1)^{J-1/2} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^+(-x), \quad J = n + 1/2 \quad (53)$$

($\mu = 0, 1, 2, 3$; n — целое число).

Для поля Баргмана—Вигнера

$$\theta \psi_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) \theta^{-1} = (\gamma_5^{(1)})_{\beta_1 \beta_1'} \dots (\gamma_5^{(n)})_{\beta_n \beta_n'} \psi_{\beta_1' \dots \beta_n'}^+(-x), \quad (54)$$

что легко выводится из свойств спинорного поля (n — целое число).

Швингеровская трактовка отражения исходит из тех же соотношений (4), (6) — (8), но преобразованное состояние здесь

определяется с помощью оператора θ^S со свойствами

$$\begin{aligned}\theta^S |a, \text{in}\rangle &= \langle a_\theta, \text{out} |, \\ \theta^S |a, \text{out}\rangle &= \langle a_\theta, \text{in} |, \\ \langle \theta^S a, \text{out} | \theta^S b, \text{in}\rangle &= \langle b_\theta, \text{out} | a_\theta, \text{in}\rangle = \langle a_{\text{out}} | b_{\text{in}}\rangle.\end{aligned}\quad (55)$$

Операторы θ^S можно представить в виде произведения

$$\theta^S = UT, \quad (56)$$

где U унитарно, а T — оператор транспонирования: $T|a\rangle = \langle a|$. Преобразованный оператор H_θ , согласно (8) и (49), определяется формулой

$$H_\theta = \theta^S H (\theta^S)^{-1}, \quad (57)$$

и вместо условия инвариантности (13) в вигнеровской трактовке мы имеем теперь $H = \theta^S H (\theta^S)^{-1}$ для θ -инвариантного оператора. Порядок операторных множителей изменяется на обратный при операции θ^S :

$$(MN)_\theta = N_\theta M_\theta. \quad (58)$$

Сравнение (13) и (57) показывает, что эрмитовы операторы преобразуются одинаково в обеих трактовках и формулы для преобразования конкретных операторов с помощью θ^S можно получить из соответствующих формул с оператором θ опусканием или добавлением значка эрмитова сопряжения. Например, вместо (50) мы имеем

$$\theta^S a_{\text{in}}^+(\mathbf{p}, \lambda) (\theta^S)^{-1} = \beta_a(-1)^{J_a - \lambda} b_{\text{out}}(\mathbf{p}, -\lambda), \quad (59)$$

а преобразование бозонного поля Φ^J имеет теперь вид

$$\theta^S \Phi_{\text{in}}^J(x) (\theta^S)^{-1} = \Phi_{\text{out}}^J(-x). \quad (60)$$

Преобразовательные свойства полей суммированы в табл. 6.1.

§ 6.2. Операции P, C и T

В то время как классическое преобразование инверсии $Ix = -x$ не изменяет переменных внутренней симметрии, квантовомеханическое отражение θ , в силу своего антилинейного характера, заменяет частицу на античастицу. Выделим отдельно преобразование C, заменяющее частицы на античастицы, и «геометрические» отражения P и T, записав отражение θ в виде произведения трех

дискретных операций:

$$\theta = \text{CPT}, \quad (61)$$

где C и P унитарны, а оператор T антиунитарен.

Зарядовое сопряжение C превращает частицы в античастицы, но не действует на переменные группы Пуанкаре:

$$[C, M_{\mu\nu}] = 0, \quad [C, P_\mu] = 0. \quad (62)$$

Оператор P описывает «геометрическое» отражение пространства, т. е. такое преобразование состояний или операторов (вызванное отражением координат $x \rightarrow -x$), которое коммутирует с C:

$$\text{CPC}^{-1} = P. \quad (63)$$

Операция T дополняет CP до полного отражения θ . Из определения C, P и T явствует, что действие геометрических отражений P и T не зависит от зарядов частиц. Операции P и T связывают векторы состояния в одном и том же когерентном пространстве (характеризуемом набором зарядов Q_i). Зарядовое сопряжение C переводит вектор состояния из одного когерентного пространства в другое, отличающееся от первого знаком всех зарядов Q_i .

Отражение P. Перестановочные соотношения пространственного отражения P с импульсом и моментом в классической физике легко выводятся из равенства

$$P(a, A)P^{-1} = (a', \sigma_2 A^* \sigma_2), \quad a' = (a^0, -\mathbf{a}), \quad (64)$$

где (a, A) — преобразование группы Пуанкаре. Отражение P антикоммутирует с пространственными компонентами векторов и коммутирует с временной, например:

$$\begin{aligned} PP_k P^{-1} &= -P_k, & PP_0 P^{-1} &= P_0, \\ PM_{ik} P^{-1} &= M_{ik}, & PM_{0k} P^{-1} &= -M_{0k}. \end{aligned} \quad (65)$$

Эти перестановочные соотношения сохраняются и в квантовой теории, где P — унитарный оператор.

Согласно (63) и (65) оператор P переводит состояние частицы с импульсом p в состояние той же частицы с импульсом $-\mathbf{p}$, не изменяя трехмерного момента импульса. Поэтому вектор состояния покоя в каноническом базисе под действием отражения P может приобрести только фазовый множитель η_P^* :

$$P|0, \sigma; a\rangle = \eta_P^*(a)|0, \sigma; a\rangle, \quad (66)$$

где σ — проекция спина на ось z , a — тип частицы (совокупность

инвариантных квантовых чисел); $\eta_P^*(a)$ в случае бозонов называется (внутренней) четностью частицы a .

Переходя к движущейся системе отсчета с помощью преобразования Лоренца $\alpha(\mathbf{p})$, мы находим действие отражения P на вектор состояния в каноническом базисе:

$$P|p, \sigma; a\rangle = PU(0, \alpha(\mathbf{p}))P^{-1}P|0, \sigma; a\rangle = \\ = \eta_P^*(a)U(0, \alpha(-\mathbf{p}))|0, \sigma; a\rangle = \eta_P^*(a)|-\mathbf{p}, \sigma; a\rangle, \quad (67)$$

так как $PU(0, \alpha(\mathbf{p}))P^{-1} = U(0, \alpha(-\mathbf{p}))$ в силу (65). Для античастицы \bar{a} мы будем писать

$$P|\mathbf{p}, \sigma; \bar{a}\rangle = \bar{\eta}_P^*(a)|-\mathbf{p}, \sigma; \bar{a}\rangle. \quad (68)$$

В спиральном базисе применение P изменяет спиральное состояние частицы при $\mathbf{p} \neq 0$. Поскольку в этом базисе импульс вводится сначала вдоль оси z , то удобно вместо P использовать оператор

$$Y = e^{-i\pi M_{z1}} P, \quad (69)$$

который коммутирует с лоренцевым преобразованием вдоль оси z . Так как в случае спина J ($\mathbf{p} = 0$)

$$e^{-i\pi M_{z1}}|0, \lambda; J\rangle = (-1)^{J-\lambda}|0, -\lambda; J\rangle,$$

то при ненулевом импульсе \mathbf{p} , направленном вдоль оси z ,

$$Y|\mathbf{p}, \lambda; J\rangle = \eta_P^*(a)(-1)^{J-\lambda}|\mathbf{p}, -\lambda; J\rangle. \quad (70)$$

Производя поворот $R(\varphi, \vartheta, -\varphi)$, мы находим действие P на состояние частицы в спиральном базисе с импульсом $\mathbf{p} = (p, \vartheta, \varphi)$:

$$P|\mathbf{p}, \vartheta, \varphi, \lambda; J\rangle = \eta_P(-1)^{J-\lambda} e^{i\pi M_{z1}}|\mathbf{p}, \vartheta, -\varphi, -\lambda; J\rangle. \quad (71)$$

Полагая, что вакуум инвариантен относительно отражения P :

$$P|0\rangle = |0\rangle, \quad (72)$$

мы находим из (67) преобразование операторов рождения и поглощения, например:

$$Pa(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta_P a(-\mathbf{p}, \sigma). \quad (73)$$

Найдем преобразование $(2J + 1)$ -компонентных локальных полей φ

и χ при отражении P. Согласно (5.80) и (5.81)

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \{D^J(\alpha(p)) e^{-ipx} a(p) + D^J(\alpha(p) C^{-1}) e^{ipx} b^+(p)\}, \quad (74)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \{D^J(\alpha^{-1+}(p)) e^{-ipx} a(p) + (-1)^{2J} D^J(\alpha^{-1+}(p) C^{-1}) e^{ipx} b^+(p)\}.$$

Применим отражение P к полю Φ ; в силу (73)

$$P\Phi(x)P^{-1} = \eta_P \chi^{(a)}(x_0, -x) + (-1)^{2J} \bar{\eta}_P \chi^{(b)}(x_0, -x),$$

где $\chi^{(a)}$ и $\chi^{(b)}$ — части поля χ , содержащие соответственно операторы a и b^+ . Потребуем, чтобы преобразование поля $\Phi(x)$ было локальным, т. е. чтобы поле $P\Phi P^{-1}$ выражалось через поле χ как целое:

$$P\Phi(x)P^{-1} = \eta_P(a) \chi(x_0, -x). \quad (75)$$

Это возможно при

$$\bar{\eta}_P \eta_P = (-1)^{2J}. \quad (76)$$

Следовательно, для фермионов произведение четностей частицы и античастицы отрицательно.

Аналогичным образом находим

$$P\chi(x)P^{-1} = \eta_P(a) \Phi(x_0, -x), \quad (77)$$

так что отражение P связывает верхние и нижние компоненты $2(2J+1)$ -компонентного поля:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad P\Phi(x)P^{-1} = \eta_P \gamma_4 \Phi(x_0, -x), \quad (78)$$

где матрица γ_4 предполагается диагональной (см. § 5.3).

Следовательно, при учете отражения P неприводимым объектом является $2(2J+1)$ -компонентное поле Φ . Ранее, в § 5.3, такое поле было введено для того, чтобы можно было построить билинейную эрмитову форму. Оба условия (условие существования отражения P и условие существования билинейной эрмитовой формы) связаны друг с другом: согласно (78) при отражении появляется та же матрица γ_4 , которая входит в билинейную эрмитову форму, и изменяет знак генератора лоренцева преобразования M_{0k} .

Четность η_P была ограничена условием $|\eta_P| = 1$, но так как P не зависит от зарядов частиц, то четность η_P равна четности нейтральной частицы. Следовательно, должно быть $\bar{\eta}_P = \eta_P$, так что согласно (76)

$$\bar{\eta}_P = \eta_P = \pm i \quad \text{для фермионов;} \quad \bar{\eta}_P = \eta_P = \pm 1 \quad \text{для бозонов.} \quad (79)$$

Четность бозонов вместе со спином J обозначается обычно посредством комбинации J^P ($P' = \eta_P$ есть собственное значение P в состоянии покоя). Псевдоскалярные мезоны (пионы, каоны и др.) имеют $J^P = 0^-$, векторные мезоны (ρ - и ω -мезоны и др.) имеют $J^P = 1^-$, псевдовекторные (A_1 , K^* и др.) имеют $J^P = 1^+$ и т. д.

В случае фермионов, где выборы $\pm i$ равноправны, ибо векторы состояния всех фермионов определены с точностью до знака (см. § 1.3), говорят об относительной четности частиц. Например, обозначение $J^P = 1/2^+$ для Λ -частицы свидетельствует о том, что ее четность та же, что и четность нейтрона, которая принимается в качестве стандартной для барионов.

Произведя отражение P дважды, мы должны прийти к состоянию, отличающемуся только фазой от исходного. Так как отражение P такое же, как и для нейтральной частицы, то эта фаза может быть связана лишь с группой Пуанкаре. Действительно, согласно (79)

$$P^2 = U(0, -1) = (-1)^{2J} \text{ для спина } J, \quad (80)$$

где $U(0, -E) = z$ — преобразование спинорной группы, соответствующее вращению $z = e^{iM_{11}2\pi}$ на угол 2π .

Мнимая единица $\pm i$ в качестве фазового множителя η_P для фермионов в связи с антиунитарностью θ влечет за собой коммутативность P и θ для бозонов и их антикоммутативность для фермионов:

$$P\theta = (-1)^{2J} \theta P. \quad (81)$$

Четность η_P^* (a, b, \dots) многочастичных состояний равна произведению четностей $\eta_P^*(a)\eta_P^*(b)\dots$ одночастичных состояний. Например, в каноническом базисе мы имеем для двухчастичного состояния

$$P |p_a, \sigma_a; p_b, \sigma_b\rangle = \eta_P^*(a) \eta_P^*(b) | -p_a, \sigma_a; -p_b, \sigma_b\rangle. \quad (82)$$

В спиральном базисе для построения двухчастичного состояния (см. § 4.6) были использованы два типа одночастичных спиральных состояний: (4.61) и (4.63). В одном из них сначала вводится импульс, направленный вдоль положительной оси z , в другом импульс сначала направлен вдоль отрицательной оси z . Очевидно, что эти состояния могут быть получены друг из друга отражением. Для импульса $|p|e_z$ мы находим из (4.63) и (71) с помощью (4.64)

$$\begin{aligned} P |p, 0, 0, \lambda\rangle^- &= \eta_P^* |p, 0, 0, -\lambda\rangle = \\ &= (-1)^{J+\lambda} e^{i\pi M_{11}} \eta_P^* |p, 0, 0, -\lambda\rangle^-. \end{aligned}$$

Поэтому для двухчастичного спирального состояния (4.139) в системе ц. и. и с относительным импульсом, направленным вдоль оси z (т. е. $\vartheta = \varphi = 0$), преобразование отражения имеет вид

$$\begin{aligned} P |0; p, 0, 0; \lambda_a, \lambda_b\rangle &\equiv P \{ |p, 0, 0; \lambda_a\rangle |p, 0, 0; \lambda_b\rangle \}^{-} = \\ &= \eta_P^*(1) \eta_P^*(2) (-1)^{J_a + J_b - \lambda_a + \lambda_b} e^{iM_{31}\pi} |0; p, 0, 0; -\lambda_a, -\lambda_b\rangle. \end{aligned}$$

Отражение P коммутирует с вращениями; мы можем, следовательно, повернуть относительный импульс от оси z к окончательному направлению $p = (p, \vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} P |0; p, \vartheta, \varphi; \lambda_a, \lambda_b\rangle &\equiv PR(\varphi, \vartheta, -\varphi) |0; p, 0, 0; \lambda_a, \lambda_b\rangle = \\ &= \eta_P^*(1) \eta_P^*(2) (-1)^{J_a + J_b - \lambda_a + \lambda_b} R(\varphi, \vartheta, -\varphi) \times \\ &\quad \times R(0, -\pi, 0) |0; p, 0, 0; -\lambda_a, -\lambda_b\rangle. \quad (83) \end{aligned}$$

Действие оператора отражения на состояние $|0, \Lambda; J, m; \lambda_a, \lambda_b\rangle$ с определенными (двухчастичными) спином J , массой m и проекцией спина Λ (в системе ц. и. $P = 0$) мы находим, подставив (83) в общую формулу (4.145):

$$\begin{aligned} P |0, \Lambda; J, m; \lambda_a, \lambda_b\rangle &= \\ &= \eta_P^*(a) \eta_P^*(b) (-1)^{J - J_a - J_b} |0, \Lambda; J, m; -\lambda_a, -\lambda_b\rangle. \quad (84) \end{aligned}$$

Таким образом, пространственно отраженное двухчастичное состояние со спином J отличается от исходного знаком спиральности частиц.

Суперпозиции состояний с противоположными спиральностями частиц (и одинаковым полным спином J)

$$| \dots; \lambda_a, \lambda_b \rangle \pm \eta_P^*(a) \eta_P^*(b) (-1)^{2J - J_a - J_b} | \dots; -\lambda_a, -\lambda_b \rangle$$

будут обладать определенной четностью.

Если S -матрица инвариантна относительно пространственных отражений:

$$P S P^{-1} = S,$$

то согласно (82) между ее матричными элементами существует соотношение

$$\begin{aligned} \langle p_a \sigma_a; p_b \sigma_b; \dots | S | p_a' \sigma_a'; p_b' \sigma_b'; \dots \rangle &= \eta_P(a, b, \dots) \eta_P^*(a', b', \dots) \times \\ &\quad \times \langle -p_a \sigma_a; -p_b \sigma_b; \dots | S | -p_a' \sigma_a'; -p_b' \sigma_b'; \dots \rangle. \quad (85) \end{aligned}$$

Здесь $\eta_p(a', b', \dots)$, $\eta_p(a, b, \dots)$ -- произведение четностей частиц в начальном и конечном состояниях. Правая и левая части этого соотношения относятся к одной и той же реакции, протекающей в разных условиях. Поэтому (85) представляет собой ограничение, накладываемое на амплитуды переходов.

Зарядовое сопряжение. Зарядовое сопряжение C определяется как унитарная операция, заменяющая частицы на античастицы:

$$C|p, \sigma; a\rangle = \eta_c^* |p, \sigma; \bar{a}\rangle, \quad CC^+ = 1, \quad (86)$$

что в силу зарядовой инвариантности вакуума ($C|0\rangle = |0\rangle$) можно сформулировать посредством операторов рождения и поглощения частицы (a^+ , a) и античастицы (b^+ , b) следующим образом:

$$\begin{aligned} Ca(p, \sigma)C^{-1} &= \eta_c b(p, \sigma), \quad \eta_c^* \eta_c = 1, \\ Cb(p, \sigma)C^{-1} &= \bar{\eta}_c a(p, \sigma), \quad \bar{\eta}_c^* \bar{\eta}_c = 1. \end{aligned} \quad (87)$$

Оператор C коммутирует с генераторами P_μ и $M_{\mu\nu}$, а также с отражением P . В силу (86) C антикоммутирует со всеми зарядами Q_i :

$$CQ_i = -Q_i C, \quad (88)$$

и, следовательно, соединяет различные когерентные пространства. Только когда все заряды равны нулю, оператор C действует внутри когерентного пространства.

Заметим, что зарядовое сопряжение C , будучи унитарным оператором, не может изменять знак всех генераторов F_r группы внутренней симметрии, если есть некоммутирующие генераторы с переставочными соотношениями типа

$$[F_i, F_j] = ic_{ijh} F_h$$

(при вещественных антисимметричных c_{ijh}). Действительно, замена $F_i \rightarrow -F_i$ приведет к другой алгебре генераторов.

Если частица нейтральна ($a = \bar{a}$), или все заряды $Q_i = 0$, то частица, согласно (86) и (88), характеризуется дополнительным квантовым числом -- зарядовой четностью $\eta_c^* = \eta_c = \pm 1$, показывающим, как ведет себя состояние нейтральной частицы при зарядовом сопряжении.

Зарядовая четность C нейтральных частиц указывается вместе со спином и четностью в сочетании J^{PC} . Например, частица π^0 зарядово четна, $J^{PC} = 0^{-+}$, мезон ω зарядово нечетен, $\eta_c(\omega) = -1$, $J^{PC} = 1^{-}$. Зарядовой четностью может обладать также любое нейтральное состояние. Такое состояние должно содержать одинаковое число частиц и их античастиц.

Если матрица рассеяния инвариантна относительно зарядового сопряжения, $CSC^{-1} = S$, и начальное состояние имеет определенную зарядовую четность $\eta_C(\text{in})$, то взаимодействие не изменяет $\eta_C(\text{in})$, так что $\eta_C(\text{out}) = \eta_C(\text{in})$. Если начальное состояние не нейтрально, то C-инвариантность матрицы рассеяния не влечет за собой закона сохранения, но позволяет выразить амплитуду процесса с частицами $a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots$ через амплитуду процесса с античастицами $\bar{a} + \bar{b} + \dots \rightarrow \bar{c} + \bar{d} + \dots$:

$$\langle c, d, \dots | S | a, b, \dots \rangle = \eta_C(\text{in}) \bar{\eta}_C(\text{out}) \langle \bar{c}, \bar{d}, \dots | S | \bar{a}, \bar{b}, \dots \rangle, \quad (89)$$

где $\eta_C(\text{in})$ есть произведение фаз η_C в состоянии in. Импульсы и спиральности всех частиц и античастиц в (89) попарно одинаковы.

Произведем C-преобразование $2(2J + 1)$ -компонентного поля Φ , имеющего вид (78). Согласно (87) поле $\Phi_C = C\Phi C^{-1}$ будет содержать операторы поглощения с множителем η_C и операторы рождения с множителем $\bar{\eta}_C^*$. Чтобы поле Φ преобразовывалось как целое, необходимо, чтобы

$$\eta_C = \bar{\eta}_C^*. \quad (90)$$

Учитывая равенства $C\alpha^{-1\tau}C^{-1} = \alpha$ и $CC^* = -1$, получаем

$$\Phi_C(x) = \eta_C \mathcal{E}_J \gamma_5 \gamma_4 \Phi^+(x) \quad (\text{бозоны}), \quad (91)$$

$$\Phi_C(x) = \eta_C \mathcal{E}_J \Phi^+(x) \gamma_4 \quad (\text{фермионы}),$$

где матрица \mathcal{E}_J есть

$$\mathcal{E}_J = \begin{pmatrix} D^J(C) & 0 \\ 0 & -D^J(C) \end{pmatrix}. \quad (92)$$

В случае биспинора Дирака $D^J(C) = C$ и мы имеем

$$\psi_C = \eta_C \mathcal{E} \bar{\psi},$$

где матрица \mathcal{E} была введена по (5.66) и обладает свойствами (5.64) (с выбором нижнего знака) и (5.65).

Ранее было показано (формула (78)), что отражение P меняет местами верхние и нижние компоненты поля Φ : $\varphi \leftrightarrow \chi$. Зарядовое сопряжение выражает φ через χ^+ и χ через φ^+ . Поэтому комбинированное отражение CP связывает в отдельности верхние и нижние компоненты Φ и Φ^+ :

$$\begin{aligned} CP\Phi(x)(CP)^{-1} &= \eta_C \eta_P \mathcal{E}_J \gamma_5 \Phi^+(x^0, -x) \quad (\text{бозоны}), \\ CP\Phi(x)(CP)^{-1} &= \eta_C \eta_P \mathcal{E}_J \Phi^+(x^0, -x) \quad (\text{фермионы}). \end{aligned} \quad (93)$$

Согласно определению (63) оператор пространственного отражения P коммутирует с оператором зарядового сопряжения: $PC = CP$. Действительно, выбор фазы $\eta_P = \pm i$ для фермионов (см. (79)) обеспечивает независимость операций P и C .

Перестановочные соотношения C и CP с полным отражением θ могут быть выведены из (45), (71) и (86):

$$\theta C = C\theta, \quad \theta(CP) = (-1)^{2J}(CP)\theta. \quad (94)$$

Обращение времени. Антиунитарное преобразование обращения направления времени T находится сравнением формул (45), (71) и (86) для $\theta = CPT$ и операций P и C :

$$T = (CP)^{-1}\theta, \quad T^2 = P^2 = (-1)^{2J}. \quad (95)$$

Имея в виду, что в каноническом базисе отражение θ действует согласно (45), или

$$\theta |p, \sigma; a, \text{in}\rangle = (-1)^{J_a - \sigma} |p, -\sigma; \bar{a}, \text{out}\rangle,$$

мы находим

$$T |p, \sigma; a, \text{in}\rangle = \eta_T (-1)^{J_a - \sigma} | -p, -\sigma; a, \text{out}\rangle, \quad (96)$$

где фазовый множитель η_T не зависит от p и σ . Как и в случае отражений θ , мы оставляем символы in и out в формулах для одночастичных состояний, чтобы облегчить переход к многочастичным состояниям и квантовым полям.

Обращение времени T изменяет знак импульса и проекции спина частицы, а также превращает состояние in в состояние out и наоборот. Тип частицы при этом остается неизменным: все заряды Q_i и другие квантовые числа внутренней симметрии инвариантны относительно обращения времени T , что оправдывает трактовку T как «геометрического» отражения времени.

Перестановочные соотношения для T могут быть найдены сравнением перестановочных соотношений для θ , P и C :

$$\begin{aligned} TP_k T^{-1} &= -P_k, & TP_0 T^{-1} &= P_0, \\ TM_{ij} T^{-1} &= -M_{ij}, & TM_{0j} T^{-1} &= M_{0j}, \\ TQ_i T^{-1} &= Q_i. \end{aligned} \quad (97)$$

Из этих соотношений явствует, что операция T не изменяет спирального состояния. Поэтому в спиральном базисе при импульсе p , направленном по оси z , операция T действует согласно

$$\begin{aligned} T |p, 0, \vartheta, \lambda; a, \text{in}\rangle &= \eta_T^* |p, \pi, 0, \lambda; a, \text{out}\rangle = \\ &= \eta_T^* e^{-i\pi M_{31}} |p, 0, 0, \lambda; a, \text{out}\rangle. \end{aligned} \quad (98)$$

Вращения коммутируют с оператором Т:

$$T R(\varphi, \vartheta, \psi) T^{-1} = R(\varphi, \vartheta, \psi),$$

поэтому из (98) можно найти преобразование и в общем случае:

$$\begin{aligned} T |p, \vartheta, \varphi, \lambda; a, \text{in}\rangle &= T R(\varphi, \vartheta, -\varphi) |p, 0, 0, \lambda; a, \text{in}\rangle = \\ &= \eta_T^* R(\varphi, \vartheta, -\varphi) R(0, \pi, 0) |p, 0, 0, \lambda; a, \text{out}\rangle. \end{aligned} \quad (99)$$

Эта формула остается в силе и для другого одночастичного спирального состояния, $|p, \lambda\rangle^-$ (см. (4.63) и (4.64)).

Преобразование многочастичных состояний при обращении времени Т находится как произведение преобразований (96) или (99) одночастичных состояний. Действие операции Т на двухчастичное состояние с определенным полным спином J в спиральном базисе может быть найдено теперь аналогично тому, как ранее было найдено действие (84) отражения Р. С помощью (99) мы получаем вместо (83) выражение

$$\begin{aligned} T |0; p, \vartheta, \varphi; \lambda_a, \lambda_b\rangle &= \\ &= \eta_T^*(a) \eta_T^*(b) R(\varphi, \vartheta, -\varphi) R(0, \pi, 0) |0; p, 0, 0; \lambda_a, \lambda_b\rangle, \end{aligned}$$

откуда по (4.145) выводим искомое правило преобразования:

$$\begin{aligned} T |0, \Lambda; J, m; \lambda_a, \lambda_b\rangle &= \\ &= \eta_T^*(a) \eta_T^*(b) (-1)^{J-\lambda} |0, -\Lambda; J, m; \lambda_a, \lambda_b\rangle, \end{aligned} \quad (100)$$

где Λ — проекция полного спина J на ось z .

Преобразование операторов при антиунитарной операции Т определяется формулой того же типа (12), что и в случае полного отражения θ . Если S -матрица инвариантна относительно обращения времени, то выполняется условие

$$S = S_T = T S^+ T^{-1}.$$

Это условие известно под названием теоремы взаимности и в подробной записи выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle p_c, \lambda_c; p_d, \lambda_d; \dots | S | p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b; \dots \rangle &= \\ &= \pm \langle -p_a, \lambda_a; -p_b, \lambda_b; \dots | S | -p_c, \lambda_c; -p_d, \lambda_d; \dots \rangle. \end{aligned} \quad (101)$$

Теорема взаимности связывает амплитуды процессов $a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots$ и $c + d + \dots \rightarrow a + b + \dots$, где во втором

процессе импульсы частиц отличаются знаком от импульсов частиц в первом процессе. Для упругих процессов, когда начальные и конечные частицы одинаковы, условие (101) ограничивает возможную форму амплитуды перехода.

§ 6.3. Отражения и взаимодействия. Распады

Запись полного отражения в виде θ — СРТ подразумевает, что каждая из операций P , S и T может быть определена в отдельности. Если бы S -матрица была инвариантна относительно операций S , P , T , т. е. если бы выполнялись условия

$$CSC^{-1} = S, \quad PSP^{-1} = S, \quad TS^+T^{-1} = S, \quad (102)$$

то формулы § 6.2 определили бы эти операции. Однако в действительности все симметрии P , S и T лишь приближенные. Для нарушенной симметрии приведенные в § 6.2 определения операций P , S и T оказываются, строго говоря, несостоятельными или бесполезными.

Операции P , S и T были определены в § 6.2 как в терминах векторов состояния, так и посредством перестановочных соотношений. Возможны два случая утраты этими операциями смысла.

1. Определения (67), (82) и другие предполагают, что применение к физическому состоянию $|\alpha\rangle$ операции P приведет также к физическому состоянию. Но если симметрия относительно пространственных отражений нарушена, то вектор $P|\alpha\rangle$ может не соответствовать физическому состоянию — он может отсутствовать в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Пространство \mathcal{H} будет тогда неинвариантно относительно отражений P . Тем самым операция P теряет смысл. Аналогичные соображения можно привести и по поводу операций S и T .

Примером может служить нейтрино. Операции P и S в применении к вектору состояния нейтрино не имеет смысла, ибо как P , так и S превращают нейтринное состояние в несуществующее, и только операция CP связывает физические состояния — нейтрино ν и антинейтрино $\bar{\nu}$ [92, 93]:

$$CP|\rho, \lambda_\nu, \nu\rangle = \eta_\nu |-\rho, -\lambda_\nu, \bar{\nu}\rangle. \quad (103)$$

Спиральность нейтрино равна $\lambda_\nu = -1/2$, спиральность антинейтрино отличается знаком: $\lambda_{\bar{\nu}} = -\lambda_\nu$. Как было показано в § 4.5, с точки зрения группы Пуанкаре нейтрино и антинейтрино связаны с различными неприводимыми представлениями.

2. Векторы $P|\alpha, \text{in}\rangle$ и $P|\alpha, \text{out}\rangle$ существуют среди физических in - или out -векторов, и, следовательно, определения типа (67) имеют смысл, но условие (102) для P не выполняется (S -матрица неинвариантна относительно пространственных отражений).

В этом случае можно ввести два различных оператора P_{in} и P_{out} в общем гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$. Эти операторы будут определены соответственно по отношению к in- и out-состояниям. Связь между операторами P_{in} и P_{out} будет устанавливаться с помощью S -матрицы:

$$P_{in} = S P_{out} S^{-1}.$$

Такие операции P_{in} и P_{out} будут характеризовать свойства начальной и конечной конфигураций системы, но не симметрию законов движения или взаимодействий. Поэтому операторы P_{in} и P_{out} бесполезны для классификации состояний и вывода правил отбора при переходах.

Аналогичным образом, при S -инвариантной S -матрице можно ввести операторы C_{in} и C_{out} , а при T -инвариантной S -матрице — операторы T_{in} и T_{out} . Так как теория всегда инвариантна относительно полного отражения θ , то

$$\theta = C_{in} P_{in} T_{in} = C_{out} P_{out} T_{out}.$$

При симметрии S -матрицы относительно отражений P операторы P_{in} и P_{out} совпадают ($P_{in} = P_{out}$) и имеют смысл оператора пространственного отражения. Если такая симметрия отсутствует, то операторы P_{in} и P_{out} не удовлетворяют перестановочным соотношениям для оператора пространственного отражения, согласно которым оператор энергии остается неизменным при пространственных отражениях. Иначе говоря, в отсутствие симметрии операторы P и T не соответствуют придаваемому им геометрическому значению.

Эти общие теоретические соображения не умаляют важности C , P и T как приближенных операций симметрии. Возможность введения приближенных дискретных симметрий основывается на четких свойствах взаимодействий различного типа по отношению к отражениям и резком подразделении взаимодействий по силе.

Все современные эксперименты указывают, что сильные взаимодействия инвариантны относительно P , C и T в отдельности. В процессах с участием только электромагнитного взаимодействия P , C , T также могут рассматриваться как операции симметрии. Слабые взаимодействия нарушают C - и P -инвариантность в отдельности, однако практически во всех процессах, вызываемых слабым взаимодействием, сохраняется CP -симметрия, что в силу CPT -теоремы означает и T -симметрию. CP -симметрия нарушается в распадах K -мезонов, причем эффективная константа CP -нарушающего взаимодействия приблизительно в 1000 раз меньше константы слабого взаимодействия. Таким образом, если пренебречь эффектами слабого и CP -нарушающего (сверхслабого) взаимодействий, то матрица рассеяния будет инвариантна относительно всех трех операций C , P , T .

В случаях же слабых взаимодействий можно воспользоваться теми результатами § 6.2, которые относятся к CP- и T-инвариантности. При учете сверхслабого взаимодействия полное отражение θ оказывается единственной строгой операцией симметрии.

Приближенная трактовка отражений C, P, T легко формулируется в лагранжевом подходе. Полный лагранжиан

$$L = L_0 + L_s + L_V + L_w + L_{sw}$$

инвариантен относительно отражения $\theta = CPT$:

$$\theta L \theta^{-1} = L.$$

Слагаемые L_0 , L_s , L_V , описывающие свободные поля и их сильные и электромагнитные взаимодействия, инвариантны относительно C, P, T в отдельности, например:

$$CL_s C^{-1} = L_s, \quad PL_s P^{-1} = L_s, \quad TL_s T^{-1} = L_s.$$

Лагранжиан слабого взаимодействия L_w обладает только CP- и, следовательно, T-симметрией:

$$CPL_w (CP)^{-1} = L_w, \quad TL_w T^{-1} = L_w.$$

Лагранжиан сверхслабого взаимодействия L_{sw} инвариантен лишь относительно полного отражения θ .

Приближенная трактовка дискретных симметрий — по свойствам учитываемых взаимодействий — является необходимым элементом теории нестабильных частиц. Результаты §§ 6.1 и 6.2 относятся, строго говоря, только к абсолютно стабильным частицам, время жизни которых бесконечно велико, так как in- и out-состояния могут быть определены строго только для таких частиц. Однако абсолютно стабильные частицы составляют лишь незначительную часть всего многообразия частиц и резонансов. В случае нестабильных частиц свойства симметрии относительно отражений можно определить приближенно — по свойствам симметрии взаимодействия, при учете которого частица абсолютно стабильна. Включение остальной части взаимодействия вызывает распады этих частиц. Предполагая, что распадные взаимодействия много меньше взаимодействия, «формирующего» частицу, мы можем рассматривать распадные процессы в рамках теории возмущений. Свойства симметрии амплитуды распада определяются свойствами соответствующей части лагранжиана или гамильтониана.

Пусть частица a становится абсолютно стабильной, если пренебречь энергией взаимодействия H' в общем гамильтониане $H = H_a + H'$. Вектор состояния частицы является собственным вектором H_a (см. гл. 2). Вероятность перехода $a \rightarrow b$ определяется

матричным элементом возмущения H' . В первом приближении матрица распада равна

$$2\pi\delta^4(p-p_b)\langle b|M|\mathbf{p}, \lambda, a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle b, \text{out} | H'(x^0) | \mathbf{p}, \lambda, a \rangle dx^0. \quad (104)$$

Вероятность распада $\omega(a \rightarrow b)$ выражается формулой (см. § 2.3)

$$\omega(a \rightarrow b) = \frac{2\pi}{m_a} \int |\langle b, \text{out} | M | \mathbf{p}, \lambda, a \rangle|^2 \delta^4(p-p_b) d^4 p_b, \quad (105)$$

где $|b, \text{out}\rangle$ есть конечное (многочастичное) состояние распада.

Выражения (104) и (105) позволяют судить о поведении амплитуды и вероятности распада $a \rightarrow b$ при отражениях. Выполнение условий

$$PH'P^{-1} = H', \quad CH'C^{-1} = H', \quad TH'(x^0)T^{-1} = H'(-x^0)$$

влечет за собой инвариантность амплитуд распада относительно (соответственно) пространственного отражения P , зарядового сопряжения C и обращения времени T .

Полная вероятность распада, или обратное среднее время жизни, $1/\tau(a)$ получается суммированием (105) по всем возможным каналам распада и спиральностям образующихся частиц, а также усреднением по спиральностям распадающейся частицы a :

$$\frac{1}{\tau(a)} = \frac{2\pi}{m_a} \frac{1}{2J_a+1} \sum_{\lambda} \sum_b \int |\langle b, \text{out} | M | \mathbf{p}, \lambda, a \rangle|^2 \delta^4(p-p_b) d^4 p_b. \quad (106)$$

В силу СРТ-теоремы времена жизни частицы $\tau(a)$ и античастицы $\tau(\bar{a})$ одинаковы независимо от того, каково то взаимодействие, при учете которого частица стабильна, и каково взаимодействие, вызывающее ее распад [94]. Докажем равенство $\tau(a) = \tau(\bar{a})$ в первом приближении по энергии распадного взаимодействия H' , когда можно воспользоваться выражением (104) для матрицы распада, входящей в формулу (106) для среднего времени жизни.

Перейдем с помощью отражения θ от частиц к античастицам:

$$|\mathbf{p}, \lambda, a\rangle = (-1)^{J_a-\lambda} \theta^{-1} |\mathbf{p}, -\lambda, \bar{a}\rangle,$$

$$\langle b, \text{out} | = \langle b_{\theta}, \text{in} | \theta.$$

По сравнению с $|b, \text{out}\rangle$ в состоянии $|b_{\theta}, \text{in}\rangle$ все частицы заменены на античастицы, спиральности имеют противоположный знак

и каждой частице соответствует фазовый множитель $(-1)^{J_i - \lambda_i}$ (см. (48)). Тогда правая часть (104) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \langle b, \text{out} | H'(x^0) | p, \lambda, a \rangle dx^0 = \\ & = (-1)^{J_a - \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \langle b_{\theta}, \text{in} | \theta H'(x^0) \theta^{-1} | p, -\lambda, \bar{a} \rangle dx^0 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{J_a - \lambda} \langle b_{\theta}, \text{out} | S_0^{-1} H'(x^0) | p, -\lambda, \bar{a} \rangle dx^0, \end{aligned}$$

где S_0 есть S -матрица в пренебрежении взаимодействием H' . Но выражение

$$\sum_{\lambda} \sum_b \left| \int \langle b_{\theta}, \text{out} | S_0^{-1} H'(x^0) | p, -\lambda, \bar{a} \rangle dx^0 \right|^2$$

не зависит от оператора S_0 (ввиду унитарности S_0) и знаков спиральностей всех частиц (ввиду суммирования по ним). Следовательно, времена жизни частицы и античастицы равны:

$$\tau(a) = \tau(\bar{a}).$$

Этот результат можно получить в любом приближении теории возмущений [95]. Из доказательства не вытекает, однако, что относительные вероятности различных каналов распада и поляризации также должны быть одинаковы для частиц и для античастиц.

Обратимся к некоторым следствиям симметрии относительно отражений в случае распадов. Быстрые распады происходят за счет сильного взаимодействия; поэтому быстрые и электромагнитные распады обладают P -, C -, T -симметриями.

Наиболее просты следствия C -инвариантности, согласно которой зарядовая четность сохраняется. Вспоминая, что частицы π^0 , η , χ , A_1^0 , A_2^0 зарядово четны, а частицы γ , ρ^0 , ω , ϕ зарядово нечетны, мы можем легко написать реакции, запрещенные C -инвариантностью, например:

$$\chi \rightarrow \rho^0 + \pi^0, \quad \omega^0 \rightarrow \eta + \pi^0.$$

В случае заряженных частиц вероятности и угловые распределения для зарядово сопряженных реакций будут одинаковы. Если, например, зарядово четная нейтральная частица распадается на заряженные частицы, то распределение заряженных продуктов распада

не должно зависеть от знака заряда. Изучая распределение по заряду пионов в реакциях

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad \eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma, \quad \chi \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma,$$

можно проверить точность С-симметрии. Согласно эксперименту асимметрия пионного распределения не превышает 1% [96]. Р-инвариантность сильных и электромагнитных взаимодействий приводит к условию для амплитуды распада:

$$\langle \mathbf{p}_1, \lambda_1, b_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2, b_2; \dots | M | p, \lambda, a \rangle = \\ = \langle -\mathbf{p}_1, -\lambda_1, b_1; -\mathbf{p}_2, -\lambda_2, b_2; \dots | M | -p, -\lambda, a \rangle.$$

Пусть покоящаяся частица a со спином $J_a = 0$ распадается на две бесспиновые частицы b_1 и b_2 . По закону сохранения полный спин J конечного состояния равен нулю. Согласно (84) применение операции P к двухчастичному состоянию с нулевым общим спином дает множитель $\eta_P(b_1)\eta_P(b_2)$. Р-инвариантность амплитуды распада бесспиновой частицы на бесспиновые частицы эквивалентна поэтому сохранению внутренней четности:

$$\eta_P(a) = \eta_P(b_1) \eta_P(b_2).$$

Вследствие этого Р-симметрию иногда связывают с сохранением четности. Если спин частицы a отличен от нуля, то эта формула заменяется на другую:

$$\eta_P(a) = \eta_P(b_1) \eta_P(b_2) (-1)^{J_a}.$$

Как Р-инвариантность, так и Т-инвариантность противоречат наличию у частицы отличного от нуля дипольного электрического момента d . При пространственном отражении Р электрическое поле E , будучи полярным вектором, меняет знак: $E \rightarrow -E$, а спин частицы остается неизменным. Поэтому энергия взаимодействия диполя покоящейся частицы с электрическим полем меняет знак: $Pd(\mathbf{J}E)P^{-1} = -d(\mathbf{J}E)$. Это противоречит предположению о Р-инвариантности, и, следовательно, должно быть $d = 0$.

При обращении времени Т электрическое поле E не изменяет знака (запишем, например, $E = (e/r^3)\mathbf{r}$ и учтем, что \mathbf{r} и заряд не затрагиваются преобразованием Т). Однако $TJ_kT^{-1} = -J_k$, так что энергия дипольного взаимодействия и в этом случае изменяет знак: $Td(\mathbf{J}E)T^{-1} = -d(\mathbf{J}E)$. Следовательно, при Т-симметрии также должно быть $d = 0$. Измерение дипольного момента нейтрона дало следующую оценку: $d \leq 5 \cdot 10^{-23}e$ (см. [97, 98]). В то время как распады резонансов вызываются в основном сильными и электро-

магнитными взаимодействиями, распады «стабильных» частиц (см. табл. П.1) связаны главным образом со слабым взаимодействием (медленные распады). Поэтому медленные распады обладают только CP- и, следовательно, T-инвариантностью. В качестве интересной иллюстрации к процессам такого типа мы рассмотрим распад нейтральных K-мезонов K^0 и \bar{K}^0 [99, 100].

K-мезоны, или каоны, являются псевдоскалярными частицами, т. е. обладают спин-четностью $J^P = 0^-$. Каоны рождаются в сильных взаимодействиях, например в реакции $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$, и распадаются благодаря слабым взаимодействиям (на пионы и лептоны). Свойства нейтральных каонов K^0 и \bar{K}^0 определяются сильными взаимодействиями; K^0 и \bar{K}^0 представляют собой частицу и античастицу; можно положить

$$C|K_0\rangle = |\bar{K}_0\rangle, \quad C|\bar{K}_0\rangle = |K_0\rangle.$$

Здесь и ниже $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ обозначают векторы состояния каонов в системе ц. и.

Нейтральные каоны K^0 и \bar{K}^0 нейтральны только в электрическом смысле; они отличаются по гиперзаряду и проекции изоспина:

$$Y(K^0) = 1, \quad Y(\bar{K}^0) = -1, \quad Q = I_3 + \frac{1}{2}Y = 0.$$

Слабое взаимодействие не сохраняет гиперзаряда, и поэтому при учете слабого взаимодействия частицы K^0 и \bar{K}^0 неразличимы. Но слабое взаимодействие CP-инвариантно и может отличить CP-симметричную комбинацию K^0 и \bar{K}^0 от CP-антисимметричной. Составим эти комбинации:

$$|K_1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle),$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle).$$

Так как $P|K\rangle = -|K\rangle$, то $CP|K_1\rangle = |K_1\rangle$. Состояния $|K_1\rangle$ и $|K_2\rangle$ ортогональны: $\langle K_1|K_2\rangle = 0$.

В силу сохранения гиперзаряда в сильных взаимодействиях переходы $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ невозможны; такие переходы становятся допустимыми при учете слабых взаимодействий, которые, однако, не имеют матричных элементов, соединяющих состояние K_1 и K_2 . Для сильного и электромагнитного взаимодействий эти состояния также различны — переходов между K_1 и K_2 нет. Поэтому при учете слабых взаимодействий K_1 и K_2 следует считать частицами; имен-

но, K_1 и K_2 будут характеризоваться определенными значениями массы и времени распада.

Так как K_1 и K_2 принадлежат различным собственным значениям оператора CP , то способы распада K_1 и K_2 различны. Состояние с двумя пионами $\pi^+\pi^-$ или $\pi^0\pi^0$, обладающими полным моментом количества движения $J = 0$, является четным относительно пространственных отражений P (см. (84)) и четным относительно зарядового сопряжения C (ибо согласно (90) $\eta_C(\pi^+)\eta_C(\pi^-) = 1$). Следовательно, это состояние принадлежит тому же собственному значению CP , что и K_1 , и двухпионный канал распада возможен только для K_1 :

$$K_1 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, 2\pi^0; \quad K_2 \not\rightarrow \pi^+ + \pi^-, 2\pi^0,$$

Трехпионное состояние с частицами $\pi^+\pi^-\pi^0$ четно относительно C . Ввиду псевдоскалярного характера пионов ($\eta_P(\pi) = -1$) оно будет нечетным относительно P , если пионы находятся в состоянии с нулевым относительным угловым моментом, и может быть четным, если относительный момент одной из пар пионов отличен от нуля. Поэтому распад $K_1 \rightarrow 3\pi$ затруднен центробежным барьером, а для K_2 становится главным пионным (и специфическим) каналом распада.

Времена жизни K_1 и K_2 существенно отличаются:

$$\tau(K_1) = \tau_S = (0,862 \pm 0,006) \cdot 10^{-10} \text{ сек},$$

$$\tau(K_2) = \tau_L = (5,38 \pm 0,20) \cdot 10^{-8} \text{ сек},$$

что в значительной степени связано с различием двухчастичных и трехчастичных фазовых объемов.

В действительности существуют распады $K_2 \rightarrow 2\pi$ и $K_1 \rightarrow 3\pi$, в которых CP -симметрия нарушается. Амплитуда таких распадов мала по сравнению с CP -симметричной амплитудой. Нарушение CP -симметрии в распадах K -мезонов будет рассмотрено в § 15.6.

§ 6.4. Сводка формул по преобразованиям отражения

1. Полное отражение θ (вигнеровская трактовка) или θ^S (швингеровская трактовка):

$$\theta^2 = (\theta^S)^2 = (-1)^{2J}.$$

Инвариантный оператор H :

$$H = \theta H + \theta^{-1}, \quad H = \theta^S H (\theta^S)^{-1}.$$

Если можно ввести отдельно операции P и C , то

$$\theta = CPT, \quad \theta^S = CPT^S,$$

θ и T антиунитарны, P и C унитарны:

$$\begin{aligned} CP &= PC, & P^2 &= T^2 - (TS)^2 = (-1)^{2J}, \\ T &= \theta (CP)^{-1}, & P\theta &= (-1)^{2J} \theta P, \\ TS &= \theta^S (CP)^{-1}, & C\theta &= \theta C, C^2 = 1. \end{aligned}$$

2. Преобразование одночастичных состояний:

$$\begin{aligned} \theta |p, \lambda; a, \text{in}\rangle &= (-1)^{J-\lambda} |p, -\lambda; \bar{a}, \text{out}\rangle, \\ \theta^S |p, \lambda; a, \text{in}\rangle &= (-1)^{J-\lambda} \langle p, -\lambda; \bar{a}, \text{out} |, \\ C |p, \lambda; a\rangle &= \eta_C^*(a) |p, \lambda; \bar{a}\rangle. \end{aligned}$$

Вид приведенных выше формул не изменяется при замене спиральности λ на проекцию спина на фиксированную ось $\sigma = (J_3)'$.

$$\begin{aligned} P |p, \sigma; a\rangle &= \eta_P^*(a) | -p, \sigma; a\rangle, \\ P |p, \lambda; a\rangle &= \eta_P^*(a) (-1)^{J-\lambda} e^{i\pi M_{31}} |p, \vartheta, -\varphi, -\lambda; a\rangle, \\ T |p, \sigma; a, \text{in}\rangle &= \eta_T^*(a) (-1)^{J-\sigma} | -p, -\sigma; a, \text{out}\rangle, \\ T |p, \lambda; a, \text{in}\rangle &= \eta_T^* e^{-i\pi M_{31}} |p, \vartheta, -\varphi, \lambda; a, \text{out}\rangle, \\ TS |p, \sigma; a, \text{in}\rangle &= \eta_T^*(a) (-1)^{J-\sigma} \langle -p, -\sigma; a, \text{out} |. \end{aligned}$$

Преобразование двухчастичных состояний:

$$\begin{aligned} P |0, \Lambda; J, m; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= \\ &= \eta_T(1) \eta_T(2) (-1)^{J-J_1-J_2} |0, \Lambda; J, m; -\lambda_1, -\lambda_2\rangle. \end{aligned}$$

Фазовые множители удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \eta_P(a) \eta_P(\bar{a}) &= (-1)^{2J}, & \eta_P(a) &= \eta_P(\bar{a}), \\ \eta_C(a) \eta_C(\bar{a}) &= 1, & \eta_C(a) \eta_P(a) \eta_T(a) &= 1. \end{aligned}$$

Для нейтральной частицы $\eta_C(a_0) = \eta_C^*(a_0) = \pm 1$. В формулах для спиральных состояний импульс параметризуется с помощью углов ϑ и φ : $p = (p, \vartheta, \varphi)$.

3. Матрица рассеяния. Исходный процесс $a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots$
 θ -инвариантность:

$$\begin{aligned} \langle p_c, \lambda_c, c; p_d, \lambda_d, d; \dots | S | p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots \rangle &= \\ = \eta_\theta \langle p_a, -\lambda_a, a; p_b, -\lambda_b, b; \dots | S | p_c, -\lambda_c, \bar{c}; p_d, -\lambda_d, \bar{d}; \dots \rangle. \end{aligned}$$

P-инвариантность:

$$\begin{aligned} &\langle p_c, \lambda_c, c; p_d, \lambda_d, d; \dots | S | p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots \rangle = \\ &= \eta_p(\text{in}) \eta_p^*(\text{out}) \times \\ &\times \langle -p_c, -\lambda_c, c; -p_d, -\lambda_d, d; \dots | S | -p_a, -\lambda_a, a; -p_b, -\lambda_b, b; \dots \rangle. \end{aligned}$$

C-инвариантность:

$$\begin{aligned} &\langle p_c, \lambda_c, c; p_d, \lambda_d, d; \dots | S | p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots \rangle = \\ &= \eta_C(\text{in}) \eta_C^*(\text{out}) \langle p_c, \lambda_c, \bar{c}; p_d, \lambda_d, \bar{d}; \dots | S | p_a, \lambda_a, \bar{a}; -p_b, \lambda_b, \bar{b}; \dots \rangle. \end{aligned}$$

T-инвариантность

$$\begin{aligned} &\langle p_c, \lambda_c, c; p_d, \lambda_d, d; \dots | S | p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b; \dots \rangle = \\ &= \pm \langle -p_a, \lambda_a, a; -p_b, \lambda_b, b; \dots | S | -p_c, \lambda_c, c; -p_d, \lambda_d, d; \dots \rangle \end{aligned}$$

Здесь η_θ — произведение множителей $(-1)^{J-\lambda}$ для всех частиц; $\eta_p(\text{in})$ и $\eta_p(\text{out})$ — произведение четностей для начального и конечного состояний, $\eta_C(\text{in})$ и $\eta_C(\text{out})$ — аналогичные произведения фазовых множителей η_C . Все формулы приведены для спирального базиса.

4. Преобразование полей. $\Phi^J(x)$ — $2(2J+1)$ -компонентные поля со спином J ; поле $\Phi^{1/2}(\bar{x})$ совпадает с дираковским полем $\psi(x)$; $\Psi_{\alpha\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ — поле Рариты—Швингера, $\Psi_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}(x)$ — поле Баргмана—Вигнера.

Одно из возможных представлений для матриц $\gamma_4, \gamma_5, \mathcal{E}_J$ имеет вид

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_J = \begin{pmatrix} D^J(C) & 0 \\ 0 & -D^J(C) \end{pmatrix}.$$

Результаты сведены в табл. 6.1.

5. Преобразование билинейных эрмитовых величин («токов») в случае дираковского поля ($J = 1/2$). Билинейные эрмитовы «токи» j^R определены формулой

$$j^R(x) = \frac{1}{2} [\bar{\psi}^\alpha(x), \psi_\beta(x)] (\gamma^R)_{\alpha\beta}, \quad j^{R+} = j^R,$$

где γ^R — одна из дираковских матриц (5.55), удовлетворяющих условию $\gamma^R = \gamma_4 \gamma^{R+} \gamma_4$.

Таблица 6.1

$\zeta(x)$	J	$\theta \zeta \theta^{-1}$	$\theta^S \zeta (\theta^S)^{-1}$
$\Phi^J(x)$	$0, 1, 2, \dots$	$\Phi^{J+}(-x) \gamma_5$	$\gamma_5 \Phi^J$
$\Phi^J(x)$	$1/2, 3/2, \dots$	$\Phi^{J+}(-x) \gamma_5$	$\gamma_5 \Phi^J$
$\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$	$n + 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^{J-1/2} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^+(-x) \gamma_5$	$\gamma_5 (-1)^{J-1/2} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(-x)$
$\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) \equiv \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$	$n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^J \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^+(-x)$	$(-1)^J \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(-x)$
$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$	$1/2n$	$\Psi^+(-x) \gamma_5^{(1)} \dots \gamma_5^{(n)}$	$\gamma_5^{(1)} \dots \gamma_5^{(n)} \Psi(-x)$

Продолжение

$\zeta(x)$	$C \zeta C^{-1}$	$P \zeta P^{-1}$	$T \zeta T^{-1}$
$\Phi^J(x)$	$\eta_C \mathcal{E}_J \gamma_5 \gamma_4 \Phi^{J+}(x)$	$\eta_P \gamma_4 \Phi^J(x^0, -x)$	$\eta_T \mathcal{E}_J^{-1} \Phi^J(-x^0, x)$
$\Phi^J(x)$	$\eta_C \mathcal{E}_J \gamma_4 \Phi^{J+}(x)$	$\eta_P \gamma_4 \Phi^J(x^0, -x)$	$\eta_T \mathcal{E}_J^{-1} \gamma_5 \Phi^J(-x^0, x)$
$\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$	$\eta_C \mathcal{E} \gamma_4 \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$	$\eta_P (-1)^n \gamma_4 \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x^0, -x), \mu_l \neq 0$	$\eta_T \mathcal{E}^{-1} \gamma_5 \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(-x^0, x)$
$\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) \equiv \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$	$\eta_C \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^+(x)$	$\eta_P (-1)^J \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x^0, -x), \mu_l \neq 0$	$\eta_T \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(-x^0, x)$
$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$	$\eta_C (\mathcal{E} \gamma_4)^{(1)} \dots (\mathcal{E} \gamma_4)^{(n)} \Psi^+(x)$	$\eta_P \gamma_4^{(1)} \dots \gamma_4^{(n)} \Psi(x^0, -x)$	$\eta_T (\mathcal{E}^{-1} \gamma_5)^{(1)} \dots \Psi(-x^0, x)$

При отражениях «токи» j^R приобретают множитель $\varepsilon^R = \pm 1$, например:

$$\theta j^R(x) \theta^{-1} = \varepsilon_\theta^R j^R(x_\theta), \quad \varepsilon_\theta^R = \pm 1,$$

где x_θ обозначает преобразованную координату. Величины j^R преобразуются одинаково в вигнеровской и швингеровской трактовках отражений θ и T . Множители ε_σ^R для отражений $\sigma = \theta, P, C, T, CP$ приведены в табл. 6.2.

Т а б л и ц а 6.2

γ^R	θ	P	C	T	CP
I	+	+	+	+	+
γ^k	-	-	-	-	+
γ_4	-	+	-	+	-
σ^{ij}	+	+	-	-	-
σ^{k4}	+	-	-	+	+
$i\gamma^k \gamma_5$	-	+	+	+	-
$i\gamma_4 \gamma_5$	-	-	+	-	+
$i\gamma_5$	+	-	+	-	-

Глава 7

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ. КИНЕМАТИКА

Свойства матрицы рассеяния можно подразделить на кинематические и динамические. Кинематические свойства имеют своей основой пространственно-временную симметрию, или инвариантность теории относительно преобразований квантовомеханической группы Пуанкаре. Динамические свойства S -матрицы определяются особенностями взаимодействий. В этой главе мы рассмотрим кинематические свойства S -матрицы.

§ 7.1. Задача кинематики

В гл. 4 мы изучили описание асимптотических состояний частиц с точки зрения группы Пуанкаре. Для свободных частиц, а значит, и для асимптотических состояний в теории взаимодействующих частиц такой подход позволяет дать исчерпывающее описание. Матричный элемент S -матрицы, соответствующий процессу $1 + 2 + \dots \rightarrow 1' + 2' + \dots$, равен (в спиральном базисе)

$$\langle f | S | i \rangle = \langle p_1', \lambda_1', 1'; p_2', \lambda_2', 2'; \dots | S | p_1, \lambda_1, 1; p_2, \lambda_2, 2; \dots \rangle, \quad (1)$$

где для краткости номер частицы ($k = 1, 2, \dots$) отмечает ее релятивистские свойства — массу m_k , спин J_k , а также другие квантовые числа.

На опыте непосредственно измеряются инвариантные величины (такие, как энергия, углы и т. д.), которые зависят от системы отсчета. Вследствие этого начальные и конечные асимптотические состояния измеряются при сдвигах и вращениях:

$$|f\rangle \rightarrow |f_g\rangle, \quad |i\rangle \rightarrow |i_g\rangle.$$

Но в силу релятивистской инвариантности матричный элемент перехода (1) не может зависеть от системы отсчета:

$$\langle f_g | S | i_g \rangle = \langle f | S | i \rangle,$$

т. е. матричные элементы S -матрицы должны быть функциями инвариантов (выражающихся через измеряемые неинвариантные величины). Это условие релятивистской инвариантности S -матрицы позволяет выявить часть зависимости (кинематическую зависимость) матричных элементов (1) от инвариантов, а именно ту зависимость, о которой можно судить по трансформационным свойствам асимптотических состояний.

Преобразование любого вектора состояния, вызванное сдвигами и лоренцевыми вращениями, $g = (a, A)$ описывается унитарным оператором $U(a, A)$, например:

$$|f_g\rangle = U(a, A)|f\rangle.$$

Поэтому условие релятивистской инвариантности S -матрицы есть

$$S = U^{-1}(a, A) S U(a, A).$$

Если записать $U(a, A)$ через генераторы P_μ и $M_{\mu\nu}$:

$$U(a, A) = e^{iP_\mu a^\mu} e^{-i\frac{1}{2} M_{\lambda\nu} \omega^{\lambda\nu}},$$

то мы приходим к равенствам

$$[P_\mu, S] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, S] = 0,$$

откуда следуют законы сохранения для P_μ и $M_{\lambda\nu}$.

Асимптотические состояния преобразуются как произведение одночастичных состояний (см. § 1.4 и 4.6). Трансформационные свойства одночастичных состояний были установлены в § 4.3 (формула (4.47)).

При преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(A)x^\nu + a^\mu$ вектор состояния частицы испытывает унитарное преобразование $U(a, A)$:

$$U(a, A)|p, \xi\rangle = e^{i p' a} \sum_{\xi'=-J}^J |\rho', \xi'\rangle \mathcal{D}_{\xi'\xi}^J(\tilde{A}(\rho, A)),$$

где $\rho' = \Lambda(A)\rho$, $\mathcal{D}_{\xi'\xi}^J$ — матрица группы вращений для спина J (см. § 3.5), $\tilde{A}(\rho, A)$ — 2×2 -матрица (4.45) вигнеровского вращения спина, которое сопутствует лоренцевым преобразованиям; это вращение зависит от импульса посредством матрицы $\alpha(\rho)$, соответствующей преобразованию Лоренца от состояния покоя ($\rho = 0$) к импульсу ρ :

$$\tilde{A}(\rho, A) = \alpha(\rho') A \alpha^{-1}(\rho).$$

В спиральном базисе ξ есть спиральность λ , а оператор $\alpha(\mathbf{p})$ выбирается в виде (4.60) или (4.63): $\alpha(\mathbf{p}) = h(\mathbf{p})$ или $\alpha(\mathbf{p}) = h^-(\mathbf{p})$. В каноническом базисе ξ есть σ -проекция спина на заданное направление n_μ , ортогональное импульсу: $p^\mu n_\mu = 0$. В этом базисе оператор $\alpha(\mathbf{p})$ обычно выбирается самосопряженным: $\alpha(\mathbf{p}) = \alpha^+(\mathbf{p})$ (см. (4.22) и (4.24)). Таким образом, условие релятивистской инвариантности S -матрицы

$$\langle f_g | S | i_g \rangle = \langle f | U^{-1}(g) S U(g) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle$$

означает, что

$$\begin{aligned} \langle p_1', \lambda_1', 1'; \dots | S | p_1, \lambda_1, 1; \dots \rangle = \\ = \sum_{(\mu, \mu')} \mathcal{D}_{\lambda_1' \mu_1'}^{J_1'}(\tilde{A}(p_1', A)) \dots \langle \Lambda p_1', \mu_1', 1'; \dots | S | \Lambda p_1, \mu_1, 1; \dots \rangle \times \\ \times \mathcal{D}_{\mu_1' \nu_1}^{J_1'}(\tilde{A}(p_1, A)) \dots e^{i\alpha A(p_1 + \dots - p_1' - \dots)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Если все частицы в (1) бесспиновые, то согласно (2) матричный элемент (1) может зависеть только от релятивистских инвариантных переменных $p_r p_j$, составленных из импульсов частиц. Если частицы имеют спин, то возникает задача подразделения матричного элемента (1) на независимые релятивистски инвариантные «скалярные» амплитуды F_l и кинематические множители Z_l , связанные со спином:

$$\langle f | S | i \rangle = \sum_l Z_l(f, i) F_l(p_r p_j), \quad (3)$$

причем F_l зависит лишь от инвариантных импульсных переменных $p_r p_j$.

Разложение типа (3) позволяет разделить кинематические и динамические аспекты теории: кинематика определяет Z_l , динамика устанавливает зависимость скалярных амплитуд F_l от скалярных импульсных переменных. Кинематические множители Z_l находятся сравнительно легко; их можно считать известными. Напротив, вычисление функций F_l упирается, как правило, в нерешенные вопросы теории.

Разложение (3) матричного элемента перехода по скалярным амплитудам не является единственным способом кинематического анализа. Многочастичные состояния $|i\rangle$ и $|f\rangle$ могут быть разложены по неприводимым представлениям группы Пуанкаре (см. § 4.6), характеризующимся полной массой m и полным спином J . Вследствие релятивистской инвариантности оператор S диагонален по m и J , так что матричный элемент (1) также может быть записан (символически) в виде разложения:

$$\langle f | S | i \rangle = \sum_J S_{if}(J, m) Y_{Jm}(i, f), \quad (4)$$

где $S(J, m)$ описывает рассеяние с заданными J, m , а известные функции Y_{Jm} определяются группой Пуанкаре. Многочастичные

состояния $|J, m\rangle$ могут быть заданы в различных базисах, и потому существует несколько способов разложений типа (4).

Отыскание разложений (3) и (4), т. е. отыскание набора величин Z_l и Y_{Jm} , и составляет задачу кинематики матрицы рассеяния.

§ 7.2. Переменные s, t, u

Скалярные амплитуды F_l в разложении (3) для матричного элемента перехода зависят от инвариантных переменных, составленных из импульсов частиц. Мы рассмотрим в этом параграфе построение таких переменных на примере процессов, в которых в начальном и конечном состояниях участвуют 4 частицы. Тогда имеется 4 импульса p_r ($r = 1, 2, 3, 4$), лежащих на поверхности масс $p_r^2 = m_r^2$ и связанных законом сохранения

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (5)$$

В зависимости от знака временной компоненты p_{r0} эти импульсы участвуют в кинематике одной из следующих трех реакций:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (s\text{-канал}), \quad (6)$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad (t\text{-канал}), \quad (7)$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2} \quad (u\text{-канал}), \quad (8)$$

где символ \bar{r} обозначает античастицу частицы r .

Реакции (6)—(8) называются перекрестными. Каждая из них может быть получена из любой другой заменой частицы в начальном (конечном) состоянии на античастицу в конечном (начальном) состоянии. Объединение именно этих процессов для совместного рассмотрения связано со свойством перекрестной симметрии амплитуды (см. ниже § 11.2). В локальной теории амплитуды трех процессов (6)—(8) описываются формулами одинакового вида.

Все начальные и конечные состояния в (6)—(8) обладают, конечно, положительной энергией. В соответствии с (5) мы полагаем все $p_{r0} > 0$ для реакций (6). Тогда в реакции (7) $p_{10}, p_{40} > 0$ и $p_{30}, p_{20} < 0$, а в реакции (8) $p_{10}, p_{30} > 0$ и $p_{20}, p_{40} < 0$. При переходе к перекрестной реакции импульс частицы в начальном состоянии p заменяется на импульс античастицы ($-p$) в конечном состоянии, так что, например, закон сохранения (5) для реакции (7) превращается в

$$p_1 + (-p_3) = (-p_2) + p_4 \quad (p_{30} < 0, p_{20} < 0).$$

Физические 4-импульсы частиц в реакции (7) равны $p_1, -p_2, -p_3, p_4$, так что условие $p_{20} < 0, p_{30} < 0$ есть как раз условие положительности энергии частиц. Графически перекрестные процессы изображены на рис. 3.

В силу СРТ-инвариантности теории вместе с реакциями (6) — (8) следует одновременно рассматривать 3 СРТ-сопряженные реакции, получаемые из (6)—(8) заменой всех частиц на античастицы и перестановкой начального и конечного состояний. В случае инвариантности теории относительно зарядового сопряжения C (что всегда имеет место при учете только сильных и электромагнитных взаимодействий) к этим 6 реакциям добавляются еще 6 C -сопряженных

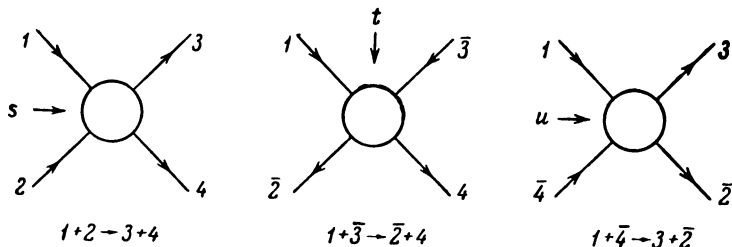


Рис. 3.

реакций, в которых все частицы заменены на античастицы. Таким образом, в теории сильных взаимодействий целесообразно рассматривать вместе 12 матричных элементов (амплитуды процессов (6)—(8) и 9 других, получаемых из (6)—(8) как перестановкой начального и конечного состояний, так и заменой всех частиц на античастицы).

Из четырех импульсов p_r с заданным квадратом $p_r^2 = m_r^2$ и условием (5) можно построить два независимых инварианта. Чтобы сохранить симметрию между реакциями (6)—(8), обычно вводится три инварианта:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

связанных равенством

$$s + t + u = \sum_r m_r^2 = h.$$

Величина s имеет смысл квадрата энергии в системе ц. и. для реакции (6); аналогичным образом величины t и u являются квадратами энергии в системе ц. и. соответственно для реакций (7) и (8). Поэтому о реакциях (6), (7) и (8) говорят как об s -канале, t -канале и u -канале системы трех перекрестных реакций. Очевидно, что в s -канале $s > 0$, в t -канале $t > 0$ и в u -канале $u > 0$. Определим параметры реакции в s -канале в системе ц. и.:

$$\begin{aligned} q_{12}(s) &= p_1 = -p_2, & q_{34}(s) &= p_3 = -p_4, \\ s &= (p_{10} + p_{20})^2, & p_1 p_3 &= q_{12} q_{34} z_4, \end{aligned} \quad (10)$$

где $z_s = \cos \vartheta_s$ — косинус угла рассеяния (в s -канале), а $q_{ij} = |q_{ij}|$. Рассеянию вперед соответствует $z_s = 1$, или $p_1 = p_3$ (но не $p_1 = p_4$).

Аналогичные параметры $q_{13}(t)$, $q_{24}(t)$ и $z_t = \cos \vartheta_t$ в t -канале получаются из (10) в соответствии с (6) и (7) заменой

$$p_1 \rightarrow p_1, \quad p_2 \rightarrow -p_3, \quad p_3 \rightarrow p_4, \quad p_4 \rightarrow -p_2.$$

Чтобы найти параметры u -канала, следует произвести замену

$$p_1 \rightarrow p_1, \quad p_2 \rightarrow -p_4, \quad p_3 \rightarrow -p_2, \quad p_4 \rightarrow p_3.$$

Следовательно, в системе ц. и. t -канала будет

$$\begin{aligned} q_{13}(t) &= p_1 = p_3, & q_{24} &= p_2 = p_4, \\ t &= (p_{10} + |p_{30}|)^2, & p_1 p_4 &= q_{13} q_{24} z_t, \end{aligned} \quad (11)$$

а в системе ц. и. u -канала знак z_u фиксируется равенством

$$p_1 p_2 = -q_{14} q_{23} z_u.$$

Обозначим

$$\Delta_{ij}^2(x) = [x - (m_i + m_j)^2] [x - (m_i - m_j)^2]. \quad (12)$$

Тогда для всех каналов рассеяния

$$4xq_{ij}^2(x) = \Delta_{ij}^2(x). \quad (13)$$

Косинусы углов рассеяния z_s , z_t и z_u соответственно в s -, t - и u -каналах имеют вид

$$z_s = \frac{s(t-u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\Delta_{13}(s)\Delta_{34}(s)}, \quad (14)$$

$$z_t = \frac{t(u-s) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{\Delta_{13}(t)\Delta_{24}(t)}, \quad (15)$$

$$z_u = \frac{u(s-t) + (m_1^2 - m_4^2)(m_2^2 - m_3^2)}{\Delta_{14}(u)\Delta_{23}(u)}. \quad (16)$$

В случае упругого рассеяния, когда $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$, мы находим, что $q_{12} = q_{34}$ и

$$\begin{aligned} t &= -(q_{12} - q_{34})^2 = -2q_{12}^2(s)(1 - z_s) = -\frac{\Delta_{12}^2(s)}{2s}(1 - z_s), \\ \mu &= -2q_{12}^2(s)(1 + z_s) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{s}. \end{aligned} \quad (17)$$

Особенно просто выглядят все соотношения, когда четыре частицы одинаковы ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$):

$$\Delta_{12}^2(s) = s(s - 4m^2), \quad q_{12}^2 \equiv q^2 = \frac{s - 4m^2}{4},$$

$$t = -\frac{s - 4m^2}{2}(1 - z_s), \quad u = -\frac{s - 4m^2}{2}(1 + z_s). \quad (18)$$

Если $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$, то существует еще канал распада $1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4$. В этом случае, очевидно, все три инварианта s , t , u имеют смысл передачи импульса.

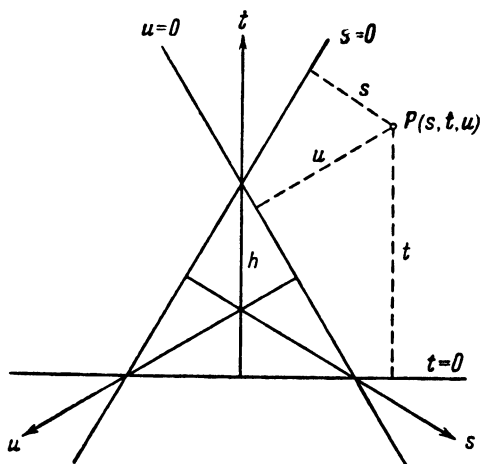


Рис. 4.

В каждом канале переменные s , t , u могут иметь значения, принадлежащие только определенной области — физической области данного канала. Физическая область для s -канала включает только такие s , t , u , для которых

$$|z_s| \leq 1, \quad q_{12}(s) > 0, \quad q_{34}(s) > 0. \quad (19)$$

Например, для упругого рассеяния ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) физическая область s -канала содержит значения

$$s \geq (m_1 + m_2)^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq (m_1 - m_2)^2. \quad (20)$$

В общем случае границы физических областей для каждого канала мы получаем, подставив $z = \pm 1$ в формулы (14)–(16).

На границе физической области независимые импульсы p_1 , p_2 , p_3 становятся линейно зависимыми, или же $L^2 = 0$, где $L_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p_1^\nu p_2^\lambda p_3^\sigma$.

Отсюда [101]

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & \rho_1 \rho_2 & \rho_1 \rho_3 \\ \rho_2 \rho_1 & \rho_2^2 & \rho_2 \rho_3 \\ \rho_3 \rho_1 & \rho_3 \rho_2 & \rho_3^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

что дает соотношение, определяющее границы физических областей сразу во всех трех каналах:

$$stu = as + bt + cu, \quad (22)$$

$$a = \frac{1}{h} (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \quad (23)$$

$$b = \frac{1}{h} (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2) (m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \quad (24)$$

$$c = \frac{1}{h} (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) (m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2). \quad (25)$$

Внутри физической области $L^2 < 0$, или $\Delta > 0$, ибо L_μ — пространственноподобный вектор. Формула (22) определяет кривую третьего порядка с асимптотами $s = 0$, $t = 0$, $u = 0$.

Физические области переменных s, t, u можно наглядно изобразить на stu -плоскости, или плоскости Мандельштама [102]. Чтобы сохранить симметрию относительно s, t, u при учете связи $s + t + u = h$, удобно ввести треугольные координаты, когда сумма расстояний от точки $P(s, t, u)$ до координатных осей, образующих при пересечении равносторонний треугольник, всегда равна h (рис. 4).

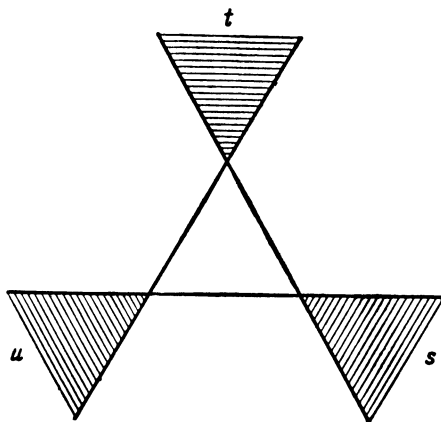


Рис. 5.

При упругом рассеянии одинаковых частиц ($m_i = m$) физические области s -, t -, u -каналов занимают треугольные секторы:

$$s \geq 4m^2, t \leq 0, u \leq 0 \text{ (} s\text{-канал);}$$

$$s < 0, t \geq 4m^2, u \leq 0 \text{ (} t\text{-канал);}$$

$$s \leq 0, t \leq 0, u \geq 4m^2 \text{ (} u\text{-канал)}$$

(рис. 5); в этом случае картина на stu -плоскости инвариантна относительно вращения на 120° .

§ 7.3. Сечения процессов. Унитарность и оптическая теорема

В экспериментах по рассеянию измеряются сечения, т. е. вероятности процессов (в единице объема и в единицу времени), отнесенные к единичному потоку сталкивающихся частиц. В то время как матричный элемент (1) и вероятности процессов (1.70) зависят от нормировки одночастичных состояний (и при неинвариантной нормировке, отличной от принятой нами, могут быть неинвариантными величинами), сечения не зависят от этой нормировки.

Вывод выражения для сечения через матрицу рассеяния может быть найден практически в любой книге по теории рассеяния или теории элементарных частиц. Поэтому мы приведем ниже только основные этапы вывода, поясняющие обозначения и особенности формул в связи с принятой нами нормировкой.

Рассмотрим процесс, начинающийся столкновением двух частиц: $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$, и предположим для простоты, что в исходном и конечном состояниях нет тождественных частиц. Если импульсы частиц конечного состояния находятся в области $\delta = \Delta p_1 \dots \Delta p_n$ со средними импульсами p_1, \dots, p_n , то вектор конечного состояния $|f\rangle$ равен

$$|f\rangle = \int_{\delta} d^3 p_1 \dots d^3 p_n |p_1, \lambda_1, 1\rangle \dots |p_n, \lambda_n, n\rangle. \quad (26)$$

Норма состояния (26) равна

$$\langle f|f\rangle = N_1 \dots N_n \Delta p_1 \dots \Delta p_n 2p_{10} \dots 2p_{n0}, \quad (27)$$

где N_k входит в норму одночастичного состояния для частицы k :

$$\langle p, \lambda, k | p', \lambda', k \rangle = N_k 2p_{k0} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p - p'). \quad (28)$$

Наш выбор

$$N_k = 1 \quad (29)$$

одинаков для бозонов и фермионов.

При конечном состоянии (26) матричный элемент перехода из начального состояния

$$|i\rangle = |p_a, \lambda_a, a; p_b, \lambda_b, b\rangle \quad (30)$$

равен, согласно (1.67) и (26),

$$\langle f | S - 1 | i \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - \dots - p_n) \times \\ \times \langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle \Delta p_1 \dots \Delta p_n,$$

где для краткости мы обозначили

$$|p_1, \lambda_1, 1; \dots; p_l, \lambda_l, l\rangle = |1, \dots, l\rangle.$$

Выведенная ранее формула (1.70) относится к вероятности перехода (за единицу времени в единице объема) из состояния (30) в состояние, нормированное на единицу. Имея в виду нормировку (27), мы должны заменить (1.70) формулой

$$w(i \rightarrow f) = (2\pi)^4 \delta^4(p(i) - p(f)) \frac{|\langle f | T | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle}.$$

Подставляя сюда (27) и

$$\langle f | T | i \rangle = \langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle \Delta p_1 \dots \Delta p_n,$$

мы находим вероятность процесса $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$:

$$\begin{aligned} w(a + b \rightarrow 1 + \dots + n) &= (2\pi)^4 |\langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle|^2 \times \\ &\times \delta^4(p_a + p_b - p_1 - \dots - p_n) (2\rho_{10} \dots 2\rho_{n0} N_1 \dots N_n)^{-1} dp_1 \dots dp_n = \\ &= (2\pi)^4 |\langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle|^2 (N_1 \dots N_n)^{-1} dR_n(p_a + p_b), \end{aligned} \quad (31)$$

где мы ввели элемент инвариантного объема в импульсном пространстве частиц $1, \dots, n$:

$$dR_n(p) = \delta^4(p - p_1 - \dots - p_n) \delta(p_1^2 - m_1^2) \dots \delta(p_n^2 - m_n^2) d^4 p_1 \dots d^4 p_n. \quad (32)$$

Вероятность (31) можно представить как произведение плотности потока частиц в начальном состоянии $j(a, b)$ на дифференциальное сечение процесса $d\sigma(a + b \rightarrow 1 + \dots + n)$:

$$w(a + b \rightarrow 1 + \dots + n) = j(a, b) d\sigma(a + b \rightarrow 1 + \dots + n). \quad (33)$$

Плотность потока $j(a, b)$ равна произведению плотности числа частиц a и b на относительную скорость v_{ab} в системе ц. и.:

$$\begin{aligned} j(a, b) &= \rho_a \rho_b v_{ab} = \rho_a \rho_b q_{ab} \left(\frac{1}{p_{a0}} + \frac{1}{p_{b0}} \right) = \\ &= \rho_a \rho_b \frac{q_{ab} \sqrt{s}}{\rho_{a0} \rho_{b0}} = \rho_a \rho_b \frac{F}{\rho_{a0} \rho_{b0}}, \end{aligned} \quad (34)$$

где величина

$$F = \frac{\Delta_{ab}}{2} = \frac{\sqrt{[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2]}}{2} \quad (35)$$

называется инвариантным потоком Мёллера.

Одночастичные состояния $|p, \lambda, r\rangle$ нормированы согласно (28) таким образом, что плотность числа частиц ρ_r (с заданным λ) равна

$$\rho_r = \frac{N_r 2p_0}{(2\pi)^3}. \quad (36)$$

При этом спиноры u и v следует нормировать согласно равенству

$$u^+(p, \lambda) u(p, \lambda') = N_r 2p_0 \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (37)$$

так что, например, волновая функция частицы со спином $1/2$ есть

$$\langle 0 | \Psi_\alpha(x) | p, \lambda \rangle = \frac{u_\alpha(p)}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx}. \quad (38)$$

В случае частицы со спином 0

$$\langle 0 | \varphi(x) | p, J=0 \rangle = \frac{N^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx}. \quad (39)$$

Таким образом, плотность потока $j(a, b)$ равна

$$j(a, b) = \begin{cases} \frac{2\Delta_{ab}}{(2\pi)^6} N_a N_b, \\ \frac{2\Delta_{ab}}{(2\pi)^6} \text{ в нашей нормировке.} \end{cases} \quad (40)$$

Из формул (31), (33), (40) явствует, что при нормировке (29) плотность потока $j(a, b)$ становится релятивистски инвариантной, а сечение $d\sigma$ выражается только через инвариантные величины. В дальнейшем мы полагаем $N_k = 1$. В действительности $d\sigma$ не зависит от постоянных нормировки N_k , ибо в $d\sigma$ матричный элемент (31) входит всегда в комбинации с $(N_1 \dots N_n)^{-1}$.

Окончательно, дифференциальное сечение процесса $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$ равно

$$d\sigma = \frac{32}{B^2 \Delta_{ab}} |\langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle|^2 dR_n(p_a + p_b), \quad (41)$$

где инвариантная величина Δ_{ab} и элемент фазового объема dR_n даны формулами (12) и (32). Мы ввели в (41) обозначение

$$B = \frac{8}{(2\pi)^6} \quad (42)$$

для численного коэффициента, который будет часто встречаться в последующих формулах.

Полное сечение процесса $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$ находится интегрированием по импульсам образовавшихся частиц и суммированием по их спиновым состояниям $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\begin{aligned} \sigma(a + b \rightarrow 1 + \dots + n) &= \\ &= \frac{32}{B^2 \Delta_{ab}} \sum_{(\lambda)} \int |\langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle|^2 dR_n(p_a + p_b). \end{aligned} \quad (43)$$

В том случае, когда амплитуда может считаться независимой от импульсов конечного состояния, это сечение будет пропорционально

инвариантному фазовому объему

$$R_n = \int dR_n. \quad (44)$$

Наконец, полное сечение σ_{tot} для рассеяния частиц a и b , т. е. полное сечение процесса $a + b \rightarrow$ (что угодно), получается суммированием (43) по всем возможным конечным состояниям $|f\rangle$ с различными частицами и с различным числом частиц:

$$\sigma_{\text{tot}}(a, b) = \sum_f \sigma(a + b \rightarrow f). \quad (45)$$

Если начальный поток не поляризован, то необходимо усреднить сечение по ориентации спина в начальном состоянии; это эквивалентно операции

$$\frac{1}{(2J_a + 1)(2J_b + 1)} \sum_{\lambda_a, \lambda_b}. \quad (46)$$

До сих пор предполагалось, что среди частиц $1, \dots, n$ нет тождественных. Рассмотрим теперь случай, когда все частицы $1, \dots, n$ тождественны. Пусть частицы скалярные. Положим

$$|f\rangle = \int_{\delta} d^3 p_1 \dots d^3 p_n a^+(p_1) \dots a^+(p_n) |0\rangle,$$

где $\delta = \Delta p_1 \dots \Delta p_n$. Если области Δp_i не перекрываются, то нормировка (27) сохраняется и для одинаковых частиц (мы считаем $N_r = 1$):

$$\langle f | f \rangle = \Delta p_1 \dots \Delta p_n 2p_{10} \dots 2p_{n0}.$$

Множитель $n!$ не появляется. Проводя все вышеприведенные вычисления, мы убеждаемся, что в случае одинаковых частиц получается такая же формула (41) для $d\sigma$, как и в случае разных частиц. Иначе говоря, тождественность частиц не сказывается на дифференциальном сечении, если оно определено формулой (33):

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + \dots + n) = \frac{w(a + b \rightarrow 1 + \dots + n)}{j(a, b)},$$

где w — вероятность перехода в состояние $|f\rangle$, в котором имеются одинаковые частицы внутри областей $\Delta p_1, \dots, \Delta p_n$.

Однако при вычислении полного сечения и ниже в условии унитарности (см. (51)) появляется множитель $(n!)^{-1}$. Действительно, в этих формулах нужно интегрировать не по всему пространству импульсов в конечном состоянии (p_1, \dots, p_n) , но лишь по его $(1/n!)$ -й части. Состояния, отличающиеся перестановкой тождественных частиц, должны рассматриваться как одно состояние, учитываемое один раз. Если в числе частиц $1, \dots, n$ есть ν_r частиц сорта r , то инвариантный объем dR_n заменяется на $dR_n/\nu_r!$

Наиболее интересен процесс $a + b \rightarrow 1 + 2$. Переходя к системе ц. и. с $p_1 = -p_2 = q_{12}$ и интегрируя dR_2 по всем переменным, кроме полярных углов вектора q_{12} , мы получаем

$$dR_2(\sqrt{s}) = \frac{1}{4} \frac{q_{12}}{\sqrt{s}} d\Omega, \quad d\Omega = -d\varphi dz_s. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (41) и имея в виду, что согласно (13) $\Delta_{ab}(s) = 2\sqrt{s}q_{ab}$, мы находим дифференциальное сечение бинарного процесса:

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + 2) = \frac{4}{sB^2} |\langle 1, 2 | T | a, b \rangle|^2 \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{ab}(s)} d\Omega. \quad (48)$$

В случае упругого рассеяния $\Delta_{12} = \Delta_{ab}$ и, следовательно,

$$d\sigma(a + b \rightarrow a + b) = \frac{4}{sB^2} |\langle a', b' | T | a, b \rangle|^2 d\Omega,$$

где a' и b' обозначают частицы a и b в состоянии после рассеяния. Обычное определение нормированной амплитуды рассеяния $f_{ab}(s, \vartheta, \varphi)$, восходящее к нерелятивистской теории, основывается на формуле

$$d\sigma(a + b \rightarrow a + b) = |f_{ab}(s, \vartheta, \varphi)|^2 d\Omega.$$

Следовательно, соответствие между амплитудой $f_{ab}(s, \vartheta, \varphi)$ и матричным элементом

$$\langle a', b' | T | a, b \rangle \equiv \langle p_{a'}, \lambda_{a'}; p_{b'}, \lambda_{b'} | T | p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b \rangle,$$

который связан с элементом S -матрицы соотношением (30), можно записать в виде

$$f_{ab}(s, \vartheta, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{s}B} \langle p_{a'}, \lambda_{a'}; p_{b'}, \lambda_{b'} | T | p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b \rangle. \quad (49)$$

Во избежание путаницы мы будем проводить все вычисления, используя матричные элементы $\langle a', b' | T | a, b \rangle$.

Приведем выражение для дифференциального сечения (48) как функции инвариантной переменной $t = (p_a - p_1)^2$, $dt = 2q_{ab} q_{12} dz_s$, для случая бесспиновых частиц. В этом случае амплитуда процесса зависит только от инвариантных переменных s, t, u , связанных условием $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2$, т. е. $\langle 1, 2 | T | a, b \rangle = F(s, t, u)$. Согласно (48)

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + 2) = -\frac{16\pi}{B^2 \Delta_{ab}^2(s)} |F(s, t, u)|^2 dt. \quad (50)$$

Условие унитарности (1.68) может быть теперь записано в явном виде.

Полнота системы состояний $|m\rangle$ означает, что

$$1 = \sum_m |m\rangle \langle m| = \sum_{(n)} \sum_{(\lambda)} \int \frac{d^3 p_1}{2p_{10}} \dots |p_1, \lambda_1; \dots\rangle \langle p_1, \lambda_1; \dots| \frac{1}{v_1! \dots} = \\ = \sum_{(n)} \sum_{(\lambda)} \int d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \dots |p_1, \lambda_1; \dots\rangle \langle p_1, \lambda_1; \dots| \frac{1}{v_1! \dots}, \quad (51)$$

где (λ) обозначает совокупность спиновых состояний $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ частиц 1, ..., n в состоянии $|p_1, \lambda_1; \dots; p_n, \lambda_n\rangle$; v_1 — число тождественных частиц сорта 1 в состоянии p_1, λ_1 ; суммирование по (n) означает суммирование по различным типам частиц при заданном числе частиц n , а затем суммирование по всем возможным числам частиц n . Привлекая выражение (32) для фазового объема и заменяя в (1.68) состояния $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ на $|a, b\rangle$ и $|1, \dots, n\rangle$, мы получаем условие унитарности в следующем виде:

$$\frac{1}{2i} \langle 1, 2 | T - T^+ | a, b \rangle = \\ = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{(n)} \sum_{(\lambda)} \int \langle 1, 2 | T^+ | 1, \dots, n \rangle \frac{dR_n(p_a + p_b)}{v_1! \dots} \langle 1, \dots, n | T | a, b \rangle. \quad (52)$$

В частном случае упругого рассеяния вперед (т. е. при $z_s = 1$ и $\varphi = 0$, когда $|a, b\rangle \equiv |p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b\rangle$ и $|1, 2\rangle = |a, b\rangle$) левая часть условия унитарности (52) превращается в мнимую часть амплитуды упругого рассеяния вперед:

$$\frac{1}{2i} \langle a, b | T - T^+ | a, b \rangle = \text{Im} \langle a, b | T | a, b \rangle.$$

Правая часть (52) в этом случае, согласно (43) и (45), будет пропорциональна полному сечению $\sigma_{\text{tot}}(a, b)$ рассеяния $a + b \rightarrow$ (что угодно). В итоге мы получаем соотношение

$$\text{Im} \langle a, b | T | a, b \rangle = \frac{\Delta_{ab}(s) B}{16\pi} \sigma_{\text{tot}}(a, b), \quad (53)$$

известное под названием оптической теоремы. Если a и b — бесспиновые частицы одинаковой массы m , то при рассеянии вперед $t = 0$, и оптическая теорема принимает вид

$$\text{Im} F(s, 0) = \frac{[s(s - 4m^2)]^{1/2} B}{16\pi} \sigma_{\text{tot}}(a, b),$$

где амплитуда рассеяния $F(s, t) \equiv F(s, t, u(s, t))$ была введена в связи с (50).

§ 7.4. Спиральные амплитуды

Рассмотрим амплитуду процесса $1+2 \rightarrow 3+4$. Поскольку S -матрица коммутирует с генераторами P_μ , $M_{\lambda\nu}$ группы Пуанкаре, то она будет коммутировать и с инвариантами группы — полной массой $m^2 = P^2$ и квадратом полного спина — $(\omega^2/m^2) = J^2$, по собственным значениям которых отмечаются неприводимые представления этой группы. Следовательно, S -матрица диагональна по m и J , а амплитуду процесса можно разложить в ряд по парциальным амплитудам $T(m, J)$. Найдем такое разложение амплитуды (разложение типа (4)) в том случае, когда начальная и конечная конфигурация частиц описываются с помощью двухчастичных спиральных состояний [58].

Двухчастичные спиральные состояния были построены в § 4.6. Пусть в системе ц. и. импульсы частиц a и b есть $p_a = q_{ab}$, $p_b = -q_{ab}$. В спиральном базисе импульс q_{ab} определяется полярными углами φ , ϑ .

Двухчастичное состояние, зависящее от углов φ , ϑ , было определено в системе ц. и. через произведение одночастичных состояний формулой (4.139), или

$$|0, m; \varphi, \vartheta; \lambda_a, \lambda_b\rangle = \sqrt{\frac{q_{ab}}{4m}} |q_{ab}, \lambda_a\rangle |-q_{ab}, \lambda_b\rangle,$$

где $m^2 = s = (p_{a0} + p_{b0})^2$, а λ — спиральность.

Двухчастичное состояние с импульсом P получается переходом к движущейся системе отсчета (см. (4.140)):

$$|P, m; \varphi, \vartheta; \lambda_a, \lambda_b\rangle = U(0, h(P)) |0, m; \varphi, \vartheta; \lambda_a, \lambda_b\rangle.$$

Здесь $h(P)$ — оператор Вигнера в спиральном базисе. Это состояние может быть, согласно (4.143), разложено по состояниям с различными спинами J (и с той же массой m):

$$|P, m; \varphi, \vartheta; \lambda_a, \lambda_b\rangle = \sum_J \sum_{\Lambda=-J}^J \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \mathcal{D}_{\Lambda\lambda}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi) |P, m; J, \Lambda; \lambda_a, \lambda_b\rangle \quad (54)$$

($\lambda = \lambda_a - \lambda_b$). Пусть импульсы частиц 1 и 2 имеют (в системе ц. и.) лишь компоненты по оси z , или $\varphi_{12} = \vartheta_{12} = 0$. Тогда, записывая конечное состояние в виде (54), мы получаем

$$\begin{aligned} & |P', m'; \varphi, \vartheta; \lambda_3, \lambda_4 | S-1 | P, m; 0, 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \\ & = i(2\pi)^4 \delta^4(P-P') \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \langle \lambda_3, \lambda_4 | T(m^2, J) | \lambda_1, \lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (55)$$

$$P_0 = (m^2 + P^2)^{1/2} = (s + P^2)^{1/2},$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$, ϑ — угол между импульсом q_{34} и осью z в системе ц. и., φ — второй полярный угол вектора q_{34} .

Мы ввели в (55) спиновую матрицу T с помощью соотношения

$$\langle P, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2 | S - 1 | P', m'; J', \Lambda'; \lambda_3, \lambda_4 \rangle = \\ = i (2\pi)^4 \delta^4 (P - P') \delta_{JJ'} \delta_{\Lambda\Lambda'} \langle \lambda_1, \lambda_2 | T(m^2, J) | \lambda_3, \lambda_4 \rangle. \quad (56)$$

Формула (55) представляет собой разложение матричного элемента перехода по парциальным амплитудам $T(m^2, J)$.

Нас интересует разложение типа (55) для спиральной амплитуды

$$F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta, \varphi) \equiv \langle p_3, \lambda_3; p_4, \lambda_4 | T | p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2 \rangle,$$

в которой произведение одночастичных спиральных состояний определено по (4.139), при этом масса двухчастичного состояния есть $m = \sqrt{s}$. Эта амплитуда связана с обычной (нормированной) спиральной амплитудой Жакоба—Вика $f_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ соотношением (49):

$$F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{B \sqrt{s}}{2} f_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}, \quad B = \frac{8}{(2\pi)^6}.$$

Запишем разложение спиральной амплитуды $F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ по парциальным амплитудам в виде

$$F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = B \sum_J (2J + 1) \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi) a_{J \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s). \quad (57)$$

Тогда сравнение (55) и (57) при учете (4.139) дает

$$a_{J \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s) = \left(\frac{s}{\pi q_{12} q_{34}} \right)^{1/2} \langle \lambda_3, \lambda_4 | (s, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle.$$

Зависимость спиральной амплитуды от угла φ легко выделяется:

$$F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta, \varphi) = e^{i(\lambda - \lambda')\varphi} \tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta),$$

так как

$$\mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = e^{i(\lambda - \lambda')\varphi} d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta).$$

Дифференциальное сечение равно (см. (48))

$$d\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 4) = \frac{4}{sB^2} |\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta)|^2 \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{34}(s)} d\Omega = \\ = |\tilde{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta)|^2 \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{34}(s)} d\Omega.$$

Разложение (55) и (57) имеют простой теоретико-групповой смысл: в системе ц. и. амплитуда $F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta, \varphi)$ пропорциональна среднему значению от произведения инвариантного оператора рас-

сеяния T на конечное вращение $R(\varphi, \vartheta, -\varphi)$. Это среднее вычисляется на множестве всех пар квантовых чисел J, Λ — полного спина и его проекции. Поскольку $T(m^2, J)$ от Λ не зависит, то наличие квантового числа Λ ведет лишь к появлению множителя $2J + 1$.

Если частицы 1, 2, 3 и 4 бесспиновые, то, подставляя в (57) $\mathcal{D}_{00}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi) = P_J(\cos \vartheta)$, мы получаем разложение амплитуды по полиномам Лежандра:

$$f(s, z_s) = \sum_J (2J + 1) P_J(z_s) f_J(s). \quad (58)$$

Число независимых спиральных амплитуд определяется по числу независимых спиральных состояний (§ 4.6) и, следовательно, равно числу различных комбинаций спиральностей частиц $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, ограниченных условиями

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J, \quad |\lambda_3 - \lambda_4| \leq J. \quad (59)$$

Условие (59) выполняется для всех значений λ_r , когда полный спин J удовлетворяет неравенствам $J \geq J_1 + J_2$ и $J \geq J_3 + J_4$, где J_r — спин частиц. Максимальное число независимых амплитуд равно $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)(2J_3 + 1)(2J_4 + 1)$.

Если частицы 1 и 2 (или 3 и 4) тождественны, то спиральные амплитуды ограничены дополнительным условием, вытекающим из требования симметрии состояний (см. § 4.6):

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 | T(0, J) | \lambda_3, \lambda_4 \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad (60)$$

для нечетных J . Парциальная амплитуда симметрична или антисимметрична относительно замены $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ соответственно для четных или нечетных J .

Инвариантность теории относительно отражений пространства P и времени T также накладывает ограничения на спиральные амплитуды. Согласно (6.84) пространственное отражение P переводит двухчастичное спиральное состояние со спином J (в системе ц. и.) в состояние с противоположными спиральностями:

$$P | 0, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \eta_1^* \eta_2^* (-1)^{J - J_1 - J_2} | 0, m; J, \Lambda; -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle,$$

где $\eta_{1,2}$ — четности частиц 1 и 2. Следовательно, если S -матрица инвариантна относительно отражения P ($P^{-1}SP = S$), то

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3, \lambda_4 | T(0, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \\ = \frac{\eta_3 \eta_4}{\eta_1 \eta_2} (-1)^{J_3 + J_4 - J_1 - J_2} \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | T(0, J) | -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (61)$$

Множитель перед матричным элементом справа в (61) зависит только от свойств отдельных частиц, и связь (61) имеет место для всех парциальных амплитуд. Возможные значения этого множителя равны ± 1 ; в случае упругого рассеяния он равен

$(\eta_3\eta_4/\eta_1\eta_2) (-1)^{J_3+J_4-J_1-J_2} = 1$. Поэтому сохранение четности уменьшает вдвое число независимых спиральных амплитуд.

При обращении времени T , согласно (6.100), спиральности частиц не изменяются, но полная спиральность (проекция полного спина) меняет знак:

$$T |0, m; J, \Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle = (-1)^{J-\Lambda} |0, m; J, -\Lambda; \lambda_1, \lambda_2\rangle.$$

Так как в теории, инвариантной относительно обращения времени T ,

$$\langle a | S | b \rangle = \langle T b | S | T a \rangle,$$

то мы получаем

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 | T(s, J) | \lambda_3, \lambda_4 \rangle = \langle \lambda_3, \lambda_4 | T(s, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (62)$$

— связь между парциальными амплитудами прямого и обратного процессов. В случае упругого рассеяния (62) есть условие симметрии амплитуды.

При барион-барионном рассеянии $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ в случае спинов $J_i = 1/2, i = 1, \dots, 4$, имеется четыре независимые парциальные амплитуды $\langle \lambda_3, \lambda_4 | T(s, 0) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, или $a_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4(s)$ с моментом $J = 0$, а именно:

$$a_0 + + + +, \quad a_0 + + - -, \quad a_0 - - + +, \quad a_0 - - - -.$$

Здесь введено обозначение

$$a_{J + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a_{J + + + +} \text{ и т. д.}$$

В случае $J \geq 1$ будет по 16 парциальных амплитуд для каждого J , так как согласно (59) при $J \geq 1$ спиральности частиц $\lambda_i = \pm 1/2$ не коррелированы.

При учете сохранения четности число независимых амплитуд сокращается вдвое; согласно (61) амплитуды типа $a_{J + + - -}$ и $a_{J - - + +}$ могут отличаться лишь знаком (—) и т. д. В случае упругого рассеяния при T -инвариантности условие симметрии (62) означает:

$$a_{J + + + -} = a_{J + - + +}, \quad a_{J + - - +} = a_{J - - + +}. \quad (63)$$

Если же частицы 1 и 2 одинаковы, то согласно (60)

$$\left. \begin{aligned} a_{J + + \lambda_1 \lambda_2} &= a_{J - - \lambda_1 \lambda_2} = 0, \\ a_{J + - + -} &= -a_{J - + + -} \end{aligned} \right\} \text{ для нечетных } J, \quad (64)$$

$$a_{J + - \lambda_1 \lambda_2} = a_{J - + \lambda_1 \lambda_2} \quad \text{для четных } J.$$

Отсюда следует, что общее число независимых полных амплитуд $F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, \vartheta, \varphi)$ для упругого рассеяния, когда все частицы с $J = 1/2$ тождественны, будет равно 5:

$$F_{+ + + +}, \quad F_{+ + + -}, \quad F_{+ + - -}, \quad F_{+ - + -}, \quad F_{+ - - +}. \quad (65)$$

Двухчастичное условие унитарности. От общего условия унитарности (52) мы можем перейти к условию унитарности для парциальных амплитуд $\langle \lambda_3, \lambda_4 | T(s, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, или $a_{J \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s)$, подставив в (52) разложения (55) или (57). Так как полный момент количества движения J сохраняется, то состояния $|a, b\rangle$ и $|1, \dots, n\rangle$, входящие в условие унитарности (52), должны иметь одинаковые J , т. е. условие унитарности записывается в отдельности для каждой парциальной амплитуды, связывая парциальные амплитуды для двухчастичного рассеяния с бесконечной последовательностью (по n) амплитуд $\langle a, b | T(s, J) | 1, \dots, n \rangle$.

Если мы отбросим в условии унитарности (52) все амплитуды высших процессов с $n \geq 3$, то в получившемся приближенном («двухчастичном») условии унитарности будут содержаться только амплитуды $\langle \lambda_3, \lambda_4 | T(s, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. При достаточно малых s (пока s не превышает порога образования состояния с большим числом частиц) это приближение будет точным, а при нескольких больших s — все еще хорошим. Используя условия ортогональности для функций \mathcal{D}^J , мы получаем для процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ двухчастичное условие унитарности в виде

$$a_{J \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s) - a_{J \lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}^*(s) = 4i \left(\frac{q_{12} q_{34}}{s} \right)^{1/2} \sum_{\lambda_a, \lambda_b} a_{J \lambda_3 \lambda_4 \lambda_a \lambda_b}^*(s) a_{J \lambda_1 \lambda_2 \lambda_a \lambda_b}(s). \quad (66)$$

Если теория T -инвариантна и, следовательно, выполняется условие симметрии (62), то условие (66) удобнее записать посредством матриц $T(s, J)$:

$$\text{Im} \langle \lambda_3, \lambda_4 | T - T^+ | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle \lambda_3, \lambda_4 | T(s, J) T^+(s, J) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \quad (67)$$

В случае бесспиновых частиц, когда парциальные амплитуды $a_J(s)$ определяются по (58), мы находим из (52)

$$a_J(s) - a_J^*(s) = 4i \left(\frac{q_{12} q_{34}}{s} \right)^{1/2} |a_J(s)|^2.$$

Для упругого рассеяния одинаковых бесспиновых частиц $q_{12}^2 = q_{34}^2 = (s - 4m^2)/4$, и следовательно, условие унитарности в упругом приближении гласит:

$$a_J(s) - a_J^*(s) = 2i \left(\frac{s - 4m^2}{s} \right)^{1/2} |a_J(s)|^2. \quad (68)$$

Это соотношение будет часто использоваться в гл. 12 и 13.

§ 7.5. Спинорные амплитуды (\mathcal{M} -функции) и инвариантные амплитуды

В § 4.4 были введены спинорные состояния, закон преобразования которых при лоренцевых вращениях прост и не зависит от импульса. Не зависят от импульса и трансформационные свойства операторов $u(\mathbf{p})$ и волновых функций (§ 5.1).

С помощью спинорных состояний или волновых функций мы можем определить амплитуды перехода нового типа — спинорные амплитуды, или \mathcal{M} -функции, которые преобразуются простым образом при лоренцевых вращениях. Мы будем опираться в существенной степени на материал § 5.1 и в качестве примера рассмотрим двухчастичный процесс $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$.

Обратимся вновь к формуле (2) для преобразования S -матрицы. По этому же правилу преобразуется амплитуда перехода, которая отличается от элемента S -матрицы лишь инвариантным множителем $i(2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)$. Релятивистские свойства амплитуды перехода характеризуются равенством

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_3, \sigma_3; \mathbf{p}_4, \sigma_4 | T | \mathbf{p}_1, \sigma_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2 \rangle = \\ = \sum_{\sigma'_i} \mathcal{D}_{\sigma_i, \sigma'_i}^{J_i^*}(\tilde{A}_3) \mathcal{D}_{\sigma'_i, \sigma_i}^{J_i^*}(\tilde{A}_4) \langle \mathbf{p}'_3, \sigma'_3; \mathbf{p}'_4, \sigma'_4 | T | \mathbf{p}'_1, \sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \sigma'_2 \rangle \times \\ \times \mathcal{D}_{\sigma'_1, \sigma_1}^{J_1}(\tilde{A}_1) \mathcal{D}_{\sigma_2, \sigma'_2}^{J_2}(\tilde{A}_2), \quad p' = \Lambda(A) p, \quad (69) \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_n = \alpha^{-1}(\mathbf{p}_n') A \alpha(\mathbf{p}_n)$, описывает вращение спинового базиса. Равенство (69) записано в каноническом базисе потому, что в этом базисе выписаны явно многие формулы в § 5.2. Переход к спиральному базису в (69) и ниже осуществляется, как обычно, заменой $\sigma \rightarrow \lambda$ и другим выбором оператора $\alpha(\mathbf{p})$, входящего в определение $\tilde{A}(\mathbf{p}', A)$ (см. § 4.2).

Амплитуда перехода зависит от импульсов и спиновых переменных частиц, при этом преобразование спинового базиса зависит от импульсов. Попытаемся выделить ту часть зависимости амплитуды, которая связана со свойствами невзаимодействующих отдельных частиц. Тем самым мы сможем также разделить преобразование спиновых переменных и преобразования импульсов.

Определим спинорную функцию $\mathcal{M}_{r_1 r_2}^{r_3 r_4}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4)$, записав амплитуду перехода в виде [52, 53, 103]

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_3, \sigma_3; \mathbf{p}_4, \sigma_4 | T | \mathbf{p}_1, \sigma_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2 \rangle = \\ = \bar{u}^{r_3}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) \bar{u}^{r_4}(\mathbf{p}_4, \sigma_4) \mathcal{M}_{r_1 r_2}^{r_3 r_4}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) u_{r_1}(\mathbf{p}_1, \sigma_1) u_{r_2}(\mathbf{p}_2, \sigma_2), \quad (70) \end{aligned}$$

где $u(\mathbf{p}_n, \sigma_n)$ — введенная в § 5.1 волновая функция частицы n . В (70) суммируется, как обычно, по одинаковому верхнему и нижнему индексам.

Введение волновых функций $u(\mathbf{p}, \sigma)$ в (70) преследует цель — освободиться от матриц $\mathcal{D}^J(\tilde{A})$ в формуле, которая будет характеризовать релятивистские свойства спинорной функции.

Если мы подставим формулу (70) в равенство (69), то в правую часть получившегося выражения войдут волновые функции $u(\mathbf{p}', \sigma)$ для импульса $\mathbf{p}' = \Lambda(\tilde{A})\mathbf{p}$.

Между функциями $u(\mathbf{p}, \sigma)$ и $u(\mathbf{p}', \sigma')$ существует соотношение

$$L(A)u(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\sigma'} u(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(\alpha^{-1}(\mathbf{p}') A \alpha(\mathbf{p})), \quad (71)$$

которое может быть легко проверено, если воспользоваться явным видом $u(\mathbf{p}, \sigma)$:

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = L(\alpha(\mathbf{p}))u(0, \sigma). \quad (72)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L(A)L(\alpha(\mathbf{p}))u(0, \sigma) &= L(\alpha(\mathbf{p}'))L(\tilde{A}(\mathring{p}, A))u(0, \sigma) = \\ &= \sum_{\sigma'} L(\alpha(\mathbf{p}'))u(0, \sigma') \mathcal{D}_{\sigma' \sigma}^J(\tilde{A}(\mathring{p}, A)), \end{aligned}$$

так как в силу (4.45) и (5.7) матрица $L(\tilde{A})$, зависящая от преобразования $\tilde{A}(\mathring{p}, A)$ малой группы стандартного импульса $\mathring{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$, должна осуществлять вращение спинового базиса $u(0, \sigma)$.

Таким образом, условие релятивистской инвариантности для спинорной функции имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{r_1, r_4}^{r_1', r_4'}(p_1, \dots, p_4) &= \\ &= L_{r_3}^{r_3'}(A)L_{r_4}^{r_4'}(A)\mathcal{M}_{r_1', r_4'}^{r_1, r_4}(p_1', \dots, p_4')L_{r_1}^{r_1'}(A^{-1})L_{r_2}^{r_2'}(A^{-1}), \end{aligned} \quad (73)$$

или же

$$\mathcal{M}(p_1, \dots, p_4) = L_3(A)L_4(A)\mathcal{M}(p_1', \dots, p_4')L_1(A^{-1})L_2(A^{-1}), \quad (74)$$

где L_n есть матрица представления группы Лоренца для n -й частицы (с матричными элементами $L_{r_n}^{r_n'}$).

Чтобы выяснить смысл условий (73) и (74), рассмотрим два простейших примера.

1. Пусть частицы 1 и 3 обладают спином $1/2$, а частицы 2 и 4 не имеют спина. Будем описывать частицы 1 и 3 с помощью дираковских волновых функций. Тогда матрицы $L_1(A)$ и $L_3(A)$ совпадают с матрицей $S(A)$ (формула (5.19)), а матрицы $L_2(A)$ и $L_4(A)$ одномерны, не зависят от A и равны единице. Спинорная амплитуда в этом случае должна удовлетворять соотношению

$$\mathcal{M}^{\beta}(p_1, \dots, p_4) = S_{\alpha}^{\alpha'}(A)\mathcal{M}_{\alpha' \beta'}(p_1', \dots, p_4')S_{\beta}^{\beta'}(A^{-1}), \quad (75)$$

где α и β — дираковские индексы, $p' = \Lambda(A)p$. Это условие инвариантности имеет тот же вид, что и условие инвариантности для дираковской матрицы импульсов:

$$S(A) \gamma^\mu p'_\mu S(A^{-1}) = \gamma'^\mu p'_\mu = \gamma^\mu p_\mu.$$

2. Пусть частицы 2 и 4 не имеют спина, а спины частиц 1 и 3 равны $3/2$. Тогда прежде всего возникает вопрос: какой именно из эквивалентных волновых функций (спинорной функцией с 4 или 8 компонентами, функцией Баргмана—Вигнера или функцией Рариты—Швингера) будут описываться эти частицы? Выбор волновой функции определяют матрицы $L_1(A)$ и $L_3(A)$ в (73), (74).

Выберем в качестве волновых функций $u(p, \sigma)$ частиц со спином $3/2$ функции Рариты—Швингера $\psi_{\alpha\mu}(p, \sigma)$ (см. § 5.5), имеющие один дираковский индекс α и один векторный индекс μ , так что индекс r в (73) есть $r = (\alpha, \mu)$. Тогда матрицы $L_1(A)$ и $L_3(A)$ представляют собой прямое произведение дираковской матрицы $S_\alpha^\beta(A)$ и матрицы лоренцева преобразования для вектора Λ_μ^ν :

$$L_{r,r'}(A) = S_\alpha^{\alpha'}(A) \Lambda_\mu^{\mu'}(A).$$

Условие (73) в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(p_1, \dots, p_4) = \\ = S_\alpha^{\alpha'}(A) \Lambda_\mu^{\mu'}(A) \mathcal{M}_{\alpha'\mu'}^{\beta'\nu'}(p_1', \dots, p_4') S_{\beta'}^\beta(A^{-1}) \Lambda_{\nu'}^\nu(A^{-1}). \end{aligned} \quad (76)$$

По индексам μ, ν (76) описывает преобразование тензора. В частности, произведения импульсов типа $p_\mu p^\nu (\hat{p})_\alpha^\beta$ будут удовлетворять условию (76).

Инвариантные амплитуды и кинематические особенности. После того как выбором волновых функций установлены релятивистские свойства спинорной амплитуды \mathcal{M} , можно найти ее разложение на инвариантные амплитуды F_i , зависящие только от инвариантных импульсных переменных. В случае двухчастичных процессов

$$\mathcal{M}(p_1, \dots, p_4) = \sum_i F_i(s, t, u) X_i(p_1, \dots, p_4). \quad (77)$$

Инвариантные переменные s, t, u в (77) связаны соотношением $s + t + u = h = \sum m_n^2$.

Независимые кинематические коварианты X_i имеют те же трансформационные свойства, что и спинорная амплитуда \mathcal{M} . Коварианты X_i построены из импульсов частиц и матриц, связанных с представлениями L_n . Матричные элементы ковариантов X_i , вычисленные с волновыми функциями свободных частиц в начальном и конечном состояниях $u_1, u_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$, равны кинематическим множителям Z_i в разложении амплитуды (3):

$$Z_i = (\bar{u}_3 \bar{u}_4 X_i u_1 u_2).$$

Число ковариантов X_l равно числу независимых амплитуд F_l . Так как это число не может зависеть от способа разложения, то оно равно числу спиральных амплитуд. Отыскание независимых ковариантов X_l составляет основную задачу кинематического анализа спинорных амплитуд.

Выбор ковариантов не однозначен. Могут существовать различные наборы независимых ковариантов и соответствующих независимых амплитуд. Если имеются две совокупности линейно независимых амплитуд, то они связаны соотношением

$$F_l(s, t, u) = \sum_{l'} B_{ll'}(s, t, u) F_{l'}(s, t, u).$$

Пока совокупности F_l и $F_{l'}$ линейно независимы, матрица B является неособенной. При этом особенности функций F_l и $F_{l'}$ обязательно совпадают. Оказывается, однако, что многие наборы независимых амплитуд, применяемые на практике, становятся линейно зависимыми при некоторых значениях импульсов p_n . Как правило, это имеет место тогда, когда (помимо обычной связи (5), налагаемой законом сохранения) между импульсами p_n возникает дополнительная линейная зависимость. При тех значениях переменных s, t, u , при которых между амплитудами имеется линейная зависимость, матрица $B(s, t, u)$ становится особенной. Следовательно, при этих значениях s, t, u функции F_l могут иметь особенности, отсутствующие у функций $F_{l'}$, и наоборот. Особенности такого типа называются кинематическими. Их всегда можно устранить путем перехода к другому набору амплитуд (иногда за счет появления иных кинематических особенностей). В отличие от этого, особенности, которые сохраняются при любом выборе независимых амплитуд, называются динамическими, поскольку они могут быть связаны с динамикой процесса.

Кинематические особенности вызываются участием в процессе частиц с отличным от нуля спином. Для бесспиновых частиц существует единственная инвариантная амплитуда, которая (по определению) не может иметь кинематических особенностей.

Кинематические особенности возникают, когда инварианты s, t, u достигают границы физической области (21) или принимают пороговые значения. Согласно (22)—(25) пороговые значения инвариантов зависят от масс частиц в начальном и конечном состояниях.

Пороговые значения s можно определить из условия исчезновения импульсов q_{ij} в системе ц. и. Согласно (13) при равных массах существует четыре порога:

$$\begin{aligned} s_N &= (m_1 + m_2)^2, & s_A &= (m_1 - m_2)^2, \\ s'_N &= (m_3 + m_4)^2, & s'_A &= (m_3 - m_4)^2, \end{aligned} \quad (78)$$

из которых s_N и s_N' соответствуют началу физической области s -канала и называются нормальными порогами, а значения s_A и s_A' характеризуют аномальные пороги.

Таким образом, ковариантные множители X_i в разложении (77) должны удовлетворять следующим требованиям: а) X_i должны преобразовываться так же, как и спинорная функция \mathcal{M} ; б) X_i должны быть линейно независимы, при этом число ковариантов X_i должно быть равно числу независимых спиральных амплитуд; в) разложение (77) по ковариантам X_i не должно привносить кинематических особенностей в амплитуды $F_i^{1)}$.

Выбор совокупности независимых ковариантов X_i требует особого внимания, когда используемые волновые функции для высших спинов имеют большое число излишних компонент (например, волновые функции Рариты — Швингера и Баргмана—Вигнера.) Общий набор ковариантов, который можно построить в этом случае, превосходит совокупность независимых ковариантов X_i . Сведение ковариантов к независимым, осуществляемое с помощью дополнительных условий для волновых функций, может привести к появлению кинематических сингулярностей.

Построение независимых ковариантов. Рассмотрим на простейших примерах построение набора ковариантов X_i , удовлетворяющих перечисленным ранее условиям а) — в). В этой задаче спин является определяющим фактором. Поэтому наряду с обозначением $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ для двухчастичной реакции мы будем пользоваться обозначением $J_1 + J_2 \rightarrow J_3 + J_4$, указывающим спины частиц J_n .

1. $1/2 + 0 \rightarrow 1/2 + 0$. В этом случае спинорная функция $\mathcal{M}_\alpha^\beta(p_1, \dots, p_4)$ представляет собой 4×4 -матрицу с трансформационными свойствами (75). Такими свойствами обладают величины $1, \gamma_5, \hat{p}_n, \sigma_{\mu\nu} p_n^\mu p_n^\nu, \gamma_5 \hat{p}_n$, содержащие независимые дираковские матрицы. Из подсчета числа спиральных амплитуд следует, что есть 4 независимых коварианта. Кроме закона сохранения, импульсы ограничены условиями $\hat{p}_1 - m_1 = 0$, если \hat{p}_1 — самый правый множитель, и $\hat{p}_3 - m_3 = 0$, если \hat{p}_3 стоит слева. Поэтому из величин \hat{p}_n независима только одна, в качестве которой выберем $\hat{Q} = 1/2(\hat{p}_2 + \hat{p}_4)$. Аналогично, среди матриц $\gamma_5 \hat{p}_n$ есть также лишь одна независимая — например $\gamma_5 \hat{Q}$.

Матрицы $\sigma_{\mu\nu} p_n^\mu p_n^\nu = 1/2[\hat{p}_n, \hat{p}_n]$ выражаются при этом через остальные матрицы.

¹⁾ Разложения спинорных амплитуд были исследованы для случая $(2J + 1)$ -компонентных волновых функций [42, 52, 103, 104] (в том числе и с учетом симметрии относительно отражений [105, 106]) и для случая функций Рариты—Швингера [107—109].

Следовательно, набор ковариантов имеет вид

$$X_l = \left\{ 1, \gamma_5, \hat{Q} = \frac{1}{2} (\hat{p}_2 + \hat{p}_4), i\gamma_5 \hat{Q} \right\} \quad (79)$$

и разложение спинорной амплитуды (77) есть

$$M_{\alpha\beta}(p_1, \dots, p_4) =$$

$$= \{ F_1(s, t, u) + \gamma_5 F_2(s, t, u) + \hat{Q} F_3(s, t, u) + i\gamma_5 \hat{Q} F_4(s, t, u) \}_{\alpha\beta}, \quad (80)$$

где F_l — инвариантные амплитуды.

2. $1/2 + 0 \rightarrow 3/2 + 0$. Выбрав волновые функции Рариты—Швингера $\bar{\psi}^{\alpha\mu}$ для спина $3/2$, мы приходим к спинорной амплитуде $M_{\alpha\mu}^{\beta}(p_1, \dots, p_4)$ с двумя дираковскими и одним векторным индексами. Число независимых ковариантов равно $(2J_1 + 1)(2J_3 + 1) = 8$. Они представляют собой векторные 4×4 -матрицы. При построении ковариантов следует учитывать дополнительные условия и уравнения движения для волновых функций $\bar{\psi}^{\alpha\mu}$ и u_{β} :

$$(\hat{p}_1 - m_1) u(p_1) = 0,$$

$$\bar{\psi}_{\mu}(p_3) (\hat{p} - m_3) = 0, \quad \bar{\psi}_{\mu} \gamma^{\mu} = 0,$$

откуда $\bar{\psi}_{\mu}(p_3) p_3^{\mu} = 0$.

В итоге в набор линейно независимых ковариантов можно включить матрицы

$$X_{\mu} = \left\{ Q_{\mu} \cdot 1 = \frac{1}{2} (p_2 + p_4)_{\mu} \cdot 1, \quad P_{\mu} \cdot 1 = \frac{1}{2} (p_1 + p_3)_{\mu} \cdot 1, \right. \\ \left. Q_{\mu} \hat{Q}, \quad P_{\mu} \hat{Q}, \quad \gamma_5 Q_{\mu}, \quad \gamma_5 P_{\mu}, \quad i\gamma_5 Q_{\mu} \hat{Q}, \quad i\gamma_5 P_{\mu} \hat{Q} \right\}. \quad (81)$$

Импульсы P и Q выбраны здесь симметрично относительно начальных и конечных импульсов. Вместо них мы могли бы взять иные комбинации импульсов и получили бы в итоге иное разложение амплитуды.

Покажем, как изменение набора ковариантов влечет за собой появление кинематических сингулярностей. Из импульсов p_1 , p_2 и p_3 можно построить вектор $N_{\mu} = -\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p_1^{\nu} p_2^{\lambda} p_3^{\sigma}$. Вектор N_{μ} становится светоподобным ($N^2 = 0$) на границе физической области (см. (21)). Включим матрицу $i\gamma_5 \hat{N}$ в число ковариантов. Это можно сделать в силу соотношения

$$i\gamma_5 \hat{N} = \frac{1}{2} [(m_1 + m_3)^2 - t] \hat{Q} + \\ + \frac{1}{4} (m_3 - m_1) (m_2^2 - m_4^2) - (m_1 + m_3) (s - u),$$

которое выводится с помощью тождеств (5.70). Согласно этому соотношению матрица $i\gamma_5 \hat{N}$ может заменить в наборе ковариантов матрицу \hat{Q} или 1. Во втором случае, например, вместо $Q_\mu \cdot 1$ следует писать $Q_\mu i\gamma_5 \hat{N}$ и т. д.

Однако если инвариантные амплитуды F_l в разложении по ковариантам (80) не имели особенности при $t = (m_1 + m_3)^2$, то в разложении по новому набору $X_\mu' = X_\mu(\hat{Q} \rightarrow i\gamma_5 \hat{N})$ новые инвариантные амплитуды F_l' приобретут особенность в этой точке. Переход к набору $X_\mu'' = X_\mu(1 \rightarrow i\gamma_5 \hat{N})$ также приводит к появлению кинематических сингулярностей.

3. $0 + 0 \rightarrow 0 + 2$. Волновая функция частицы со спином 2 может быть выбрана различными способами. Если ограничиться волновыми функциями, рассмотренными в гл. 5, то имеется три возможности: либо волновая функция есть (5.82) (10-компонентная функция, преобразующаяся по представлению $(2, 0) + (0, 2)$), либо она дается формулой (5.111) (симметричный тензор $\Phi_{\mu\nu}$), либо она записывается в виде (5.131) (симметричный спинор четвертого ранга).

Пусть эта волновая функция есть тензор $\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}$, так что спинорная амплитуда $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ и, следовательно, коварианты $X_{\mu\nu}$ представляют собой симметричные тензоры второго ранга. В этом случае набор содержит $(2J_4 + 1) = 5$ независимых ковариантов $X_{\mu\nu}$, которые строятся из импульсов частиц p_n и их комбинаций, образующих три независимых вектора. Десять компонент симметричного тензора $\Phi_{\mu\nu}$ сокращаются до пяти линейно независимых с помощью дополнительных условий (5.113) и (5.114):

$$p_4^\mu \Phi_{\mu\nu} = p_4^\nu \Phi_{\mu\nu} = 0, \quad \Phi_\mu^\mu = 0.$$

Поэтому удобно в качестве базисных принять векторы

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \Delta = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad \tilde{N}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P^\nu \Delta^\lambda p_4^\sigma.$$

Тогда набор ковариантов есть

$$X_{\mu\nu} = \{P_\mu P_\nu, \Delta_\mu \Delta_\nu, P_\mu \Delta_\nu + P_\nu \Delta_\mu, \tilde{N}_\mu P_\nu + \tilde{N}_\nu P_\mu, \tilde{N}_\mu \Delta_\nu + \tilde{N}_\nu \Delta_\mu\}, \quad (82)$$

откуда сразу же следует разложение $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ по инвариантным амплитудам.

Спинорные амплитуды (70) были введены с помощью волновых функций § 5.1, для которых существует инвариантная билинейная эрмитова форма, а следовательно, существует также и унитарная матрица, связывающая лоренцевы матрицы с сопряженными. Это значит, что релятивистские трансформационные свойства спинор-

ной амплитуды (70) не зависят от того, какие именно частицы находятся в начальном или конечном состоянии. Замена некоторых частиц античастицами также не изменяет трансформационных свойств спинорной амплитуды. Поэтому, если найдено общее разложение спинорной амплитуды для процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$, то практически известны разложения спинорных амплитуд для всех реакций с участием этих частиц или же их античастиц.

Двухчастичные распады $a \rightarrow b + c$ и лагранжиан взаимодействия. Выбрав волновые функции для описания свободных частиц a, b, c , мы можем ввести спинорную амплитуду распада типа (70), а затем найти ее разложение (77) по ковариантам. Процесс $a \rightarrow b + c$ характеризуется двумя независимыми импульсами из числа трех p_a, p_b, p_c , связанных законом сохранения $p_a = p_b + p_c$ и условиями $p_a^2 = m_a^2, \dots$ Инвариантные импульсные переменные $(p_a - p_b)^2$ или $(p_a - p_c)^2$ в этом случае однозначно фиксированы массами частиц. Поэтому в разложении (77) спинорной функции $\mathcal{M}_{r_b r_c}^{r_a}$ по ковариантам

$$\mathcal{M}(p_a, p_b, p_c) = \sum_l g_l X_l(p_a, p_b, p_c)$$

коэффициенты g_l — постоянные величины.

Предположим, что X_l не зависит от импульсов. Амплитуда распада тогда есть

$$\sum_l g_l \bar{u}^{r_b}(p_b, \sigma_b) \bar{u}^{r_c}(p_c, \sigma_c) (X_l)_{r_b r_c}^{r_a} u_{r_a}(p_a, \sigma_a). \quad (83)$$

Амплитуда распада может быть записана в виде матричного элемента $\langle p_b, \sigma_b; p_c, \sigma_c | \mathcal{L}_I(0) | p_a, \sigma_a \rangle$ от эффективного лагранжиана взаимодействия

$$\mathcal{L}_I(x) = \sum_l g_l \bar{\Psi}^{r_b}(x) \bar{\Psi}^{r_c}(x) (X_l)_{r_b r_c}^{r_a} \Psi_{r_a}(x), \quad (84)$$

построенного из полей, описывающих частицы a, b и c . При этом g_l играют роль эффективных констант взаимодействия.

В общем случае коварианты X_l как функции импульсов являются полиномами. Соответствующие лагранжианы будут только содержать производные от полей. Равенство

$$\langle p_b, \sigma_b; p_c, \sigma_c | T | p_a, \sigma_a \rangle = \langle p_b, \sigma_b; p_c, \sigma_c | \mathcal{L}_I(0) | p_a, \sigma_a \rangle, \quad (85)$$

с одной стороны, позволяет найти амплитуду распада в первом приближении теории возмущений, а с другой стороны, может служить определением эффективного лагранжиана по амплитуде распада. Построение ковариантов X_l в этом случае эквивалентно, таким образом, отысканию независимых трilinearных лагранжианов взаимодействия, зависящих от свободных полей.

Спинорные амплитуды и отражения. Если S -матрица инвариантна относительно пространственного отражения P (или зарядового сопряжения C , или обращения времени T), то между скалярными амплитудами $F_i(s, t, u)$ могут возникнуть связи.

Условие P -инвариантности S -матрицы (6.85) эквивалентно, в силу (70), следующему равенству:

$$\bar{u}(\mathbf{p}_3)\bar{u}(\mathbf{p}_4)\mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4)u(\mathbf{p}_1)u(\mathbf{p}_2) = \\ = \eta_P \bar{u}(-\mathbf{p}_3)\bar{u}(-\mathbf{p}_4)\mathcal{M}(-\mathbf{p}_1, \dots, -\mathbf{p}_4)u(-\mathbf{p}_1)u(-\mathbf{p}_2), \quad (86)$$

где мы опустили неизменяющиеся величины p_{n0} и σ_n ; η_P есть произведение «четностей»:

$$\eta_P = \eta_P^*(1)\eta_P^*(2)\eta_P(3)\eta_P(4).$$

Явные выражения для волновых функций $u(\mathbf{p}, \sigma)$ были получены в гл. 5, так что связь функций $u(-\mathbf{p}, \sigma)$ и $u(\mathbf{p}, \sigma)$ известна. В частности, для дираковской функции $u(-\mathbf{p}) = \gamma_4 u(\mathbf{p})$, для $2(2J+1)$ -компонентной функции $\Phi(-\mathbf{p}) = \gamma_4 \Phi(\mathbf{p})$, для спина l будет $e_\mu(-\mathbf{p}) = g_{\mu\nu} e_\nu(\mathbf{p})$. С помощью этих формул (или же с помощью равенств, приведенных в сводке формул по отражениям в гл. 6) можно легко найти связь между $u(-\mathbf{p})$ и $u(\mathbf{p})$ для функций Рариты—Швингера со спином J :

$$\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^J(-\mathbf{p}) = \gamma_4 g_{\mu_1 \mu_1} \dots g_{\mu_n \mu_n} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^J(\mathbf{p}), \quad n = J - 1/2,$$

и для функций Баргмана—Вигнера

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_f}^J(-\mathbf{p}) = (\gamma_4)_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \dots (\gamma_4)_{\alpha_f}^{\alpha_f'} \Psi_{\alpha_1' \dots \alpha_f'}^J(\mathbf{p}), \quad f = 2J.$$

«Четности» $\eta_P(j)$ фермионов могут принимать значения $\eta_P = \pm i$ (см. § 6.2), а четности бозонов — значения $\eta_P(j) = \pm 1$. Если к тому же учесть сохранение числа фермионов, то произведение четностей в (86) сведется к знаковому множителю $\eta_P = \pm 1$.

Подстановка функций $u(-\mathbf{p})$ и общей четности процесса η_P в (86) приводит к явной форме условия P -инвариантности спинорной амплитуды. Связь между $u(-\mathbf{p})$ и $u(\mathbf{p})$ имеет вид

$$u(-\mathbf{p}) = R_J u(\mathbf{p}),$$

где эрмитова матрица R_J зависит от типа волновой функции. Следовательно, условие (86) ведет к соотношению

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) = \eta_P R_{J_1} R_{J_2} \mathcal{M}(-\mathbf{p}_1, \dots, -\mathbf{p}_4) R_{J_1} R_{J_2}. \quad (87)$$

Коварианты X_l удобно выбрать так, чтобы они имели определенные свойства при отражении P , а именно:

$$R_{J_1} R_{J_2} X^{(\pm)}(-\mathbf{p}_1, \dots, -\mathbf{p}_4) R_{J_1} R_{J_2} = \pm X^{(\pm)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4).$$

Инвариантные амплитуды, входящие в разложение (77) коэффициентами при ковариантах $X_l^{(\pm)}$, будут обозначаться $F_l^{(\pm)}$. Условие (87) тогда требует, чтобы в разложении (77) спинорной амплитуды часть инвариантных амплитуд обращалась в нуль: при $\eta_p = +1$ должно быть $F_l^{(-)} = 0$, а при $\eta_p = -1$ должно быть $F_l^{(+)} = 0$.

Обратимся к примерам. В наименовании реакции вместо спина мы будем теперь писать спин-четность J^P . Каждый из рассмотренных примеров подразделяется на два класса — в зависимости от общей четности η .

1. $\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-$, $\eta = 1$. Соотношение (87) сводится к условию $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_4) = \gamma_4 \mathcal{M}(-p_1, \dots, -p_4) \gamma_4$. Из (79) вытекает, что инвариантные амплитуды при ковариантах γ_5 и $i\gamma_5 \hat{Q}$ должны быть равны нулю. Пример такой реакции — упругое рассеяние пионов или каонов на нуклонах.

$\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow \frac{1}{2}^- + 0^-$. Здесь $\eta = -1$ и, следовательно, сохраняются только инвариантные амплитуды при ковариантах γ_5 и $i\gamma_5 \hat{Q}$. Этот процесс представляет собой образование барионного резонанса с четностью, противоположной четности нейтрона.

2. $\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow \frac{3}{2}^+ + 0^-$, $\eta = +1$. В разложение спинорной амплитуды входят только коварианты из числа (80), удовлетворяющие условию $X_\mu(p_1, \dots, p_4) = g_{\mu\nu} \gamma_4 X_\nu(-p_1, \dots, -p_4) \gamma_4$, т. е. содержащие γ_5 . Эти коварианты, очевидно, будут определять разложение спинорной амплитуды для всех четырех процессов $\frac{1}{2}^\pm + 0^\mp \rightarrow \frac{3}{2}^\pm + 0^\mp$ с одинаковой общей четностью $\eta = 1$.

Если знак одной из четностей справа или слева будет изменен (пусть $\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow \frac{3}{2}^+ + 0^+$), то в разложение спинорной амплитуды войдут только те коварианты (80), которые не содержат γ_5 .

3. $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 2^+$, $\eta = -1$. Спинорная амплитуда определяется двумя псевдотензорными ковариантами (82).

Условие инвариантности S -матрицы относительно обращения времени (6.101) связывает амплитуды прямого и обратного процессов. В случае упругого рассеяния это условие налагает ограничения на вид амплитуды. Для того чтобы перейти от (6.101) к условию T -инвариантности спинорной амплитуды, необходимо, согласно (70), найти волновую функцию частицы в преобразованном матричном элементе через исходную. Обращение времени изменяет знак импульса частицы p и превращает начальное состояние в конечное. Следовательно, нужно вычислить (пользуясь явным видом волновых функций) матрицу $T^{rr'}$ в соотношении

$$\bar{u}^r(-p, \lambda) = T^{rr'} u_{r'}(p, \lambda).$$

С помощью этого соотношения можно освободиться от волновых функций в том равенстве, которое возникает из (6.101) после подстановки (70), и получить тем самым ограничение на спинорную амплитуду.

В случае дираковской волновой функции u_α и волновой функции ε_μ для частицы со спином 1 мы находим прямым путем из явных выражений для этих функций (см. § 5.2 и 5.4)

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(-p, \lambda) &= (i\gamma_4 \gamma_5 \mathcal{E}^{-1})^{\alpha\beta} u_\beta(p, \lambda) \equiv T^{\alpha\beta} u_\beta(p, \lambda), \\ \varepsilon_\mu^*(-p, \lambda) &= g_{\mu\nu} \varepsilon_\nu(p, \lambda). \end{aligned} \quad (88)$$

Первая из формул (88) сохраняется и для $2(2J + 1)$ -компонентных функций, если заменить $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}^{1/2}$ на \mathcal{E}^J (формула (6.92)). Соотношения (88) позволяют построить сразу же аналогичные формулы для функций Рариты—Швингера и Баргмана—Вигнера.

Характер ограничения на спинорную амплитуду, вытекающего из ее T -инвариантности, выявляется на простом примере упругого рассеяния $1/2 + 1/2 \rightarrow 1/2 + 1/2$, например: $N + \Sigma \rightarrow N + \Sigma$. Спинорная амплитуда этого процесса $\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$ имеет четыре дираковских индекса — два верхних и два нижних, и следовательно, коварианты $X_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$ можно представить в виде прямого произведения двух 4×4 -матриц, построенных из дираковских γ -матриц и импульсов. Существует три способа распределения значков коварианта между двумя 4×4 -матрицами.

Пусть индексы одной 4×4 -матрицы принадлежат начальному состоянию, а индексы другой — конечному состоянию. Так как дираковские матрицы имеют индексы $(\gamma^R)_{\alpha\beta}$, то при построении $X_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$ нам следует пользоваться комбинациями $(\gamma^R \mathcal{E})_{\alpha\beta}$ и $(\mathcal{E}^{-1} \gamma^R)^{\alpha\beta}$ (которые обладают определенными свойствами симметрии, см. конец § 5.2). Общее выражение для коварианта тогда есть

$$X_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = (O' \mathcal{E}')_{\alpha'\beta'} \times (\mathcal{E}^{-1} O)^{\alpha\beta} \equiv (O' \times O)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}, \quad (89)$$

где O' и O построены из матриц γ^R и импульсов. Число независимых ковариантов равно $8 = 1/2 (2 \cdot 1/2 + 1)^4$:

$$X_i = \{1' \cdot 1, \gamma'^\mu \cdot \gamma_\mu, \gamma_5' \gamma'^\mu \cdot \gamma_5 \gamma_\mu,$$

$$\frac{1}{2} \sigma'_{\mu\nu} \cdot \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5' \cdot \gamma_5, \gamma_5' \gamma'_\mu (p_1 - p_2)^\mu \cdot \gamma_5 + \gamma_5' \cdot \gamma_5 \gamma_\mu (p'_1 - p'_2)^\mu,$$

$$\gamma_5' \gamma'_\mu (p_1 - p_2)^\mu \cdot \gamma_5 - \gamma_5' \cdot \gamma_5 \gamma_\mu (p'_1 - p'_2)^\mu,$$

$$(p_1 - p_2)^\mu \gamma'_\mu \cdot 1 - 1' \cdot (p'_1 - p'_2)^\mu \cdot \gamma_\mu\}. \quad (90)$$

$$p_3 = p'_1, \quad p_4 = p'_2,$$

Условие T -инвариантности спинорной амплитуды, согласно (6.101), (70) и (88), имеет вид

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(p_1, \dots, p_4) = \eta_T T_{\alpha'\rho}^{-1} T_{\beta'\sigma}^{-1} \mathcal{M}_{\rho\sigma}^{\rho'\sigma'}(-p'_1, \dots, -p'_4) T^{\rho\alpha} T^{\sigma\beta}, \quad (91)$$

причем $\eta_T = \eta_T^* (1)\eta_T^* (2)\eta_T^* (3)\eta_T^* (4) = 1$ для упругого рассеяния. Это значит, что коварианты X_i должны быть инвариантны относительно одновременной замены $p \leftrightarrow -p'$ и $(\gamma' \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{C}^{-1} \gamma)^T$ (в обозначениях (89) и (90) — при $\gamma' \leftrightarrow \gamma$). Поэтому разложение T -инвариантной спинорной амплитуды (91) не содержит X_7 и X_8 .

Зарядовое сопряжение S связывает амплитуды различных процессов (см. § 6.2). Чтобы превратить условие S -инвариантности S -матрицы (6.89) в соотношении для спинорных амплитуд, следует воспользоваться формулами (см. § 5.2).

$$u_C(p, \lambda) = v(p, \lambda) = \mathcal{C} \bar{u}(p, \lambda), \quad \bar{v}(p, \lambda) = \mathcal{C}^{-1} u(p, \lambda).$$

В случае $2(2J + 1)$ -компонентных функций волновые функции античастиц получаются из (6.91) опусканием η_C .

Соотношение спинорных амплитуд \mathcal{M} и \mathcal{M}_C для процесса $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}'$ и зарядово сопряженного к нему $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}'$ получается из (6.89) с помощью (70) и (5.67):

$$\mathcal{M}(p_1, \dots, p_4) = \eta_C \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{M}_C^T(p_1, \dots, p_4) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}^{-1}, \quad (92)$$

где каждый множитель \mathcal{C} слева опускает верхний индекс \mathcal{M}_C^T , а каждый множитель \mathcal{C}^{-1} справа поднимает нижний индекс. Обобщение (92) на случай частиц высших спинов, описываемых волновыми функциями Баргмана—Вигнера или Рариты—Швингера, является очевидным.

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ

Обзор экспериментальных данных по частицам и резонансам [8] ясно показывает, что спектр адронов имеет весьма сложный характер. Но именно по виду этого спектра мы должны в первую очередь судить о свойствах той динамической системы, состояния которой он представляет. Эта динамическая система отличается от тех, которые известны нам из ядерной и атомной физики, прежде всего большей величиной взаимодействия. Возможно, что спектр адронов есть своего рода коллективный эффект взаимодействия частиц (т. е. состояний спектра) и самосогласованности самого существования такого набора частиц.

Вполне возможна и другая точка зрения, согласно которой адроны представляют собой связанные состояния кварков и антикварков. Во всех случаях, однако, «первичная» классификация адронов, т. е. модель, обосновывающая происхождение спектра адронов, должна отправляться от мультиплетной структуры спектра. Мультиплеты частиц описываются феноменологически с помощью приближенных симметрий (см. § 2.2). Детальное изучение приближенных симметрий SU_2 , SU_3 и SU_6 составляет задачу данной части книги.

Таким образом, мы оставим в стороне вопрос о происхождении внутренней симметрии (тем более, что современное положение теории не позволяет сделать каких-либо заключений по этому поводу). Точно так же мы не будем останавливаться на интересных, но пока безуспешных попытках объединения пространственно-временной и внутренней групп симметрии в единую нетривиальную группу.

Анализ экспериментальных данных указывает на наличие важной корреляции между силой взаимодействия и его симметрией, упомянутой в § 2.2 (чем сильнее взаимодействие и уже его класс, тем шире группа его симметрии). Существование такой корреляции определяет порядок изложения в этой части. Мы начинаем с широкого общего класса всех адронных взаимодействий, обладающего изоспиновой группой симметрии SU_2 , после чего выделяем более сильную часть взаимодействия, расширяя одновременно группу симметрии — сначала до SU_3 , а затем до SU_6 . При этом мультиплеты, связанные с группой внутренней симметрии, также расширяются и содержат все большее число частиц.

ИЗОСПИНОВАЯ СИММЕТРИЯ

Понятие об изотопическом спине, или изоспине, было введено Гейзенбергом для описания свойств нейтрона и протона и их взаимодействий в связи с зарядовой независимостью ядерных сил. В дальнейшем было выяснено, что изоспиновой симметрией обладает и взаимодействие нуклонов с пионами. По мере открытия новых сильно взаимодействующих частиц — сначала странных частиц, а затем резонансов — концепция изоспина приобретала все большую общность, так как (сильные) взаимодействия новых частиц также выказывали изоспиновую инвариантность. Это привело к убеждению, что изоспиновая симметрия является универсальным свойством сильных взаимодействий.

Изоспиновая симметрия нарушается электромагнитными и слабыми взаимодействиями. Вследствие малости эффектов, вызываемых этими взаимодействиями, изоспиновая инвариантность S -матрицы и вытекающий из нее закон сохранения изоспина выполняются с точностью порядка 1%.

Экспериментальной основой изоспиновой симметрии служат две группы фактов: а) существование мультиплетов частиц с близкими массами (и одинаковыми спином и четностью), но с различными электрическими зарядами; б) наличие соотношений между константами распада и между сечениями для различных процессов.

§ 8.1. Изоспиновые мультиплеты, гиперзаряд и группа SU_2

Обзор свойств элементарных частиц (см. табл. П.1—П.3 Приложения) показывает, что сильно взаимодействующие частицы существуют в виде зарядовых, или изоспиновых, мультиплетов. Отдельные частицы мультиплета отличаются по электрическому заряду. Частицы мультиплета имеют один и тот же спин и почти одинаковые массы. Расщепление масс в мультиплете связано с взаимодействием, различающим отдельные частицы мультиплета, т. е. с электромагнитным взаимодействием. Таким образом, пространственно-временные свойства всех частиц мультиплета одинаковы, если пренебречь электромагнитным и слабым взаимодействиями. Например, стабильные частицы (см. табл. П.1) объединены в мульти-

плеты N, Λ, Σ, Ξ, Ω (барионы) и K, π, η, \bar{K} (мезоны) с числом частиц в мультиплете, равным 1, 2, 3. Известен также мультиплет резонансов Δ (см. табл. П.3), содержащий 4 частицы: Δ⁺⁺, Δ⁺, Δ⁰, Δ⁻. Некоторые изоспиновые мультиплеты приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Барионы	Мезоны	Число частиц	Y	I
N = (p, n)	K = (K ⁺ , K ⁰)	2	1	1/2
Σ = (Σ ⁺ , Σ ⁰ , Σ ⁻)	π = (π ⁺ , π ⁰ , π ⁻)	3	0	1
Λ	η	1	0	0
Ξ = (Ξ ⁰ , Ξ ⁻)	\bar{K} = (\bar{K} ⁰ , K ⁻)	2	-1	1/2
Ω ⁻		1	-2	0
Δ = (Δ ⁺⁺ , Δ ⁺ , Δ ⁰ , Δ ⁻)		4	1	3/2

Вырождение уровней масс (в пренебрежении электромагнетизмом) свидетельствует о симметрии сильных взаимодействий. Найдем группу этой симметрии \mathcal{G} , предполагая, что вырождение не может быть случайным. Тогда число частиц в мультиплете n (или мультиплетность) должно совпадать с размерностью базиса неприводимого представления группы \mathcal{G} . При этом, согласно табл. 8.1, возможные размерности должны включать значения $n = 1, 2, 3, 4$.

Запишем вектор одночастичного состояния в виде $|\dots; \beta; I, t\rangle$, где точки обозначают переменные группы Пуанкаре, t и I - соответственно аддитивные и неаддитивные квантовые числа изоспиновой симметрии, а β - остальные квантовые числа. Выбрав переменные группы Пуанкаре и квантовые числа β одинаковыми для всех частиц мультиплета I , мы ограничимся пока изучением вектора состояния мультиплета $|I, t\rangle$ в пространстве изоспина. Иначе говоря, мы записываем вектор состояния мультиплета в виде произведения изоспинового вектора $|I, t\rangle$ на вектор состояния, зависящий от переменных группы Пуанкаре и числа β , например:

$$|p, \lambda; m, J; \beta; I, t\rangle = |p, \lambda; m, J; \beta\rangle |I, t\rangle. \quad (1)$$

Мультиплет характеризуется значением I . Каждая частица в мультиплете описывается однозначно электрическим зарядом Q или же величиной, связанной с Q , например:

$$t = Q - \bar{Q} = Q - \frac{Y}{2}, \quad (2)$$

где \bar{Q} есть средний заряд мультиплета, а Y - гиперзаряд, введенный Гелл-Манном и Нишидзимой. Величина $Y = 2\bar{Q}$ имеет, очевидно, одно и то же значение для всех частиц мультиплета.

Гиперзаряд Y характеризует мультиплет как целое и может быть включен в число переменных β в (1).

Пусть G — преобразование изоспиновой группы \mathfrak{G} . Существование изоспиновой симметрии означает, что сильные взаимодействия не отличают состояния $|I, t\rangle$ мультиплета I от линейной комбинации состояний этого же мультиплета:

$$u(G)|I, t\rangle = \sum_{t'} |I, t'\rangle d_{t't}^I(G). \quad (3)$$

Здесь $d^I(G)$ есть унитарная матрица для мультиплета I . Матрицы $d^I(G)$ образуют унитарную группу \mathfrak{G} , а I определяет ее неприводимое представление.

Таким образом, \mathfrak{G} есть группа унитарных матриц, неприводимые представления которой I могут иметь размерности $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Мы потребуем, кроме того, чтобы: а) \mathfrak{G} было минимально возможной группой; б) \mathfrak{G} содержало преобразования $\exp(it\alpha)$, которые вместе с одновременным гиперзарядовым преобразованием $\exp(i\alpha Y/2)$ приводили бы, согласно (2), к преобразованию $U_Q = \exp(iQ\alpha)$. Как известно (см. § 2.2), U_Q есть преобразование точной симметрии, соответствующее закону сохранения электрического заряда.

Всем перечисленным выше условиям удовлетворяет группа унитарных 2×2 -матриц SU_2 , которая изучалась в гл. 3 в связи с группой трехмерных вращений.

Воспроизведем вкратце результаты гл. 3, относящиеся к группе SU_2 . В отличие от матриц Паули в группе вращений σ_k , изоспиновые матрицы Паули будут обозначаться τ_k ($k = 1, 2, 3$). Тогда преобразование G в базисном представлении есть

$$G = \exp\left\{i \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\omega}\right\}, \quad G^+ = G^{-1}. \quad (4)$$

Для неприводимого представления с изоспином I преобразование (3) имеет вид

$$d^I(G) = \mathcal{D}^I(G) = \exp\{iI\boldsymbol{\omega}\}. \quad (5)$$

Составляющие изоспина I_1, I_2, I_3 удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов углового момента:

$$[I_i, I_j] = ie_{ijk} I_k. \quad (6)$$

Квадрат изоспина $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ коммутирует со всеми изоспиновыми генераторами I_k , и, следовательно, является инвариантом, по собственным значениям которого классифицируются неприводимые представления \mathcal{D}^I . Собственные значения I^2 записываются в виде $I(I+1)$, где I может быть одним из чисел $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ Проекция изоспина I_3 изменяется в пределах $-I \leq I_3 \leq I$, пробегая $2I+1$ значений, так что размерность $n = 2I+1$.

Таким образом, при изоспиновой SU_2 -симметрии частицы должны встречаться мультиплетами, отмечаемыми по изоспину I , с числом частиц $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Поскольку среднее значение I_3 по мультиплету равно нулю, то I_3 следует отождествить с t :

$$Q = t + \frac{1}{2} Y = I_3 + \frac{1}{2} Y.$$

Простейшее нетривиальное неприводимое представление изоспиновой группы осуществляется с помощью унитарных 2×2 -матриц (4). Базисное состояние $|^{1/2}, t\rangle, t = \pm 1/2$, в этом случае является изоспинором и характеризует изодублет. Например, нуклонный дублет N , состоящий из протона p и нейтрона n , есть

$$|N\rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = N_1 |p\rangle + N_2 |n\rangle, \quad (7)$$

где

$$|p\rangle = |^{1/2}, 1/2\rangle, \quad |n\rangle = |^{1/2}, -1/2\rangle$$

— состояния протона и нейтрона. Здесь $|N_1|^2 + |N_2|^2 = 1$. Любая суперпозиция типа (7) одинаково хорошо описывает нуклон, причем две такие суперпозиции связаны унитарным представлением (4):

$$|N'\rangle = G |N\rangle. \quad (8)$$

Состояния $|I, t\rangle$ с изоспином I можно записать в виде $(2I + 1)$ -рядного столбца, каждая строка которого отмечается по $t = I_3'$. Мы будем считать, что они образуют симметричный спинор, с нижним индексом и, следовательно, преобразуются так же, как и Φ_t^I :

$$|I, t\rangle \sim \Phi_t^I = \frac{\sqrt{(2I)!} (N_1)^{I+t} (N_2)^{I-t}}{\sqrt{(I+t)! (I-t)!}}, \quad (9)$$

где N_1 и N_2 — компоненты изоспинора (7). При изоспиновом вращении (4)

$$|I, t'\rangle = \sum_t \mathcal{D}_{t't}^I(G) |I, t\rangle. \quad (10)$$

Операторы

$$I_{\pm} = (I_1 \pm iI_2) \quad (11)$$

изменяют значение t на единицу:

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}.$$

С помощью (9) находим матричные элементы изоспина:

$$I_{\pm} |I, t\rangle = [(I \pm t)(I \pm t + 1)]^{1/2} |I, t \pm 1\rangle. \quad (12)$$

Векторы состояния (1) соответствуют группе симметрии $(SU_2)_I \times U_Y(1)$ — прямому произведению изоспиновой группы SU_2 и группы одномерных унитарных преобразований $U_Y(1) = \exp(iY\lambda)$, связанных с гиперзарядом. Это согласуется с тем, что существуют независимые законы сохранения гиперзаряда и изоспина.

Из (2) явствует, что, подобно заряду Q , гиперзаряд Y — аддитивное квантовое число. Суммарный гиперзаряд сохраняется во всех взаимодействиях, кроме слабого. Закон сохранения гиперзаряда представляет собой обобщение экспериментальных фактов, отражающее избирательную способность частиц к превращениям. Например, в эксперименте не наблюдаются процессы

$$\pi + N \rightarrow \pi + \Lambda, \quad K + \Lambda \rightarrow \pi + \Sigma$$

и быстрые распады

$$\Lambda \rightarrow \pi + N, \quad \Sigma \rightarrow \pi + N \text{ и т. д.},$$

противоречащие сохранению гиперзаряда Y .

Сохранение гиперзаряда означает, что S -матрица коммутирует с Y , $[S, Y] = 0$, т. е. S -матрица инвариантна относительно гиперзарядового фазового преобразования

$$U_Y^{-1} S U_Y = S, \quad U_Y = e^{iY\lambda}.$$

Так как электрический заряд сохраняется во всех взаимодействиях, то величина I_3 , подобно гиперзаряду Y , не сохраняется только в слабых взаимодействиях.

Однако если бы внутренняя симметрия действительно следовала бы группе $(SU_2)_I \times U_Y(1)$, то каждый изомультиплет мог бы иметь любое значение Y . Между тем значения I и Y коррелированы. Как барионные, так и мезонные изомультиплеты существуют лишь при определенном сочетании Y и I ; например, мультиплеты с $Y = 0$ и $I = 1/2$ или с $Y = 1$, $I = 0$ неизвестны. Заметим, что соотношение

$$(-1)^Y = (-1)^{2I}$$

выполняется для всех известных изомультиплетов.

Обозначения барионных и мезонных состояний (табл. 8.1) используются не только для стабильных частиц, но и для резонансов.

Барионные изомультиплеты с квантовыми числами нуклона ($Y = 1$, $I = 1/2$) образуют семейство N -состояний, включающее частицы разных спинов и четности. Аналогичным образом говорят о Λ -состояниях ($Y = 0$, $I = 0$), Σ -состояниях ($Y = 0$, $I = 1$) и т. д.

Мезонные изомультиплеты отмечаются по изомультиплетам псевдоскалярных мезонов. K -состояния имеют всегда $Y = 1$, $I = 1/2$, но могут быть любого спина и четности и т. д.

§ 8.2. Изоспин и отражения. Состояния античастицы. G-четность

Сильные взаимодействия инвариантны относительно отражений C , P и T в отдельности. Поэтому рассмотренную в предыдущем параграфе группу симметрии $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger \times \mathcal{G}$, где $\mathcal{G} = (SU_2)_I \times U_Y$, необходимо расширить до полной группы инвариантности, содержащей также и отражения.

Отражение θ . Прежде всего мы должны дополнить группу $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger \times \mathcal{G}$ полным отражением $\theta = CPT$, которое является операцией точной симметрии. Как было показано в § 6.1 расширение группы внутренней симметрии с помощью отражения θ можно произвести независимо от расширения собственной ортохронной группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}_+^\dagger$ до собственной группы $\overline{\mathcal{P}}_+$. Для этого оператор θ следует заменить другим антиунитарным оператором θ_0 , свойства которого определяются только группой внутренней симметрии.

Расширенная группа внутренней симметрии \mathcal{G}_θ содержит тогда преобразования $\{G, \theta_0 G\}$, где G принадлежит исходной группе \mathcal{G} . В качестве группы SU_2 мы рассмотрим изоспиновую группу $(SU_2)_I$, так как учет гиперзарядовых трансформаций U_Y не вносит нового (одномерные фазовые преобразования были уже изучены в § 6.1 на примере группы точной симметрии). Таким образом, нам нужно найти сопредставления группы $(SU_2)_{I\theta} = \{G, \theta_0 G\}$, где G имеет вид (5). Определения (6.45) и (6.32) для антиунитарных операций θ и θ_0 могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \theta |p, \lambda; J, m; a\rangle &= (-1)^{J-\lambda} \theta_0 |p, -\lambda; J, m; a\rangle = \\ &= (-1)^{J-\lambda} |p, -\lambda; J, m; \bar{a}\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где a и \bar{a} обозначают внутренние квантовые числа частицы и античастицы; при этом $\theta_0^2 = 1$.

Пусть $|a\rangle$ — та часть вектора состояния, которая зависит от квантовых чисел внутренней симметрии, $|a\rangle = |Q_i'; I_a, t_a\rangle$, где обобщенные заряды Q_i включают и гиперзаряд. При изоспиновом вращении G состояния $|I, t\rangle$ преобразуются по правилу (10):

$$u(G)|I, t\rangle = \sum_{t'} \mathcal{D}_{it'}^I(G)|I, t'\rangle. \quad (14)$$

В силу (13) состояние $\theta_0 |a\rangle = |\bar{a}\rangle$ описывает античастицу; вследствие антилинейности θ_0 это состояние преобразуется с помощью комплексно сопряженной матрицы

$$u(G)\theta_0 |I, t\rangle = \sum_{t'} \mathcal{D}_{it'}^{*I}(G)\theta_0 |I, t'\rangle, \quad (15)$$

а компоненты изоспина I_k антикоммутируют с θ_0 : $\theta_0 I_k = -I_k \theta_0$.

Согласно общей теории (см. § 6.1) тип сопредставления определяется характером отношения, имеющего место между матрицами d неприводимого представления группы \mathfrak{G} внутренней симметрии и комплексно сопряженными матрицами d^* . В случае группы SU_2 матрицы \mathcal{D}^I и \mathcal{D}^{I*} унитарно эквивалентны:

$$\mathcal{D}^{I*}(G) = \mathcal{D}^I(C) \mathcal{D}^I(G) \mathcal{D}^{I-1}(C), \quad C = -i\tau_2, \quad (16)$$

так что унитарная матрица β из формулы (6.34) равна $\beta = \mathcal{D}^{I-1}(C)$. Это значит, что сопредставления типа 3 в группе $(SU_2)_{I\theta}$ отсутствуют (см. § 6.1). Сопредставления типа 1 или 2 соответствуют значениям $\beta\beta^* = \pm 1$. В случае изоспиновой группы мы имеем для мультиплетта с изоспином I :

$$\beta\beta^* = \mathcal{D}^I(C^{-1}) \mathcal{D}^I(C^{-1*}) = (-1)^{2I}. \quad (17)$$

Следовательно, тип сопредставлений группы $(SU_2)_{I\theta}$ зависит от значения изоспина. При целочисленных изоспинах, $I = 0, 1, 2, \dots$, осуществляется тип 1 (формула (6.36)), при полуцелых изоспинах — тип 2 (формулы (6.37), (6.38)). Это значит, что состояния $|I, t\rangle$ и $\theta_0 |I, t\rangle$ при целочисленных изоспинах могут принадлежать одному и тому же мультиплету I , а при полуцелых изоспинах — разным мультиплетам с одинаковым изоспином I . Иначе говоря, только при целых изоспинах I частицы и античастицы могут находиться в одном мультиплете, а матрица \mathcal{D}^I может быть вещественной («самосопряженные мультиплеты») [110, 111].

Связь между значением изоспина и существованием мультиплетов, объединяющих частицы и античастицы, является следствием только θ -инвариантности и не зависит от других квантовых чисел частицы. Из табл. 8.1 и табл. П.1 явствует, что эта связь выполняется для всех известных частиц.

Выпишем в явном виде формулы (6.36), (6.37) для сопредставления расширенной изоспиновой группы $(SU_2)_{I\theta}$. Прежде всего отметим, что состояние античастицы $|\bar{a}\rangle$, в силу (14), (15) и (16), преобразуется так же, как и $|I, -t\rangle (-1)^{I-t}$:

$$|\bar{a}\rangle = \theta_0 |I, t\rangle \sim \sum_{t'} \mathcal{D}_{tt'}^I(C^{-1}) |I, t'\rangle = (-1)^{I-t} |I, -t\rangle, \quad (18)$$

если $|a\rangle = |I, t\rangle$ — состояние частицы.

В случае целочисленных изоспинов, когда $|I, t\rangle$ и $\theta_0 |I, t\rangle$ находятся в одном мультиплете, должна существовать такая унитарная матрица $\mathcal{D}^I(\theta_0)$, что

$$|\bar{a}\rangle = \theta_0 |I, t\rangle = \sum_{t'} \mathcal{D}_{tt'}^I(\theta_0) |I, t'\rangle. \quad (19)$$

Из (14), (15) и (16) тогда вытекает равенство

$$\mathcal{D}(\theta_0) \mathcal{D}(C) \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G) \mathcal{D}(\theta_0) \mathcal{D}(C),$$

откуда в силу неприводимости и унитарности

$$\mathcal{D}^I(\theta_0) = \varepsilon_I \mathcal{D}^I(C^{-1}), \quad \varepsilon_I = \pm 1, \quad (20)$$

где ε_I зависит только от I . Формулы (14) (19) и (20) определяют сопредставления (6.36) для целых изоспинов.

Применим формулу (19) к нейтральной частице a^0 мультиплетта I , для которой $|\bar{a}^0\rangle = |a^0\rangle$. Подстановка (20) в (19) дает $|\bar{a}^0\rangle = \varepsilon_I (-1)^I |a^0\rangle$, или $\varepsilon_I = (-1)^I$. Формула (19) теперь позволяет найти фазовый множитель, связывающий состояние античастицы $|\bar{a}\rangle = \theta_0 |a\rangle = \theta_0 |I, t\rangle$ с изоспиновым состоянием $|I, t'\rangle$:

$$|\bar{a}\rangle = (-1)^{t_a} |I_a, -t_a\rangle, \quad (21)$$

что завершает определение фазы в самосопряженном мультиплетте.

Рассмотрим в качестве примера триплет пионов π^+ , π^0 , π^- . отождествим $|\pi^-\rangle$ с изоспиновым состоянием $|I=1, t=-1\rangle$. Тогда, согласно (21), должно быть $|\pi^+\rangle = -|1, 1\rangle$, так что триплет пионов есть

$$|1, 1\rangle = -|\pi^+\rangle, \quad |1, 0\rangle = |\pi^0\rangle, \quad |1, -1\rangle = |\pi^-\rangle \quad (22)$$

В случае полуцелых изоспинов вид неприводимого сопредставления (тип 2) вытекает из (6.37) или из (14) и (15). Если $|I, t\rangle$ — исходный изомультиплет, то, добавив отражение θ_0 , мы приходим к удвоенному мультиплету

$$|I, t, r\rangle = \begin{pmatrix} |I, t\rangle \\ -\mathcal{D}^I(C)(\theta_0 |I, t\rangle) \end{pmatrix} \quad (r=1, 2), \quad (23)$$

по отношению к которому матрицы $\tilde{d}^I(G)$ и $\tilde{d}^I(\theta_0)$ равны

$$\tilde{d}^I(G) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^I(G) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^I(G) \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}^I(\theta_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^I(C) \\ -\mathcal{D}^I(C) & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Например, пусть исходный мультиплет — это каоны K^+ и K^0 , состояния которых отождествляются с изоспиновыми состояниями следующим образом:

$$|K^+\rangle = |1/2, 1/2\rangle, \quad |K^0\rangle = |1/2, -1/2\rangle.$$

Тогда вторая строка в (23) будет содержать античастицы ($-|\bar{K}^0\rangle$, K^-). Мультиплет античастиц имеет то же изоспиновое содержание, что и исходный, отличаясь от него по другим аддитивным квантовым числам (в этом примере — по гиперзаряду).

Отражение P и зарядовое сопряжение C. Относительная четность всех частиц изомультиплета является одинаковой по определению:

$$P |p, \sigma; I, t\rangle = \eta_p^* | -p, \sigma; I, t\rangle;$$

фазовый множитель η_P не зависит от t ; изоспин I_k коммутирует с отражением P .

Зарядовое сопряжение C превращает частицы в античастицы (см. § 6.2). В отличие от θ_0 , зарядовое сопряжение C описывается унитарным оператором, который сохраняет перестановочные соотношения. Поэтому C не может изменять знака всех компонент изоспина. Обычный выбор есть

$$C I_1 C^{-1} = -I_1, \quad C I_2 C^{-1} = I_2, \quad C I_3 C^{-1} = -I_3. \quad (25)$$

C переводит состояния мультиплета частиц в состояния мультиплета античастиц с умножением на общий фазовый множитель η_C :

$$C |Q_i'; I, t\rangle = \eta_C | -Q_i'; I, -t\rangle. \quad (26)$$

Но совокупность состояний $C | I, t\rangle$ не составляет изоспинового мультиплета, так как эти состояния не преобразуются по правилу (14).

Для полуцелых изоспинов всегда существует дополнительное фазовое преобразование вне изоспиновой группы, так что можно положить $\eta_C = 1$. В случае целочисленных изоспинов и самосопряженных мультиплетов, содержащих как частицы, так и античастицы, значение η_C будет равно зарядовой четности нейтрального члена мультиплета $a^0 = \bar{a}^0$:

$$C |a^0\rangle = \eta_C |\bar{a}^0\rangle = \eta_C |a^0\rangle. \quad (27)$$

Для нейтрального пиона $\eta_C = 1$, для частиц ρ^0 и ω^0 будет $\eta_C = -1$.

G-четность. Зарядовое сопряжение C не коммутирует с компонентами изоспина (см. (25)). Поэтому оператор C неудобен для преобразования мультиплета частиц в мультиплет античастиц; при этом необходимо изменять и матрицы изоспина.

Введем преобразование G , состоящее из зарядового сопряжения C и поворота вокруг изоспиновой оси 2 на 180° [112]:

$$G = e^{i\pi I_2} C. \quad (28)$$

Иногда $\exp(i\pi I_2)$ называется преобразованием зарядовой симметрии, так как оно заменяет I_3 на $-I_3$. Зарядовую симметрию не следует путать с зарядовым сопряжением C , которое изменяет знаки у всех аддитивных квантовых чисел. Из (25) и (28) следует, что оператор G коммутирует с компонентами изоспина: $[G, I_k] = 0$.

Применим G к состоянию с определенным изоспином и с равными нулю другими аддитивными квантовыми числами. Так как $\exp(i\pi I_2) | I, t\rangle = (-1)^{I-t} | I, -t\rangle$, то

$$G | I, t\rangle = (-1)^{I-t} \eta_C | I, t\rangle. \quad (29)$$

Таким образом, состояние $|I, t\rangle$ может быть собственным состоянием оператора G , если равны нулю все аддитивные квантовые числа, кроме I_3 .

G -четность η_G всякого самоспряженного мультиплета определяется по нейтральной частице равенством

$$G|I, t=0\rangle = \eta_G|I, t=0\rangle, \quad (30)$$

откуда сравнением с (29) мы находим $\eta_G = (-1)^I \eta_C$. Если выбрать фазовые множители для античастиц по правилу (21), то множитель η_G будет одинаков для всех членов самоспряженного мультиплета. Например,

$$G \begin{pmatrix} -|\pi^+\rangle \\ |\pi^0\rangle \\ |\pi^-\rangle \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -|\pi^+\rangle \\ |\pi^0\rangle \\ |\pi^-\rangle \end{pmatrix}, \quad G(\pi) = -1.$$

G -четностью характеризуются также мультиплеты ρ , η , ω , ϕ , A_1 , ... Обычно изоспин и G -четность частицы объединяются в одном обозначении I^G . Для пионов $I^G = 1^-$. Определенной G -четностью обладают и системы частиц и античастиц с общими $B = Y = 0$. При этом входящие в систему частицы могут не иметь G -четности.

Так как G коммутирует с изоспином, то в случае произвольного изомultiплета G -преобразование (28) превращает изомultiплет частиц в изомultiплет античастиц; на эти изомultiплеты действуют одни и те же матрицы I_k .

G -четность сохраняется во всех процессах, где сохраняется изоспин и C , т. е. во всех сильных взаимодействиях. Электромагнитные и слабые взаимодействия нарушают G -четность.

G -четность системы частиц, обладающих G -четностью, равна произведению G -четностей отдельных частиц. Отсюда следуют правила отбора для сильных распадов. Например, частица с $\eta_G = 1$ не может распасться на нечетное число G -нечетных частиц, а частица с $\eta_G = -1$ не может распасться на два пиона. В частности, невозможны быстрые распады ρ -мезона на три пиона и частиц ϕ и ω на два пиона.

Выбор фазовых множителей для частиц и античастиц. Фазовые множители ϵ_a устанавливают соответствие типа $|a\rangle = \epsilon_a |I_a, t_a\rangle$ между состоянием частиц a и базисным изоспиновым состоянием, преобразующимся согласно (14). Эти множители фиксируются формулой (21) для самоспряженных изомultiплетов с $I=0, 1, 2, \dots$ и формулой (23) для полуцелых изоспинов. Формула (22) используется для выбора фаз и в случае барионных мультиплетов с изоспином $I=1$, например:

$$|\Sigma^+\rangle = -|1, 1\rangle, \quad |\Sigma^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\Sigma^-\rangle = |1, -1\rangle,$$

так как изоспиновые свойства π и Σ должны быть одинаковы. Мультиплет античастиц $\bar{\Sigma}$ имеет аналогичный вид:

$$|1, 1\rangle = -|\bar{\Sigma}^+\rangle, \quad |1, 0\rangle = |\Sigma^0\rangle, \quad |1, -1\rangle = |\bar{\Sigma}^-\rangle.$$

Итак, состояния частиц и античастиц выражаются через базисные изоспиновые состояния $|I, t\rangle$ следующим образом. В случае полужелтых изоспинов ($I = 1/2, 3/2, \dots$)

$$|a\rangle = |I_a, t_a\rangle, \quad |\bar{a}\rangle = (-1)^{I_a+t_a} |I_a, -t_a\rangle. \quad (31)$$

В случае целочисленных изоспинов ($I = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} |a\rangle &= |I_a, t_a\rangle, & t_a \leq 0, \\ |a\rangle &= (-1)^{t_a} |I_a, t_a\rangle, & t_a > 0, \\ |\bar{a}\rangle &= (-1)^{t_a} |a(I_a, -t_a)\rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Например, в случае $I = 3/2$ мультиплет античастиц имеет вид

$$|\bar{\Delta}^+\rangle, -|\bar{\Delta}^0\rangle, |\bar{\Delta}^-\rangle, -|\bar{\Delta}^{--}\rangle,$$

а мультиплет антинуклонов есть

$$|\bar{p}\rangle, -|\bar{p}\rangle.$$

§ 8.3. Многочастичные состояния и изоспиновые амплитуды. Распады и соотношения между реакциями

Многочастичные состояния. Многочастичные состояния преобразуются по прямому произведению представлений, соответствующих одночастичным состояниям. Разложение прямого произведения представлений группы SU_2 на неприводимые представления было уже рассмотрено ранее, в гл. 3, в связи с группой вращений. Оно содержит коэффициенты Клебша—Гордана, которые приведены в табл. П.4.

В стандартном разложении произведения двух векторов (см. § 3.4) предполагается, что оба вектора состоят преобразуются с индексами одинакового типа. В нашем случае базисные изоспиновые состояния, совокупность которых образует мультиплет I , суть $|I, t\rangle$ и правило преобразования их задается формулами (10) и (14). Мы находим тогда, в силу (3.82),

$$\begin{aligned} |I_b, t_a; I_b, t_b\rangle &\equiv |I_a, t_a\rangle |I_b, t_b\rangle = \\ &= \sum_I \langle I_a I_b t_a t_b | I_a I_b I t \rangle |I, t\rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

где $t = t_a + t_b$, а $\langle I_a I_b t_a t_b | I_a I_b I t \rangle$ — коэффициенты Клебша—Гордана.

Состояния физических частиц могут отличаться фазовыми множителями от базисных изоспиновых состояний $|I, t\rangle$. Например, если в двухчастичном состоянии $\| a, \bar{b} \rangle$ есть античастица \bar{b} , то ее

состояния $|\bar{b}\rangle$ не совпадают, вообще говоря, с базисными $|I_b, -t_b\rangle$, так как античастица преобразуется по сопряженному представлению. Выбор множителей ϵ_a в соотношении $|a\rangle = \epsilon_a |I_a, t_a\rangle$, связывающем состояние частицы $|a\rangle$ с изоспиновым состоянием, был сделан в § 8.2 (формулы (31) и (32)). Мы получаем для системы пион — нуклон

$$\begin{aligned}
 |\rho\pi^+\rangle &= |3/2, 3/2\rangle, \\
 |\rho\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, -3/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle, \\
 |\rho\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2\rangle, \\
 |\pi^+\rho^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, 1/2\rangle, \\
 |\pi^0\rho^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, 1/2\rangle, \\
 |\pi^-\rho^0\rangle &= |3/2, -3/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Формула (33) может быть очевидным образом обращена (см. § 3.5). В частности, для системы нуклон—антинуклон состояния с определенным изоспином имеют вид

$$\begin{aligned}
 |1, 1\rangle &= -|\bar{p}\bar{n}\rangle, & |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{p}\bar{p}\rangle - |\bar{p}\bar{n}\rangle), \\
 |1, -1\rangle &= |\bar{p}\bar{p}\rangle, & |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{p}\bar{p}\rangle + |\bar{p}\bar{n}\rangle).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Система трех нуклонов N_1, N_2, N_3 в состоянии с изоспином $3/2$ имеет следующие изоспиновые компоненты:

$$\begin{aligned}
 |3/2, 3/2\rangle &= |p_1 p_2 p_3\rangle, & |3/2, -3/2\rangle &= |\bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{n}_3\rangle, \\
 |3/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|p_1 p_2 p_3\rangle + |p_1 \bar{n}_2 p_3\rangle + |p_1 p_2 \bar{n}_3\rangle), \\
 |3/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\bar{p}_1 \bar{n}_2 \bar{n}_3\rangle + |\bar{n}_1 \bar{p}_2 \bar{n}_3\rangle + |\bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{p}_3\rangle).
 \end{aligned} \tag{36}$$

В случае тождественных частиц необходимо учесть свойства симметрии вектора состояния относительно перестановки переменных частиц. Изоспиновый мультиплет можно трактовать как одну частицу с дополнительной степенью свободы $I_3' = t$. Поэтому требование общей симметрии или антисимметрии вносит корреляцию между свойствами симметрии вектора состояния относительно перестановки (в отдельности) переменных группы Пуанкаре и изоспиновых переменных. Если, например, состояние двух тождественных

бозонов симметрично (антисимметрично) относительно перестановки изоспиновых переменных частиц, то оно должно иметь ту же симметрию и по отношению к перестановке остальных переменных. В частности, два пиона в состоянии $I = 1$ (которое антисимметрично) могут иметь только нечетный угловой момент, а в состоянии $I = 2$ — только четный угловой момент.

Сохранение изоспина и изоспиновые амплитуды. В приближении изоспиновой симметрии, когда пренебрегается электромагнитными и слабыми взаимодействиями, S -матрица, а значит, и T -матрица диагональны по изоспину I , т. е. динамика нечувствительна к изоспиновым вращениям, а полный изоспин I сохраняется:

$$[S, I_k] = 0, [T, I_k] = 0.$$

Следовательно, T -матрица может быть записана в виде разложения по изоспиновым амплитудам $T(I)$, описывающим рассеяние с изоспином I . Для процесса

$$a(I_a, t_a) + b(I_b, t_b) \rightarrow c(I_c, t_c) + d(I_d, t_d)$$

это разложение есть

$$\langle c, d | T | a, b \rangle = \sum_I T(I) \Lambda(I; a, b; c, d). \quad (37)$$

Амплитуды $T(I)$ являются изоспиновыми инвариантами. Коэффициент $\Lambda(I; a, b; c, d)$ есть матричный элемент оператора проецирования на состояние с изоспином I .

Чтобы выявить трансформационные свойства матрицы (37), перейдем с помощью (31), (32) к T -матрице для изоспиновых состояний:

$$\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c \epsilon_d \langle c, d | T | a, b \rangle = \langle I_c, t_c; I_d, t_d | T | I_a, t_a; I_b, t_b \rangle \equiv T_{t_a t_b}^{t_c t_d},$$

где изоспинорные индексы размещены в соответствии с условием, принятым в § 8.1. Инвариантность T -матрицы относительно изоспинового преобразования G выражается тогда равенством

$$T_{t_a t_b}^{t_c t_d} = \mathcal{D}_{t_c}^{*t_c} \mathcal{D}_{t_d}^{*t_d} \mathcal{D}_{t_a}^{t_a} \mathcal{D}_{t_b}^{t_b} T_{t_a' t_b'}^{t_c' t_d'}, \quad (38)$$

где $\mathcal{D}_{t_a}^{t_a'} \equiv [\mathcal{D}^{I_a}(G)]_{t_a}^{t_a'}$ — представление группы SU_2 с изоспином I_a . Из (38) явствует существование соотношений между первоначальной амплитудой и амплитудами для рассеяния других частиц t_a', t_b', t_c', t_d' тех же мультиплетов I_a, I_b, I_c, I_d .

Таким образом, в приближении изоспиновой симметрии изомультиплет трактуется как частица с дополнительной внутренней степенью свободы (квантовое число t), причем сильные взаимодействия могут различать только мультиплеты как целое, но не отдель-

ные частицы в них. Изоспиновые амплитуды $T(I)$ зависят от изоспинов процесса $I_a + I_b \rightarrow I_c + I_d$, но не от проекций t_i . Набор одних и тех же амплитуд $T(I)$ описывает рассеяние различных частиц, входящих в эти мультиплеты. Если число независимых амплитуд $T(I)$ невелико, то (37) позволяет получить полезные соотношения между сечениями.

Найдем явное выражение коэффициентов $\Lambda(I; a, b; c, d)$ в (37). Для этого необходимо поставить в (37) вместо одночастичных состояний $|a\rangle, \dots$ изоспиновые состояния $|I_a, t_a\rangle, \dots$ по (31), (32), а затем воспользоваться формулой приведения (33). Тогда

$$\langle c, d | T | a, b \rangle = \sum_{I, I', t, t'} \langle I_c I_d t_c t_d | I_c I_d I t \rangle \times \\ \times \langle I, t | T | I', t' \rangle \langle I_a I_b I' t' | I_a I_b t_a t_b \rangle \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c \varepsilon_d.$$

Так как изоспин сохраняется, то T коммутирует с I^2 и I_3 , так что

$$\langle I, t | T | I', t' \rangle = T(I, t) \delta_{I I'} \delta_{t t'}.$$

Сохранение изоспина означает также $[T, I_{1,2}] = 0$, в силу чего $T(I, t)$ не зависит от t . Это ведет к формуле (37) с коэффициентами

$$\Lambda(I; a, b; c, d) = \\ = \sum_t \langle I_c I_d t_c t_d | I_c I_d I t \rangle \langle I_a I_b I t | I_a I_b t_a t_b \rangle \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c \varepsilon_d. \quad (39)$$

Для того чтобы изоспиновая амплитуда $T(I)$ была изоинвариантной, коэффициенты (39) должны преобразовываться таким же образом, как и T -матрица (по правилу (38)). Но входящие в (39) коэффициенты Клебша—Гордана представляют собой компоненты изотропного тензора (см. (3.86), (3.89)):

$$\langle I_a I_b t_a t_b | I_a I_b I t \rangle = [I I_a I_b]_t^{t_a t_b}.$$

Поэтому правая часть (39) есть также изотропный тензор

$$[I I_a I_b]_t^{t_a t_b} [I I_c I_d]_t^{t_c t_d}.$$

который действительно будет преобразовываться согласно (38).

Рассмотрим для примера соотношение между амплитудами πN -рассеяния. Процессы $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ и $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ связаны преобразованием зарядовой симметрии $\exp(i\pi I_2)$, и следовательно, их сечения равны:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = \sigma(\pi^+ n \rightarrow \pi^0 p). \quad (40)$$

Между остальными πN -реакциями существует еще четыре соотношения типа (40). Чтобы учесть сохранение изоспина, рассмотрим реакции

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, & \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, & \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p. \end{aligned} \quad (41)$$

В πN -рассеянии имеется две независимые амплитуды $T^{(1/2)}$ и $T^{(3/2)}$, соответствующие возможным изоспинам $I = 1/2$ и $I = 3/2$ системы πN . Выразим с помощью (34), (37), (39) амплитуды процессов (41) через $T^{(1/2)}$ и $T^{(3/2)}$:

$$\begin{aligned} T(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) &= T^{(3/2)}, \\ T(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) &= \frac{1}{3} [T^{(3/2)} + 2T^{(1/2)}], \\ T(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) &= \frac{\sqrt{2}}{3} [T^{(3/2)} - T^{(1/2)}], \\ T(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p) &= \frac{1}{3} [2T^{(3/2)} + T^{(1/2)}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Следовательно, между сечениями этих процессов имеется соотношение

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) &= \\ &= \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) + 2\sigma(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p). \end{aligned} \quad (43)$$

Сечение $\sigma(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p)$ трудно измерить экспериментально. Поэтому соотношение, интересное для сравнения с опытом, можно получить, если только известна (из других соображений) связь между амплитудами $T^{(1/2)}$ и $T^{(3/2)}$. Заимствуя из эксперимента тот факт, что $T^{(3/2)}$ имеет резонанс Δ^{++} ($m = 1236$ Мэв), и полагая $T^{(1/2)} = 0$ в области резонанса, мы находим из (42), что в этой области

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = 9 : 1 : 2 \quad (44)$$

в согласии с экспериментом.

С другой стороны, при больших энергиях (и малых углах рассеяния) сечения процессов с перезарядкой малы (см. гл. 13). Полагая $\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \approx 0$, мы находим из (42), что при этих энергиях будет $\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \approx \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)$.

Распады. Быстрые распады частиц, происходящие с сохранением изоспина, анализируются аналогичным образом.

Запишем с помощью (31)—(33) конечное состояние через базисные изоспиновые состояния. Тогда, например, изоспиновая часть амплитуды распада частицы a (I_a, t_a) на частицы b (I_b, t_b) и c (I_c, t_c) будет иметь вид

$$\langle b, c | T | a \rangle = \langle I_b I_c t_b t_c | I_b I_c I_a t_a \rangle T, \quad (45)$$

где T не зависит от $t_a = t_b + t_c$, t_b и t_c . Следовательно, отношение амплитуд распадов

$$\begin{aligned} a(I_a, t_a) &\rightarrow b(I_b, t_b) + c(I_c, t_c), \\ a'(I_a, t_a') &\rightarrow b'(I_b, t_b') + c'(I_c, t_c') \end{aligned}$$

определяется коэффициентами Клебша—Гордана:

$$\frac{\langle b, c | T | a \rangle}{\langle b', c' | T | a' \rangle} = \frac{\langle I_b I_c t_b t_c | I_b I_c I_a t_a \rangle}{\langle I_b I_c t_b' t_c' | I_b I_c I_a t_a' \rangle}. \quad (46)$$

К двухчастичным распадам такого рода относятся, например, распады $\rho \rightarrow 2\pi$, $f^0 \rightarrow 2\pi$, $A \rightarrow K\bar{K}$, $\Delta \rightarrow N\pi$ и др. В случае $\rho \rightarrow 2\pi$ мы находим из (46) для вероятностей распадов $w(\rho \rightarrow 2\pi) \sim |T(\rho \rightarrow 2\pi)|^2$:

$$\begin{aligned} w(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= w(\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = w(\rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+), \\ w(\rho^0 \rightarrow 2\pi^0) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Распады и эффективный лагранжиан. Эффективный лагранжиан $\mathcal{L}_I(x)$ был введен ранее как релятивистский инвариантный локальный оператор, построенный из полей, участвующих в распаде $a \rightarrow b + c$ (см. (7.84) и (7.85)). Матричный элемент $\mathcal{L}_I(0)$ между начальным $|a\rangle$ и конечным $\langle b, c|$ состояниями равен амплитуде распада. Знание эффективного изоспинового лагранжиана \mathcal{L}_I позволяет легко найти соотношения между амплитудами быстрого распада различных частиц изомультиплета; очевидно, \mathcal{L}_I представляет собой изоскаляр.

При изоспиновых преобразованиях базисные состояния $|I_a, t_a\rangle$ преобразуются по представлению \mathcal{D}^{I_a} . Поля $a(x)$ преобразуются так же, как и операторы поглощения, т. е. по сопряженному представлению \mathcal{D}^{I_a*} . Поднимая и опуская изоспиновые индексы с помощью матриц $C_{\sigma\sigma'}$ и $C^{-1\sigma\sigma'}$, мы можем, разумеется, использовать для описания полей и состояний изоспиноры с индексами различного типа — только верхними, только нижними и смешанного типа. При этом, однако, появятся дополнительные фазовые множители, связывающие компоненты выбранного произвольно изоспинора с компонентами базисных состояний или полей. В частности, поля с изоспином 1 удобно выбирать изовекторными (т. е. с одним верхним и одним нижним изоспиновыми индексами).

Мы выпишем ниже изоспиновые части некоторых эффективных лагранжианов. Построение их сводится к составлению «трехмерных» инвариантов из изовекторов и изоспиноров. В случае $\rho \rightarrow 2\pi$ все три частицы — изовекторы. Следовательно,

$$\mathcal{L}_I(\rho \rightarrow 2\pi) = g_{\rho\pi\pi} (\rho [\pi(1) \pi(2)]). \quad (48)$$

Аналогичным образом строится лагранжиан для распада $Y^* \rightarrow \Sigma\pi$:

$$\mathcal{L}_I(Y^* \rightarrow \Sigma\pi) = g_{Y^*\Sigma\pi} (\Sigma [Y^*\pi]).$$

В случае распада $f^0 \rightarrow 2\pi$

$$\mathcal{L}_I(f^0 \rightarrow 2\pi) = g_{f^0\pi\pi} (\pi(1) \pi(2)), \quad (49)$$

так как f^0 есть изоскаляр $I = 0$ с $J^P = 2^+$. Выписав подробно ($\pi(1)\pi(2)$), убеждаемся сразу же, что вероятности процессов $f^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ и $f^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ связаны соотношением

$$\omega(f^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = 2\omega(f^0 \rightarrow 2\pi^0).$$

Далее, распады с участием каонов (изоспиноров) можно описать лагранжианами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(f^0 \rightarrow K\bar{K}) &= g_{f^0 K\bar{K}} \bar{K}K, \\ \mathcal{L}_I(A_2 \rightarrow K\bar{K}) &= g_{A_2 K\bar{K}} \bar{K}(A_2 \tau)K, \\ \mathcal{L}_I(K^* \rightarrow K\pi) &= g_{K^* K\pi} \bar{K}(\tau\pi)K^*. \end{aligned} \quad (50)$$

В лагранжиане для распада $\Delta \rightarrow N\pi$ с $I_\Delta = 3/2$ пионное поле удобнее записать со значками одного типа:

$$\mathcal{L}_I(\Delta \rightarrow N\pi) = g_{\Delta N\pi} \bar{N}^\alpha \pi^{\{\beta\gamma\}} \Delta_{\{\alpha\beta\gamma\}}. \quad (51)$$

В формулах (48)—(51) константы $g_{\rho\pi\pi}$, ... характеризуют силу взаимодействия, вызывающего распад.

Глава 9

ГРУППА SU_3

Существование мультиплетов только при определенном сочетании квантовых чисел I и Y (см. § 8.1) указывает на наличие более широкой внутренней структуры, нежели изоспиновая симметрия. Небольшое различие масс у барионных изомультуплетов N , Λ , Σ , Ξ означает, что эту внутреннюю структуру можно толковать как нарушенную симметрию, в которой N , Λ , Σ , Ξ входят в состав одного и того же мультиплета, принадлежащего новой группе симметрии. Изоспиновая группа (вместе с группой гиперзарядовых преобразований $U_Y(1)$) должна быть подгруппой этой новой группы симметрии. Такая симметрия описывается группой SU_3 , предложенной Гелл-Манном и Нееманом [113, 114]. Иногда ее называют унитарной симметрией (хотя с математической точки зрения изоспиновая симметрия также унитарна).

Выбор группы SU_3 в качестве следующего этапа в построении обобщенной симметрии сильного взаимодействия был в свое время отнюдь не очевиден. Если придерживаться минимального расширения группы симметрии $(SU_2)_I \times U_Y(1)$, то возникала задача отыскания правильной группы симметрии из числа четырех существующих полупростых групп второго ранга (т. е. с двумя диагональными генераторами, соответствующими I_3 и Y). Такой группой оказалась именно SU_3 . В этой главе излагаются основные сведения о группе SU_3 [115—117].

§ 9.1. Матрицы λ_a и структурные константы

Группа SU_3 есть группа унитарных унимодулярных 3×3 -матриц. Рассмотрим преобразования, описываемые унитарными 3×3 -матрицами B ($B^+ = B^{-1}$, $\det B = 1$), действующими на трехкомпонентный SU_3 -спинор ξ ¹⁾

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi' = B\xi. \quad (1)$$

¹⁾ Иногда вместо ξ_1, ξ_2, ξ_3 используется обозначение p, n, Λ , восходящее к модели Сакаты [118], в которой все частицы состояли из этих трех барионов. Модель Сакаты была предшественницей SU_3 -теории.

Вследствие унитарности B скалярное произведение

$$(\xi^* \xi) = \xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2 + \xi_3^* \xi_3 \quad (2)$$

остаётся неизменным: $(\xi'^* \xi') = (\xi^* \xi)$. Общая форма унитарного оператора B есть

$$B = e^{i\hat{\omega}}, \quad \text{Sp } \hat{\omega} = 0, \quad (3)$$

где $\hat{\omega}$ — эрмитова матрица. Условие $\det B = 1$ выполняется, если $\text{Sp } \hat{\omega} = 0$.

Выберем в качестве базисных 8 эрмитовых 3×3 -матриц λ_a ($a = 1, \dots, 8$), нормированных согласно

$$\text{Sp } (\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}, \quad \text{Sp } \lambda_a = 0, \quad \lambda_a = \lambda_a^+. \quad (4)$$

Эти матрицы играют ту же роль, что и матрицы Паули τ_k в случае группы SU_2 . Один из возможных наборов матриц λ_a , совместных с (4), имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Перестановочные соотношения для λ_a имеют вид

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc} \lambda_c, \quad (6)$$

так что

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Sp } ([\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c). \quad (7)$$

Структурные константы f_{abc} вещественны и антисимметричны по всем индексам. Отличные от нуля компоненты f_{abc} имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Произведение двух матриц λ_a выражается линейно через эти же матрицы и единичную матрицу $\mathbf{1}$:

$$\lambda_a \lambda_b = i f_{abc} \lambda_c + d_{abc} \lambda_c + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_0 \delta_{ab}, \quad (9)$$

где $\lambda_0 = \sqrt{2/3} \cdot \mathbf{1}$ и структурные константы d_{abc} симметричны по всем индексам:

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{Sp} (\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c). \quad (10)$$

Вычисление компонент d_{abc} по (10) дает

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2},$$

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Остальные компоненты d_{abc} равны нулю.

Структурные константы d_{abc} и f_{abc} удовлетворяют тождествам Якоби

$$f_{abc} f_{cel} + f_{ceb} f_{acl} + f_{aec} f_{bcl} = 0, \quad (11)$$

$$d_{abc} f_{cel} + f_{ceb} d_{acl} - d_{cbl} f_{ace} = 0, \quad (12)$$

которые легко выводятся с помощью (6), (7) и (10) из тождеств

$$\begin{aligned} [A, B], C + [B, C], A + [C, A], B &= 0, \\ [A, \{B, C\}] - \{[A, B], C\} - \{[A, C], B\} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11) и (12) явствует, что если величины f_{abc} и d_{abc} трактовать как матричные элементы 8×8 -матриц f_c и d_b :

$$(f_b)_{ac} = i f_{abc}, \quad (d_b)_{ac} = d_{abc}, \quad (14)$$

то матрицы f_b и d_b будут удовлетворять перестановочным соотношениям

$$[f_a, f_b] = i f_{abc} f_c, \quad (15)$$

$$[d_a, f_b] = i f_{abc} d_c. \quad (16)$$

В силу линейной независимости матриц (5) и λ_0 , произвольная 3×3 -матрица может быть разложена по матрицам λ_0 и λ_a ($a = 1, \dots, 8$). В частности, произвольная унитарная 3×3 -матрица B (формула (3)) может быть записана в виде

$$B = \exp i\hat{\omega}, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_a \omega_a \quad (17)$$

с вещественными коэффициентами ω_a , характеризующими « SU_3 -вращение».

Иногда используется иное (неэрмитово) представление для базисных матриц. Введем вместо матриц λ_a $9 \times 3 \times 3$ -матриц B_i^j с матричными элементами

$$(B_i^j)_l^k = \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{lk} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (18)$$

связанных соотношением

$$B_1^1 + B_2^2 + B_3^3 = 0. \quad (19)$$

Из (18) вытекает, что перестановочные соотношения для B_i^j имеют вид

$$[B_i^k, B_j^l] = \delta_i^l B_j^k - \delta_j^k B_i^l. \quad (20)$$

§ 9.2. Фундаментальное представление и кварки. U- и V-спины

Матрицы B осуществляют преобразование SU_3 в фундаментальном представлении

$$\xi_i' = B_j^i \xi_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (21)$$

Частицы (гипотетические), соответствующие SU_3 -спинору ξ_i , называются кварками. Генераторы группы SU_3 в случае кварков записываются в виде (см. (17))

$$F_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad [F_a, F_b] = if_{abc} F_c. \quad (22)$$

В случае группы SU_2 матрицы A и A^* унитарно эквивалентны; в случае же группы SU_3 матрицы B и B^* не эквивалентны, и потому существует два базисных спинора ξ_i и ξ_i^* :

$$\xi_i^* = B^{*i}_j \xi_j^*, \quad \xi_i^* \sim \xi_i^*. \quad (23)$$

спинор ξ_i^* с верхним индексом преобразуется как сопряженный спинор (или антикварк); в соответствии с таким обозначением

$$\xi_i^* \xi_i = \xi_i^* \xi_i' = \text{inv}. \quad (24)$$

Базисный спинор ξ_i обозначается по его размерности как $\underline{3}$, а ξ_i^* — как $\underline{3}^*$.

Физическое содержание SU_3 -мультиплетов будет рассматриваться в гл. 10. Однако для того, чтобы сделать изложение менее абстрактным, мы введем уже сейчас операторы изоспина I_k и гиперзаряда Y .

Допустим, что группа изоспиновой и гиперзарядовой симметрии $(SU_2)_I \times U_Y(1)$ (см. гл. 8) является подгруппой группы SU_3 . Мы

можем всегда выбрать базис представлений группы SU_3 так, чтобы отождествить SU_3 -генераторы F_k ($k = 1, 2, 3$) с компонентами изоспина I_k . Именно в таком базисе написаны формулы (5) для матриц λ_a . (Если $F_k \neq I_k$, то с помощью унитарного преобразования $F_a \rightarrow u F_a u^{-1}$ можно добиться его выполнения.) Гиперзаряд Y коммутирует с изоспином $F_k = I_k$ и потому, согласно (5) и (6), может отличаться от F_8 только постоянным множителем. Положим

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8, \quad I_k = F_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (25)$$

Как мы увидим ниже в § 10.1, такое выражение для Y приведет к правильным значениям для гиперзаряда барионов и мезонов.

Из (25) вытекает, что электрический заряд кварков есть

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) = B_1^1. \quad (26)$$

Выпишем квантовые числа кварков ξ_i и антикварков ξ^i :

	I_3	Y	Q		I_3	Y	Q	
ξ_1	$1/2$	$1/3$	$2/3$	ξ^1	$-1/2$	$-1/3$	$-2/3$	(27)
ξ_2	$-1/2$	$1/3$	$-1/3$	ξ^2	$1/2$	$-1/3$	$1/3$	
ξ_3	0	$-2/3$	$-1/3$	ξ^3	0	$2/3$	$1/3$	

Для кварков характерна дробность заряда и гиперзаряда. Частицы с дробным зарядом не обнаружены до сих пор экспериментально, во всяком случае для масс $m \leq 4 \text{ Гэв}$. Кварки могут и не существовать в виде свободных частиц, хотя, конечно, печально, что самый простой мультиплет SU_3 не отвечает реально существующим частицам. Но главная задача SU_3 — объяснение свойств барионов и мезонов, для чего существование кварков не обязательно. Мы будем поэтому пока воспринимать кварки как удобное математическое понятие.

Таким образом, кварковый SU_3 -триплет объединяет изодублет ξ_1, ξ_2 и изосинглет ξ_3 . Содержание кварка ξ_i по отношению к подгруппе, состоящей из прямого произведения изоспиновой группы $(SU_2)_I$ и гиперзарядового фазового преобразования $U_Y(1)$ можно записать как

$$\underline{3} = (1/2, 1/3) + (0, -2/3), \quad (28)$$

где (I, Y) обозначает изоспин и гиперзаряд представлений $(SU_2)_I \times U_Y(1)$. Для сопряженной функции ξ^i мы имеем

$$\underline{3}^* = (1/2, -1/3) + (0, 2/3). \quad (29)$$

Мультиплеты SU_3 удобно изображать графически на плоскости (I_3, Y) («весовые диаграммы»). Весовые диаграммы состояний $\underline{3}$ и $\underline{3}^*$ представлены на рис. 6, а и б.

Состояние ξ_1 (рис. 6, а) может быть получено из ξ_2 применением оператора $i_+ = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)$; состояние ξ_2 получается из ξ_3 применением $u_+ = \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)$. Действие операторов i_+ , u_+ и v_+ изображено на рис. 6 стрелками. Обращение стрелок равносильно замене этих операторов на i_- , u_- , v_- . Для нормированных состояний матричный элемент каждого такого перехода в $\underline{3}$ равен 1; например, $\langle 2 | i_+ | 1 \rangle = 1$.

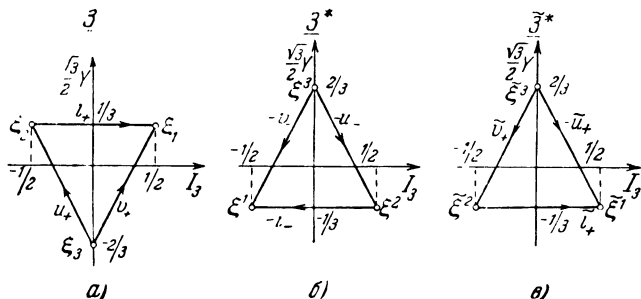


Рис. 6.

В представлении $\underline{3}^*$ (рис. 6, б) операторы i_+ , u_+ , v_+ заменяются на $i_- = -i_+$, $u_+ = -u_-$, $v_+ = -v_-$, так что состояния ξ^1 , ξ^2 и ξ^3 получаются соответственно из состояний ξ^3 , ξ^3 и ξ^2 применением $-v_-$, $-u_-$ и $-i_-$.

От представления $\underline{3}^*$ удобно перейти к унитарно эквивалентному представлению $\underline{\bar{3}}^*$. В представлении $\underline{\bar{3}}^*$ изоспиновые компоненты антикварка $\tilde{\xi}^{1,2}$ преобразуются при изоспиновых вращениях как $\xi_{1,2}$, т. е. имеют свойства изоспинора N_α (который используется для описания античастиц в изоспиновой группе).

Введем унитарный оператор

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad WW^+ = 1, \quad (30)$$

изоспиновая 2×2 -часть которого равна $C = -i\tau_2$. Тогда

$$\tilde{\xi}^i = W^i_k \xi^k = \begin{pmatrix} -\xi^2 \\ \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \\ \tilde{\xi}^3 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

При SU_3 -преобразованиях B антикварк ξ^i преобразуется по правилу

$$\tilde{\xi}' = W B^* W^{-1} \tilde{\xi} \equiv \tilde{B}^* \tilde{\xi}. \quad (32)$$

Генераторы преобразования (32) поэтому равны

$$\tilde{F}_a \equiv \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_a = -\frac{1}{2} W \lambda_a^* W^{-1}. \quad (33)$$

Матрицы изоспина не изменяются: $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k$, в то время как

$$\begin{aligned} \tilde{v}_+ &= \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_4 + i\tilde{\lambda}_5) = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7) = u_+, \\ \tilde{u}_+ &= \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_6 + i\tilde{\lambda}_7) = -\frac{1}{2} (\lambda_4 + i\lambda_5) = -v_+. \end{aligned} \quad (34)$$

Переход от ξ^k к $\tilde{\xi}^k$ означает специальный выбор базисных состояний в случае античастиц и специальную фиксацию фаз. Весовая диаграмма представления $\tilde{3}^*$ с обозначением состояний по (31) и новыми генераторами приведена на рис. 6, в. В $\tilde{3}^*$ матричные элементы \tilde{v}_+ и \tilde{i}_+ положительны, а матричный элемент \tilde{u}_+ отрицателен.

U - и V -спины. Чтобы выявить структуру группы SU_3 , полезно ввести помимо изоспина также понятия U -спина и V -спина. Изоспиновая подгруппа с генераторами F_1, F_2, F_3 представляет собой одну из SU_2 -подгрупп группы SU_3 . Другая SU_2 -подгруппа (подгруппа U -спина) порождается генераторами

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, \quad U_3 = -\frac{1}{2} I_3 + \frac{3}{4} Y, \quad (35)$$

а третья SU_2 -подгруппа (подгруппа V -спина) — генераторами

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5, \quad V_3 = \frac{1}{2} I_3 + \frac{3}{4} Y. \quad (36)$$

Роль оператора Y в случае U -спина играет электрический заряд с обратным знаком: $Y_U = -Q$, так как

$$[Q, U_{\pm}] = [Q, U_3] = 0.$$

В случае V -спина аналогичную роль играет оператор $Y_V = I_3 - \frac{1}{2} Y$. Матрицы U - и V -спинов для кварка имеют вид

$$u_+ = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$v_+ = \frac{1}{2} (\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Приведем также матрицы Y_V и Y_U :

$$Y_V = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad Y_U = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = -Q. \quad (39)$$

Из свойств U - и V -спинов вытекает, что классификацию частиц в SU_3 -мультиплете можно производить не только по изоспину I и гиперзаряду Y , но и двумя другими способами, а именно: по U -спину U и Y_U или по V -спину V и Y_V . При этом

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{2}(U_+ U_- + U_- U_+) + U_3^2, \\ V^2 &= \frac{1}{2}(V_+ V_- + V_- V_+) + V_3^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Из явного вида матриц u_k и Y_U следует, что в группе U -спина кварки ξ_2 и ξ_3 составляют U -спинор с U -гиперзарядом $Y_U = 1/3$, а кварк ξ_1 является U -синглетом с $Y_U = -2/3$. В случае V -спина V -спинор образован кварками ξ_1 и ξ_3 с $Y_V = 1/3$, а кварк ξ_2 является V -синглетом с $Y_V = -2/3$.

§ 9.3. Представления группы SU_3

Перестановочные соотношения между генераторами группы F_a ($a = 1, \dots, 8$) не зависят от представления. Поэтому мы можем воспользоваться для их вывода выражением $F_a = 1/2 \lambda_a$ в фундаментальном представлении $\underline{3}$, откуда согласно (6)

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c. \quad (41)$$

Генераторы F_a эрмитовы: $F_a = F_a^+$.

Для построения неприводимых представлений SU_3 известно несколько эквивалентных способов. Мы воспользуемся спинорным методом. Рассмотрим смешанный SU_3 -спинор высшего ранга, преобразующийся как произведение p кварковых функций с нижними индексами ξ_k и q кварковых функций с верхними индексами ξ^l :

$$\Phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} \sim \xi_{k_1} \dots \xi_{k_p} \xi^{l_1} \dots \xi^{l_q}. \quad (42)$$

Функция $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$ описывает, вообще говоря, приводимое представление SU_3 . Чтобы обеспечить отсутствие в (42) представлений меньшей размерности, необходимо, чтобы в результате сворачивания индексов в $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$ с постоянными тензорами SU_3 мы получали тождественно нуль.

В группе SU_3 имеется 3 постоянных тензора, не меняющихся при SU_3 -преобразованиях: δ_i^k , ε_{ijk} и ε^{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$). Постоянство символа Кронекера δ_i^k есть следствие унитарности преобразования B :

$$\delta_i'^k = B_i^{i'} B^{*k} \delta_i^k = \delta_i^k.$$

Антисимметричные тензоры ε_{ijk} и ε^{ijk} имеют постоянные компоненты в силу унимодулярности B :

$$\varepsilon_{i'jk} = B_i^{i'} B_j^{j'} B_k^{k'} \varepsilon_{i'j'k'} = \varepsilon_{ijk} \det B = \varepsilon_{ijk}. \quad (43)$$

Таким образом, мы приходим к следующим двум условиям неприводимости $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$:

$$\Phi_{\dots j \dots}^{\dots l \dots} = 0, \quad (44)$$

$$\Phi_{\dots i_1 i_2 \dots}^{\dots} = \Phi_{\dots i_2 i_1 \dots}^{\dots}, \quad \Phi_{\dots j_1 j_2 \dots}^{\dots} = \Phi_{\dots j_2 j_1 \dots}^{\dots}, \quad (45)$$

т. е., во-первых, сворачивание по верхнему и нижнему индексам должно обращать функцию $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ в нуль и, во-вторых, функция $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ должна быть симметрична в отдельности относительно верхних и нижних индексов. При выполнении этих условий функция $\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ преобразуется по неприводимому представлению $D(p, q)$ группы SU_3 .

Так как функция с нижним индексом ξ_k преобразуется с помощью матрицы B (формула (1)), а ξ^i преобразуется посредством комплексно сопряженной матрицы B^* , то представления $D(p, q)$ и $D(q, p)$ комплексно сопряжены:

$$D(p, q) = D^*(q, p). \quad (46)$$

Представление $D(p, p)$ с одинаковым числом верхних и нижних индексов является самосопряженным.

Кварк ξ_k преобразуется по представлению $D(1, 0)$, а антикварк ξ^i (или $\bar{\xi}^i$) — по представлению $D(0, 1)$. Произвольный SU_3 -спинор второго ранга приводим:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \frac{1}{2} \Phi_{\{i, j\}} + \frac{1}{2} \Phi_{[i, j]} = \frac{1}{2} \Phi_{\{i, j\}} + \varepsilon_{ijk} \varphi'^k, \\ \Phi_{\{i, j\}} &= \frac{1}{2} (\Phi_{ij} + \Phi_{ji}), \quad \Phi_{[i, j]} = \frac{1}{2} (\Phi_{ij} - \Phi_{ji}), \end{aligned} \quad (47)$$

и содержит части $\Phi_{\{i, j\}}$ и φ'^k , преобразующиеся по представлениям $D(2, 0)$ и $D(0, 1)$. Смешанный SU_3 -спинор второго ранга Φ_i^j со-

держит SU_3 -скаляр Φ_i^i (представление $D(0, 0)$) и октет $\varphi_i^j = \Phi_i^j - \frac{1}{3} \delta_i^j \Phi_k^k$, преобразующийся по представлению $D(1, 1)$:

$$\Phi_i^j = \frac{1}{3} \delta_i^j \Phi_k^k + \left(\Phi_i^j - \frac{1}{3} \delta_i^j \Phi_k^k \right) \equiv \frac{1}{3} \delta_i^j \Phi_k^k + \varphi_i^j. \quad (48)$$

Остановимся подробнее на октетном состоянии φ_i^j , так как оно является важнейшим для физических применений. Генераторы F_a образуют октет; октеты представляют собой наиболее распространенные SU_3 -мультиплеты частиц (см. § 10.1); векторные токи также образуют октет (см. § 15.2).

Октет описывается смешанным спинором второго ранга Φ_i^j ($i, j = 1, 2, 3$) со следом, равным нулю: $\Phi_i^i = 0$, так что Φ_i^j имеет 8 независимых компонент. При SU_3 -преобразовании B компонента октета Φ_i^j заменяется линейной комбинацией:

$$\Phi_i^j{}' = B_i^k \Phi_k^l B_l^j{}'. \quad (49)$$

Отсюда видно, что величины Φ_i^j можно рассматривать как матричные элементы октетной матрицы Φ ($\text{Sp } \Phi = 0$), для которой SU_3 -трансформация есть

$$\Phi' = B \Phi B^+. \quad (50)$$

Матрица с нулевым следом Φ может быть разложена по полной системе линейно независимых матриц λ_a :

$$\Phi = \sum_a \lambda_a \Phi_a \quad (a = 1, \dots, 8), \quad (51)$$

где коэффициенты Φ_a представляют собой компоненты SU_3 -вектора. Формулы (50), (51) являются аналогом формул $p = \sigma_\mu p^\mu$ и $p' = A p A^+$ для матрицы p SU_2 -вектора p и правила ее преобразования в группе SU_2 . SU_3 -вектор Φ_a находится в однозначном соответствии с матрицей Φ , так как согласно (4)

$$\Phi_a = \frac{1}{2} \text{Sp} (\lambda_a \Phi). \quad (52)$$

Чтобы найти 8×8 -матрицу d_{ab} (B) представления $D(1,1)$, достаточно подставить в выражение (52) для Φ_a' матрицу (50):

$$\Phi_a' = \sum_b d_{ab}(B) \Phi_b, \quad d_{ab} = \frac{1}{2} \text{Sp} (\lambda_a B \lambda_b B^+). \quad (53)$$

Из (53) явствует, что d_{ab} — самосопряженная матрица. $D(1,1)$ есть присоединенное, или регулярное, представление группы SU_3 .

Восемь генераторов F_a группы SU_3 преобразуются по правилу (53). Ввиду унитарности матрицы B след произведения любого числа

октетных матриц будет инвариантным (см. (50)). Следовательно, величины

$$z_n = \text{Sp } \hat{F}^n, \quad \hat{F} = \sum_a F_a \lambda_a \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (54)$$

являются инвариантами группы SU_3 . Так как группа второго ранга SU_3 имеет два независимых инварианта (например, z_2, z_3), то в принципе любой SU_3 -мультиплет можно отмечать по значениям z_2 и z_3 . Величины z_n с $n > 3$ будут тогда функциями z_2 и z_3 . В силу (4), (7) и (10)

$$z_2 = 2 \sum_a F_a^2, \quad z_3 = 2 \sum_{a, b, c} d_{abc} F_a F_b F_c. \quad (55)$$

Отсюда вытекает также, что, в отличие от группы SU_2 , в группе SU_3 из компонент вектора Φ_a можно построить не одно, а два инвариантных скалярных произведения (55).

Выведем перестановочные соотношения между генераторами F_a и компонентами вектора Φ_b . Пользуясь в (53) инфинитезимальной формой $B = 1 + i \frac{1}{2} \lambda_a \omega_a$ для матрицы B и определением (7) для структурных констант, мы находим, что

$$F_a = -if_{abc} \Phi_b \frac{\partial}{\partial \Phi_c}, \quad (56)$$

откуда

$$[F_a, \Phi_b] = if_{abc} \Phi_c. \quad (57)$$

Поскольку перестановочные соотношения не зависят от конкретного вида F_a , то (57) сохраняется и в том случае, когда генераторы F_a являются матрицами или операторами в гильбертовом пространстве. Соотношения (57) характеризуют свойства Φ_a как компоненты SU_3 -вектора. Аналогом (57) в случае группы SU_2 служит известное соотношение $[p_k, M_j] = i\epsilon_{kji} p_i$, характеризующее векторные свойства p .

С помощью соотношения (57) и второго тождества Якоби (12) нетрудно проверить, что величины

$$D_a = \frac{2}{3} d_{abc} F_b F_c \quad (a, b, c = 1, \dots, 8) \quad (58)$$

являются компонентами SU_3 -вектора. Хотя вектор D_a построен из генераторов F_a , в силу (55) D_a и F_a линейно независимы.

Подсчитаем число независимых компонент $n(p, q)$ для неприводимого SU_3 -спинора $\Phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ (представление $D(p, q)$), т. е. число членов в мультиплете, описываемом этой функцией. Начнем с симметричного SU_3 -спинора $\Phi_{\{j_1 \dots j_p\}}$, или представления $D(p, 0)$. $n(p, 0)$ равно числу способов разделения p индексов между тремя значениями 1, 2, 3. Если записать индексы в порядке 11..., 22...,

33..., то $n(p, 0)$ есть не что иное, как число способов поставить две запятые между p символами, т. е.

$$n(p, 0) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}. \quad (59)$$

Аналогично, в случае $\Phi\{i_1 \dots i_q\}$ число компонент равно

$$n(0, q) = \frac{(q+1)(q+2)}{2}.$$

В случае неприводимого представления $D(p, q)$ число компонент будет меньше, чем у $\Phi\{i_1 \dots i_p\}$, вследствие дополнительных условий $\Phi\{i_1 \dots i_p\} = 0$, гарантирующих отсутствие представления низшего ранга $D(p-1, 0) D(0, q-1)$. Согласно (59) число компонент в случае представления $D(p-1, 0) D(0, q-1)$ равно $n(p-1, 0)n(0, q-1)$. Отсюда мы находим мультиплетность $D(p, q)$:

$$\begin{aligned} n(p, q) &= n(p, 0)n(0, q) - n(p-1, 0)n(0, q-1) = \\ &= \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \quad (60) \end{aligned}$$

Мультиплетность $n(p, q)$ простейших представлений, согласно (60), равна

$$\begin{aligned} n(0, 0) &= 1, & n(2, 0) &= 6, \\ n(0, 1) &= n(1, 0) = 3, & n(3, 0) &= 10, \\ n(1, 1) &= 8, & n(0, 3) &= 10, \\ n(2, 1) &= n(1, 2) = 15, & n(2, 2) &= 27. \end{aligned} \quad (61)$$

Следовательно, простейшие представления можно характеризовать однозначно мультиплетностью, которая равна $n = n(p, q)$ при $p \geq q$ и $\underline{n}^* = n(p, q)$ при $p < q$. Компоненты $\bar{S}U_3$ -мультиплетов мы можем поэтому характеризовать квантовым числом \underline{n} (или \underline{n}^*) и $I, I_3' = t, Y$.

Среди SU_3 -мультиплетов нас будут особо интересовать те мультиплеты, в которых электрические заряды Q и гиперзаряды Y частиц целочисленны. Так как для кварка Q кратно $1/3$, то условие целочисленности Y и Q имеет вид

$$\frac{p-q}{3} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots = \text{целому числу}. \quad (62)$$

Из простейших мультиплетов целочисленными зарядами Q и Y будут обладать частицы в мультиплетах 1, 8, 10, 10* и 27.

Приведение произведения представлений. Правила (44) и (45) служат также основой для приведения произведения представлений. Мы ограничимся несколькими примерами, ибо общая методика достаточно проста.

Произведение двух кварков ξ_k и η_i дает представления $D(2, 0)$ и $D(0, 1)$:

$$\xi_k \eta_i = \frac{1}{2} (\xi_k \eta_i + \xi_i \eta_k) + \frac{1}{2} \varepsilon_{kil} \xi'^l, \quad (63)$$

где кварк с верхним индексом ξ'^l есть

$$\xi'^l = \frac{1}{2} \varepsilon^{lki} (\xi_k \eta_i - \xi_i \eta_k), \quad (64)$$

или же

$$\underline{3} \times \underline{3} = \underline{6} + \underline{3}^*. \quad (65)$$

Произведение представлений $\underline{3}$ и $\underline{3}^*$ распадается, согласно (48), на октет $\underline{8}$ и синглет $\underline{1}$:

$$\underline{3} \times \underline{3}^* = \underline{8} + \underline{1}. \quad (66)$$

Остановимся подробнее на важной формуле для произведения двух октетов Φ_i^j и Ψ_k^l . Наивысшее представление, которое можно составить из

$$G_{jk}^{il} = \Phi_i^j \Psi_k^l,$$

есть 27, или Φ_{ik}^{jl} (27). Оно получается в соответствии с правилами (44) и (45) путем симметризации по верхним и нижним индексам в отдельности $G_{ik}^{jl} \rightarrow G_{\{ik\}}^{\{jl\}}$ и вычитания следа:

$$\begin{aligned} \Phi_{ik}^{jl}(\underline{27}) = G_{\{ik\}}^{\{jl\}} - \frac{1}{5} \left[\delta_i^j G_{\{rk\}}^{\{rl\}} + \delta_k^l G_{\{ri\}}^{\{rl\}} + \delta_i^l G_{\{rk\}}^{\{rl\}} + \delta_k^j G_{\{ri\}}^{\{rl\}} \right] + \\ + \frac{1}{20} (\delta_k^j \delta_i^l + \delta_i^j \delta_k^l) G_{\{rm\}}^{\{rm\}}. \quad (67) \end{aligned}$$

Антисимметризовав по верхним индексам $G_{ik}^{jl} \rightarrow G_{ik}^{[jl]}$ и умножив на ε_{njl} , мы получаем тензор с тремя нижними индексами $\Psi_{nik} = \varepsilon_{njl} G_{ik}^{[jl]}$. Симметризовав Ψ_{nik} по этим индексам, мы приходим к декуплету:

$$\Phi_{nik}(\underline{10}) = \Psi_{\{nik\}}. \quad (68)$$

Аналогичным путем можно получить сопряженный декуплет $\Phi^{nik}(\underline{10}^*)$.

Далее, из G_{jk}^{il} можно построить две октетные функции:

$$\begin{aligned}\Phi_k^i(\underline{8}_S) &= G_{jk}^{ij} + G_{kj}^{ji} - \frac{2}{3} \delta_k^i G_{jl}^{lj}, \\ \Phi_i^j(\underline{8}_A) &= G_{ki}^{jk} - G_{ik}^{kj},\end{aligned}\quad (69)$$

описывающие симметричный $\underline{8}_S$ и антисимметричный $\underline{8}_A$ октеты. Просуммировав по обоим парам индексов в G_{ik}^{ll} , мы получаем SU_3 -скаляр $\underline{1}$, или

$$\Phi(\underline{1}) = G_{ik}^{ki}.$$

Таким образом, произведение двух октетов записывается следующим образом:

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{27} + \underline{10} + \underline{10}^* + \underline{8}_S + \underline{8}_A + \underline{1}.\quad (70)$$

Чтобы отличать компоненты октетов $\underline{8}_S$ и $\underline{8}_A$, нужно ввести дополнительное квантовое число ν , смысл которого зависит от конкретной задачи.

Произведение трех кварков, или же тензор с тремя нижними индексами Ψ_{ijk} , разлагается на неприводимые части аналогичным образом с результатом

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = \underline{10} + 2 \cdot \underline{8} + \underline{1}.\quad (71)$$

Приведение прямого произведения в SU_3 -группе может быть осуществлено и каноническим образом с помощью коэффициентов Клебша—Гордана для SU_3 . Обозначая посредством $|\underline{n}, \alpha\rangle$ состояние SU_3 -мультиплета \underline{n} , где $\alpha = (I, t, Y)$, мы находим из общей квантовомеханической формулы ($t = I_3'$)

$$\begin{aligned}|\underline{n}_1, \alpha_1\rangle |\underline{n}_2, \alpha_2\rangle &= \sum_{n, \alpha, \nu} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_\nu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \end{pmatrix} |\underline{n}_\nu, \alpha\rangle, \\ t &= t_1 + t_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad I = |I_1 - I_2|, \dots, I_1 + I_2.\end{aligned}\quad (72)$$

Коэффициенты Клебша—Гордана для группы SU_3 [117]

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_\nu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \end{pmatrix} = \langle I_1 I_2 t_1 t_2 | I_1 I_2 I t \rangle \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_\nu \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & I Y \end{pmatrix}\quad (73)$$

равны произведению обычного коэффициента Клебша—Гордана для изоспина на изоскалярный множитель. Коэффициенты (73) образуют вещественную ортогональную матрицу. Изоскалярные множители приведены в табл. П.5.

Изоспиновое содержание SU_3 -мультиплетов. Формулами приведения типа (66) и (70) можно воспользоваться и для того, чтобы найти изоспиновое содержание SU_3 -мультиплетов. Обозначим изоспиновой мультиплет посредством (I, Y) . Произведение двух изоспиновых мультиплетов (I_1, Y_1) и (I_2, Y_2) содержит мультиплеты с гиперзарядом $(Y_1 + Y_2)$ и с изоспинами $|I_1 - I_2|, |I_1 - I_2| + 1, \dots, I_1 + I_2$, определяемыми правилом векторного сложения угловых моментов:

$$(I_1, Y_1)(I_2, Y_2) = (|I_1 - I_2|, Y_1 + Y_2) + \\ + (|I_1 - I_2| + 1, Y_1 + Y_2) + \dots \\ \dots + (I_1 + I_2, Y_1 + Y_2). \quad (74)$$

Зная изоспиновое содержание $\underline{3}$ и $\underline{3}^*$ (формулы (28) и (29)), мы находим

$$\underline{3} \times \underline{3}^* = \underline{1} + \underline{8} = (1/2, 1) + 2(0, 0) + (1, 0) + (1/2, -1),$$

откуда

$$\underline{8} = (1/2, 1) + (1/2, -1) + (0, 0) + (1, 0), \quad (75)$$

т. е. октет содержит изотриплет с $Y = 0$, изоспинор с $Y = 1$,

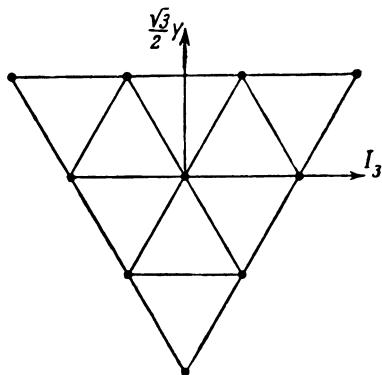


Рис. 8.

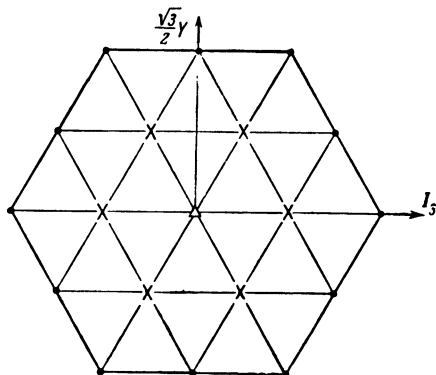


Рис. 9.

изоспинор с $Y = -1$ и изосинглет с $Y = 0$. Весовая диаграмма октета показана на рис. 7.

Вычислим (I, Y) -содержание представлений $\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3}$. Согласно (28) и (74)

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = (3/2, 1) + 2(1/2, 1) + 3(1, 0) + 3(0, 0) + \\ + 3(1/2, -1) + (0, -2).$$

Но согласно (71)

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = \underline{10} + 2 \cdot \underline{8} + \underline{1}.$$

Следовательно, учитывая (75), мы находим (I, Y) -содержание декуплета:

$$\underline{10} = (\frac{3}{2}, 1) + (1, 0) + (\frac{1}{2}, -1) + (0, 2), \quad (76)$$

т. е. декуплет $\underline{10}$ включает изоквартет с $Y = 1$, изотриплет с $Y = 0$, изоспинор с $Y = 1$ и изосинглет с $Y = -2$ (рис. 8).

Аналогичным путем с помощью (71), (75) и (76) нетрудно найти (I, Y) -содержание $\underline{27}$ -плета:

$$\begin{aligned} \underline{27} = & (1, 2) + (\frac{3}{2}, 1) + (\frac{1}{2}, 1) + (0, 0) + (1, 0) + \\ & + (2, 0) + (\frac{1}{2}, -1) + (\frac{3}{2}, -1) + (1, -2). \quad (77) \end{aligned}$$

Весовая диаграмма $\underline{27}$ -плета изображена на рис. 9.

В отличие от декуплета, в $\underline{27}$ -плете некоторые состояния встречаются дважды; на рис. 9 они отмечены крестом. Состояние с $Y = I_3 = 0$ в $\underline{27}$ -плете содержится трижды (на рис. 9 оно отмечено треугольником).

Глава 10

SU_3 -СИММЕТРИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЧАСТИЦ И РЕЗОНАНСОВ

SU_3 -симметрия сильных взаимодействий проявляется прежде всего в том, что наблюдаемые мультиплеты частиц и резонансов соответствуют базисам неприводимых представлений группы SU_3 . Однако не все возможные простейшие мультиплеты отвечают физическим частицам. Кроме синглетов 1, частицы и резонансы заполняют только октеты 8 (мезоны и барионы) и декуплеты 10, 10* (барионы), оставляя, например, пустыми триплеты, секстеты, 15-плеты и 27-плеты (см. (9.61)). Ввиду существенной роли октета 8 иногда говорят, что природа следует восьмеричному пути.

SU_3 -симметрия является весьма приближенной. Если судить о степени ее нарушения по расщеплению масс в барионных мультиплетах 8 и 10, то умеренно сильное взаимодействие (нарушающее SU_3 -симметрию и сохраняющее изоспин и гиперзаряд) приблизительно на один порядок слабее SU_3 -симметричного взаимодействия и на один порядок сильнее электромагнитного. В случае мезонных мультиплетов расщепление масс относительно больше. Поэтому успех SU_3 -классификации одночастичных состояний зависит не только от возможности отождествить частицы с компонентами унитарного мультиплета, но и от возможности объяснить расщепление масс. Кроме того, разумеется, окончательная проверка распределения частиц по унитарным мультиплетам включает также согласование с экспериментом и других следствий унитарной симметрии (соотношения между константами распадов, электромагнитные свойства).

§ 10.1. Унитарные представления и мультиплеты

Предположим, что SU_3 является группой точной внутренней симметрии хотя бы для одночастичных состояний. Тогда частицы-резонансы должны объединяться в мультиплеты, соответствующие неприводимым представлениям SU_3 , — унитарные мультиплеты. Как и в случае изоспиновой симметрии, все частицы мультиплета должны иметь одинаковые пространственно-временные свойства

(массу, спин, четность), так что общая симметрия (одночастичных состояний) может быть описана как $\overline{\mathcal{P}}^\dagger \times SU_3$, где $\overline{\mathcal{P}}^\dagger$ включает и четность. Преобразования группы Пуанкаре $\overline{\mathcal{P}}^\dagger$ при этом не затрагивают внутренних переменных, так что одночастичное состояние записывается в виде произведения пространственно-временной части $|p, \lambda; m, J\rangle$ и SU_3 -части $|\underline{n}; I, t, Y\rangle$, где \underline{n} — мультиплетность. Для краткости мы будем далее выписывать только SU_3 -часть вектора состояния.

Связь SU_3 -мультиплетов с изоспиновыми мультиплетами была установлена в предыдущей главе в предположении, что изоспин и гиперзаряд выражаются через SU_3 -генераторы равенствами (9.25):

$$I_k = F_k \quad (k=1, 2, 3), \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8. \quad (1)$$

Убедимся теперь, что равенства (1) действительно позволяют произвести классификацию частиц по SU_3 -мультиплетам. При таком отождествлении SU_3 -генераторов целочисленность электрического заряда и гиперзаряда известных частиц выделяет, как мы видели в § 9.3, несколько простейших SU_3 -мультиплетов, а именно синглет 1, октет 8, декуплеты 10 и 10* и мультиплет 27.

Следует различать два типа SU_3 -состояний, а именно «тензорные» состояния $|\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}\rangle \equiv \Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ и базисные состояния $|\underline{n}; I, t, Y\rangle$. Состояния первого типа характеризуются своими трансформационными свойствами, которые определяются числом и типом индексов (представление $D(p, q)$); они используются для построения полей (после перехода к операторам рождения и поглощения) и SU_3 -инвариантов. Базисные состояния отличаются от состояний первого типа фазовыми множителями. Если записать базисное состояние в тензорной форме: $|\underline{n}; I, t, Y\rangle = \{|\tilde{\Phi}_{kl}^{i_1 \dots i_q}\rangle\}$, то нижние индексы у $\tilde{\Phi}$ преобразуются по тому же представлению, что и у Φ , а верхние индексы $\tilde{\Phi}$ преобразуются по унитарно эквивалентному представлению $\tilde{\Phi}^{ij} = W_i^j W_j^i \Phi^{i'j'}$.

Унитарный оператор W был определен в § 9.2. Базисные состояния удобны тем, что изоспиновые мультиплеты в них имеют индексы одинакового типа (нижние). Вследствие этого при приведении произведения представлений (многочастичные состояния) можно пользоваться коэффициентами Клебша — Гордана (см. § 9.3). Для базисных состояний составлены таблицы кроссинг-матриц (см. § 11.3).

Найдем квантовые числа $t = I_3'$ и Y компоненты $|\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}\rangle$. Значения аддитивных квантовых чисел у $|\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}\rangle$ будут те же самые, что и у произведения кварковых и антикварковых состояний $|\xi^{i_1}\rangle \dots |\xi^{i_2}\rangle \dots |\xi_{k_1}\rangle |\xi_{k_2}\rangle \dots$. Поэтому значения t и Y мож-

но найти подсчетом верхних и нижних кварковых индексов. Обозначим посредством $p(k)$ число нижних индексов со значением k , а посредством $q(i)$ — число верхних (т. е. антикварковых) индексов со значением i . Тогда с помощью (9.27) находим, что компонента $|\Phi_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}\rangle$ имеет следующие Y , t и Q :

$$Y = -p(3) + q(3) + \frac{1}{3}(p - q), \quad (2)$$

$$t = \frac{1}{2}[p(1) - q(1) - p(2) + q(2)], \quad (3)$$

$$Q = p(1) - q(1) - \frac{1}{3}(p - q), \quad (4)$$

где $p = p(1) + p(2) + p(3)$ и $q = q(1) + q(2) + q(3)$.

Октет. Рассмотрим тензорное состояние октета $|\Phi_i^j\rangle \equiv \Phi_i^j$. Подразделив значения индекса j на изоспинорные ($j = \alpha = 1, 2$) и изосинглетное ($j = 3$) и пользуясь (2) — (4), нетрудно выявить изомультиплеты: Φ_3^3 есть изосинглет, Φ_α^3 — изоспинор с нижним индексом, Φ_α^α — изоспинор с верхним индексом; компоненты $\Phi_\alpha^{\alpha'}$ образуют изотриплет, если $\Phi_\alpha^\alpha = 0$. Так как $\Phi_i^j = 0$, то компонента триплета с $t = 0$ пропорциональна $\Phi_1^1 - \Phi_2^2$. Компоненты октета Φ_i^j представляют собой матричные элементы 3×3 -матрицы Φ (см. § 9.3), у которой нижний индекс нумерует строки, а верхний — столбцы.

Псевдоскалярные мезоны (спин-четность 0^-), принадлежащие к числу стабильных частиц (см. табл. 8.1 или табл. П.1), объединяются в следующие четыре мультиплета:

изотриплет $\pi_{\alpha\beta} \sim \pi_i^{i=1} (I = 1, Y = 0)$, состояния (см. (8.22))

$$|\pi_{11}\rangle = -|\pi^+\rangle, \quad |\pi_{21}\rangle = |\pi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\pi^0\rangle, \quad |\pi_{22}\rangle = |\pi^-\rangle;$$

изодублет $K_\alpha (I = 1/2, Y = 1)$, состояния $|K_1\rangle = |K^+\rangle, |K_2\rangle = |K^0\rangle$;

изодублет античастиц $\bar{K}_\alpha (I = 1/2, Y = -1)$, состояния $|\bar{K}_1\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, |\bar{K}_2\rangle = |\bar{K}^-\rangle$;

изосинглет $\eta (I = Y = 0)$, состояние $|\eta\rangle$.

Такие изомультиплеты составляют октет 8. Поэтому, пренебрегая различием в массах мезонов, мы можем образовать октет P из π, K, \bar{K}, η .

Разложим $|P_i^j\rangle \equiv P_i^j$ по изомультиплетам:

$$P_i^j = \left\{ P_\alpha^\beta - \frac{1}{2}(P_1^1 + P_2^2)\delta_\alpha^\beta, P_\alpha^3, P_3^\beta, P_3^3 \right\},$$

и отождествим их соответственно с $\pi_\alpha^\beta = (C^{-1})^{\beta\beta'} \pi_{\alpha\beta'}$, $K_\alpha, \bar{K}^\beta =$

$= (C^{-1})^{\beta\beta'} \bar{K}_{\beta}$, и $-(2/\sqrt{6}) \eta$. Мы получим тогда октетную матрицу мезонов 0^- :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } P = 0, \quad (5)$$

где символы частиц π , K , ... обозначают состояния $|\pi\rangle, |K\rangle, \dots$. Множители в (5) таковы, что все состояния входят с одинаковым весом в условие полноты октетных состояний

$$\frac{1}{2} \text{Sp } (PP^+) = 1.$$

Выбор фаз между различными изомультиплетами в октете (5) сохраняется и в случае произвольного октета. Поэтому мы можем тотчас же выписать аналогичную матрицу B для барионов ($J^P = \frac{1}{2}^+$). Октет барионов состоит из изоспиноров $N_\alpha = (p, n)$ и $\Xi_\alpha = (\Xi^-, \Xi^0)$, изотриплета Σ^\pm, Σ^0 и изосинглета Λ . Следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом соотношения (1) безусловно выполняются в случае стабильных частиц — мезонов 0^- и барионов $\frac{1}{2}^+$. Мы можем поэтому с полным правом применять их для классификации остальных частиц по SU_3 -мультиплетам.

Если в дополнение к октету частиц существует еще SU_3 -синглет с массой, близкой к октету, то все эти частицы следует рассматривать совместно (см. далее § 10.2). Такова ситуация с векторными мезонами ($J^P = 1^-$), где известно не восемь, а девять мезонов с близкими массами. Семь из них — изотриплет ρ^\pm, ρ^0 , изодублет K^{*+}, K^{*0} и их античастицы $\bar{K}^{*+} = K^{*-}$ и \bar{K}^{*0} — являются безусловно членами векторного октета V . В качестве изосинглета с $I = Y = 0$ может быть выбрана одна из двух частиц — ω - или ϕ -мезон. Другая из этих частиц тогда должна рассматриваться как SU_3 -синглет. Обозначим пока изосинглетный член октета V посредством ω_8 , а SU_3 -синглет — посредством $\omega^{(0)}$, отложив обсуждение свойств ϕ и ω до вопроса

о расщеплении масс. Тогда октет векторных мезонов $\underline{8}$ вместе с синглетом $\underline{1}$ записывается в виде

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \omega^{(0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \omega_8 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & \frac{1}{\sqrt{3}} \omega^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \omega^{(0)} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \frac{1}{\sqrt{3}} \omega^{(0)} - \frac{2}{\sqrt{6}} \omega_8 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При зарядовом сопряжении C мезонные октеты переходят в себя, ибо они содержат как частицы (например, π^+ , π^0 , K^+ , K^0 , η), так и античастицы (например, π^- , π^0 , \bar{K}^0 , K^- , η).

Имея в виду определение (8.27) зарядового сопряжения для изоспиновых мультиплетов, содержащих нейтральную частицу, мы можем подобрать фазы при зарядовом сопряжении K -состояний так, чтобы весь SU_3 -мультиплет имел одну и ту же фазу. Тогда

$$CPC^{-1} = P^\tau, \quad CVC^{-1} = -V^\tau, \quad (8)$$

т. е. зарядовое сопряжение равносильно транспонированию мезонных октетных матриц. Нейтральные члены октетов (8) имеют зарядовую четность $\eta_C(\pi) = +1$, $\eta_C(\omega) = -1$. Мы будем поэтому говорить об октетах P , V как имеющих зарядовые четности $\eta_C(P) = +1$, $\eta_C(V) = -1$.

Для антибарионов условлено выбирать $\eta_C = 1$ в соотношении $C | \text{частица} \rangle = \eta_C | \text{античастица} \rangle$.

Поэтому октетная матрица антибарионов есть

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \Sigma^- & \bar{\Xi}^- \\ \Sigma^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \bar{B}^\tau = CBC^{-1}. \quad (9)$$

Базисные состояния октета. Эти состояния обозначаются посредством $|\underline{8}; I, t, Y\rangle$; совокупность квантовых чисел I, t, Y отмечает отдельную частицу. Базисные состояния строятся из изоспиновых состояний $|I, t\rangle$ без дополнительных множителей. Выбор фазового множителя η_A в соотношении

$$|A\rangle = \eta_A |\underline{8}; I, t, Y\rangle, \quad (10)$$

связывающем базисное состояние с состоянием частицы A , опреде-

ляется по изоспиновым мультиплетам, или же формулами (8.31) и (8.32). Следовательно, в случае октета P в качестве базисных состояний мы должны написать последовательно все изомультиплеты — самосопряженный изотриплет пионов, изодублет каонов, изодублет антикаонов и синглет η :

$$|8; I, t, Y\rangle = \{ -|\pi^+\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^-\rangle, |K^+\rangle, |K^0\rangle, -|\bar{K}^0\rangle, |\bar{K}^-\rangle, |\eta^0\rangle \}. \quad (11)$$

При этом (см. § 8.1) изомультиплеты в (11) описываются изоспинорами с нижними индексами $\pi_{\alpha\beta}$ (или π_i), K_α и \bar{K}_α .

Совокупность состояний (11) образует матрицу P с матричными элементами

$$\tilde{P}_i^j = W_k^i P_i^k, \quad (12)$$

где W есть матрица (9.30), с помощью которой опускается изоспиновый индекс (но не SU_3 -индекс). Компоненты (12) преобразуются по представлению $\tilde{D}(1, 1)$, унитарно эквивалентному $D(1, 1)$ (но отличному от него).

Перейдем к античастицам. Для этого мы должны воспользоваться формулами (8.31) и (8.32) и получить изоспиновые мультиплеты античастиц (описываемые изоспинорами с нижними индексами). При этом мы приходим вновь к октету (11). Фазовые множители частицы и античастицы, введенные в (10), связаны равенством

$$\eta_A \eta_{\bar{A}} = (-1)^{Q_A}. \quad (13)$$

Если обозначить посредством $|-A\rangle$ состояние, получаемое из $|A\rangle$ обращением знака t и Y : $|-A\rangle = \eta_A |8; I_A, -t_A, -Y_A\rangle$, то базисное SU_3 -состояние античастицы есть

$$|\bar{A}\rangle = (-1)^{Q_A} |-A\rangle. \quad (14)$$

Состояния (14) образуют базис для сопряженного октетного представления.

Правила (13) или (14) сохраняют свою силу и для барионных октетов. Они существенны при композиции представлений и построении кроссинг-симметричных амплитуд. Можно убедиться, что в этом виде они имеют место для любых самосопряженных мультиплетов, в том числе и для 27.

Декуплет. В декуплете барионов 10 объединены четыре изоспиновых мультиплета частиц со спин-четностью $J^P = 3/2^+$, а именно: квартет Δ -резонансов, триплет резонансов Y_1^* , дублет Ξ^* и синглет Ω^- .

Декуплет описывается симметричным SU_3 -спинором $D_{\{ijk\}}$. Подразделим D на изоспиновые компоненты, выделив значение

$i, j, k = 3$. Тогда с помощью (2)—(4) и правила построения изоспиновых состояний находим, что $(\alpha, \beta, \delta = 1, 2)$

D_{333} описывает изосинглет ($I=0, Y=-2$) или Ω^- ,
 $D_{\{\alpha 33\}}$ описывает изодублет ($I=1/2, Y=-1$) или Ξ^* ,
 $D_{\{\alpha\beta 3\}}$ описывает изотриплет ($I=1, Y=0$) или Y_1^* ,
 $D_{\{\alpha\beta\delta\}}$ описывает кватреть ($I=3/2, Y=+1$) или Δ .

Выбрав фазы всех состояний положительными, можно отождествить

$$\begin{aligned} D_{111} &= \Delta^{++}, & D_{112} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+, & D_{122} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0, & D_{222} &= \Delta^-, \\ D_{113} &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{*+}, & D_{123} &= \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^{*0}, & D_{223} &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^{*-}, & & (15) \\ D_{133} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^{*0}, & D_{233} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^{*-}, & D_{333} &= \Omega^-. \end{aligned}$$

Коэффициенты в (15) подобраны так, чтобы в нормировочную сумму

$$D_{\{ijk\}} \bar{D}^{\{ijk\}} = \Omega^- \bar{\Omega}^- + \Xi^{*0} \bar{\Xi}^{*0} + \dots \quad (16)$$

каждое состояние входило с единичным весом. Барийонный декуплет изображен на рис. 10.

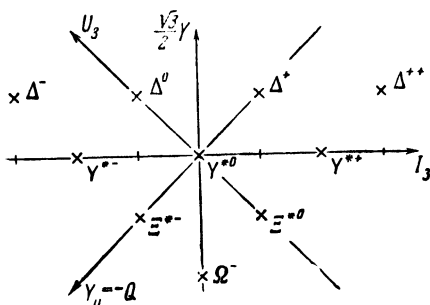


Рис. 10.

В случае декуплета $\underline{10}$ тензорные состояния $|D_{\{ijk\}}\rangle \equiv D_{\{ijk\}}$ имеют только нижние индексы и потому совпадают с соответствующими базисными состояниями $|\underline{10}; I, t, Y\rangle$. Для декуплета $\underline{10}^*$, содержащего античастицы, тензорные состояния $D^{\{ijk\}}$ отличаются от базисных $|\underline{10}^*; I, t, Y\rangle$. Базисные состояния для античастиц определяются также с помощью правила (13) или (14):

$$|\bar{A}\rangle = |\underline{10}^*; I_{\bar{A}}, t_{\bar{A}}, Y_{\bar{A}}\rangle = (-1)^{QA} |\underline{10}; I_A, -t_A, -Y_A\rangle. \quad (17)$$

Эти состояния преобразуются по представлению $\tilde{D}(0, 3)$, которое унитарно эквивалентно представлению $D(0, 3)$. Именно для базиса (17) составлены таблицы кроссинг — матриц и коэффициентов Клебша — Гордана.

Мультиплеты по U- и V-спинам. Группа SU_3 симметрична относительно своих трех подгрупп SU_2 — группы изоспина, группы U-спина и группы V-спина (см. § 9.2).

Частицы, принадлежащие SU_3 -мультиплету, можно классифицировать как по изомультиплетам, так и по мультиплетам U-спина и V-спина. Наряду с (I, Y) -содержанием SU_3 -мультиплета можно говорить о его (U, Y_U) - и (V, Y_V) -содержаниях (здесь Y_U и Y_V — аналоги гиперзаряда для U- и V-спинов). В § 9.2 было показано, что (U, Y_U) - и (V, Y_V) -содержания кварковых триплетов $\bar{3}$ и 3^* идентичны их (I, Y) -содержанию. Следовательно, (U, Y_U) - и (V, Y_V) -содержания любого SU_3 -мультиплета совпадают с его (I, Y) -содержанием.

U- и V-спиновые мультиплеты удобно определять по весовым диаграммам SU_3 -мультиплетов, если ввести оси (U_3, Y_U) и (V_3, Y_V) , т. е. оси $(-1/2 I_3 + 3/4 Y, -Q)$ и $(1/2 I_3 + 3/4 Y, I_3 - 1/2 Y)$. Распределение частиц барионного и мезонного октетов по U- и V-спинам дано в табл. 10.1 и 10.2. Проведя оси (U_3, Y_U) на весовой

Таблица 10.1

U	Y_U	Барионы	Мезоны
0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi^0 - \frac{1}{2} \eta$
$1/2$	1	Σ^-, Ξ^-	π^-, K^-
$1/2$	-1	p, Σ^+	K^+, π^+
1	0	$n, -\frac{1}{2} \Sigma^0 +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda, \Xi^0$	$K^0, -\frac{1}{2} \pi^0 +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2} \eta, \bar{K}^0$

диаграмме декуплета (рис. 10), мы можем сразу же выписать мультиплеты по U-спину, а именно:

квартет ($U = 3/2, Y_U = 1$) составляют $\Omega, \Xi^{*+}, Y^{*-}, \Delta^-$,

в триплет ($U = 1/2, Y_U = 0$) входят $\Xi^{*0}, Y^{*0}, \Delta^0$,

дублет ($U = 1/2, Y_U = -1$) состоит из Y^{*+}, Δ^+ ,

синглет ($U = 0, Y_U = -2$) есть Δ^{++} .

Таблица 10.2

V	Y_V	Барiony	Мезоны
0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi^0 - \frac{1}{2} \eta$
$1/2$	1	Σ^+, Ξ^0	π^+, \bar{K}^0
$1/2$	-1	n, Σ^-	K^0, π^-
1	0	$p, \frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda, \Xi^-$	$K^+, \frac{1}{2} \pi^0 +$ $+ \frac{\sqrt{3}}{2} \eta, K^-$

Классификации по изоспину, U - и V -спинам эквивалентны только в пределе точной SU_3 -симметрии. U - и V -спиновые преобразования перемешивают частицы с различными изоспином и гиперзарядом, т. е. подгруппы U - и V -спинов содержат те характерные дополнительные преобразования, порождаемые генераторами F_4, F_5, F_6 и F_7 , которые отличают SU_3 -группу от группы изоспина и гиперзаряда $(SU_2)_I \times U_Y(1)$. Поэтому при учете приближенного характера SU_3 -симметрии выделенной оказывается классификация по изоспину, как сохраняющаяся и на более низком уровне симметрии.

Итоги SU_3 -классификации частиц. Кроме перечисленных выше SU_3 -мультиплетов — октетов P, V, B и \bar{B} и декуплетов D, \bar{D} , — существует или намечается еще ряд барионных и мезонных мультиплетов. Сводные данные по унитарным мультиплетам приведены в табл. 10.3—10.5. В них символами $N, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Delta$ и Ω обозначены изоспиновые состояния барионов (вне зависимости от спина), а символами π, K, η — изоспиновые состояния мезонов с любым спином.

Таблица 10.3

J^PC	$I=1$	$I=1/2$	$I=0$	$I=0$
0^-+	π	K	η	X^0
1^{--}	ρ	$K^* (892)$	ω	ϕ
0^{++}	$\delta (960)$	$K_N (1100)$	$\sigma (700)$	$S^* (1060)$
1^{++}	$A_1 (1070)$	$K_A (1240)$	$D (1280)$?
2^{++}	$A_2 (1310)$	$K_N (1420)$	$f (1260)$	$f' (1515)$
1^{+-}	$B (1235)$?	?	?

Таблица 10.4

J^P	N	Δ	Σ	Ξ
$1/2^+$	940	1115	1190	1320
$1/2^+$	1470	1750?	1610?	—
$3/2^-$	1520	1690	1660	1820?
$1/2^-$	1535	1670	1670?	—
$5/2^-$	1670	1830	1770	1930?
$5/2^+$	1690	1815	1910	2030?

Таблица 10.5

J^P	Δ	Σ	Ξ	Ω
$3/2^+$	1236	1385	1530	1675
$1/2^-$	1650	1750	—	—
$3/2^-$	1670?	1670	—	—
$7/2^+$	1950	2030	—	—

Сравнение с общей таблицей (см. табл. П.1 — П.3) частиц позволяет сделать следующие заключения по поводу SU_3 -классификации.

1. Подавляющее большинство адронов хорошо укладывается в схему унитарных мультиплетов.

2. Достаточно использовать только представления $\underline{1}$ и $\underline{8}$ для мезонов и $\underline{1}$, $\underline{8}$ и $\underline{10}$ для барионов.

3. Мезоны обладают, по-видимому, только определенными сочетаниями четности и зарядовой четности J^{PC} , а именно:

$$J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{--}, 1^{++}, \dots$$

Тот факт, что из числа возможных унитарных мультиплетов в классификации используется лишь небольшая часть, можно истолковать как указание на ограниченный характер SU_3 -схемы.

Частицы с дробными зарядами до сих пор не наблюдались, несмотря на настойчивые поиски таких частиц, в особенности кварков. Если бы кварки были обнаружены экспериментально, то тем самым был бы открыт путь к построению кварковой теории элементарных частиц, основывающейся на кварках, как «наиболее» фундаментальных частицах.

Резонансы с целочисленными зарядами Q и Y и с числами B , I или Y , отличными от встречающихся в наблюдаемых октетах и де-

куплете, называются экзотическими. Частицы с целочисленными зарядами Q и Y могли бы принадлежать к высшим представлениям SU_3 , например к $\underline{27}$ -плету. Характерной чертой $\underline{27}$ -плета является наличие изомультиплета с $I = 2$ (которые пока не наблюдались) и с $I = 3/2$ (которые пока не наблюдались среди мезонов). К экзотическим относят также резонансы с «аномальными» значениями J^{PC} (т. е. отличные от указанных выше в п. 3). Экзотические резонансы до настоящего времени с достоверностью не обнаружены. Как мы увидим ниже в § 10.4, такие резонансы отсутствуют в кварковой модели.

§ 10.2. Нарушение симметрии и расщепление масс

Объединение нескольких изомультиплетов с различным гиперзарядом в один мультиплет, произведенное в предыдущем параграфе, предполагает, что наиболее сильная часть взаимодействия SU_3 инвариантна. Такое взаимодействие не отличает, например, пиона от каона или нуклона от Σ -гиперона. Если бы все сильное взаимодействие, а не только его наиболее сильная часть, было бы действительно SU_3 -симметричным, то массы частиц в SU_3 -мультиплете должны были бы быть одинаковыми. В частности, массы пионов, каонов и η -мезона должны были бы быть равны.

Экспериментально массы частиц во всех SU_3 -мультиплетах различны. Так как взаимодействие ответственно и за внутреннюю структуру частиц, то разности масс в мультиплетах свидетельствуют о существовании среднесильного взаимодействия, которое нарушает SU_3 -симметрию, но сохраняет изоспин и гиперзаряд. Это взаимодействие вызывает расщепление масс изоспиновых мультиплетов, входящих в состав SU_3 -мультиплетов. Из величины расщепления масс можно заключить, что для барионов это взаимодействие на порядок слабее SU_3 -симметричного. Однако в мезонном октете P расщепление масс велико: $m_\pi \approx 140 \text{ Мэв}$, $m_K \approx 494 \text{ Мэв}$ и $m_\eta \approx 549 \text{ Мэв}$. Чтобы объединение частиц в SU_3 -мультиплеты было убедительным, необходимо объяснить это расщепление, используя один и тот же механизм нарушения SU_3 -симметрии для барионов и мезонов.

Пусть $|\underline{n}, \alpha\rangle$ — состояния SU_3 -мультиплета размерности n , где $\alpha \equiv I, t, Y$ отличает отдельные базисные состояния (т. е. частицы) мультиплета. В случае точной SU_3 -симметрии массы всех частиц в SU_3 -мультиплете будут одинаковы и, следовательно, оператор массы SU_3 -мультиплета изобразится единичной $n \times n$ -матрицей $m_0 \cdot 1^{(n)}$. Если массы изомультиплетов, входящих в состав SU_3 -мультиплета, становятся различными (но расщепление масс внутри изомультиплета равно нулю), то матрица масс $m^{(n)}$ будет содержать слагаемое $m^{(n)}$, зависящее от изоспина и гиперзаряда:

$$m^{(n)} = m_0 \cdot 1^{(n)} + m^{(n)}(I, Y). \quad (18)$$

Матрица $m^{(n)}$ диагональна, так как масса физической частицы, будучи кинематической величиной, по определению (физической частицы) не может иметь недиагональных элементов. (Для нестабильной частицы масса не имеет определенного значения, и частица характеризуется спектром масс (см. § 2.3), но оператор массы коммутирует с I и Y .) Матрица $m'^{(n)}$ характеризует нарушение SU_3 -симметрии и определяет спектр масс внутри мультиплета n .

Предположим, что нарушающий SU_3 -симметрию член $m'^{(n)}$ имеет определенные и одинаковые трансформационные свойства относительно SU_3 во всех представлениях n . Матрица $m'^{(n)}$ может содержать части $m'^{(n)}(8)$, $m'^{(n)}(27)$, $m'^{(n)}(64)$, ..., преобразующиеся как компоненты самосопряженных представлений $\underline{8}$, $\underline{27}$, $\underline{64}$, ...

Предположим, далее, что $m'^{(n)}$ есть компонента простейшего возможного представления — октета. Так как $m'^{(n)}$ должно коммутировать с изоспином и гиперзарядом, то оно может быть только восьмой компонентой октета: $m'^{(n)} = m_8^{(n)}(8)$.

Но в группе SU_3 существует два независимых вектора (октета), которые можно построить из генераторов F_a , а именно F_a и $D_a = \frac{2}{3}d_{abc}F_bF_c$. Следовательно,

$$m^{(n)} = m_0 \cdot 1^{(n)} + c_1^{(n)} F_8^{(n)} + c_2^{(n)} D_8^{(n)}, \quad (19)$$

где коэффициенты $c_1^{(n)}$ и $c_2^{(n)}$ зависят от представления n , а $F_8^{(n)}$ и $D_8^{(n)}$ — компоненты векторов F_a и D_a в этом представлении.

$D_8^{(n)}$ вычисляется с помощью (9.10) и (9.45). Имея в виду инвариантные свойства оператора (9.55), мы находим

$$D_8^{(n)} = a^{(n)} \cdot 1^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(I^2 - \frac{1}{4} Y^2 \right). \quad (20)$$

Подстановка этого выражения в (19) дает формулу Гелл-Манна—Окубо для значения масс в мультиплете [113, 119]:

$$m = m_0 + aY + b \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right], \quad (21)$$

где вещественные константы различны для разных мультиплетов. Формула (21) дает расщепление масс для барионов.

В случае барионного октета B имеются 4 различные массы: m_N , m_{Ξ} , m_{Σ} , m_{Λ} . Исключая из (21) 3 параметра: m_0 , a и b , мы приходим к соотношению

$$\frac{1}{4} (m_{\Sigma} + 3m_{\Lambda}) = \frac{1}{2} (m_N + m_{\Xi}). \quad (22)$$

Из табл. П.1 следует, что (22) выполняется с точностью до 0,5%.

В декуплете барионов квадратичные члены в (21) дают нуль. Следовательно, уровни масс в декуплете зависят линейно от Y :

$$m^{(10)} = m_0 + a' Y. \quad (23)$$

Из табл. П.2 явствует, что действительно массы частиц в декуплете следуют с одинаковым интервалом $a' \approx 146 \text{ Мэв}$.

Мезонные мультиплеты содержат как частицы, так и античастицы, которые отличаются, в частности, по знаку гиперзаряда. Но массы частицы и античастицы равны в силу СРТ-инвариантности (см. § 6.1). Поэтому в межзонных мультиплетах масса должна быть четной функцией Y , и следовательно, в формуле типа (21) должно быть $a = 0$.

Обычно в случае мезонов формула (21) пишется для квадратов масс m^2 :

$$m^2 = m_0^2 + b \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]. \quad (24)$$

Такое написание массовых формул неявно предполагает, что они могут быть выведены по теории возмущений из лагранжиана (в который барионная масса обычно входит линейно, а мезонная масса — квадратично). Разумеется, большая величина расщепления масс исключает применение теории возмущений. С точки зрения группы Пуанкаре обе формулы естественно писать единообразно для инварианта m^2 . Формула (21) для m^2 в случае фермионов удовлетворяется практически так же хорошо, как и формула для m . Формулы (21) и (24) выражают гипотезу о характере нарушения SU_3 -симметрии.

Для псевдоскалярного октета P формула Гелл-Манна — Окубо (24) дает

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2, \quad (25)$$

что выполняется с точностью около 6%. Ошибка в этом случае выходит за пределы неточности в массе, связанной с пренебрежением электромагнитными эффектами.

В случае октета векторных мезонов V с помощью соотношения (24) можно найти массу изосинглетной компоненты ω_8 :

$$m^2(\omega_8) = \frac{1}{3} (4m_{K^*}^2 - m_\rho^2) \approx 930 \text{ Мэв}^2. \quad (26)$$

Это значение не согласуется ни с массой ω -мезона ($m_\omega \approx 784 \text{ Мэв}$), ни с массой ϕ -мезона ($m_\phi \approx 1019 \text{ Мэв}$), которые имеют одинаковые изоспин и гиперзаряд $I = Y = 0$ и спин $J = 1$. Но с точки зрения умеренно-сильного взаимодействия, сохраняющего только изоспин и гиперзаряд, квантовые числа этих частиц одинаковы, и потому при учете нарушения унитарной симметрии состояния мезонов ω и ϕ могут быть смесью унитарного синглета $\omega^{(0)}$ и восьмой компоненты октета ω_8 . Введем угол смешивания θ и положим [120]

$$\begin{aligned} \phi &= \omega_8 \cos \theta + \omega^{(0)} \sin \theta, \\ \omega &= -\omega_8 \sin \theta + \omega^{(0)} \cos \theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Вследствие нарушения унитарной симметрии между ω_8 и $\omega^{(0)}$ возможны переходы, так что матрица квадрата масс (в пространстве состояний ω_8 и $\omega^{(0)}$) будет иметь недиагональные элементы:

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_8^2 & m_{08}^2 \\ m_{08}^2 & m_0^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Масса ω_8 -компоненты m_8^2 находится по формуле Гелл-Манна—Окубо (26). Собственные состояния матрицы (28) — это физические состояния ω и φ , а ее собственные значения равны наблюдаемым массам m_ω^2 и m_φ^2 .

Диагонализируя (28) и подставляя (26) и экспериментальные значения m_ω^2 и m_φ^2 , мы определяем параметр m_0 и угол смешивания:

$$\theta(\omega, \varphi) = 39,6^\circ. \quad (29)$$

Соотношения (27) превращаются теперь в формулу, связывающую квадраты масс частиц векторного нонета:

$$m_\varphi^2 \cos^2 \theta + m_\omega^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3} [4m_{K^*}^2 - m_\rho^2]. \quad (30)$$

Смешивание унитарного синглета и восьмой компоненты октета следует учитывать во всех случаях, когда существуют обе эти частицы.

В случае нонета мезонов со спин-четностью $J^P = 2^+$ угол смешивания f и f' равен

$$\theta(f, f') = 29,9^\circ. \quad (31)$$

В случае псевдоскалярных мезонов к октету P можно добавить унитарный синглет η' с массой $m_{\eta'} = 985 Mэв$. Ввиду большой разности масс угол $(\eta\eta')$ -смешивания невелик: $\theta(\eta, \eta') = 10,4^\circ$. Если же полагать, что псевдоскалярный нонет вместо η' включает E -мезон с массой $m_E = 1422 Mэв$, то угол смешивания будет равен $\theta(\eta, E) = 6,2^\circ$.

§ 10.3. Соотношения между амплитудами переходов

SU₃-инвариантная теория описывает рассеяние, распады и рождение SU₃-мультиплетов. Как и в случае изоспиновой симметрии, переходя к отдельным компонентам мультиплетов, можно найти соотношения между амплитудами процессов для различных частиц, входящих в состав этих мультиплетов.

Пусть a , b , c и d — SU₃-мультиплеты, участвующие в реакции

$$a + b \rightarrow c + d \quad (32)$$

и принадлежащие к числу физических SU₃-мультиплетов 8, 10 и 10*. Положим для определенности, что в начальном состоянии

a и b являются октетами. Тогда начальное состояние $a + b$ содержит следующие неприводимые представления:

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{1} + \underline{8}_A + \underline{8}_S + \underline{10} + \underline{10}^* + \underline{27}. \quad (33)$$

В SU_3 -инвариантной теории возможны переходы только между состояниями одного и того же неприводимого представления. Поэтому переход в состояние $c + d$ возможен только в том случае, когда среди содержащихся в $c + d$ неприводимых SU_3 -представлений встречается хотя бы одно представление из числа входящих в (33). Приведение произведений октетов и декуплетов дается формулами (33) и

$$\begin{aligned} \underline{8} \times \underline{10} &= \underline{8} + \underline{10} + \underline{27} + \underline{35}, \\ \underline{10}^* \times \underline{10} &= \underline{1} + \underline{8} + \underline{27} + \underline{64}, \\ \underline{10} \times \underline{10} &= \underline{10}^* + \underline{27} + \underline{28} + \underline{35}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует, что конечное состояние $c + d$ может принадлежать к любому из классов (33) и (34).

Число независимых амплитуд процесса (32) определяется числом и кратностью неприводимых представлений, являющихся общими для начального и конечного состояний. Согласно (33) и (34) в случае $\underline{8} + \underline{8} \rightarrow \underline{10} + \underline{10}$ имеется лишь 2 SU_3 -амплитуды, а именно $T(\underline{10})$ и $\overline{T}(\underline{27})$; в случаях $\underline{8} + \underline{8} \rightarrow \underline{10} + \underline{10}^*$ и $\underline{8} + \underline{8} \rightarrow \underline{8} + \underline{10} - 4$ амплитуды. Рассеяние $\underline{8} + \underline{8} \rightarrow \underline{8} + \underline{8}$ будет описываться 8 SU_3 -амплитудами, соответствующими 4 переходам через представления $\underline{1}$, $\underline{10}$, $\underline{10}^*$, $\underline{27}$ и 4 октетным переходам $\underline{8}_S \rightarrow \underline{8}_S$, $\underline{8}_A \rightarrow \underline{8}_A$, $\underline{8}_S \rightarrow \underline{8}_A$, $\underline{8}_A \rightarrow \underline{8}_S$ (с амплитудами $T(\underline{8}_{SS})$, $T(\underline{8}_{AA})$, $T(\underline{8}_{SA})$, $T(\underline{8}_{AS})$). Большое число независимых амплитуд весьма усложняет соотношения между сечениями и делает их иногда практически неэффективными.

Разложение амплитуды перехода по инвариантным SU_3 -амплитудам может быть найдено по стандартной методике — с помощью коэффициентов Клебша—Гордана (9.72) для группы SU_3 . Эти коэффициенты построены и затабулированы для произведения базисных состояний $|\underline{n}, \alpha\rangle$, $\alpha \equiv I, t, Y$. Поэтому состояния частиц следует предварительно выразить через базисные состояния $|A\rangle = \eta_A |n_A, \alpha_A\rangle$, определив η_A для частиц по правилам (9.31), (9.32) (см. (11) и (15)). В случае античастиц, согласно (14) и (17), будет $|\bar{A}\rangle = (-1)^{Q_A} |n_A^*, -\alpha_A\rangle$. Выделив множитель η_A , мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \underline{n}_c, \alpha_c; \underline{n}_d, \alpha_d | T | \underline{n}_a, \alpha_a; \underline{n}_b, \alpha_b \rangle &= \\ &= \sum_{n, \gamma} \begin{pmatrix} n_c & n_d & n_\gamma \\ \alpha_c & \alpha_d & \alpha \end{pmatrix} T(n, \gamma', \gamma') \begin{pmatrix} n_a & n_b & n_{\gamma'} \\ \alpha_a & \alpha_b & \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

SU_3 -амплитуда $T(n, \gamma, \gamma')$ зависит от представления n и параметров γ, γ' , отличающих кратные представления n в начальном и конечном состояниях. Практически γ есть то квантовое число, которое отличает октеты 8_A и 8_S .

Общая формула (35) содержит коэффициенты Клебша—Гордана для SU_3 . В ряде случаев, однако, можно обойтись без их употребления, если наряду с сохранением изоспина воспользоваться сохранением U - или V -спина в SU_3 -инвариантной теории. Так как все генераторы SU_3 выражаются через генераторы I -, U - и V -спиновых групп, то инвариантность относительно совместных I - и U - или V - и I -спиновых вращений эквивалентна SU_3 -инвариантности. С другой стороны, приведение относительно любой из этих трех подгрупп связано с использованием только обычных коэффициентов Клебша—Гордана, что значительно упрощает выкладки [121]. Например, из того факта, что в U -группе величины (π^-, K^-) , (K^+, π^+) , (p, Σ^+) , (Σ^-, Ξ^-) образуют U -дублеты, вытекает сразу же равенство амплитуд для процессов

$$\pi^- + \Sigma^+ \rightarrow K^+ + \Xi^-, \quad K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-. \quad (36)$$

Результаты, полученные при изучении изоспиновой симметрии, могут быть непосредственно применены в случае U - и V -спиновых симметрий. В случае изоспиновой симметрии для амплитуд рассеяния частиц, входящих в изодублеты $N = (p, n)$ и $K = (K^+, K^0)$, легко выводится соотношение

$$T(K^+ + p \rightarrow K^+ + p) = T(K^0 + p \rightarrow K^0 + p) + T(K^0 + p \rightarrow K^+ + n). \quad (37)$$

С помощью (37) можно сразу же написать соотношение между амплитудами рассеяния частиц, описываемых U -спинорами (π^-, K^+) и $(p, -\Sigma^+)$:

$$T(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p) = T(K^- + p \rightarrow K^- + p) - T(K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+). \quad (38)$$

В отличие от изоспина, U - и V -спины не сохраняются при умеренно-сильных взаимодействиях, преобразующихся как восьмая компонента SU_3 -вектора.

Так как SU_3 -симметрия весьма приближенна, то при попытке экспериментальной проверки равенств типа (36)—(38) следует принять во внимание эффекты нарушения симметрии. При расчетах обычно учитывается только расщепление масс, поскольку оно существенно влияет на фазовые объемы. Вследствие значительного расщепления масс реакция, возможная для одних частиц мультиплетта, может оказаться энергетически запрещенной для других частиц того же мультиплетта. В связи с этим возникает вопрос о том, при каких энергиях и переданных импульсах можно ожидать приближенного выполнения соотношений SU_3 -симметрии. Сравнение

с опытом показывает, что для амплитуд рассеяния такие соотношения выполняются плохо даже при учете расщепления масс.

Эффективный лагранжиан и распады. Соотношения между быстрыми распадами могут быть найдены с помощью коэффициентов Клебша—Гордана для SU_3 по формуле типа (35). Однако проще и нагляднее иметь дело с эффективным лагранжианом \mathcal{L}_{eff} . В подходе с \mathcal{L}_{eff} трилинейные произведения полей (взаимодействия типа Юкавы), описывающие элементарную вершину, характеризуют как реальные, так и виртуальные распады, т. е. взаимодействия полей.

В случае унитарной симметрии \mathcal{L}_{eff} должно быть релятивистски и унитарно инвариантным произведением трех унитарных мультиплетов. В силу свойств сильного взаимодействия \mathcal{L}_{eff} должно быть также инвариантным относительно С-, Р- и Т-преобразований в отдельности.

Рассмотрим вершину $\bar{B}BP$, где B и P — нуклонный и псевдоскалярный октеты (полей). Октетные матрицы полей B и P (формулы (5), (6), (9)) преобразуются по правилу (9.49), и следовательно, $\text{Sp}(\bar{B}BP)$ инвариантен при SU_3 -преобразованиях. Но в SU_3 -группе существует два независимых инвариантных скалярных произведения $\text{Sp}(\bar{B}, B)P$ и $\text{Sp}(\bar{B}, B)P$, или антисимметричный и симметричный наборы структурных постоянных f_{abc} и d_{abc} . Поэтому \mathcal{L}_{eff} для $\bar{B}BP$ -взаимодействия будет содержать две константы g_F и g_D :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(\bar{B}BP) = & -i \frac{1}{4} g_F \text{Sp}(\bar{B} \gamma_5 [BP]) + \\ & + i \frac{1}{4} g_D \text{Sp}(\bar{B} \gamma_5 \{BP\}) = g_F f_{abc} \bar{B}_a \gamma_5 B_b P_c + g_D d_{abc} \bar{B}_a \gamma_5 B_b P_c. \end{aligned} \quad (39)$$

(Напомним, что $i\bar{B}\gamma_5 B$ — эрмитов оператор.)

Аналогичным образом строятся взаимодействия остальных октетов. Приведем результаты.

1. Взаимодействия векторного V и псевдоскалярного P октетов:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(VPP) = g_F(VPP) \text{Sp}(V_\mu [P, \partial^\mu P]), \quad (40)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(VVP) = g_D(VVP) \text{Sp}(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P \{\partial^\mu V^\nu, \partial^\rho V^\sigma\}). \quad (41)$$

Константа $g_D(VPP) = 0$ в силу условия инвариантности относительно зарядового сопряжения С.

2. Взаимодействие векторного V и барионного B октетов:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = g_F(\bar{B}BV) \text{Sp}(\bar{B}\gamma_\mu [B, V^\mu]) + g_D(\bar{B}BV) \text{Sp}(\bar{B}\gamma_\mu \{B, V^\mu\}). \quad (42)$$

3. Взаимодействие аксального A и барионного B октетов:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = g_F (\bar{B} B A) \text{Sp} (\bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 \{ \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 [B, A_\mu] + \\ + g_D (\bar{B} B A) \text{Sp} (\bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 \{B, A_\mu\}) \}. \quad (43)$$

4. Взаимодействие тензорного T и псевдоскалярного P октетов:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = g_D (T P P) \text{Sp} (T_{\mu\nu} \partial^\mu P \partial^\nu P) \quad (44)$$

и т. д.

Если перейти от унитарных мультиплетов B, P, V, \dots к изоспиновым N, Σ, π, K, \dots , то из написанных выше формул для \mathcal{L}_{eff} следуют соотношения между константами связи для различных изомultiплетов. Четыре изомultiплетета, входящие в B , и три изомultiплетета, образующие P , связаны в случае изоспиновой симметрии 12 константами связи. При унитарной симметрии эти 12 констант выражаются через g_F и g_D :

$$g_{K\Sigma\Sigma} = g_{\pi NN} = \frac{1}{2} (g_D + g_F), \quad g_{\pi\Sigma\Sigma} = -g_F, \\ g_{\eta\Sigma\Sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} g_D = -g_{\eta\Lambda\Lambda} = \sqrt{2} g_{\pi\Sigma\Lambda}, \quad (45) \\ g_{\pi\Sigma\Sigma} = g_{K\Sigma N} = \frac{1}{2} (g_D - g_F).$$

Следовательно, при чисто F -связи отсутствуют взаимодействия Юкавы для $(\eta, \bar{\Sigma}\Sigma)$, $(\bar{\Sigma}\Lambda\pi)$ и $(\Lambda\Lambda\eta)$, а при чисто D -связи невозможны виртуальные переходы $\Sigma \rightarrow \Sigma + \pi$.

Взаимодействия между декуплетом и октетами удобнее записывать в тензорной форме. Например, \mathcal{L}_{eff} для декуплета D_{ijk} , октета барионов B и октета P имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(BDP) = g_{BDP} \bar{D}_\mu^{ijk} \gamma_5 B_i^{i'} \partial^\mu P_{j'k'} \varepsilon_{ki'j'} + \text{э. с.} \quad (46)$$

Здесь барионы декуплета описываются полем $D_{\alpha\mu}$, имеющим один спинорный и один векторный индекс (спин $3/2^+$); в (46) учтено, что декуплет обладает положительной четностью по отношению к октету B . BDP -взаимодействие зависит только от одного параметра g_{BDP} . В случае декуплета D распад $D \rightarrow B + P$ энергетически возможен. Поэтому соотношения между константами связи, вытекающие из (46), являются одновременно соотношениями между константами распадов. Выражая (46) через отдельные компоненты мультиплетов, находим

$$g(\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+) : g(Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0) : g(Y^{*+} \rightarrow \Lambda\pi^+) : g(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+) = \\ = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{6}} : \frac{3}{\sqrt{3}}. \quad (47)$$

Распад векторных мезонов V на два псевдоскалярных P , согласно (41), также зависит от одной константы распада. Переходя от унитарных октетов к отдельным частицам по формулам (9), (12) и (28), мы получаем соотношения

$$g(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) : g(K^{*+} \pi^0) : g(\varphi \rightarrow K^+ K^-) = \\ = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \quad g(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \eta) = 0. \quad (48)$$

Соотношения между константами распада относятся к идеализированному случаю точной унитарной симметрии. В действительности, как мы видели, из расщепления масс следует, что унитарная симметрия имеет лишь приближенный характер. Поэтому для сравнения полученных соотношений с экспериментом необходимо учесть нарушение симметрии. В первом приближении достаточно учесть расщепление масс, т. е. подставить физические массы в фазовые объемы и волновые функции частиц, пользуясь SU_3 -симметричными элементами. Это дает неплохое совпадение с опытом. Следующий этап учета нарушения SU_3 -симметрии состоит во введении поправок к матричным элементам (т. е. к эффективным лагранжианам). При этом в теории появляются дополнительные параметры, связанные с нарушающими членами. Ввиду большого числа новых параметров подобные расчеты оказываются неэффективными.

Подробное изложение применений SU_3 -симметрии можно найти в обзорах [122—124].

§ 10.4. Кварковая модель

Число обнаруженных резонансов быстро растет: оно равно сейчас примерно 150. В схеме унитарных мультиплетов стабильные частицы (октет псевдоскалярных мезонов P и барионный октет B , включающий нуклон) не образуют отдельного класса, поскольку резонансы также классифицируются по октетным представлениям SU_3 . Схема резонансных уровней по своей сложности напоминает схему уровней ядра или другой составной системы — с октетами P и B и декуплетом D в качестве невозбужденных состояний. Возникает вопрос: не существуют ли «более» элементарные частицы, связанными состояниями которых являются как стабильные частицы, так и резонансы?

В кварковой модели [125, 126] предполагается, что такие частицы — это кварки q со спином $1/2$. В этой модели кварки считаются физическими частицами, а тот факт, что они до сих пор не обнаружены, объясняется большой массой кварков.

Пара кварк — антикварк $q\bar{q}$ и любое число их $(q\bar{q})^n$ обладают целочисленными спинами и зарядами Q, Y . Чтобы построить фермионы с целочисленными зарядами Q и Y , необходимо по меньшей

мере три кварка qqq . Произведение трех кварков $3 \times 3 \times 3 = \underline{1} + \underline{8} + \underline{8} + \underline{10}$ содержит как октет, так и декуплет; поэтому уже трехкварковой комбинации достаточно для того, чтобы описать все известные барионы.

В обычной кварковой модели мезоны появляются как связанные состояния только одной пары кварк — антикварк $q\bar{q}$, а барионы считаются связанными состояниями трехкварковой системы qqq . Состояния типа $(q\bar{q})^n$, $n > 1$, в случае мезонов и типа $qqq(q\bar{q})^n$, $n > 1$, в случае барионов предполагаются несуществующими. Иначе говоря, в кварковой модели мезоны могут входить только в состав синглетов и октетов, а барионы могут находиться лишь в синглетах, октетах и декуплетах; кварковая модель выделяет эти мультиплеты. Следовательно, в кварковой модели не существует состояний с $Q = \pm 2$, а также барионов с $Y \geq 2$ и мезонов с $Y > 1$. Подобные состояния принадлежат к числу экзотических, о которых говорилось в § 10.1.

Возможно, что эти экзотические резонансы существуют, но имеют очень большие массы и потому пока не обнаруживаются на опыте. Но даже если такие резонансы с большой массой и существуют, октеты и декуплеты остаются по-прежнему выделенными мультиплетами группы SU_3 .

Предположим, что кварки в адронах ведут себя нерелятивистским образом. Нерелятивистская кварковая модель адронов дает классификацию адронных состояний. В этой модели спин мезона или бариона J записывается в виде суммы полного спина кварков S и орбитального момента количества движения L ($J = L + S$) и пренебрегается LS -связью и зависимостью массы от S^2 . В таком приближении L и S могут служить в качестве дополнительных квантовых чисел для классификации состояний.

Возможные мезонные состояния кварковой модели — это октеты J^{PC} , которые может образовать пара кварк — антикварк с заданными орбитальным L и полным спиновым S моментами. Очевидно, что мезонные октеты составляют две последовательности — с $S = 0$ и $S = 1$. В первой из них $J = L$, а во второй $J = L - 1, L, L + 1$. Пространственная η_p и зарядовая η_c четности октета J^{PC} определяются полным спином и орбитальными моментами системы кварк — антикварк; при этом, как обычно, η_c равно зарядовой четности нейтрального члена октета.

Нерелятивистская волновая функция Ψ системы кварк — антикварк с заданными L и S состоит из трех сомножителей, относящихся к координатной ϕ , спиновой χ и зарядовой ξ частям функции:

$$\Psi = \phi^L(x_{12}) \chi^S(\sigma_1, \sigma_2) \xi^{L, t, Y}(\alpha, \beta).$$

При перестановке координат частиц ($x_1 \leftrightarrow x_2$) функция ϕ^L меняет знак при нечетных L : $\phi^L(-x_{12}) = (-1)^L \phi^L(x_{12})$. Поэтому применение

пространственного отражения P к Ψ дает

$$P\Psi(1, 2) = \eta_P(q) \eta_P(\bar{q}) (-1)^L \Psi(1, 2) = (-1)^{L+1} \Psi(1, 2),$$

поскольку произведение четностей фермиона и антифермиона $\eta_P(q)$ всегда отрицательно (см. § 6.2).

Спиновая функция $\chi^S(\sigma_1, \sigma_2)$ системы двух частиц со спинами $1/2$ антисимметрична при $S = 0$ и симметрична при $S = 1$, или $\chi^S(\sigma_2, \sigma_1) = (-1)^{S+1} \chi^S(\sigma_1, \sigma_2)$. Так как общая волновая функция двух фермионов $\Psi(1, 2)$ всегда меняет знак при перестановке всех переменных: $\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1)$, то перестановка только зарядовых переменных дает

$$\zeta(\beta, \alpha) = (-1)^{L+S} \zeta(\alpha, \beta).$$

Но для системы кварк — антикварк зарядовое сопряжение C есть

$$C\zeta^{J, t, Y}(\alpha, \beta) = \eta_C \zeta^{J, -t, -Y}(-\alpha, -\beta),$$

что равносильно перестановке зарядовых переменных при $\alpha = -\beta$, $t = Y = 0$, т. е. для нейтральных членов октета. Отсюда $\eta_C = (-1)^{L+S}$.

Следовательно, в нерелятивистской кварковой модели квантовые числа S, L, J, P, C мезонных октетов связаны соотношениями $\eta_P = (-1)^{L+1}$, $\eta_C = (-1)^{L+S}$, $J = |L - S|$, $|L - S| + 1, \dots, L + S$. Эти соотношения выполняются для следующих октетов:

$$\begin{aligned} S = 0: & L = J & J^{PC} = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+, \dots; \\ S = 1: & L = 0, & J^{PC} = 1^-; \\ & L = 1, & J^{PC} = 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}; \\ & L = 2, & J^{PC} = 1^{--}, 2^{--}, 3^{--}; \\ & L = 3, & J^{PC} = 2^{++}, 3^{++}, 4^{++}. \end{aligned}$$

Среди перечисленных мезонных октетов нет $J^{PC} = 0^{+-}, 1^{-+}$ и т. д., которые, таким образом, невозможны с точки зрения кварковой модели мезонов как $\bar{q}q$ -состояний. Эти резонансы действительно не наблюдались, и их также относят к числу экзотических.

Основное состояние мезонных октетных уровней соответствует $S = 0, L = 0$, т. е. октету стабильных мезонов 0^{-+} . Так как энергия в нерелятивистской теории не зависит от спина, то кварковая модель предсказывает не только новые мезонные октеты, но и вырождение их масс для фиксированного L .

Волновые функции трехкварковых барионных состояний строятся также по правилам нерелятивистской теории. Полная волновая функция есть произведение координатной функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, спиновой функции $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и SU_3 -функции $\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. В случае октета B со спином $1/2$ и декуплета Δ со спином $3/2$, которые соответствуют основным состояниям октетной и декуплетной серий, произведение $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ симметрично относительно перестановки

новок переменных $\sigma_1\alpha_1, \sigma_2\alpha_2, \sigma_3\alpha_3$. Следовательно, если кварки удовлетворяют статистике Ферми—Дирака, то координатная функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ должна быть антисимметрична. Это обстоятельство представляет существенную трудность кварковой модели, так как в нерелятивистской теории основное состояние не описывается антисимметричными функциями φ .

Набор барионных октетов в кварковой модели проще всего выписать в обычных спектроскопических обозначениях S_{2J}, P_{2J}, \dots , где S, P, D, F, \dots соответствуют орбитальным моментам $L = 0, 1, 2, 3, \dots$, а J — спин бариона. Тогда возможны следующие октеты: $S_1, P_1, P_3, D_3, D_5, F_5, F_7, \dots$. Четности октетов с соседними значениями L различны; например, D_5 описывает $J^P = 5/2^-$, а F_5 — $J^P = 5/2^+$.

Кроме орбитальных и спиновых квантовых чисел L, S, J , адронные уровни должны классифицироваться еще по радиальным квантовым числам; имеется много орбитальных волновых функций с одинаковым L и квантовыми числами. Поэтому, например для барионов может существовать много октетных и декуплетных серий типа S_1, P_1, P_3, \dots . На опыте наблюдается не более одной такой серии каждого типа. Возможно, другие серии имеют очень большую массу; они могут быть также весьма нестабильными.

§ 10.5. SU₆-мультиплеты

Внутренние степени свободы частиц включают не только изоспин или унитарный спин, но и обычный (механический) спин. На первый взгляд представляется весьма заманчивым обобщить и расширить группу внутренней симметрии SU₃ так, чтобы она содержала также и обычный спин. Тогда можно было бы надеяться, что в новом сверхмультиплете будут объединены частицы с различными спинами и появится возможность найти расщепление масс не только по изоспину, но и по спину.

Такая программа вызывает почти непреодолимые трудности в релятивистской теории. Согласно весьма общим теоремам [127, 128] расширенная группа симметрии может быть лишь прямым произведением группы внутренней симметрии и группы Пуанкаре. Поэтому мультиплеты, в которых имеются частицы с разными спинами, можно получить только при утрате релятивистского характера теории.

Предположим, что движение кварков в адроне в системе ц. и. носит нерелятивистский характер. Далее предположим, что характер симметрии наиболее сильной части взаимодействия, которая определяет свойства одночастичных состояний и формирование мультиплетов, сохраняется и в сугубо нерелятивистском статическом пределе. Нас интересует расширенная группа внутренней симметрии, объединяющая в себе как группу SU₃, так и статическую группу пространственно-временной симметрии — спиновую группу

SU_2 . Минимальная полупростая группа, содержащая прямое произведение $SU_3 \times SU_2$, есть SU_6 . При сделанных выше предположениях группа SU_6 может описывать симметрию взаимодействия. Если взаимодействие действительно обладает SU_6 -симметрией, то наблюдаемые мультиплеты частиц будут соответствовать неприводимым представлениям группы SU_6 . Группа симметрии SU_6 была предложена Гюрши и Радикати [129] и Сакитой [130]. В ядерной физике аналогичное по духу расширение спин-изоспиновой группы $(SU_3)_I \times (SU_2)_I$ до SU_6 было выполнено ранее Вигнером [131].

Рассмотрим кварк со спином $1/2$. Его шесть компонент q_A ($A = 1, \dots, 6$) можно отмечать двумя индексами: $A = (\alpha, j)$, один из которых, $\alpha = 1, 2$, относится к спиновому состоянию, а другой, $j = 1, 2, 3$ — к SU_3 -компоненте.

Унитарные преобразования кварковой функции q_A описываются 6×6 -матрицами U :

$$q_A = U_A^B q_B, \quad UU^+ = 1. \quad (49)$$

Преобразования U связывают как спиновые, так и унитарные компоненты кварка.

Матрицы U образуют фундаментальное представление $\bar{6}$ группы SU_6 . Инфинитезимальную форму U можно записать в виде

$$U = 1 + i \frac{1}{2} N_N \omega_N, \quad N_N^+ = N_N, \quad \text{Sp} \Lambda_N = 0, \quad (50)$$

где эрмитовы матрицы Λ_N вместе с $\Lambda_0 = \sqrt{3/2} \cdot 1$ являются базисными 6×6 -матрицами. Вследствие ограничения $\text{Sp} \Lambda_N = 0$ для $N \neq 0$ число независимых матриц Λ_N равно 35; $N = 1, \dots, 35$. Матрицы Λ_N играют в группе SU_6 ту же роль, что и матрицы λ_a в группе SU_3 и матрицы Паули τ_k в группе SU_2 .

Матрицы Λ_N могут быть выражены через прямое произведение матриц σ_k , $\sigma_0 = 1$, действующих на спиновые переменные кварка α , и матриц λ_a , $\lambda_0 = \sqrt{3/2} \cdot 1$ ($a = 1, \dots, 8$), действующих на SU_3 -индекс кварка j . Заменяем N двойным индексом: $N = (k, a)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{0a} &= \sigma_0 \times \lambda_a, \\ \Lambda_{k0} &= \sigma_k \times \lambda_0, \\ \Lambda_{ka} &= \sigma_k \times \lambda_a. \end{aligned} \quad (51)$$

Например,

$$\Lambda_{k3} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где $\mathbf{0}$ обозначает нулевую 2×2 -матрицу. Матрицы Λ_N ортонормированы согласно

$$\text{Sp}(\Lambda_N \Lambda_{N'}) = 4\delta_{NN'}. \quad (53)$$

Перестановочные соотношения для Λ_N можно вычислить с помощью выражений (51):

$$[\Lambda_N, \Lambda_M] = 2iF_{NML}\Lambda_L \quad (N, M, L = 1, \dots, 35); \quad (54)$$

при этом структурные константы F_{NML} будут определяться посредством f_{abc} и ε_{ijk} .

Из явного вида (51) матриц Λ_N следует, что среди них имеется 5 диагональных матриц: Λ_{03} , Λ_{30} , Λ_{08} , Λ_{38} , Λ_{33} . Матрицы Λ_{03} и Λ_{08} связаны с электрическим зарядом Q и гиперзарядом кварка Y :

$$Q = \frac{1}{2}\Lambda_{03} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{08}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{08}, \quad (55)$$

а матрица Λ_{30} — с третьей проекцией кваркового спина $J_3 = \frac{1}{2}\Lambda_{30}$. В дальнейшем будет показано, что Λ_{33} характеризует магнитный момент кварка. Собственные значения этих диагональных матриц отмечают однозначно компоненты q_A кварка.

Из (51) и (55) вытекает также, что матрицы $\frac{1}{2}\Lambda_{0a}$ генерируют SU_3 -преобразования кварка, а матрицы $\frac{1}{2}\Lambda_{k0}$ — спиновые вращения кварков. Иногда удобно наряду со спином $\frac{1}{2}\Lambda_k$ рассматривать спин J_k^S странных кварков:

$$J_k^S = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda_{k0} - \Lambda_{k8} \right). \quad (56)$$

Как и в случае группы SU_3 , в группе SU_6 матрицы U и U^* не являются унитарно эквивалентными, так что кварки с верхним SU_6 -индексом q^A преобразуются по независимому сопряженному представлению $\underline{6^*}$:

$$q'^A = (U^*)^A_B q^B = q^B (U^+)^B_A. \quad (57)$$

С помощью q^A можно описывать антикварки.

Неприводимые представления группы SU_6 могут быть построены с помощью тензорного метода, который использовался ранее в случае SU_2 и SU_3 . Однако в группе SU_6 изотропными тензорами служат δ_A^B и два антисимметричных тензора шестого ранга ε^{ABCDEF} и ε_{ABCDEF} . Как и в случае унитарной симметрии, представления группы SU_6 с целочисленным зарядом Q и гиперзарядом Y описываются функциями, преобразующимися как произведение $3n$ кварков (n — целое число) и любого числа пар кварк — антикварк.

Простейшие представления будут соответствовать трем кваркам qqq и паре $q\bar{q}$. Произведение кварка q_A и антикварка \bar{q}^A :

$$q_A \bar{q}^B = \frac{1}{6} \delta_A^B q_C \bar{q}^C + \left(q_A \bar{q}^B - \frac{1}{6} \delta_A^B q_C \bar{q}^C \right) \quad (58)$$

распадается на SU_6 -синглет $q_C \bar{q}^C$ и $\underline{35}$ -плет:

$$\underline{6} \times \underline{6}^* = \underline{1} + \underline{35}. \quad (59)$$

Таким образом, функция $\underline{35}$ -плета есть смешанный SU_6 -тензор второго ранга Φ_A^B с равным нулю следом: $\Phi_A^A = 0$. Φ_A^B преобразуется по регулярному представлению SU_6 . Согласно (9.49)

$$\Phi' = U\Phi U^{-1}. \quad (60)$$

Пусть $(2J + 1, n)$ обозначает SU_3 -мультиплет n , содержащий частицы со спином J . Кварк $\underline{6}$ и антикварк $\underline{6}^*$ имеют спин-унитарное содержание:

$$\underline{6} = (\underline{2}, \underline{3}), \quad \underline{6}^* = (\underline{2}, \underline{3}^*). \quad (61)$$

Произведение $\underline{6} \times \underline{6}^*$ содержит тогда следующие частицы:

$$\begin{aligned} \underline{6} \times \underline{6}^* &= (\underline{2}, \underline{3}) \times (\underline{2}, \underline{3}^*) = (\underline{1} + \underline{3}, \underline{1} + \underline{8}) = \\ &= (\underline{1}, \underline{1}) + [(\underline{1}, \underline{8}) + (\underline{3}, \underline{1}) + (\underline{3}, \underline{8})] = \underline{1} + \underline{35}, \end{aligned} \quad (62)$$

откуда следует, что $\underline{35}$ -плет включает октет мезонов со спином 0, синглет и октет мезонов со спином 1. Все частицы $\underline{35}$ -плета должны иметь отрицательную пространственную четность, ибо относительная четность кварка и антикварка отрицательна (как частиц со спином $1/2$). Явное выражение $\underline{35}$ -плета Φ_A^B через унитарные октеты P_i^j и $V_{\alpha i}^{\beta j}$ и синглет V_{α}^{β} получается переходом к спин-унитарному индексу $A = (\alpha, i)$:

$$\Phi_{\alpha i}^{\beta j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta_{\alpha}^{\beta} P_i^j + \sigma_{\alpha}^{\beta} \left(V_i^j + \frac{1}{\sqrt{3}} V^0 \delta_i^j \right) \right]. \quad (63)$$

Итак, мультиплет $\underline{35}$ объединяет мезоны $\pi, K, \eta, \rho, K^*, \omega$ и ϕ , причем векторные мезоны естественно входят нонетом, а не октетом. Из произведения трех кварков $q_A q_B q_C$ можно составить следующие неприводимые представления: а) симметричный SU_6 -спинор $\Phi_{\{ABC\}}$ с 56 компонентами; б) антисимметричный SU_6 -спинор $\Phi_{[ABC]}$ с 20 компонентами; в) спинор $\Phi_{\{A[BC]\}}$ смешанной симметрии с 70 компонентами.

В приведении произведения трех кварков 70-плет встречается дважды:

$$\underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} = \underline{20} + \underline{56} + 2 \cdot \underline{70}.$$

Трехкварковые комбинации qqq могут иметь спин $3/2$ и $1/2$. Поэтому, если наделить кварки барионным числом $B_q = 1/3$, то такие комбинации могут описывать барионы. Чтобы объединить барионные SU_3 -мультиплеты в одном SU_6 -мультиплете, необходимо выбрать SU_6 -представление, которое содержит как октет, так и декуплет. Но декуплет барионов со спином $3/2$ содержится только в одной трехкварковой комбинации, соответствующей представлению 56:

$$\underline{56} = (\underline{2}, \underline{8}) + (\underline{4}, \underline{10}). \quad (64)$$

Кроме декуплета в 56 входит также барионный октет. Следовательно, представление 56 можно выбрать для барионов. Запишем 56-плет через состояния декуплета и октета:

$$\Phi_{\{ABC\}} \equiv \Phi_{\{\alpha i, \beta j, \gamma k\}} = \Psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} D_{\{ijk\}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \{\varepsilon_{ijl} B_k^l C_{\alpha\beta} u_\gamma + \varepsilon_{jkl} B_i^l C_{\beta\gamma} u_\alpha + \varepsilon_{kll} B_j^l C_{\gamma\alpha} u_\beta\}. \quad (65)$$

Здесь $\Psi_{\{\alpha\beta\gamma\}}$ и u_α — спиновые функции частиц со спинами $3/2$ и $1/2$, $D_{\{ijk\}}$ — декуплет ($\Delta, Y^*, \Xi^*, \Omega^-$) и B_i^l — октет (N, Σ, Ξ, Λ).

Таким образом, адроны с различными спинами и SU_3 -свойствами могут быть объединены в мезонные и барионные SU_6 -мультиплеты. В SU_6 -мультиплете все частицы имеют одинаковую четность. Октет мезонов $J^P = 0^-$ (8 компонент) и нонет векторных мезонов $J^P = 1^-$ (27 компонент) образуют 35-плет. Октет барионов $J^P = 1/2^+$ (16 компонент) и декуплет $J^P = 3/2^+$ (40 компонент) составляют 56-плет; сопряженный мультиплет 56* состоит из антибарионов. Скалярные мезоны 0^+ вместе с нонетом псевдовекторных частиц 1^+ заполняют еще один 35-плет. Мезоны со спином 2 входят, возможно, в SU_6 -мультиплет 189, описываемый тензором $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ с антисимметричными верхними и нижними индексами. SU_6 -мультиплеты многокомпонентны, что осложняет распределение частиц по мультиплетам и вносит неопределенность в SU_6 -классификацию, так как многие мультиплеты остаются незавершенными. Однако возможность классификации мезонов и барионов по мультиплетам 35 и 56 есть успех SU_6 -симметрии.

Магнитные моменты. SU_6 -теория успешно объясняет величину отношения магнитных моментов нейтрона и протона [132, 133]

Магнитный момент μ_k ($k = 1, 2, 3$) нерелятивистского кварка пропорционален произведению электрического заряда Q на спиновый момент $^{1/2}\sigma_k$:

$$\mu_k = \mu \frac{1}{2} \sigma_k \times Q = \mu \frac{1}{2} \sigma_k \times \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right), \quad (66)$$

где μ — константа. Но матрицы $^{1/2}\sigma_k \lambda_3$ и $^{1/2}\sigma_k \lambda_8$ являются также SU₆-генераторами (см. (51)), и поэтому (66) может быть переписано в виде

$$\mu_k = \frac{1}{2} \mu \left(\Lambda_{k3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Lambda_{k8} \right), \quad (67)$$

т. е. магнитный момент кварка выражается непосредственно через SU₆-генераторы.

Теоретико-групповое определение кваркового магнитного момента (67) можно распространить на случай любого представления группы SU₆. Мы определим оператор магнитного момента $\mu_k^{(n)}$ в SU₆-мультиплете \underline{n} формулой

$$\mu_k^{(n)} = \mu \left(F_{k3}^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}} F_{k8}^{(n)} \right), \quad (68)$$

где $F_A^{(n)}$ — генераторы в представлении \underline{n} .

Коэффициент μ в кварковой модели будет зависеть от эффективной массы кварка в адроне; в феноменологической трактовке он выражается через магнитный момент одной из частиц a мультиплета:

$$\mu_3(a) = \langle a, \underline{n} | \mu_3^{(n)} | a, \underline{n} \rangle. \quad (69)$$

Следовательно, в SU₆-мультиплете магнитные моменты всех частиц, определенные по (68), характеризуются одним параметром. Заметим, что только для кварков магнитный момент (67) или (68) равен (66), т. е. содержит произведение заряда на спин.

Протон и нейтрон с проекциями спина $\sigma = ^{1/2}$ принадлежат 56-плету (65), а их состояния описываются следующими компонентами $\Phi_{\{\alpha i, \beta j, \gamma k\}}$:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Phi_{11, 1, 22} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \Phi_{11, 12, 21} \right\rangle, \\ |n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Phi_{12, 12, 21} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \Phi_{11, 12, 22} \right\rangle, \end{aligned} \quad (70)$$

где мы опустили знак симметризации индексов. Генератор F_A в случае 56-плета можно записать в виде прямого произведения трех 6×6 -матриц:

$$F_A^{(56)} = \frac{1}{2} (\Lambda_A \times 1' \times 1'' + 1 \times \Lambda_A' \times 1'' + 1 \times 1' \times \Lambda_A''). \quad (71)$$

Матрица $\mu_3^{(56)}$ диагональна в базисе тензорных состояний $|\Phi\rangle$. Как и в случае группы SU_3 , собственные значения диагональной матрицы можно найти подсчетом кварковых индексов. Собственные значения кварковой матрицы μ_3/μ для состояний 11, 12, 21, 22, согласно (51), равны $1/3, -1/6, -1/3, 1/6$. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{11, 11, 22} | \mu_3^{(56)} | \Phi_{11, 11, 22} \rangle &= \frac{5}{6} \mu, \\ \langle \Phi_{12, 12, 21} | \mu_3^{(56)} | \Phi_{12, 12, 21} \rangle &= -\frac{1}{6} \mu,\end{aligned}$$

и мы находим с помощью (70), что отношение магнитных моментов нейтрона и протона в SU_6 -теории есть

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\langle n | \mu_3^{(56)} | n \rangle}{\langle p | \mu_3^{(56)} | p \rangle} = -\frac{2}{3}, \quad (72)$$

что удивительно хорошо согласуется с экспериментальным значением $-0,68$.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Как было показано в ч. II, соображения релятивистской кинематики и инвариантности относительно отражений позволяют свети амплитуду рассеяния к нескольким инвариантным амплитудам. Эти инвариантные амплитуды характеризуют динамику процесса. В квантовой теории поля такие амплитуды можно было бы в принципе вычислить, если бы мы знали явный вид взаимодействия между полями, могли бы ограничиться конечным числом полей и умели бы вычислять без использования теории возмущений. Однако уравнения движения с учетом взаимодействия и методы решения для частиц нам неизвестны. Более того, сам подход к теории взаимодействия как к теории взаимодействия между заданными частицами является, по-видимому, неправильным. Проблема взаимодействия частиц оказывается тесно связанной с вопросом о том, какие частицы могут существовать. Вследствие большой величины взаимодействия проблема спектра частиц и проблема их взаимодействия представляют собой различные аспекты одной и той же проблемы.

Существуют два различных подхода к проблеме динамики. В одном из них — теоретико-групповом — целью является отыскание динамической группы, которая давала бы как схему уровней системы, так и вырождение каждого уровня. В ч. III мы рассмотрели группы внутренней симметрии, которые в пределе точной симметрии описывают вырождение уровней. Однако, за исключением нерелятивистской кварковой модели, до сих пор не удалось построить модели теоретико-группового происхождения для объяснения спектра частиц.

Другим подходом к проблеме динамики служит дисперсионный подход. Этот подход опирается на общие принципы квантовой теории поля и разумные предположения. В этой части мы рассмотрим основы дисперсионного подхода и те феноменологические модели, которые могут быть построены на основе дисперсионного метода и экспериментальных фактов. В последней главе мы рассмотрим также алгебру токов, представляющую собой своего рода локальное обобщение теоретико-группового подхода ч. III. Применения алгебры токов используют в существенной степени представления дисперсионного подхода.

S-МАТРИЦА, ТОКИ И КРОССИНГ-СИММЕТРИЯ

В этой главе мы изучаем интерполирующие поля, токи и свойства перекрестной (кроссинг-)симметрии амплитуды.

Введение интерполирующих полей позволяет сформулировать принцип причинности (т. е. микропричинности) в виде условия локальности этих полей. В лагранжевом формализме квантовой теории поля интерполирующие поля $\Phi(x)$ удовлетворяли бы уравнениям движения с взаимодействием. Мы рассматриваем их локальные величины, обладающие теми же лоренцевыми преобразовательными свойствами и свойствами внутренней симметрии, что и асимптотические поля. Матричные элементы интерполирующих полей непосредственно связаны с наблюдаемыми величинами. Их связь с элементами S -матрицы устанавливается редукционной формулой.

Локальными величинами, имеющими непосредственный динамический смысл, являются токи. В лагранжевом формализме токи строятся явным образом из полей. Мы рассматриваем токи (подобно полям) как локальные величины, характеризующиеся их трансформационными свойствами (совпадающими со свойствами соответствующих интерполирующих полей).

Интерполирующие поля и токи служат удобной основой для наглядного вывода общего свойства амплитуды — свойства кроссинг-симметрии. Вследствие этого свойства одна и та же функция импульсов может описывать амплитуды различных (кроссинг-сопряженных) процессов. Это свойство сужает круг независимых динамических величин в теории. Инвариантные амплитуды F_t (см. § 7.5) как функции импульсных переменных s, t, u будут относиться теперь ко всем кроссинг-сопряженным процессам. Имея в виду читателей не только читающих, но и вычисляющих, мы излагаем в гл. 11 также некоторые вопросы построения кроссинг-матрицы для групп SU_2 и SU_3 .

§ 11.1. Интерполирующие поля, токи и редукционная формула

Матрица рассеяния представляет собой унитарный оператор, который связывает асимптотические in- и out-состояния: $|\text{in}\rangle = S|\text{out}\rangle$, описывающие соответственно конечную и начальную

конфигурации частиц при рассеянии. В S -матрице сосредоточена вся информация о взаимодействии частиц.

Асимптотические состояния могут быть построены с помощью операторов рождения, примененных к вакууму (см. § 4.5). Например, в случае рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ частиц со спином J_r и массой m_r ($r = 1, 2, 3, 4$) мы можем записать элемент S -матрицы в виде

$$\langle p_3, \sigma_3; p_4, \sigma_4 | S | p_1, \sigma_1; p_2, \sigma_2 \rangle = \langle 0 | c_{3 \text{ out}}(p_3, \sigma_3) c_{4 \text{ out}}(p_4, \sigma_4) c_{1 \text{ in}}^+(p_1, \sigma_1) c_{2 \text{ in}}^+(p_2, \sigma_2) | 0 \rangle, \quad (1)$$

где $c_{r \text{ in}}^+(p, \sigma)$, $c_{r \text{ out}}(p, \sigma)$ — операторы рождения и поглощения r -й частицы: $p_r^2 = m_r^2$.

Перейдем от операторов рождения и поглощения к локальным in- и out-полям $\Phi_{\text{in}}(x)$. Эти поля удовлетворяют уравнениям движения для свободных полей. Они связаны друг с другом тем же соотношением, что и in- и out-операторы рождения и поглощения:

$$\Phi_{\text{in}}(x) = S \Phi_{\text{out}}(x) S^{-1}.$$

Выражения для свободных полей через операторы рождения и поглощения были получены в гл. 5 для случая произвольного спина и в разных вариантах — при различных выборах волновых функций частиц с высшими спинами. Формулы гл. 5 позволяют также найти операторы рождения и поглощения.

Мы ограничимся обсуждением полей $\Phi_{\text{in}}(x)$ и $\psi_{\text{in}}(x)$ для частиц со спинами $J = 0$ и $J = 1/2$. Тогда формулы для операторов рождения и поглощения нейтральной бесспиновой частицы будут иметь вид

$$\begin{aligned} c_{\text{out}}^+(k) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \Phi_{\text{out}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{ikx}, \\ c_{\text{out}}(k) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \Phi_{\text{out}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ikx}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_1 \overleftrightarrow{\partial} f_2 = f_1 (\partial f_2) - (\partial f_1) f_2$. Для частицы со спином $1/2$ операторы рождения a^+ , b^+ и поглощения a , b равны

$$\begin{aligned} a_{\text{out}}^+(p, \sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{out}}(x) \gamma_4 u(p, \sigma) e^{-ipx}, \\ b_{\text{out}}^+(p, \sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \bar{v}(p, \sigma) \gamma_4 \psi_{\text{out}}(x) e^{-ipx}, \\ a_{\text{out}}(p, \sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \bar{u}(p, \sigma) \gamma_4 \psi_{\text{out}}(x) e^{ipx}, \\ b_{\text{out}}(p, \sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{out}}(x) \gamma_4 v(p, \sigma) e^{ipx}, \end{aligned} \quad (3)$$

где u и v — дираковские волновые функции (см. § 5.2). Формулы (2) проверяются непосредственной подстановкой в них явного выражения $\Phi_{\text{in}}(x)$ (например, из формулы (4.93) при $a = b = c$). При проверке формул (3) с помощью (5.24) и (5.28) необходимо воспользоваться условием ортогональности $\bar{v}(\mathbf{p}, \sigma)\gamma_4 u(-\mathbf{p}, \sigma) = 0$.

Введем интерполирующие локальные поля $\Phi(x)$ и $\psi(x)$. Локальность интерполирующего поля означает, во-первых, что при преобразованиях группы Пуанкаре оно преобразуется так же, как и соответствующее in- и out-поля, например:

$$e^{iPa} \psi(x) e^{-iPa} = \psi(x+a), \quad (4)$$

$$U(0, A) \psi(x) U^{-1}(0, A) = S(A^{-1}) \psi(\Lambda(A)x),$$

и, во-вторых, что выполняется условие причинности в форме

$$\{\psi(x), \psi^+(y)\} = 0, \quad [\Phi(x), \Phi(y)] = 0 \quad (5)$$

при $(x-y)^2 < 0$. В (4) $S(A)$ есть матрица лоренцева преобразования (5.22) для дираковского поля.

Предполагается, что интерполирующие поля $\Phi(x)$, $\psi(x)$ обладают теми же свойствами внутренней симметрии, что и асимптотические поля $\Phi_{\text{in}}(x)$ и $\psi_{\text{in}}(x)$. Очевидно, что интерполирующие поля описывают взаимодействие в процессе рассеяния.

Рассмотрим процесс рассеяния во времени и отождествим асимптотическое in-состояние с состоянием системы при $x_0 \rightarrow -\infty$, а out-состояние — с состоянием при $x_0 \rightarrow +\infty$. Поля $\Phi_{\text{in}}(x)$ тогда представляют собой пределы поля $\Phi(x)$ при $x_0 \rightarrow -\infty$ ($+\infty$). Эти пределы понимаются в смысле слабой сходимости, или асимптотического равенства матричных элементов операторов $\Phi(x)$ и Φ_{in} на поверхности масс, т. е. при $k^2 = m^2$:

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int d^3x \langle A | \Phi(x) - \Phi_{\text{out}}(x) | B \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\pm ikx} = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int d^3x \langle A | \Phi(x) - \Phi_{\text{in}}(x) | B \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\pm ikx} = 0.$$

Здесь $|A\rangle$ и $|B\rangle$ — нормированные состояния (т. е. волновые пакеты). Условия (6) охватывают все матричные элементы Φ_{in} и Φ_{out} . Например, при выборе верхнего знака в эксперименте первая формула (6) равносильна условию

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \langle A | c^+(k, x_0) + c_{\text{out}}^+(k) | B \rangle = 0,$$

где оператор $c^+(k, x_0)$ получается из интерполирующего поля $\Phi(x)$ по тому же правилу (2), что и оператор рождения $c_{\text{out}}^+(k)$ из $\Phi_{\text{out}}(x)$.

Аналогичным образом можно выяснить смысл остальных случаев в (6).

Условия асимптотического равенства матричных элементов спинорных полей $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $\psi_{\text{out}}(x)$, $\bar{\psi}_{\text{out}}(x)$ следует, согласно (3), записывать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow \pm \infty} \int d^3x \langle A' | \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_{\text{out}}(x) | B' \rangle \gamma_4 u(p, \sigma) e^{-ipx} &= 0, \\ \lim_{x_0 \rightarrow \pm \infty} \int d^3x \langle A' | \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_{\text{out}}(x) | B' \rangle \gamma_4 v(p, \sigma) e^{ipx} &= 0, \\ \lim_{x_0 \rightarrow \pm \infty} \int d^3x \bar{u}(p, \sigma) \gamma_4 \langle A' | \psi(x) - \psi_{\text{out}}(x) | B' \rangle e^{ipx} &= 0, \\ \lim_{x_0 \rightarrow \pm \infty} \int d^3x \bar{v}(p, \sigma) \gamma_4 \langle A' | \psi(x) - \psi_{\text{out}}(x) | B' \rangle e^{-ipx} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Определения (6) и (7) имеют смысл только для стабильных частиц, ибо нестабильные частицы не имеют асимптотических полей in и out (см. § 2.3). Однако если пренебрегать взаимодействием, вызывающим распад, то эти формулы можно сохранить и для нестабильных частиц. Факт стабильности одночастичного состояния частицы можно выразить в виде условия

$$|p, \sigma; \text{in}\rangle = |p, \sigma; \text{out}\rangle = |p, \sigma\rangle. \quad (8)$$

Мы будем нормировать интерполирующие поля так же, как и асимптотические поля, — по матричному элементу интерполирующих полей между вакуумом $|0\rangle$ и одночастичным состоянием. Ввиду стабильности одночастичного состояния этот матричный элемент такой же, как и для свободного поля в случае любого из полей $\Phi(x)$, $\psi(x)$ и соответствующего одночастичного состояния со спином 0, $1/2$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(0) | k \rangle &= \langle 0 | \Phi_{\text{out}}(0) | k \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \\ \langle 0 | \psi(0) | p, \sigma \rangle &= \langle 0 | \psi_{\text{out}}(0) | p, \sigma \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(p, \sigma). \end{aligned} \quad (9)$$

Интерполирующие поля могут не удовлетворять уравнениям для свободных полей. Мы введем поэтому скалярный и спинорные токи:

$$\begin{aligned} J(x) &= -(\partial^2 + m^2) \Phi(x) \equiv K(x) \Phi(x), \\ \eta(x) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - \kappa) \psi(x) \equiv \vec{\mathcal{D}}(x) \psi(x), \\ \bar{\eta}(x) &= -(i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + \kappa \bar{\psi}(x)) \equiv \bar{\psi}(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Матричный элемент тока между вакуумом и одночастичным состоянием, соответствующим интерполирующему полю, равен нулю:

$$\langle 0 | J(x) | k \rangle = 0, \quad \langle 0 | \eta(x) | p, \sigma \rangle = 0, \quad (11)$$

ибо одночастичные состояния — это состояния свободных частиц.

Вследствие локальности полей токи также локальны. Они обладают локальным законом преобразования, аналогичным (4), и коммутируют или антикоммутируют при пространственноподобных интервалах:

$$[J(x), J(y)] = \{\eta(x), \bar{\eta}(y)\} = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (12)$$

Коммутаторы токов при одинаковых временах мы не рассматриваем.

Обратимся теперь к выводу формулы, связывающей матрицу рассеяния с матричными элементами от токов. Пусть при рассеянии $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ частица 2 имеет спин 0. Тогда матричный элемент матрицы $S - 1$, согласно (1), (2) и (6), равен

$$\begin{aligned} \langle 3, 4, \text{out} | c_{\text{in}}^{\dagger}(p_2) | 1 \rangle - \langle 3, 4, \text{out} | c_{\text{out}}^{\dagger}(p_2) | 1 \rangle = \\ = - \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x \langle 3, 4, \text{out} | \Phi(x) - \Phi_{\text{out}}(x) | 1 \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-i p_2 x} = \\ = - \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x \langle 3, 4, \text{out} | J(x) | 1 \rangle e^{-i p_2 x}. \quad (13) \end{aligned}$$

При переходе к окончательной формуле в (13) были использованы равенство $p^2 = m^2$, условие (8), определение (10) и то, что пространственные поверхностные интегралы должны исчезать для нормированных состояний (т. е. для «волновых пакетов»).

В выражении (13) можно выделить δ -функцию:

$$\langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle = - \frac{i (2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \langle 3, 4, \text{out} | J(0) | 1 \rangle,$$

так что элемент T -матрицы равен

$$\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \langle 3, 4, \text{out} | J(0) | 1 \rangle. \quad (14)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для случая, когда частица 1 имеет спин $1/2$:

$$\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle = - \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \langle 3, 4, \text{out} | \bar{\eta}(0) | 2 \rangle. \quad (15)$$

Возвратимся к (13) и повторим операцию замены оператора рождения или поглощения на интерполирующее поле и затем на ток.

Пусть частицы 2 и 4 одинаковы и имеют спин $J = 0$. Мы находим с помощью (2) и (6)

$$\begin{aligned} \langle 3, 4, \text{out} | J(0) | 1 \rangle &= \langle 3 | c_{\text{out}}(\mathbf{p}_4) J(0) | 1 \rangle = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 y e^{i p_4 y} K(y) \langle 3 | T(\Phi(y) J(0)) | 1 \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

так как в силу (11) слагаемое с $c_{\text{in}}(\mathbf{p}_4) | 1 \rangle$ не вносит вклада в (16) и тогда, когда частицы 1 и 4 одинаковы.

Символ $T(A(x_0)B(y_0))$, введенный в формуле (16), обозначает хронологическое произведение (или T -произведение) полей:

$$T(A(x_0)B(y_0)) = \begin{cases} A(x_0)B(y_0) & \text{при } x_0 > y_0, \\ \pm B(y_0)A(x_0) & \text{при } y_0 > x_0, \end{cases} \quad (17)$$

и знак \pm отличает бозонные поля (+) от фермионных полей (-). Матричный элемент оператора $S - 1$ можно теперь записать в виде, симметричном относительно $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$:

$$\begin{aligned} \langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle &= \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x d^4 y e^{-i p_2 x + i p_4 y} \vec{K}(x) \langle 3 | T(\Phi(x)\Phi(y)) | 1 \rangle \overleftarrow{K}(y). \end{aligned} \quad (18)$$

Формулы (13), (15) и (18) представляют собой примеры редукционной формулы Лемана—Симанзика—Циммермана [134]. Если применить последовательно эти формулы ко всем операторам рождения и поглощения в матричном элементе $\langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle$, то величину $\langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle$ можно выразить через вакуумные средние от T -произведений интерполирующих операторов.

Если все частицы одинаковы и имеют спин 0, но находятся в различных состояниях, то легко найти

$$\begin{aligned} \langle 3, 4 | S | 1, 2 \rangle &= \\ &= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 f_{p_2}(x_2) f_{p_4}(x_4) \vec{K}(x_3) \vec{K}(x_4) \times \\ &\times \langle 0 | T(\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)) | 0 \rangle \overleftarrow{K}(x_1) \overleftarrow{K}(x_2) f_{p_1}(x_1) f_{p_3}(x_3), \end{aligned} \quad (19)$$

где \vec{K} действует направо, а \overleftarrow{K} — налево. Волновая функция $f_p(x)$ частицы с импульсом p есть

$$f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i p x}.$$

Формула (19) имеет такой вид, как если бы каждый оператор рождения $c_{\text{in}}^\dagger(p)$ и поглощения $c_{\text{out}}(p)$ был заменен на

$$\begin{aligned} c_{\text{in}}^\dagger(p) &\sim -i \int d^4 x \Phi(x) \overleftarrow{K}(x) f_p(x), \\ c_{\text{out}}(p) &\sim -i \int d^4 x f_p^*(x) \vec{K}(x) \Phi(x) \end{aligned} \quad (20)$$

с условием, что дифференцирование выполняется после вычисления вакуумного среднего от T -произведения операторов $\Phi(x)$.

При рассеянии фермионов нужно фиксировать с самого начала порядок следования фермионных операторов, так как он влияет на знак выражения. Мы будем считать, что фермионные операторы пишутся в том же порядке, что и обозначения частиц в матричном элементе: $\langle 3, 4, \text{out} | = \langle 0 | a_{\text{out}}(3) a_{\text{out}}(4)$ и $| 1, 2, \text{in} \rangle = a_{\text{in}}^+(1) a_{\text{in}}^+(2) | 0 \rangle$.

В случае, когда все частицы одинаковы и имеют спин $1/2$, матрица рассеяния есть

$$\begin{aligned} \langle 3, 4 | S | 1, 2 \rangle &= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) \bar{u}(\mathbf{p}_4, \sigma_4) \overrightarrow{\mathcal{D}}(x_3) \overrightarrow{\mathcal{D}}(x_4) \times \\ &\times \langle 0 | T(\psi(x_3) \psi(x_4) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2)) | 0 \rangle \overleftarrow{\mathcal{D}}(x_1) \overleftarrow{\mathcal{D}}(x_2) u(\mathbf{p}_1, \sigma_1) u(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^6} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4)\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Формула (21) имеет такой вид, как если бы каждый оператор поглощения a_{out} был заменен на

$$a_{\text{out}}(\mathbf{p}, \sigma) \sim -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) e^{ipx} \overrightarrow{\mathcal{D}}(x) \psi(x), \quad (22)$$

а каждый оператор рождения a_{in}^+ — на

$$a_{\text{in}}^+(\mathbf{p}, \sigma) \sim -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x \bar{\psi}(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}(x) u(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ipx}. \quad (23)$$

В случае античастиц правило видоизменяется. Повторяя вывод, заменяя исходные операторы a, a^+ на b, b^+ , мы найдем, что для античастиц каждый оператор поглощения должен быть в (22) представлен выражением

$$b_{\text{out}}(\mathbf{p}, \sigma) \sim \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 x \bar{\psi}(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}(x) v(\mathbf{p}, \sigma) e^{ipx}, \quad (24)$$

а каждый оператор рождения — выражением

$$b_{\text{in}}^+(\mathbf{p}, \sigma) \sim \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ipx} \overrightarrow{\mathcal{D}}(x) \psi(x). \quad (25)$$

При этом предполагается, что операторы $\mathcal{D}(x)$ применяются после вычисления T -произведения операторов ψ и $\bar{\psi}$.

Аналогичным образом нетрудно вывести, что в случае, когда все частицы одинаковы и имеют спин 1, следует заменить операторы

рождения и поглощения по правилу

$$\begin{aligned} c_{\text{in}}^+(\mathbf{p}, \lambda) &\sim \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e_{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i\rho x} \vec{K}(x) B^{\mu}(x), \\ c_{\text{out}}(\mathbf{p}, \lambda) &\sim -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x B_{\mu}^+(x) \overleftarrow{K}(x) e^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i\rho x}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $B^{\mu}(x)$ — интерполирующее векторное поле, а $e_{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$ — волновая функция частицы со спином 1 (см. § 5.4).

Как и в случае частиц со спином 0 и $1/2$, нужно сначала вычислить T -произведения операторов B_{μ}, B_{ν}^+ , после чего выполнить дифференцирования $K(x)$ и найти вакуумное среднее. Редукционные формулы (19) и (21) для рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ легко обобщаются на случай произвольного числа частиц различного типа (если предположить, что одинаковые частицы находятся в различных состояниях). В общем случае необходимо одновременно воспользоваться правилами замены (20), (22) — (26) с условием, что дифференцирование $K(x)$ и $\mathcal{D}(x)$ производится после вычисления T -произведений от операторов всех интерполирующих полей. В заключение следует вычислить вакуумное среднее от T -произведения.

Поскольку волновые функции $f_p(x), u(\mathbf{p}, \sigma)$ и $e_{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$ известны, то все динамические сведения сосредоточены в вакуумных ожиданиях от произведений интерполирующих операторов. Выполнение дифференцирования $K(x)$ и $\mathcal{D}(x)$ приводит нас к токам и коммутаторам при совпадающих временах.

Заметим, что в случае рассеяния двух частиц $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ T -произведение в (18) можно преобразовать к запаздывающему коммутатору $\vartheta(x - y)[\Phi(x), \Phi(y)]$, где $\vartheta(x)$ — ступенчатая функция: $\vartheta(x) = 1$ при $x_0 > 0$; $\vartheta(x) = 0$ при $x_0 < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x d^4y e^{-i\rho_3 x + i\rho_4 y} \times \\ &\times \vec{K}(x) \langle 3 | \vartheta(x - y) [\Phi(x), \Phi(y)] | 1 \rangle \overleftarrow{K}(y). \end{aligned} \quad (27)$$

Мы предоставляем читателю убедиться, что разность выражений (27) и (18) действительно равна нулю, если импульсы p_2, p_4 находятся в физической области.

§ 11.2. Перекрестная симметрия

Рассмотрим наряду с реакцией

$$a + b \rightarrow c + d \quad (s\text{-канал}) \quad (28)$$

также две другие — перекрестные — реакции, получаемые из (28) заменой частицы в начальном (конечном) состоянии на античастицу

в конечном (начальном) состоянии:

$$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d \quad (t\text{-канал}), \quad (29)$$

$$a + \bar{d} \rightarrow c + \bar{b} \quad (u\text{-канал}). \quad (30)$$

При изучении кинематики S -матрицы (§ 7.2) было выяснено, что в s -, t - и u -каналах роль квадрата энергии в системе ц. и. играют соответственно инвариантные переменные

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad u = (p_a - p_d)^2. \quad (31)$$

При переходе от реакции s -канала (28) к перекрестной реакции t -канала (29) импульсы частиц p_b и p_c с $p_{b0}, p_{c0} > 0$ заменяются на импульсы античастиц $-p_c$ и $-p_b$ с $p_{c0}, p_{b0} < 0$. Кроссинг-преобразование от (28) к (29) следует отличать от полного отражения θ , при котором все частицы заменяются на античастицы с обращением направления процесса: $\bar{c} + \bar{d} \rightarrow \bar{a} + \bar{b}$.

Пусть все частицы a, b, c и d являются заряженными бозонами со спином 0 (например, $\pi^+ + K^- \rightarrow \pi^+ + K^-$). Обозначим π - и K -поля посредством $\pi(x)$ и $\Phi(x)$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_a, \dots, p_d) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 e^{i(p_a x_1 + p_b x_2 - p_c x_3 - p_d x_4)} \left(-\frac{i}{(2\pi)^6} \right) \times \\ \times \{ \vec{K}(x_1) \vec{K}(x_2) \langle 0 | T(\pi^+(x_1) \Phi(x_2) \pi(x_3) \Phi^+(x_4)) | 0 \rangle \vec{K}(x_3) \vec{K}(x_4) \} \equiv \\ \equiv (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - p_c - p_d) T(s, t, u), \quad (32) \end{aligned}$$

предположив, что она определена для обоих знаков временной компоненты p_{i0} каждого из 4-векторов p_a, p_b, p_c, p_d . Тогда, согласно (20), для импульсов, лежащих в физической области s -канала ($p_i^2 = m_i^2; p_{i0} > 0$), эта функция пропорциональна амплитуде процесса (28), или

$$\pi^+ + K^- \rightarrow \pi^+ + K^-;$$

для импульсов, находящихся в физической области t -канала ($p_i^2 = m_i^2; p_{a0}, p_{d0} > 0; p_{b0}, p_{c0} < 0$), функция (32) пропорциональна амплитуде процесса (29), или

$$\pi^- + \pi^- \rightarrow K^+ + K^-,$$

и для импульсов, принадлежащих физической области u -канала ($p_i^2 = m_i^2; p_{a0}, p_{c0} > 0, p_{b0}, p_{d0} < 0$), функция (32) пропорциональна амплитуде процесса (30), или

$$\pi^+ + K^+ \rightarrow \pi^+ + K^+.$$

Кроме того, обращая знак всех временных компонент для каждого из трех случаев, мы получаем еще три физические области, отно-

сящиеся к трем процессам, связанным с указанными выше процессами полным отражением θ :

$$\pi^- + K^+ \rightarrow \pi^- + K^+,$$

$$K^- + K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+,$$

$$\pi^- + K^- \rightarrow \pi^- + K^-.$$

Разумеется, физические области в плоскости (s, t, u) для реакций, связанных θ -отражением, одинаковы.

Таким образом, выражение (32) описывает шесть различных процессов в зависимости от области изменения переменных p_{i0} . В случае, когда имеет место S -инвариантность (т. е. если пренебрегается слабыми взаимодействиями), выражение (32) будет описывать 12 процессов.

Следовательно, полученная нами с помощью локальной теории формула (32) для функции $\mathcal{M}(p_a, \dots, p_d)$ вполне согласуется с возможностью того, что $\mathcal{M}(p_a, \dots, p_d)$ есть аналитическая функция импульсов в некоторой связанной области комплексного импульсного пространства, включающей в себя все физические области перекрестных процессов. Такое свойство аналитичности было доказано в рамках теории возмущений [135]. Функция $\mathcal{M}(p_a, \dots, p_d)$ есть аналитическая амплитуда, которая в дальнейшем будет для краткости называться просто амплитудой.

Для скалярных частиц аналитическая амплитуда (32) зависит от импульсов посредством инвариантных переменных s, t, u , связанных соотношением $s + t + u = 2m_\pi^2 + 2m_K^2$, являясь инвариантной амплитудой в смысле § 7.5:

$$\mathcal{M}(p_a, \dots, p_d) = F(s, t, u).$$

Обозначим инвариантные амплитуды в s -, t - и u -каналах посредством $F^s(s, t, u)$, $F^t(t, u, s)$, $F^u(u, s, t)$, помещая всегда на первое место квадрат энергии в системе ц. и., а на второе — передачу импульса. Эти амплитуды представляют собой значения одной и той же функции — аналитической амплитуды $F(s, t, u)$ — в физических областях соответствующих каналов:

$$F^s(s, t, u) = F(s, t, u) \quad \text{в } s\text{-канале,}$$

$$F^t(t, u, s) = F(s, t, u) \quad \text{в } t\text{-канале,}$$

$$F^u(u, s, t) = F(s, t, u) \quad \text{в } u\text{-канале.}$$

С другой стороны, если нам известна амплитуда в s -канале $F^s(s, t, u)$, то, продолжая ее аналитически по p_{b0} и p_{c0} в область $p_{b0}, p_{c0} < 0$, мы получаем амплитуду процесса в t -канале и, продолжая аналитически в область $p_{b0}, p_{d0} < 0$, приходим к амплитуде в u -канале.

Если частицы 1, 2, 3 и 4 — это барионы со спином $1/2$, то исходной служит формула (21), которую мы запишем для s -канала в виде $\langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle =$

$$= \bar{u}^\alpha(\mathbf{p}_3, \sigma_3) \bar{u}^\beta(\mathbf{p}_4, \sigma_4) \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\rho_1, \dots, \rho_4) u_\gamma(\mathbf{p}_1, \sigma_1) u_\delta(\mathbf{p}_2, \sigma_2),$$

где мы выделили спинорную амплитуду — матрицу (см. (7.70))

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\rho_1, \dots, \rho_4) = & \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4 x_1 \dots d^4(x_4) \vec{\mathcal{D}}_{\alpha'}^{\gamma'}(x_3) \vec{\mathcal{D}}_{\beta'}^{\delta'}(x_4) \times \\ & \times \langle 0 | T(\psi_{\alpha'}(x_3) \psi_{\beta'}(x_4) \bar{\psi}^{\gamma'}(x_1) \bar{\psi}^{\delta'}(x_2)) | 0 \rangle \times \\ & \times \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\gamma'}^{\alpha'}(x_1) \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\delta'}^{\beta'}(x_2) \exp\{-i(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 - \rho_3 x_3 - \rho_4 x_4)\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Нетрудно убедиться, что если реакция в s -канале есть рассеяние протона на протоне:

$$p + p \rightarrow p + p,$$

то матрица $\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\rho_1, \dots, \rho_4)$ при $\rho_{20}, \rho_{30} < 0$, свернутая с дираковскими спинорами $\bar{v}^\alpha(-\mathbf{p}_3, \sigma_3)$, $u^\beta(\mathbf{p}_4, \sigma_4)$, $v_\delta(-\mathbf{p}_2, \sigma_2)$, $u_\gamma(\mathbf{p}_1, \sigma_1)$, будет описывать кроссинг-сопряженную реакцию протон — антипротон в t -канале¹⁾:

$$p + \bar{p} \rightarrow \bar{p} + p.$$

При этом импульсы физических частиц будут равны $\rho_1, -\rho_2, -\rho_3, \rho_4$.

Реакция u -канала в этом случае совпадает с t -канальной, а амплитуда в u -канале получается из той же спинорной амплитуды (33) сворачиванием с дираковскими спинорами $\bar{v}^\beta(-\mathbf{p}_4, \sigma_4)$, $\bar{u}^\alpha(\mathbf{p}_3, \sigma_3)$, $v_\delta(-\mathbf{p}_2, \sigma_2)$, $u_\gamma(\mathbf{p}_1, \sigma_1)$. Таким образом, все эти перекрестные (а также θ - и C -сопряженные) реакции характеризуются одной спинорной аналитической амплитудой (33).

Если частицы 1, 2, 3, 4 имеют произвольные спины, то, опираясь на формулы гл. 5 для локальных полей и волновых функций с произвольным спином, мы можем без труда построить аналогичным образом выражение типа (33). Если для описания частиц выбраны волновые функции $u_r(\mathbf{p}_r, \sigma_r)$ ($r = 1, 2, 3, 4$), то очевидно, такое выражение будет определять спинорную амплитуду $\mathcal{M}_{r_1 r_2}^{r_3 r_4}(\rho_1, \dots, \rho_4)$, введенную в § 7.5. Конкретные формулы типа (32), связывающие спинорную амплитуду с вакуумным ожиданием от интерполирующих полей, были необходимы, в сущности, лишь для того, чтобы проиллюстрировать представление об аналитической амплитуде. Поэтому,

¹⁾ В реакциях с участием барионов каналы обычно обозначаются так, что t -канал является бозонным, т. е. содержит барион и антибарион в начальном и конечном состояниях. Переход от одного из каналов к перекрестному иногда называют кроссинг-преобразованием.

не обращаясь к конкретным формулам, мы будем рассматривать спинорную амплитуду $\mathcal{M}_{r_1 r_2}^{r_1' r_2'}$ как аналитическую.

Разложение спинорной амплитуды $\mathcal{M}_{r_1 r_2}^{r_1' r_2'}(p_1, \dots, p_4)$ на инвариантные амплитуды $F(s, t, u)$ было рассмотрено в общем виде в § 7.5 (см. (7.77)). В случае аналитической амплитуды можно с равным успехом использовать кинематические коварианты $X_l(p_1, \dots, p_4)$, которые связаны с любым из перекрестных каналов, т. е. наиболее удобны для разложения амплитуды процесса в этом канале.

В набор импульсных переменных данного канала обычно входит полный импульс состояния и оба относительных импульса (в начальном и конечном состояниях канала), что позволяет легко записывать инвариантную энергию, а также просто учитывать тождественность частиц. Таким образом, «естественные» наборы импульсов таковы:

s-канал:

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2, & s &= P^2, \\ \rho &= \frac{1}{2} (p_1 - p_2), & \rho' &= \frac{1}{2} (p_3 - p_4); \end{aligned} \quad (34)$$

t-канал:

$$\begin{aligned} \Delta &= p_3 - p_1 = p_2 - p_4, & t &= \Delta^2, \\ K &= \frac{1}{2} (p_1 + p_3), & Q &= \frac{1}{2} (p_2 + p_4), \\ KQ &\equiv v = \frac{1}{4} (s - u), & K^2 + Q^2 &= \frac{1}{2} (s + u); \end{aligned}$$

u-канал:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= p_1 - p_4 = p_3 - p_2, & u &= \bar{\Delta}^2, \\ \bar{K} &= \frac{1}{2} (p_1 + p_4), & \bar{Q} &= \frac{1}{2} (p_2 + p_3). \end{aligned}$$

В соответствии с этим коварианты $X_l(P, \rho, \rho')$ называют *s*-канальными и т. д. Если коварианты обладают матричными индексами (как в случае (33) или (7.80)), то группировку их удобно производить отдельно для начального и конечного состояний канала. В частности, коварианты (7.80) составляют естественный набор для *t*-канала; индексы каждой из двух независимых совокупностей γ -матриц в (7.82) относятся к волновым функциям одного и того же (начального или конечного) состояния.

Спинорная амплитуда может быть разложена по ковариантам любого канала:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_1, \dots, p_4) &= \sum_l F_l^{(s)}(s, t, u) X_l(P, \rho, \rho') = \\ &= \sum_l F_l^{(t)}(t, u, s) X_l(\Delta, K, Q) = \sum_l F_l^{(u)}(u, s, t) X_l(\bar{\Delta}, \bar{K}, \bar{Q}). \end{aligned} \quad (35)$$

Разложение по ковариантам t -канала оказывается удобным при изучении упругого рассеяния (в s -канале) и отражений. Наборы инвариантных амплитуд $F_l^{(s)}$, $F_l^{(t)}$ и $F_l^{(u)}$ связаны линейными соотношениями, коэффициенты в которых образуют кроссинг-матрицы. Чтобы вычислить кроссинг-матрицу $\beta(s, t)$, необходимо найти разложение s -канальных ковариантов по t -канальным:

$$X_l(P, p, p') = \sum_l \beta_{ll'}(s, t) X_{l'}(\Delta, K, Q). \quad (36)$$

Разложения (35) и (36) должны быть таковы, чтобы инвариантные амплитуды не содержали кинематических сингулярностей (см. § 7.5). Это выполняется, в частности, если элементы кроссинг-матрицы постоянны. Вычисление спинорных кроссинг-матриц можно найти в оригинальных статьях [108].

Перекрестная симметрия и тождественность частиц. Если какие-нибудь перекрестные реакции совпадают или отличаются θ -отражением, то амплитуды в этих каналах должны быть равны (с точностью до знака в случае перестановки фермионов). Это влечет за собой дополнительную — перекрестную (или кроссинг-) симметрию амплитуды. Например, реакция в s -канале $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ совпадает с t -канальной реакцией. Следовательно, аналитическая (она же инвариантная) амплитуда будет симметрична по s и t :

$$F(s, t, u) = F(t, s, u). \quad (37)$$

В случае частиц со спином удобно использовать то из разложений (35), в котором коварианты обладают простым поведением при кроссинг-преобразовании (например, умножаются на ± 1).

Перекрестная симметрия есть следствие тождественности частиц, входящих в начальное или конечное состояние хотя бы одного из перекрестных процессов. Действительно, реакции $1 + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$ (s -канала) и $1 + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 2$ (u -канал) отличаются только θ -отражением; а в t -канале ($1 + 1 \rightarrow \bar{2} + 4$) начальное состояние содержит тождественные частицы. В процессе $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ перекрестная симметрия возможна, если тождественна хотя бы одна из пар частиц 1 и 2 , 1 и $\bar{3}$, 1 и $\bar{4}$, $\bar{2}$ и 4 , 3 и 4 , $\bar{2}$ и 3 . В рассмотренном выше примере u -канал содержит четыре одинаковые частицы: $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$.

Пусть в начальном состоянии s -канала имеется две тождественные частицы: $1 + 1 \rightarrow 3 + 4$; их перестановка может изменить только знак амплитуды, если 1 — фермион. При этом $p_1 \leftrightarrow p_2$ и $t \leftrightarrow u$. Следовательно, если выбрать s -канальные коварианты четными или нечетными относительно такой замены:

$$X_{l r_1 r_2}^{r_1 r_2}(P, p, p') = \pm \xi_l X_{l r_2 r_1}^{r_1 r_2}(P, -p, p') \quad (38)$$

(знак «—» для фермионов), то инвариантные амплитуды будут обладать кроссинг-симметрией:

$$F_i^{(s)}(s, t, u) = \xi_i F_i^{(s)}(s, u, t). \quad (39)$$

Если теория инвариантна относительно зарядового сопряжения, то перекрестная симметрия возможна также, когда в s -канале частицы 1 и 3 тождественны, а частицы 2 и 4 нейтральны. Например, при s -канале $\pi^0 + p \rightarrow \omega^0 + p$ мы имеем в u -канале процесс $\pi^0 + \bar{p} \rightarrow \bar{p} + \omega^0$, который применением зарядового сопряжения приводится к s -канальному процессу.

Спиральные амплитуды обладают более сложными аналитическими свойствами [136—138] и поведением при кроссинг-преобразовании [139—141], чем спинорные амплитуды. Происхождение этих сложностей можно пояснить на примере формул (33) для спинорной амплитуды барионного рассеяния. Чтобы получить спиральную амплитуду в s -канале, нужно свернуть спинорную амплитуду (33) с дираковскими «спиральными» волновыми функциями $u(p, \lambda)$ и $\bar{u}(p, \lambda)$, t -канальная спиральная амплитуда находится сворачиванием той же аналитической амплитуды (33) с другими спиральными биспинорами: $\bar{v}^{\beta}(-p_4, \lambda_4)$, $u^{\alpha}(p_3, \lambda_3)$ и т. д. (Спиральные волновые функции даны формулами (5.29), (5.31) и (5.38), в которых матрица α должна быть записана в спиральном базисе согласно (4.61) и (4.63); см. также §§ 4.5 и 7.4.)

Умножение на волновые функции вносит дополнительные кинематические множители; при этом теряется локальный закон преобразования \mathcal{M} . При переходе от одного канала к другому наборы спиральных амплитуд преобразуются линейно (с помощью «спиральных» кроссинг-матриц). В отличие от инвариантных амплитуд, аналитическая форма спиральных амплитуд одинакова лишь с точностью до кинематических особенностей [136—141] (дополнительные условия на порогах и псевдопорогах и при рассеянии вперед; см. § 7.5).

§ 11.3. Кроссинг-матрицы в случае изоспиновой и унитарной групп

Кроссинг-симметрия связывает амплитуды в различных каналах. Амплитуда в одном из каналов, будучи аналитически продолжена в физическую область другого канала, становится амплитудой процесса в этом канале. Если взаимодействие обладает изоспиновой или унитарной симметрией, то возникает необходимость установить связь между амплитудами с заданным изоспином или унитарной мультиплетностью, определенными в разных каналах. Такая связь дается кроссинг-матрицами.

Рассмотрим рассеяние с сохранением изоспина

$$a + b \rightarrow c + d \quad (s\text{-канал}).$$

Релятивистски инвариантная амплитуда в s -канале

$$\langle c, d | T | a, b \rangle = \sum T_s^{(I)}(s, t, u) \lambda_I(c, d | a, b) \quad (40)$$

может быть разложена по амплитудам рассеяния $T_s^{(I)}$ с определенным изоспином I ; величины λ_I выражаются через коэффициенты Клебша—Гордана и фазы ϵ_a (см. § 8.3):

$$\lambda_I(a, b | c, d) = \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c \epsilon_d c(a, b; I) c(c, d; I), \quad (41)$$

где коэффициент Клебша—Гордана

$$c(a, b; I) = \langle I_a I_b I_{3a} I_{3b} | I_a I_b I, I_{3a} + I_{3b} \rangle. \quad (42)$$

Разложение аналогичного типа может быть написано для амплитуды в t -канале:

$$\langle \bar{b}, d | T | a, \bar{c} \rangle = \sum T_t^{(I)}(t, u, s) \lambda_I(\bar{b}, d | a, \bar{c}), \quad (43)$$

и в u -канале:

$$\langle \bar{b}, c | T | a, \bar{d} \rangle = \sum T_u^{(I)}(u, s, t) \lambda_I(c, \bar{b} | a, \bar{d}). \quad (44)$$

Вследствие кроссинг-симметрии все три амплитуды (40), (43) и (44) представляют собой значения одной и той же функции импульсов в разных физических областях, и каждая из этих амплитуд, будучи продолжена в другую физическую область, превращается в амплитуду кроссинг-процесса. Поэтому, совершив аналитическое продолжение, мы должны положить (40) = (43) = (44), или

$$\begin{aligned} \sum_I T_s^{(I)}(s, t, u) \lambda_I(c, d | a, b) &= \sum_I T_u^{(I)}(u, s, t) \lambda_I(c, \bar{b} | a, \bar{d}) = \\ &= \sum_I T_t^{(I)}(t, u, s) \lambda_I(\bar{b}, d | a, \bar{c}). \end{aligned} \quad (45)$$

Изоспиновые кроссинг-матрицы X_{st} и X_{su} связывают изоспиновые амплитуды $T_s^{(I)}$ и $T_t^{(I')}$, $T_s^{(I)}$ и $T_u^{(I')}$:

$$T_s^{(I)} = \sum_{I'} (X_{st})_{II'} T_t^{(I')}, \quad (46)$$

$$T_s^{(I)} = \sum_{I'} (X_{su})_{II'} T_u^{(I')}. \quad (47)$$

Для вычисления кроссинг-матриц существен выбор фазы одночастичных состояний относительно тех базисных изоспиновых состояний $| I, I_3 \rangle$ (преобразующихся как $\Phi_{I_3}^I$), для которых можно пользоваться коэффициентами Клебша—Гордана (см. § 8.3). При вычислении X_{st} и X_{su} необходимо сначала перейти от одночастич-

ных состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$ к базисным изоспиновым $|I, I_3\rangle$. Замена $|b\rangle$ на \bar{b} вводит фазу

$$\varepsilon_b \varepsilon_{\bar{b}} = \eta_b,$$

которая была определена ранее по (8.31) и (8.32).

Используя свойства ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана, находим из (45):

$$(X_{st})_{II'} = \sum_{abcd} \eta_b \eta_c c(a, b; I) c(a, d; I) c(a, -c; I') c(-b, d; I'). \quad (48)$$

Аналогичным образом определяется X_{su} , а также X_{tu} . Если порядок умножения состояний обращается, так что вместо $|a, b\rangle$ рассматривается $|b, a\rangle$, то кроссинг-матрицы приобретают фазовый множитель (от свойства симметрии коэффициентов (3.88)):

$$c(a, b; I) = (-1)^{I - I_a - I_b} c(b, a; I). \quad (49)$$

Рассмотрим в качестве примера перекрестные процессы

$$\begin{aligned} \Xi + K &\rightarrow \Sigma + \pi && (s\text{-канал}), \\ \Xi + \bar{\Sigma} &\rightarrow \bar{\Sigma} + \pi && (t\text{-канал}), \\ \Xi + \pi &\rightarrow \bar{\Sigma} + \Sigma && (u\text{-канал}). \end{aligned} \quad (50)$$

Имея в виду значения изоспинов частиц $I_\Xi = 1/2$, $I_K = 1/2$, $I_\Sigma = 1$, $I_\pi = 1$, мы можем записать изотопическую структуру этих процессов как:

$$\begin{aligned} (s) \quad & 1/2 + 1/2' \rightarrow 1 + 1', \quad T_s^0, T_s^{(1)}; \\ (t) \quad & 1/2 + 1 \rightarrow \bar{1/2}' + 1', \quad T_t^{(1/2)}, T_t^{(3/2)}; \\ (u) \quad & 1/2 + 1' \rightarrow 1 + \bar{1/2}', \quad T_u^{(1/2)}, T_u^{(3/2)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Мы выписали также в (51) изоспиновые амплитуды в каждом из каналов. Мы находим из (45), подставив выражения для коэффициентов Клебша—Гордана:

$$\begin{aligned} T_s^{(0)} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} T_t^{(1/2)} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} T_t^{(3/2)}, \\ T_s^{(1)} &= \frac{2}{3} (T_t^{(3/2)} - T_t^{(1/2)}), \\ X_{st} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2/3} & -2\sqrt{2/3} \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (52)$$

Фаза в мультиплетях античастиц $\bar{\Sigma}$ и \bar{K} учитывается по (10.1). Изоспиновые кроссинг-матрицы даны в табл. П.6 [142].

В случае унитарной симметрии вычисление кроссинг-матриц следует той же схеме, что и в случае изоспиновой группы. Значок I

в формулах (40)—(47) должен быть заменен индексом \underline{n} , обозначающим мультиплеты $\underline{1}$, $\underline{8}_A$, $\underline{8}_S$, $\underline{10}$, $\underline{10}^*$ группы SU_3 , а вместо коэффициентов Клебша—Гордана $c(\underline{a}, \underline{b}; \underline{l})$ нужно подставить коэффициенты для группы SU_3 , рассмотренные в § 10.3:

$$c(\underline{a}, \underline{b}; \underline{n}) = \begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_{ny} \\ \nu_a & \nu_b & \nu_n \end{pmatrix} = \xi_I(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{n}) c(\underline{b}, \underline{a}; \underline{n}). \quad (53)$$

Замена частицы \underline{b} античастицей \bar{c} означает замену в (53) μ_b на μ_c^* и ν_b на $-\nu_c$. Так как SU_3 -коэффициенты $c(\underline{a}, \underline{b}; \underline{n})$ имеют иную симметрию, нежели SU_2 -коэффициенты, то в соотношение симметрии типа (49) для SU_3 входит другая фаза ξ_I [142, 143]. Множители ξ_I зависят от перемножаемых представлений $\underline{a} \times \underline{b}$ и того мультиплета \underline{n} , который рассматривается в приведении $\underline{a} \times \underline{b}$ (см. табл. 11.1).

Таблица 11.1

	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>10*</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	<u>35</u>	<u>35*</u>	<u>64</u>
<u>8</u> × <u>8</u>	1	1	-1	-1	-1	1				
<u>8</u> × <u>10</u>		1		-1		-1		1		
<u>8</u> × <u>10*</u>		1			-1	-1			-1	
<u>10</u> × <u>10</u>					-1	1	1	-1		
<u>10</u> × <u>10*</u>	-1	1				1				1

Если частицы \underline{a} , \underline{b} , ... обладают спином, то амплитуда в (40) есть одна из инвариантных амплитуд в разложении спинорной амплитуды (35). Полная кроссинг-матрица в этом случае есть прямое произведение изоспиновой или унитарной кроссинг-матрицы и кроссинг-матрицы, связанной с обычным спином (см. § 11.2 и табл. П.7).

§ 11.4. Свойства вершинных частей

Под током $j_\mu(x)$ в этом параграфе подразумевается эрмитов векторный или аксиально-векторный локальный оператор, имеющий определенные трансформационные свойства при отражении P , зарядовом сопряжении и являющийся компонентой унитарного октета. Это определение тока отличается от определения в § 11.1. С одной стороны, в этом параграфе мы ограничиваемся только токами с векторным индексом, и, с другой стороны, мы наделяем их свойствами внутренней симметрии и не связываем определенным образом с интерполирующими полями.

Векторность тока означает, что при преобразовании Лоренца $g = (0, A)$

$$U(g) j_\mu(0) U^{-1}(g) = \Lambda_\mu^\nu(A) j_\nu(0).$$

Пространственное отражение P отличает векторный ток v_μ от аксиально-векторного a_μ :

$$\begin{aligned} P v(x^0, \mathbf{x}) P^{-1} &= -v(x^0 - \mathbf{x}), & P v^0(x^0, \mathbf{x}) P^{-1} &= v^0(x^0, \mathbf{x}), \\ P a(x^0, \mathbf{x}) P^{-1} &= a(x^0, \mathbf{x}), & P a^0(x^0, \mathbf{x}) P^{-1} &= -a^0(x^0, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (54)$$

Октетный характер тока выражается равенством

$$[F_a, j_{\mu b}(x)] = i f_{abc} j_{\mu c}(x) \quad (a, b, c = 1, \dots, 8), \quad (55)$$

где F_a — генераторы группы SU_8 .

Трансформационные свойства токов не зависят от их конкретного вида. Поэтому при перечислении этих свойств мы можем для наглядности иметь токи, построенные из дираковских полей (см. табл. 6.1). Чтобы учесть SU_8 -свойства, удобно ввести дираковские кварковые поля $\psi_{ai}(x)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$v_{\mu a} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda_a \psi, \quad a_{\mu a} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_a \psi. \quad (56)$$

При SU_3 -преобразовании $u = \exp(iF_a \alpha_a)$ поля ψ преобразуются по правилу $u \psi u^{-1} = \exp(i\lambda_a \alpha_a / 2) \psi$ (см. § 9.2), откуда следует (55).

По отношению к зарядовому сопряжению C токи можно подразделить на два класса. Токи первого рода ведут себя как величины (56):

$$C v_{\mu a} C^{-1} = -\sigma_a v_{\mu a}^+, \quad C a_{\mu a} C^{-1} = \sigma_a a_{\mu a}^+, \quad (57)$$

где

$$\sigma_a = -1 \quad (a = 2, 5, 7), \quad \sigma_a = 1 \quad (a = 1, 3, 4, 6, 8).$$

Токи второго рода $k_{\mu a}$ и (аксиальный ток) r_μ при операции C приобретают иной знак:

$$C k_{\mu a} C^{-1} = +\sigma_a k_{\mu a}^+, \quad C r_{\mu a} C^{-1} = -\sigma_a r_{\mu a}^+. \quad (58)$$

Соотношения (57) и (58) (как и предыдущие равенства (54), (55)) имеют место и для неэрмитовых токов. Таким образом, токи второго рода ведут себя как величины

$$\begin{aligned} k_{\mu a}(x) &= \frac{1}{2} i \bar{\psi}(x) \lambda_a \partial_\mu \psi(x), \\ r_{\mu a}(x) &= \frac{1}{2} i \bar{\psi}(x) \gamma_5 \lambda_a \psi(x). \end{aligned} \quad (59)$$

При полном отражении θ токи всех классов преобразуются одинаково:

$$\theta j_{\mu}(x) \theta^{-1} = -j_{\mu}^{\dagger}(-x). \quad (60)$$

Под вершинной частью мы будем понимать матричный элемент тока j_{μ} между одночастичными состояниями. В случае спиральных состояний

$$\langle 2 | j_{\mu} | 1 \rangle \equiv \langle p_2, \lambda_2; m_2, J_2 | j_{\mu}(0) | p_1, \lambda_1; m_1, J_1 \rangle, \quad (61)$$

где m_1, m_2 и J_1, J_2 — массы и спины частиц 1 и 2.

Вершинные части появляются в теории при изучении амплитуды перехода в рамках теории возмущений. Такие переходы вызваны слабыми или электромагнитными взаимодействиями (см. также гл. 15). При одинаковых частицах 1 и 2 вершинная часть (61) характеризует, в зависимости от типа тока, процессы типа рассеяния электрона на адронах и лептонные распады барионов внутри данного мультиплета. При $J_1 \neq J_2$ вершинная часть (61) входит в амплитуды электро- и фоторождения резонансов и лептонные распады адронов.

Трансформационные свойства. Правила преобразования вершинной части при преобразованиях группы Пуанкаре $g = (a, A)$ могут быть легко найдены с помощью двух формул гл. 4:

при трансляции $x \rightarrow x + a$

$$\langle 2 | j_{\mu}(x + a) | 1 \rangle = e^{i(p_2 - p_1) \cdot a} \langle 2 | j_{\mu}(x) | 1 \rangle;$$

при лоренцевом преобразовании $g = (0, A)$

$$\begin{aligned} \langle p_2, \lambda_2 | j_{\mu}(0) | p_1, \lambda_1 \rangle &= \langle p_2, \lambda_2 | U^{-1}(g) U(g) j_{\mu} U^{-1}(g) U(g) | p_1, \lambda_1 \rangle = \\ &= \sum_{\lambda_1', \lambda_2'} \mathcal{D}^{J_2, *}_{\lambda_2 \lambda_2'}(\tilde{A}_2) \langle p_2', \lambda_2' | \Lambda_{\mu}^{-1\nu} j_{\nu}(0) | p_1', \lambda_1' \rangle \mathcal{D}^{J_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(\tilde{A}_1), \end{aligned} \quad (62)$$

где $\tilde{A}_i = \alpha^{-1}(p_i') A \alpha(p_i)$ — вигнеровское вращение (4.45), а $p_{\mu}' = A_{\mu}{}^{\nu} p_{\nu}$.

Свойства вершинных частей относительно отражений находятся с помощью формул для преобразования векторов состояния (6.2) и токов.

При пространственном отражении P

$$\begin{aligned} \langle p_2, \lambda_2 | j_{\mu}(0) | p_1, \lambda_1 \rangle &= \\ &= \eta_P(1) \eta_P^*(2) \langle -p_2, -\lambda_2 | j_{\mu P}(0) | -p_1, -\lambda_1 \rangle, \end{aligned} \quad (63)$$

где $j_{\mu P} = (j_0, -\mathbf{j})$ для векторного тока и $j_{\mu P} = (-j_0, \mathbf{j})$ для аксиального тока, а $\eta_P(i)$ — четность частицы.

При отражении времени T

$$\begin{aligned} \langle p_2, \lambda_2 | j_{\mu}(x^0, \mathbf{x}) | p_1, \lambda_1 \rangle &= \\ &= \eta_T^*(1) \eta_T(2) e^{2i\varphi_1 \lambda_1 - 2i\varphi_2 \lambda_2} \langle p_1, \lambda_1 | j_{\mu T}(-x^0, \mathbf{x}) | p_2, \lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (64)$$

где $j_{\mu T}(-x^0, \mathbf{x}) = (\Gamma j_{\mu}(x^0, \mathbf{x}) \Gamma^{-1})^+ = (\tilde{j}_0^+, -\tilde{\mathbf{j}}^+)$ как для векторного, так и для аксиального токов. Для токов первого рода $\tilde{j}_{\mu\alpha} = \sigma_{\alpha} j_{\mu\alpha}$, для токов второго рода $j_{\mu\alpha} = -\sigma_{\alpha} j_{\mu\alpha}$. В формуле (64) φ_i есть полярный угол вектора p_i .

Кроссинг-сопряженные вершины. Наряду с вершиной (61) мы будем рассматривать также «кроссинг-сопряженную» вершину

$$\langle 2, \bar{1} | j_{\mu}(0) | 0 \rangle = \langle p_2, \lambda_2, 2; p_1, \lambda_1, \bar{1} | j_{\mu}(0) | 0 \rangle, \quad (65)$$

в которой частица 1 справа в матричном элементе заменена античастицей слева. Состояние $\langle 2, \bar{1} |$ будет пониматься как состояние $\langle 2, \bar{1}; \text{out} |$. Аналогичным образом можно ввести величину

$$\langle 0 | j_{\mu}(0) | \bar{2}, 1, \text{in} \rangle = \langle 0 | j_{\mu}(0) | p_2, \lambda_2, 2; p_1, \lambda_1, 1; \text{in} \rangle. \quad (66)$$

Для вершины типа $\langle 2 | j_{\mu} | 1 \rangle$ физической областью инвариантной переменной $t = (p_1 - p_2)^2$ является

$$t \leq (m_1 - m_2)^2; \quad p_1^0, p_2^0 > 0. \quad (67)$$

Для вершин «аннигиляционного» типа $\langle 2, \bar{1} | j_{\mu} | 0 \rangle$ физическая область t определяется неравенством

$$t = (p_1 + p_2)^2 = (-p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2; \quad p_1^0 < 0, p_2^0 > 0. \quad (68)$$

В случае вершины (66) мы имеем, аналогично (68),

$$t = (p_1 + p_2)^2 = (-p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2; \quad p_1^0 > 0, p_2^0 < 0. \quad (69)$$

Кроссинг-сопряженные вершины (65) и (66) могут быть получены из вершины (61) с помощью аналитического продолжения по импульсам. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вершинную функцию (61) для бесспиновых частиц $J_1 = J_2 = 0$:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mu}(p_1, p_2; 1, 2) = \\ & = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x d^4y e^{i(p_2 y - p_1 x)} \vec{K}_{2y} \langle 0 | T(\varphi_2(y) j_{\mu}(0) \varphi_1(x)) | 0 \rangle \vec{K}_{1x}. \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ — интерполирующие поля, связанные асимптотически с частицами 1 и 2. Правая часть этой формулы в области (67) определяет вершинную часть (61) в силу редуцированной формулы (26). Нетрудно убедиться с помощью этой же редуцированной формулы, что в области (68) мы получаем из (70) вершинную часть (65), а в области (69) — вершинную часть (66). Таким образом, все три кроссинг-сопряженных матричных элемента (61), (65) и (66) описываются с помощью одной и той же функции импульсов $\Gamma_{\mu}(p_1, p_2; 1, 2)$, которую можно было бы назвать аналитической вершинной частью. Мы будем говорить впредь о Γ_{μ} как о вершинной функции.

Как и в случае кроссинг-сопряженных амплитуд (см. § 11.3), для частиц со спином мы должны сначала перейти с помощью волновых функций к спинорным состояниям, а затем уже ввести спинорные вершинные функции Γ_μ :

$$\langle p_2, \lambda_2 | j_\mu(0) | p_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}^{r_2}(\bar{p}_2, \lambda_2) \Gamma_{\mu r_1 r_2}(p_1, p_2; 1, 2) u_{r_1}(p_1, \lambda_1). \quad (71)$$

Функция $\Gamma_\mu(p_1, p_2; J_1, J_2)$ описывает в соответствующих физических областях все три кроссинг-сопряженные вершинные части (61), (65) и (66). Подобно спинорным амплитудам (см. § 7.5), при преобразованиях группы Лоренца $g = (0, A)$ функция Γ_μ преобразуется с помощью матриц, не зависящих от импульса. Конкретный вид этих матриц определяется выбором волновых функций $u(p_1, \lambda_1)$, $u(p_2, \lambda_2)$.

Инвариантные форм-факторы. Разложение спинорной вершинной части $\Gamma_\mu(p_1, p_2; J_1, J_2)$ по инвариантным форм-факторам $F_l(t)$ зависящим только от $t = (p_1 - p_2)^2$, производится по тем же правилам, что и разложение спинорной амплитуды по инвариантным амплитудам (см. § 7.5). Если мы построим набор независимых ковариантов $X_\mu(p_1, p_2)$ с теми же лоренцевыми трансформационными свойствами, что и у $\Gamma_\mu(p_1, p_2; J_1, J_2)$, то

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2; J_1, J_2) = \sum_l X_l^\mu(p_1, p_2) F_l(t). \quad (72)$$

Оба импульса p_1, p_2 находятся на массовой поверхности: $p_i^2 = m_i^2$.

Коварианты X^μ определяются релятивистской кинематикой, т. е. в итоге — выбором волновых функций для частиц 1, 2. Форм-факторы содержат в себе информацию о динамике процесса. Вычисление форм-факторов составляет предмет динамической теории (см. § 12,5). Результаты эксперимента анализируются на языке форм-факторов.

Разложение (72) спинорной вершинной функции на инвариантные форм-факторы должно удовлетворять условиям того же типа, что и разложение спинорной амплитуды. Выбор независимых ковариантов X_μ должен обеспечивать ковариантность разложения, отсутствие кинематических особенностей и возможность просто учитывать инвариантность относительно отражений. Особую осторожность при этом следует проявлять при исключении дополнительных условий, которые налагаются на волновые функции с высшими спинами ($J \geq 1$). Дополнительные условия отсутствуют при выборе $(2J + 1)$ -компонентных волновых функций. Однако такая параметризация [144, 145] вершинной функции не совсем удобна в силу того, что в ней затруднен учет инвариантности относительно отражений [146]. Подобные трудности отсутствуют при использовании волновых функций типа Рариты—Швингера или Баргмана—Вигнера [147, 148]. Возможность такого выбора волновых функций, когда форм-факторы не имеют кинематических особенностей, была дока-

зана [103] для $(2J + 1)$ -компонентных функций и распространена на случай других волновых функций с помощью теоремы об аналитической эквивалентности [111] волновых функций, описывающих одну и ту же частицу.

Поскольку отыскание инвариантного набора ковариантов в простейших случаях элементарно и является частным случаем рассмотренной ранее методики введения инвариантных амплитуд, мы отсылаем читателя к §§ 7.5 и 11.3. В общем виде процедура разложения вершинной функции весьма громоздка, и мы рекомендуем читателю указанные выше оригинальные статьи.

Обсуждая разложение вершинной функции по ковариантам, мы не принимали во внимание свойства внутренней симметрии токов. Вопрос об изоспиновом, или SU_3 -разложении вершинной функции был фактически рассмотрен в §§ 8.3 и 10.2 при обсуждении быстрых распадов и феноменологических лагранжианов. Например, SU_3 -свойства матричного элемента от октетного тока $j_{\mu a}$

$$\langle p_2, \lambda_2; \underline{10}, \alpha_2 | j_{\mu a} | p_1, \lambda_1; \underline{8}, \alpha_1 \rangle$$

(здесь $\alpha = I, Y, t$ отмечает состояние частицы в мультиплете \underline{n}) будут те же, что и у амплитуды вероятности распада декуплета на два октета: $\underline{10} \rightarrow \underline{8} + \underline{8}$.

Глава 12

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

В этой главе мы введем основные понятия и представления, связанные с аналитическими свойствами амплитуды рассеяния. Мы рассмотрим для простоты случай рассеяния бесспиновых частиц.

Последовательное изложение аналитических свойств амплитуды могло бы состоять в перечислении постулатов аналитичности (аксиоматическая аналитичность) или в выводе аналитических свойств с помощью теории возмущений, но не в обращении к интерполирующим полям, использование которых позволяет провести доказательство аналитических свойств только в идеализированных случаях. Однако мы будем отправляться от формул с интерполирующими полями (которые сами по себе не нужны после того, как аналитические свойства установлены), так как это позволяет иллюстрировать роль локальности полей, или микропричинности, в появлении аналитических свойств амплитуды и роль условия унитарности в определении особенностей амплитуды. Мы не будем рассматривать особенности типа Ландау.

Аналитические свойства амплитуды вместе с ее асимптотическим поведением выражаются с помощью дисперсионных соотношений, которые представляют собой серьезный шаг на пути к пониманию динамики в теории элементарных частиц. Мы не рассматриваем вычислений, выполненных на основе дисперсионного подхода, изложению которых посвящено много книг [149 — 153]. Дисперсионный подход необходим как формализм, опираясь на который можно развивать новые методы приближений и вводить приближенные понятия. В этом отношении дисперсионный подход заменяет уравнения движения в лагранжевой трактовке квантовой теории поля. Имея в виду теорию полюсов Редже (гл. 13) и дуальный подход (гл. 14), мы остановимся подробнее на обсуждении формулы Грибова — Фруассара и продолжении парциальной амплитуды в плоскость комплексных моментов, а также на выяснении характерных черт полюсного приближения и связи полюсов амплитуды на нефизическом листе с резонансами. Аналитические свойства форм-факторов рассматриваются лишь в той мере, в какой это кажется необходимым для установления их характерных черт.

§ 12.1. Унитарность и абсорбтивная часть

Комплексные s -, t -, u -плоскости. Физический лист. Рассмотрим простейшую модель рассеяния скалярных частиц $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ одинаковой массы m , полагая, что частицы являются наиболее легкими из числа участвующих в теории (например, $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$).

Пусть $t = t' < 0$ фиксировано, так что $u = 4m^2 - t' - s$. В комплексной плоскости (рис. 11) физическая область s -канала изображается отрезком положительной вещественной оси от порогового значения $s_0 = 4m^2 - t'$ до ∞ . Если существуют стабильные

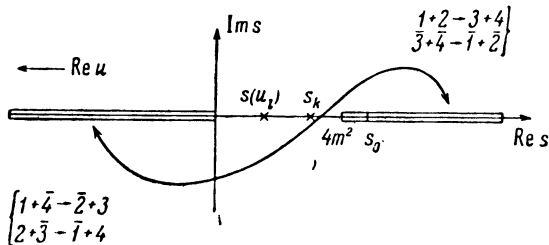


Рис. 11.

одночастичные состояния с квантовыми числами системы частиц $1+2$ и энергией $\sqrt{s_k}$, то им будут соответствовать точки $m^2 < s_k < 4m^2$ на вещественной оси. Физическая область u -канала есть $u_0 \leq u < \infty$, где $u_0(t')$ — порог двухчастичного процесса в u -канале. Обозначим u_1 точки, отвечающие одночастичным состояниям с квантовыми числами u -канала, т. е. системы $1 + \bar{4}$. На комплексной плоскости s физическая область u -канала занимает отрезок отрицательной вещественной оси $-\infty < s \leq s(u_0)$, где $s(u_0) = 4m^2 - t' - u_0$. Точки $s(u_1)$ относятся к частицам u -канала. При рассеянии вперед $t' = 0$, и первая пороговая точка s -канала есть $s_0(0) \equiv s_{\min} = 4m^2$.

Аналогичным образом, нетрудно установить, какие отрезки вещественной оси комплексной плоскости t соответствуют (при заданном $s < 0$) физическим областям t - и u -канала, или какие точки оси — частицам с квантовыми числами t - и u -канала.

Прежде чем обратиться к аналитическим свойствам амплитуды $F(s, t') \equiv F(s, t', u(s))$, напомним свойства амплитуды $f(E)$ при потенциальном рассеянии. Нерелятивистская амплитуда $f(E)$ аналитична во всей комплексной плоскости ω с разрезом вдоль вещественной оси, начиная от порога рассеяния $E_0 = 0$ до ∞ , за исключением простых полюсов (на вещественной оси), соответствующих связанным (т. е. одночастичным) состояниям. Физическая область рассеяния совпадает с верхним берегом разреза, где $E \rightarrow E + i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$;

амплитуда рассеяния есть граничное значение $f(E + i\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, аналитической амплитуды $f(w)$ на вещественной оси. В отличие от релятивистского случая, нерелятивистская амплитуда потенциального рассеяния имеет только одну физическую область — при $E > 0$. Продолжение в нижнюю полуплоскость w осуществляется с помощью принципа симметрии:

$$f(w^*) = f^*(w), \quad (1)$$

или на нижнем берегу разреза

$$f(E - i\varepsilon) = f^*(E + i\varepsilon),$$

так что скачок при переходе через разрез

$$f(E + i\varepsilon) - f(E - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} f(E), \quad (2)$$

равен мнимой части амплитуды и может быть найден из условия унитарности для $f(E)$.

В случае потенциального рассеяния можно доказать, что на первом римановом, или физическом, листе (включающем точки $E + i\varepsilon$) комплексные полюсы невозможны, ибо они описывают рождающиеся (и растущие) волны, существование которых противоречит сохранению вероятности.

Аналитические свойства нерелятивистской амплитуды $f(E)$ позволяют высказать некоторые суждения о свойствах аналитической релятивистской амплитуды $F(s, t')$. При рассеянии вперед правому разрезу $E > 0$ амплитуды $f(w)$ в комплексной плоскости w соответствует правый разрез $s_{\min} \leq s < \infty$ релятивистской амплитуды $F(s, 0)$, начинающийся в двухчастичной пороговой точке ветвления s_{\min} . При этом сохраняется и определение амплитуды в s -канале $F^s(s, 0)$ как граничного значения аналитической амплитуды $F(s, 0)$ на верхнем берегу разреза:

$$F^s(s, 0) = F(s + i\varepsilon, 0), \quad s > s_{\min}. \quad (3)$$

Аналогичным образом, остается в силе и соответствие (полюс амплитуды f) \leftrightarrow (связанное состояние), которое в случае F имеет вид (полюс амплитуды $F(s, t')$ при $0 < s < 4m^2$) \leftrightarrow

$$\leftrightarrow (\text{частица с квантовыми числами } s\text{-канала}). \quad (4)$$

В силу перекрестных соотношений (см. § 11.2) релятивистская амплитуда $F(s, t, u)$ описывает (в различных физических областях) амплитуды всех перекрестных реакций, т. е. во всех каналах. Поэтому характер предельного перехода (3) и соответствия (4) должны быть одинаковы в s -, t - и u -каналах.

В частности, в u -плоскости имеется правый разрез вдоль вещественной оси при $u_{\min} \leq u < \infty$, $\operatorname{Im} u = 0$, причем

$$F^u(u, s(u), 0) = F(s(u), 0, u + i\varepsilon), \quad (5)$$

— амплитуда в u -канале — будет также граничным значением функции $F(s, 0, u + ie)$ при приближении к этому разрезу сверху. Следовательно, амплитуда рассеяния вперед $F(s, 0)$ должна иметь в комплексной плоскости s не только правый разрез, соответствующий физической области s -канала, но и левый разрез, $-\infty < s \leq s(u_{\min}) = 0$, связанный с физической областью u -канала. Этот разрез начинается в точке ветвления $s(u_{\min}) = 0$, отвечающей порогу $u_{\min} = 4m^2$ двухчастичных реакций в u -канале (рис. 11). Согласно (5) физическая область u -канала должна быть отождествлена с нижним берегом левого разреза. Кроме того, если существуют стабильные частицы с массами m_k и m_l и квантовыми числами s - и u -каналов, то в точках $s_k = m_k^2$ и $s(u_l) = 4m^2 - m_l^2$ появятся полюсы. На рис. 11 указан также возможный путь аналитического продолжения амплитуды из u -канала в s -канал, которое обсуждалось в § 11.2 и существование которого доказано в аксиоматической теории поля [135].

Если мы обратимся к амплитуде $F(s', t, u(t))$ при фиксированном $s' = 0$, то с помощью аналогичного сочетания аналитических свойств нерелятивистской амплитуды и кроссинг-свойств $F(s, t, u)$ можно получить правдоподобную картину полюсов и «двухчастичных» разрезов $F(s', t, u)$ в плоскости комплексных t . Эта картина относится только к тем разрезам и полюсам, которым сопоставляются физические области и стабильные частицы, и оставляет в стороне вопрос, имеются ли другие разрезы и полюсы. В рассматриваемой модели (одинаковые массы, рассеяние вперед самых легких частиц) расположение разрезов в комплексной плоскости t имеет тот же вид, что и в плоскости s (рис. 11). Простота модели не позволяет судить о том, изменятся ли разрезы, если массы частиц различны, если рассеиваются не самые легкие частицы и возможно существование нестабильных частиц.

Унитарность и скачки амплитуды. В нерелятивистской теории аналитическое продолжение (1) амплитуды в нижнюю полуплоскость и вычисление скачка (2) амплитуды на разрезе осуществляется с помощью условия унитарности. Мы рассмотрим поэтому условие унитарности с помощью явных выражений для амплитуды рассеяния скалярных частиц и проиллюстрируем на этом примере связь между унитарностью и скачками амплитуды на разрезах в релятивистской теории.

В § 11.1 были получены выражения (11.18) и (11.27) для амплитуды рассеяния скалярных частиц. Эти выражения совпадают для импульсов, находящихся в физической области. В нефизической области импульсов они различны. Представление (11.18) не имеет смысла вне физической области, так как интеграл там расходится. Формула (11.27) содержит вместо T -произведения запаздывающий коммутатор полей. Вследствие принципа микропричинности этот коммутатор $[\Phi(x), \Phi(y)]$ обращается в нуль для пространственно-

подобных интервалов: $(x - y)^2 < 0$, что существенно для доказательства существования некоторой области аналитичности амплитуды (11.27) как функции s . По этим соображениям мы будем работать с выражением (11.27):

$$\langle 3, 4 | S - 1 | 1, 2 \rangle = - \int d^4x d^4y f_4^*(x) \vec{K}(x) \langle 3 | \theta(x-y) [\Phi(x), \Phi(y)] | 1 \rangle \overleftarrow{K}(y) f_2(y), \quad (6)$$

полагая для простоты частицы 2 и 4 одинаковыми.

Напишем условие унитарности:

$$(S^+ + 1) + (S - 1) = -(S - 1)(S^+ - 1),$$

и вычислим по (11.27) матричный элемент:

$$\langle 3, 4 | S^+ - 1 | 1, 2 \rangle = \langle 1, 2 | S - 1 | 3, 4 \rangle^* = - \int d^4x d^4y f_4^*(x) \vec{K}(x) \langle 3 | \theta(y-x) [\Phi(x), \Phi(y)] | 1 \rangle \overleftarrow{K}(y) f_2(y). \quad (7)$$

Тогда правая часть условия унитарности будет содержать только обычный коммутатор токов $J(x) = K(x)\Phi(x)$ и не включит сингулярных функций $\theta(x)$:

$$\langle 3, 4 | (S - 1)(S^+ - 1) | 1, 2 \rangle = \int d^4x d^4y f_4^*(x) \langle 3 | [J_4(x), J_2(y)] | 1 \rangle f_2(y). \quad (8)$$

Эта формула упрощается, если ввести относительные координаты ξ :

$$x = X + \frac{\xi}{2}, \quad y = X - \frac{\xi}{2}, \quad (9)$$

и произвести сдвиг на X в матричном элементе (8):

$$J(x) = e^{iPX} J(x - X) e^{-iPX}. \quad (10)$$

Интегрирование по X в (8) приводит к δ -функции, опуская которую, мы приходим к амплитуде:

$$\langle 3, 4 | T - T^+ | 1, 2 \rangle = i \int d^4\xi f_4^*\left(\frac{\xi}{2}\right) \langle 3 | \left[J_4\left(\frac{\xi}{2}\right), J_2\left(-\frac{\xi}{2}\right) \right] | 1 \rangle f_2\left(-\frac{\xi}{2}\right). \quad (11)$$

Разлагая в (11) правую часть по промежуточным состояниям, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle 3, 4 | T - T^+ | 1, 2 \rangle &= i 2\pi \sum_n \delta(p_1 + p_2 - p_n) \langle 3 | J_4(0) | n \rangle \langle n | J_2(0) | 1 \rangle - \\ &- i 2\pi \sum_{n'} \delta(p_1 - p_4 - p_{n'}) \langle 3 | J_2(0) | n' \rangle \langle n' | J_4(0) | 1 \rangle \equiv 2i (A_s - A_u). \end{aligned} \quad (12)$$

Квантовые числа состояний $|n\rangle$ те же, что и у системы частиц $1+2$, т. е. в s -канале. Если изоспин состояний $|\bar{1}, 2\rangle$ или $|3, 4\rangle$ вполне определен, то при учете только сильных взаимодействий все состояния $|n\rangle$ обладают теми же значениями изоспина, I_3 , гиперзаряда, четности и G-четности. Квантовые числа состояний $|n'\rangle$ совпадают с квантовыми числами в u -канале, т. е. системы $1+\bar{4}$. Таким образом, первый член справа $2iA_s$ в (12) определяется спектром частиц и состояний в s -канале, а второе слагаемое $2iA_u$ — спектром частиц и состояний в u -канале.

В силу положительности энергетического спектра A_s дает вклад в правую часть (12), начиная с порогового значения действия двухчастичной реакции $s_0(t')$, т. е. на физической части правого разреза $s_0 \leq s < \infty$ в комплексной плоскости s . Кроме того, при $m^2 < s < s_{\min}$ возможны δ -образные вклады в A_s , проистекающие от стабильных частиц в s -канале. В области u -канала, т. е. при $s(u_0) \geq s > -\infty$, A_s равно нулю. $A_s(s, t')$ называется абсорбтивной частью амплитуды в s -канале.

Абсорбтивная часть A_s в (12) легко преобразуется к каноническому виду (1.68) (для s -канала):

$$A_s = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \langle 3, 4 | T^+ | n \rangle \langle n | T | 1, 2 \rangle \delta^4(p_n - p_1 - p_2), \quad (13)$$

если принять во внимание связь (11.14) между амплитудой процесса $1+2 \rightarrow n$ и матричным элементом тока:

$$\langle n, \text{out} | J_2(0) | 1 \rangle = -(2\pi)^{3/2} \langle n | T | 1, 2 \rangle, \quad (14)$$

и отождествить $|n\rangle$ с $|n, \text{out}\rangle$.

Слагаемые суммы A_u в (12) отличны от нуля в точках $u_l = m_l^2 = (p_1 - p_4)^2$, соответствующих частицам массы m_l в u -канале, и выше двухчастичного $(1+\bar{4})$ -порога u_0 , т. е. A_u не равно нулю на отрезке $s(u_0) \geq s > -\infty$ комплексной плоскости s , но A_u исчезает в физической области s -канала. A_u есть абсорбтивная часть амплитуды в u -канале; она определяет правую часть условия унитарности в u -канале:

$$A_u = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{n'} \langle 3, \bar{2} | T^+ | n' \rangle \langle n' | T | 1, \bar{4} \rangle \delta^4(p_{n'} - p_1 - p_4). \quad (25)$$

В соотношении (12), написанном для s -канала, мы могли бы положить $A_u = 0$. Однако если в левой части (12) перейти от амплитуд s -канала $\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle$ и $\langle 1, 2 | T | 3, 4 \rangle^*$ к единой аналитической амплитуде $F(s, t, u)$, то (12) представит собой выражение для скачков аналитической амплитуды на отрезках вещественной оси s , отвечающих физическим областям s - и u -каналов.

Проследим основные этапы такого перехода. Введем временно обозначения

$$\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle = F^+(s, t'), \quad \langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle = F^-(s, t') \quad (16)$$

для амплитуд в s -канале, которые даются соответственно интегралами (6) и (7) после выделения из них с помощью (9) и (10) δ -функции, выражающей сохранение энергии-импульса. В подынтегральное выражение представления для F^+ будет входить запаздывающий коммутатор локальных полей

$$F^+(s, t') = \frac{i}{(2\pi)^6} \int d^4 \xi^l e^{i/2 (\rho_s + \rho_0) \xi} \times \\ \times \vec{K}\left(\frac{\xi}{2}\right) \langle 3 | \theta(\xi) \left[\Phi\left(\frac{\xi}{2}\right), \Phi\left(-\frac{\xi}{2}\right) \right] | 1 \rangle \vec{K}\left(-\frac{\xi}{2}\right), \quad (17)$$

т. е. интегрирование в (17) ведется только по внутренности светового конуса, обращенного в прошлое. Вследствие этого [149] интеграл (17) можно продолжить от положительной вещественной оси $s > s_0$ в

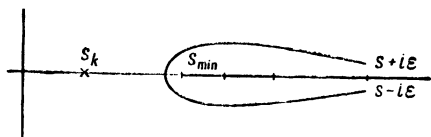


Рис. 12.

верхнюю полуплоскость $\text{Im } s > 0$. Точнее, значение F^+ на вещественной оси $s > s_0$ есть граничное значение функции $F^+(s + i\epsilon, t')$, $\epsilon \rightarrow 0$, при

приближении сверху. Это характеризует связь микропричинности (запаздывающий коммутатор в (17)) и аналитичности.

Представление для $F^-(s, t')$, вытекающее из (7), отличается от (17) заменой $\theta(\xi)$ на $\theta(-\xi)$, т. е. оно содержит опережающий коммутатор. В силу этого интегральное представление для $F^-(s, t')$ при $\text{Re } s > s_0$ будет определено в нижней полуплоскости $\text{Im } s < 0$, а амплитуда F^- в (16) есть граничное значение функции $F^-(s - i\epsilon, t')$, $\epsilon \rightarrow 0$, при подходе к вещественной оси снизу. (Доказательство в [149] ограничено малыми значениями $t > 0$). Таким образом, ни одна из функций $F^+(s, t')$ и $F^-(s, t')$ не может быть в отдельности отождествлена с аналитической амплитудой $F(s, t')$, которая должна быть определена во всей комплексной плоскости s . В верхней полуплоскости s над физической областью s -канала функции $F(s, t')$ и $F^+(s, t')$ совпадают, и необходимо найти аналитическое продолжение $F^+(s, t')$ в нижнюю полуплоскость.

Предположим, что аналитическое продолжение $F^+(s, t')$, по пути огибающему пороговую точку s_{min} (рис. 12), есть $F^-(s, t')$, так что

$$F(s, t') = \begin{cases} F^+(s, t'), & \text{Im } s \geq 0, \\ F^-(s, t'), & \text{Im } s < 0, \end{cases} \quad \text{Re } s \geq s_{\text{min}} - l. \quad (18)$$

Возможность такого продолжения предполагает существование некоторого конечного отрезка l вещественной оси между левым и правым разрезами, на котором $F(s, t')$ регулярно и $F^+(s, t') = F^-(s, t')$. Существование конечного отрезка l между разрезами может оказаться нетривиальным при различных массах и наличии нестабильных частиц; оно доказано в общем случае [101]. Аналитичность $F^-(s, t')$ и $F^+(s, t')$ на отрезке l может быть доказана для некоторой области значений t' в простейших случаях [149]. В общем случае (произвольные массы и спины) существование амплитуды $F(s, t')$ со свойствами (18) постулируется. Следовательно, разность

$$F(s + i\varepsilon, t') - F(s - i\varepsilon, t') = 2iA_s(s, t'), \quad s \geq s_0, \quad (19)$$

совпадающая согласно (16) с условием унитарности (12), есть скачок амплитуды $F(s, t')$ на правом разрезе. Чтобы перейти к левому разрезе, нужно воспользоваться аналитическим продолжением в область u -канала с помощью кроссинг-соотношений (см. § 11.2 и рис. 11, а также формулы (6) и (7)). Тогда при $s < s(u_0)$ мы получаем, что второй член справа в соотношении (12):

$$F(s - i\varepsilon, t') - F(s + i\varepsilon, t') = 2iA_u(s, t'), \quad s \leq s(u_0), \quad (20)$$

дает скачок $F(s, t')$ на левом разрезе.

Скачки амплитуды A_s и A_u (см. (13) и (15)) будут вещественны, если одинаковы не только частицы 2 и 4, но и частицы 1 и 3, т. е. в случае упругого рассеяния. Тогда (18) будет определять аналитическое продолжение на основе принципа симметрии Шварца

$$F(s^*, t') = F^*(s, t'), \quad (21)$$

т. е. $F(s, t)$ — вещественно-аналитическая функция.

В общем случае скачки амплитуды (13) и (15) вещественны только при наличии T -инвариантности. Действительно, для скалярных частиц

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \text{in} | S^+ | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \text{in} \rangle &= \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \text{in} | T^{-1} T S^+ T^{-1} T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \text{in} \rangle = \\ &= \eta_{1T} \eta_{2T} \eta_{3T}^* \eta_{4T}^* \langle -\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4, \text{out} | S | -\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2, \text{out} \rangle^* = \\ &= \eta_{1T} \eta_{2T} \eta_{3T}^* \eta_{4T}^* \langle -\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4, \text{in} | S | -\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2, \text{in} \rangle^*, \end{aligned}$$

где было учтено, что $T | \mathbf{p}_r, \text{in} \rangle = \eta_{rT} | -\mathbf{p}, \text{out} \rangle$. Поскольку T -преобразование антиунитарно, всегда можно обратить все η_{rT} в единицу, домножая одночастичные векторы состояния на фазовые множители. Перейдя в систему ц. и. и произведя поворот на 180° в плоскости векторов $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$ и $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, мы получим

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | S^+ - 1 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | S - 1 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle^*.$$

Отсюда следует, что выражения (13) и (15) для A_s и A_u вещественны. Если теория обладает РТ-инвариантностью, то этот же результат (21) может быть получен с помощью преобразования РТ.

Число состояний $|n\rangle$, участвующих в сумме (13) и определяющих абсорбтивную часть A_s , зависит от энергии s -канала или переменной s . По мере увеличения энергии становятся возможными все новые процессы $1 + 2 \rightarrow n$. При переходе через пороговые значения s_n абсорбтивная часть A_s приобретает новые слагаемые, так что s_n соответствуют точкам ветвления. В рассматриваемой модели частиц с одинаковой массой пороговые точки ветвления могут находиться при $s_n = 4m^2, 9m^2, 16m^2, \dots$, не считая порогов, связанных с рождением частиц другой массы. От каждой такой точки ветвления при $s = s_n$ мы должны провести разрез вдоль положительной вещественной оси s до ∞ . Аналогично, от каждой точки ветвления, связанной с порогом в u -канале, нужно провести разрез вдоль отрицательной вещественной оси s до $-\infty$. На отрезке вещественной оси s между пороговыми значениями s_0 и $s(u_0)$ для двухчастичных состояний величины A_s и A_u , согласно (18), равны нулю, за исключением точек, где дают вклад одночастичные состояния.

Из вида δ -функции в (13) явствует, что в s -канале одночастичное состояние $|n_a\rangle$ дает вклад, если имеется частица с массой $m_a^2 < s_0$, спином 0 и квантовыми числами s -канала. Вклад этой частицы в A_s равен

$$A_s^{(1)} = \frac{\pi}{(2\pi)^6} \delta(s - m_a^2) g_{a34} g_{a12}^* \quad (22)$$

Аналогичным образом, частица с массой $m_b^2 < 4m^2$ и квантовыми числами u -канала дает вклад в A_u , равный

$$A_u^{(1)} = \frac{\pi}{(2\pi)^6} \delta(u - m_b^2) g_{b14} g_{b23}^*$$

Константа g_{abc} описывает эффективную связь бесспиновых частиц a, b, c :

$$g_{abc} = -(2\pi)^3 \langle b | J_c(0) | a \rangle, \quad (23)$$

причем импульсы связаны соотношением $p_a = p_b + p_c$. Множитель $(2\pi)^3$ в (23) введен с целью сохранения соответствия с теорией возмущений, основанной на лагранжевом формализме. Пусть лагранжиан взаимодействия скалярных нейтральных полей $\varphi_i (i = a, b, c)$ массы m имеет вид $\mathcal{L}_I = g_{abc} \varphi_a \varphi_b \varphi_c$, а ток определен по (11.10) или $J_c(x) = K(x) \varphi_c(x) = -(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \varphi_c(x)$. Тогда в низшем приближении выполняется (23).

§ 12.2. Максимальная аналитичность

На простейшей модели рассеяния вперед скалярных частиц одинаковой массы была выяснена предполагаемая связь аналитичности с причинностью и роль унитарности в определении скачков аналитической амплитуды. В этом параграфе мы обратимся к аналитическим свойствам амплитуды в общем случае.

В предыдущем параграфе мы пришли к особенностям релятивистской амплитуды, отправляясь от аналитических свойств нерелятивистской амплитуды и соотношений перекрестной симметрии. Эти особенности всецело характеризовались спектром состояний физической системы. Существование таких особенностей (полюсы и разрезы на вещественной оси) было доказано для простейших случаев [149].

Предположим, что в случае произвольного соотношения масс и при произвольных спинах частиц аналитические свойства амплитуды также определяются только спектром физических состояний. Более точно, мы будем считать, что выполняется принцип максимальной аналитичности [150—152].

«Амплитуда есть аналитическая функция, обладающая лишь теми особенностями, которые необходимы для выполнения условий унитарности (по всем каналам и для всей совокупности амплитуд)».

Этот принцип содержит некоторую долю неопределенности, если само существование частиц есть результат общей «самосогласованности», и появляется в итоге рассмотрения, включающего использование условия унитарности. Если число и тип элементарных частиц фиксированы, то принцип максимальной аналитичности практически эквивалентен предположению, что аналитическая амплитуда обладает только особенностями, свойственными всем интегралам Фейнмана. Именно, анализ интегралов Фейнмана позволил уверенно систематизировать особенности амплитуды [151, 152].

Перечислим сначала дополнительно черты амплитуды $F(s, t, u)$ для рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ бесспиновых частиц, возникающие при переходе от простейшей модели § 12.1 к реальному случаю. Мы рассматриваем теперь рассеяние частиц различной массы на произвольный угол. Частицы 1, 2, 3, 4 называют внешними, понимая под внутренними те частицы a, b, c, \dots , которые входят только в условия унитарности (всех перекрестных каналов).

В отличие от простейшей модели § 12.1, в общем случае граница физической области не совпадает с началом разреза, или с первой двухчастичной пороговой точкой ветвления. Пороговые точки ветвления всегда твердо фиксированы массами участвующих во взаимодействии частиц (внешних и внутренних); эти точки неподвижны — их положение не зависит от переменных s, t, u . Первая пороговая точка в s -канале $s = (m + M)^2$ соответствует двухчастичному состоянию с внутренними квантовыми числами s -канала (т. е. с кван-

товыми числами системы частиц $1 + 2$), обладающему наименьшей массой. Частицы с массами m и M могут быть как внешними, так и внутренними. Последовательность порогов $s_n = m_n^2$ состоит из наименьших масс s -канальных многочастичных состояний $|n\rangle$, расположенных в порядке возрастания.

Физическая область была изучена в § 7.2. Граница физической области зависит от масс только внешних частиц (см. (7.22)). Далее, если одна из переменных s , t и u фиксирована (например, $t = t'$), то нижние границы физической области для двух других переменных $s_0(t')$ и $u_0(t')$ будут отличаться от абсолютных нижних границ физической области s_{\min} и u_{\min} . Это обстоятельство видно непосредственно на плоскости Мандельштама (см. рис. 4 и 15, где линия $t = t'$ обозначена пунктиром). Ее пересечение границами физических областей определяет точки s_0 и u_0 . Таким образом, физическая область будет совпадать с разрезом, начинающимся от первой пороговой точки ветвления, только при рассеянии вперед в идеализированных условиях модели § 12.1; в общем случае на разрезе имеется нефизический участок (нормальный нефизический разрез) от первой точки ветвления до границы физической области. Нефизический разрез, связанный с отличием $s_0(t')$ и $u_0(t')$ от абсолютных нижних границ физической области, может иметь место в любой реакции, и мы не будем его более обсуждать.

В реакции $N + \bar{N} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ начало физической области s -канала есть $4m_N^2$, но пороговые точки ветвления на оси $\text{Re } s > 0$ будут расположены при $s_n = (2nm_\pi)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Нормальный нефизический разрез будет занимать отрезок $4m_\pi^2 \leq s \leq 4m_N^2$. Мы предполагали, что характер этой реакции определяют только внешние частицы N , π . Если мы будем учитывать также взаимодействие с K -мезонами, то на оси $\text{Re } s > 0$ следует разместить и K -мезонные точки ветвления $s_{n'} = (2n'm_K)^2$, $n' = 1, 2, \dots$, и комбинированные точки $4(m_K + m_\pi)^2, \dots$ В t - и u -каналах этой реакции низшие точки ветвления находятся при $s = (m_\pi + m_N)^2$ и совпадают с абсолютной нижней границей физической области.

В случае рассеяния нуклонов $N + N \rightarrow N + N$ в t -канале имеется также обширный нефизический разрез, вызванный тем, что массы внешних частиц велики по сравнению с массами внутренних частиц. Внутренними частицами, которые существенны для взаимодействия нуклонов, являются пионы, K -мезоны и резонансы декуплета Δ . Наиболее легкими среди них являются пионы, масса которых и определяет начало разреза $t = (2m_\pi)^2$.

Изучение интегралов Фейнмана и условия унитарности показывает, что, кроме особых точек двух рассмотренных ранее типов (полюсы и пороговые точки ветвления), у амплитуды $F(s, t, u)$ могут быть еще особенности третьего типа — особенности Ландау [154]. Особая точка этого типа s_a (аномальная точка ветвления) лежит ниже первого порога; поэтому s_a иногда называют аномальным поро-

гом амплитуды $F(s, t, u)$. (Не следует смешивать порог s_a с аномальными порогами, введенными в § 7.5.) Положение аномального порога s_a может зависеть от двух инвариантных переменных. Аномальная точка ветвления может возникнуть в том случае, когда между массами внешней 1 и взаимодействующих с ней внутренних частиц a, b имеется соотношение $m_1^2 > (m_a + m_b)^2$; при этом, как обычно, наличие тройного взаимодействия $1 \rightarrow a + b$ предполагает сохранение в нем внутренних квантовых чисел. Наличие аномального порога может существенно влиять на околопороговые явления. Можно думать, что его влияние вдали от нормального порога не существенно. Во всяком случае, в дальнейшем будет предполагаться, что амплитуда $F(s, t, u)$ не имеет особенностей Ландау.

Таким образом, мы постулируем, что амплитуда $F(s, t', u(s))$ при заданном t' , находящемся в физической области, аналитична во всей комплексной плоскости s с левым и правым разрезами, положение которых определяется нормальными порогами в s - и u -каналах (рис. 11). Если, кроме того, в s - и u -каналах существуют стабильные частицы, то сопоставляемые им полюсы должны лежать на отрезке вещественной оси s между разрезами. Ввиду равноправия переменных s, t, u аналогичную структуру следует постулировать и для комплексных плоскостей t и u .

В случае рассеяния частиц со спином необходимо рассматривать спинорные амплитуды (§§ 7.5. и 11.2) или спиральные амплитуды (§ 7.4). Спинорные амплитуды \mathcal{M} могут быть разложены по инвариантным амплитудам $F_l(s, t, u)$, свободным от кинематических особенностей. Именно, инвариантные амплитуды $F_l(s, t, u)$ наделяются аналитическими свойствами того же характера, что и амплитуды $F(s, t, u)$ в случае скалярных частиц. При разумном выборе ковариантов X_l инвариантные амплитуды F_l будут иметь простое поведение при отражениях (6.2) и кроссинг-преобразованиях (см. (11.35), (11.36)). Однако условие для скачка амплитуды F_l на разрезе, которое вытекает из условия унитарности, имеет, вообще говоря, сложный вид и может содержать другие инвариантные амплитуды $F_{l'}$. Кроме того, функции $F_l(s, t', u(s))$ будут вещественно-аналитическими только при определенном выборе ковариантов X_l [107, 108].

В каждом из перекрестных каналов $r = s, t, u$ инвариантная амплитуда F_l может быть представлена в виде

$$F_l(s, t, u) = D_{rl}(s, t, u) + iA_{rl}(s, t, u),$$

где абсорбтивная часть A_{rl} определяет скачок F_l на правом разрезе в комплексной плоскости r . Если функция F_l вещественно-аналитична, то A_{rl} равно мнимой части амплитуды F_l ; в этом случае дисперсионная часть D_{rl} амплитуды F_l в r -канале совпадает с вещественной частью амплитуды. Следовательно, при вещественно-аналитических инвариантных амплитудах F_l разложение абсорбтивной

части спинорной амплитуды \mathcal{A} в s -канале по ковариантам X_l будет иметь вид

$$\mathcal{A} = \sum_l A_{sl} X_l = \sum_l \text{Im } F_l \cdot X_l. \quad (24)$$

Выбор ковариантов X_l , приводящих к разложению (24), может быть сделан изучением левой части условия унитарности (1.68) для реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} i (\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle - \langle 1, 2 | T | 3, 4 \rangle^*) = \\ & = \frac{1}{2} i \bar{u}^{r_3} \bar{u}^{r_4} (\mathcal{M}_{r_3 r_4}^{r_1 r_2}(p_1, \dots, p_4) - \overline{\mathcal{M}}_{r_3 r_4}^{r_1 r_2}(p_1, \dots, p_4)) u_{r_1} u_{r_2}. \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{M}_{r_3 r_4}^{r_1 r_2} = \mathcal{M}_{r_3 r_4}^{r_1 r_2}$. Сопряженная матрица $\overline{\mathcal{M}}$ получается из матрицы \mathcal{M}^+ умножением на матрицы $\bar{g}(i)$ (см. § 5.1) по каждому индексу. В частности, для дираковской матрицы \mathcal{M}_α^β будет $\overline{\mathcal{M}} = \gamma_0 \mathcal{M}^+ \gamma_0$.

Разложим спинорные амплитуды по ковариантам с помощью (7.77) и равенства

$$\overline{\mathcal{M}}^T(p_1, \dots, p_4) = \sum_l F_l(s, t, u) \overline{X}_l^T(p_1, \dots, p_4).$$

Разложение (24) будет следствием формулы (25), если коварианты удовлетворяют условию

$$X(p_1, p_2, p_3, p_4) = \overline{X}^T(p_3, p_4, p_1, p_2). \quad (26)$$

Такие коварианты связаны отражением РТ. Учет отражений прост, если для s -канальной амплитуды пользоваться разложением по t -канальным инвариантам $X_l(K, Q)$ (см. §§ 7.5 и 11.2).

Условие унитарности (1.68), будучи переписанным для спинорных амплитуд (25), приводит к следующему выражению для абсорбтивной части в s -канале (24):

$$\begin{aligned} & \sum_l A_{sl}(s, t, u) X_l(p_1, p_2, p_3, p_4) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_n \overline{\mathcal{M}}(n | p_3, p_4) \mathcal{M}(p_1, p_2 | n) \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (27) \end{aligned}$$

где величина $\mathcal{M}(p_1, p_2 | n) u(p_1) u(p_2) = \langle n | T | p_1, p_2 \rangle$, а также $\bar{u}(p_3) \bar{u}(p_4) \overline{\mathcal{M}}(n | p_3, p_4) = \langle n | T | p_3, p_4 \rangle^*$ зависят от промежуточных состояний s -канала $|n\rangle$. Суммирование в (27) ведется по полной системе состояний $|n\rangle$, т. е. как по состояниям с разным числом частиц, так и по всем возможным состояниям с заданным числом частиц. В то время как условие унитарности выполняется только в физической области, формула (27) определяет абсорбтивную часть также и на вещественной оси s ниже первого порога s -канала. В этой

области $0 < s < s_{\min}$ могут находиться массы стабильных частиц $s = m_a^2$. Соответствующий член в (27) есть

$$\overline{\mathcal{M}}(a | p_3, p_4) \mathcal{M}(p_1, p_2 | a) \delta(s - m_a^2). \quad (28)$$

Одночастичное состояние (28) обладает следующими свойствами.

1. Правила отбора. Величины $\overline{\mathcal{M}}(p_1, p_2 | a)$ и $\overline{\mathcal{M}}(a | p_3, p_4)$ в (28) получены из матричных элементов («вершинных частей») переходов $1 + 2 \rightarrow a$ и $a \rightarrow 3 + 4$ в результате продолжения по массе m_a^2 из физической области $m_a^2 > s_{\min}$. Поэтому эти величины удовлетворяют всем обычным правилам отбора (кроме закона сохранения энергии).

2. Факторизуемость. Коэффициент при $\delta(s - m_a^2)$ в (28) состоит из двух множителей — вершинных частей, относящихся к взаимодействиям $a \leftrightarrow 1 + 2$ и $a \leftrightarrow 3 + 4$ внутренней частицы a с начальными и конечными частицами.

Если S -матрица обладает изоспиновой симметрией или SU_3 -инвариантна, то инвариантные амплитуды F_l должны быть разложены по изоспиновым амплитудам или SU_3 -амплитудам с помощью методов, рассмотренных в § 8.3 и 9.3.

§ 12.3. Дисперсионные соотношения

Дисперсионные соотношения для амплитуды $F_s(s, t, u)$ по одной из переменных s, t, u при фиксированной другой переменной получаются применением формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z' - z}$$

с выбором контура C , охватывающего разрез и превращающегося в окружность на бесконечности (рис. 13). Этот контур включает также малые окружности вокруг полюсов. Если амплитуда $F(s, t, u)$ достаточно быстро убывает, когда одна из переменных велика:

$$F(s, t_1, u) \sim s^{-a}, \quad a > 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (29)$$

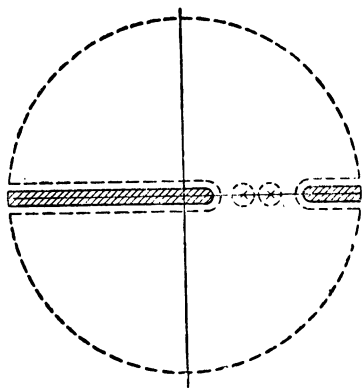


Рис. 13.

то в качестве функции $f(s)$ можно выбрать амплитуду $F(s)$.

Таким образом, если особенности амплитуды представляют собой разрез, определяемые нормальными порогами, и полюсы, сопоставляемые стабильным частицам (рис. 13), а сама амплитуда убывает с ростом энергии (в физической области) согласно (29), то амплитуда

рассеяния скалярных частиц $F(s, t_1, u)$ удовлетворяет следующему дисперсионному соотношению¹⁾ по s при фиксированном $t = t_1 < 0$ (полюсные члены обычно не выписываются):

$$F(s, t_1, u) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} \frac{A_s(s', t_1, u(s')) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{A_u(s(u'), t_1, u') du'}{u' - u} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} \frac{A_s(s', t_1, u(s')) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s(u_{\min})} \frac{A_u(s', t_1, u(s')) ds'}{s' - s}, \quad (30)$$

где скачки на разрезах, или абсорбтивные части A_s, A_u , определены в § 12.1. Аналогичным образом, если фиксировано $s = s_1$ и $F(s_1, t, u) \sim t^{-a}$ при $|t| \rightarrow \infty$, то выполняется дисперсионное соотношение по t при фиксированном s :

$$F(s_1, t, u(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} \frac{A_t(s_1, t', u(t')) dt'}{t' - t} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{A_u(s_1, t(u'), u') du'}{u' - u}. \quad (31)$$

Для симметрии относительно s, t и u выпишем также дисперсионное соотношение при фиксированном $u = u_1$:

$$F(s, t, u_1) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} \frac{A_s(s', t(s'), u_1) ds'}{s' - s} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} \frac{A_t(s(t'), t', u_1) dt'}{t' - t}, \quad (32)$$

которое легко выводится, коль скоро функция $F(s, t, u)$ регулярна в комплексной плоскости s (или t) с соответствующими разрезами по вещественной оси.

В этих формулах $A_t(s, t, u)$ есть абсорбтивная часть в t -канале, или скачок амплитуды $F(s, t, u)$ на разрезе при $t > t_{\min}$ в комплексной плоскости t при фиксированном s или u :

$$A_t(s_1, t, u(s_1)) = F(s_1, t + i\varepsilon, u(s_1)) - F(s_1, t - i\varepsilon, u(s_1)). \quad (33)$$

$\varepsilon \rightarrow +0$

¹⁾ В квантовой теории поля дисперсионные соотношения были впервые рассмотрены Гелл-Манном, Гольдбергером и Тиррингом [155, 156].

Заметим, что если амплитуда убывает в соответствии с (29) вдоль действительной оси, то она будет удовлетворять условию (29) и в случае, когда $|s| \rightarrow \infty$ по любому направлению в комплексной плоскости (при том значении $t = t_1$, для которого пишется дисперсионное соотношение (50)). Условия типа (29) по t или u должны выполняться в случае, когда нас интересуют дисперсионные соотношения по t или u .

Из общих требований квантовой теории поля вытекает [149], что рост амплитуды $F(s, t, u)$ при $s \rightarrow \infty$ ограничен полиномом по s :

$$|F(s, t_1, u)| < s^N(t_1), \quad s \rightarrow \infty.$$

При $t_1 < 0$ асимптотика по s ограничена теоремой Фруассара (см. § 13.2).

Экспериментально установлено, что полное сечение σ_{tot} при больших энергиях очень близко к константе, что в силу $\sigma_{\text{tot}} \sim \sim (1/s) \text{Im}F(s, 0, u)$ означает $N(0) \sim 1$.

Если условие (29) не выполняется, то дисперсионное соотношение пишется, как говорят, с вычитанием, или для функции $F(s)/((s - s_1)(s - s_2) \dots)$, степень роста которой уменьшена введением множителей $(s - s_i)^{-1}$ до требуемой по (29). Число таких множителей называется числом вычитаний. При одном вычитании вместо (25) мы получаем соотношение

$$F(s, t_1, u) = F(s_1, t_1, u(t_1, s)) + \frac{s - s_1}{\pi} \int_{s_{\text{min}}}^{\infty} \frac{A_s(s', t_1) ds'}{(s' - s_1)(s' - s)} + \frac{s - s_1}{\pi} \int_{-\infty}^{s(u_{\text{min}})} \frac{A_u(s', t_1) ds'}{(s' - s_1)(s' - s)}, \quad (34)$$

которое содержит дополнительную функцию — зависящее от t_1 значение амплитуды в точке s_1 . Как и ранее, мы не выписываем полюсных членов в (34).

Дисперсионное соотношение (30) по переменной s при фиксированном t предполагается справедливым не только для $t = t_1$, лежащего в физической области s -канала, но и для более широкой области; абсорбтивные части A_s и A_u аналитически продолжаются по t от $t < 0$ к $t > 0$ и затем в область t -канала. На возможность такого продолжения указывают кроссинг-соотношения. Это замечание относится, конечно, и к дисперсионным соотношениям по другим переменным. Но физический смысл абсорбтивные части имеют только на физической части разреза в соответствующем канале, где они определяются условием унитарности (см. (13) и (15)) и могут быть равны мнимой части амплитуды.

Дисперсионные соотношения позволяют в принципе определить вещественную часть амплитуды по мнимой (в физической области), если отсутствует нефизический разрез или на нем известна абсорбтивная часть из других соображений. При сравнении дисперсионных

соотношений с опытом поэтому удобны такие процессы, в которых отсутствует нефизическая часть разреза. Как мы видели в §§ 12.1 и 12.2, для этого необходимо рассматривать упругое рассеяние вперед легчайших частиц. В случае упругого рассеяния вперед появляется добавочное обстоятельство, упрощающее экспериментальную проверку дисперсионных соотношений, а именно, в этом случае мнимая часть амплитуды выражается с помощью оптической теоремы (7.53) через полное сечение, которое может быть заимствовано из опыта.

Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед $\pi + N \rightarrow \pi + N$ были детально сравнены с опытом, что подтвердило справедливость их для этого процесса. Для пион-нуклонного рассеяния они подробно изложены в ряде книг [1, 2, 11, 149], и мы не будем обсуждать этот хорошо изученный вопрос.

Дисперсионные соотношения (30)—(32) были написаны для простейшего случая скалярных внешних частиц без учета изоспиновой или SU_3 -симметрии. В изоспиново-симметричной теории амплитуда перехода $\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle$ должна быть разложена на изоспиновые амплитуды $T^I(s, t, u)$ (см. §§ 8.3 и 11.3), для каждой из которых можно написать дисперсионные соотношения. Динамика процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ будет определяться только значением полного изоспина, но не его проекции. Пороговые точки при этом могут зависеть от величины изоспина. Так как для каждого из перекрестных каналов можно (и удобно) писать свое разложение по изоспиновым амплитудам, а область интегрирования в дисперсионных соотношениях покрывает два канала, то в дисперсионные соотношения войдут кроссинг-матрицы. Аналогично, в SU_3 -инвариантной теории амплитуда должна быть разложена по SU_3 -амплитудам (см. §§ 9.3 и 11.3) и дисперсионные соотношения следует постулировать для этих SU_3 -амплитуд; в приближении SU_3 -симметрии динамика процесса характеризуется этими амплитудами. Дисперсионные соотношения для SU_3 -амплитуд будут содержать кроссинг-матрицы для группы SU_3 .

Если внешние частицы имеют спин, то от матричного элемента $\langle 3, 4 | T | 1, 2 \rangle$ необходимо сначала перейти по (7.70) к спинорной амплитуде, которая затем должна быть разложена на инвариантные амплитуды F_I (см. § 7.5) с учетом перекрестной симметрии (см. § 11.2) и требования вещественной аналитичности F_I (см. § 11.3). Именно в этих амплитудах F_I сосредоточена информация о динамике процесса; они могут обладать простыми аналитическими свойствами, и для них пишутся дисперсионные соотношения.

Полюсные члены и стабильные частицы. Выпишем для примера полюсный член в дисперсионном соотношении (30). Для этого мы подставим в первый интеграл правой части (30) абсорбтивную часть $A_s^{(1)}$, которая соответствует внутренней стабильной частице a с массой $s = m_a^2$, лежащей ниже физического порога s -канала. В случае рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, когда внешние частицы 1, 2, 3, 4 и

внутренняя частица a имеют спин 0, мы находим из (22) и (30)

$$F^{(1)}(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{g_{a34} g_{a12}}{m_a^2 - s}. \quad (35)$$

Это слагаемое описывает полюс амплитуды F в s -канале с вычетом, состоящим из двух множителей, которые относятся к взаимодействию внутренней частицы a с начальными и конечными частицами в отдельности. В случае упругого рассеяния $g_{a34} = g_{a12}$ и вычет всегда положителен.

Если внешние и внутренние частицы обладают изоспином, то согласно правилам отбора (см. конец § 12.2) полюс $s = m_a^2$ будет присутствовать только в той изоспиновой амплитуде, которая отвечает изоспину внутренней частицы I_a . Аналогичным образом, если, например, частица a принадлежит декуплету (и существует SU_3 -симметрия), то полюс $s = m_a^2$ будет содержаться лишь в декуплетной амплитуде.

Если внутренняя частица имеет спин J_a , то вследствие сохранения инварианта группы Пуанкаре ω^2 полюс $s = m_a^2$ войдет в парциальную амплитуду $a_l(s)$ с $l = J_a$. Полагая, что амплитуда $a_l(s)$ может быть аналитически продолжена в нефизическую область вещественных s , лежащих ниже первого порога (см. ниже (53), (54)), мы можем написать разложение (7.58) для $F(s, z_s)$ в этой области:

$$F(s, z_s) = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(z_s).$$

Здесь B — нормировочный множитель, $z_s = 1 + 2t/(s - 4m^2)$ (см. § 7.2); при этом физическая область по z_s будет соответствовать нефизическим значениям $t > 0$. Из этого разложения явствует, что если парциальная амплитуда $a_l(s)$ имеет полюс $1/(m_a^2 - s)$, то вычет $F(s, z_s)$ в этом полюсе содержит множитель $P_l(z_s(m_a^2))$. Факторизуемость вычета в полюсе следует непосредственно из выражений (13) и (28) для абсорбтивных частей. Это свойство имеет весьма общий характер, так как оно опирается только на возможность определения абсорбтивных частей (13) и (28), т. е. на возможность своего рода продолжения условия унитарности в нефизическую область вещественных s ниже первого порога.

В силу перекрестной симметрии выражение (35) сохраняет силу в t - и u -каналах. В t -канале переменная s имеет смысл передачи импульса $s = -(1 - z_t)(t - 4m^2)/2$ для одинаковых масс $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ ($z_t = \cos \theta_t$, где θ_t — угол рассеяния в t -канале (см. § 7.2)). Поэтому полюсный член (35) в t -канале можно преобразовать к виду

$$F^{(1)}(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{2g_{a34} g_{a12}}{t - 4m^2} \frac{1}{z_t(m_a^2) - z_t}, \quad (36)$$

где $z_t(m_a^2) = 1 + 2m_a^2/(t - 4m^2)$ соответствует полюсу $s = m_a^2$. В физической области t -канала знаменатель выражения (36) не обращается в нуль, ибо $z_t(m_a^2) > 1$. Амплитуда (36) максимальна при рассеянии вперед в t -канале, когда $s = 0$ и $F^{(1)}(0, t) = g_{a34} g_{a12} m_a^{-2} / (2\pi)^6$.

В полюсном приближении к амплитуде F предполагается, что полюсные члены типа (35) могут описать амплитуду в физической области, прилегающей к полюсу. Полюсное приближение соответствует борновскому приближению для каналов, перекрестных тому, в котором имеется полюс. Так, при полюсе в s -канале $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

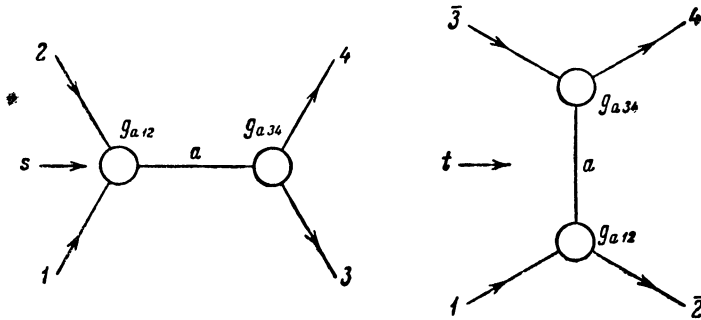


Рис. 14.

амплитуда (35) есть борновское приближение для t -канала $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$, которое соответствует обмену частицей a (т. е. обменному члену юкавовского типа). Графически полюсные приближения (35), (36) изображены на рис. 14.

Представление Мандельштама. Двойное дисперсионное соотношение, или представление Мандельштама, представляет собой гипотезу об аналитических свойствах амплитуды $F(s, t, u)$ как функции двух независимых переменных, например s и t . Очевидно, это есть одновременно гипотеза об аналитических свойствах абсорбтивных частей амплитуды (о свойствах $A_s(s, t)$ как функции t и т. д.). Представление Мандельштама было первоначально найдено изучением условия унитарности в четвертом порядке теории возмущений [102]. Представление Мандельштама для амплитуды рассеяния скалярных частиц $F(s, t, u)$ имеет вид

$$F(s, t, u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{s_{\min}}^{\infty} ds' \int_{t_{\min}}^{\infty} dt' \frac{\rho_{st}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{t_{\min}}^{\infty} dt' \int_{u_{\min}}^{\infty} du' \frac{\rho_{tu}(t', u')}{(t' - t)(u' - u)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{u_{\min}}^{\infty} du' \int_{s_{\min}}^{\infty} ds' \frac{\rho_{us}(u', s)}{(u' - u)(s' - s)}, \quad (37)$$

где полюсные члены не выписаны и $s' + t' + u' = \Sigma m_i^2$ (m_i — массы внешних частиц). Здесь s_{\min} , t_{\min} и u_{\min} — первые двухчастичные состояния с квантовыми числами соответствующих каналов; они определяются легчайшими массами внутренних и внешних частиц, участвующих во взаимодействии, которые для модели § 12.1 равны $4m^2$. Представление (37) кроссинг-симметрично.

Функции ρ_{st}, \dots , входящие в представление (37), называются спектральными. Они вещественны. Именно свойства спектральных функций определяют поведение амплитуды $F(s, t, u)$. Спектральные функции могут быть найдены в принципе из соотношения унитарности — во всяком случае, по теории возмущений. В представлении (37) предполагается, что спектральные функции убывают асимптотически достаточно быстро, так что интегралы в (37) имеют смысл.

О возможной области определения спектральных функций можно судить косвенно по пределам интегрирования в (37). Каждая из

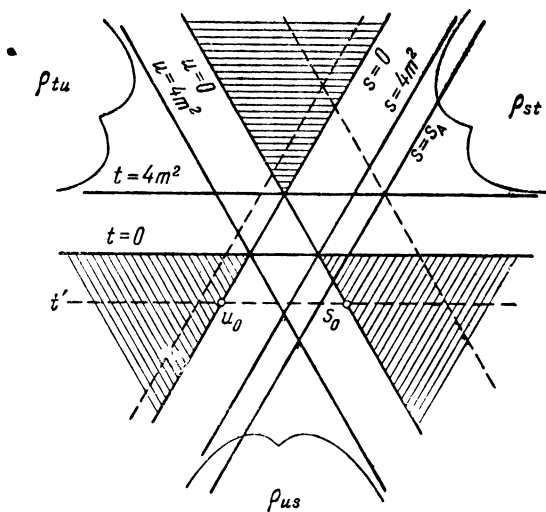


Рис. 15.

переменных в (37) изменяется вдоль физического берега правого разреза, т. е. с учетом правила $s \rightarrow s + i\epsilon$ и т. д. Поэтому, например, спектральная функция ρ_{st} может быть отлична от нуля в области $s > 4m^2$, $t > 4m^2$, которая является нефизической. Более точно нижняя граница области существования спектральных функций может быть вычислена из условия унитарности с помощью теории возмущений. Для простейшей модели частиц одинаковой массы (§ 11.2) эта область изображена на рис. 15.

Если для амплитуды $F(s, t, u)$ выполняется представление Мандельштама (37), то для абсорбтивных частей имеют место одно-

кратные дисперсионные соотношения. Например, мы получаем для абсорбтивной части A_s физической области s -канала

$$\begin{aligned} A_s(s, t, u) &= \frac{1}{2i} (F(s + i\varepsilon, t) - F(s - i\varepsilon, t)) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} dt' \frac{\rho_{st}(s, t')}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{u_{\min}}^{\infty} du' \frac{\rho_{us}(u', s)}{u' - u} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\min}^{\infty} dt' \frac{\rho_{st}(s, t')}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-s} dt' \frac{\rho_{us}(4m^2 - s - t', s)}{t' - t}. \quad (38) \end{aligned}$$

Эта формула позволяет аналитически продолжить A_s как функцию t или u . Представление (38) определяет A_s как аналитическую функцию в комплексной плоскости t с разрезами от границы ρ_{st} до $t = \infty$ и от $t = -\infty$ до границы спектральной функции ρ_{us} . На рис. 15 изображена линия $s = s_A > 0$, вдоль которой интегрируется в (38). Мы воспользовались при выводе (38) известным соотношением $1/(x - i\varepsilon) = P(1/x) + i\pi\delta(x)$. Аналогичным образом можно найти представления для A_t и A_u . С помощью представления Мандельштама можно получить дисперсионное соотношение для парциальных амплитуд $a_l(s)$ как функций s (см. § 12.4).

Если спектральные функции убывают медленно, то представление Мандельштама (а также и дисперсионное соотношение (38)) следует писать с вычитаниями. При этом предполагается, что число вычитаний должно быть конечно.

§ 12.4. Парциальные амплитуды и дисперсионное соотношение при фиксированной энергии. Формула Грибова — Фруассара

Будем по-прежнему для простоты рассматривать упругое рассеяние скалярных частиц одинаковой массы m . Разложим инвариантную амплитуду $F(s, t, u) = F(s, z)$ по парциальным волнам $a_l(s)$ в s -канале ¹⁾:

$$\begin{aligned} F(s, z) &= B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(z) = \langle 3,4 | T | 1,2 \rangle, \\ a_l(s) &= \frac{1}{2B} \int_{-1}^1 dz F(s, z) P_l(z), \quad B = \frac{8}{(2\pi)^5}, \end{aligned} \quad (39)$$

¹⁾ Коэффициент B приводит к правильному виду условия унитарности (41).

и обратимся к изучению свойств $a_l(s)$, связанных с существованием дисперсионного соотношения для $F(s, z)$ при фиксированном s . Пусть масса внутренних частиц $m_i > m$.

Предположим сначала, что это дисперсионное соотношение можно написать без вычитаний и для $s_1 > 0$:

$$F(s_1, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} \frac{A_t(s_1, t', u(t'))}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{A_u(s_1, t(u'), u')}{u' - u} du'; \quad (40)$$

$$t_{\min} = u_{\min} = 4m^2,$$

где A_t и A_u — абсорбтивные части соответственно в t и u -каналах. Перейдем к переменной

$$z = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2} = -1 - \frac{2u}{s - 4m^2} \quad (41)$$

(в физической области $z = \cos \theta_s$). Дисперсионное соотношение (40) запишется в виде

$$F(s, z) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{dz' A_t(s, z')}{z' - z} + \frac{1}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} \frac{dz' A_u(s, z')}{z' - z}, \quad (42)$$

$$z_0 = \frac{s + 4m^2}{s - 4m^2} > 1.$$

Выделим теперь из амплитуды (42) парциальную волну $a_l(s)$ по (39), используя при этом формулу

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(z')}{z - z'} dz' = Q_l(z), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (43)$$

связывающую $P_l(z)$ с функцией Лежандра второго рода $Q_l(z)$ (для всех z , кроме лежащих на отрезке $-1 < z < 1$). Мы получаем, в силу $P_l(-z) = (-1)^l P_l(z)$,

$$a_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} (A_t(s, z') + (-1)^l A_u(s, z')) Q_l(z') dz', \quad (44)$$

$$A_u(s, z) \equiv A_u(s, u(-z)), \quad u(x) = -\frac{1}{2}(s - 4m^2)(1 + x).$$

Формула (44) для $a_l(z)$ служит исходной для анализа аналитических свойств парциальных амплитуд. Аналитичность амплитуды $F(s, z)$ по z позволила, таким образом, заменить $F(s, z)$ на абсорбтивные части A_t и A_u и одновременно перейти от функций $P_l(z)$ к функ-

циям $Q_l(z)$ с интегрированием по нефизическим (для s -канала) значениям z .

Покажем теперь, что, исходя из (44) и свойств Q_l , можно определить разумным образом понятие парциальной амплитуды при комплексных l . Функция $Q_l(z)$ обладает тем важным свойством, что она аналитична по l в правой полуплоскости, убывая экспоненциально при больших $\text{Re } l$:

$$Q_l(z) \approx \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi}, \quad \xi = \text{arcch } z, \quad \text{Re } l > 0, \quad |l| \rightarrow \infty. \quad (45)$$

При уходе на бесконечность вдоль линии, параллельной мнимой оси, функция $Q_l(z)$, согласно (45), имеет асимптотически осциллирующий характер.

Из формулы (44) вытекает ряд следствий.

1. При больших вещественных (целочисленных) угловых моментах l амплитуда $a_l(s)$ убывает экспоненциально с l . В этом случае наибольший вклад в $a_l(s)$ вносит область наименьших z' , т. е. тех z' , которые находятся ближе всего к границе физической области $z = 1$. Этот вклад может происходить от полюсов с наименьшей массой либо в u -канале при $u = m_u^2$ (абсорбтивная часть $A_u(s, z)$), либо в t -канале при $t = m_t^2$ (абсорбтивная часть $A_t(s, z)$). Положение этих полюсов m_t^2 и m_u^2 связано с полюсами по z в A_t и A_u соотношениями $z^{(t)} = 1 + 2m_t^2/(s - 4m^2)$ и $z^{(u)} = 1 + 2m_u^2/(s - 4m^2)$. Совокупность парциальных волн с весьма большими l описывает периферические взаимодействия.

2. Переходя к комплексным угловым моментам l , можно найти, исходя из (44), аналитическое продолжение $a_l(s)$. Однако аналитичности $Q_l(z)$ в правой полуплоскости l , $\text{Re } l > 0$, еще недостаточно для того, чтобы по (44) продолжить $a_l(z)$ в область комплексных моментов l . Правая часть (44) зависит от l не только посредством Q_l , но и посредством множителя $(-1)^l = e^{i\pi l}$, который растет неограниченно при $|l| \rightarrow \infty$, $\text{Re } l > 0$. Чтобы обойти эту трудность, следует осуществлять аналитическое продолжение отдельно для функций a^+ и a^- . Мы получаем тогда формулу Грибова—Фруасара [157, 158]:

$$a^\pm(l, s) = \frac{1}{\pi B} \int_{z_0}^{\infty} dz' [A_t(s, z') \pm A_u(s, z')] Q_l(z'). \quad (46)$$

В силу свойств Q_l эти функции аналитичны в правой полуплоскости l . Будучи определены для всех комплексных моментов l с $\text{Re } l > 0$, функции $a^\pm(l, s)$ имеют физический смысл лишь для ряда целочисленных значений l : при четных $l = 0, 2, \dots$ функция $a^+(l, s)$ имеет смысл парциальной амплитуды $a_l(s)$, при нечетных $l = 1, 3, \dots$ функция $a^-(l, s)$ равна $a_l(s)$. Действительно, только при целочислен-

ных l мы можем воспользоваться формулой (43) и возвратиться к исходной амплитуде (39).

Таким образом, в разложении (38) функции $a^\pm(l, s)$ приводят соответственно к симметричной и антисимметричной по z частям $F^\pm(s, z)$:

$$F^\pm(s, z) = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z) a^\pm(l, z) = \\ = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [P_l(z) \pm P_l(-z)] a_l(s) = F^+(s, z) \pm F^-(s, -z), \quad (47)$$

т. е. F^+ содержит только четные $l = 0, 2, \dots$, а F^- — лишь нечетные $l = 1, 3, \dots$.

До сих пор предполагалось, что все интегралы в (40) и в (46) сходятся, так что вычитания в дисперсионном соотношении (42) не нужны. Если, однако, абсорбтивные части A_t и A_u ведут себя как полиномы степени N (при фиксированном s), так что необходимы N вычитаний, то (46) будет определять $a^\pm(l, s)$ как аналитическую функцию l в области $\text{Re } l > N$. Действительно, ввиду асимптотического поведения $Q_l(z)$ при больших z :

$$Q_l(z) \rightarrow z^{-(l+1)}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad (48) \\ 2l \neq -3, -5, -7, \dots,$$

только при $\text{Re } l > N$ интегралы (46) сходятся. При этом вычитательные члены в дисперсионном соотношении (42) не дают вклада в $a^\pm(l, s)$ в силу своей полиномиальной природы.

Выясним теперь вопрос о единственности формулы Грибова—Фруассара (46) для продолжения в область комплексных l частичной амплитуды $a_l(s)$, заданной при целых положительных l . На первый взгляд кажется очевидным, что к функции Грибова—Фруассара $a^\pm(l, s)$ можно всегда добавить слагаемое типа $f(l, s) \sin \pi l$, исчезающее при целых l и дающее совместно с $a^\pm(l, s)$ иное продолжение частичных амплитуд. Однако однозначность аналитического продолжения по (46) гарантируется теоремой Карлсона.

Теорема Карлсона [159]. Пусть $F(l)$ аналитично при $\text{Re } l > N$ и $|F(l)| < C e^{\lambda |l|}$ при $|l| \rightarrow \infty$, $\text{Re } l > 0$, где $\lambda < \pi$. Тогда, если $F(l) = 0$ при $l = 1, 2, 3, \dots$, функция $F(l)$ равна нулю тождественно.

По теореме Карлсона функции типа $f(l, s) \sin \pi l$ недопустимы, ибо (при полиномиальном изменении $f(l, s)$) они растут как $e^{\pi |l|}$ вдоль прямой, параллельной мнимой оси l . Следовательно, если амплитуда Грибова — Фруассара (46) удовлетворяет условию

$$a(l, s) < C e^{\lambda |l|}, \quad |l| \rightarrow \infty, \quad \text{Re } l > N, \quad \lambda < \pi, \quad (49)$$

то аналитическое продолжение по (8) будет единственным. Между тем из (46) явствует, что наиболее медленно $a^\pm(l, s)$ убывает с $|l|$

вдоль линии $\text{Re } l = N$, где

$$a^{\pm}(l, s) \sim \int_0^{\infty} (A_t \pm A_u) e^{i\beta z - (N - \frac{1}{2})z} dz, \quad (50)$$

$$\beta = \text{Im } l \rightarrow \infty.$$

Так как по предположению абсорбтивные части $A_t \pm A_u$ ведут себя полиномиально — как z^N при $z \rightarrow \infty$, то интеграл в (50) вообще не может расти экспоненциально при $\beta \rightarrow \infty$.

Таким образом, в предположении ограниченного (полиномиального) роста абсорбтивных частей A_t и A_u формула Грибова — Фруасара (46) дает единственное продолжение $a_l(s)$ в область $\text{Re } l \geq N$, а именно: не существует других функций $f^{\pm}(l, s)$ (помимо $a^{\pm}(l, s)$, заданных по (46)), которые совпадают с физическими парциальными волнами $a_l(s)$ при четных (нечетных) значениях $l \geq N$ и также удовлетворяют условию (49). Доказательство: разность $f^{\pm}(l, s) - a^{\pm}(l, s)$ обращается тождественно в нуль в силу теоремы Карлсона.

Обратимся к условию унитарности для парциальных амплитуд. Пусть $s = s_0$ есть порог неупругих реакций, так что в области $4m^2 < s < s_0$ возможно только упругое рассеяние (для рассеяния пионов $s_0 = 16 m_{\pi}^2$). Тогда в этой области парциальные амплитуды $a_l(s)$ для $l = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют «упругому» условию унитарности (7.68):

$$a_l(s) - a_l^*(s) = 2i \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} a_l(s) a_l^*(s). \quad (51)$$

Напишем теперь, отправляясь от (51), обобщенное условие унитарности для функций $a^{\pm}(l, s)$. С помощью теоремы Карлсона можно убедиться, что аналитическим продолжением (51) будет

$$a^{\pm}(l, s) - (a^{\pm}(l^*, s))^* - 2i \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} a^{\pm}(l, s) (a^{\pm}(l^*, s))^* = 0, \quad (52)$$

так как левая часть (52) представляет собой аналитическую функцию l , которая исчезает при четных (нечетных) $l > N$ и имеет асимптотические свойства, даваемые (46). Условие унитарности (52) выполняется отдельно для функций $a^+(l, s)$ и $a^-(l, s)$, ибо (51) имеет место для каждого значения $l = 0, 1, 2, \dots$ в отдельности.

Существование отдельных условий унитарности для $a^+(l, s)$ и $a^-(l, s)$ означает, что функции $a^+(l, s)$ и $a^-(l, s)$ могут иметь различные (и независимые) наборы полюсов. Действительно, определив аналитическое продолжение условия унитарности по l , мы можем продолжить его до точек $l(s_a)$, где функции $a(l, s)$ имеют полюсы.

Аналитические свойства $a_l(s)$ в плоскости s . Эти свойства находятся легко в том случае, когда для амплитуды $F(s, t, u)$ в (39) (при

одинаковых массах всех частиц) справедливо представление Мандельштама и, следовательно, для абсорбтивных частей A_t и A_u можно написать дисперсионное соотношение типа (38). Мы будем исходить из формулы (44), выражающей парциальную амплитуду $a_l^\pm(s)$ через функцию Q_l и абсорбтивные части $A_t \pm A_u$. Эта формула будет определять $a_l(s)$ и вне физической области s -канала.

Функция $Q_l(1 + 2t/(s - 4m^2))$ в (44) имеет при целых l разрез от $s = -\infty$ до $s = 4m^2 - t$. В силу представления Мандельштама или дисперсионного соотношения типа (38) функции A_t и A_u имеют в комплексной плоскости s правый разрез от $4m^2$ до ∞ и левый разрез от $-\infty$ до границы спектральной функции ρ_{tu} (рис. 15). Мы предполагаем при этом, что в амплитуде $F(s, t, u)$ нет полюсов в t - или u -каналах. Поэтому в отсутствие таких полюсов парциальная амплитуда $a_l(s)$, определяемая по (44), будет иметь также два разреза: правый разрез от $s = 4m^2$ до ∞ и левый разрез от $s = -\infty$ до $s = 0$. В интервале между разрезами $a_l(s)$ вещественна, так что $a_l(s^*) = a_l^*(s)$.

Следовательно, если $a_l(s) \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow \infty$, то для $a_l(s)$ можно написать дисперсионное соотношение без вычитаний:

$$a_l(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{b_l(s')}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 ds' \frac{b_l(s')}{s' - s}, \quad (53)$$

где $b_l(s)$ есть скачок $a_l(s)$ на разрезе.

Скачок в физической области правого разреза может быть в принципе найден из условия унитарности. Этот скачок, однако, при $s \geq 16m^2$ содержит амплитуды более сложных процессов. В области упругого рассеяния $4m^2 < s < 16m^2$ скачок выражается, в силу (51), через парциальные амплитуды:

$$b_l(s) = a_l(s + i\epsilon) - a_l(s - i\epsilon) = 2i \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} a_l(s + i\epsilon) a_l(s - i\epsilon). \quad (54)$$

Скачок функции $a_l(s)$ на левом разрезе связан с перекрестными реакциями. Уравнений (53) и (54) достаточно для приближенного определения парциальных амплитуд в области малых энергий [160—161].

Резонансы и полюсы на нефизическом листе. Обратимся теперь к понятию нестабильной частицы, или резонанса, в теории S -матрицы. Представление о резонансе в релятивистской теории S -матрицы связывается, как и в нерелятивистской теории, с известной формулой Брейта—Вигнера. Ввиду важности этого вопроса в теории элементарных частиц мы приведем ниже основные соотношения.

Состояние нестабильной частицы, или резонанса, характеризовались в § 2.3 распределением по энергиям или массам. Такое распределение может быть получено, если аналитическая амплитуда имеет полюс s_r в комплексной плоскости s . Этот полюс может

находиться только на втором, нефизическом листе, так как комплексные полюсы на физическом листе недопустимы из физических соображений.

Покажем, что существование полюса амплитуды на втором римановом листе согласуется с условием унитарности. Мы воспользуемся соотношением (54), представляющим собой аналитическое продолжение условия унитарности на нефизические s . Обозначим посредством a_l^I парциальную амплитуду на физическом листе ($a_l^I(s) = a_l(s)$), а через a_l^{II} — парциальную амплитуду на втором листе; функции a_l^I и a_l^{II} представляют собой значения аналитической функции a_l , определенной на всех листах. Функция a_l^{II} есть

$$a_l^{II}(s) = a_l^I(s^*).$$

Мы можем теперь переписать (54) в виде, содержащем функции на обоих листах (при одном и том же комплексном аргументе s):

$$a_l^I(s) - a_l^{II}(s) = 2i \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} a_l^I(s) a_l^{II}(s), \quad (55)$$

откуда

$$a_l^{II}(s) = \frac{a_l^I(s)}{1 + 2i \sqrt{(s - 4m^2)/s} a_l^I(s)} = \frac{a_l^I(s)}{S_l^I(s)}, \quad (56)$$

где

$$S_l^I(s) = e^{2i\delta_l(s)} \quad (57)$$

есть (при вещественных s) матричный элемент S -матрицы, отвечающий моменту l . Из формулы (56) вытекают аналитические свойства амплитуды a_l^{II} на втором листе. Функция a_l^{II} имеет те же точки ветвления, что и a_l^I . Полюсы a_l^{II} находятся в точках, где S_l^I имеет нули, т. е. могут быть при комплексных s . В точках, где a_l^I имеет полюсы (при вещественных $s < s_{\min}$), у функции a_l^{II} полюсов нет.

Пусть полюс функции $a_l(s)$ расположен на втором листе в точке $s_r^{II} = (\mu - i\Gamma/2)^2$, где μ и Γ положительны:

$$a_l(s) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{g^2}{s_r^{II} - s}. \quad (58)$$

Это выражение при $\Gamma/\mu \ll 1$ есть не что иное, как формула Брейта — Вигнера:

$$\frac{g^2}{s_r^{II} - s} \approx -\frac{g^2}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{s - \mu} + \sqrt{s_r^{II}}} = \frac{\Gamma'}{\sqrt{s - \mu} + i\Gamma/2},$$

если положить $\Gamma' = g^2/2\mu$ и учесть, что \sqrt{s} равен энергии в системе ц. и.

Таким образом, полюс парциальной амплитуды $a_l(s)$ на нефизическом листе при $s_r = (\mu - i\Gamma/2)^2$ следует интерпретировать как

следствие существования нестабильной частицы со спином $J = 1$, (средней) массой μ и временем жизни $1/\Gamma$. Эти полюсы имеют динамическое происхождение, и вопрос о том, насколько произвольно можно задавать их положения s_r , остается открытым. Наличие полюса типа (58) в амплитуде проявляется на опыте в виде резонанса в полном сечении $\sigma_{\text{tot}}(s)$, при этом форма кривой $\sigma_{\text{tot}}(s)$ вблизи $s = \mu^2$ будет определяться величиной

$$|a_l(s)|^2 \sim \frac{g^4}{(s - \mu^2 + \Gamma^2/4)^2 + \Gamma^2 \mu^2}. \quad (59)$$

Распределения такого типа уже рассматривались в § 2.3.

При $\Gamma \rightarrow 0$ полюс s_r переходит на вещественную ось s и в этом случае должен сопоставляться стабильной частице; для самосогласованности такой трактовки мы должны уничтожить разрез слева от точки $s_r + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Вычеты в полюсах стабильных частиц всегда факторизуются; мы предполагаем, что это свойство сохраняется и для полюсов типа (58), отвечающих нестабильным частицам.

Рассмотренное нами упругое рассеяние частиц одинаковой массы явилось лишь простейшим примером, в котором легко проиллюстрировать связь полюсов на нефизическом листе с резонансами. В случае любого процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ мы постулируем, что полюсный член (в инвариантной амплитуде), соответствующий частице-резонансу R , имеет вид

$$F(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{g_{R12} g_{R34}}{s_R^{\text{II}} - s}, \quad s \sim \mu; \quad (60)$$

при этом отношение Γ/μ может и не быть малым. Как и в случае стабильных частиц, величины g_{R12} и g_{R34} характеризуют взаимодействия в процессах $R \leftrightarrow 1 + 2$ и $R \leftrightarrow 3 + 4$, т. е. соответствующие вершинные части.

Соберем воедино все свойства, которыми мы наделяем нестабильные частицы (см. § 2.3).

1. Нестабильные частицы могут иметь определенные значения спина J и квантовых чисел внутренней симметрии и отражений. Набор квантовых чисел, отмечающий частицу, определяется группой симметрии взаимодействия, в процессе которого частица рождается. Для сильно взаимодействующих частиц-резонансов в этот набор входят барионное число B , изоспин I , гиперзаряд Y , SU_3 -мультиплетность n , а также четность η_p и G -четность.

2. Нестабильная частица сопоставляется полюсу (60) амплитуды на втором листе в s -канале с квантовыми числами J, B, I, n, η_p, G . При этом положение полюса (т. е. средняя масса μ и ширина Γ) не зависит от типа реакции, в которой наблюдается резонанс.

3. Вычет амплитуды в полюсе, сопоставляемом нестабильной частице, факторизуется по тому же правилу, что и в случае полюса, соответствующего стабильной частице.

Как мы подчеркивали в § 2.3, представление о нестабильной частице носит сугубо приближенный характер. Перечисленные выше свойства нестабильных частиц и само представление (60) могут быть доказаны в первом приближении теории возмущений, что, однако, неубедительно ввиду большой величины взаимодействия. В основе этого представления находится убеждение, согласно которому нестабильная частица обладает всеми свойствами стабильной, кроме вещественности точки s_r , в которой расположен полюс амплитуды.

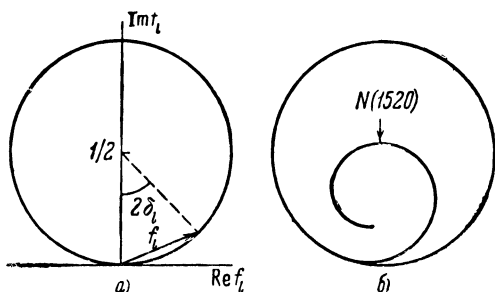


Рис. 16.

Под резонансным поведением амплитуды вблизи $s = \mu$ подразумевается не только существование резкого максимума сечения (59), но и характерное изменение фазового сдвига $\delta(s)$ при прохождении через резонанс.

Одновременное изменение δ и $|a_l|$ в резонансной области удобно изображать на полярных диаграммах Аргана.

Как известно, в упругой области, когда энергии недостаточно для неупругих процессов, парциальная амплитуда a_l , в согласии с (51), может быть записана в виде

$$a_l(s) \equiv \sqrt{\frac{s}{s-4m^2}} f_l(s) = \sqrt{\frac{s}{s-4m^2}} \frac{e^{i2\delta_l(s)} - 1}{2i}. \quad (61)$$

Если значение s превышает порог неупругих процессов (например, $s > 16m_\pi^2$ для рассеяния пионов), то появление неупругих каналов в условии унитарности можно учесть феноменологически, введя в (61) множитель η_l :

$$f_l(s) = (\eta_l e^{i2\delta_l(s)} - 1)/2i. \quad (62)$$

Множитель η_l можно считать постоянным в области резонанса.

В плоскости с осями $\text{Re} f_l$ и $\text{Im} f_l$ амплитуда (62) изображается точкой, которая при вариации s описывает траекторию. В случае

резонанса эта траектория (диаграмма Аргана), согласно (61) и (62), есть окружность с радиусом, зависящим от η_l (рис. 16, а), и с максимумом $(0, f_{\max})$ при $\delta_l = \pi/2$ в резонансе. При этом производная $d\delta_l/ds$ положительна и пропорциональна времени жизни $1/\Gamma$, так что чем стабильнее частица, тем быстрее (и на меньшем интервале s) меняется δ_l . Отрицательные $d\delta_l/ds$ при $\delta = \pi/2$ означают, что резонансоподобный ход $|f_l(s)|^2$ не связан с существованием нестабильной частицы, f_{\max} есть унитарный предел амплитуды f_l .

В реальных случаях радиус траектории на диаграмме Аргана будет зависеть от энергии, ибо с увеличением энергии открываются новые неупругие каналы (рис. 16, б). Вид траектории будет сложнее в случае резонансов в реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ с различными частицами 1, 2, 3, 4.

§ 12.5. Аналитические свойства форм-факторов. Пионный форм-фактор

В этом параграфе мы будем следовать тому же логическому пути, что и в предыдущих параграфах гл. 12, посвященных свойствам амплитуды. Вместо инвариантных амплитуд мы будем теперь рассматривать инвариантные форм-факторы $F_l(t)$ (см. (11.72)), которые являются функциями одной переменной. Именно в форм-факторах $F_l(t)$ сосредоточена информация о динамике; исследование аналитических свойств $F_l(t)$ позволяет существенно продвинуться в понимании взаимодействия.

Рассмотрим в качестве простейшего примера электромагнитную вершинную функцию пиона π^+ . Такая функция входит в амплитуду упругого рассеяния электронов на пионах $e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+$ в виде матричного элемента от электромагнитного тока:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2; 1, 2) = \langle p_2 | j_\mu(0) | p_1 \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} F_1^s(t) (p_1 + p_2)_\mu + \frac{1}{(2\pi)^3} F_2^s(t) (p_1 - p_2)_\mu, \quad (63)$$

где F_1^s и F_2^s — инвариантные форм-факторы, зависящие от $t = (p_1 - p_2)^2$; при этом $t \leq 0$. Ток j_μ эрмитов. В процессе $e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+$ величина t есть квадрат переданного импульса. В силу уравнения непрерывности для электромагнитного тока $\partial_\mu j^\mu = 0$ форм-фактор F_2^s равен нулю. Действительно,

$$\langle p_2 | \partial_\mu j^\mu(0) | p_1 \rangle = -i \langle p_2 | [P_\mu, j^\mu(0)] | p_1 \rangle = \\ = -i (p_2 - p_1)_\mu \langle p_2 | j^\mu(0) | p_1 \rangle.$$

Вершинная функция Γ_μ входит также (для другой области значений t) в амплитуду аннигиляционного процесса $e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$, являющегося перекрестным по отношению к процессу

упругого $e^- \pi^+$ -рассеяния. Содержащийся в такой амплитуде матричный элемент тока (при учете уравнения неразрывности) равен

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2; 1, 2) = \langle p_1, p_2; \text{out} | j_\mu(0) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} (-p_1^- + p_2^-)_\mu F_1^a(t), \quad t = (p_2 + p_1^-)^2, \quad p_1 = -p_1^-. \quad (64)$$

В § 11.4 мы выяснили, что кроссинг-сопряженные матричные элементы (63) и (64) являются значениями одной и той же функции Γ_μ в различных физических областях, $F_1^a(t) = F_1^s(t) = F(t)$.

Обратимся теперь к аналитическим свойствам $F(t)$ в плоскости комплексных t . Запишем с помощью редукционной формулы матричный элемент (64) через интерполирующие поля $\varphi(x)$:

$$\langle p_1^-, p_2; \text{out} | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} (p_2 - p_1^-)_\mu F(t) \equiv$$

$$\equiv -\frac{i}{(2\pi)^4 t_+} \int d^4 x e^{i p_2 x} \vec{K}_x \langle p_1^- | \theta(x^0) [\varphi(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle. \quad (65)$$

Матричный элемент, входящий в амплитуду процесса $\pi^- + \pi^+ \rightarrow e^- + e^+$, может быть записан аналогичным образом:

$$\langle 0 | j_\mu(0) | p_1^-, p_2; \text{in} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} (p_2 - p_1^-)_\mu F'(t) \equiv$$

$$\equiv -\frac{i}{(2\pi)^4 t_+} \int d^4 x e^{-i p_2 x} \vec{K}_x \langle 0 | \theta(-x^0) [j_\mu(0), \varphi^+(x)] | p_1^- \rangle, \quad (66)$$

где $F'(t)$ — инвариантный форм-фактор. Частицы 1 и 2 в формулах (65) и (66) совпадают.

Составим разность (65) и комплексно сопряженного выражения (66), учитывая при этом эрмитовость тока j_μ :

$$\langle p_1^-, p_2; \text{out} | j_\mu(0) | 0 \rangle - \langle 0 | j_\mu(0) | p_1, p_2; \text{in} \rangle^* =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^4 t_+} \int d^4 x e^{i p_2 x} \vec{K}_x \langle p_1^- | [\varphi(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle. \quad (67)$$

Правая часть соотношения (65) есть аналитическая функция от $t = (p_1^- + p_2)^2$ в верхней полуплоскости. Это обстоятельство может быть доказано строго [103, 162], исходя из локальности полей и токов и положительности спектра энергии. Таким образом, значение форм-фактора $F(t)$ в физической области (на отрезке положительной вещественной оси) есть граничное значение функции, аналитической в верхней полуплоскости. Из вида формул (65) и (66) явствует, что если функция $F(t)$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $F'^*(t)$ будет аналитична и в нижней полуплоскости.

Формула (67) имеет смысл при вещественных $t > 0$, лежащих в физической области процесса $\pi^+ \pi^- \rightarrow e^- e^+$. Она дает нам разность граничных значений функций $F(t)$ и $F'^*(t)$, определенных на различных сторонах вещественной оси. Путем аналитического продолже-

ния правой части (67) по массам вершинных частиц (т. е. по массам пионов) мы можем перейти вдоль вещественной оси к отрицательным t . Но при достаточно больших по абсолютной величине $t > 0$ правая часть (67) будет равна нулю. Это значит, что $F(t)$ и $F^{**}(t)$ определяют одну аналитическую функцию с разрезом от некоторого t_{\min} до ∞ , а (67) определяет скачок этой функции. Таким образом, скачок $F(t)$ есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} (p_2 - p_1)_\mu (F(t + i\varepsilon) - F(t - i\varepsilon)) = \\ & = - \frac{i}{(2\pi)^4 t} \sum_n \int d^4 x e^{i p_2 x} \vec{K}_x \langle p_1 | \Phi(x) | n \rangle \langle n | j_\mu(0) | 0 \rangle = \\ & = \sum_n \langle p_1, p_2; \text{out} | n, \text{in} \rangle \langle n, \text{in} | j_\mu(0) | 0 \rangle = \\ & = i(2\pi)^4 \sum_n \langle p_1, p_2 | T | n \rangle dR_n(p_1 + p_2) \langle n, \text{in} | j_\mu(0) | 0 \rangle. \quad (68) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели суммирование по полной системе промежуточных состояний $|n, \text{in}\rangle$ и учли, что другой член в коммутаторе (67) приводит к матричному элементу $\delta^4(p_2 - p_n) \langle p_n | J(0) | 0 \rangle$, где $J(x) = K_x \Phi(x)$ есть пионный ток. Такой матричный элемент исчезает, поскольку $\langle p_n |$ — это однопионное состояние. Согласно (68) первое слагаемое $|n\rangle$ должно быть двухчастичным (ибо иначе $\langle p_1, p_2 | T | n \rangle$ равно нулю). Соотношение (68) можно назвать условием унитарности для форм-фактора. Оно определяет точки ветвления функции $F(t)$. Первая точка ветвления соответствует двухпионному порогу, так что $t_{\min} = 4m^2$. Далее следует пороговая точка ветвления $t = 16m^2$ (при сохранении G -четности) и т. д.

Воспользуемся теперь РТ-инвариантностью теории (см. § 11.4):

$$\langle 0 | j_\mu(0) | p_1, p_2; \text{in} \rangle = \langle p_1, p_2; \text{out} | j_\mu(0) | 0 \rangle. \quad (69)$$

Отсюда и из (67) следует, что скачок форм-фактора $F(t)$ в (68) есть чисто мнимая величина и в условии унитарности слева можно писать $2i(p_2 - p_1)_\mu \text{Im} F(t) / (2\pi)^3$. Поскольку скачок $F(t)$ чисто мнимый, то будет

$$F(t^*) = F^+(t), \quad (70)$$

форм-фактор $F(t)$ является вещественно-аналитической функцией t . На вещественной оси t при $t < 4m^2$ (вне разреза) $F(t)$ вещественно.

Таким образом, пионный форм-фактор $F(t)$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости t с разрезом вдоль вещественной оси от пороговой точки ветвления $t = 4m^2$ до ∞ . Скачок $F(t)$ на разрезе может быть определен из соотношения унитарности (68).

Для асимптотического поведения форм-фактора $F(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ не существует строгих теоретических оценок. Из экспериментов по рассеянию известно, что при $t \rightarrow \infty$ электромагнитные форм-

факторы быстро убывают. Поэтому предполагается, что значение $F(\infty)$ конечно. Тогда для форм-фактора $F(t)$ можно написать дисперсионное соотношение [163, 164] с одним вычитанием:

$$F(t) = F(0) + t \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F(t')}{t'(t'-t)} dt'. \quad (71)$$

В подынтегральное выражение вносит вклад только амплитуда аннигиляционного процесса $e^+ + e^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (так как $t \geq 4m^2$). $\text{Im} F(t)$ может быть в принципе найдено из условия унитарности. Соотношение (71) определяет форм-фактор во всей комплексной области t , и в том числе на отрицательной вещественной оси t , где F равно форм-фактору F_1^s из (63). В этой области форм-фактор F определяет упругое $e^-\pi^+$ -рассеяние.

Значение $F(0)$ находится из равенства

$$\langle p_2, \pi^+ | Q | p_1, \pi^+ \rangle = 2p_0 \delta(p_1 - p_2),$$

где Q — электрический заряд (в единицах $|e|$). Записывая Q в виде пространственного интеграла от $j_0(x)$, мы находим

$$\langle p_2, \pi^+ | \int j_0(x) d^3x | p_1, \pi^+ \rangle = (2\pi)^3 \delta(p_1 - p_2) \langle p_1 | j(0, x_0) | p_1 \rangle,$$

что вместе с (63) дает $F(0) = 1$.

Мы рассматривали до сих пор конкретные члены пионного триплета. Изоспиновая структура вершинной функции для пионов с изоспиновыми индексами i_1 и i_2 ($i = 1, 2, 3$) устанавливается из (63) или (64) с помощью правил § 8.3. Электромагнитный ток j_μ при изоспиновых вращениях преобразуется как заряд Q , т. е. как сумма изосинглета $j_\mu^{I=0}$ и третьей компоненты изотриплета $j_\mu^{I=1}$ (см. § 8.1 и формулу Гелл-Манна — Нишидзимы $Q = I_3 + 1/2Y$). Мы находим из (64)

$$\langle p_1, i_1; p_2, i_2 | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \varepsilon_{3i_1i_2} (-p_1 + p_2)_\mu F(t). \quad (72)$$

Появление $\varepsilon_{3i_1i_2}$ легко понять из того соображения, что обе части равенства (72) должны быть симметричны относительно перестановки переменных, описывающих пионы. Согласно (72) электромагнитная вершинная функция пионов есть третья компонента изовектора.

Обобщения. Электромагнитные форм-факторы нуклона. Случай электромагнитной вершинной функции пиона является во многих отношениях простейшим. Поскольку пионы не имеют спина и в силу сохранения электромагнитного тока, эта вершинная функция описывается только одним форм-фактором $F(t)$. Существование изоспина у пионов также не увеличивает число форм-факторов (вследствие сохранения тока). Так как пионная масса оказывается наи-

меньшей среди масс внешних и внутренних частиц, учитываемых в теории сильного взаимодействия, то разрез функции $F(t)$ полностью совпадает с физической областью $4m_\pi^2 < t < \infty$ аннигиляционной реакции $e^+e^- \rightarrow \pi\bar{\pi}$. Так как нет стабильных частиц с массой $0 < m^2 < 4m_\pi^2$ и внутренними квантовыми числами электромагнитного тока, то функция $F(t)$ не имеет полюсов на этом отрезке.

Для частиц со спином вершинная функция векторного или аксиально-векторного тока прежде всего будет зависеть от нескольких форм-факторов (см. § 11.4). Следуя тому же логическому пути, что и для бесспиновых частиц, мы можем получить выражение типа (69) для скачков форм-факторов. При надлежащем выборе ковариантов X^μ , входящих в выражение (11.72) вершинной функции, форм-факторы $F_i(t)$ могут быть сделаны вещественно-аналитическими: $F_i(t^*) = F_i^*(t)$ (см. также § 12.3). Однако в случае частиц со спином следует учитывать появление кинематических особенностей у $F_i(t)$. После устранения кинематических особенностей можно постулировать аналитические свойства форм-факторов $F_i(t)$. Функция $F_i(t)$ предполагается аналитичной во всей плоскости комплексных t с разрезом от $t_{\min} > 0$ до $t = \infty$, где t_{\min} есть первый порог многочастичной реакции аннигиляционного типа, зависящий от квантовых чисел форм-фактора $F_i(t)$ в t -канале. Пороговая точка ветвления t_{\min} может и не совпадать с началом физической области t , если масса внешних частиц m больше массы внутренних частиц, содержащихся в состояниях $|n\rangle$ условия унитарности (69). Тогда разрез функции $F_i(t)$ будет состоять из (нормальной) нефизической части $t_i < t < t_0$, в которой условие унитарности неприменимо, и физической части $t_0 < t < \infty$.

Кроме нормальных пороговых точек ветвления вершинные функции могут иметь аномальные пороговые точки ветвления при $t_a < t_{\min}$. Эти точки возникают при следующем соотношении масс внешней a и внутренних частиц b и c :

$$m_a^2 > m_b^2 + m_c^2,$$

если частицы a , b и c могут непосредственно взаимодействовать (т. е., например, если можно написать лагранжиан abc -взаимодействия).

Далее, если в теории нет частиц с нулевой массой, так что начало разреза $t_{\min} > 0$, то в промежутке $0 < t < t_{\min}$ могут находиться полюсы, отвечающие стабильным частицам с теми же внутренними квантовыми числами, какими обладает ток j_μ . Например, в случае вершинной функции аксиального тока существует пионный полюс при $t = m_\pi^2$, связанный с отличным от нуля матричным элементом $\langle \pi | a_\mu(0) | 0 \rangle$ между вакуумом и пионным состоянием.

Рассмотрим в качестве примера электромагнитные форм-факторы нуклона. Матричный элемент тока между одонуклонными

состояниями содержит четыре инвариантных форм-фактора — два изоскалярных форм-фактора F_1^S и F_2^S и два изовекторных форм-фактора F_1^V и F_2^V — в комбинации $F_i = 1/2(F_i^S + \tau_3 F_i^V)$, $i = 1, 2$:

$$\langle p_2, \sigma_2; N | j_\mu | p_1, \sigma_1; N' \rangle \equiv \bar{u}(p_2, \sigma_2) \Gamma_\mu u(p_1, \sigma_1) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \bar{u}(p_2, \sigma_2) \{ \gamma_\mu F_1(t) - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(t) \} u(p_1, \sigma_1), \quad (73)$$

где $q = p_1 - p_2$ и $t = q^2$. Возможное слагаемое $q_\mu F_3$ опущено из первой части, так как оно противоречит сохранению тока $\partial_\mu j_\mu = 0$ или $q^\mu \Gamma_\mu = 0$. Волновые функции $u(p, \sigma)$ представляют собой восьмикомпонентные дираковские функции, описывающие изоспиновый дублет с изоспиновыми компонентами $N, N' = p, n$; при этом массы протона и нейтрона считаются одинаковыми. Легко проверить с помощью уравнений Дирака (или явного выражения) для u и \bar{u} , что слагаемое $\bar{u}(p_1 + p_2)u$ не является независимым, а сводится к линейной комбинации членов типа $u\gamma^\mu u$ и $i\bar{u}\sigma^{\mu\nu}q_\nu u$. В силу эрмитовости тока форм-факторы F_1 и F_2 вещественны.

Электрический заряд нуклона (в единицах e) равен $Q_p = 1$ для протона и $Q_n = 0$ для нейтрона. Этим фактом мы воспользуемся для нормировки форм-факторов F_1 . Из равенства

$$\langle p_2, \sigma_2; N | \int j_0(x) d^3x | p_1, \sigma_1; N' \rangle = Q_N \delta_{NN'} 2p_0 \delta(p_1 - p_2)$$

и нормировки волновых функций $\bar{u}\gamma_4 u = 2p_0$ вытекает, что заряды Q_p и Q_n выражаются через форм-факторы $F_1^S(0)$ и $F_1^V(0)$, причем

$$F_1^S(0) = 1, \quad F_1^V(0) = 1; \quad (74)$$

$F_1(t)$ называют электрическим, а $F_2(t)$ — магнитным форм-фактором. Форм-фактор $F_2(t)$ при $t = 0$ выражается через аномальные магнитные моменты протона и нейтрона μ_p и μ_n :

$$e(F_2^S(0) + F_2^V(0)) = \mu_p, \quad e(F_2^S(0) - F_2^V(0)) = \mu_n. \quad (75)$$

Действительно, матричный элемент от оператора магнитного момента $\mu = (e/2) \int [xj] d^3x$ есть

$$\langle p_2, \sigma_2; N | \mu^3 | p_1, \sigma_1; N \rangle = \\ = \frac{e}{2} (2\pi)^3 \delta(p_1 - p_2) \varepsilon_{3jk} \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \langle p_2, \sigma_2; N | j^k(0) | p_1, \sigma_1; N \rangle = \\ = -\frac{e}{2} \bar{u}(p_2, \sigma_2) \varepsilon_{3jk} \sigma^{kj} u(p_1, \sigma_1) F_2(0) \delta(p_2 - p_1),$$

где после вычисления производной следует положить $q = 0$. Положим здесь $p_1 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$. Поскольку

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{3jk} \sigma^{kj} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

(по (5.32) $\sigma^{kl} = i^{1/2} [\gamma^k, \gamma^l]$), то в этом случае

$$\langle p_2, \sigma_2; N | \mu^3 | p_1, \sigma_1; N \rangle = 2m_N eF_2(0) \delta(p_1 - p_2).$$

С другой стороны, при $p_1=0$, $\sigma_1=\sigma_2=1/2$ состояние $|p_1, \sigma_1; N\rangle$ будет собственным состоянием оператора μ^3 , и потому в данном случае

$$\langle p_2, \sigma_2; N | \mu^3 | p_1=0, \sigma_1; N \rangle = \mu_N 2m_N \delta(p_1 - p_2).$$

Отсюда мы находим $eF_2(0) = \mu_N$, т. е. формулу (75).

Разложение (73) выражает электромагнитную вершинную функцию нуклона Γ_μ через электрический и магнитный форм-факторы

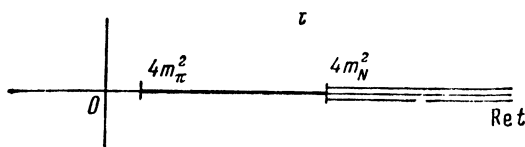


Рис. 17.

$F_1(t)$ и $F_2(t)$ в виде, свободном от кинематических особенностей. Мы можем, следовательно, постулировать, что эти форм-факторы аналитичны в плоскости комплексных t с разрезом вдоль отрезка положительной вещественной оси t , причем начало разреза t_{\min} определяется массами частиц, сильно взаимодействующих с нуклоном. Наиболее легкими из них являются пионы. Значение t_{\min} равно наименьшему возможному квадрату массы состояния с квантовыми числами тока j_μ . Но подобно заряду Q электромагнитный ток есть сумма изоскаляра и изовектора. Изоскалярная часть тока j_μ^S имеет изоспин $I=0$ и отрицательную зарядовую четность (электромагнитный ток есть ток первого рода) $Cj_\mu^S C^{-1} = -j_\mu^S$. Следовательно, G -четность этого тока также отрицательна: $Gj_\mu^S G^{-1} = -j_\mu^S$. Низшим состоянием $I=0$ и $\eta_G = -1$ является трехпионное состояние, так что $t_{\min}^S = 9m_\pi^2$. Для изовекторного тока j_μ^V будет $I=1$ и $Gj_\mu^V G^{-1} = j_\mu^V$. Низшее состояние в этом случае содержит два пиона с изоспином $I=1$, G -четностью $\eta_G = +1$ и наименьшей массой $t_{\min}^V = 4m_\pi^2$.

Физическая область аннигиляционной вершины (совпадающая с физической областью реакции $e^+ + e^- \rightarrow N + \bar{N}$) начинается с $t = 4m_N^2$. Следовательно, изоскалярный форм-фактор будет иметь нефизический разрез от $t_{\min}^S = 9m_\pi^2$ до $t = 4m_N^2$, а изовекторный форм-фактор — нефизический разрез от $t_{\min}^V = 4m_\pi^2$ до $t = 4m_N^2$ (рис. 17). Область $t < 0$ будет соответствовать вершинной части

$\langle \mathbf{p}_2, \sigma_2; N | j_\mu(0) | \mathbf{p}_1, \sigma_1; N \rangle$, которая входит в амплитуду упругого e^-N -рассеяния.

Предположим, что при $t \rightarrow \pm \infty$ электрический форм-фактор F_1 стремится к постоянному пределу, а магнитный форм-фактор F_2 — к нулю. Такое предположение не противоречит эксперименту. Тогда для F_1 следует писать дисперсионные соотношения с одним вычитанием, а для F_2 — без вычитания. При известных аналитических свойствах написание дисперсионных соотношений не представляет труда. Мы выпишем соотношение для $F_1^V(t)$:

$$F_1^V(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{\frac{4m_2^2}{\pi}}^{\infty} \frac{A_1^V(t') dt'}{t'(t'-t)}, \quad (76)$$

где $A_1^V(t')$ — скачок форм-фактора на разрезе.

Глава 13

АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ. ПОЛЮСЫ РЕДЖЕ

Асимптотическое поведение амплитуды при высоких энергиях представляет собой одну из важнейших ее характеристик. Эксперимент в области высоких энергий выявляет сравнительно простые и четкие закономерности. Строгие оценки, основывающиеся на аналитических свойствах, оказываются довольно близкими к эксперименту, но, разумеется, неспособными описать асимптотический режим амплитуды. Изучение асимптотики амплитуды, обладающей свойствами аналитичности (в плоскости комплексных импульсных переменных и плоскости комплексных угловых моментов) и свойствами перекрестной симметрии, привело к выработке феноменологического представления о полюсах, или траекториях, Редже. Введению в теорию полюсов Редже и посвящена настоящая глава.

Как и ранее в гл. 11 и 12, мы проводим иллюстративные вычисления только для случая бесспиновых частиц одинаковой массы, указывая пути для обобщения. Основное внимание в этой главе уделено введению понятия реджевской траектории и обсуждению свойств траекторий. Несмотря на незавершенность теории реджевской асимптотики и существование в ней значительных трудностей, представляется бесспорным, что понятие траектории имеет фундаментальное значение в физике элементарных частиц.

§ 13.1. Рассеяние при высоких энергиях (эксперимент)

Рассеяние при высоких энергиях ($s \gg m_N^2$, или $s \gg 1 \text{ Гэв}^2$) обладает рядом простых черт. Благодаря этому область высоких энергий удобна для проверки предпосылок теории сильных взаимодействий.

Наиболее изучены экспериментально двухчастичные процессы типа $a + b \rightarrow c + d$ и полные сечения $\sigma_{\text{tot}}(a, b)$.

Двухчастичные процессы можно подразделить на: а) упругое рассеяние $a + b \rightarrow a + b$; б) дифракционную диссоциацию $a + b \rightarrow c + d$, когда совпадают внутренние квантовые числа (B, Y, Q, I и т. д.) частиц c и a, d и b (хотя спины, в частности, могут быть различны); в) рассеяние с перезарядкой $a + b \rightarrow c + d$, когда

частица c (или d) имеет внутренние квантовые числа, отличные от квантовых чисел частиц a и b . Разумеется, все заряды систем $a + b$ и $c + d$ одинаковы.

Примерами дифракционной диссоциации могут быть процессы «возбуждения» резонанса K^* со спин-четностью $J^P = 1^-$ и резонанса N^* с $J^P = 3/2^-$:



В качестве примера рассеяния с перезарядкой можно привести процессы



Заряды, обмениваемые при реакции перезарядки, равны зарядам системы $a + \bar{c}$ в t -канале. В случае дифракционной диссоциации

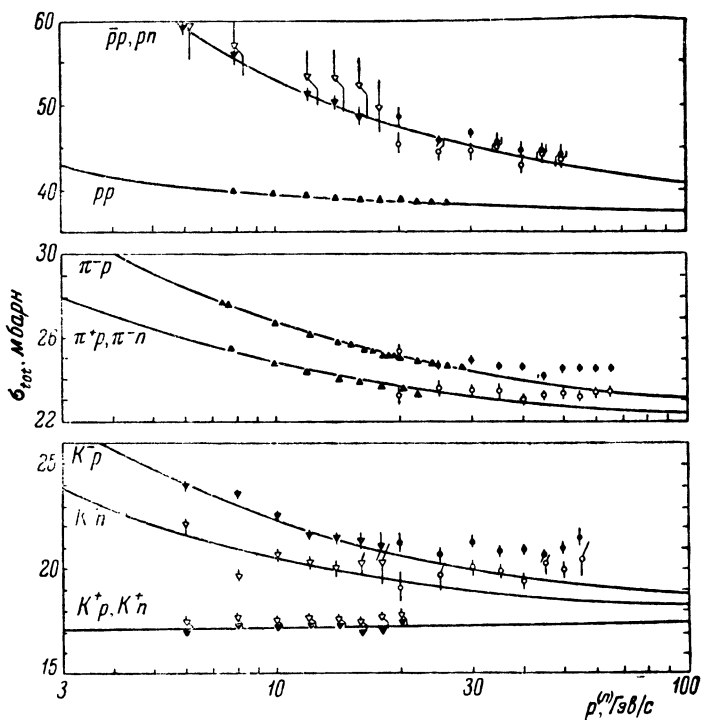


Рис. 18.

заряды системы $a + \bar{c}$ равны нулю. С точки зрения внутренней симметрии дифракционная диссоциация подобна упругому рассеянию.

Неупругие процессы включают, кроме дифракционной диссоциации и рассеяния с перезарядкой, также множественные

процессы

$$a + b \rightarrow (c_1 + \dots + c_n) + (d_1 + \dots + d_m),$$

в которых число частиц в конечном состоянии больше двух.

Из анализа экспериментальных данных вытекают следующие характерные черты рассеяния при высоких энергиях.

Полные сечения $\sigma_{\text{tot}}(a, b)$. На рис. 18 приведены экспериментальные кривые σ_{tot} вплоть до значений импульса пучка $p^{(n)} = 70 \text{ Гэв}/c$, достижимых на серпуховском ускорителе [165—170]¹⁾. В случае K^+p и K^+n интерпретация экспериментальных данных не окончательна; полные сечения как будто начинают медленно увеличиваться после $p^{(n)} \approx 30 \text{ Гэв}/c$, что, однако (в пределах экспериментальных ошибок), не противоречит и постоянству полных сечений. Экспериментальные данные по полным сечениям не исключают полностью также и очень медленный рост всех σ_{tot} с увеличением s .

Мы будем полагать, что при высоких энергиях полные сечения постоянны:

$$\sigma_{\text{tot}}(a, b) = \text{const}. \quad (1)$$

Во всяком случае, асимптотическая область, в которой можно считать $s \rightarrow \infty$, недостаточно определена, и вполне можно допустить, что при дальнейшем увеличении энергии полные сечения окажутся независимыми от s .

Полные сечения (на одной и той же мишени) для частицы и античастицы стремятся к одной и той же величине $\sigma_{\text{tot}}(a, b) = \sigma_{\text{tot}}(\bar{a}, b)$ (это положение известно под названием теоремы Померанчука, см. § 13.2). Не вполне ясна экспериментальная ситуация с K^-p и K^+p -рассеяниями, где при желании опытные данные можно истолковать и как свидетельство нарушения теоремы Померанчука.

Упругое рассеяние. С увеличением s рассеиваемые частицы все более концентрируются в области малых углов рассеяния ($\theta \approx 0$), или же в области конечных переданных импульсов t . При высоких энергиях упругое рассеяние происходит в основном при $\theta \approx 0$ (дифракционный пик), а с увеличением переданного импульса $|t|$ дифференциальное сечение падает экспоненциально (рис. 19):

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} e^{at}, \quad s \rightarrow \infty, \quad t < 0, \quad (2)$$

где a лежит в пределах $7-12 \text{ Гэв}^{-2}$ для всех упругих процессов.

¹⁾ Импульс пучка $p_a^{(n)}$ определяется формулой $p_a^{(n)} = (E_a^{(n)2} - m_a^2)^{1/2}$, где энергия $E_a^{(n)}$ частицы a в лабораторной системе (частица b покоится) будет пропорциональна s : $E_a^{(n)} = (s - m_a^2 - m_b^2)/2m_b$. В системе ц. и. $s = (p_a^0 + p_b^0)^2$.

Сечение упругого рассеяния $\sigma_{el}(a + b \rightarrow a + b)$ падает с ростом энергии (ввиду открытия неупругих каналов), приближаясь, по-видимому, к постоянному пределу при высоких энергиях.

Дифракционная диссоциация. Поведение дифференциального сечения в этом случае близко к тому, что наблюдается при упругом рассеянии.

Дифференциальное сечение имеет дифракционный пик, а сечение процесса $\sigma(a + b \rightarrow c + d)$, по-видимому, сравнительно медленно падает с ростом s .

Рассеяние с перезарядкой.

Для процессов такого типа характерно быстрое убывание (с ростом s) сечений $\sigma(a + b \rightarrow c + d)$ по сравнению с сечением упругого рассеяния $\sigma(a + b \rightarrow a + b)$. Дифференциальное сечение процесса имеет также дифракционный пик, однако, в отличие от упругого рассеяния и дифракционной диссоциации, оно обладает также (на фоне экспоненциального спада) характерным минимумом (dip). Отношение дифференциальных сечений рассеяния с перезарядкой и упругого рассеяния при $t=0$ стремится к нулю с возрастанием s при высоких s :

$$\frac{d\sigma(a + b \rightarrow c + d)/dt}{d\sigma(a + b \rightarrow a + b)/dt} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Множественные процессы.

Здесь можно выделить важный случай, когда внутренние квантовые числа групп $(c_1 + \dots + c_n)$ и $(d_1 + \dots + d_m)$ те же, что и у частиц a и b . Как и в двухчастичном случае, эти реакции называют дифракционной диссоциацией. При высоких энергиях именно такие реакции составляют подавляющую долю неупругих процессов. Например, процесс $\pi + p \rightarrow 2\pi + \Delta$ происходит в основном посредством «диссоциации» протона на $\pi + \Delta$, т. е. $\pi + p \rightarrow \pi + (\pi + \Delta)$. Процесс $\pi^- + p \rightarrow 2\pi^- + \pi^+ + p$ имеет два максимума, соответствующих «диссоциациям»

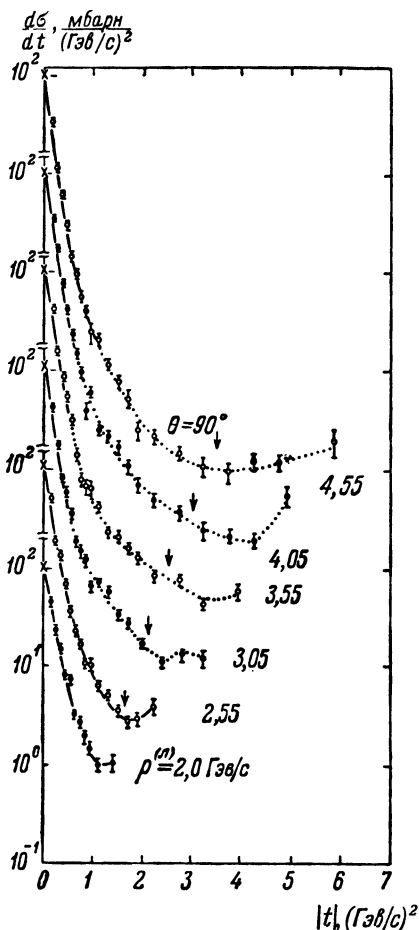


Рис. 19.

пиона $\pi^- \rightarrow (2\pi^- \pi^+)$ и протона $p \rightarrow (\pi^- \pi^+ p)$. Для квазидвухчастичных процессов характерны те же особенности, что и для двухчастичной дифракционной диссоциации. Как и в случае двухчастичных процессов, частицы излучаются (при высоких энергиях) преимущественно вперед и назад (в системе ц. и.). Положим, что c_1, \dots, c_n излучаются вперед (по движению), а частицы d_1, \dots, d_m — назад. Тогда, как и в случае двухчастичных процессов, асимптотическое сечение процесса приближенно постоянно, когда внутренние квантовые числа группы $(c_1 + \dots + c_n)$ те же, что и частицы a , или, в отсутствие обмена квантовыми числами, $a \leftrightarrow (c_1 + \dots + c_n)$. Сечения процессов с обменом, когда система $\bar{a} + (c_1 + \dots + c_n)$ не нейтральна, быстро падают с ростом энергии.

Иногда в эксперименте измеряется только число частиц n заданного сорта c , т. е. изучается процесс $a + b \rightarrow nc +$ (что угодно). Целью экспериментов такого типа является определение множественности n образования частиц c как функции s . При высоких энергиях множественность медленно растет с s :

$$n \approx \text{const} \cdot \ln s \quad \text{или} \quad n \approx \text{const} \cdot s^{1/4}.$$

Заметим, что эксперименты, в которых наблюдаются все частицы — продукты реакции, иногда называют эксклюзивными. Об экспериментах, в которых наблюдаются лишь частицы заданного сорта, говорят тогда как об инклюзивных.

§ 13.2. Оценка поведения амплитуды при высоких энергиях

Асимптотическое поведение амплитуды при больших энергиях представляет интерес с двух точек зрения. Во-первых, можно ожидать, что при высоких энергиях, как и в любом другом предельном случае, поведение амплитуды будет подчиняться простым законам, что позволит произвести четкое сравнение теории с опытом. При этом предполагается, конечно, что теория может предсказать асимптотику. Во-вторых, знание асимптотики настоятельно необходимо для проведения самих вычислений; дисперсионные соотношения § 12.3 были написаны с точностью до вычитаний, которые определялись асимптотикой по инвариантной импульсной переменной. Мы приведем ниже простейший вывод [171] оценки Фруассара [172] для случая упругого рассеяния бесспиновых частиц одинаковой массы m .

Ограничение на рост амплитуды с энергией при высоких энергиях возникает при учете условия унитарности для амплитуды, аналитической в некоторой области по $z = \cos \theta$. Это ограничение связано с существованием унитарного предела парциальных амплитуд (см. конец § 12.4 и рис. 16). В силу условия унитарности возможный асимптотический режим аналитической амплитуды может варь-

роваться только внутри некоторых (довольно широких) границ. Оценка Фруассара относится к верхней границе роста. С помощью оптической теоремы оценки такого типа могут быть выражены через полное сечение.

Предположим, что амплитуда $F(s, t, u) \equiv F(s, z)$ аналитична по $z \equiv z_s = \cos \theta_s$ в эллипсе C с большой полуосью $z_0 = 1 + 2t_M/(s - 4m^2)$ и с фокусами $z = \pm 1$. Значение $t_M > 0$ не зависит от s и совпадает с низшей особенностью в t -канале; в отсутствие полюсов будет $t_M = t_{\min}$, т. е. в рассматриваемой модели $t_M = 4m^2$. Эта область аналитичности по z (эллипс Лемана—Мартэна) превышает физическую область $-1 \leq z \leq 1$. Аналитичность в указанной области может быть доказана [173] из аксиоматической теории поля в предположении, что минимальная масса в теории отлична от нуля.

Предположим также, что, как и в случае дисперсионных соотношений (§ 12.3), амплитуда $F(s, z)$ растет с s (в s -канале) не быстрее полинома степени

$$|F(s, z)| \leq as^N(z) \quad (s \rightarrow \infty) \quad (4)$$

для всех z , лежащих на контуре эллипса Лемана—Мартэна. Убедимся, что эти предположения вместе с условием унитарности налагают ограничения на возможный рост $F(s, z)$ при $s \rightarrow \infty$.

В силу аналитичности $F(s, z)$ по z мы можем воспользоваться формулой Коши

$$F(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(s, z') dz'}{z' - z},$$

где интегрируется по контуру эллипса C .

Перейдем от $F(s, z)$ к парциальным амплитудам $a_l(s)$:

$$\begin{aligned} a_l(s) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2B} \int_{-1}^1 dz \oint_C \frac{P_l(z) F(s, z') dz'}{z' - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i B} \oint_C F(s, z') Q_l(z') dz', \end{aligned} \quad (5)$$

где $B = 8/(2\pi)^5$, $Q_l(z')$ — функция Лежандра второго рода. Из (5) вытекает сразу же оценка

$$|a_l(s)| \leq \frac{1}{2\pi B} |F(s, z)|_{\max} |Q_l(z)|_{\max} 4\xi, \quad (6)$$

где ξ — сумма полуосей эллипса: $\xi = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}$. Асимптотически при $s \rightarrow \infty$ будет

$$\xi \sim 1 + 2 \sqrt{\frac{t_M}{s}}.$$

(Знак \sim обозначает асимптотическое поведение.) Подставляя в (6) значение $|Q_l(z)|_{\max}$ на эллипсе

$$|Q_l(z)|_{\max} \leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{\xi^{-l}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

и предварительную оценку (4) для $|F(s, z)|_{\max}$, мы находим

$$|a_l(s)| \leq \frac{2a}{\pi B} \sqrt{\frac{\pi}{t}} s^N \frac{\xi^{-l+1}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (s \rightarrow \infty),$$

или же

$$|a_l(s)| \leq R(s) \frac{\xi^{-l}}{\sqrt{l}} \sim s^N \frac{\xi^{-l}}{\sqrt{l}}. \quad (7)$$

Из (7) явствует, что при больших s частичная амплитуда $a_l(s)$ быстро убывает с l .

Обратимся теперь к условию унитарности для $a_l(s)$. Согласно ему (см. (7.68) и (12.3)) величина $|a_l(s)|$ не может превосходить унитарного предела:

$$|a_l(s)| \leq \left(\frac{s}{s - 4m^2} \right)^{1/2} \sim 1. \quad (8)$$

Подразделим теперь всю сумму по частичным амплитудам, представляющую $F(s, z)$, на две части. Первая часть $F_1(s, z)$ содержит частичные волны от $l = 0$ до некоторого L , а вторая часть $F_2(s, z)$ — остальное. Выберем угловой момент L таким образом, чтобы для него совпадали оценки (7) и (8). Мы получаем, приравнявая (7) и (8) в асимптотической области,

$$L^{1/2} \xi^L = s^N. \quad (9)$$

Но при $s \rightarrow \infty$ будет $l\xi \sim 2(t_M/s)^{1/2}$. Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ можно выбрать

$$L = \frac{N}{2\sqrt{t_M}} s^{1/2} \ln \frac{s}{s_1}, \quad (10)$$

где s_1 фиксирует шкалу s . Первая часть $F_1(s, z)$ оценивается подстановкой унитарного предела частичной амплитуды (8). Для рассеяния вперед ($z = 1$) мы получаем

$$\begin{aligned} F_1(s, 1) &= B \left| \sum_{l=0}^{L-1} (2l+1) a_l(s) \right| \leq \\ &\leq B \left(\frac{s}{s-4m^2} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{L-1} (2l+1) = B \left(\frac{s}{s-4m^2} \right)^{1/2} L^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Вторая часть $F_2(s, z)$ оценивается с помощью оценки (7), полученной из соображений аналитичности $F(s, z)$ по z . Для рассеяния вперед ($z = 1$)

$$|F_2(s, 1)| = B \left| \sum_{l=L}^{\infty} (2l+1) a_l(s) \right| \leqslant \\ \leqslant BR(s) \xi^{-L} \sum_{l=L}^{\infty} l^{-1/2} (2l+1) \xi^{-(l-L)}. \quad (12)$$

Оценим сумму в этом выражении:

$$\sum_{l=L}^{\infty} l^{-1/2} (2l+1) \xi^{-(l-L)} \leqslant \sum_{l=L}^{\infty} (2l+1) \xi^{-(l-L)} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2L+1+2n) \xi^{-n} = (2L+1) \frac{\xi}{\xi-1} - 2\xi \frac{d[\xi/(\xi-1)]}{d\xi} = \\ = \frac{(2L+1)\xi}{\xi-1} - \frac{2\xi}{(\xi-1)^2}.$$

Асимптотически эта сумма равна величине

$$\sim \frac{s^{1/2}}{2t_M^{1/2}} (2L+1) + \frac{s}{t_M} \sim \frac{N}{2t_M} s \ln s.$$

Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ оценка второй части имеет вид

$$|F_2(s, 1)| \leqslant Bs^N \xi^{-L} \frac{N}{2t_M} s \ln s \sim \\ \sim \text{const } s^{N+1} \ln s \left(1 + 2 \left(\frac{t_M}{s} \right)^{1/2} \right)^{-(N/2)} (t/t_M)^{1/2} \ln s = \\ = \text{const } s \ln s. \quad (13)$$

Таким образом, при $s \rightarrow \infty$ функция $F_2(s, 1)$ растет медленнее, чем $F_1(s, 1)$, и асимптотическое поведение амплитуды характеризуется только частью $F_1(s, 1)$. Мы находим из (10) и (11) оценку Фруасара:

$$|F(s, 1)| \leqslant \text{const } L^2 = \text{const } s \ln^2 s. \quad (14)$$

Первоначально эта оценка была получена с помощью представления Мандельштама. Отсюда с помощью (7.49) и (7.53) выводится оценка для полного сечения:

$$\sigma_{\text{tot}} \sim \frac{16\pi}{Bs} \text{Im } F(s, 1) \leqslant \frac{16\pi}{s} L^2 \sim \text{const } \ln^2 s, \quad (15)$$

и для сечения упругого рассеяния:

$$\left(\frac{d\sigma_{el}}{dt} \right)_{t=0} \sim \left| \frac{1}{s} F(s, 1) \right|^2 \leqslant \text{const } \ln^4 s. \quad (16)$$

Чтобы получить ограничение на рост амплитуды при $t \neq 0$, следует учесть неравенство

$$|P_l(\cos \theta)| \leq (2/\pi t \sin \theta)^{1/2} \quad (0 < \theta < \pi).$$

Пользуясь этим неравенством, можно получить аналогичным путем оценку асимптотики амплитуды при рассеянии на нулевой угол:

$$|F(s, z)| \leq \text{const}(\theta) s^{1/2} \ln^{1/2} s \quad (0 < \theta < \pi). \quad (17)$$

Приведенные выше оценки для степени роста амплитуды существенно опираются на выбор углового момента L , который в свою очередь зависит от предполагаемой области аналитичности. Расширив область аналитичности по z , можно получить [174, 175] более сильное ограничение на рост $F(s, z)$ при $\theta \neq 0$. При рассеянии вперед, $\theta = 0$, эллипс Лемана—Мартэна дает максимально возможную область аналитичности по z , и дальнейшее усиление ограничений невозможно.

Оценка Фруассара не позволяет сделать заключения о том, растет ли полное сечение неограниченно при увеличении энергии или оно стремится к конечному пределу. Если предположить, что амплитуда может расти полиномиально (без членов типа $\ln s$), то, согласно оценке Фруассара, степень роста s^N ограничена $N \leq 1$ и полное сечение будет асимптотически стремиться к константе. Это значит, что число вычитаний в дисперсионном соотношении по s не должно превышать 2, так что мы можем положить в (4) $N = 2$, или

$$L = \left(\frac{s}{t_M}\right)^{1/2} \ln s = \frac{s^{1/2}}{2m} \ln s,$$

и тогда, согласно (15),

$$\sigma_{\text{tot}} \leq \frac{4\pi}{m^2} \ln^2 s. \quad (18)$$

Приведенные выше общие соображения относятся к асимптотической области $s \rightarrow \infty$ и не могут фиксировать число s_1 , связанное с началом асимптотической области. В простейшем случае π -рассеяния число s_1 также может быть найдено [176].

Дифракционный пик. При больших энергиях угловое распределение упругого рассеяния имеет резкий максимум (дифракционный пик) при малых углах $\theta \approx 0$, или $t \approx 0$. Ширина дифракционного пика может быть охарактеризована величиной

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{e1}}{(d\sigma_{e1}/dt)_{t=0}}. \quad (19)$$

Δ равно ширине дифракционного пика в случае, если $d\sigma_{e1}/dt$ убывает с t экспоненциально; т. е. Δ есть интервал квадрата передан-

ного импульса, за который дифференциальное сечение падает в e раз.

Величина $d\sigma_{el}/dt$ при $t = 0$ оценивалась ранее (см. (16)). Видоизменим вывод так, чтобы получить оценку для Δ . Исходим из формулы

$$\left(\frac{d\sigma_{el}}{dt}\right)_{t=0} \sim B \left|\frac{1}{s} F(s, 1)\right|^2 = B \left|\frac{1}{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s)\right|^2.$$

Как и ранее, при выводе оценки для $F(s, 1)$ мы можем заменить бесконечную сумму по l на сумму по l от 0 до $L \sim \text{const } s^{1/2} \ln s$, так как остальная часть суммы растет медленнее с увеличением s . Кроме того, мы воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца, что дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma_{el}}{dt}\right)_{t=0} &\leq B^2 \frac{1}{s} \sum_{l=0}^L (2l+1) \frac{1}{s} \sum_{l'=0}^L (2l'+1) |a_{l'}(s)|^2 \leq \\ &\leq \text{const} \frac{1}{s} L^2 \sigma_{el}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда вытекает оценка для ширины дифракционного пика [177, 178]:

$$\Delta \geq \text{const} \ln^{-2} s. \quad (21)$$

Из этой оценки явствует, что нижняя граница дифракционного пика уменьшается с увеличением s (дифракционный пик может сужаться при увеличении энергии).

Возвратимся еще раз к неравенствам (20) и получим с их помощью связь между асимптотическим поведением полного сечения и сечения упругого рассеяния. Заменяв F на $\text{Im}F$, мы получаем с помощью (10) и (15) неравенство

$$\sigma_{el} \geq \text{const} \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{\ln^2 s} \quad (s \rightarrow \infty). \quad (22)$$

Согласно (22) асимптотика σ_{el} не может резко отличаться от асимптотики σ_{tot} . Если $\sigma_{\text{tot}}(s) \approx \text{const}$, то σ_{el} не может убывать быстрее, чем $\ln^{-2} s$.

Теорема Померанчука. Рассмотрим $\sigma_{\text{tot}}(a, b)$ и $\sigma_{\text{tot}}(\bar{a}, b)$ — полные сечения рассеяния частицы a и античастицы \bar{a} на одной и той же мишени b . Предположим, что асимптотически при $s \rightarrow \infty$ эти сечения конечны и не равны нулю. Тогда они должны быть равны:

$$\sigma_{\text{tot}}(a, b) = \sigma_{\text{tot}}(\bar{a}, b) = \text{const}.$$

В отличие от оценки асимптотики амплитуды, теорема Померанчука не может быть выведена исходя только из общих положений

(локальность полей, или микропричинность, положительность спектра, условие унитарности). Добавочное предположение состоит в требовании, чтобы вещественная часть амплитуды упругого рассеяния вперед убывала медленнее, чем ее мнимая часть:

$$\frac{\operatorname{Re} F(s)}{\operatorname{Im} F(s)} \frac{1}{\ln s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \pm \infty). \quad (23)$$

Функция $F(s)$ равна амплитуде упругого рассеяния вперед $b + a \rightarrow b + a$ (s -канал) на верхнем берегу правого разреза $s \geq s_{\min}$ в комплексной s -плоскости; на нижнем берегу левого разреза $s \leq s(u_{\min})$ функция $F(s)$ есть амплитуда упругого рассеяния вперед для реакции с античастицей $b + \bar{a} \rightarrow \bar{a} + b$ (u -канал).

Если предположение (23) выполняется, то при высоких энергиях амплитуда $F(s)$ будет мнимой. Но в силу предполагаемого постоянства полных сечений и оптической теоремы мнимая часть амплитуды пропорциональна s на обоих концах $s \rightarrow \pm \infty$ вещественной оси:

$$\operatorname{Im} F(s) = \lambda \sigma_{\text{tot}}(a, b) s \quad (s \rightarrow +\infty),$$

$$\operatorname{Im} F(s) = -\lambda \sigma_{\text{tot}}(\bar{a}, b) s \quad (s \rightarrow -\infty),$$

где вещественный множитель λ одинаков для обоих пределов. Следовательно, $F(s) = i\lambda \sigma_{\text{tot}}(a, b)s$ на верхнем берегу справа при $s \rightarrow \infty$ и $F(s) = -i\lambda \sigma_{\text{tot}}(\bar{a}, b)s$ на нижнем берегу слева при $s \rightarrow -\infty$. Теорема Померанчука следует тогда из возможности аналитически продолжить $F(s)$ вдоль окружности бесконечно большого радиуса. (Эта возможность становится очевидной, если рассмотреть для $F(s)$ дисперсионное соотношение по s с одним вычитанием.)

§ 13.3. Гипотеза полюсов Редже и асимптотическая форма амплитуды

Рассмотрим вопрос о возможной асимптотической форме амплитуды упругого рассеяния скалярных частиц одинаковой массы $F(s, t, u)$ в s -канале при больших энергиях и для рассеяния на малые углы, т. е. при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном $t \leq 0$. В силу кроссинг-симметрии и аналитических свойств $F(s, t, u)$ ее асимптотика в s -канале при $s \rightarrow \infty$ и $t \leq 0$ связана с ее асимптотикой в t -канале при конечном $t > 0$ и больших (нефизических) значениях $z_t = \cos \theta_t \rightarrow \infty$ (что соответствует $s \rightarrow \infty$).

На первый взгляд, сведение асимптотики по s в s -канале к асимптотике по z_t в t -канале не позволяет существенно продвинуться в понимании вопроса. Важный вклад в решение проблемы асимптотического поведения амплитуды внес Редже [179].

Редже впервые нашел способ однозначного продолжения парциальных волн $a_l(E)$ в область комплексных l в нерелятивистском случае и показал для этого случая, что асимптотика амплитуды

рассеяния по $z = \cos \theta$ полностью определяется полюсами $l = \alpha(E)$ функции $a(l, E)$ (полюсами Редже) в плоскости комплексных угловых моментов l . (Функция $a(l, E)$ есть аналитическое продолжение $a_l(E)$ в плоскости комплексных l .)

В нерелятивистском случае $a(l, E)$ есть аналитическая функция двух переменных l и E (а не только аналитическая функция l при фиксированном E). Поэтому, будучи первоначально определена при положительных энергиях, $E > 0$ (в области рассеяния), эта функция продолжается аналитически в область $E < 0$.

Местоположение полюса Редже $l = \alpha(E)$ зависит от энергии E ; при изменении энергии полюс Редже описывает некоторую траекторию $\alpha(E)$. Вследствие аналитических свойств $a(l, E)$ траектория полюса Редже $\alpha(E)$ оказывается аналитической функцией E , которая определена как при $E > 0$, так и при $E < 0$. Отрезок траектории с $E < 0$ веществен: $\text{Im}\alpha(E) = 0$, а в области рассеяния $E > 0$ полюсы комплексны: $\text{Im}\alpha(E) \neq 0$. Поэтому точки траектории с целочисленными значениями $\text{Re}\alpha(E) = l_0$ описывают связанные состояния с угловым моментом l_0 при $E < 0$ и резонансы с моментом l_0 при $E > 0$. Таким образом, согласно Редже, асимптотика нерелятивистской амплитуды по z определяется связанными состояниями и резонансами.

Если предположить, что анализ Редже в основных чертах сохраняет свою силу и в релятивистской теории («гипотеза полюсов Редже») [180, 181], то, согласно свойству кроссинг-симметрии, асимптотика амплитуды $F(s, t, u)$ в s -канале предопределена резонансами и связанными состояниями в t -канале. Простота этой связи и последующее развитие физики придают концепции Редже фундаментальное значение.

Мы не будем излагать нерелятивистский случай и начнем сразу с релятивистской теории. Будем опираться на установленные в гл. 12 аналитические свойства полной амплитуды (в комплексной плоскости s и t) и парциальных амплитуд (в комплексных плоскостях l и s), свойства кроссинг-симметрии амплитуды, условие унитарности и, разумеется, на указания, даваемые экспериментом при больших энергиях.

Будем искать асимптотику амплитуды $F(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $s < 0$. Наметим предварительно этапы решения этой задачи. Вначале мы рассмотрим амплитуду F как функцию s и z , в s -канале:

$$F(s, z) = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(z) \quad (z \equiv z_s),$$

и поставим задачу об асимптотике $F(s, z)$ при больших (нефизических) значениях $z \rightarrow \infty$ и фиксированном $s > 4m^2$. Но этот ряд по l сходится только при значениях z , лежащих внутри эллипса с фокусами $z = \pm 1$, несодержащего особенностей $F(s, z)$ (эллипс Ле-

мана — Мартэна, см. § 13.2). Поэтому для нахождения асимптотики $F(s, z)$ при $z \rightarrow \infty$, $s > 4m^2$ будет необходимо прежде всего найти аналитическое продолжение $F(s, z)$ в область больших z . Полученная в итоге функция $F(s, t)$ будет давать асимптотику в t -канале, $t \rightarrow \infty$, при нефизических $s > 4m^2$, так что последний этап состоит в аналитическом продолжении этой функции из области $s > 4m^2$ в область $s < 0$.

Сформулируем исходные предположения об аналитических свойствах амплитуды $F(s, t)$, необходимые для получения ее асимптотики в t -канале.

1. Предполагается, что амплитуда удовлетворяет дисперсионным соотношениям по t с $N'(s)$ вычитаниями, если s фиксировано и лежит в области

$$-a < \operatorname{Re} s < 4m^2 + a, \quad 0 < \operatorname{Im} s < \varepsilon, \quad a > 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (24)$$

которая содержит в себе и промежуток между верхними берегами обоих разрезов в s -плоскости. Число вычитаний N' определяется степенью роста N (см. §§ 12.3, 12.4 и 13.2), так что $N' = N$ для целых N' и $N - 1 < N' < N$ для нецелых N' . Мы положим для простоты $N' = N$.

2. Предполагается, что амплитуда и ее скачки в t - и u -каналах $A_t(t, s)$ и $A_u(u, s)$ аналитичны по s в области (24). Это условие позволит в дальнейшем продолжить функции $a^\pm(l, s)$ из области $\operatorname{Re} s > 4m^2$ в область $\operatorname{Re} s < 0$ по пути, проходящему над вещественной осью и обходящему точки ветвления амплитуды.

Обратимся теперь к отысканию асимптотики амплитуды $F(s, z)$ при $z \rightarrow \infty$, если s лежит на верхнем берегу s -канального разреза (т. е. $\operatorname{Re} s > 4m^2$, $0 < \operatorname{Im} s < \varepsilon$). Воспользуемся аналитическими свойствами функций Грибова — Фруассара $a^\pm(l, s)$ (см. § 12.4) в области комплексных угловых моментов l . Функции $a^\pm(l, s)$ аналитичны по l в полуплоскости, лежащей правее линии $\operatorname{Re} l = N(s)$. В этой области функции $a^\pm(l, s)$ ведут себя при $|l| \rightarrow \infty$ как

$$a^\pm(l, s) \sim \exp(-l\xi), \quad (25)$$

$$\xi = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}, \quad z_0 = 1 + 2t_M/(s - 4m^2),$$

где $t_M = 4m^2$ — первая особенность в t - или u -канале, причем t_M не зависит от s . При целочисленных значениях $l \geq N(s)$ функции $a^\pm(l, s)$ однозначно определяются по физическим парциальным амплитудам $a_l(s)$:

$$a^+(l, s) = a_l(s) \quad \text{при четных } l \geq N,$$

$$a^-(l, s) = a_l(s) \quad \text{при нечетных } l \geq N.$$

Из свойств функций $a^\pm(l, s)$ явствует, что вместо асимптотики $F(s, z)$ можно искать асимптотику функций

$$F^\pm(s, z) = \frac{1}{2} B \sum_{l=0}^N (2l+1) a_l(s) [P_l(z) \pm P_l(-z)] + \\ + \frac{1}{2} B \sum_{l=N}^{\infty} (2l+1) a^\pm(l, s) [P_l(z) \pm P_l(-z)]. \quad (26)$$

Если z находится в физической области, $-1 \leq z \leq 1$, то в силу свойств $a(l, s)$ выражение (26) можно записать в виде контурного интеграла:

$$F^\pm(s, z) = \frac{1}{2} B \sum_{l=0}^N (2l+1) a_l(s) [P_l(z) \pm P_l(-z)] + \\ + \frac{i}{2} B \int_C \frac{(2l+1) a^\pm(l, s) [P_l(z) \pm P_l(-z)]}{\sin \pi l} dl. \quad (27)$$

Контур C (рис. 20) содержит внутри себя только полюсы подынтегрального выражения на вещественной оси l , появляющиеся от $\sin \pi l$. Вычисление интеграла в (27) по вычетам дает (26). Выделение суммы от $l=0$ до $l=N$ в (26) и (27) отражает то обстоятельство, что аналитические свойства $a^\pm(l, s)$ по l известны лишь при $\text{Re } l > N$.

Заменим теперь контур C на контур C' , состоящий из прямой $\text{Re } l > N$ (рис. 20). Интеграл в (27) при этом не изменится, так как $a^\pm(l, s)$ и $P_l(z)$ не имеют особенностей внутри C' , а интеграл по большому полукругу R_C равен нулю в силу свойства (25) функций Грибова—Фруассара и асимптотической оценки для полиномов Лежандра:

$$\left| \frac{(2l+1) P_l(-\cos \theta)}{\cos \pi (l + 1/2)} \right| \leq \frac{c\lambda}{|\sin \theta|^{1/2}} e^{-|\text{Re } \theta \text{ Im } \lambda| + |\text{Im } \theta \text{ Re } \lambda|}, \quad (28)$$

где $\lambda = l + 1/2$. Следовательно, при $-1 \leq z \leq 1$ сумма

$$F_N^\pm(s, z) = \frac{1}{2} B \sum_{l=N}^{\infty} (2l+1) a^\pm(l, s) [P_l(z) \pm P_l(-z)] \quad (29)$$

тождественно равна интегралу

$$F_N^\pm(s, z) = \frac{i}{2} B \int_{C'} \frac{(2l+1) a^\pm(l, s) [P_l(z) \pm P_l(-z)]}{\sin \pi l} dl \quad (30)$$

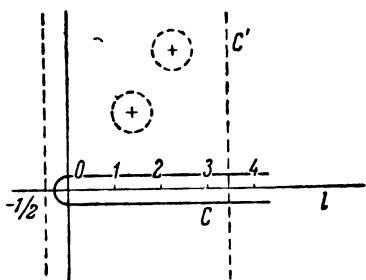


Рис. 20.

вдоль линии C' , параллельной мнимой оси (рис. 20). В отличие от интеграла в (27), интеграл (30) сходится и при $|z| > 1$, поэтому он может служить аналитическим продолжением $F_N^\pm(s, z)$ в область больших z . Однако величина $F_N^\pm(s, z)$ еще не есть амплитуда $F^\pm(s, z)$. Чтобы получить интегральное представление типа (30) для амплитуды, необходимы сведения об аналитических свойствах функций $a^\pm(l, s)$ в области комплексной плоскости l , расположенной левее линии $\text{Re } l > N(s)$.

Согласно гипотезе о полюсах Редже особенности $a^\pm(l, s)$ в плоскости комплексных l представляют собой простые полюсы (полюсы Редже), положение которых зависит от s . Пусть полюсы функций $a^\pm(l, s)$ при $\text{Re } l < N(s)$ находятся в точках $l = \alpha^\pm(s)$ с вычетами $\beta^\pm(s)$, так что каждый полюс вносит вклад

$$\frac{\beta^\pm(s)}{l - \alpha^\pm(s)} \quad (31)$$

(на рис. 20 эти полюсы обозначены крестиками).

Чтобы выделить в (27) вклады полюсов Редже, сместим контур интегрирования C' налево вплоть до совпадения с линией $\text{Re } l = -1/2$. Тогда, кроме интеграла по этой линии, возникнут вклады от полюсов Редже $\alpha^\pm(s)$, а также вклады от полюсов подынтегрального выражения при $l = 0, 1, 2, \dots, N(s)$. Выражение (27) приобретает вид

$$F^\pm(s, z) = \frac{i}{2} B \int_{-\frac{1}{2} + i\infty}^{-\frac{1}{2} + i\infty} dl \frac{(2l+1) a^\pm(l, s) [P_l(z) \pm P_l(-z)]}{\sin \pi l} -$$

$$- \pi B \sum_n (2\alpha_n^\pm(s) + 1) [P_{\alpha_n^\pm}(-z) \pm P_{\alpha_n^\pm}(z)] \frac{\beta_n^\pm(s)}{\sin \pi \alpha_n^\pm(s)} +$$

$$+ \frac{1}{2} B \sum_{l=0}^{N(s)} (2l+1) [a_l(s) - a^\pm(l, s)] [P_l(z) \pm P_l(-z)]. \quad (32)$$

Здесь функции $a^\pm(l, s)$ — результат аналитического продолжения $a^\pm(l, s)$ из области $\text{Re } l > N(s)$. Эти функции могут и не совпадать с $a_l(s)$ при четных (нечетных) $l < N(s)$, как так теорема Карлсона (см. § 12.4) гарантирует единственность продолжения, если $a^\pm(l, s)$ достаточно ограничены при $|l| \rightarrow \infty$, т. е. при $\text{Re } l > N(s)$. Выражение (32) отнесено пока к области $s > 4m^2$. Второе слагаемое в (32) представляет собой вклад от полюсов функций $a^\pm(l, s)$. Левее $\text{Re } l = -1/2$ контур C' сдвигать нельзя без специального исследования, так как входящая в $a(l, s)$ функция $Q_l(z)$ растет экспоненциально при $|l| \rightarrow \infty$ левее $\text{Re } l = -1/2$ (см. (12.45)).

Найдем асимптотику выражения (32) при $|z| \rightarrow \infty$. Так как $z = 1 + 2t/(s - 4m^2)$, то предел больших z при $s > 4m^2$ эквивалентен

пределу $t \rightarrow \infty$. При $\text{Re } l > -1/2$ мы имеем асимптотически

$$P_l(z) \approx \frac{\Gamma(2l+1)}{2^l \Gamma^2(l+1)} z^l + O(z^{l-2}) \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (33)$$

При вычислении асимптотики $P_l(-z)$ существенно, что в (32) $s > 4m^2$, так как при $|z| \rightarrow \infty$

$$P_l(-z) = P_l(z) e^{i\pi l \text{sign } \text{Im } z} + O(z^{l-1}).$$

Физическая область переменной t в t -канале соответствует верхнему берегу разреза в t -плоскости, где $t = \text{Re } t + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $s > 4m^2$ будет

$$\text{Im } z = \text{Im} (1 + 2t/(s - 4m^2)) > 0,$$

и следовательно,

$$P_l(-z) = e^{-i\pi} P_l(z) + O(z^{l-1}). \quad (34)$$

Из этих асимптотических формул для $P_l(z)$ явствует, что в отсутствие третьего члена асимптотика выражения (32) по z при $s > 4m^2$ определяется полюсным членом с наибольшей $\text{Re } l > 0$, или же самым правым полюсом $\alpha^\pm(s)$ в плоскости l . Вклад отдельного полюса $\alpha^\pm(s)$ в $F(s, z)$ при $|z| \gg 1$ равен

$$\pi B (2\alpha^\pm(s) + 1) \beta'^\pm(s) z^{\alpha^\pm(s)} \eta^\pm(s), \quad (35)$$

где η^\pm есть сигнатурный множитель:

$$\eta^\pm = (1 \pm e^{-i\pi\alpha}) \frac{1}{-\sin \pi\alpha^\pm}, \quad (36)$$

т. е. если ввести сигнатуру $\sigma = \pm$, то

$$\eta^\sigma = \begin{cases} i - \text{ctg } \frac{\pi\alpha}{2}, & \sigma = +, \\ i + \text{tg } \frac{\pi\alpha}{2}, & \sigma = -. \end{cases}$$

В (35) введено обозначение

$$\beta' = \beta \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{2^\alpha \Gamma^2(\alpha + 1)}.$$

Интеграл в (32) убывает при $|z| \gg 1$ как $z^{\varepsilon - 1/2}$, $\varepsilon \rightarrow +0$, и потому не дает вклада в асимптотику. В частности, если нет полюсов $\alpha(s)$ и третий член в (32) равен нулю, то амплитуда асимптотически исчезает при $|z| \rightarrow \infty$.

Таким образом, асимптотический режим амплитуды (32) при $t \rightarrow \infty$ будет описываться суммой членов, происходящих от полюсов Редже:

$$F(s, t) \sim \sum_n \pi B (2\alpha_n^\pm(s) + 1) \tilde{\beta}_n^\pm(s) t^{\alpha_n^\pm(s)} \eta^\pm(s), \quad (37)$$

если пренебречь временно третьим слагаемым в (32). Здесь

$$\tilde{\beta}^\pm(s) = \left(\frac{2}{s-4m^2} \right)^{\alpha^\pm(s)} \beta'^\pm(s).$$

Обсудим теперь судьбу третьего слагаемого в (32) и аналитическое продолжение выражений (32) и (37) в область $s < 0$, которая вместе с областью $t > 4m^2$ характеризует t -канал.

Функции $F^\pm(s, t)$ аналитичны по s в области (24) согласно предположению 1 на стр. 357. Далее, в силу предположения 2 функцию $a(l, s)$ можно аналитически продолжить в область (24) к отрицательным s . В этом можно убедиться, переписав (12.36) в виде

$$a^\pm(l, s) = \frac{2B}{\pi(s-4m^2)} \int_{t_M}^{\infty} dt [A_t(s, t) \pm A_u(u(t), s)] Q_l \left(1 + \frac{2t}{s-4m^2} \right)$$

и заметив, что все точки ветвления можно обойти в верхней полуплоскости ($\text{Im } s = \varepsilon > 0$).

Следовательно, в правой части (32) два первых члена и каждое отдельное слагаемое в третьем члене будут аналитичны по s в области (24). Это значит, что число отличных от нуля слагаемых в третьем члене (32) не может зависеть от s и должно быть равно N_{\min} — наименьшему значению $N(s)$ в области аналитичности (24). Но при $s < 0$ мы можем воспользоваться оценкой Фруассара (для t -канала) и положить $N_{\min} = 1$. Тогда третий член в (32) будет содержать парциальные волны $\varphi_0(s)$ (в случае F^+) и $\varphi_1(s)$ (в случае F^-), которые независимы от $a^\pm(l, s)$ и выражают то обстоятельство, что помимо полюсов Редже могут существовать «элементарные полюсы» с $l = 0, 1$.

В случае неупругого рассеяния (\bar{v} t -канале), согласно эксперименту, $N_{\min} < 1$. Далее, при упругом рассеянии (в t -канале) с $s < 0$, по-видимому, также $N(s) < 1$. Тогда можно считать $N_{\min} < 1$ и положить $\varphi_1(s) = 0$. Мы предположим, что $\varphi_0(s)$ также равна нулю. При этих предположениях асимптотика $F^\pm(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ полностью определяется (в рамках гипотезы о полюсах Редже) только выражением (37). Ввиду аналитических свойств $F(s, t)$ и $a(s, l)$ это выражение, будучи выведено первоначально для $t > 0, s > 4m^2$, сохраняет силу и в области (24), т. е. в физической области t -канала ($t > 4m^2, s < 0$).

Аналогичным образом можно получить асимптотику амплитуды в других перекрестных каналах. В s -канале при $s \rightarrow \infty$ вклад одного полюса $\alpha^\pm(t)$ в амплитуду равен (по аналогии с (37))

$$F(s, t) \sim \pi B (2\alpha^\pm(t) + 1) \tilde{\beta}^\pm(t) s^{\alpha^\pm(t)} \eta^\pm(t), \quad (38)$$

где $\tilde{\beta}^\pm(t)$ есть вычет функции

$$\tilde{a}^\pm(l, t) = a^\pm(l, t) \left(\frac{2}{t - 4m^2} \right)^l \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma^2(l+1)}$$

в полюсе Редже $l = \alpha^\pm(t)$.

Положение полюса $\alpha(t)$ в комплексной плоскости угловых моментов изменяется с t . Как и в нерелятивистском случае, эта кривая $\alpha(t)$ называется траекторией Редже (для (37) траектория Редже есть $\alpha(s)$).

Физическое истолкование траекторий Редже. Полюсы $l = \alpha(s)$ иногда называют «движущимися» в отличие от стоячего полюса $l = b$, положение которого не зависит от s . Существование стоячих полюсов несовместимо с упругим условием унитарности (12.52):

$$a(l, s) - a^*(l^*, s) = 2i \left(\frac{s}{s - 4m^2} \right)^{1/2} a(l, s) a^*(l^*, s), \quad (39)$$

которое выполняется в области от $s = 4m^2$ до первого неупругого порога $s_{\text{неупр}}$. Если мы подставим в (39) выражение для амплитуды $a(l, s)$ вблизи стоячего полюса

$$a(l, s) \approx \frac{g(s)}{l - b}, \quad (40)$$

то легко установить, что в качестве условия совместности (39) и (40) при $l \approx b$ следует принять $g(s) = 0$, т. е. вычет в стоячем полюсе должен быть равен нулю при $4m^2 < s < s_{\text{неупр}}$. Но, подобно амплитуде $F(s, t)$, вычет $g(s)$ аналитичен по s . Поэтому, если $g(s) = 0$ на конечном интервале s , то $g(s) \equiv 0$ во всей области аналитичности по s . Заметим, что эти рассуждения верны только при отсутствии движущихся редже-разрезов (что постулировалось ранее в связи с (31)).

Траектории $\alpha^+(s)$ и $\alpha^-(s)$ различны. Поскольку условие унитарности (39) пишется в отдельности для функций a^+ и a^- (см. § 12.4), то и полюсы этих функций будут независимы. О траекториях $\alpha^+(\alpha^-)$ говорят как о траекториях положительной (отрицательной) сигнатуры.

Физическое истолкование траекторий Редже $\alpha(s)$ определяется, с одной стороны, их ролью в описании асимптотического режима амплитуды (37) и, с другой стороны, возможностью связать значения $\alpha(s)$ в отдельных точках с величинами, характеризующими связанные состояния и резонансы. При $s < 0$ траектория Редже $\alpha(s)$, со-

гласно (37), описывает асимптотику в t -канале; при $0 < s < 4m^2$ точки s_J , в которых траектория проходит через целочисленные неотрицательные значения $\alpha(s_J) = J$, могут принадлежать связанному состоянию со спином J и массой $m_J^2 = s_J$. При $s > 4m^2$ в точках, где $\text{Re } \alpha^\pm(s) = J$, траектория полюса проходит близко к физической области (если $\text{Im } \alpha^\pm(s)$ невелико), порождая там резонанс (см. о полюсах и резонансах в § 12.4). Мнимая часть $\alpha(s)$ определяет ширину резонанса. При этом, в соответствии со смыслом функции $a^\pm(l, s)$, траектории с четной сигнатурой $\alpha^+(s)$ могут содержать резонансы только с четными спинами $J = 0, 2, 4, \dots$, а траектории с отрицательной сигнатурой $\alpha^-(s)$ — только резонансы с нечетными спинами $J = 1, 3, 5, \dots$

Чтобы убедиться в возможности сопоставления резонансов точкам траектории $\text{Re } \alpha(s_J) = J$, найдем парциальную амплитуду $a(l, s)$ в s -канале для случая, когда полная амплитуда $F(s, z)$ дается одним полюсом Редже в (32), или слагаемым

$$F(s, z) = \pi B \frac{(2\alpha^\pm(s) + 1) \beta^\pm(s) [P_{\alpha^\pm}(-z) \pm P_{\alpha^\pm}(z)]}{\sin \pi \alpha^\pm(s)}. \quad (41)$$

С помощью формулы

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_J(z) P_\alpha(-z) dz = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi \alpha}{(\alpha - J)(\alpha + J + 1)}$$

мы находим при $\text{Re } \alpha(s_J) = J$

$$a_J(s) = \frac{(2\alpha^\pm(s) + 1) \beta^\pm(s) (1 \pm (-1)^J)}{(\alpha^\pm - J)(\alpha^\pm + J - 1)}. \quad (42)$$

Если сигнатура σ функции α^σ положительна (отрицательна), то для нечетных (четных) целочисленных α полюсы отсутствуют.

Разложим теперь $\text{Re } \alpha$ вблизи резонанса J :

$$\text{Re } \alpha = J + (s - s_J) \alpha'(s_J), \quad \alpha'(s) = \frac{d \text{Re } \alpha(s)}{ds}. \quad (43)$$

Мы предположили, что вблизи резонанса $\text{Im } \alpha(s) \approx \text{Im } \alpha(s_J)$ и $\beta(s) \approx \beta(s_J)$. Тогда для парциальной волны $a_J(s)$ вблизи полюса с $\text{Re } \alpha(s_J) = J$ мы получаем формулу Брейта—Вигнера:

$$\begin{aligned} a_J(s) &= - \frac{(2\alpha^\pm(s_J) + 1) \beta^\pm(s_J) (1 \pm (-1)^J)}{(s - s_J + i\Gamma) \alpha'(s_J) (\alpha + J + 1)} \approx \\ &\approx - \frac{\beta^\pm(s_J)}{(s - s_J + i\Gamma) \alpha'(s_J)} \end{aligned} \quad (44)$$

с шириной

$$\Gamma = \frac{\operatorname{Im} \alpha(s_j)}{\alpha'(s_j)}.$$

Самосогласованность такого истолкования траекторий Редже $\alpha(s)$ требует, чтобы ширина Γ была положительной величиной, которая исчезает ниже первого порога $s_{\min} = 4m^2$. Следовательно, в такой картине $\alpha(s)$ должно быть вещественно при $s \leq s_{\min} = 4m^2$. Поскольку массы резонансов возрастают со спином, т. е. экспериментально $\alpha'(s) > 0$, то должно быть $\operatorname{Im} \alpha(s) > 0$ при $s > s_{\min}$.

Вещественность $\alpha(s)$ в области $0 < s \leq 4m^2$ может быть доказана (в рамках предположений 1 и 2, сделанных в начале этого параграфа, и гипотезы о полюсах Редже) исходя из аналитических свойств величины $(s - 4m^2)^{-l} a^{\pm}(l, s)$ в плоскости комплексных s . С другой стороны, вещественность $\alpha(s)$ выше порога $s_{\min} = 4m^2$ противоречит упругому условию унитарности (39).

Условие унитарности (39) вместе с аналитическими свойствами функций $(s - 4m^2)^{-l} a^{\pm}(l, s)$ позволяют найти [182, 183] пороговое поведение траекторий Редже $\alpha(s)$ ($s_{\min} = 4m^2$):

$$\alpha(s) = \alpha(4m^2) + c(4m^2 - s)^{\alpha(4m^2) + \frac{1}{2}} + \dots, \quad (45)$$

где $\alpha(4m^2)$ и константа c вещественны и $s \geq 4m^2$. Из (45) явствует, что в комплексной плоскости l траектория Редже поднимается в верхнюю полуплоскость, начиная от точки $\alpha(4m^2)$ на вещественной оси.

Из формулы (45) вытекает также, что функция $\alpha(s)$ в комплексной плоскости s имеет разрез вдоль отрезка положительной оси, начиная от первого порога: $4m^2 \leq s < \infty$. Обычно предполагается, на основе соответствия с нерелятивистской теорией, что это есть единственный разрез функции $\alpha(s)$ и, следовательно, $\alpha(s)$ не имеет левого разреза, присущего парциальной амплитуде $a(l, s)$.

Таким образом, в траекториях Редже $\alpha(s)$ могут объединяться две существенные черты физики адронов. С одной стороны, при $s < 0$, когда s имеет смысл инвариантной передачи импульса в t -канале, траектория $\alpha(s)$ определяет асимптотическую форму амплитуды при $t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, при $s > 0$, или в s -канале (где \sqrt{s} имеет смысл инвариантной энергии), траектория $\alpha(s)$ сама определяется связанными состояниями и резонансами s -канала и может быть построена по экспериментальным данным о массах и спинах резонансов. При этом чем ниже энергия резонанса, тем ближе эта часть траектории $\alpha(s)$ к той части $\alpha(s)$, $s < 0$, которая характеризует высокоэнергетическое рассеяние в t канале.

§ 13.4. Простейшие следствия гипотезы о полюсах Редже. Дифракционный пик и полное сечение

Рассмотрим асимптотику амплитуды упругого рассеяния $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ бесспиновых частиц одинаковой массы m в случае столь высоких энергий \sqrt{s} , когда поведение амплитуды в s -канале вполне определяется одной траекторией $\alpha(t)$ с наибольшим $\text{Re } \alpha(t)$.

Выпишем вначале основные формулы для асимптотик в s -канале в однополюсном приближении. Как мы увидим в дальнейшем, эти формулы сохраняют свое значение не только для упругого рассеяния, но и для общего двухчастичного процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Согласно (38) амплитуда в однополюсном приближении при $s \rightarrow \infty$ имеет вид

$$F^{\pm}(s, t) \approx \text{const} (2\alpha^{\pm}(t) + 1) \tilde{\beta}^{\pm}(t) s^{\alpha^{\pm}(t)} \left[i \mp \left(\text{tg} \frac{\pi\alpha^{\pm}(t)}{2} \right)^{\mp 1} \right], \quad (46)$$

где верхние знаки относятся к положительной сигнатуре, а нижние — к отрицательной. Общая константа и вычет $\beta^{\pm}(t)$ в (46) вещественны. В области рассеяния траектория $\alpha^{\pm}(t)$ вещественна (см. § 13.3).

Найдем с помощью (46) асимптотическое поведение в s -канале полного сечения $\sigma_{\text{tot}}(1, 2)$, дифференциального сечения упругого рассеяния $d\sigma_{\text{el}}/dt$ и сечения упругого рассеяния σ_{el} . Эти величины непосредственно наблюдаются в эксперименте (см. § 13.1), и для них имеются строгие оценки (см. § 13.2). По оптической теореме и (46) полное сечение есть

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \frac{16\pi}{B} \frac{1}{[(s-4m^2)s]^{1/2}} \text{Im } F(s, 0) \approx \\ &\approx \text{const} (2\alpha^{\pm}(0) + 1) s^{\alpha^{\pm}(0)-1} \text{Im} \left\{ \tilde{\beta}^{\pm}(0) \left[i \mp \left(\text{tg} \frac{\pi\alpha(0)}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_{\text{el}}/dt$ (в s -канале) в однополюсном приближении асимптотически равно

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} \approx \frac{1}{s^2} |F(s, t)|^2 = |f(t)|^2 s^{2(\alpha(t)-1)}. \quad (48)$$

Экспериментально асимптотическое сечение $d\sigma_{\text{el}}/dt$ как функция t имеет максимум (дифракционный пик) при $t \approx 0$, экспоненциально спадая с увеличением переданного импульса $|t|$ (см. § 13.1). Поэтому область малых t наиболее важна, и мы можем воспользоваться разложением $\alpha(t)$ по t вблизи $t = 0$:

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0) + \dots$$

Зависимостью $f(t)$ от t в (48) мы можем пренебречь, полагая, что $f(t)$ меняется медленно по сравнению с экспонентой. Тогда

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} e^{2\alpha'(0)t \ln s} \quad (t < 0). \quad (49)$$

Следовательно, амплитуда с единственной траекторией Редже действительно описывает экспоненциально убывающее по t сечение, если наклон траектории положителен: $\alpha'(0) > 0$. Для упругого рассеяния положительность $\alpha'(0)$ следует и из теории [184]. При этом скорость спадания дифференциального сечения при малых t зависит от s , и с ростом s максимум сечения сужается (сужение дифракционного пика).

Расположение траекторией $\alpha_n^\pm(t)$ не может быть пока получено из теории. Мы должны поэтому обратиться к экспериментальным фактам (§ 13.1).

Сечение σ_{tot} не будет расти с s , если $\alpha(0) \leq 1$. Значение $\alpha(0) = 1$ соответствует границе Фруассара (при полиномиальном росте амплитуды). Если взаимодействие настолько сильно, что $\alpha(0)$ достигает границы $\alpha(0) = 1$, то для σ_{tot} можно написать выражение

$$\sigma_{\text{tot}} \approx \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\beta}(t) \operatorname{Im} \left[i \mp \left(-\frac{2}{\pi \alpha'(0)t} \right)^{\mp 1} \right],$$

где мы разложили $\alpha(t)$ для малых t : $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t$ ($\alpha'(0)$ вещественно).

В случае положительной сигнатуры в (46) и (47) предел при $t \rightarrow 0$ существует при отличном от нуля $\tilde{\beta}(0)$:

$$\sigma_{\text{tot}} \approx \tilde{\beta}(0) = \text{const}; \quad (50)$$

при этом амплитуда рассеяния вперед в асимптотической области будет чисто мнимой:

$$F(s, 0) \approx i \tilde{\beta}(0) s, \quad \operatorname{Re} F(s, 0) \approx 0.$$

Если сигнатура полюса с $\alpha^-(0) = 1$ отрицательна, то амплитуда при $t \rightarrow 0$ будет вести себя как $\tilde{\beta}(t)/t$, т. е., во-первых, она будет вещественной (при вещественном $\tilde{\beta}(t)$) и, во-вторых, она может быть конечной только при $\tilde{\beta}(t) = at$ вблизи $t = 0$. Этот полюс отрицательной сигнатуры с $\alpha^-(0) = 1$ мы отбросим. Он противоречит теореме Померанчука (§ 12.3) и полуэмпирическим представлениям о том, что при высоких энергиях амплитуда $F(s, 0)$ практически мнима. Далее, вещественная асимптотика $F(s, 0)$, не давая вклада в σ_{tot} , приводит к упругому сечению $\sigma_{\text{el}} \sim |(1/s)F(s, 0)|^2$, которое будет убывать медленнее, чем σ_{tot} , — в противоречии с оценкой (22) и унитарностью.

Траектория, приводящая к постоянному (или почти постоянному при $\alpha(0) \approx 1$) асимптотическому полному сечению (48), назы-

вается траекторией Померанчука α_p . Она имеет положительную сигнатуру и $\alpha_p(0) \approx 1$. Из (50) явствует также, что $\tilde{\beta}_p(0) > 0$. (Этот факт может быть доказан [184].)

Полное упругое сечение σ_{el} в асимптотической области мы находим, интегрируя (49) при $\alpha^+ = \alpha_p$:

$$\sigma_{el} = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} \frac{1}{2\alpha_p'(0) \ln s} \sim \frac{1}{\ln s}. \quad (51)$$

Следовательно, при учете траектории Померанчука упругое сечение убывает логарифмически с энергией, в то время как полное сечение остается постоянным. Ширина дифракционного пика упругого рассеяния $\Delta = \frac{1}{2} \sigma_{el} / (d\sigma_{el}/dt)_{t=0}$ (см. (19)) будет уменьшаться логарифмически с ростом s : $\Delta \sim (\ln s)^{-1}$. По определению все остальные траектории $\alpha_n^\pm(t)$ приводят к убыванию полного сечения (47). Поэтому в плоскости (α, t) эти траектории должны лежать ниже траектории Померанчука: $\alpha_n^\pm(t) < \alpha_p(t)$, $t < 0$.

Дифракционная диссоциация и реакции с перезарядкой. Если проследить вывод однополюсного редже-члена (46) и сделанные при этом предположения, то легко убедиться, что ограничение упругим рассеянием не является существенным. Массы рассеиваемых частиц были положены одинаковыми для того, чтобы избежать излишних усложнений. Точно так же внутренние частицы (в смысле условия унитарности) предполагались более тяжелыми, чем внешние частицы, для того, чтобы избежать нормальных нефизических разрезов от s_{\min} до начала физической области. Ничто не мешает нам распространить методику § 13.3 на случай инвариантной амплитуды для произвольного процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ (в случае бесспиновых частиц) и произвести «реджизацию» амплитуды, т. е. записать ее асимптотику через траектории Редже в перекрестном канале. При этом следует учитывать квантовые числа траекторий α .

Как было показано в § 13.3, траектория $\alpha(s)$ может проходить через резонансы в s -канале при $s > s_{\min}$. Общие квантовые числа этих резонансов, т. е. квантовые числа внутренней симметрии в s -канале, и являются квантовыми числами траектории $\alpha(s)$. Но траектория может и не быть связана с резонансами вообще (если она, например, изменяется с s настолько медленно, что не достигает целочисленных значений $\text{Re } \alpha^\pm = l$ правильной сигнатуры при обзоримых s). В этом случае траектории $\alpha(s)$ также приписываются квантовые числа s -канала. Такое приписывание выражает инвариантность амплитуды относительно преобразований внутренней симметрии при представлении редже-амплитуды в полюсном виде типа (40) (вблизи полюса):

$$a(l, s) \approx \frac{\beta(s)}{l - \alpha(s)} = \frac{g_{\alpha 12}(s) g_{\alpha 34}(s)}{l - \alpha(s)}. \quad (52)$$

При приписывании квантовых чисел траекториям предполагается, следовательно, факторизация вычета на множители $g_{\alpha 12}$ и $g_{\alpha 34}$, характеризующие взаимодействие траектории $\alpha(s)$ с частицами 1, 2 и 3, 4, по тому же правилу, что и для частицы α (см. § 12.3). Факторизуемость вычетов будет продемонстрирована ниже.

Таким образом, полюс Померанчука $\alpha_P(t)$, который определяет асимптотику амплитуды упругого рассеяния в s -канале $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$, должен быть наделен квантовыми числами t -канала, т. е. квантовыми числами системы частица — античастица $1 + \bar{1}$. Это есть квантовые числа вакуума, и потому $\alpha_P(t)$ называют также вакуумной траекторией.

Возникает вопрос: будет ли универсальна вакуумная траектория α_P , т. е. будет ли она встречаться, во-первых, при упругом рассеянии других частиц (например, $1 + 3 \rightarrow 1 + 3$) и, во-вторых, при изучении неупругих процессов s -канала с теми же (вакуумными) квантовыми числами в t -канале (при дифракционной диссоциации)? Интуитивный ответ на этот вопрос, разумеется, положителен. Можно полагать, что траектории Редже есть следствие свойств сильного взаимодействия (и динамики) и потому их существование не может зависеть от конкретного процесса, вызываемого этим взаимодействием. Как мы увидим ниже, из условия унитарности следует, что траектории Редже являются универсальными.

Из универсальности траекторий Редже вытекает, что траектория Померанчука будет описывать асимптотику амплитуды и в случае дифракционной диссоциации. Разумеется, вычеты β могут быть иными, чем в случае упругого рассеяния. Следовательно, асимптотика процесса $\pi + N \rightarrow \bar{A}_1 + N$ будет такой же (формулы (48), (49) при $\alpha^+ = \alpha_P = 1$), что и для упругого пион-нуклонного рассеяния $\pi + N \rightarrow \pi + N$.

Отсюда следует также, что асимптотика процессов с перезарядкой не может характеризоваться траекторией α_P и сечения этих процессов будут убывать быстрее, чем сечения упругих процессов. Этот вывод вполне согласуется с экспериментальной ситуацией (см. § 13.1).

Факторизуемость вычетов в полюсах Редже позволяет рисовать для амплитуды, создаваемой одним редже-полюсом (52), графики (рис. 21, а) того же типа, что и для обычных полюсных членов в амплитуде $F^{(1)} \approx g_{\alpha 12} g_{\alpha 34} / (s - m_a^2)$. Резонанс a при этом заменяется «реджионом». Вместо полюса амплитуды при фиксированной массе $s = m_a^2$ и спине $J = J_a$, определяемых свойствами частицы a , в случае реджионного полюса (52) мы можем получить серию резонансов, для которых масса связана со спином уравнением траектории $\alpha(s)$. В перекрестном канале реджионная диаграмма рис. 21, а определяет асимптотику в t -канале; она связана с обменом реджионом $\alpha(s)$. В случае траектории Померанчука реджион α_P называют помероном.

Как и в случае частиц, введя представление об обмене одним реджионом, мы должны допустить также возможность многореджионных обменов (рис. 21, б). Обмен несколькими реджионами соответствует точке ветвления амплитуды [185, 186] и приводит к последующим членам в асимптотике амплитуды (см. ниже формулы (58)—(60)).

Рассмотрим в качестве примера пион-нуклонное рассеяние $\pi_1 + N_1 \rightarrow \pi_2 + N_2$ (s -канал). В t -канале $\pi_1 + \bar{\pi}_2 = \bar{N}_1 + N_2$ возможны амплитуды с внутренними квантовыми числами $I = 0, I_3 = Y = 0$ и $I = 1, I_3 = \pm 1, 0, Y = 0$ (мы учитываем сильные взаимодействия, которые обладают изоспиновой симметрией). Этим

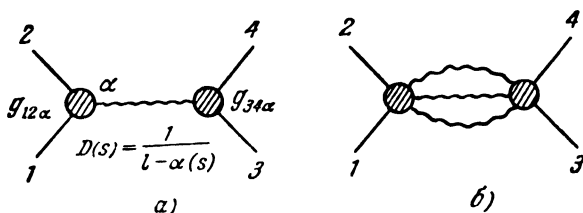


Рис. 21.

амплитудам соответствуют траектории $\alpha(t)$ с такими же квантовыми числами. Среди них будет находиться и вакуумная траектория $\alpha_P(t)$. Все эти траектории могут определять s - и u -канальную асимптотику. В свою очередь s -канальные траектории $\alpha(s)$, которые будут иметь квантовые числа $B = 1, I = 1/2, I_3 = \pm 1/2, Y = 0$ и $B = 1, I = 3/2, I_3 = \pm 3/2, \pm 1/2, Y = 0$, важны для асимптотики u - и t -каналов. В u -канале $\pi_1 + \bar{N}_2 \rightarrow \bar{N}_1 + \pi_2$ мы имеем антибарионные резонансы с $B = -1$ при $I = 1/2, 3/2$. Траектории $\alpha(u)$ с этими квантовыми числами могут дать вклад в асимптотику s - и t -каналов. Какие именно траектории дают решающий вклад, зависит от их взаимного расположения. По своему определению траектория Померанчука дает решающий вклад, если она допустима по квантовым числам.

Факторизуемость вычетов и универсальность траекторий. Чтобы выявить эти свойства [187, 188], рассмотрим реакции в t -канале с участием двух типов бесспиновых частиц, которые мы условно назовем пионами и каонами (мы пренебрегаем осложнениями, связанными с изоспином):

$$\pi + \bar{\pi} \rightarrow \pi + \bar{\pi} \text{ — амплитуда } f(l, t),$$

$$K + \bar{K} \rightarrow \pi + \bar{\pi} \text{ — амплитуда } g(l, t),$$

$$K + \bar{K} \rightarrow K + \bar{K} \text{ — амплитуда } h(l, t).$$

Переход $2\pi \rightarrow 3\pi$ при этом считается запрещенным, как и для реальных пионов.

Соотношения унитарности в t -канале в области упругого рассеяния $4m^2 < t < 16m^2$, $m \equiv m_\pi$, будучи продолжены на комплексные моменты l , записываются в виде

$$\begin{aligned} f(l, t) - f^*(l^*, t) &= 2i\gamma(t) f(l, t) f^*(l^*, t), \\ g(l, t) - g^*(l^*, t) &= 2i\gamma(t) g(l, t) f^*(l^*, t), \\ h(l, t) - h^*(l^*, t) &= 2i\gamma(t) g(l, t) g^*(l^*, t), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\gamma(t) = ((t - 4m^2)/t)^{1/2}$. Второе и третье равенства (53) относятся к нефизической (по t) области реакций $K + \bar{K} \rightarrow \pi + \bar{\pi}$ и $K + \bar{K} \rightarrow K + \bar{K}$, поскольку здесь $t < 4m_K^2$. (При $t > 4m_K^2$ в правой части третьего равенства (53) появляется слагаемое $\gamma_K(t)h(l, t)h^*(l^*, t)$.)

Условия унитарности (53) можно разрешить относительно f , g и h (см. также § 12.4):

$$\begin{aligned} f(l, t) &= \frac{f^*(l^*, t)}{1 - 2i\gamma(t) f^*(l^*, t)}, \\ g(l, t) &= \frac{g^*(l^*, t)}{1 - 2i\gamma(t) f^*(l^*, t)}, \\ h(l, t) &= h^*(l^*, t) + \frac{2i\gamma(t) (g^*(l^*, t))^2}{1 - 2i\gamma(t) f^*(l^*, t)}. \end{aligned} \quad (54)$$

Отсюда следует, что все амплитуды f , g , h имеют один и тот же полюс при $1 - 2i\gamma(t)f^*(l^*, t) = 0$. Вблизи полюса $l = \alpha(t)$ амплитуды имеют вид

$$\begin{aligned} f(l, t) &= \frac{1}{2i} \frac{\beta(t)}{\gamma(t) (l - \alpha(t))}, \\ g(l, t) &= \frac{\beta(t) g^*(l^*, t)}{l - \alpha(t)}, \\ h(l, t) &= \frac{2i\gamma(t) \beta(t) (g^*(l^*, t))^2}{l - \alpha(t)}, \end{aligned} \quad (55)$$

что демонстрирует универсальность траектории $\alpha(t)$.

Из (55) явствует, что вычеты амплитуд $r_{\pi\pi} = \beta/2i\gamma$, $r_{K\pi} = \beta g^*(l^*)$, $r_{KK} = 2i\gamma\beta (g^*(l^*))^2$ можно записать в факторизованном виде:

$$r_{AB}(t) = g_{AA\alpha}(t) g_{B\alpha}(t), \quad (56)$$

где $g_{AA\alpha}$ характеризует «взаимодействие» траектории α с частицами $A = \pi, K$. Это соотношение, полученное при $4m^2 < t < 16m^2$, может быть продолжено аналитически на любые t .

Если одной траектории $\alpha(t)$ достаточно для описания асимптотического режима, то из (56) вытекают предельные соотношения между полными сечениями [187, 188]:

$$\sigma_{AC} \sigma_{BD} = \sigma_{AD} \sigma_{BC}, \quad (57)$$

где $\sigma_{AB} = \sigma_{\text{tot}}(A, B)$.

В частности, для рассеяния частицы на античастице $A + \bar{A} \rightarrow A + \bar{A}$ соотношение (57) дает $\sigma_{\bar{A}\bar{A}} = \sigma_{AA}$, если учесть равенство $\sigma_{\bar{A}\bar{A}} = \sigma_{AA}$. Это согласуется с теоремой Померанчука (§ 12.3). Учет спина не меняет этого результата. Однако при достижимых сейчас энергиях следует учитывать несколько траекторий в амплитуде, и простота предельных соотношений (57) исчезает.

Нефизические состояния и минимумы амплитуды. Если «высота» траектории $\alpha(0)$ положительна, то ввиду положительности наклона $\alpha'(0)$ траектория $\alpha(t)$ может обратиться в нуль при некотором $t < 0$, т. е. в области рассеяния. Но для траектории с положительной сигнатурой точка $\alpha^+(t_0) = 0$ должна отвечать частице δ со спином 0 и с массой $m_\delta^2 = t_0$. В данном случае $t_0 < 0$ и, следовательно, это значение $\alpha^+ = 0$ относится к нефизическому состоянию. Чтобы не допустить такие состояния в теорию, мы должны предположить, что они не взаимодействуют с физическими частицами, т. е. $g_{12\delta}(t_0) = g_{34\delta}(t_0) = 0$ в точке $t = t_0 < 0$. Но тогда весь однополюсный редже-член амплитуды обращается в нуль в этой точке, а сама амплитуда при высоких энергиях будет иметь здесь минимум. С помощью аналогичных рассуждений о недопустимости нефизических состояний мы приходим к выводу, что амплитуда с положительной сигнатурой должна исчезать в точках $t_n < 0$, где $\alpha^+(t_n) = -2n$, $n = 1, 2, \dots$, а амплитуда с отрицательной сигнатурой — в точках $t_m < 0$, где $\alpha^-(t_m) = -(2m + 1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Разумеется, легче всего наблюдать первый минимум (на фоне экспоненциального спада амплитуды с ростом $-t$ от $t = 0$), связанный с целочисленной точкой n ведущей траектории Редже. Такие минимумы наблюдались в сечении рассеяния с перезарядкой.

Гипотеза о полюсах Редже и разрезы. Рассмотрим вкратце еще одно совместное следствие гипотезы о полюсах Редже и условия унитарности, согласно которому функции $a^\pm(l, s)$ должны иметь в плоскости комплексных l кроме простых полюсов также и точки ветвления. Это следствие противоречит исходной предпосылке о мероморфности $a^\pm(l, s)$ в l -плоскости («гипотеза о полюсах Редже»). Если полюсы функции $a^\pm(l, s)$ в l -плоскости дают главный вклад в асимптотическую амплитуду, то, очевидно, гипотеза о полюсах Редже может служить хорошим приближением и указанное противоречие не столь существенно.

Необходимость существования точек ветвления в плоскости комплексных моментов l вытекает из условия унитарности (записанного

не в двухчастичном приближении (39) или (53), а с учетом многочастичных промежуточных состояний). В случае многочастичного промежуточного состояния к двухчастичному слагаемому справа в (39) или (53) добавятся члены, содержащие интегрирования по угловым моментам и массам отдельных комплексов, образующих многочастичное состояние. Аналитическое продолжение такого многочастичного условия унитарности в l -плоскость приводит к появлению в нем амплитуд, содержащих два или более полюсов Редже. Аналогично тому, как пороги рождения физических частиц в s -канале соответствуют точкам ветвления амплитуды в s -плоскости, порог $\alpha_c^{(n)}(t)$ «рождения» n полюсов Редже (т. е. значение углового момента, начиная с которого в правой части условия унитарности возникает дополнительный член с $2n$ полюсами Редже) отвечает (логарифмической) точке ветвления $\alpha_c^{(n)}(t)$ в плоскости l . Местоположение точки ветвления, связанной с n одинаковыми редже-полюсами зависит простым образом от числа n [185, 186]:

$$\alpha_c^{(n)}(t) = n\alpha \left(\frac{t}{n^2} \right) - n + 1. \quad (58)$$

Возникновение такой точки ветвления можно представить также наглядно с помощью реджионных графиков (рис. 21, б). Точка ветвления соответствует добавлению к амплитуде слагаемого, относящегося к одновременному обмену n реджионами. (Такое объяснение является, разумеется, символическим, поскольку оно опирается здесь не на правила построения реджионных диаграмм, а на аналогию с диаграммой техники вообще).

Рассмотрим асимптотику амплитуды, связанную с наличием разреза в l -плоскости у функции $a^\pm(l, s)$ с крайней правой точкой разреза $\alpha_c(s) > 0$, $\text{Im} \alpha_c = 0$. Чтобы выделить в амплитуде необходимое слагаемое, мы предположим, что разрез с точкой ветвления в $\alpha_c(s)$ является единственной особенностью $a^\pm(l, s)$, и возвратимся к переходу от (27) к (32). Тогда вместо суммы по полюсам Редже в (32) мы получим интеграл по границам разреза:

$$F_c^\pm(s, t) = \frac{B}{2} \int_{\alpha_c^\pm(s)}^{\alpha_c^\pm(s)} \frac{1}{2} (2l+1) \Delta a^\pm(l, s) t^l \frac{1 \pm e^{-i\pi l}}{\sin \pi l} dl, \quad (59)$$

где Δa^\pm есть скачок функции $a^\pm(l, s)$ на разрезе:

$$\Delta a^\pm(l, s) = \frac{1}{2} [a^\pm(l_+, s) - a^\pm(l_-, s)]$$

(l_+ и l_- — значения переменной l на верхнем и нижнем берегах разреза).

Сравнивая F_c^\pm с выражением (37) для однополюсного члена амплитуды, мы видим, что вклад F_c^\pm соответствует непрерывному рас-

пределению полюсов Редже. Асимптотически при $t \rightarrow \infty$ вклад от разреза F_c^\pm будет содержать дополнительно $\ln s$ в знаменателе:

$$F_c^\pm(s, t) \approx \text{const} \ln^{-1} s s^{\alpha_c^\pm(t)}. \quad (60)$$

Функция F_c^\pm имеет определенную сигнатуру, но сигнатурный множитель не может быть выделен из-под знака интеграла в F_c^\pm . Поэтому фаза асимптотического выражения для F_c^\pm зависит от вида разреза и скачка Δa^\pm . Из формулы (59) для вклада от разреза явствует, что факторизация «вычетов» (т. е. константы const в (60)) в данном случае не может иметь места.

Таким образом, существование разрезов у $a^\pm(l, s)$ повлекло бы за собой появление в асимптотике амплитуды слагаемого $s^{\alpha_c^\pm(t)}/\ln s$, степень которого определяется положением α_c^\pm крайней правой точки разреза. Более быстрое убывание вклада (60) от разреза по сравнению с полюсом α^\pm при $\alpha^\pm(t) > \alpha_c^\pm(t)$ оправдывает, по-видимому, пренебрежение разрезами в том случае, когда существуют полюсы, энергия достаточно велика и рассматривается рассеяние в пределах дифракционного пика.

Учет спина. Фермионные полюсы Редже. Мы проводили вычисления до сих пор только на примере рассеяния бесспиновых частиц (одинаковой массы), предполагая неявно, что модель полюсов Редже можно распространить и на случай рассеяния частиц со спином. Наличие спина у внешних частиц может вносить осложнения двоякого рода. Во-первых, при рассеянии частиц со спином общая амплитуда разбивается на несколько независимых амплитуд (спиральных или инвариантных), которые к тому же могут иметь кинематические особенности. Процесс реджизации должен применяться в отдельности к каждой независимой амплитуде для рассеяния из состояний с определенной четностью (сильные взаимодействия сохраняют четность). При этом нужно предварительно устранить кинематические особенности. Во-вторых, при рассеянии фермионов возникают дополнительные осложнения, связанные с фермионными полюсами Редже. Полюсы, соответствующие состояниям с противоположной четностью, оказываются комплексно сопряженными в физической области рассеяния [189, 190]. Мы рассмотрим характерные черты влияния спина в модели полюсов Редже на примере пион-нуклонного рассеяния, обусловленного фермионным полюсом Редже.

В рассеянии $N_1 + \pi_1 \rightarrow N_2 + \pi_2$ фермионные полюсы Редже имеют квантовые числа u -канала $N_1 + \bar{\pi}_2 \rightarrow \bar{\pi}_1 + N_2$. Обозначим импульсы нуклонов посредством p_1, p_2 , а импульсы пионов — посредством k_1, k_2 . Разложение спинорной амплитуды $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ по ковариантам u -канала (см. §§ 7.5 и 11.3) имеет вид

$$\mathcal{M} = a + b \hat{q}, \quad (61)$$

где $q = 1/2(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$, а a и b — инвариантные амплитуды. В этих обозначениях $u = q^2$.

Фермионные полюсы Редже в u -канале могут описывать резонансы как с положительной, так и отрицательной четностью (по отношению к нейтрону). Поэтому от инвариантных амплитуд a и b удобно перейти к амплитудам f_+ и f_- с заданной четностью (в системе ц. и. u -канала):

$$\mathcal{M} = f_+(s, t, u) [\hat{q} + \sqrt{u}] + f_- [\hat{q} - \sqrt{u}]. \quad (62)$$

В системе ц. и. u -канала новые коварианты $\hat{q} \pm \sqrt{u}$ превращаются в $\gamma^0 \pm 1$. Но новое разложение \mathcal{M} вводит кинематическую особенность корневого типа \sqrt{u} . Амплитуды a и b такой особенности не имеют (в комплексной плоскости u динамические разрывы начинаются в пороговых точках ветвления, см. § 12.2). Чтобы функции $\sqrt{u}(f_+ - f_-)$ и $f_+ + f_-$ были регулярны и отличны от нуля в точке $u = 0$ при условии $f_+ \neq f_-$ (нет вырождения по четности), мы должны положить

$$f_+ = f(\sqrt{u}, s), \quad f_- = f(-\sqrt{u}, s). \quad (63)$$

Таким образом, амплитуды с противоположной четностью оказываются взаимно связанными. При $u = 0$ они совпадают: $f_+(0, s) = f_-(0, s)$. В u -канале, где $u > (m_N + m_\pi)^2$, амплитуды f_\pm зависят от полной энергии $W = \sqrt{u}$; при этом

$$f_+(W, s) = -f_-(-W, s), \quad W > (m_N + m_\pi). \quad (64)$$

Сравнивая со случаем рассеяния бесспиновых частиц, мы видим, что в рассматриваемом случае (спин $1/2$ и спин 0) у нас есть две независимые амплитуды f_+ и f_- . После перехода к амплитудам Грибова — Фруассара, их аналитического продолжения в область комплексных моментов и введения гипотезы о полюсах Редже мы получим в итоге четыре амплитуды f_+^σ, f_-^σ , отличающиеся по четности и по сигнатуре σ . В случае фермионных полюсов Редже обычно обозначают $\sigma = e, o$ вместо $\sigma = +, -$. Каждому типу амплитуды соответствуют свои собственные траектории

$$j_\pm^\sigma(u) = \alpha_\pm^\sigma(u) + 1/2.$$

Сравним свойства траекторий и вычетов для противоположных четностей. Запишем асимптотические выражения для f_\pm^σ в s -канале в случае одного фермионного полюса $j_\pm^\sigma(u)$:

$$\begin{aligned} f_+^\sigma(s, u) &= \beta_+(u) s^{\alpha_+^\sigma(u)} \eta_+^\sigma(\alpha_+^\sigma), \\ f_-^\sigma(s, u) &= \beta_-(u) s^{\alpha_-^\sigma(u)} \eta_-^\sigma(\alpha_-^\sigma). \end{aligned} \quad (65)$$

В силу (63) мы имеем для каждой сигнатуры σ :

$$\begin{aligned}\alpha_+ &= \alpha(\sqrt{u}), & \alpha_- &= \alpha(-\sqrt{u}), \\ \beta_+ &= \beta(\sqrt{u}), & \beta_- &= \beta(-\sqrt{u}).\end{aligned}$$

Следовательно, при $u=0$ траектории α_+ и α_- и вычеты β_+ и β_- будут совпадать. Покажем теперь, что при $u < 0$ траектории и вычеты, отличающиеся по четности, будут комплексно сопряжены. Для этого рассмотрим абсорбтивные части a_1 и b_1 амплитуд a и b в физической области s -канала:

$$a_1 = (\beta_+ s^{\alpha_+} - \beta_- s^{\alpha_-}) \sqrt{u}, \quad b_1 = (\beta_+ s^{\alpha_+} + \beta_- s^{\alpha_-}),$$

где a_1 и b_1 вещественны. При $u < 0$ отсюда следует:

$$\alpha_+(u) = \alpha_-(u), \quad \beta_+(u) = \beta_-(u). \quad (66)$$

В области $u > 0$ траектории $\alpha_{\pm}(W)$ как функции энергии W в u -канале удовлетворяют условиям симметрии Мак-Дауэлла:

$$\alpha_+(W) = \alpha_-(-W). \quad (67)$$

Следовательно, прямолинейные фермионные траектории $\alpha(u) = \alpha(0) + \alpha' u$ будут вырождены по четности. Этот факт подтверждается экспериментом (см. ниже рис. 22).

Четность системы πN в состоянии с орбитальным моментом есть $\eta_{\pi}(\pi N) = \eta_{\pi}(N)(-1)^{l+1}$, где $\eta_{\pi}(N)$ — четность нуклона (которая считается положительной). При заданном полном моменте J системы πN возможны два значения l : $l_+ = J + 1/2$ или $l_- = J - 1/2$, т. е. парциальные амплитуды $a_{l_+}^J$ и $a_{l_-}^J$ имеют противоположную четность. Отсюда следует, что для бозонов и для фермионов удобно ввести понятие нормальности траектории:

$$\begin{aligned}N &= \eta_{\pi}^{(J)}(-1)^J \quad (\text{бозоны}), \\ N &= \eta_{\pi}^{(J)}(-1)^{J-1/2} \quad (\text{фермионы}),\end{aligned} \quad (68)$$

где $\eta_{\pi}^{(J)}$ и J — четность и спин резонанса на траектории. Значение N сохраняется как вдоль бозонной траектории, так и вдоль вырожденной по четности фермионной траектории.

§ 13.5. Свойства траекторий полюсов Редже

Как было выяснено в предыдущем параграфе, траектории полюсов Редже $\alpha(t)$, с одной стороны, позволяют феноменологически описать асимптотику амплитуды в s -канале при высоких энергиях, $s \rightarrow \infty$, и конечных $t < 0$ (дифракционный пик), а с другой стороны, при $t > t_{\min}$ в области t -канала вещественная часть $\text{Re} \alpha(t_J) = J$ в четных (или нечетных) точках J равна спину резонансов массы $m_J^2 = t_J$; при этом мнимая часть $\text{Im} \alpha(t_J)$ характеризует ширину

резонанса Γ . Таким образом, траектории устанавливают связь между резонансами в одном канале и асимптотикой — в другом (кросс-синг-сопряженном) канале. Набор траекторий $\alpha(s)$, $\alpha(t)$ и $\alpha(u)$ содержит в принципе информацию как о резонансах во всех каналах (в том числе и лежащих при низких энергиях $\approx 1 - 2 \text{ ГэВ}$), так и о высокоэнергетическом поведении данной амплитуды при конечной передаче импульса. Траектории α , подобно частицам, предполагаются универсальными в том смысле, что они одинаковы для всех реакций, коль скоро совпадают их квантовые числа. Поэтому знание траекторий α в этой картине означает установление связи между резонансами и асимптотикой вообще, т. е. для всех реакций. Основные черты описания асимптотики рассеяния и резонансов с помощью траекторий Редже подтверждаются в эксперименте. Все эти обстоятельства придают представлению о траекториях Редже фундаментальное значение в физике адронов.

Сведем воедино свойства траекторий полюсов Редже, рассмотренные ранее в §§ 13.3 и 13.4, дополнив их экспериментальной информацией об известных траекториях.

Каждая траектория α характеризуется набором тех же квантовых чисел, которыми наделяются частицы (заряд, изоспин, четность и т. д.), за исключением спина и массы. Кроме того, траектория α характеризуется сигнатурой σ . Спины соседних резонансов на мезонной или барионной траектории отличаются на 2 единицы. Мезонные траектории с положительной сигнатурой $\sigma = +1$ содержат только четные спины, а траектории с отрицательной сигнатурой $\sigma = -1$ — только нечетные спины.

Набор квантовых чисел траектории зависит от симметрии сильного взаимодействия. В случае SU_3 -симметрии этот набор включает SU_3 -мультиплетность n , изоспин I , аддитивные квантовые числа B , $t = I_3$, Y , а также четность η_p и G -четность η_G . Все резонансы, лежащие на одной и той же траектории, будут иметь одинаковые значения B , n , I , $I_3 = t$, Y , η_G , η_p , т. е. при SU_3 -симметрии существуют $S\bar{U}_3$ -мультиплеты траекторий. Совокупность резонансов, находящихся на траектории, называют иногда реджевским семейством частиц.

Траектория отмечается по находящейся на ней частице с наименьшим спином. Например, ρ -траектория, или α_ρ , есть траектория с квантовыми числами ρ -мезона ($I^G = 1^+$, $\eta_p = -1$, $\sigma = -1$), содержащая мезоны нечетных спинов, начиная с ρ -мезона.

Тот факт, что траектории характеризуются квантовыми числами безотносительно к тем реакциям, асимптотику которых эти траектории определяют, предполагает универсальность траекторий.

Одни и те же траектории определяют асимптотику различных реакций. Это свойство вытекает из условия унитарности (см. § 13.4).

Упругое рассеяние всегда связано с траекториями, обладающими вакуумными значениями зарядов $Q = I_3 = Y = B = 0$. Действи-

тельно, при упругом рассеянии $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ начальное и конечное состояния в t -канальной реакции $1 + \bar{1} \rightarrow 2 + \bar{2}$ всегда содержат пару частица — античастица. Экспериментально установлено существование двух вакуумных траекторий — траектории Померанчука α_P и второй вакуумной траектории $\alpha_{P'}$. Полюс Померанчука $l = \alpha_P$ является по определению самым правым полюсом в плоскости комплексных угловых моментов. Именно траектория $\alpha_P(t)$ обеспечивает постоянство полного сечения (при $t < 0$) при высоких s . Траектории α_P и $\alpha_{P'}$ существенны также и для асимптотики процессов дифракционной диссоциации. Из эксперимента

$$\alpha_{P'}(0) < \alpha_P(0).$$

Квантовые числа траекторий $\alpha(t)$, описывающих асимптотику в s -канале ($1 + 2 \rightarrow 3 + 4$), определяются по квантовым числам инвариантных амплитуд в процессе t -канала ($1 + 3 \rightarrow 2 + 4$). Заряды B, I_3, Y, Q этих траекторий равны зарядам состояний ($1 + \bar{3}$) или ($\bar{2} + 4$). Так как в общем случае амплитуда процесса зависит от нескольких изоспиновых или SU_3 -амплитуд, то асимптотика такого процесса может зависеть от нескольких траекторий. В частности, асимптотика πN -рассеяния вперед будет связана с траекториями $\alpha_P, \alpha_{P'}$ и α_P ; в асимптотику полного сечения процесса $\pi \pm N \rightarrow \rho \pm N$ могут внести вклад траектории $\alpha_\omega, \alpha_{A_2}, \alpha_\pi, \alpha_A$ и т. д.

Вычеты β в полюсах Редже $l = \alpha$ обладают свойством факторизуемости. Факторизуемость вычетов есть следствие условия унитарности. Для реакции в s -канале $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ вычет в полюсе $l = \alpha(t)$

$$\beta(t) = g_{13\alpha}(t) g_{24\alpha}(t)$$

подразделяется на множители $g_{ab\alpha}(t)$, характеризующие взаимодействие частиц a, b с реджионом α . Так как полюсный член амплитуды инвариантен относительно всех преобразований внутренней симметрии, присущей сильному взаимодействию, то $\beta(t)$ также инвариантно относительно этих преобразований. Изоспиновые и SU_3 -инварианты такого типа могут быть построены с помощью методов, изученных в гл. 8 и 10.

Вид траектории $\alpha(t)$ в некоторой степени определяется общими соображениями. Из условия унитарности следует, что $\text{Im } \alpha(t) \neq 0$ при $t > 4m^2$ (выше упругого порога), ибо полюсы не могут находиться на вещественной оси t .

Истолкование полюсов как связанных состояний требует исчезновения мнимой части траектории, $\text{Im } \alpha = 0$, в области $0 < t < 4m^2$ (до упругого порога).

В приближении бесконечно узких резонансов, когда резонансы считаются стабильными частицами, можно положить $\text{Im } \alpha = 0$. Это приближение будет использоваться в дальнейшем изложении.

В точке $t = 0$ выполняется два неравенства:

$$\alpha(0) \leq 1, \quad \alpha'(0) > 0.$$

Первое из них вытекает из оценки Фруассара и предположения о полиномиальном росте амплитуды, второе согласуется с экспериментальным убыванием сечения с переданным импульсом $|t|$ (при $s = \text{const}$).

Проведем (вещественные) траектории $\alpha_X(t)$ через известные резонансы ($t > 0$), воспользовавшись также экспериментальными

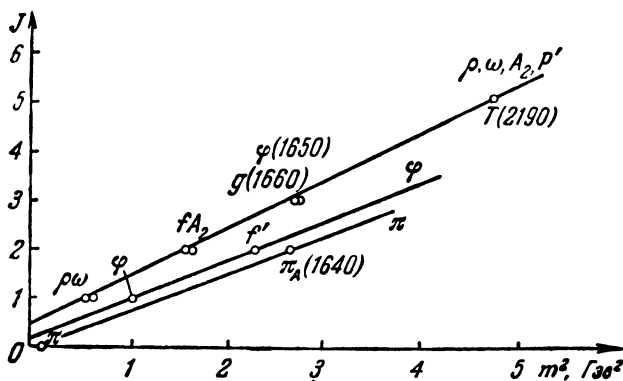


Рис. 22.

данными по рассеянию для области $t < 0$. Тогда мы получим серию мезонных и серию барионных траекторий. К числу наиболее важных мезонных траекторий относятся траектории α_ρ , α_ω , α_{A_2} и $\alpha_{P'}$ (рис. 22).

Траектория α_ρ проходит через частицы ρ ($J^P = 1^-$, $m = 765$ Мэв), g ($J^P = 3^-$, $m = 1660$ Мэв) и T ($J^P = 5^-$, $m = 2190$ Мэв). Вследствие изоспиновой симметрии траектория состоит фактически из трех траекторий $I = 1$, $I_3 = \pm 1, 0$.

Изоскалярная траектория α_ω содержит, кроме частицы ω ($J^{PG} = 1^{--}$, $m = 784$ Мэв), еще частицу ϕ ($J^{PG} = 3^{--}$, $m = 1650$ Мэв).

Изовекторная траектория A_2 , или R , проходит только через один достоверно установленный мезон A_2 ($J^{PG} = 1^{+-}$, $m = 1270$ Мэв). На вакуумной траектории $\alpha_{P'}$ (рис. 22) находится пока также один мезон f ($J^{PG} = 2^{++}$, $m = 1260$ Мэв). Траектории α_ρ , α_ω , α_{A_2} и $\alpha_{P'}$ практически совпадают. Объяснение этому факту («вырождение траекторий») будет дано ниже.

На рис. 22 приведены также траектории α_π и α_ϕ . На π -траектории, кроме пиона $\pi(140)$ с $J^{PG} = 0^{--}$, расположен мезон $\pi_A(1640)$, имеющий $J^{PG} = 2^{--}$. Траектория ϕ , кроме самого мезона $\phi(1019)$ с $J^{PG} = 1^{--}$ и $I^G = 0^-$, пока не содержит других частиц. Мезон f' (1514) с $J^{PG} = 2^{+-}$ и $I^G = 0^+$ начинает новую траекторию, которая, по-видимому, совпадает с траекторией ϕ .

Среди барионных траекторий хорошо установлены Δ , Σ , N , Λ , Σ , Ξ .

Траектория Δ начинается с входящего в декуплет изоквадруплета $\Delta(J^P = 3/2^+, m = 1236 \text{ Мэв})$; на ней находятся также резонансы $\Delta(J^P = 7/2^+, m = 1950 \text{ Мэв})$ и $\Delta(J^P = 11/2^+, m = 2420 \text{ Мэв})$, и на ней можно разместить $\Delta(m \approx 2850 \text{ Мэв})$ и $\Delta(m \approx 3230 \text{ Мэв})$, если подтвердятся спины этих частиц $13/2^+$ и $19/2^+$ (рис. 23).

Другая траектория, связанная с декуплетом, — изотриплетная траектория Σ содержит еще резонанс $\Sigma(J^P = 7/2^+, m = 2030 \text{ Мэв})$ (рис. 23).

Траектории N , Λ , Σ , Ξ начинаются с частиц барионного октета. На нуклонной траектории известен пока один резонанс $N(J^P = 5/2^+, m = 1688 \text{ Мэв})$; по одному резонансу пока содержат и другие траектории октета. Эти резонансы образуют октет со спином $J^P = 5/2^+$ и масса-

ми $m_\Lambda = 1815 \text{ Мэв}$, $m_\Sigma = 1910 \text{ Мэв}$, $m_\Xi = 1930 \text{ Мэв}$. На рис. 23 изображена одна из октетных траекторий — траектория Λ .

В силу симметрии Мак-Дауэлла (см. (67)) барионные траектории должны быть вырождены по четности. Поэтому на рис. 23 изображены также резонансы с отрицательной четностью; эти резонансы действительно хорошо ложатся на траектории, проведенные через резонансы с положительной четностью. Например, траектория Λ проходит через резонансы Λ' ($J^P = 3/2^-, m = 1520 \text{ Мэв}$) и Λ ($J^P = 7/2^-, m = 2100 \text{ Мэв}$).

Траектория Померанчука занимает особое место среди всех траекторий полюсов Редже. Эта траектория в нуле проходит через целочисленное значение ($\alpha_P(0) = 1$), но вследствие положительной сигнатуры точка $\alpha_P(0) = 1$ не может соответствовать частице. На ней, по-видимому, нет резонансов вообще, ибо она имеет малый наклон в нуле ($\alpha_P(0) \approx 0,43 \text{ Гэв}^{-2}$), и первая частица (со спином 2) должна была бы (для линейной траектории) иметь массу $m \approx \approx 2300 \text{ Мэв}$. Такая частица не наблюдалась. В то время как невакуумные траектории описывают асимптотику двухчастичного рассеяния с перезарядкой (которое исчезает при $s \rightarrow \infty$), траектория Померанчука описывает асимптотику упругого рассеяния на малые углы и (для полного сечения) все неупругие процессы. Происхождение этой траектории пока не выяснено.

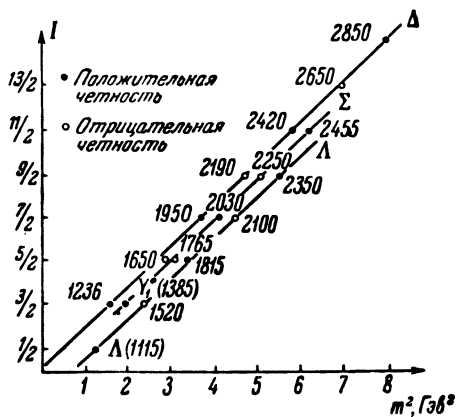


Рис. 23.

Изучение рис. 22 и 23 выявляет следующие характерные черты траекторий.

1. В хорошем приближении траектории линейны не только в малой окрестности $t \approx 0$, но и на конечном интервале t :

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t. \quad (69)$$

2. Наклон $\alpha'(0)$ всех траекторий приблизительно одинаков (за исключением траектории Померанчука):

$$\alpha'(0) \approx 0,9 \Gamma \varepsilon^{-2}. \quad (70)$$

В табл. 13.1 приведены высоты $\alpha(0)$ и наклоны $\alpha'(0)$ некоторых траекторий $\alpha_X(t)$ [191].

Таблица 13.1

Мезонные траектории α_X	$\alpha(0)$	$\alpha'(0), \Gamma \varepsilon^{-2}$	Барионные траектории $\alpha_X (J^P)$	$\alpha(0)$	$\alpha'(0), \Gamma \varepsilon^{-2}$
α_ρ	0,46	0,92	$\alpha_\Delta (3/2^+)$	0,15	0,90
α_ω	0,4	1,0	$\alpha_N (3/2^-)$	-0,94	0,92
α_f	0,5	0,95	$\alpha_N (1/2^+)$	-0,39	1,01
α_{A_2}	0,37	0,98	$\alpha_\Sigma (3/2^+)$	-0,25	0,91
α_K	-0,19	0,78	$\alpha_\Lambda (1/2^+)$	-0,70	0,97
α_{K^*}	0,33	0,82	$\alpha_\Sigma (1/2^+)$	-0,78	0,90

Как мы видели в § 13.4, величины $\alpha(t)$ при $t = 0$ определяют непосредственно асимптотическое поведение амплитуды рассеяния вперед при $s \rightarrow \infty$: $F(s, 0) \approx s^{\alpha(0)}$. Высота $\alpha(0)$ характеризует роль траекторий в формировании асимптотики амплитуды. Из сравнения значений $\alpha(0)$ следует, что после траектории Померанчука наибольшее влияние на асимптотику оказывают мезонные траектории ρ , ω , R и P_1 и барионные траектории Δ_δ , Σ_δ и N_δ .

Зная наклон траектории $\alpha'(0)$ и экспериментальную полную ширину резонансов Γ , можно по формуле $\text{Im } \alpha = \alpha'(0)\Gamma$ вычислить $\text{Im } \alpha$ в резонансных точках. График $\text{Im } \alpha$ как функции $s = m^2$ приближенно линеен (рис. 24) после упругого порога; на рис. 24 сплошной линией изображена прямая $\text{Im } \alpha = 0,14(s - 1, 17)$, штриховой линией — кривая $\text{Im } \alpha = 0,15(s - 1, 2)^{0,95}$.

Вырождение траекторий. Под вырождением траекторий понимается совпадение траекторий различной сигнатуры. При вырождении резонансы с одинаковыми внутренними квантовыми числами располагаются на траектории через 1 единицу спина, а не через 2, как это следует из общей теории (§ 13.3). Например, практически совпадают траектории ρ , $A_2 = R$, ω и $P_1 = f$.

Появление сигнатуры в качестве характеристики траекторий связано с тем обстоятельством, что аналитическое продолжение в область комплексных l возможно только для амплитуд Грибова — Фруассара $a^+(l, s)$ и $a^-(l, s)$ в отдельности (см. § 12.4). Мы обратимся поэтому к определению (12.46) этих амплитуд. В t -канале

$$a^\pm(l, s) = \frac{1}{\pi B} \int_{z_0}^{\infty} [A_s(s(t), z) \pm A_u(u(t), z)] Q_l(z) dz, \quad (71)$$

$$z = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}.$$

Из определения a^\pm следует, что знак \pm не имеет значения для отличия полюсов α^+ от полюсов α^- , если либо A_s , либо A_u не вносят вклада в реджевскую асимптотику $s\alpha^\pm(t)$. Мы будем считать, что (за исключением, может быть, траектории Померанчука α_p) траектории всегда связаны с резонансами. Если, например, нет резонансов типа r в t -канале, то не существует и траектория $\alpha(t)$.

Абсорбтивные части A_s и A_u в физических областях s - и u -каналов могут быть вычислены с помощью условий унитарности (см. § 12.3). Поскольку мы связываем существование траекторий $\alpha_n(s)$ и $\alpha_n(u)$ с существованием резонансов в этих каналах, то для определения вкладов A_s и A_u в реджевскую асимптотику достаточно воспользоваться резонансным приближением. Заменим многочастичные состояния $|n\rangle$ в формулах (12.13) и (12.15) резонансами. Тогда из выражения (71) для a^\pm явствует, что если в s -канале нет резонансов, то вклад A_s в реджевский член равен нулю и траектории $\alpha^\pm(t)$ будут вырождены: $\alpha^+(t) = \alpha^-(t)$. Обе траектории $\alpha^+(t)$ и $\alpha^-(t)$ будут обязаны своим существованием только резонансам в u -канале.

Аналогичным образом, траектории $\alpha^+(t)$ и $\alpha^-(t)$ будут вырождены, если нет резонансов в u -канале и, следовательно, A_u не дает вклада в реджевскую асимптотику. Эти случаи ($A_s = 0$ или $A_u = 0$) отличаются по знаку вычетов в полюсах Редже.

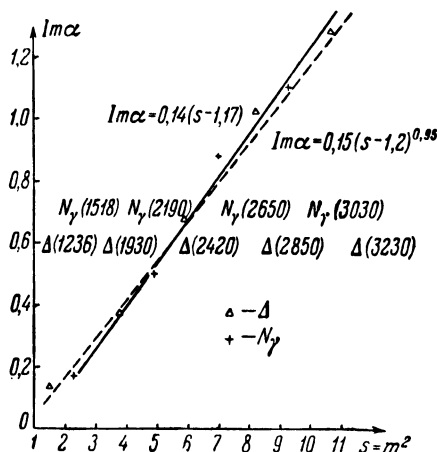


Рис. 24.

Таким образом, вырождение траекторий по сигнатуре, или обменное вырождение, должно означать отсутствие резонансов в одном из сопряженных каналов.

Наблюдаемое на опыте вырождение траекторий (см. рис. 22 и 23) может быть объяснено тем, что не существует экзотических резонансов (см. § 10.3). Предположим, что наблюдаются только такие резонансы, квантовые числа которых равны квантовым числам системы кварк — антикварк $q\bar{q}$ (мезоны) или системы трех кварков qqq (барионы). Дозволенными SU_3 -мультиплетами тогда будут синглет и октет (в случае мезонов) и синглет, октет и декуплет (в случае барионов).

Рассмотрим рассеяние $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. В этом случае s - и t -каналы одинаковы. В них возможны резонансы, начиная с ρ ($I = 1$, нечетные спины) и f ($I = 0$, четные спины), лежащие на траекториях ρ , $\sigma(\rho) = -1$, и f , $\sigma(f) = \pm 1$. В u -канале идет реакция $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$, так что резонансы u -канала должны были бы быть экзотическими (изоспин $I = 2$). Отсутствие экзотических резонансов влечет совпадение траекторий:

$$\rho = f. \quad (72)$$

К аналогичному выводу можно прийти, рассматривая реакцию $\pi^- + K^+ \rightarrow \pi^- + K^+$. В этом случае равенство (72) следует из того, что возможные резонансы в u -канале имеют квантовые числа системы $\pi^- K^-$ и являются экзотическими.

В рассеянии $K^+ + p \rightarrow K^+ + p$ квантовые числа K^+p -системы (изоспин $I = 1$, гиперзаряд $Y = 2$) не принадлежат к «дозволенным» барионным SU_3 -мультиплетам, так что s -канал может содержать лишь экзотические резонансы. Следовательно, траектории в t - и u -каналах должны быть вырожденными. В t -канале $p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^-$ возможно несколько траекторий $\alpha^\pm(t)$: две траектории положительной сигнатуры (изотриплет A_2 и изосинглет f) и две траектории отрицательной сигнатуры (изотриплет ρ и изосинглет ω), а также изосинглетные траектории ϕ и f' . Однако последние две, ϕ и f' , не имеют существенного значения ввиду слабости их взаимодействия с нуклон-антинуклонным каналом. Наличие вырождения, вызванного равенством $A_s \approx 0$, означает, что $(p + \bar{p})$ -комбинации траекторий $(\rho + \omega)$ и $(A_2 + f)$ совпадают.

Аналогичный анализ может быть проделан и для t -канала $p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^-$ реакции $K^+ + p \rightarrow K^+ + p$ с нейтроном, так как K^+p -система имеет также экзотические квантовые числа. Обменное вырождение в этом случае влечет за собой совпадение $(p + \bar{p})$ -комбинации траекторий $(\rho + \omega)$ и $(A_2 + f)$.

Таким образом, отсутствие экзотических резонансов в s -каналах обеих реакций $K^+ + p$ и $K^+ + n$ приводит к равенству траекторий с изоспинами 0 и 1 в отдельности: $\rho = A_2$ и $\omega = f$. Но ранее из реак-

ции $\pi^+\pi^-$ было найдено, что $\rho = f$. Следовательно, отсутствием экзотических резонансов можно объяснить совпадение мезонных траекторий:

$$\rho = A_2 = f = \omega.$$

В действительности экзотические резонансы, по-видимому, существуют, но их вклад в абсорбтивные части амплитуды для реакций с обычными частицами мал по сравнению с вкладом от дозволенных резонансов. К вопросу об экзотических резонансах мы вернемся в § 14.4.

Траектории Редже и классификация частиц. В отличие от классификации частиц по представлениям группы внутренней симметрии типа SU_3 , классификация частиц по реджевским семействам частиц, находящимся на одной и той же траектории Редже, есть прежде всего подход к объяснению спектра частиц. В SU_3 -классификации первый шаг состоит в наделении частиц квантовыми числами и в объяснении лишь расщепления уровней.

Другая отличительная особенность классификации частиц по реджевским семействам состоит в трактовке частиц, лежащих на траекториях, как составных объектов. При изоспиновой или SU_3^- классификации частиц динамическая сложность или элементарность частиц не обсуждалась; группы внутренней симметрии (подобно группе Пуанкаре) приводили к кинематической классификации частиц, элементарность которых отождествлялась с неприводимостью представления. При классификации частиц по реджевским семействам можно различать два типа частиц: частицы-связанные состояния и частицы-резонансы. Частицы первого типа лежат (по массе) ниже многочастичного порога, а частицы второго типа — выше такого порога. Поэтому частицы-связанные состояния стабильны, а частицы-резонансы нестабильны. Но частицы обоих типов являются составными объектами. Таким образом, при классификации по редже-семействам мы впервые сталкиваемся с вопросом, существуют ли среди сильно взаимодействующих частиц более элементарные (и не лежащие на траекториях Редже) или же все частицы имеют одинаковую природу и являются составными. Элементарным частицам могли бы сопоставляться «элементарные» полюсы амплитуды Грибова — Фруассара с $l \leq N_{\min} \approx 1$ (см. (32) и обсуждение третьего члена в (32)).

Сравнение с экспериментом показывает, что трактовка всех сильно взаимодействующих частиц как составных вполне самосогласована. Такие частицы, как нуклон, пион и каон, находят свое место на траекториях. В частности, нуклон лежит на одной траектории с резонансами πN -системы, имеющими спины $5/2^+$, $9/2^+$, ..., являясь первой частицей ($1/2^+$) этого реджевского семейства.

Замечательной закономерностью траекторий является их универсальная линейность и почти универсальный наклон (за исключе-

нием траектории Померанчука). Линейность зависимости массы резонанса от спина $m^2(J)$ и параллельность траекторий для всех частиц и резонансов могут иметь глубокие основания в самосогласованности существования всего наблюдаемого набора сильно взаимодействующих частиц (см. гл. 14). Предполагая, что линейность траекторий сохраняется в экспериментально обозримом интервале масс, мы предсказываем тем самым существование новых резонансов. При этом мы опираемся также на медленный рост с массой ширины резонансов Γ (или мнимой части траекторий), что позволяет пользоваться понятием резонанса при больших массах.

Если принять во внимание изоспиновую симметрию сильных взаимодействий, то мы приходим к выводу, что траектории и реджевские семейства должны существовать в виде изомультиплетов, а в приближении SU_3 -симметрии — в виде SU_3 -мультиплетов.

Глава 14

ДУАЛЬНОСТЬ И МОДЕЛЬ ВЕНЕЦИАНО

Реджевское поведение является характерной чертой амплитуды при высоких энергиях; существование резонансов есть важнейший фактор, определяющий свойства амплитуды при низких энергиях. Но траектории Редже, которые описывают асимптотику амплитуды в s -канале, сами могут проходить (при аналитическом продолжении в области перекрестных каналов) через резонансы в перекрестных каналах. Исключение составляет, по-видимому, только траектория Померанчука. Таким образом (если не рассматривать дифракционное рассеяние и траекторию Померанчука), физика элементарных частиц в существенной степени предопределяется резонансами. Поведение амплитуды при высоких энергиях, однако, нельзя мыслить отдельно от ее поведения при низких энергиях. Значения амплитуды в этих областях связаны правилом сумм при конечных энергиях. Вследствие этого возникает возможность приближенного описания амплитуды либо с помощью полюсов Редже, либо с помощью резонансов при низких энергиях. Такой «дуальный» подход и излагается в данной главе.

В качестве примера дуальной амплитуды мы рассматриваем модельную амплитуду Венециано, многие следствия которой удивительным образом согласуются с опытом. Мы приводим несколько расчетов, использующих модель Венециано. Эти применения не являются вполне обоснованными, и их результаты носят предварительный характер. Однако эти расчеты (например, квантование траекторий) представляются нам весьма наглядными для иллюстрации стиля и духа современной теории элементарных частиц. Мы не рассматриваем многочастичных амплитуд Венециано и не обсуждаем детально проблему унитаризации и другие трудности теории (например, обобщение на случай фермионов).

§ 14.1. Правила сумм при конечной энергии

Знание асимптотики амплитуды рассеяния позволяет оценить дисперсионные интегралы и получить правила сумм, связывающие низкоэнергетическую область изменения амплитуды с ее асимптотическим поведением [192—194]. Вывод правил сумм основывается

на теореме Коши, согласно которой интеграл по замкнутому контуру C от функции $\varepsilon(v)$, регулярной внутри контура, равен нулю:

$$\int_C \varepsilon(v) dv = 0. \quad (1)$$

Будем рассматривать амплитуду рассеяния бесспиновых частиц одинаковой массы $F(v, t)$ как функцию переменных $v = (s - u)/2m$ и t . В комплексной плоскости v функция $F(v, t)$ имеет особенности на вещественной оси v при $v > 0$, связанные с s -каналом, и особенности при $v < 0$, связанные с u -каналом. Физическая область s - и u -каналов соответствует $F(v + i\varepsilon, t)$ и $F(-v - i\varepsilon, t)$. Скачки функции $F(v, t)$ на разрывах, $v > 0$, $t < 0$, равны

$$F(v + i0, t) - F(v - i0, t) = 2i \operatorname{Im} F(v, t), \quad v > 0; \quad (2)$$

$$F(-v + i0, t) - F(-v - i0, t) = 2i \operatorname{Im} F(-v, t), \quad v > 0.$$

Здесь $\operatorname{Im} F(v, t)$ и $\operatorname{Im} F(-v, t)$ -значения мнимой части амплитуды в физических областях s - и u -каналов, т. е. $\operatorname{Im} F(v, t)$ берется над правым разрезом, а $\operatorname{Im} F(-v, t)$ берется над левым разрезом в плоскости v .

Выведем сначала правило сумм для амплитуды $F^-(v, t)$, антисимметричной при $v \rightarrow -v$ (и имеющей отрицательную сигнатуру). Пусть асимптотическая форма $F_{as}^-(v, t)$ при $v \rightarrow \pm \infty$ определяется конечным числом полюсов Редже $\alpha_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Согласно (13.38) мы можем записать F_{as}^- в виде

$$\begin{aligned} F_{as}^-(v, t) &= \sum_{i=1}^n \frac{b_i^-(t) \eta^-(\alpha_i(t))}{\Gamma(\alpha_i(t) + 1)} v^{\alpha_i(t)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{b_i^-(t)}{-\Gamma(\alpha_i + 1) \sin \pi \alpha_i} [(-v)^{\alpha_i} - v^{\alpha_i}], \end{aligned} \quad (3)$$

где b выражается через ранее введенную функцию $\tilde{\beta}$ (см. (13.37)) следующим образом:

$$b_i^-(t) = \pi B(2\alpha_i + 1) \Gamma(\alpha_i + 1) \tilde{\beta}_i^-(t). \quad (4)$$

Все $b_i^-(t)$ вещественны при $t < 0$. Из (3) нетрудно заключить, что аналитические свойства $F_{as}^-(v, t)$ в плоскости v те же, что и функции $F^-(v, t)$ (правый и левый разрезы по v , так как функция v^α имеет разрез при $v < 0$, а функция $(-v)^\alpha$ имеет разрез при $v > 0$).

Выберем в качестве контура C в интеграле (1) контур C_A , изображенный на рис. 25, который уже использовался при выводе дисперсионных соотношений (§ 12.3), но радиус A оставим конечным.

Интеграл по кругу C_A от $F^-(v, t)$ может быть достаточно велик, ибо асимптотически $F_{as}^-(v, t) \sim v^{\alpha(t)} f(t)$, $\alpha \leq 1$. Поэтому применим теорему Коши (1) не к $F(v, t)$, а к функции

$$\varepsilon(v, t) = F^-(v, t) - F_{as}^-(v, t) = -\varepsilon(-v, t),$$

где $F_{as}^-(v, t)$ дано формулой (3). Функция $F_{as}^-(v, t)$ имеет те же

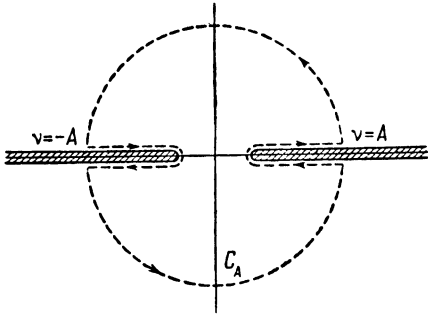


Рис. 25.

свойства кроссинг-симметрии (при $v \rightarrow -v$), что и $F^-(v, t)$, и также удовлетворяет соотношениям (2). Согласно (3) при $v > 0$

$$\text{Im } F_{as}^-(v, t) = \sum_i \frac{b_i^-(t)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} v^{\alpha_i(t)}. \quad (5)$$

Выберем теперь граничное значение $v = A$ таким образом, чтобы: а) при $v \geq A$ можно было воспользоваться $F_{as}^-(v, t)$ вместо $F_{as}^-(v, t)$ и б) интегралом по кругу C_A

$$\int_{C_A} \varepsilon(v, t) dv \approx 0$$

можно было бы пренебречь по сравнению с $\int_0^A \text{Im } F(v, t) dv$. Иначе говоря, мы аппроксимируем асимптотику функций $F^-(v, t)$ суммой по полюсам Редже $F_{as}^-(v, t)$ с точностью до величин порядка $v^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Это предполагает в свою очередь возможность распространения гипотезы о полюсах Редже в l -плоскости на область $\text{Re } l < -1/2$. Действительно, в случае потенциального рассеяния контур интегрирования в l -плоскости (см. (13.27)) можно отодвинуть левее линии $\text{Re } l = 1/2$ (см. [159]).

При этих предположениях в (1) остаются только интегралы по обеим сторонам вещественной оси и, в силу свойств $\varepsilon(v, t)$,

$$\int_0^A \text{Im } \varepsilon(v, t) dv = 0.$$

Следовательно, для амплитуды $F^-(\nu, t)$ имеет место правило сумм

$$\frac{1}{A} \int_0^A \operatorname{Im} F^-(\nu, t) d\nu = \sum_i \frac{b_i^-(t) A^{\alpha_i}}{(\alpha_i + 1) \Gamma(\alpha_i + 1)}. \quad (6)$$

В случае амплитуды $F^+(\nu, t)$, симметричной относительно кросс-перестановки $s \leftrightarrow u$, или $\nu \leftrightarrow -\nu$, аналогичное правило сумм выводится для антисимметричной комбинации $F^+(\nu, t)/\nu$:

$$\int_0^A \frac{d\nu}{\nu} \operatorname{Im} F^+(\nu, t) d\nu = \sum_i \frac{b_i^+(t)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \frac{A^{\alpha_i}}{\alpha_i} + \pi F^+(0, t). \quad (7)$$

В (7) сигнатура траекторий положительна.

Поскольку интервал энергий $0 < \nu < A$ конечен, то правила сумм могут быть написаны также и для четных «моментов» антисимметричной амплитуды $F^-(\nu, t)$:

$$S_n = \frac{1}{A^{n+1}} \int_0^{A_n} \nu^n \operatorname{Im} F^-(\nu, t) d\nu = \sum_i \frac{b_i^-(t) A_n^{\alpha_i}}{(\alpha_i + n + 1) \Gamma(\alpha_i + 1)}. \quad (8)$$

При этом число полюсов Редже, которые должны быть включены в $F_{as}^-(\nu, t)$, и радиус большого круга A_n будут зависеть от (четной) степени n . Функция $F_{as}^-(\nu, t)$ аппроксимирует $F^-(\nu, t)$ с точностью до $\nu^{-n-1-\varepsilon}$, поскольку должно выполняться условие

$$\int_{C_{A_n}} \nu^n \{F(\nu, t) - F_{as}(\nu, t)\} d\nu \sim 0. \quad (9)$$

Число учитываемых полюсов Редже в формуле (3) будет возрастать с увеличением степени n в (8) и (9).

В случае симметричной амплитуды $F^+(\nu, t)$ вместо (8) имеют место формулы

$$\int_0^A \frac{\operatorname{Im} F^+(\nu, t)}{\nu^{n+1}} d\nu = \sum_i \frac{b_i^+(t)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \frac{A^{\alpha_i - n}}{(\alpha_i - n)} + \begin{cases} \pi F^{+(n)}(0, t), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где n — четное число, а $F^{(n)}$ — n -я производная по ν .

В правилах сумм при конечной энергии (ПСКЭ)¹⁾, (8) и (10) интеграл слева охватывает низкоэнергетическую область спектра рас-

¹⁾ Эти правила известны в зарубежной литературе как FESR.

сеяния в s -канале, в то время как правая часть равенств содержит траектории Редже $\alpha(t)$ в t -канале. В этих формулах $t \leq 0$. Правила сумм (8) представляют собой условия совместности, налагаемые аналитичностью амплитуды и асимптотической реджевской формой в предположении (9). Выбор граничной величины $\nu_{\max} = A$ в (6) и (10) определяется началом области асимптотического режима, что, однако, еще не установлено достаточно надежно. Выбор $A \approx 2 \text{ Гэв}$ дает в ряде случаев хорошие результаты.

Непосредственное использование (8) и (9) заключается в корреляции экспериментальных данных — фаз рассеяния и параметров асимптотики. По фазам рассеяния можно находить b_i и α_i , и, наоборот, по известным b_i и α_i можно уточнить параметры низкоэнергетического рассеяния [195].

Но значение ПСКЭ состоит не только в корреляции данных рассеяния. Картины рассеяния при низких и при высоких энергиях существенно различны. При низких энергиях полные сечения выказывают резонансно подобное поведение, так что характерные черты мнимой части амплитуды при низких энергиях определяются резонансами. При высоких энергиях основные черты рассеяния описываются на языке полюсов Редже. Если заменить $\text{Im } F$ в подынтегральном выражении вкладом от резонансов, то ПСКЭ будут представлять собой приближенные соотношения между проинтегрированным вкладом резонансов (в s - и u -каналах), расположенных в области от 0 до $\nu = A$, и вкладом в $\text{Im } F$ от полюсов Редже $\alpha(t)$ при $\nu = A$. Следовательно, в ПСКЭ соединяются два способа приближенного описания рассеяния — резонансное приближение (низкие энергии) и модель полюсов Редже (высокие энергии). В силу аналитичности можно продолжить функции $\alpha^\pm(t)$ и $b^\pm(t)$ из области $t \leq 0$ в область $t > 4m^2$, где t имеет смысл энергетической переменной t -канала. При $t > 4m^2$ траектории $\alpha(t)$ (в правой части ПСКЭ) проходят через резонансы t -канала, и, таким образом, низкоэнергетические резонансы s -канала в $\text{Im } F$ оказываются связанными посредством ПСКЭ с низкоэнергетическими резонансами t -канала в $\alpha(t)$; резонансы прямого канала (левая часть ПСКЭ) как бы «образуют» траектории Редже кроссинг-канала (правая часть ПСКЭ). В свою очередь резонансы t -канала (в ПСКЭ для t -канала) дадут в правой части траектории $\alpha(s)$ с резонансами (при $s < 0$) s -канала. Разумеется, $\text{Im } F$ в низкоэнергетической области определяется не только резонансами; существует «фон» рассеяния. Однако связь между резонансами обоих каналов не утрачивается, если, например, одна из траекторий α не содержит резонансов, но как бы соответствует фону рассеяния и описывает феноменологически влияние неупругих процессов.

Анализ экспериментальных данных и ПСКЭ дает некоторые указания [196, 197] на то, что траектория Померанчука «образована» (в смысле ПСКЭ) нерезонансным фоном s -канальной амплитуды, в то

время как остальные траектории $\alpha(t)$ связаны с резонансами s -канала. Иначе говоря, если представить амплитуду $F(\nu, t)$ как сумму «фона» (или дифракционной части $F_P(\nu, t)$) и «резонансной» (или недифракционной части $F_{\text{res}}(\nu, t)$):

$$F = F_P + F_{\text{res}},$$

то в правиле суммы (n нечетно и положительно)

$$\int_0^A \nu^n \text{Im} F_P^+(\nu, t) d\nu \sim b_P(t) \frac{A^{\alpha_P+1+n}}{(\alpha_P+1+n) \Gamma(\alpha_P+1)} \quad (11)$$

правая часть будет содержать только α_P . Для резонансной части правило сумм будет иметь вид

$$\int_0^A \nu^n \text{Im} (F_{\text{res}} - F_{\text{as}}) d\nu \approx 0, \quad (12)$$

$$\int_0^A \nu^n \text{Im} F_{\text{res}}^\pm(\nu, t) d\nu \approx \sum_{i \neq P} b_i(t) \frac{A^{\alpha_i^\pm+1+n}}{(\alpha_i^\pm(t)+1+n) \Gamma(\alpha_i^\pm+1)},$$

где n положительно и нечетно для F^+ , n нестабильно и четно для F^- . Правая часть второго равенства зависит только от траекторий $\alpha_i(t)$, на которых расположены резонансы t -канала. Равенство (11) означает также, что траектория Померанчука $\alpha_P(t)$ определяет асимптотику упругого рассеяния s -канала независимо от того, имеются ли в этом канале резонансы.

Для иллюстрации ПСКЭ рассмотрим разность полных сечений

$$\sigma'_{\text{tot}} = \frac{1}{2} [\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) - \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p)].$$

Асимптотика σ'_{tot} при $\nu \rightarrow \infty$ хорошо описывается одной траекторией $\alpha_P(t)$, которая определяет также и асимптотику рассеяния с перезарядкой $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ при $t = \text{const} < 0$. В силу оптической теоремы величина σ'_{tot} связана с мнимой частью разности амплитуд рассеяния вперед $\text{Im} F'(\nu, 0)$, где $F' = 1/2 (F(\pi^- p) - F(\pi^+ p))$; в нашей терминологии $F'(s, t)$ является резонансной амплитудой: $F' \equiv F_{\text{res}}^-$ (нет полюса Померанчука в асимптотике). Асимптотическая амплитуда, соответствующая F'_{res} , будет, очевидно, содержать только траекторию α_P : $F'_{\text{as}} \equiv F_P$.

Мы можем теперь записать ПСКЭ (12) при $n = 0$ для случая рассеяния вперед:

$$\int_0^A \text{Im} (F_{\text{res}}^-(\nu, 0) - F_P(\nu, 0)) d\nu \approx 0,$$

и подставить в него функцию $\text{Im } F^-(\nu, 0)$, найденную из экспериментов по измерению $\sigma_{\text{tot}}(\pi^-p)$ и $\sigma_{\text{tot}}(\pi^+p)$ и экстраполированную к малым ν функцию $\text{Im } F_\rho(\nu, 0)$. Графики этих функций изображены на рис. 26. Из них явствует, что не только среднее от реджевского члена $\text{Im } F_\rho$ равно приблизительно среднему от $\text{Im } F$. Вследствие своей монотонности реджевский член $\text{Im } F_\rho$ при низких энергиях сам играет роль своего рода среднего значения величины $\text{Im } F^-$, обладающей резонансным поведением.

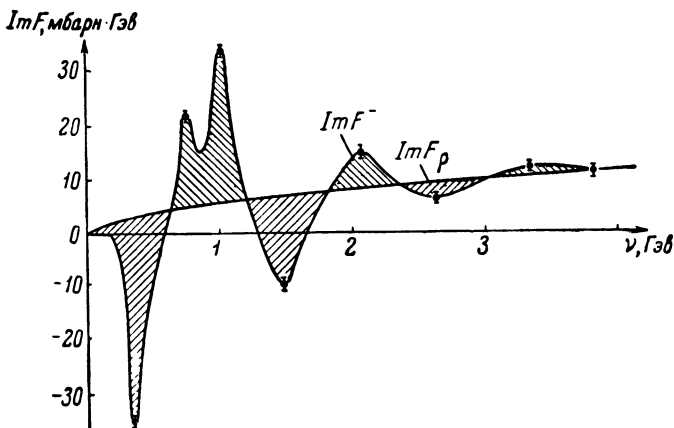


Рис. 26.

ПСКЭ позволяют также взглянуть с иной точки зрения на проблему вырождения траекторий. Ранее (см. § 13.5) мы нашли, что в резонансном приближении траектории t -канала будут вырождены, если в s - или u -канале нет резонансов, и, следовательно, $\text{Im } F = 0$ в этих каналах. При этом левая часть ПСКЭ (12) зависит от траекторий Редже и вычетов; она обращается в нуль, если вклады отдельных слагаемых сокращаются. Для этого должны быть одинаковы не только траектории $\alpha_n^\pm(t)$, но и (с точностью до знака) вычеты $b_n^\pm(t)$. Это не противоречит общей формуле (13.71) для амплитуды $a^\pm(l, t)$, согласно которой в резонансном приближении $a^+ = a^-$ при отсутствии резонансов в u -канале и $a^+ = -a^-$, если нет резонансов в s -канале. Таким образом, ПСКЭ приводят к равенству (с точностью до знака) вычетов $b^+(t) = \pm b^-(t)$ для вырожденных траекторий $\alpha^+(t) = \alpha^-(t)$.

§ 14.2. Дуальность. Дуальные диаграммы

Правила сумм при конечной энергии (12) для «резонансной» амплитуды $F_{\text{гес}}$ и рассмотренный нами пример (рис. 26) дают наводящие указания на возможность развития нового приближенного подхода к построению амплитуды, опирающегося на существование

резонансов и представление о траекториях Редже. Этот подход, получивший название дуального, состоит, в известном смысле, в переходе от интегральных равенств типа (12) (при $n = 0$) к локальным.

Предположим, что интеграл по низкоэнергетической части спектра от $\text{Im } F_{\text{res}}$ в (12) можно заменить приближенно суммой вкладов от резонансов (в s -канале). Это есть известное резонансное приближение в дисперсионном подходе (см. § 12.3). Из дисперсионных соотношений явствует, что амплитуда $F_{\text{res}}(s, t, u)$ представляется тогда в виде суммы полюсных членов s -канала вплоть до асимптотической области по s . Если нет резонансов в s -канале, то

$$F_{\text{res}}(s, t) \approx \sum_n \frac{c_n(t)}{s - s_n}, \quad s_n > 0.$$

При таком приближении мы пренебрегаем нерезонансными значениями абсорбтивных частей амплитуды. Но дисперсионные соотношения дают в принципе полное описание амплитуды (если известны абсорбтивные части).

С другой стороны, согласно (13.32) эта же «резонансная» амплитуда F_{res} может быть записана посредством полюсных редже-членов (без полюса Померанчука) и интеграла по линии $\text{Re } l = -1/2$ в плоскости комплексных l (а также членов, происходящих от разрезов). Пренебрежем этим интегралом (и вкладом от разрезов) и предположим, что амплитуда F_{res} может быть приближенно записана в виде суммы вкладов от конечного числа полюсов Редже в t -канале:

$$F_{\text{res}}(s, t) \approx F_{\text{res}}^R(s, t) = \sum_n \beta_n(t) s^{\alpha_n(t)} \eta(\alpha_n(t)).$$

Именно такое представление амплитуды используется для асимптотической резонансной амплитуды $F_{\text{res}}^{\text{as}}$ в (12).

В дуальном подходе считается, что выполняется не только интегральная формула (12), но и $F_{\text{res}}(v, t) \approx F_{\text{res}}^R(v, t)$ для каждого значения v . Мы приходим к приближенной трактовке, в которой амплитуда описывается либо с помощью резонансов одного канала, либо посредством полюсов Редже в перекрестном канале. Эти описания дополняют и исключают друг друга; они являются дуальными [198—200]. Символически идея о дуальности описаний амплитуды с помощью траекторий Редже в t -канале и резонансов s -канала изображена на рис. 27.

Перечислим предположения, лежащие в основе идеи о дуальности (если нет резонансов в u -канале). Дуальное описание относится к резонансной амплитуде $F_{\text{res}} = F - F_P$, которая остается после выделения из полной амплитуды F дифракционной части, связанной с полюсом Померанчука (см. (11)).

1. Во всей физической области s -канала резонансная амплитуда есть

$$F_{\text{res}}(s, t) \approx \sum_n \frac{c_n(t)}{s - s_n} \approx \sum_i \beta_i(t) s^{\alpha_i(t)}. \quad (13)$$

Число резонансов s_n должно быть бесконечным, так как в этом случае сумма полюсных членов может дать при больших s реджевскую асимптотику. В силу кроссинг-симметрии это приближенное равенство выполняется для резонансов t -канала и реджевских полюсов s -канала.

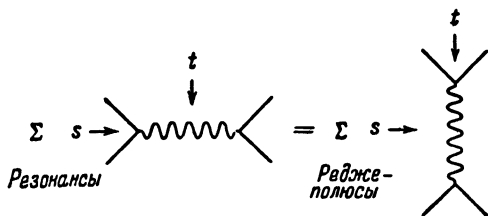


Рис. 27.

2. Сумма резонансных полюсов амплитуды в t -канале есть аналитическая функция, которая приближенно равна при $t < 0$ сумме по полюсам Редже в t -канале:

$$\sum_k \frac{c_k'(s)}{t - t_k} \approx \sum_i \beta_i(t) s^{\alpha_i(t)}. \quad (14)$$

В формулы (13) и (14) резонансы и траектории Редже входят несимметрично в том смысле, что число учитываемых траекторий должно быть конечно, в то время как число резонансов бесконечно. Конечность числа полюсов Редже, входящих в (13) и (14), связана с тем обстоятельством, что сумма по всем полюсам Редже, по-видимому, расходится [201]. Общее число траекторий Редже, разумеется, будет бесконечным, ибо в каждой парциальной волне $\alpha_i(s)$ должно присутствовать бесконечное число резонансов.

3. Кроме этих двух предположений мы будем использовать также экспериментальный факт линейности траекторий и положительности их наклона в плоскости $(\text{Re } \alpha(t), t)$:

$$\text{Re } \alpha = \text{Re } \alpha(0) + \alpha'(0) t,$$

где наклон $\alpha'(0) > 0$ одинаков для всех траекторий (§ 13.5). Чтобы траектория могла содержать бесконечное число резонансов, она должна быть неограниченно растущей.

Предположение о неограниченном росте и прямолинейности траекторий означает, что будет справедливо равенство

$$\sum_k \frac{c_k'(s)}{t-t_k} = \sum_l \sum_l \frac{f_l l^{(s)}}{l-\alpha_l(t)}, \quad (15)$$

где в правой части суммируется по траекториям Редже, входящим в (13) и (14), и по всему бесконечному числу резонансов, лежащих на каждой из этих траекторий. В силу кроссинг-симметрии будет справедливо и аналогичное равенство, получаемое из (15) заменой $t \leftrightarrow s$.

Мы предполагали до сих пор, что в u -канале нет резонансов. Учет этих резонансов в формулах (15)—(17) не вызывает затруднений. Поскольку в этом случае абсорбтивная часть в u -канале A_u будет отлична от нуля, то из дисперсионного соотношения по s следует, что (в резонансном приближении) амплитуда F_{res} в s -канале будет содержать дополнительные члены типа $c'_n/(u-u_n)$. Реджепредставление амплитуды F_{res}^R через траектории в t -канале сохранит свой вид.

Случай, когда в одном из каналов нет резонансов, важен для дуальных теорий, так как отсутствие резонансов влечет за собой вырождение траекторий в перекрестных каналах и число параметров значительно сокращается. При этом возникает возможность самосогласованного вычисления параметров резонансов, лежащих, с одной стороны, на траектории и встречающихся, с другой стороны, в прямом канале.

Дуальные диаграммы. Отсутствующие, или экзотические, резонансы (т. е. резонансы, значение которых в ПСКЭ существенно

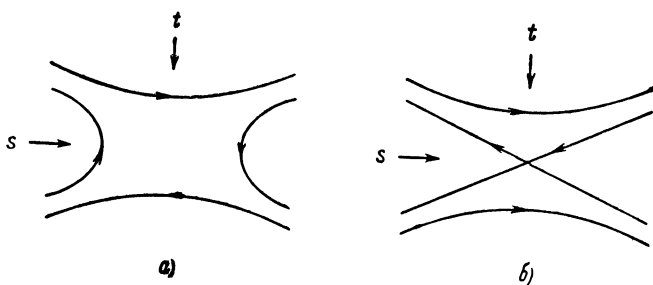


Рис. 28.

подавлено) имеют специфические квантовые числа (см. § 10.2). Экзотические резонансы не существуют в простейшей кварковой модели, где квантовые числа частиц те же, что и у нерелятивистских кварковых комбинаций $\bar{q}q$ (мезоны) и qqq (барионы). Поэтому в кварковой модели можно ввести дуальные диаграммы [202, 203], которые ил-

люстрируют возникающие при этом ограничения дуальной взаимосвязи каналов в случае мезон-мезонного и мезон-барионного рассеяния.

На диаграмме каждый барион изображается тремя одинаково направленными кварковыми линиями, а каждый мезон — одной кварковой и одной антикварковой линиями, т. е. двумя линиями разных направлений (рис. 28). Дуально связанным каналам соответствуют диаграммы типа изображенных на рис. 28, а без пересекающихся линий. Возможные резонансы могут быть найдены по промежуточным кварковым состояниям, т. е. при пересечении диаграммы пополам в направлении интересующего нас канала. Мнимая часть амплитуды равна сумме резонансных вкладов в данном канале.

Диаграмма содержит пересекающиеся кварковые линии (рис. 28, б), если либо в s -канале, либо в t -канале могут быть только экзотические резонансы. Переходя к дуальной диаграмме этого же процесса для u - и t -каналов, которая не содержит пересечений, мы убеждаемся, что резонансы отсутствуют в s -канале. Следовательно, мнимая часть амплитуды F_{res} в s -канале равна нулю при больших s и «дуально» связаны только u - и t -каналы. Диаграмма на рис. 28 может описывать процессы $K + \pi \rightarrow K + \pi$.

Дуальные диаграммы содержат не только информацию, связанную с асимптотической унитарной симметрией и отсутствием экзотических состояний. Действительно, предполагая в кварковой модели, что возможны лишь комбинации qq и qqq , мы тем самым отбрасываем более сложные комбинации типа $2qq$, $qqq(\bar{q}q)$, даже если они дают синглетные и октетные состояния.

Чтобы выяснить предположения, сделанные при обосновании дуальных диаграмм, рассмотрим мезон-мезонное рассеяние $a + b \rightarrow \bar{c} + \bar{d}$, где частицы a , b , c и d принадлежат псевдоскалярному октету P (см. § 10.1). Выпишем реджевскую амплитуду в s -канале (в переменных $v = (s - u)/2m$), аналитически продолженную на малые s , приняв во внимание факторизуемость вычетов (13.52) и исключив предварительно полюс Померанчука [202, 203]:

$$F_{\text{res}}(a + b \rightarrow \bar{c} + \bar{d}) \rightarrow \rightarrow \Sigma_E g_{aEc}(t) g_{b\bar{E}d}(t) \frac{-\sigma_E \exp[-i\pi\alpha_E(t)]}{\sin \pi\alpha_E(t)} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\alpha_E(t)}. \quad (16)$$

В SU_3 -инвариантной теории траектория E должна относиться к серии одинаковых траекторий с квантовыми числами частиц в SU_3 -мультиплете, т. е. реджион E является SU_3 -мультиплетом. Взаимодействия g_{aEc} и g_{aEd} траекторий E (или реджиона) с частицами должны быть SU_3 -инвариантными; они могут быть построены по тем же правилам § 10.3, по которым строятся лагранжианы взаимодействия.

Выберем в качестве траекторий E векторные $V(J^P = 1^-)$ и тензорные $T(J^P = 2^+)$ нонеты траекторий с сигнатурой $\sigma_V = -1$, $\sigma_T = +1$. Мы выбираем нонеты, а не октеты ввиду необходимости принять во внимание смешивание нейтрального члена октета с SU_3 -синглетом (см. § 10.2). Взаимодействия («лагранжианы») реджиона $E = V, T$ с мезонным октетом P имеют вид

$$g_{P, TP} = \sqrt{2} \gamma_{PT} \left[\text{Sp} (P_1 \{T, P_2\}) - \frac{2}{3} \text{Sp} (P_1 P_2) \text{Sp} T \right], \quad (17)$$

$$g_{P, VP} = i \sqrt{2} \gamma_{PV} \text{Sp} (P_1 [V, P_2]), \quad (18)$$

где γ_{PT}, γ_{PV} — константы связи псевдоскалярного октета P с траекториями T - и V -типа, а P, T и V — 3×3 -матрицы мультиплетов (см. § 10.1). Взаимодействие g_{PTP} описывается чистой D -связью, а g_{PVP} — чистой F -связью (см. § 10.3), так как F -связь в (16) и D -связь в (17) противоречит инвариантности относительно зарядового сопряжения. По этой же причине в (17) не включено взаимодействие мезонов P с синглетной компонентой нонета траекторий $\text{Sp}(PP) \text{Sp} V$.

Пусть s -канал экзотичен, т. е. имеет квантовые числа экзотических резонансов, и, следовательно,

$$\text{Im} F_{\text{res}}(P_a + P_b \rightarrow P_c + P_d) = 0, \quad s \gtrsim 4m^2, \quad t \approx 0. \quad (19)$$

Здесь P_a, \dots, P_d — те члены псевдоскалярного октета P , для которых системы $(P_a + P_b)$ и $(P_c + P_d)$ экзотичны, например $\pi^+\pi^+$. Равенство (19) является исходным в доказательстве дуальности дуальных диаграмм. Мы подставим реджевскую амплитуду (16) в качестве F_{res} в (19), а затем найдем условия исчезновения ее мнимой части. Мы привлечем также экспериментальные данные (см. § 13.5), согласно которым часть V - и T -траекторий вырождена:

$$\alpha_{P'} = \alpha_{A_2} = \alpha_{\omega} = \alpha_{\rho} \equiv \alpha_0, \quad (20)$$

$$\alpha_{K^*} = \alpha_{K^*} \equiv \alpha_1, \quad \alpha_{f'} = \alpha_{\varphi} \equiv \alpha_2.$$

Кроме того, мы учтем экспериментальное равенство $\gamma_{PT} = \gamma_{PV} \equiv \gamma_P$.

После подстановки экспериментальных соотношений в (16) реджевская недифракционная часть амплитуды F_{res} может быть записана в виде

$$F_{\text{res}}(a + b \rightarrow c + d) \sim$$

$$\begin{aligned} &\sim 4\gamma_P^2 \{ [(P_c, i^j P_a, j^k P_b, k^t P_d, t^i) + (P_a, i^j P_c, j^k P_d, k^t P_b, t^i)] \times \\ &\quad \times [i - \text{ctg} \pi \alpha_i^k(t)] + [(P_c, i^j P_a, k^t P_d, t^i P_b, i^j) + \\ &\quad + (P_a, i^j P_c, j^k P_b, k^t P_d, t^i)] [-\text{csc} \pi \alpha_i^k(t)] \} \left(\frac{s}{s_0} \right) \alpha_i^k(t), \quad (21) \end{aligned}$$

где P_i^j и α^j — матричные элементы матриц P и α , причем согласно (20) $a_{\beta\beta'} = \alpha_0$ при $\beta, \beta' = 1, 2$, $\alpha_{\rho 3} = \alpha_1$, $\alpha_3^3 = \alpha_2$.

Выражение (21) служит основой для построения дуальных диаграмм (рис. 28) для мезонов. Индексы a частиц P_a соответствуют входным и выходным точкам диаграммы, кварковые линии — суммированию по кварковым индексам в (21) (при этом верхний индекс относится к антикварку, а нижний индекс — к кварку). «Дозволенная» диаграмма (рис. 28, а) есть не что иное, как символическое изображение коэффициента при $(-\text{ctg } \pi\alpha + i)$ в (21). Действительно, если преобразовать этот коэффициент к виду

$$(P_d P_c)_i^j (P_a P_b)_j^i + (P_c P_d)_i^j (P_a P_b)_j^i, \quad (22)$$

то становится очевидным, что он не содержит промежуточных состояний из мультиплетов 10 , 10^* и 27 . Антидуальная диаграмма с пересекающимися линиями (рис. 28, б) представляет коэффициент при $-\text{csc } \pi\alpha$. Первое слагаемое в (21) практически чисто мнимо, если подставить $\alpha \approx 1/2$, в то время как второе слагаемое вещественно. Исчезновение коэффициента (22) при $(-\text{ctg } \pi\alpha + i)$ в (21), или отсутствие диаграммы рис. 28, а, означает, согласно (19), отсутствие резонансов s -канала. Разумеется, для экзотических промежуточных состояний в s -канале коэффициент (22) исчезает автоматически.

Аналогичный анализ может быть проведен для мезон-барионного и барион-барионного рассеяния. В случае барион-барионного рассеяния построение дуальных диаграмм вызывает затруднения.

§ 14.3. Модель Венециано

Венециано [204] предложил модельное выражение для дуальной амплитуды в предположении, что траектории прямолинейны, а резонансы бесконечно узки. Мы полагаем поэтому $\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s$, $\text{Im } \alpha(s) = 0$ в случае траектории $\alpha(s)$. Аналогичные равенства предполагаются для траекторий $\alpha(t)$ и $\alpha(u)$.

Рассмотрим для простоты рассеяние $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, где имеются лишь два дуальных канала s и t . В u -канале идет процесс $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$, так что резонансы u -канала могут быть только экзотическими ($I = 2$), которые мы отбрасываем. Процессы в s - и t -каналах совпадают, и амплитуда $F_{\text{res}}(\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-)$ должна быть симметрична по s и t . Полюсы в обоих каналах включают резонансы, находящиеся на траекториях ρ и f с $J^G = 0^+ \text{ и } 1^+$. Отсутствие резонансов с $I = 2$ влечет за собой обменное вырождение ρ - и f -траекторий, $\alpha_\rho = \alpha_f$. Поэтому резонансы на общей $\alpha_{\rho f}$ -траектории должны следовать через одну единицу спина.

Амплитуда Венециано $V(s, t)$ является функцией траекторий и для процесса $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ имеет вид

$$V(s, t) = -\lambda \frac{\Gamma(1-\alpha(s)) \Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(1-\alpha(s) - \alpha(t))}, \quad \lambda > 0, \quad (23)$$

где траектория $\alpha = \alpha_{\text{от}} \text{ с } \alpha(0) \approx 1/2$ считается линейной, λ — константа, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re } z > 0,$$

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

Если ввести бета-функцию Эйлера [205]

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (24)$$

то амплитуда (23) будет равна

$$V(s, t) = -\lambda (1-\alpha(s) - \alpha(t)) B(1-\alpha(s), 1-\alpha(t)). \quad (25)$$

Функция $\Gamma(z)$ обладает полюсами при целых неположительных $z = 0, -1, -2, \dots$. Вычет $\Gamma(z)$ в полюсе $z = -n$ ($n \geq 0$) равен

$$\lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z) (z+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}. \quad (26)$$

Поэтому при $t \leq 0, s > 0$ амплитуда (23) описывает резонансы s -канала с массой $s = m_J^2$ при $\alpha(m_J^2) = J = 1, 2, \dots$, а при $s \leq 0, t > 0$ — те же резонансы в t -канале. В области $s > 0, t > 0$ вычеты в полюсах по переменной s , будучи рассмотрены как функции t , не имеют полюсов по t , так как в этой точке знаменатель также приобретает полюс.

При $|z| \rightarrow \infty$ ($|\arg z| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0$)

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left(1 + \frac{1}{z} (a-b)(a+b-1) \right). \quad (27)$$

Если положить $z = -\alpha(s) = -\alpha(0) - \alpha'(s)$, то (27) будет верно при

$$|s| \rightarrow \infty, \quad |\arg s| < \pi - \varepsilon,$$

т. е. во всей комплексной s -плоскости, кроме положительной части вещественной оси, где есть полюсы (если $\text{Im } \alpha' = 0$). Используем этот факт, введя мнимую часть α' , т. е. положив

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(s), \quad \text{Im } \alpha' = \text{const} = \varepsilon > 0.$$

Тогда мы получаем из (27) реджевскую асимптотику

$$V(s, t) \sim \lambda \Gamma(1 - \alpha(t)) (-\alpha' s)^{\alpha(t)}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Введением мнимой части α' при выводе (28) мы имитировали «размазывание» резонансов, необходимое для того, чтобы можно было сравнить $V(s, t)$ с реальной амплитудой. Аналогично

$$V(s, t) \sim \lambda \Gamma(1 - \alpha(s)) (-\alpha' t)^{\alpha(s)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Из этих выражений следует, что наклон траектории α' играет роль величины, характеризующей шкалу энергии в теории полюсов Редже.

Кроссинг-симметрия амплитуды Венециано явствует из ее вида (23). Можно показать также [204], что амплитуда Венециано удовлетворяет правилам сумм § 14.1, так что интеграл от моментов $V(s, t)$ по $v = s - u$, с одной стороны, равен «взвешенной» сумме реджевских членов, а, с другой стороны, эта сумма образуется из резонансных вкладов $V(s, t)$.

Таким образом, амплитуда Венециано удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к дуальным амплитудам. Резонансы и реджевское поведение определяются в $V(s, t)$ траекториями и формой амплитуды. Понятие траектории α является основным для дуальной амплитуды Венециано. Рассмотрим поведение амплитуды $V(s, t)$ вблизи полюса s -канала $\alpha(m_J^2) = J = 1, 2, \dots$ Согласно (26)

$$\Gamma(1 - \alpha(s)) \sim \frac{(-1)^J}{(J-1)! \alpha' (s - m_J^2)}, \quad (30)$$

так что вблизи полюса $V(s, t) \approx c_J / (s - m_J^2)$ при

$$\begin{aligned} c_J &= \lambda \frac{1}{\alpha'} (1 - \alpha(t) - J) \frac{\alpha(t) (\alpha(t) + 1) \dots [\alpha(t) + (J-2)]}{(J-1)!} \equiv \\ &\equiv \lambda \frac{1}{\alpha'} (1 - J - \alpha(t)) \binom{\alpha(t) + (J-2)}{(J-1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу линейности траекторий c_J является полиномом степени J по t . В физической области s -канала t содержит линейно $\cos \theta$, так что в (31) встречаются все полиномы Лежандра вплоть до $P_J(\cos \theta)$. Следовательно, полюс s -канала $\alpha(m_J^2) = J$ относится не только к частице со спином J , но и к частицам меньших спинов («дочерям») $J - 1, J - 2, \dots, 0$. Ввиду однозначного соответствия между полюсами и траекториями каждая основная («материнская») траектория с $\alpha(m_J^2) = J$ будет сопровождаться серией дочерних траекторий $\tilde{\alpha}^{(n)}$ с $\tilde{\alpha}^{(n)}(m_J^2) = J - n$. На рис. 29 дочерние траектории проходят параллельно основной («материнской») траектории с шагом $\Delta J = 1$. Число дочерних траекторий $\tilde{\alpha}^{(n)}$ бесконечно велико,

поскольку бесконечно число резонансов на основной траектории. Амплитуда Венециано (23) может быть представлена в виде суммы

$$V(s, t) = -\lambda \sum_{J=1}^{\infty} \binom{\alpha(t) + J}{J-1} \frac{1 - \alpha(s) - \alpha(t)}{J - \alpha(s)}, \quad (32)$$

которая в силу $\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(s)$ и $\alpha(mJ^2) = J$ является разложением по полюсам s -канала. Вследствие (s, t) -симметрии $V(s, t)$ аналогичная сумма может быть написана и в t -канале. Таким образом, бесконечный набор полюсов в s -канале генерирует набор полюсов

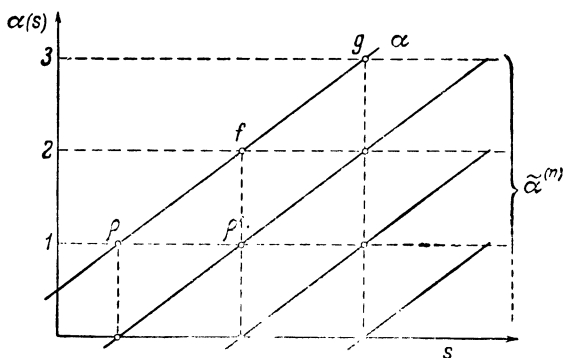


Рис. 29.

в t -канале, и наоборот, а описания амплитуды с точки зрения полюсов (резонансов) и траекторий эквивалентны. Однако выражение (23) для амплитуды неоднозначно, так как к нему можно добавить слагаемые типа

$$V'(s, t) = -\lambda' \frac{\Gamma(m - \alpha(s)) \Gamma(n - \alpha(t))}{\Gamma(m + n + p - \alpha(s) - \alpha(t))} \quad (33)$$

$$(p \leq 0, \quad -p \leq m, \quad -p \leq n, \quad m, n \geq 1),$$

не изменяя основных свойств амплитуды. Отличие (33) от (23) состоит в том, что первый полюс (33), связанный с траекторией $\alpha(s)$, появляется теперь при $\alpha(s) = m$, а первый полюс (33) на $\alpha(t)$ лежит при спине $\alpha(t) = n$. Асимптотика (33) имеет вместо (28) и (29) вид

$$\begin{aligned} V'(s, t) &\sim s^{\alpha(t) - n - p}, & s \rightarrow \infty, \\ V'(s, t) &\sim t^{\alpha(t) - m - p}, & t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (34)$$

Слагаемые типа (33) называются спутниками.

При определении амплитуды Венециано посредством бета-функции (25) неопределенность относительно слагаемых типа (33) со-

ответствует тому, что если внести под интеграл бета-функции в (25) функцию $f(x)$, регулярную в окрестности отрезка $0 \leq x \leq 1$, и

$$B \rightarrow B' = \int_0^1 f(u) u^{-\alpha(s)-1} (1-u)^{-\alpha(t)-1} du, \quad (35)$$

то дуальные свойства амплитуды (25) не изменятся. Разложение функции f в ряд приводит к сумме сателлитов:

$$B = f(0)B + \sum_{m,n} \sum_{p=0} c_{n,m,p} \frac{\Gamma(n-\alpha(s)) \Gamma(m-\alpha(t))}{\Gamma(n+m+p-\alpha(s)-\alpha(t))}, \quad (36)$$

где $n > 0$, $m > 0$, $p_0 = -\min(n, m)$, $f_0 = -\lambda$. Член с $m = 1$, $n = 1$, $p = -1$ из суммы исключен.

С помощью некоторых сателлитов можно устранить^{*} нежелательные дочерние траектории [206]. Но общая амплитуда Венециано во всех случаях оказывается определенной лишь с точностью до сателлитов.

Другой существенный недостаток модели Венециано состоит в том, что она несовместима с условием унитарности. Так как траектории α вещественны, то полюсы лежат при вещественных s и t , что противоречит унитарности, согласно которой резонансные полюсы должны находиться на втором листе. При исчезновении же мнимой части полюса (т. е. при исчезновении полной ширины резонанса) должен обращаться в нуль и вычет в полюсе (т. е. парциальная ширина).

Амплитуда Венециано (23) написана для случая бесспиновых частиц. Обобщение ее на случай фермионов встречается с затруднениями.

Сигнатура в модели Венециано. В рассмотренном примере рассеяния $\pi^- + \pi^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$ имелось вырождение по сигнатуре траекторий Редже в s - и t -каналах. Поэтому сигнатура не входила явно в формулы. Обратимся поэтому к другому процессу — рассеянию $\pi + K \rightarrow \pi + K$ (s -канал).

В t -канале $\pi + \pi \rightarrow K + K$ имеется две независимые амплитуды $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$ с изоспинами $I = 0$ и $I = 1$. Как в s -канале, так и в u -канале происходит обмен вырожденной траектории с резонансами K^* (892), K^{**} (1420) (см. § 13.5); в t -канале траектории те же, что и в $\pi\pi$ -рассеянии, т. е. $\alpha_p = \alpha_t$. Обозначим

$$W_{\rho K^*}(t, s) = \frac{\Gamma(1-\alpha_\rho(t)) \Gamma(1-\alpha_{K^*}(s))}{\Gamma(1-\alpha_\rho(t)-\alpha_{K^*}(s))}, \quad (37)$$

$$W_{K^* K^*}(s, u) = \frac{\Gamma(1-\alpha_{K^*}(s)) \Gamma(1-\alpha_{K^*}(u))}{\Gamma(1-\alpha_{K^*}(s)-\alpha_{K^*}(u))}.$$

Обмен местами пионов в t -канале не меняет амплитуду, но при этом происходит замена $s \leftrightarrow u$. С другой стороны, состояние $I = 0$ симметрично, а состояние $I = 1$ — антисимметрично относительно изоспиновых переменных пионов. Поэтому амплитуда $F^{(0)}(t, s, u)$ должна быть симметрична в s и u , а амплитуда $F^{(1)}(t, s, u)$ — антисимметрична в s и u . Амплитуда $F^{(0)}$ может быть построена как из $W_{\rho K^*}$, так и из $W_{K^* K^*}$, в то время как $F^{(1)}$ зависит только от $W_{\rho K^*}$. Действительно, $W_{K^* K^*}(s, u)$ симметрично относительно замены $s \leftrightarrow u$ и потому дает вклад лишь в F^0 . Однако $W_{K^* K^*}(s, u)$ не дает вклада в асимптотику при $s \rightarrow \infty$, $t = \text{const}$ (но дает вклад при $s \rightarrow \infty$, $u = \text{const}$). Поэтому $W_{K^* K^*}(s, u)$ не играет роли в асимптотике по s , которую мы должны будем получить, чтобы выявить сигнатурный множитель.

Таким образом, мы можем построить из $W_{\rho K^*}$ амплитуды заданной симметрии по s и u и отождествить их с $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$:

$$F^{(I)}(s, t, u) = -\lambda^I (W_{\rho K^*}(t, s) + (-1)^I W_{\rho K^*}(t, u)), \quad (38)$$

$$\lambda^I \geq 0.$$

С помощью формулы для гамма-функций

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (39)$$

выражение (38) преобразуется к виду

$$F^{(I)}(s, t, u) = -\frac{\pi \lambda^I}{\Gamma(\alpha_\rho(t)) \sin \pi \alpha_\rho(t)} \left\{ (-1)^I \frac{\Gamma(1 - \alpha_{K^*}(u))}{\Gamma(1 - \alpha_\rho(t) - \alpha_{K^*}(u))} + \frac{\sin \pi(\alpha_\rho(t) + \alpha_{K^*}(s))}{\sin \pi \alpha_{K^*}(s)} \frac{\Gamma(\alpha_\rho(t) + \alpha_{K^*}(s))}{\Gamma(\alpha_{K^*}(s))} \right\}.$$

Чтобы выявить сигнатурный множитель, мы должны изучить это выражение в асимптотической области $|s| \rightarrow \infty$, $\arg s \sim \varepsilon$. Тогда с помощью (27) нетрудно найти, что асимптотически

$$F^{(I)}(s, t, u) \sim \beta^I(t) \left\{ \frac{\cos \pi \alpha_\rho(t) + (-1)^I}{\sin \pi \alpha_\rho(t)} + \text{ctg} \pi \alpha_{K^*}(s) \right\},$$

$$\beta^I(t) = -\frac{\pi \lambda^I}{\Gamma(\alpha_\rho(t))}. \quad (40)$$

Первое слагаемое в (40) имеет знакомую форму вещественной части реджевского полюсного члена (см. § 13.3). Второе слагаемое при $\text{Im} \alpha_{K^*} = 0$ содержит полюсы на вещественной оси s . Если же $\text{Im} \alpha$ отлично от нуля и возрастает с s , как это следует из эксперимента (§ 13.5), то при $s \rightarrow \infty$ $\lim \text{ctg} \alpha(s) = -i$ и выражение (40)

приобретает обычный сигнатурный множитель:

$$F^{(I)} \sim \beta^I(t) \frac{(-1)^I + e^{-i\pi\alpha_\rho(t)}}{\sin \pi\alpha_\rho(t)} (s\alpha')^{\alpha_\rho(t)}. \quad (41)$$

При этом отношение $\text{Im } \alpha_{K^*} / \text{Re } \alpha_{K^*}$ должно с ростом s оставаться малым.

Формулы (28), (29) и (40) показывают также, что линейность траекторий $\alpha(s)$ в асимптотической области $s \rightarrow \infty$ представляет собой необходимое условие появления реджевской асимптотики в модели Венециано.

§ 14.4. Некоторые приложения модели Венециано

Ширина резонансов. Модель Венециано содержит только несколько параметров. Поэтому ее предсказания легко проверяются. В случае рассеяния $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ вычеты (31) амплитуды (23) зависят только от одной константы λ . Но вычет в полюсе, соответствующем резонансу s - или t -канала, характеризует константу взаимодействия резонанса с системой $\pi^+\pi^-$ при нулевой передаче импульса или константу распада резонанса на $\pi^+\pi^-$. В амплитуде Венециано (23) константа λ одинакова для всех частиц, находящихся на траектории α , и определяет, таким образом, вместе с α' относительную величину парциальной ширины $\Gamma_{\pi\pi}$ резонансов, лежащих на α .

Феноменологическое взаимодействие $\pi\pi$ -системы с ρ -мезоном записывается в виде

$$G_{\rho\pi\pi} \varepsilon^\mu (q_1 + q_2, \sigma) (q_1 - q_2)_\mu,$$

где ε^μ — вектор поляризации ρ -мезона. Вычет в ρ -мезонном полюсе амплитуды тогда равен

$$-G_{\rho\pi\pi}^2 4(qq'), \quad q_1 = -q_2 = q,$$

где q и q' — начальный и конечный импульсы частиц π^+ в системе ц. и. С другой стороны, вклад в (23) от члена с $J = 1$ равен $-\lambda\alpha't$, что включает и долю дочерней траектории, проходящей через точку $J = 0$ при $t = m_J^2$. Вклад же ρ -мезона равен $-\lambda\alpha'2(qq')$, откуда находим λ :

$$\lambda\alpha' = 2G_{\rho\pi\pi}^2. \quad (42)$$

$G_{\rho\pi\pi}$ известно из ширины ρ -мезона $\Gamma_\rho \approx 100 \text{ Мэв}$, откуда $\lambda \approx 50$. Ширина Γ_f следующего резонанса f определяется согласно (31) через Γ_ρ и наклон траектории $\alpha' \approx 0,9$, который находится независимо по резонансам (см. § 13.5).

$\pi\pi$ -рассеяние [207]. Построим из амплитуд (23) изоспиновые амплитуды $T^{(I)}$ для $\pi\pi$ -рассеяния. В силу симметричной статистики для пионов амплитуды $T^{(I)} (I = 0, 2)$ в s -канале симметричны при замене $t \leftrightarrow u$, а амплитуда $T^{(1)}$ антисимметрична. Следовательно,

в s -канале

$$\begin{aligned} T_s^{(0)} &= \beta(V_{\rho\rho}(s, t) + V_{\rho\rho}(s, u)) + \gamma V_{\rho\rho}(t, u), \\ T_s^{(1)} &= a'_L(V_{\rho\rho}(s, t) - V_{\rho\rho}(s, u)), \\ T_s^{(2)} &= V_{\rho\rho}(t, u). \end{aligned} \quad (43)$$

Соотношения между коэффициентами a , β , γ можно получить из условия отсутствия экзотических резонансов. Для амплитуд (43) это означает, что в t -канале $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ амплитуда с $I_t = 2$ равна нулю (I_t — изоспин в t -канале). Выражая амплитуду T_t в t -канале через амплитуды T_s в s -канале (43) и кроссинг-матрицу X_{ts} :

$$T_t^{(2)} = \sum_I (X_{ts})^2 \cdot T_s^{(I)} = \gamma V_{\rho\rho}(s, u), \quad (44)$$

нетрудно найти $\gamma = -1/2 a$, $\beta = +3/2 a$. Далее, амплитуда $T_t^{(0)}$ не может иметь полюса при $\alpha(t) = 1$, ибо траектория $\alpha_\rho(t)$ изовекторна, а на траектории α_t резонансы начинаются с $J = 2$:

$$[\text{вычет } T_t^{(0)}] = 0 \quad \text{при } \alpha(t) = 1, \quad (45)$$

откуда $a = 1$. Таким образом, все три $\pi\pi$ -амплитуды (43) зависят от одной константы λ .

Пусть один из пионов имеет нулевую массу и его импульс также стремится к нулю, в то время как остальные пионы находятся на массовой поверхности $p_i^2 = m_\pi^2$ ($i = 2, 3, 4$). Тогда инвариантные переменные равны $s = t = u = m_\pi^2$. Можно попытаться применить формулу Венециано (23) для амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния вне поверхности масс без всяких изменений. Оказывается, что при этом получаются результаты, совпадающие с выводами алгебры токов, которая рассматривается в следующей главе.

Как будем показано в гл. 15, при $p_{1\mu} \rightarrow 0$ имеет место равенство

$$F_1^-(m_\pi^2, m_\pi^2, m_\pi^2) = 0, \quad p_{1\mu}(\pi) = 0 \quad (46)$$

(см. условие самогласованности Адлера (15.74)). Чтобы амплитуда $W_{\rho\rho}(s, t, u)$ удовлетворяла условию (46), должно выполняться равенство

$$\alpha_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2}. \quad (47)$$

Записывая ρ -траекторию в виде $\alpha_\rho(s) = 1/2 + \alpha(s - m_\pi^2)$, находим

$$\alpha' = \frac{1}{2(m_\rho^2 - m_\pi^2)} = 0,88 \Gamma \text{эв}^{-2}. \quad (48)$$

Так как $m_\pi^2 \ll m_\rho^2$, то приближенно

$$\alpha' \approx \frac{1}{2m_\rho^2}. \quad (49)$$

Эта формула хорошо согласуется с опытом.

Квантование траекторий [208]. Условие самосогласованности Адлера (46) относится ко всем процессам с одним мягким пионом:

$$\pi + A \rightarrow B + c.$$

Амплитуда такого процесса также должна исчезать, когда пионный импульс стремится к нулю: $p_\mu(\pi) \rightarrow 0$. В модели Венециано это условие ведет к «квантованию» масс.

Мы рассмотрим ниже применение модели Венециано к рассеянию частиц со спином. Для этого амплитуды рассеяния разлагаются сначала обычным образом (см. §§ 7.5 и 11.3) по инвариантным амплитудам, и эти инвариантные амплитуды записываются в форме Венециано. Как уже отмечалось ранее, применение модели Венециано к фермионам встречается с трудностями (появление нефизических состояний). Тем не менее мы будем применять формально модель Венециано и к рассеянию фермионов. При этом мы придем к интересным результатам, согласующимся с опытом. Это можно трактовать как указание на несущественность упомянутых затруднений в проблеме квантования траекторий. Итак, рассмотрим типичный член в амплитуде типа Венециано для процесса $\pi + A \rightarrow B + c$. Он имеет вид

$$W_{XY}(s, t) \sim \frac{\Gamma(k + J_A - \alpha_X(s)) \Gamma(l + J_B - \alpha_Y(t))}{\Gamma(n + J_A + J_B - \alpha_X(s) - \alpha_Y(t))}, \quad (50)$$

где J_A и J_B — спины внешних частиц A и B ; целые числа l , k и n ($n \leq l + k$) характеризуют резонансы на траекториях $\alpha_X(s)$ и $\alpha_Y(t)$. Траектория X имеет внутренние квантовые числа и четность системы $(\pi + A)$, а траектория Y — системы $(\pi + B)$. Очевидно, нормальность траектории X должна совпадать с нормальностью системы $(A + \text{пион с нулевым орбитальным моментом})$ и, следовательно, должна быть противоположной нормальности частицы A . Аналогичным образом, нормальность траектории Y должна быть противоположна нормальности B (см. (13.68)).

Предположим, что обращение амплитуды $F(\pi + A \rightarrow B + c)$ в нуль при $p_\mu(\pi) = 0$ (или $s = m_A^2$, $t = m_B^2$, $u = m_c^2$) не может происходить за счет взаимного сокращения слагаемых типа (50) при любых A , B и c . Тогда каждый член (50) должен быть равен нулю в отдельности, что возможно, если аргумент N_{AB} гамма-функции в знаменателе целочислен и $N_{AB} \leq 0$, т. е.

$$\alpha_X(m_A^2) + \alpha_Y(m_B^2) = J_A + J_B + N_{AB}, \quad (51)$$

где числа N_{AB} можно считать характерными для частиц A и B . В случае рассеяния $\pi + A \rightarrow A + c'$ должно быть

$$\alpha_X(m_A^2) = J_A + \frac{N_{AA}}{2}, \quad (52)$$

а в случае рассеяния $\pi + B \rightarrow B + c''$ условие приобретает вид

$$\alpha_Y(m_B^2) = J_B + \frac{N_{BB}}{2}.$$

Следовательно, числа N_{AB} строятся по правилу

$$2N_{AB} = N_{AA} + N_{BB}; \quad (53)$$

все числа типа N_{AA} , N_{BB} должны быть либо четными, либо нечетными. Из $\pi\pi$ -рассеяния известно, что для $A = \pi$ и $X = \rho$ величина (52) равна $\alpha_\rho(m_\pi^2) = 1/2$ (формула (47)), т. е. $N_{\pi\pi}$ нечетно. Следовательно, для любой частицы A число N_{AA} нечетно.

Массу частицы A в условии (52) можно выразить через параметры ее траектории α_A и ее спин J_A :

$$m_A^2 = \frac{J_A - \alpha_A(0)}{\alpha'_A}. \quad (54)$$

Тогда (52) есть

$$\alpha_X(0) + \frac{\alpha''_X}{\alpha'_A} (J_A - \alpha_A(0)) = J_A + \frac{N_{AA}}{2}. \quad (55)$$

Но это соотношение должно быть справедливо и для частицы α спина J_A на параллельной дочерней траектории α_a , которая смещена вниз по сравнению с α_A на $\Delta J = 1$. Следовательно, $\alpha_X'/\alpha'_A = = 1/2(N_{AA} - N_{aa})$, что есть целое число. Но если бы мы рассмотрели иной процесс рассеяния, когда рассеиваемая («внешняя») частица лежит на основной или дочерней траектории X , а частица A является одним из резонансов s -канала, то в (55) нужно было бы произвести замену $X \leftrightarrow A$, а отношение α'_A/α'_X оказалось бы также целым числом. Отсюда

$$\alpha'_A = \alpha'_X, \quad (56)$$

траектории α_X и α_A параллельны. Условие (55) теперь связывает высоты траекторий:

$$\alpha_X(0) - \alpha_A(0) = \frac{1}{2} N_{AA} \quad (N_{AA} - \text{нечетное число}). \quad (57)$$

Формулы (56) и (57) выражают условия «квантования» траекторий в модели Венециано: если частица на траектории α_X может распадаться на пион и частицу противоположной нормальности, лежа-

щую на траектории α_A , то траектории α_A и α_X параллельны, а разность их высот (57) должна быть половиной нечетного числа.

Пользуясь приближенной формулой $\alpha' \approx 1/2 m_\rho^2$ или $m_\pi^2 \approx 0$, мы можем записать (54) и (57) в виде соотношения между массами частиц X и A :

$$m_X^2 = m_A^2 + 2m_\rho^2 \left(J_X - J_A - \frac{N}{2} \right) \quad (58)$$

с «квантом» массы m_ρ^2 . Выбирая в качестве пар (X, A) частицы (A_1, π) , (Δ, N) , (K^*, \bar{K}) , (A_2, η) , мы получаем формулы для масс:

$$\begin{aligned} m_{A_1}^2 &= 2m_\rho^2, & m_\Delta^2 &= m_N^2 = m_\rho^2, \\ m_{K^*}^2 &= m_K^2 + m_\rho^2, & m_{A_2}^2 &= 3m_\rho^2 + m_\eta^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Первая из формул (59) исторически была получена из спектральных правил сумм Вейнберга (см. § 15.5). В случае бариона $Y_1^* = \Sigma$ (1385), входящего в декуплет, возможны два типа состояний (A, π) , а именно (Λ, π) и (Σ, π) . Формула (58) дает в этом случае

$$m_{Y_1^*}^2(1385) = \left(\frac{m_\Sigma^2}{m_\Lambda^2} \right) + m_\rho^2, \quad (60)$$

в то время как в действительности соотношение (60) выполняется для среднего значения $1/2(m_\Sigma^2 + m_\Lambda^2)$. Следует, однако, иметь в виду, что массовые формулы для октета и для декуплета (см. § 10.1) имеют различный характер, что, возможно, требует привлечения сателлитов. Кроме того, модель Венециано не имеет пока удовлетворительного обобщения на случай фермионов.

Таким образом, несмотря на существенную идеализацию (бесконечно узкие резонансы во всех каналах) и возникающие трудности (сателлиты и унитарность), дуальная модель Венециано, по-видимому, удивительным образом схватывает многие черты динамики адронов. Можно думать, что амплитуда Венециано представляет собой своего рода борновское приближение к истинной амплитуде. Развитию модели Венециано и ее обобщениям на случай мультичастичных амплитуд посвящено множество работ (см. обзоры [209 — 211]).

Глава 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И СЛАБЫЕ ТОКИ. АЛГЕБРА ТОКОВ

Подобно взаимодействию токи могут быть подразделены на сильные, электромагнитные и слабые. Сильные токи были введены ранее в § 11.1 как источники адронных полей. В случае слабых токов возможность применения редукционной формулы для их введения сомнительна, так как, с одной стороны, присутствие частиц нулевой массы нарушает ряд доказательств в аксиоматической теории и, с другой стороны, нам неизвестны пока поля, которые могли бы быть источниками слабых токов. Мы будем рассматривать слабые токи $j_\mu(x)$ как локальные векторные или аксиально векторные операторы, служащие как бы первичной основой для групп внутренних симметрий (см. ч. III).

Алгебра токов Гелл-Манна исходит из предположения, что пространственные интегралы от плотности слабых токов

$$\int d^3x j^0(x^0, \mathbf{x})$$

равны генераторам некоторой группы внутренней симметрии (точной или приближенной). В алгебре токов в известной мере используются оба рассмотренных ранее подхода в теории элементарных частиц — теоретико-групповой и дисперсионный. Соотношения между генераторами группы в ней заменяются локальными соотношениями между плотностями токов. Матричные элементы от токов выражаются через форм-факторы, анализ поведения которых производится с помощью представлений дисперсионного подхода.

В отличие от сильных токов, слабые и электромагнитные токи могут быть наблюдаемыми величинами. Это свойство связано с малостью их константы связи с электромагнитными лептонными полями, благодаря чему можно применять теорию возмущений. Иначе говоря, слабые и электромагнитные лептонные токи могут играть роль «пробных зарядов» для изучения структуры сильного взаимодействия без ее нарушения.

В эту главу включен также параграф о нарушении CP-инвариантности, так как этот вопрос примыкает к проблемам слабого взаимодействия, которые мы обсуждаем в связи с алгеброй токов,

§ 15.1. Электромагнитные и слабые токи

Взаимодействие системы с электромагнитным полем $A^\mu(x)$ описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = -e j_\mu(x) A^\mu(x). \quad (1)$$

Электромагнитный ток $j_\mu = j_\mu^h + j_\mu^l$ состоит из адронной j_μ^h и лептонной j_μ^l частей. Электрический заряд

$$Q = e \int j_0(x) d^3x \quad (2)$$

сохраняется: $[Q, P_\mu] = 0$, $[Q, S] = 0$, что влечет за собой уравнение сохранения для тока:

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (3)$$

Электромагнитный ток нейтрален:

$$[B, j_\mu] = [L, j_\mu] = [Y, j_\mu] = [I_3, j_\mu] = 0.$$

При SU_3 -вращениях адронный ток j_μ^h преобразуется как адронный электрический заряд, т. е. как сумма $v_{\mu 3}$ и $v_{\mu 8}$:

$$j_\mu^h(x) = \left(v_{\mu 3}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} v_{\mu 8}(x) \right), \quad (4)$$

где $v_{\mu a}(x)$ — октет векторных токов ($a = 1, \dots, 8$). В терминах U -мультиплетов электромагнитный ток адронов (4) есть U -синглет.

Формула (4) для адронного тока означает, что пространственные интегралы от плотностей v_{03} и v_{08} определяют генераторы группы SU_3 — компоненту изоспина I_3 и гиперзаряд Y :

$$\int v_{03}(x) d^3x = I_3, \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \int v_{08}(x) d^3x = Y. \quad (5)$$

Величины I_3 и Y сохраняются в отдельности, если пренебречь слабыми взаимодействиями. В этом случае токи $v_{\mu 3}$ и $v_{\mu 8}$ также сохраняются в смысле (3):

$$\partial^\mu v_{\mu 3}(x) = 0, \quad \partial^\mu v_{\mu 8}(x) = 0. \quad (6)$$

Электромагнитное взаимодействие инвариантно относительно операций S , P и T в отдельности. Поэтому из (1) и преобразовательных свойств A_μ (см. гл. 6) следует, что электромагнитный ток (а следовательно, и токи $v_{\mu 3}$ и $v_{\mu 8}$) есть ток первого рода (см. § 11.4):

$$C j_\mu C^{-1} = -j_\mu, \quad C v_{\mu 3} C^{-1} = -v_{\mu 3}, \quad C v_{\mu 8} C^{-1} = -v_{\mu 8}. \quad (7)$$

Матричные элементы тока могут быть найдены из экспериментов по рассеянию лептонов на адронах и электро- и фоторождению

адронов. Матричные элементы тока между одночастичными состояниями (вершинные части, см. § 11.4)

$$\Gamma_{\mu}(p', \lambda'; p, \lambda) = \langle p', \lambda' | j_{\mu}(0) | p, \lambda \rangle \quad (8)$$

входят, например, в амплитуду рассеяния $T(e^{-}h \rightarrow e^{-}h)$ электрона на адроне ($e^{-}+h \rightarrow e^{-}+h$):

$$T(e^{-}h \rightarrow e^{-}h) = \frac{2\alpha}{(2\pi)^2} \bar{u}(k_1) \gamma_{\mu} u(k_2) \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \Gamma^{\mu}(p', \lambda'; p, \lambda). \quad (9)$$

Матричные элементы тока между одночастичным и двухчастичным состояниями входят в амплитуды электро- и фоторождения, вычисляемые также в первом (электромагнитном) приближении:

$$\gamma + a \rightarrow b + c, \quad e + a \rightarrow e + c + d.$$

В полюсном приближении, когда главный вклад в эти процессы вносит резонанс с квантовыми числами $(b+c)$ - или $(c+d)$ -системы, эти матричные элементы выражаются через одночастичные матричные элементы типа $\Gamma_{\mu}(p', \lambda'; p, \lambda)$.

Вершинные части Γ_{μ} содержат в себе эффекты, связанные с сильными взаимодействиями. В силу сохранения тока (3)

$$(p'^{\mu} - p^{\mu}) \Gamma_{\mu}(p', \lambda'; p, \lambda) = 0. \quad (10)$$

Электрический заряд (2) адрона h выражается через значение Γ_0 при нулевой передаче импульса:

$$\begin{aligned} \langle p', \lambda'; h | Q | p, \lambda; h \rangle &= 2\rho_0 \delta(p - p') \delta_{\lambda\lambda'} Q_h = \\ &= (2\pi)^3 \delta(p - p') \Gamma_0(p', \lambda'; p, \lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

Вершинные функции Γ_{μ} могут быть разложены по инвариантным форм-факторам (см. § 11.4), зависимость которых от инвариантных импульсных переменных определяется только динамикой процесса.

Матричные элементы тока и форм-факторы рассматриваются обычно в низшем электродинамическом приближении, так что можно не заботиться об электродинамической перенормировке заряда Q . Выясним, влияет ли на заряд Q_h адронов сильное взаимодействие. Если для простоты перейти к нормированным протонным состояниям $|\overline{p}, \overline{\lambda}\rangle$, $\langle \overline{p}, \overline{\lambda} | \overline{p}, \overline{\lambda} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$, то вместо (11) мы можем записать электрический заряд протона в виде

$$Q_p = \langle \overline{p}, \overline{\lambda} | Q | \overline{p}, \overline{\lambda} \rangle.$$

Неперенормированный («голый») заряд Q_p^0 входит в фазовое преобразование интерполирующего протонного поля Ψ , или в коммутатор:

$$[Q, \Psi] = -Q_p^0 \Psi. \quad (12)$$

Но матричный элемент от левой части этого соотношения между вакуумом и протонным состоянием

$$\langle 0 | [Q, \Psi] | p, \lambda \rangle = - \sum_n \langle 0 | \Psi | \bar{n} \rangle \langle \bar{n} | Q | p, \lambda \rangle = - \langle 0 | \Psi | p, \lambda \rangle Q_p$$

может содержать в качестве промежуточного состояния $|\bar{n}\rangle$ только протонное состояние, так как, будучи сохраняющимся оператором, Q должно быть диагонально во всех состояниях. Следовательно, $Q_p = Q_p^0$ и сильное взаимодействие не перенормирует электрический заряд. Этот результат фактически содержится и в (11), ибо он непосредственно связан с условием нормировки для электрического форм-фактора $F_1(0) = 1$ (см. § 11.4).

В то время как свойства электромагнитного взаимодействия установлены хорошо и квантовая электродинамика представляет собой самосогласованную теорию, слабые взаимодействия трактуются на чисто феноменологическом уровне. Плотность гамильтониана слабого взаимодействия записывается в виде произведения слабого тока на слабый ток:

$$H_w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} (J_\mu^{w+}(x) J^{\mu w}(x) + J^{\mu w}(x) J_\mu^{w+}(x)), \quad (13)$$

и вычисления проводятся в рамках теории возмущений. При этом разумные результаты получаются только в первом приближении. Иначе говоря, в случае слабого взаимодействия установлена только форма амплитуды (слабого) перехода:

$$\langle a | T | b \rangle \approx \langle a | H_w(0) | b \rangle, \quad (14)$$

но не указан метод или рецепт вычисления процессов высших порядков по G , а также учета условия унитарности.

Из эксперимента явствует, что не существует возбужденных лептонных состояний, по крайней мере в области энергий вплоть до нескольких $G\text{эв}$. Следовательно, в этой области энергий нельзя ожидать резонансных явлений, и константа слабого взаимодействия G служит единственным параметром, характеризующим порядок величины амплитуды перехода.

Ввиду малости константы $G \approx 10^{-5} m_p^2$, с практической точки зрения ограничение первым приближением по G выглядит вполне обоснованным. Но, разумеется, отсутствие самосогласованной теории отнюдь нельзя считать преимуществом современной трактовки слабого взаимодействия.

Общий слабый ток J_μ^w можно записать в виде суммы лептонного тока l_μ и адронного слабого тока J_μ :

$$J_\mu^w = l_\mu + J_\mu. \quad (15)$$

Эффективный гамильтониан (13) с током (15) описывает совокупность различных процессов, которая включает чисто лептонные процессы (член $I_{\mu}^{\dagger} l_{\mu}$), лептонные распады адронов (член $l_{\mu} J_{\mu}^{\dagger}$) и безлептонные распады адронов (член $J_{\mu}^{\dagger} J_{\mu}$).

Запись H_w в форме (13) с общей константой G для слабых процессов всех типов означает предположение об универсальности константы G .

Мы будем предполагать в этой главе вплоть до § 15.5, что H_w сохраняет комбинированное отражение CP ; тем самым мы исключаем слабые процессы, нарушающие CP -инвариантность (распады K_L^0 -мезонов, см. § 15.6).

Эффективный лагранжиан для распада мюона и бета-распада нейтрона

$$\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \nu_{\mu} + \bar{\nu}_e, \quad n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

был предложен Сударшаном и Маршаком [212], а также Фейнманом и Гелл-Манном [213]. В их CP -инвариантном лагранжиане слабые токи имеют вид

$$I_{\lambda} = \bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} (1 + \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_e \gamma_{\lambda} (1 + \gamma_5) e, \quad (16)$$

$$J_{\lambda} = p \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) n, \quad (17)$$

где поле (свободной) частицы обозначается ее символом. Отличие знаков перед γ_5 в (16) и (17) связано с различным выбором частиц и античастиц. В (16) частицами считаются отрицательно заряженные e^{-} и μ^{-} , а в (17) — нейтрон n и положительно заряженный протон p .

Выражение (16) для лептонного тока может быть проверено по результатам вычисления вероятности распада мюона

$$\Gamma(\mu^{-} \rightarrow e^{-} \nu_{\mu} \bar{\nu}_e) \sim |\langle e^{-} \nu_{\mu} \bar{\nu}_e | I_{\lambda}^{\dagger} I^{\lambda} | \mu \rangle|^2 \quad (18)$$

и сравнения с экспериментом. Как угловое распределение, так и поляризация электронов весьма точно описываются с помощью тока (16), так что форма (16) для лептонного тока может считаться хорошо установленной для малых энергий.

Лептонный ток (16) имеет следующие характерные черты: а) он преобразуется как вектор при преобразованиях однородной группы Лоренца (и не содержит тензорных или скалярных частей); б) ток l_{μ} состоит только из частей, несущих электрический заряд $Q = +1$, а все части тока l_{μ}^{\dagger} несут заряд $Q = -1$; в) векторный ток $\bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} \mu + \dots$ и аксиально векторный ток $-\bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} \gamma_5 \mu + \dots$ входят в общий ток (16) с одинаковыми весами. Поэтому теорию слабого взаимодействия с токами (16) и (17) называют условно $(V - A)$ -теорией. Очевидно, что иной выбор частиц может перевести $(V - A)$ -теорию в $(V + A)$ -теорию. $(V - A)$ -структура тока (16) соответствует

максимальному нарушению Р-инвариантности при слабых взаимодействиях лептонов.

Слабый адронный ток (17) описывает только процесс бета-распада нейтрона. На опыте наблюдаются многие другие слабые распады (например, распад пиона $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, распады $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda + e^+ + \nu_e$, см. табл. П.1), так что (17) представляет собой лишь часть полного слабого тока адронов $J_\lambda(x)$. Кроме того, формула (17) параметризует матричный элемент слабого тока $\langle p | J_\lambda(x) | n \rangle$ только при исчезающей передаче импульса $p_\lambda(p) = -p_\lambda(p) \approx 0$. В общем случае слабый адронный ток $J_\lambda(x)$ следует считать локальной величиной, характеризующейся правилами отбора.

Матричные элементы тока J_λ могут быть найдены из лептонных распадов адронов, амплитуда которых, согласно (14), содержит J_λ линейно, причем лептонные и адронные части амплитуды факторизуются. Так, изучение амплитуды бета-распада нейтрона позволяет сделать заключения о матричном элементе $\langle p | J_\lambda(x) | n \rangle$ и проверить формулу (17) для слабого тока. Амплитуда распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

$$T(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \sim \frac{G}{\sqrt{2}} \langle \mu^+ \nu_\mu | J_\lambda(0) | 0 \rangle \langle 0 | J^{\lambda+}(0) | \pi^+ \rangle$$

дает сведения об одном из простейших матричных элементов слабого адронного тока — матричном элементе J_λ между вакуумом и одночастичным пионным состоянием. Распад $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ связан с матричными элементами тока

$$\langle \pi^0 | J_\lambda^+(0) | \pi^+ \rangle$$

между одночастичными пионными состояниями.

Формула (17) для бета-распадного слабого тока содержит ценную информацию о преобразовательных свойствах тока: подобно лептонному току, ток $\bar{p} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) n$ состоит из векторной и аксиально векторной заряженных частей.

При изоспиновых вращениях векторная часть тока (17) ведет себя как $(1 + i2)$ -компонента изовектора, обладающая $I_3 = 1$:

$$\bar{p} \gamma_\lambda n = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\lambda (\tau_1 + i\tau_2) N, \quad (19)$$

где N обозначает нуклонное поле. Важность простой формы (17) или (19) для бета-распадного тока заключается в том, что ток (19) предполагается составленным из компонент того же изовектора $\frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\lambda \tau_k N$, что и изовекторная часть электромагнитного тока $\frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\lambda \tau_3 N$ (гипотеза об изовекторном характере векторной части слабого тока [213, 214]).

Чтобы освободиться от ограничения конкретным процессом бета-распада нейтрона и предположения о нулевой передаче импульса, следует вместо явного выражения (19) для адронного тока через поля $N(x)$ и $\bar{N}(x)$ рассматривать ток $J_{\lambda}(x)$ как локальную величину, характеризуемую ее преобразовательными свойствами. Для переходов без изменения странности или гиперзаряда естественным обобщением (19) будет выражение

$$J_{\lambda}(\Delta Y = 0) = [v_{\lambda 1} - a_{\lambda 1} + i(v_{\lambda 2} - a_{\lambda 2})], \quad (20)$$

где $v_{\lambda k}$ и $a_{\lambda k}$ ($k = 1, 2, 3$) — векторные и аксиально векторные изотриплеты адронных токов. Выражение (20) хорошо подтверждается экспериментально.

Формула (20) предполагает, что $(V - A)$ -структура слабых токов имеет место как для барионных, так и для мезонных распадов. Действительно, в случае $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$ амплитуда распада определяется псевдовекторной частью тока a_{λ}^+ в $\langle 0 | J_{\lambda}^+ | \pi^+ \rangle$, в то время как в случае распада $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ вероятность определяется вкладом векторной части v_{λ} в $\langle \pi^0 | J_{\lambda}^+ | \pi^+ \rangle$.

Изовекторный ток $v_{\lambda k}$ представляет собой величину, две заряженные компоненты которой

$$\begin{aligned} v_{\lambda+} &= (v_{\lambda 1} + i v_{\lambda 2}), & I_3 &= 1, \\ v_{\lambda-} &= (v_{\lambda 1} - i v_{\lambda 2}), & I_3 &= -1, \end{aligned} \quad (21)$$

участвуют в слабых токах J_{λ}^- и J_{λ}^+ , а нейтральная компонента $v_{\lambda 3}$ входит в электромагнитный ток адронов (4). Это значит, что инвариантный изовекторный форм-фактор должен быть одинаков для электромагнитных и слабых взаимодействий.

В частности, для нуклона форм-факторы F_1^V и F_2^V (формула (12.73)) определяют матричные элементы токов как для электромагнитного, так и для слабого взаимодействий. Для тока $v_{\lambda+}$ мы получаем из (12.73) и гипотезы изовекторности тока с компонентами $v_{\lambda\pm}$ и $v_{\lambda 3}$:

$$\begin{aligned} \langle p_2, \sigma_2; N | v_{\lambda+}(0) | p_1, \sigma_1; N \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \bar{u}(p_2, \sigma_2) (\tau_1 + i\tau_2) \frac{1}{2} [\gamma_{\mu} F_1^V - i\sigma_{\mu\nu} q^{\nu} F_2^V] u(p_1, \sigma_1), \quad (22) \\ & q = p_1 - p_2. \end{aligned}$$

Форм-факторы F_1^V и F_2^V наблюдаются при слабых распадах. О слагаемом с F_2^V в (22) говорят как о слабом «магнетизме» [215].

Изовекторный характер тока $v_{\lambda k}$ предполагает также в силу изоспиновой симметрии, что если одна из компонент $v_{\lambda k}$ сохраняется, то должны сохраняться и все другие компоненты. Поэтому сохранение третьей компоненты: $\partial^{\lambda} v_{\lambda 3} = 0$, вытекающее из свойств электромагнитного тока, влечет за собой равенство [214]

$$\partial^{\lambda} v_{\lambda k}(x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (23)$$

В силу (23) гипотезу об изовекторности тока $v_{\lambda k}$ иногда называют гипотезой о сохранении векторного тока.

Электромагнитное взаимодействие нарушает сохранение векторного слабого тока, т. е. нарушает равенство (23) для $k = 1, 2$. Но обычно электромагнитное взаимодействие не принимается во внимание при изучении свойств слабых токов J_{λ} , входящих в гамильтониан (14). Таким образом, слабые адронные токи в (14) трактуются в пределе изоспиновой симметрии, т. е. при сохраняющихся векторных токах.

По аналогии со случаем электромагнитного тока мы можем заключить, что сохранение векторного тока влечет за собой отсутствие перенормировки «векторной» константы связи в адронно-лептонном гамильтониане. Это означает, что если мы запишем с помощью (20) такой гамильтониан в виде

$$\frac{G}{\sqrt{2}} [(v_{\lambda+} - a_{\lambda+}) l^{\lambda} + (v_{\lambda-} - a_{\lambda-}) l^{\lambda+}], \quad (24)$$

то одночастичные матричные элементы векторной части (24) в пределе нулевой передачи импульса переходят в матричные элементы от свободных полей (содержащихся в v_{λ}) с той же константой связи G . Иначе говоря, в (22) будет $F_1^V(0) = 1$, как и в случае $v_{\lambda 3}$ (электромагнитное поле), так что учет сильных взаимодействий не изменяет изоспина рассматриваемых состояний. Мы можем записать (24) также в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (G_V^0 v_{\lambda+} l^{\lambda} + G_A^0 a_{\lambda+} l^{\lambda} + \text{э. с.}), \quad (25)$$

введя явно неперенормированные векторную G_V^0 и аксиальную G_A^0 константы связи. Ввиду сохранения векторного тока первый член в (25) в случае бета-распада (с нулевой передачей импульса) эквивалентен выражению

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(G_V \bar{N} \gamma_{\lambda} \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2) N l^{\lambda} \right),$$

содержащему свободное поле $N(x)$ и $G_V = G_V^0 F_1^V(0) = G_V^0$. Как мы увидим ниже в § 15.3, аксиальная константа G_A^0 испытывает перенормировку, так что $G_A \neq G_A^0 = G_V$.

Изовекторность тока (23) влечет за собой правило отбора по изоспину для лептонных распадов:

$$|\Delta I| = 1. \quad (26)$$

Это правило, однако, трудно проверить, ибо, кроме бета-распада, оно дает четкие предсказания только для реакций с нейтрино. В случае бета-распада следует учитывать еще нарушение изоспиновой инвариантности кулоновскими полями.

Для изоспиновых мультиплетов вместо зарядового сопряжения более удобен оператор G -четности (см. § 8.2). Поэтому классификация изотриплетных токов на токи первого и второго рода осуществляется по оператору GP . Для эрмитовых токов первого рода

$$GP (v_{0k} - a_{0k})_A (GP)^{-1} = -v_{0k} - a_{0k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (27)$$

токи второго рода имеют противоположную GP -четность. Ток (20) принадлежит к первому роду. Эксперимент с точностью до $\approx 5\%$ указывает на отсутствие токов второго рода.

Лептонные и безлептонные распады адронов происходят как с сохранением странности или гиперзаряда, так и с их нарушением. Поэтому общий слабый ток адронов равен сумме (20) и тока $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$, изменяющего гиперзаряд:

$$J_\lambda = J_\lambda (\Delta Y = 0) + J_\lambda (\Delta Y \neq 0).$$

Ток $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ реконструируется на основе правил отбора в предположении, что все слабые процессы (как с участием лептонов, так и безлептонные процессы) порождаются лагранжианом

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \{ (J_\mu^+ + l_\mu^+), (J_\mu + l_\mu) \}.$$

Лептонные распады адронов (амплитуда которых содержит ток $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ линейно) удовлетворяют следующим эмпирическим правилам отбора:

$$\Delta Y = \Delta Q, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad (28)$$

$$|\Delta I| = 1/2, \quad (29)$$

где ΔQ есть изменение электрического заряда адронов. Правило (29) выполняется и для нелептонных распадов с $\Delta Y \neq 0$. Изоспиновая инвариантность нарушается электромагнитными взаимодействиями, поэтому правило (29) может быть верно с точностью до электромагнитных поправок.

Нарушения правил (28) и (29) взаимосвязаны. Из формулы Гелл-Манна — Нишидзимы следует:

$$\Delta I_3 = \Delta(Q - Y) + \frac{1}{2} \Delta Y.$$

Если нарушено правило $\Delta(Q - Y) = 0$ для лептонных распадов с $\Delta Y = \pm 1$, то нарушается и правило $|\Delta I| = 1/2$. В случае нелептонных распадов, где $\Delta Q = 0$, правило $|\Delta I| = 1/2$ нарушается, если $|\Delta Y| > 1$.

Правило $|\Delta Y| = 1$ опирается на отсутствие иных распадов для всех доступных случаев, в частности и для

$$\Xi^- \rightarrow n + \pi, \quad \Xi^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Omega^- \rightarrow \Sigma^- + \pi.$$

Правило $\Delta Y = \Delta Q$ подтверждается отсутствием распадов $\Sigma^+ \rightarrow p + e^+ + \nu_e$, $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ и др.

Правило $|\Delta I| = 1/2$ также выведено из анализа многочастичных распадов. Степень нарушения его можно характеризовать соотношением

$$\xi = \frac{\text{амплитуда с } |\Delta I| = 3/2}{\text{амплитуда с } |\Delta I| = 1/2}$$

(в предположении, что амплитуда с $|\Delta I| > 3/2$ равна нулю). Это отношение в случае $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ и $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ равно $\xi = 4,6 \cdot 10^{-2}$. Правила отбора (28) и (29) показывают, что ток $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ есть заряженный изоспинор, так что для $\Delta Q = +1$ его свойства те же, что и у $(4 + i5)$ -компоненты октета.

Из анализа распадов следует также, что ток $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ содержит как векторную, так и псевдовекторную части. В частности, известны два распада: $K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$ и $K^\pm \rightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu$, из которых первый связан с псевдовекторной частью J_λ , а второй — с векторной частью J_λ . Поэтому ток $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ естественно записывать в виде

$$J_\lambda (\Delta Y \neq 0) \sim (v_{\lambda 4} - a_{\lambda 4}) + i(v_{\lambda 5} - a_{\lambda 5}), \quad (30)$$

введя октет векторных $v_{\lambda a}$ и аксиальных $a_{\lambda a}$ токов, $a = 1, \dots, 8$.

В формуле (30) неопределенным остается «сила» тока, или общий множитель. Эксперименты показывают, что для $J_\lambda (\Delta Y \neq 0)$ не выполняется условие универсальности G (знак \sim в (30) нельзя заменить знаком равенства). Сравнение процессов $K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e$ и $\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e$ показывает, что процессы с $\Delta Y \neq 0$ подавлены приблизительно в 20 раз по сравнению с процессами без изменения гиперзаряда.

Универсальность константы G восстанавливается с помощью гипотезы Каббико [216], согласно которой все три типа слабого взаимодействия (ll^+ , lj^+ и JJ^+) обладают одной константой связи, но слабый адронный ток видоизменен введением угла Каббико θ :

$$J_\lambda = [(v_{\lambda 1} - a_{\lambda 1}) + i(v_{\lambda 2} - a_{\lambda 2})] \cos \theta + \\ + [(v_{\lambda 4} - a_{\lambda 4}) + i(v_{\lambda 5} - a_{\lambda 5})] \sin \theta. \quad (31)$$

Гипотеза Каббико подтверждается опытом при экспериментальном значении $\theta = 22^\circ$.

Итак, адронный ток (31) вместе с лептонным током (16) составляет полный слабый ток, который и входит в эффективный гамильтониан

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \{ (J^\lambda + l^\lambda), (J_\lambda^+ + l_\lambda^+) \} \quad (32)$$

с универсальной константой G ; при этом неперенормированные векторная и аксиальная константы теперь равны $G_V^0 = G \cos \theta$ и $G_A^0 = G \sin \theta$. Гамильтониан (32) объясняет все правила отбора, кроме эмпирического правила $|\Delta I| = 1/2$ в странных безлептонных распадах. Согласно (32) безлептонные распады должны также содержать переходы с $|\Delta I| = 3/2$, которые, однако, подавляются непонятными факторами. С точки зрения группы SU_3 члены в (32) с $|\Delta I| = 3/2$ содержатся в 27-плете, в то время как остальные члены (32) принадлежат октету. Поэтому гипотеза о подавлении 27-плетных членов (в рамках теории с гамильтонианом (32)) обычно называется «гипотезой октетного преобладания».

§ 15.2. Алгебра плотностей и зарядов Гелл-Манна. Группы $SU_2 \times SU_2$ и $SU_3 \times SU_3$

Составим из плотностей изовекторных токов $v_{0k}(x)$ интегральные величины — заряды $V_k(x_0)$:

$$V_k(x_0) = \int v_{0k}(\mathbf{x}, x_0) d^3x, \quad k = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Так как изовекторные токи сохраняются, $\partial^\mu v_\mu = 0$, то заряды (33) не зависят от времени:

$$i[P_0, V_k] = \partial_0 V_k(x_0) = \int (\partial_0 v_{0k} + \text{div} \mathbf{v}_k) d^3x = 0. \quad (34)$$

Здесь мы добавили поток вектора \mathbf{v}_k через бесконечно удаленную поверхность, который равен нулю. Но согласно (4) и (5) компонента V_3 входит в формулу Гелл-Манна — Нишидзимы и должна быть отождествлена с I_3 . Поэтому изовектор V_k может совпадать с изоспином:

$$V_k = I_k, \quad (35)$$

и, следовательно, компоненты (35) могут удовлетворять перестановочным соотношениям:

$$[I_k, I_j] = i\epsilon_{kjl} I_l,$$

$$\left[\int v_{0k}(\mathbf{x}, x_0) d^3x, \int v_{0j}(\mathbf{x}', x_0) d^3x' \right] = i\epsilon_{kji} \int v_{0i}(\mathbf{x}, x_0) d^3x. \quad (36)$$

Условия (35) и (36) определяют выбор нормировки токов $v_{\mu k}$.

Аксиальные заряды $A_k(x_0)$ определяются посредством интеграла из аксиальных плотностей

$$A_k(x_0) = \int a_{0k}(\mathbf{x}, x_0) d^3x \quad (k = 1, 2, 3). \quad (37)$$

Поскольку $a_{0k}(x)$ есть изовектор, то перестановка зарядов (37) с генераторами изоспиновой группы I_k должна быть равна

$$[A_k(x_0), I_j] = i\epsilon_{kjl} A_l(x_0). \quad (38)$$

Аксиальный ток, вообще говоря, не сохраняется: $\partial^\mu a_\mu \neq 0$, и аксиальные заряды $A_k(x_0)$ не могут быть константами движения:

$$[P_0, A_k(x_0)] = 0.$$

Попробуем замкнуть алгебру зарядов I_k и $A_l(x_0)$ при одинаковых временах. Для этого необходимо постулировать такое перестановочное соотношение между компонентами $A_k(x_0)$ и $A_l(x_0)$, которое не вводило бы новых величин. В качестве дополнительного условия потребуем, чтобы заряды I_k и A_l можно было истолковать как генераторы расширенной компактной группы Ли. Это условие приводит практически к однозначному решению:

$$[A_l(x_0), A_k(x_0)] = i\epsilon_{lkj} I_j. \quad (39)$$

Действительно, так как A_l — псевдоскаляр, то правая часть (39) должна быть скаляром и либо выражается через I_i , либо равна нулю. Но нуль в правой части (39) ведет к некомпактной группе $SU_2 \times T_3$ (изоспиновые вращения с трансляциями), где $A_l(x_0)$ играют роль трехмерных импульсов. Выбор иного знака в правой части (39) привел бы к некомпактной группе $SL(2, c)$, где A_l были бы подобны генераторам лоренцевых преобразований N_k . Соотношение (39) однозначно нормирует аксиальные заряды A_k .

Формулы (36), (38) и (39) представляют собой перестановочные соотношения для генераторов группы $SU_2 \times SU_2$. Если ввести операторы

$$V_k^\pm = \frac{1}{2} (I_k \pm A_k) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (40)$$

то наборы V_k^+ и V_k^- будут коммутировать друг с другом:

$$[V_k^+, V_j^-] = 0, \quad (41)$$

и образуют в отдельности алгебры группы SU_2 :

$$[V_k^\pm, V_j^\pm] = i\epsilon_{kjl} V_l^\pm. \quad (42)$$

Соотношения (36) могут быть получены практически в любой квантово-полевой модели. Формула (38) вытекает из предположения об изовекторности аксиальных токов. Соотношение (39) было постулировано Гелл-Манном [217]; оно может быть получено в некоторых моделях.

Выведем формулы типа (36), (38) и (39) для группы $SU_3 \times SU_3$ в кварковой модели с токами

$$v_{\mu\alpha}(\mathbf{x}, x_0) = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma_\mu \lambda_\alpha q, \quad (43)$$

$$a_{\mu\alpha}(\mathbf{x}, x_0) = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q, \quad (44)$$

где операторы $q(\mathbf{x}, x_0)$ и $q^+(\mathbf{x}, x_0)$ подчиняются обычным перестановочным соотношениям при одинаковых временах:

$$\{q_{\alpha k}(\mathbf{x}, x_0), q_{\beta l}^+(\mathbf{x}', x_0)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{lk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ (\alpha\beta = 1, 2, 3, 4; \quad i, k = 1, 2, 3). \quad (45)$$

Если O_1 и O_2 — спин-унитарные матрицы из числа $1/2 \gamma_5 \lambda_\alpha$, $1/2 \lambda_\alpha$, то согласно (45)

$$[q^+(\mathbf{x}, x_0) O_1 q(\mathbf{x}, x_0), q^+(\mathbf{x}', x_0) O_2 q(\mathbf{x}', x_0)] = \\ = q^+(\mathbf{x}, x_0) [O_1, O_2] q(\mathbf{x}, x_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (46)$$

Отсюда следует, что в кварковой модели плотности токов (43) и (44) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[v_{0a}(\mathbf{x}, x_0), v_{0b}(\mathbf{x}', x_0)] = if_{abc} v_{0c}(\mathbf{x}, x_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (47)$$

$$[a_{0a}(\mathbf{x}, x_0), v_{0b}(\mathbf{x}', x_0)] = if_{abc} a_{0c}(\mathbf{x}, x_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (48)$$

$$[a_{0a}(\mathbf{x}, x_0), a_{0b}(\mathbf{x}', x_0)] = if_{abc} v_{0c}(\mathbf{x}, x_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (49)$$

Для октетов векторных и аксиальных зарядов

$$F_a(x_0) = \int_{x_0} d^3x v_0(x_0, \mathbf{x}), \quad A_a(x_0) = \int_{x_0} d^3x a_0(x_0, \mathbf{x}) \quad (50)$$

соотношения (47)–(49) приводят к алгебре $SU_3 \times SU_3$:

$$[F_a(x_0), F_b(x_0)] = if_{abc} F_c(x_0), \quad (51)$$

$$[F_a(x_0), A_b(x_0)] = if_{abc} A_c(x_0), \quad (52)$$

$$[A_a(x_0), A_b(x_0)] = if_{abc} F_c(x_0), \quad (53)$$

где мы сохранили для единообразия аргумент x_0 и у сохраняющихся зарядов. Заряды F_a представляют собой генераторы обычной группы SU_3 . Если мы введем величины

$$F_a^\pm = \frac{1}{2} (F_a \pm A_a), \quad (54)$$

то они будут удовлетворять перестановочным соотношениям для генераторов двух независимых групп SU_3 :

$$[F_a^+, F_b^-] = 0, \quad (55)$$

$$[F_a^\pm, F_b^\pm] = if_{abc} F_c^\pm. \quad (56)$$

Представления группы $SU_3 \times SU_3$ обозначаются (n^+n^-) , где n^\pm — размерности представлений SU_3^\pm подгрупп с генераторами $1/2 (F_a \pm \pm A_a)$. Заряды, связанные со слабыми адронными токами и электромагнитным током адронов, принадлежат к приводимому представлению $(8, 1) + (1, 8)$.

Перестановочные соотношения алгебры токов и зарядов Гелл-Манна нелинейны; тем самым они позволяют установить шкалу зарядов. Векторная константа взаимодействия G_V определяется по лептонному распаду $a \rightarrow b + l$, где l — лептоны. Сильные взаимодействия влияют на константу G_V постольку, поскольку они определяют векторный форм-фактор $\langle \mathbf{k}_2, b | v_{\lambda, 1+i2} | \mathbf{k}_1, a \rangle$. Перенормированная константа G_V определяется значением этого форм-фактора при $(k_2 - k_1) = 0$, так что, например, для бета-распада нейтрона

$$G \cos \theta \langle \mathbf{k}_2, p | v_{\lambda, 1+i2}(0) | \mathbf{k}_1, n \rangle = G_V \langle \mathbf{k}_2, p | \bar{p}(x) \gamma_\lambda \tau_{1+i2} n(x) | \mathbf{k}_1, n \rangle, \quad (57)$$

где $p(x)$ и $n(x)$ — свободные протонное и нейтронное поля. Левая часть (57) при $\lambda = 0$ пропорциональна среднему значению заряда I_{1+i2} :

$$\langle \mathbf{k}_2, p | I_{1+i2} | \mathbf{k}_1, n \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \langle \mathbf{k}_1, p | v_{1+i2}(0) | \mathbf{k}_1, n \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2k_0. \quad (58)$$

Последнее равенство (58) есть следствие того, что I_k — сохраняющиеся генераторы изоспиновой группы (удовлетворяющие перестановочным соотношениям (36)), и потому операторы I_k не выводят из мультиплетта (p, n) , а значения матричных элементов I_k^\pm вытекают из (36). Из (57) и (58) легко заключить, что

$$G_V = G \cos \theta \quad (59)$$

— векторная константа (или заряды I_k) не перенормируется сильными взаимодействиями.

В пределе точной SU_3 -симметрии токи $v_{\mu a}$ ($a = 4, 5$) также сохраняются, а величины F_a становятся константами движения. Из перестановочных соотношений (51) между этими зарядами и $F_k = I_k$ ($k = 1, 2, 3$) явствует, что в пределе SU_3 -симметрии заряды F_4, F_5 также не перенормируются. Если же учесть нарушение SU_3 -симметрии, то заряды F_4, F_5 перенормируются только во втором порядке по нарушающему взаимодействию (теорема Адемолло—Гатто [218]).

Шкала аксиальных зарядов A_a фиксирована перестановочными соотношениями (52) и (53) и связана с векторными зарядами. Так как аксиальные токи не сохраняются, то следует ожидать существенных эффектов перенормировки слабых аксиальных зарядов. Величина перенормированного аксиального изовекторного заряда вычисляется в § 15.4.

§ 15.3. Частичное сохранение аксиального тока

В то время как векторный изотриплетный ток сохраняется, аксиальный ток не может сохраняться. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим распад

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu).$$

Амплитуда вероятности этого распада

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \langle \mu \nu | J_\lambda^+ | \pi \rangle$$

содержит простейший матричный элемент слабого адронного тока (p_λ — импульс пиона)

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_\lambda^+ (0) | p, \pi^+ \rangle &= \langle 0 | a_{\lambda-} (0) | p, \pi^+ \rangle, \\ a_{\lambda-} &= (a_{\lambda 1} - i a_{\lambda 2}), \end{aligned} \quad (60)$$

в который дает вклад только аксиальная часть, поскольку пион — это псевдоскалярная частица. Из соображений ковариантности матричный элемент (60) определяется одной константой f_π :

$$\langle 0 | a_{\lambda-} (0) | p; \pi^+ \rangle = \frac{i f_\pi}{(2\pi)^{3/2}} p_\lambda. \quad (61)$$

Константа f_π может быть найдена из распада пиона: $f_\pi \approx m_N/10$ (если G найдено из других экспериментов). Вычисляя расходимость тока $a_{\lambda-}$, мы находим

$$\langle 0 | \partial^\lambda a_{\lambda-} (0) | p, \pi^+ \rangle = i \langle 0 | [p_\lambda, a_{\lambda-}] | p, \pi^+ \rangle = \frac{f_\pi m_\pi^2}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (62)$$

Если положить $\partial^\lambda a_\lambda = 0$, то согласно (62) необходимо одновременно либо считать пион частицей с нулевой массой $m_\pi = 0$, либо считать $f_\pi = 0$ и воспретить распад $\pi \rightarrow \mu \nu$.

Изовекторное поле $\partial_\lambda a^\lambda(x)$ имеет те же квантовые числа, что и пионные поля $\pi_{in}(x)$ и $\pi_{out}(x)$, и матричный элемент этого поля $\langle 0 | \partial_\lambda a^\lambda | \pi \rangle$ между вакуумом и однопионным состоянием не равен нулю. Тем самым, если поле $\partial_\lambda a^\lambda(x)$ еще неприводимо, то оно удовлетворяет условиям теоремы Хаага, Нишидзимы и Циммермана [219—221], согласно которой такое поле $\partial_\lambda a^\lambda(x)$ может быть использовано в качестве интерполирующего пионного поля $c\pi(x)$ и

$$\partial_\lambda a^\lambda(x) \rightarrow c_\pi \pi_{in}(x), \quad x_0 \rightarrow \mp \infty,$$

где предел понимается в смысле слабой сходимости (см. § 11.1).

Гипотеза частичного сохранения аксиального тока, или PCAC (partial conservation of axial current), связывает расходимость аксиального тока с интерполирующим пионным полем [222, 223]:

$$\partial_\mu a^\mu(x) = c_\pi \pi(x). \quad (63)$$

Формула (63) определяет продолжение пионного поля вне поверхности масс $p^2 = m_\pi^2$.

Иное продолжение дали бы, например, поля

$$\pi'(x) = \pi(x) + \lambda(\partial_\mu \partial^\mu - m_\pi^2) \pi(x), \quad (64)$$

совпадающие с $\pi(x)$ асимптотически: $\pi'_{\text{out}} = \pi_{\text{out}}$. Среди полей (64), возможно, есть и каноническое поле $\pi(x)$, удовлетворяющее обычным перестановочным соотношениям при одинаковых временах. Для поля (63) канонические перестановочные соотношения выполняются только в модельных теориях (σ -модель [224]). Так как матричные элементы тока a_μ в принципе наблюдаемы, то в силу гипотезы PCAC (63) наблюдаемы также и соответствующие матричные элементы пионного поля вне поверхности масс.

Сравнивая (62) и (63), находим

$$c_\pi = m_\pi^2 f_\pi \approx \frac{m_\pi^2 m_N}{10}. \quad (65)$$

В качестве примера применения гипотезы PCAC рассмотрим матричный элемент аксиального тока между протонным и нейтронным состояниями, входящий в амплитуду бета-распада нейтрона. Из соображений инвариантности следует, что в этом случае имеется 3 независимых форм-фактора G_1, G_2, G_3 (см. § 11.4), которые мы будем связывать с векторами $\gamma_5 \gamma_\lambda, q_\lambda \gamma_5 = (p_n - p_p)_\lambda \gamma_5$ и $\sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma_5$:

$$\begin{aligned} G \cos \theta \langle p_2, \sigma_2; p | a_{\lambda 2} + i a_{\lambda 1} | p_1, \sigma_1; n \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \bar{u}_N(p_2, \sigma_2) \tau_+ \{ \gamma_5 \gamma_\lambda G_1(q^2) - q_\lambda \gamma_5 G_2(q^2) + \\ + i \sigma_{\lambda\rho} q^\rho \gamma_5 G_3(q^2) \} u_N(p_1, \sigma_1), \quad (66) \end{aligned}$$

где мы воспользовались изовекторностью тока a_λ и ввели в правой части компоненты изовектора $\bar{u}_N^{1/2} \tau_h u_N$ (u_N — 8-компонентный дираковский спинор нуклона). Эрмитовость оператора $a_{\lambda k}$ требует, чтобы G_1 и G_2 были вещественны, а G_3 — чисто мнимо. Ток $i \bar{u} \tau_h \sigma_{\lambda\rho} q^\rho \gamma_5 u/2$ по отношению к GP-преобразованию (31) является током второго класса. Наличие тока с мнимым форм-фактором G_3 нарушает инвариантность теории относительно отражения времени T (см. § 5.4). Поэтому необходимо положить

$$G_3 = 0. \quad (67)$$

При $q^2 = 0$ правая часть (66) превращается в

$$\frac{G_1(0)}{(2\pi)^3} \bar{u}_N(p_2, \sigma_2) \tau_+ \gamma_\lambda \gamma_5 u_N(p_1, \sigma_1), \quad (68)$$

ибо форм-факторы не могут иметь полюсов при $q^2 = 0$: такие полюсы соответствовали бы заряженным частицам нулевой массы.

Выражение (68) отличается от формулы для матричного элемента аксиального тока

$$\frac{G \cos \theta}{(2\pi)^3} \bar{u}_N(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \tau_+ \gamma_\lambda \gamma_5 u_N(\mathbf{p}_1, \sigma_1)$$

(применимой в пренебрежении влиянием сильного взаимодействия) множителем $G_1(0)/G \cos \theta$. Иначе говоря, эффективная (перенормированная) аксиальная константа слабого взаимодействия равна

$$G_A \equiv G_1(0) \approx 1,18 G \cos \theta, \quad (69)$$

где число 1,18 получено из эксперимента. Вместо (17) мы могли бы теперь записать бета-распадный ток в виде

$$J_\lambda = \bar{p} \gamma_\lambda (1 - 1,18 \gamma_5) p \cos \theta. \quad (70)$$

Соотношение Гольдбергера—Треймана. Выясним связь между G_A и пионными параметрами m_π и f_π . Матричный элемент расходимости аксиального тока равен

$$\begin{aligned} \cos \theta G \langle \mathbf{p}_2; p | \partial^\lambda (a_{\lambda 1} + i a_{\lambda 2}) | \mathbf{p}_1; p \rangle = \\ = \frac{i}{(2\pi)^3} \bar{u}_p(\mathbf{p}_2) \{ (m_p + m_n) G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2) \} \gamma_5 u_p(\mathbf{p}_1). \end{aligned} \quad (71)$$

Но согласно (63) левая часть (71) равна

$$G \cos \theta \langle \mathbf{p}_2; p | \pi(0) | \mathbf{p}_1; p \rangle m_\pi^2 f_\pi.$$

Эта величина может быть связана с пионным форм-фактором нуклона $K_{NN\pi}(q^2)$, который определен равенством

$$\frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3} i g_{NN\pi} \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 \tau_h u(\mathbf{p}_1) K_{NN\pi}(q^2) = \langle \mathbf{p}_2, N | J_{5h} | \mathbf{p}_1; N \rangle, \quad (72)$$

где $g_{NN\pi}$ — пион-нуклонная константа связи, $g_{NN\pi}^2/4\pi \approx 14,6$, а $J_{5h}(x) = (-\square + m_\pi^2) \pi(x)$ — пионный ток.

Форм-фактор $K_{NN\pi}(q^2)$ нормирован условием $K_{NN\pi}(m_\pi^2) = 1$, где точка $q^2 = m_\pi^2$ соответствует пионному полюсу в аннигиляционном канале.

Таким образом, простая комбинация аксиальных форм-факторов выражается через пионный форм-фактор нуклона и константу $g_{NN\pi}$:

$$\frac{2m_N G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2)}{2G \cos \theta} = f_\pi m_\pi^2 \frac{g_{NN\pi} K_{NN\pi}(q^2)}{\sqrt{2} m_\pi^2 - q^2}.$$

Полагая $q^2 = 0$, мы приходим к соотношению Гольдбергера — Треймана [225]:

$$\frac{G_1(0)}{G \cos \theta} \equiv \frac{G_A}{G \cos \theta} = \frac{f_\pi}{\sqrt{2} m_N} g_{NN\pi} K_{NN\pi}(0). \quad (73)$$

Формула (73) позволяет вычислить $K_{NN\pi}(0)$ по известным экспериментальным значениям для $g_A(0) \approx 1,18$ и $f_\pi \approx 0,1m_N$, что дает $K_{NN\pi}(0) = 0,89$. Это значение мало отличается от $K_{NN\pi}(m_\pi^2) = 1$, и функция $K_{NN\pi}(q^2)$, по-видимому, монотонно изменяется на интервале $0 \leq q^2 \leq m_\pi^2$. Поэтому обычно полагают $K_{NN\pi} \approx 1$, записывая формулу (73) в виде ($\cos \theta \approx 1$)

$$\frac{G_A}{G} = \frac{f_\pi}{\sqrt{2}m_N} g_{NN\pi}.$$

Точность этого соотношения, очевидно, не может превышать 10%.

Если перейти к точной $SU_2 \times SU_2$ -симметрии, где аксиальные токи сохраняются:

$$\partial^\lambda a_\lambda = 0,$$

то из соотношения (72) получим:

$$2m_N G_1(q^2) = -q^2 G_2(q^2).$$

Чтобы определить аксиальную константу для случая $SU_2 \times SU_2$ -симметрии, необходимо изучить предел правой части при $q^2 \rightarrow 0$. Согласно (62) сохранение аксиального тока выдвигает две возможности для трактовки пионов: 1) $m_\pi = 0$, $f_\pi \neq 0$; 2) $f_\pi = 0$, $m_\pi \neq 0$. Если $m_\pi = 0$, то форм-фактор $G_2(q^2)$ приобретает пионный полюс при $q^2 = 0$, так что

$$G_1(0) = -\frac{1}{2m_N} \lim_{q^2 \rightarrow 0} q^2 G_2(q^2) \neq 0.$$

Если $m_\pi \neq 0$, то $G_2(q^2)$ не имеет полюса, соответствующего заряженным частицам с $m^2 = q^2 = 0$ и $q^2 G_2(q^2) \rightarrow 0$ при $q^2 \rightarrow 0$. В этом случае аксиальная константа отлична от нуля, только если масса нуклона равна нулю: $m_N = 0$. При этом нуклонные состояния $|\rho, \lambda; N\rangle$ определенной спиральности $\pm\lambda$ образуют базис для двух простейших представлений $V^+ = 1/2$, $V^- = 0$ и $V^+ = 0$, $V^- = 1/2$ спиральной группы $SU_2^{(+)} \times SU_2^{(-)}$.

Условие самосогласованности Адлера [226]. Другое важное следствие гипотезы заключается в исчезновении (при некоторых условиях) амплитуды рассеяния адронов $b \rightarrow c + \pi$, если импульс q_μ пиона стремится к нулю: $q_\mu \rightarrow 0$; под b и c здесь подразумеваются произвольные состояния адронов.

Рассмотрим амплитуду такого процесса и воспользуемся редукционной формулой (11.14):

$$\begin{aligned} \langle \pi c | S - 1 | b \rangle &= \delta^4(p_c - p_b + q) \langle \pi c | T | b \rangle = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x e^{iqx} K(x) \langle c | \pi(x) | b \rangle, \end{aligned}$$

где $\pi(x)$ — интерполирующее пионное поле и q_μ — импульс пиона в конечном состоянии. Поле $\pi(x)$ в этой формуле можно выразить через $\partial_\mu a^\mu$ с помощью гипотезы PCAC (63):

$$\begin{aligned} \langle \pi c | S - 1 | b \rangle &= -\frac{1}{c_\pi (2\pi)^{3/2}} \int d^4 x e^{iqx} K(x) \langle c | \partial_\mu a^\mu(x) | b \rangle = \\ &= \frac{i q_\mu}{c_\pi (2\pi)^{3/2}} \int d^4 x e^{iqx} K(x) \langle c | a^\mu(x) | b \rangle, \end{aligned}$$

ибо в силу закона сохранения $p_b = p_c + q$. Следовательно, амплитуда может быть отлична от нуля при $q_\mu = 0$ только в том случае, когда амплитуда «рассеяния» аксиального тока $b \rightarrow c + a_\mu$ обладает в этой точке полюсом. Предположив, что таких полюсов нет, мы приходим к условию самосогласованности Адлера:

$$\lim_{q_\mu \rightarrow 0} \langle \pi c | T | b \rangle = 0. \quad (74)$$

Это условие мы уже использовали в § 14.4.

§ 15.4. Перенормировка аксиальной константы

Аксиальная векторная константа G_A слабого взаимодействия может быть определена равенствами (66), (68) и (69), или

$$\begin{aligned} G_V \langle \mathbf{k}, \sigma_1; p | a_{01} + i a_{02} | \mathbf{k}, \sigma_2; n \rangle &= \\ = G_A \langle \mathbf{k}, \sigma_1; p | \bar{p}(x) \gamma_4 \gamma_5 n(x) | \mathbf{k}, \sigma_2; n \rangle &= \\ = \frac{G_A}{(2\pi)^3} \bar{u}(\mathbf{k}', \sigma_1) \gamma_4 \gamma_5 u(\mathbf{k}, \sigma_2), \end{aligned} \quad (75)$$

где G_V есть константа векторного взаимодействия, а $p(x)$ и $n(x)$ — свободные протонное и нейтронное поля. Наша задача заключается в вычислении G_A/G_V , т. е. в выводе того выражения, которое, будучи оценено с помощью независимых экспериментальных данных, может дать коэффициент 1,18 в (69) и (70).

Для вычисления G_A мы воспользуемся перестановочными соотношениями (42) для аксиальных зарядов при одинаковых временах:

$$[A_+(x_0), A_-(x_0)] = 2I_3, \quad A_\pm = A_1 \pm iA_2. \quad (76)$$

Мы положим $x_0 = 0$ и будем писать $A(x_0) = A$. Найдем матричный элемент от обеих частей (76) между состояниями протона $|\mathbf{k}, \sigma; p\rangle$ и $|\mathbf{k}', \sigma'; p\rangle$. Усредняя по поляризациям протона, получаем для правой части (76)

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle \mathbf{k}, \sigma; p | 2I_3 | \mathbf{k}', \sigma'; p \rangle = 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (77)$$

В левой части (76) матричный элемент от произведения аксиальных зарядов A_+A_- можно разложить по полной системе промежуточных состояний $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle \mathbf{k}, \sigma; p | A_+ A_- | \mathbf{k}', \sigma'; p \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{(n)} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle \mathbf{k}, \sigma; p | A_+ | (n) \rangle \times \\ &\times \langle (n) | A_- | \mathbf{k}', \sigma'; p \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq (n); \sigma, \sigma'} \langle \mathbf{k}, \sigma; p | A_+ | \alpha \rangle \langle \alpha | A_- | \mathbf{k}', \sigma'; p \rangle \equiv \\ &\equiv C_1 + C_2(+ -), \quad (78) \end{aligned}$$

выделив сумму C_1 по одночастичным (в данном случае — нейтронным) состояниям p . Вторая сумма $C_2(+ -)$ включает многочастичные состояния $|\alpha\rangle$. Слагаемое A_-A_+ в (76) не дает одночастичного вклада типа C_1 (нет дважды заряженной частицы, распадающейся только вследствие слабого взаимодействия). Поэтому соотношение, получаемое из (76), имеет вид

$$2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = C_1 + C_2(+ -) - C_2(- +). \quad (79)$$

Вклад нейтронного состояния C_1 можно выразить через аксиальную константу G_A . Согласно (37) оператор A_k не изменяет импульса и любой из матричных элементов в (78) содержит δ -функцию от импульсов состояний:

$$\langle a | A_k | b \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \langle a | a_{0k} | b \rangle. \quad (80)$$

Но в силу (75) для одночастичных состояний матричный элемент от тока a_{0k} (при совпадающих импульсах) пропорционален G_A . Подставляя (75) и (80) в (78), получаем для C_1 выражение

$$C_1 = 2 \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \frac{k^2}{k_0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (81)$$

Соотношение (79) может быть теперь записано символически в виде

$$1 - \left(\frac{G_A}{G_V} \right)^2 \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{1}{2k_0} (C_2'(+ -) - C_2'(- +)), \quad (79')$$

где C_2' обозначает вклад многочастичных состояний в (78) без δ -функции от импульсов.

Из (79) явствует, что перенормировка G_A существенным образом связана с многочастичными состояниями. Если бы симметрия $SU_2 \times SU_2$ была точной и аксиальные заряды A_k сохранялись бы, а нуклон принадлежал бы к неприводимому представлению группы $SU_2 \times SU_2$, то заряды A_k , как генераторы этой группы, не могли бы связывать нуклон с многочастичными состояниями. Следовательно, в случае $SU_2 \times SU_2$ -симметрии правая часть (79') равна нулю.

Предполагая, что нейтрон и протон — единственные одночастичные состояния, мы тем самым исключаем удвоение по четности и потому должны положить $m_N = 0$ (см. § 15.3). Соотношение (79') приводит тогда к отсутствию перенормировки: $G_A = G_V$.

Если масса нуклона отлична от нуля и симметрия $SU_2 \times SU_2$ нарушена, то соотношение (79') позволяет в принципе найти отношение G_A/G_V как меру нарушения этой симметрии. Соотношение (79') зависит от системы отсчета и приобретает наиболее наглядный вид в системе бесконечно большого импульса нуклона, где $k^2/k_0^2 \approx 1$. Тогда левая часть содержит лишь $1 - G_A^2/G_V^2$ и отклонение от единицы всецело обуславливается многочастичными вкладами C_2' .

Вклад многочастичных состояний можно найти с помощью гипотезы PCAC (63). Для этого мы преобразуем сначала матричный элемент аксиального заряда A_k так, чтобы заменить A_k расходимостью $\partial_\mu a_k^\mu$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | A | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle &= \frac{\langle \alpha | \partial_0 A | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle}{i(\rho_{\alpha 0} - k_0)} = \\ &= \frac{\langle \alpha | \int d^3 x \partial^\mu a_\mu | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle}{i\omega_\alpha} = \frac{C_\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{i\omega_\alpha} \langle \alpha | \int d^3 x \pi(x) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle, \quad (82) \\ \omega_\alpha &= \rho_{\alpha 0} - k_0. \end{aligned}$$

Чтобы выразить C_2 через наблюдаемые величины, введем вместо поля $\pi(x)$ пионный ток, связанный с сильным взаимодействием:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \int d^3 x \pi(x) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{k}) \langle \alpha | \pi(0) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \delta(\rho_\alpha - k) \frac{\langle \alpha | J_\pi(0) | \mathbf{k}, p \rangle}{(\rho_\alpha - k)^2 - m_\pi^2}, \quad (83) \\ (\square - m_\pi^2) \pi(x) &= J_\pi(x). \end{aligned}$$

На поверхности энергии-импульса $\rho_\alpha = k + p_\pi$ матричный элемент пионного тока $\langle \alpha | J_\pi(0) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle$ определяет амплитуду процесса $\pi + p \rightarrow \alpha$, если состояния $|\alpha\rangle \equiv |\alpha, \text{out}\rangle$.

Подставляя (82) и (83) в $C_2(+ -)$, мы получаем тогда

$$\begin{aligned} C_2(+ -) &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{c_\pi^2 (2\pi)^6}{4} \sum_{n_\alpha, \sigma_\alpha} \int \delta(\rho_\alpha - k) \delta(\rho_1^2 - m_1^2) \dots \\ &\dots \delta(\rho_{n_\alpha}^2 - m_{n_\alpha}^2) \frac{|\langle \mathbf{p}_\alpha, \sigma_\alpha; \alpha | J_\pi(0) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle|^2}{\omega_\alpha^2 [(\rho_\alpha - k)^2 - m_\pi^2]^2} = \\ &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{c_\pi^2 (2\pi)^6}{4} \sum_{n_\alpha, \sigma_\alpha} \int dR_{n_\alpha}(k+q) \frac{|\langle \mathbf{p}_\alpha, \sigma_\alpha; \alpha | J_\pi(0) | \mathbf{k}, \sigma; p \rangle|^2}{\omega_\alpha^2 [(\rho_\alpha - k)^2 - m_\pi^2]^2}, \quad (84) \end{aligned}$$

где n_α — число частиц в состоянии α , а σ_α — их состояние поляризации. Инвариантный фазовый объем dR_n определен по (7.35), при этом мы ввели вектор $q^\mu = (\omega_\alpha, 0, 0, 0)$. Матричный элемент тока в C_2 может быть связан с полным сечением рассеяния мягких пионов ($m_\pi^2 = 0$) на протонах. Для рассеяния

$$\pi + p \rightarrow \alpha$$

из сохранения энергии-импульса $q + k = p_\alpha$ (q — импульс пиона) при условии $q^2 = 0$ мы получаем в системе ц. и.

$$M = \sqrt{s} = q_0 + k_0, \quad q_0 = \frac{M^2 - m_N^2}{2M}.$$

Сечение рассеяния $d\sigma(\pi + p \rightarrow \alpha)$ равно (см. § 7.3)

$$d\sigma = \frac{2(2\pi)^{10}}{M^2 - m_N^2} |\langle \alpha | T | \pi p \rangle|^2 dR_\alpha(q + k), \quad (85)$$

где согласно (11.14)

$$\langle \alpha | T | \pi p \rangle = -(2\pi)^{-3/2} \langle \alpha | J_\pi(0) | k, \sigma; p \rangle. \quad (86)$$

Полное сечение σ_{tot} находится из (85) суммированием Σ_α по всем возможным состояниям α с заданной энергией \sqrt{s} . Если ввести обозначение $\sigma_{\text{tot}}(\sqrt{s}, m_\pi^2)$, подчеркивающее зависимость σ_{tot} от пионной массы, то из (85) мы находим $\sigma_{\text{tot}}(\sqrt{s}, 0)$.

Перейдем в (84) к системе бесконечного импульса, где $k_0 \rightarrow \infty$, и затем подставим выражения (85) и (86), тогда

$$C_2(+ -) = \delta(k - k') \frac{c_\pi^2}{m_\pi^4} \int_{m_N + m_\pi}^{\infty} dW \frac{W}{W^2 - m_N^2} \sigma_{\text{tot}}^-(W, 0), \quad (87)$$

где $\sigma_{\text{tot}}^-(W, 0)$ есть полное сечение рассеяния мягких пионов π^- на протоне. Слагаемое $C_2(- +)$ вычисляется аналогичным образом, в него входит полное сечение $\sigma_{\text{tot}}^+(W, 0)$ рассеяния мягких пионов π^+ на протоне:

$$C_2(- +) = \delta(k - k') \frac{c_\pi^2}{m_\pi^4} \int_{m_N + m_\pi}^{\infty} dW \frac{W}{W^2 - m_N^2} \sigma_{\text{tot}}^+(W, 0). \quad (88)$$

Пионная константа c_π содержит G_A/G_V . Воспользовавшись формулой Гольдбергера — Треймана (73), мы можем с помощью (81) —

(87) и (88) преобразовать (79) к виду [227, 228]

$$1 - \frac{G_V^2}{G_A^2} = \frac{4m_N^2}{(K_{NN\pi}(0) g_{NN\pi})^2} \frac{1}{\pi} \int_{m_N+m_\pi}^{\infty} dW \frac{W}{W^2 - m_N^2} (\sigma_{\text{tot}}^+(W, 0) - \sigma_{\text{tot}}^-(W, 0)). \quad (89)$$

Соотношение Адлера — Вейсбергера (89) позволяет вычислить перенормировку слабой аксиальной константы G_A по величинам сечений рассеяния и константам $K_{NN\pi}$, $g_{NN\pi}$, связанным с сильным взаимодействием. При этом, разумеется, предполагается, что экспериментальные сечения $\sigma_{\text{tot}}^\pm(W, m_\pi^2)$ можно экстраполировать к $m_\pi^2 = 0$. В низкоэнергетической области σ_{tot}^+ доминирует над σ_{tot}^- вследствие существования резонанса Δ^{++} . С увеличением энергии разность $\sigma_{\text{tot}}^+ - \sigma_{\text{tot}}^-$ уменьшается. Следует ожидать поэтому, что $(G_A/G_V)^2 > 1$. Вычисления дают $|G_A/G_V| \approx 1,15$ [227] и $|G_A/G_V| \approx 1,21$ [228], что очень близко к экспериментальной цифре 1,18, если иметь в виду приближенный характер ($\sim 10\%$) формулы Гольдбергера — Треймана.

§ 15.5. Асимптотическая киральная симметрия и спектральные правила сумм

Если бы киральная симметрия $SU_2 \times SU_2$ была точной, то, как мы убедились в § 15.3, пион был бы частицей без массы. Можно думать поэтому, что киральная симметрия становится все более точной с увеличением энергии, в то время как при низких энергиях ее нарушения весьма существенны. Последняя точка зрения подтверждается, во всяком случае, тем обстоятельством, что, например, октету барионов B нельзя сопоставить другой октет B' с противоположной четностью. Требование асимптотической симметрии вместе с предположением об асимптотическом поведении вакуумных ожиданий от произведения токов позволяют получить строгие ограничения на спектральные функции или в полюсном приближении — на массы частиц. Эти ограничения известны как спектральные правила сумм Вейнберга [229].

Рассмотрим вакуумное ожидание от произведения двух токов $j_{\mu k}$, $j_{\nu j}$, где k, j относятся к изоспину:

$$\Delta_{\mu\nu}(x) = \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle. \quad (90)$$

Фурье-преобразование (90) дает

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \int e^{ipx} \Delta_{\mu\nu}(x) d^4x = (2\pi)^4 \sum_n \int dR_n(p) \langle 0 | j_\mu | n \rangle \langle n | j_\nu | 0 \rangle, \quad (91)$$

где мы ввели полную систему промежуточных состояний и интегрируем во втором интеграле в (91) по инвариантному фазовому n -частичному объему; $j_\mu \equiv j_\mu(0)$.

Токи j_μ могут, вообще говоря, не сохраняться: $\partial^\mu j_\mu \neq 0$. Поэтому матричные элементы тока в (91) могут включать состояния $|n\rangle$ как со спином 1, так и с нулевым спином. Действительно, для матричного элемента тока между вакуумом и состоянием со спином J и массой $m_J \neq 0$ мы имеем

$$-m_J^2 J(J+1) \langle 0 | j_\mu | m_J, J \rangle = \langle 0 | [W^2, j_\mu] | m_J, J \rangle = \\ = 2 \langle 0 | g_{\mu\nu} \square j^\nu - \partial_\mu \partial_\nu j^\nu | m_J, J \rangle. \quad (92)$$

Для «поперечного» тока j_μ^t с $\partial^\mu j_\mu^t = 0$ матричный элемент в (92) отличен от нуля только при $J = 1$. Если $[W^2, j_\mu] = 0$, т. е. для «продольного» тока j_ν^1 , удовлетворяющего условию $\square j_\mu^1 - \partial_\mu \partial^\nu j_\nu^1 = 0$, в матричном элементе тока в (92) должно быть $J = 0$.

Следовательно, для несохраняющегося тока сумма в (91) разбивается на две части, в которых состояния $|n\rangle$ имеют спин 1 и спин 0:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = (2\pi)^4 \left\{ \sum_n \delta^4(p - p_n) \langle 0 | j_\mu^t | n, J = 1 \rangle \langle n, J = 1 | j_\nu^t | 0 \rangle + \right. \\ \left. + \sum_n \delta^4(p - p_n) \langle 0 | j_\mu^1 | n, J = 0 \rangle \langle n, J = 0 | j_\nu^1 | 0 \rangle \right\}. \quad (93)$$

Каждая из частей может быть выражена через инвариантную спектральную функцию $\rho^{(J)}(p^2)$, так что

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = 2\pi \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{p^2} p_\mu p_\nu \right) \rho^{(1)}(p^2) \theta(p_0) + \frac{2\pi}{p^2} p_\mu p_\nu \rho^{(0)}(p^2) \theta(p_0). \quad (94)$$

Из (93) и (94) следует, что спектральные функции $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(0)}$ неотрицательны:

$$\rho(p^2) \geq 0, \quad p^2 > 0, \quad p_0 > 0, \quad (95)$$

и нижним порогом для $\rho(p^2)$ служит наименьшая масса $m_n^2 = p^2$ состояния $|n\rangle$. Возвращаясь к координатному пространству, мы приходим к спектральному представлению типа Челлена — Лемана:

$$\Delta_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} \int dm^2 \rho^{(1)}(m^2) \Delta^+(x; m^2) - \\ - \partial_\mu \partial_\nu \int \frac{dm^2}{m^2} (\rho^{(1)}(m^2) + \rho^{(0)}(m^2)) \Delta^+(x, m^2), \quad (96)$$

где $\Delta^+(x, m^2)$ есть вакуумное ожидание для произведения двух свободных полей со спином 0 и массой m^2 :

$$\Delta^+(x, m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{-ipx} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2). \quad (97)$$

Формула (96) служит исходной при выводе спектрального представления для вакуумного ожидания от хронологического произведения двух токов:

$$\Delta_{F\mu\nu}(x) = \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | \theta(x_0) [j_\mu(x), j_\nu(0)] | 0 \rangle + \langle 0 | j_\nu(0) j_\mu(x) | 0 \rangle. \quad (98)$$

В результате

$$\Delta_{F\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} \int dm^2 \rho^{(1)}(m^2) \Delta_F(x, m^2) + \\ + \int \frac{dm^2}{m^2} (\rho^{(1)} + \rho^{(0)}) \partial_\mu \partial_\nu \Delta_F(x, m^2) + g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^4(x) \int \frac{dm^2}{m^2} (\rho^{(1)} + \rho^{(0)}), \quad (99)$$

где

$$\Delta_F(x, m^2) = i \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(0)) | 0 \rangle$$

есть пропагатор Фейнмана для свободного поля со спином 0, а последнее слагаемое («швингеровский член») появилось при дифференцировании $\theta(x_0)$ и учете равенства

$$\partial_0(\Delta^+(x) - \Delta^+(-x))|_{x_0=0} = -i\delta^3(x). \quad (100)$$

Заметим, что только разность $\Delta_{F\mu\nu}$ и швингеровского члена преобразуется как тензор.

Предположение об асимптотической симметрии вакуумных ожиданий типа (99) для аксиальных и векторных токов может быть сформулировано следующим образом [230]. Пусть

$$\Delta_{F\mu\nu}^V(q) = \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | T(v_\mu(x) v_\nu(0)) | 0 \rangle, \quad (101)$$

$$\Delta_{F\mu\nu}^A(q) = \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | T(a_\mu(x) a_\nu(0)) | 0 \rangle \quad (102)$$

— фурье-компоненты вакуумных ожиданий от токов $v_{\mu i}$ и $a_{\nu j}$. В случае точной симметрии $SU_2 \times SU_2$ должно быть $\Delta_{F\mu\nu}^V(q) = \Delta_{F\mu\nu}^A(q)$ для всех значений q . Асимптотическая симметрия означает, что

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} (\tilde{\Delta}_{F\mu\nu}^V(q) - \tilde{\Delta}_{F\mu\nu}^A(q)) = 0, \quad (103)$$

где $\tilde{\Delta}_{F\mu\nu}(q)$ есть ковариантная часть пропагатора, не содержащая швингеровского члена. В спектральном представлении (99) для аксиального тока удобно выделить из $\rho_A^{(0)}$ пионный вклад. Имея в виду формулу (61) для $\langle 0 | a_\mu | \pi \rangle$, находим, что этот вклад в $\Delta_{F\mu\nu}^A(q)$ равен

$$\frac{f_\pi^2 q_\mu q_\nu}{q^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon}. \quad (104)$$

Тогда разность векторного и аксиального пропагаторов (103) есть

$$\left\{ \int \frac{dm^2 (\rho_V - \rho_A^{(1)})}{q^2 - m^2 - i\varepsilon} - q^2 \int \frac{\rho_V^{(1)} - \rho_A^{(1)} - \rho_A^{(0)}}{m^2 (q^2 - m^2 + i\varepsilon)} - \frac{f_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \right\}, \quad (105)$$

где ρ_V и ρ_A — векторная и аксиальная спектральные плотности, определенные по (93) и (94). Ввиду сохранения векторного тока и отсутствия частиц с нулевой массой $\rho_V^{(0)} = 0$ и $\rho_V \equiv \rho_V^{(1)}$ содержит только вклады от частиц со спином 1.

При $q^2 \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (105) исчезает, если считать конечным выражение

$$C = \int dm^2 (\rho_V - \rho_A^{(1)}).$$

Заметим, что использованное выше изменение порядка интегрирования возможно, если конечен интеграл в швингеровском члене, или

$$\int_0^\infty dm^2 \frac{\rho(m^2)}{m^2} < \infty.$$

Предел второго слагаемого в (105) легко вычисляется, если возможно переставить порядок интегрирования и перехода к пределу. В этом предположении мы получаем из (103) и (105) первое правило сумм Вейнберга [229]:

$$\int_0^\infty \frac{\rho_V(m^2) - \rho_A(m^2)}{m^2} dm^2 = f_\pi^2. \quad (106)$$

Если сделать дополнительное предположение, что $C = 0$ или же что асимптотически выполняется не только (103), но и

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} q^2 \int \frac{dm^2 (\rho_V - \rho_A^{(1)})}{q^2 - m^2 - i\varepsilon} = 0, \quad (107)$$

то спектральные плотности должны удовлетворять второму правилу сумм [229]:

$$\int_0^\infty (\rho_V(m^2) - \rho_A^{(1)}(m^2)) dm^2 = 0. \quad (108)$$

Формулы (106) и (108) представляют собой ограничения, накладываемые асимптотической киральной симметрией $SU_2 \times SU_2$ и предположением (107) о быстром убывании плотности $\rho_V - \rho_A^{(1)}$.

Применение правил сумм (106) и (108) основывается на предположении, что в спектральных плоскостях ρ_A и ρ_V существенны лишь

резкие максимумы в области резонансов. Учитывая только ρ -мезонный вклад в ρ_V и A_1 -мезонный вклад в $\rho_{A_1}^{(1)}$ и в приближении бесконечно узких резонансов, можно положить

$$\rho_V(m^2) = G_\rho^2 \delta(m^2 - m_\rho^2), \quad (109)$$

$$\rho_{A_1}(m^2) = G_{A_1}^2 \delta(m^2 - m_{A_1}^2), \quad (110)$$

где константы G_ρ и G_{A_1} могут быть найдены из лептонных распадов ρ и A_1 , например $\rho \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | v_\mu(0) | \rho \rangle &= \frac{e_\mu(k_\rho, \lambda)}{(2\pi)^{3/2}} G_\rho, \\ \langle 0 | a_\mu(0) | A_1 \rangle &= \frac{e_\mu(k_{A_1}, \lambda)}{(2\pi)^{3/2}} G_{A_1}. \end{aligned} \quad (111)$$

Правила сумм тогда приводят к равенству $G_{A_1}^2 = G_\rho^2$ и соотношению

$$G_\rho^2 \left(\frac{1}{m_\rho^2} - \frac{1}{m_{A_1}^2} \right) = f_\pi^2, \quad (112)$$

связывающему массы ρ и A_1 с константами распада G_ρ и f_π .

Из распадов $\rho \rightarrow 2\pi$ явствует, что G_ρ и f_π пропорциональны [231—233]:

$$G_\rho^2 \approx 2m_\rho^2 f_\pi^2. \quad (113)$$

Внося это эмпирическое значение G_ρ^2 в (112), мы приходим к формуле для отношения масс ρ и A_1 :

$$m_{A_1} = \sqrt{2} m_\rho, \quad (114)$$

которая очень хорошо согласуется с экспериментом ($m_{A_1} \approx 1070$ Мэв, $m_\rho \approx 765$ Мэв). В случае точной симметрии $SU_2 \times SU_2$ массы m_ρ и m_{A_1} должны были бы быть одинаковыми.

Идея об асимптотической симметрии легко распространяется на киральную группу $SU_3 \times SU_3$.

Векторные странные токи сохраняются только в пределе SU_3 -симметрии. Поэтому, если учитывать эффекты нарушения SU_3 -симметрии (которые сравнимы с эффектами нарушения киральной $SU_2 \times SU_2$ -симметрии, см. § 13.3), то следует считать несохраняющимися токи $v_{\mu a}$ ($a = 4, 5, 6, 7$). Скалярная часть спектральной плотности $\rho_V^{(0)}$ будет тогда отлична от нуля. Если предположить, что вклад в $\rho_V^{(0)}$ связан со скалярными K -мезонами (κ -мезонами), $J^P = 0^+$, то, например,

$$\langle 0 | v_{\mu 4} + i v_{\mu 5} | q; \kappa^+ \rangle = \frac{F_\kappa q_\mu}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (115)$$

Несохранение аксиального тока $a_{\mu a}$ ($a = 4, 5, 6, 7$) связано (посредством РСАС) с существованием К-мезонов:

$$\langle 0 | a_{\mu 4} + i a_{\mu 5} | q; K^+ \rangle = \frac{F_K q_\mu}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (116)$$

Таким образом, в случае асимптотической $SU_3 \times SU_3$ -симметрии в дополнение к разности (103) следует рассматривать еще разность

$$\Delta_{F\mu\nu}^{K^*}(q) - \Delta_{F\mu\nu}^{K_A}(q) \equiv F(q^2) g_{\mu\nu} + G(q^2) q_\mu q_\nu, \quad (117)$$

$$F(q^2) = \int dm^2 \frac{\rho_{K^*}(m^2) - \rho_{K_A}(m^2)}{q^2 - m^2 - i\epsilon}, \quad (118)$$

$$G(q^2) = \int dm^2 \frac{\rho_{K^*}(m^2) - \rho_{K_A}(m^2)}{m^2(q^2 - m^2 - i\epsilon)} + \frac{F_\kappa^2}{q^2 - m_\kappa^2 - i\epsilon} - \frac{F_K^2}{q^2 - m_K^2 - i\epsilon}, \quad (119)$$

где ρ_{K^*} — векторная плотность, ρ_{K_A} — аксиально векторная плотность, а вклад скалярных плотностей ограничен лишь κ - и К-членами в (119).

Предположение, что разность (117) исчезает асимптотически, $q^2 \rightarrow \infty$, дает первое правило сумм Вейнберга:

$$\int dm^2 \frac{\rho_{K^*}(m^2) - \rho_{K_A}(m^2)}{m^2} = F_K^2 - F_\kappa^2. \quad (120)$$

Второе правило сумм, находящееся в неплохом согласии с экспериментом, выводится [234] в дополнительном предположении, что $q^2 F(q^2)$ в пределе $q^2 \rightarrow \infty$ становится константой, а $q^2(g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu G(q^2))$ асимптотически исчезает. Тогда из (119) и первого правила сумм (120) вытекает второе правило сумм:

$$\int_0^\infty dm^2 (\rho_{K^*}(m^2) - \rho_{K_A}(m^2)) = m_K^2 F_K^2 - m_\kappa^2 F_\kappa^2. \quad (121)$$

Первыми резонансами, дающими вклад в спектральные плотности ρ_{K^*} и ρ_{K_A} , являются K^* ($J^P = 1^-, m_{K^*} \approx 892$ Мэв) и K_A ($J^P = 1^+, m_{K_A} \approx 1330$ Мэв). Скалярная частица κ имеет массу $m_\kappa \approx 1050$ Мэв и ширину $\Gamma_\kappa \approx 300$ Мэв [235].

Если киральная симметрия $SU_3 \times SU_3$ становится точной при больших энергиях, то, следовательно, становится точной асимптотически и SU_3 -симметрия. Мы можем поэтому предположить, что при $q^2 \rightarrow \infty$ исчезает разность пропагаторов [230]:

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} [\tilde{\Delta}_{F\mu\nu}^\nu(q) - \tilde{\Delta}_{F\mu\nu}^{K^*}(q)] = 0, \quad (122)$$

где Δ^V и Δ^{K^*} содержат в качестве промежуточных состояний частицы ρ и K^* одного и того же октета V , например:

$$\Delta_{\mu\nu}^{K^*}(q) = \int d^4x e^{-iqx} \langle 0 | T (v_{\mu 4-i5}(x) v_{\nu 4+i5}(0)) | 0 \rangle. \quad (123)$$

Условие (122) эквивалентно следующему соотношению для спектральных плотностей:

$$\int_0^{\infty} \frac{\rho^V(m^2) - \rho^{K^*}(m^2)}{m^2} dm^2 = 0. \quad (124)$$

Если в функции ρ^V и ρ^{K^*} дают вклад только первые резонансы ρ и K^* :

$$\rho^V(m^2) = G_\rho^2 \delta(m^2 - m_\rho^2), \quad \rho^{K^*}(m^2) = G_{K^*}^2 \delta(m^2 - m_{K^*}^2),$$

то мы находим связь между константами распадов G_ρ и G_{K^*} и массами:

$$G_\rho^2 m_{K^*}^2 = m_\rho^2 G_{K^*}^2. \quad (125)$$

Соотношения типа (114) и (125), возникающие в однорезонансном приближении к спектральным плотностям, имеют, разумеется, весьма приближенный характер. Тот факт, что они выполняются с хорошей точностью, указывает на доминирующую роль области низких энергий (и резонансных пиков) в интегралах по массам.

С другими применениями алгебры токов можно познакомиться по обзорам [16, 236—239].

§ 15.6. Нарушение CP-инвариантности

В своих распадах нейтральные каоны K^0 и \bar{K}^0 выступают в виде двух частиц — «долгоживущего» каона K_L с временем жизни $\tau_L = 6 \cdot 10^{-8}$ сек и «короткоживущего» каона K_S с временем жизни $\tau_S = 0,87 \cdot 10^{-10}$ сек (см. табл. П.1). В CP-инвариантной теории частицы K_S и K_L обладают определенной CP-четностью и описываются соответственно комбинациями K_1^0 и K_2^0 (см. § 6.3):

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle \}, \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \}, \end{aligned} \quad (126)$$

$$CP |K_1^0\rangle = \pm |K_1^0\rangle,$$

если фаза выбрана так, что $CP |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$. Все состояния каонов в (126) и далее в этом параграфе будут рассматриваться в системе ц. и.

СР-симметрия теории эквивалентна наличию правила отбора по СР-четности. В частности, частица K_2^0 (отождествляемая с K_L) не может распадаться на два пиона, так как двухпионное состояние (в системе ц. и.) имеет положительную СР-четность: $СР | \pi^+ \pi^- \rangle = | \pi^+ \pi^- \rangle$.

В 1964 г. Кронин и др. (см. [82]) обнаружили распад $K_L \rightarrow 2\pi$ и тем самым открыли, что СР-инвариантность является только приближенным свойством слабых взаимодействий. Чтобы избежать недоразумений, мы будем называть сверхслабым то взаимодействие, которое нарушает СР-симметрию (не связывая, однако, это название с какой-либо моделью СР-нарушения). Дальнейшие опыты (обзор экспериментов см. в [240]) подтвердили существование СР-неинвариантных распадов $K_L \rightarrow 2\pi$. Были найдены также СР-неинвариантные лептонные распады $K_L \rightarrow \pi^\pm |^\mp \nu$ [241, 242].

Хотя было выдвинуто много гипотез, объясняющих СР-неинвариантность, однозначной теории сверхслабого взаимодействия еще не построено. Отчасти это связано с тем, что известные экспериментальные данные не позволяют пока определить все необходимые параметры СР-нарушения. Чтобы представить ясно задачу, стоящую перед будущей теорией, мы рассмотрим в этом параграфе феноменологический анализ СР-неинвариантных распадов [15, 243].

Параметры. В экспериментах по двухпионным К-распадам измеряются следующие величины:

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\varphi_{+-}} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | T | K_L \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | T | K_S \rangle}, \quad (127)$$

$$\eta_{00} \equiv |\eta_{00}| e^{i\varphi_{00}} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_S \rangle}. \quad (128)$$

Здесь $\langle \pi\pi | T | K \rangle$ есть амплитуда распада покоящегося каона на два пиона. Величины η_{+-} и η_{00} являются параметрами СР-нарушения; при СР-симметрии $\eta_{+-} = \eta_{00} = 0$.

Вместо двухпионных состояний с заданными типом частиц удобнее пользоваться состояниями с определенным изоспином. Два пиона в состоянии с полным спином, равным нулю, могут находиться только в (симметричных) изоспиновых состояниях с $I = 0$ и $I = 2$. Поэтому (см. § 8.2)

$$\begin{aligned} |\pi^+ \pi^- \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |2\rangle, \\ |\pi^0 \pi^0 \rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |2\rangle, \end{aligned} \quad (129)$$

где $|I\rangle$ обозначает двухпионное состояние (в системе ц. и.) с изоспином $I = 0, 2$ и $I_3 = 0$.

После подстановки (129) в (127) и (128) целесообразно перейти к другим, теоретическим параметрам CP-нарушения ε_0 и ε_2 , которые входят в теоретический анализ K_L -распада:

$$\varepsilon_0 = \frac{\langle 0 | T | K_L \rangle}{\langle 0 | T | K_S \rangle}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\langle 2 | T | K_L \rangle}{\langle 0 | T | K_S \rangle}. \quad (130)$$

Связь параметров η_{+-} , η_{00} и ε_0 , ε_2 дается формулами

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\right) \eta_{+-} = \varepsilon_0 + \varepsilon_2, \quad (1 - \sqrt{2} \omega) \eta_{00} = \varepsilon_0 - 2\varepsilon_2, \quad (131)$$

где ω характеризует изоспиновое содержание двухпионного канала распада K_S :

$$\omega = \frac{\langle 2 | T | K_S \rangle}{\langle 0 | T | K_S \rangle}. \quad (132)$$

Числитель в (132) относится к распаду K_S с $\Delta I = 3/2$, а знаменатель — к распаду K_S с $\Delta I = 1/2$. Поэтому ω есть параметр нарушения правила $\Delta I = 1/2$.

Информация об ω черпается из опытов по K_S -распадам. Экспериментально можно определить величину

$$R = \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0) + \Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = \frac{1}{3} \frac{|1 - \sqrt{2} \omega|^2}{1 + |\omega|^2} \quad (133)$$

($\Gamma(a \rightarrow b)$ есть ширина спектра масс частица a по отношению к распаду b). Если бы правило $\Delta I = 1/2$ выполнялось ($\omega = 0$), то было бы $R = 1/3$. В эксперименте обнаружено $R = 0,31 \pm 0,04$; это позволяет предположить, что $|\omega^2| \ll 1$, и найти $\text{Re} \omega = (2 \pm 4) 10^{-2}$.

Следовательно, приближенно

$$\eta_{+-} = \varepsilon_0 + \varepsilon_2, \quad \eta_{00} = \varepsilon_0 - 2\varepsilon_2. \quad (134)$$

Последние данные опыта гласят:

$$|\eta_{+-}| = (1,92 \pm 0,05) \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi_{+-} = 44 \pm 5^\circ,$$

$$|\eta_{00}| = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi_{00} = 23 \pm 32^\circ.$$

Состояния K_L - и K_S -мезонов. Обратимся к теоретическому описанию K_L -распада. Нейтральные каоны K^0 и \bar{K}^0 рождаются в сильных взаимодействиях, так что состояния $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ представляют собой собственные состояния гамильтониана сильных взаимодействий $H_0 + H_S$. Частицы K^0 и \bar{K}^0 обладают только гиперзарядом ($Y = +1$ и $Y = -1$); остальные заряды этих частиц равны нулю.

При «включении» слабого H_w и «сверхслабого» H_{sw} взаимодействий частицы K^0 и \bar{K}^0 становятся неустойчивыми и распадаются. Взаимодействие $H_w + H_{sw}$ не сохраняет гиперзаряда и, связывая K^0 и \bar{K}^0 с непрерывным спектром состояний распада, приводит к переходам $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$. Существование таких переходов означает, что распадаются не K^0 - и \bar{K}^0 -частицы, а их суперпозиции $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$:

$$|K_L\rangle = p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle, \quad |K_S\rangle = r|K^0\rangle + s|\bar{K}^0\rangle. \quad (135)$$

В (135) все состояния отнесены к системе ц. и. Комплексные коэффициенты p, q, r, s удовлетворяют нормировочным условиям

$$|p|^2 + |q|^2 = |r|^2 + |s|^2 = 1.$$

Чтобы выяснить, какие именно суперпозиции (135) описывают K_L - и K_S -частицы, необходимо рассмотреть эффективную матрицу переходов \hat{T} между состояниями K^0 и \bar{K}^0 , которая получается в результате исключения непрерывного спектра. (Обычный гамильтониан H_w не имеет матричных элементов между K^0 - и \bar{K}^0 -состояниями: $\langle K^0 | H_w | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | H_w | \bar{K}^0 \rangle = \langle K^0 | H_w | \bar{K}^0 \rangle = 0$.) Матрица \hat{T} действует в пространстве (K^0, \bar{K}^0) -состояний (в системе ц.и.):

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \langle K^0 | T | K^0 \rangle & \langle K^0 | T | \bar{K}^0 \rangle \\ \langle \bar{K}^0 | T | K^0 \rangle & \langle \bar{K}^0 | T | \bar{K}^0 \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M & A \\ B & \bar{M} \end{pmatrix}; \quad (136)$$

явный вид амплитуд перехода $\langle \dots | T | \dots \rangle$ пока несуществен. Мы учтем только, что теория должна быть инвариантна относительно полного отражения $\theta = \text{CPT}$. Тогда (см. § 6.1) диагональные элементы в (136) должны быть равны:

$$\langle K^0 | T | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | T | \bar{K}^0 \rangle,$$

или же $M = \bar{M}$.

Физические состояния $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$, которые распадаются вследствие взаимодействия $H_w + H_{sw} = H'$, выделены среди других возможных суперпозиций $|K^0\rangle$ - и $|\bar{K}^0\rangle$ -состояний тем условием, что частицы K_L и K_S обладают определенными массой и временем жизни. Иначе говоря, состояния (135) должны диагонализировать матрицу (136).

Диагонализация матрицы (136) элементарна. Комплексные собственные значения матрицы (136) равны

$$\lambda = M \pm \sqrt{AB},$$

коэффициенты в (135) должны удовлетворять соотношениям

$$|s|^2 = |q|^2 = \frac{|B|}{|A| + |B|}, \quad |p|^2 = |r|^2 = \frac{|A|}{|B| + |A|},$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{B}} s, \quad p = \sqrt{\frac{A}{B}} q.$$

Выбирая относительные фазовые множители s и q так, чтобы $s = q$, мы получаем

$$|K_L\rangle = p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle, \quad |K_S\rangle = p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle. \quad (137)$$

Так как состояния $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$ нормированы, то они зависят только от одного комплексного параметра p/q . Вместо p/q часто употребляется параметр

$$\varepsilon = \frac{p-q}{p+q}, \quad (138)$$

отклонение которого от значения $\varepsilon = 0$ связано с CP-асимметрией. Действительно, если бы взаимодействие $H' = H_w + H_{sw}$ было CP-симметричным (т. е. при $A = B$), то выполнялось бы равенство $|p|^2 = |q|^2 = 1/2$, и в этом случае состояния $|K_S\rangle \equiv |K_1^0\rangle$ и $|K_L\rangle \equiv |K_2^0\rangle$ были бы ортогональными (см. § 6.3). Но скалярное произведение

$$\langle K_L | K_S \rangle = |p|^2 - |q|^2 = \frac{2 \operatorname{Re} \varepsilon}{1 + |\varepsilon|^2} \quad (139)$$

определяется параметром ε , который, таким образом, характеризует степень нарушения CP-симметрии. Заметим, что согласно (139) величина $\langle K_L | K_S \rangle$ вещественна (в CPT-инвариантной теории).

Условие унитарности. Так как частицы K_L и K_S обладают определенными массами и временами распада, то при сдвиге во времени

$$U(\tau, 0)|K_S\rangle = e^{-iM_S \tau}|K_S\rangle, \quad U(\tau, 0)|K_L\rangle = e^{-iM_L \tau}|K_L\rangle. \quad (140)$$

Комплексные величины M_S и M_L представляют собой известные комбинации массы m и вероятности распада Γ :

$$M_{S, L} = m_{S, L} - \frac{i}{2} \Gamma_{S, L}. \quad (141)$$

Формулы (140) предполагают, что выполняется экспоненциальный закон распада.

Пусть $|\Psi(\tau)\rangle$ есть нестационарное состояние, которое может перейти в состояния $|f\rangle$. Согласно условию унитарности уменьшение нормы состояния $|\Psi\rangle$ равно вероятности перехода из $|\Psi\rangle$ в любое возможное состояние $|f\rangle$:

$$-\frac{d\langle\Psi|\Psi\rangle}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \sum_f |\langle f|T|\Psi\rangle|^2. \quad (142)$$

Выберем в качестве состояния $|\Psi(\tau)\rangle$ произвольную суперпозицию $|K_S(\tau)\rangle$ и $|K_L(\tau)\rangle$:

$$|\Psi(\tau)\rangle = ae^{-iM_S\tau}|K_S\rangle + be^{-iM_L\tau}|K_L\rangle.$$

Подставив это выражение в (142), мы находим, приравнявая коэффициенты при независимых комбинациях ab^* , a^*b и т. д.:

$$\Gamma_S = \sum_f |\langle f|T|K_S\rangle|^2, \quad (143)$$

$$\Gamma_L = \sum_f |\langle f|T|K_L\rangle|^2, \quad (144)$$

$$i(M_L^* - M_S)\langle K_L|K_S\rangle = \sum_f \langle f|T|K_L\rangle^* \langle f|T|K_S\rangle. \quad (145)$$

Равенство (145) позволяет получить оценку верхней границы величины $\langle K_L|K_S\rangle$. Воспользовавшись неравенством треугольника, мы находим

$$|M_L^* - M_S|\langle K_T|K_S\rangle \leq (\Gamma_L \Gamma_S)^{1/2}. \quad (146)$$

Но расщепление масс $m_L - m_S$ и ширины Γ_L, Γ_S известны из эксперимента:

$$m_L - m_S = (0,46 \pm 0,02)\Gamma_S, \quad \Gamma_L = 1,6 \cdot 10^{-3}\Gamma_S. \quad (147)$$

Оценка (146) дает тогда

$$\langle K_L|K_S\rangle \leq 0,06,$$

что свидетельствует о сравнительно малом нарушении СР-симметрии. Экспериментально из опытов по зарядовой асимметрии в распадах $K_L \rightarrow \pi^\pm l^\mp \nu$ (l — лептон e или μ) было найдено $\langle L|S\rangle \approx 10^{-3}$. Следовательно, формулу (139) можно переписать в приближенном виде:

$$\langle K_L|K_S\rangle = \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \epsilon, \\ 2,2 \cdot 10^{-3}, \end{cases} \quad (148)$$

пренебрегая величинами порядка ϵ^3 .

Обратимся к изучению соотношения унитарности (145). Если выделить наиболее существенные слагаемые в сумме по состояниям $|f\rangle$, то мы получим приближенно соотношение унитарности, имеющее практическое значение. Очевидно, что при энергии, равной массе K -мезона, такими состояниями могут быть состояния $|\pi l\rangle$, $|\pi l\nu\rangle$, $|\pi l\pi\rangle$ (здесь $l = e, \mu$). Состояния с фотонами типа $|\pi l\gamma\rangle$, $|\pi l\gamma\gamma\rangle$ и т. д. можно отбросить сразу же, ибо их общий вклад будет примерно в $\alpha = 1/137$ раз меньше двухпионного вклада.

Двухпионную часть суммы по $|f\rangle$ в (145) легко выразить через параметры η_{+-} , η_{00} , R (формулы (127), (128), (133)) и вероятность

Γ_S двухпионного распада K_S (формула (143)):

$$\sum_{(2\pi)} \langle 2\pi | T | K_S \rangle^* \langle 2\pi | T | K_L \rangle = [(1-R)\eta_{+-} + R\eta_{00}] \Gamma_S = 10^{-3} \Gamma_S.$$

Численная оценка этого выражения была найдена подстановкой экспериментальных данных для R , η_{+-} , η_{00} .

Верхнюю границу вклада трехпионных состояний $|f\rangle = |3\pi\rangle$ в (145) легко установить, если воспользоваться неравенством треугольника и экспериментальными значениями для трехпионных ширин:

$$\Gamma(K_L \rightarrow 3\pi) = 6 \cdot 10^{-4} \Gamma_S, \quad \Gamma(K_S \rightarrow 3\pi) < 10^{-4} \Gamma_S.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{(3\pi)} \langle 3\pi | T | K_S \rangle^* \langle 2\pi | T | K_L \rangle &\leq \\ &\leq (\Gamma(K_S \rightarrow 3\pi) \Gamma(K_L \rightarrow 3\pi))^{1/2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \Gamma_S, \end{aligned}$$

и, следовательно, можно считать в хорошем приближении, что трехпионные состояния не вносят заметного вклада в (145).

Чтобы оценить вклад лептонных состояний $|\pi l\nu\rangle$, предположим, что в распадах K^0 - и \bar{K}^0 - мезонов выполняется правило $\Delta Q = \Delta Y$. Тогда возможны только (гипотетические) распады $K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$, $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l$, и, следовательно,

$$\sum_{(l\nu)} \langle \pi l\nu | T | K^0 \rangle^* \langle \pi l\nu | T | \bar{K}^0 \rangle = 0.$$

Здесь суммируется по лептонам $l = e^\pm, \mu^\pm$ и всем возможным $(l\nu)$ -состояниям. С другой стороны, сумма

$$\sum_{(l\nu)} |\langle \pi l\nu | T | K^0 \rangle|^2 = \Gamma(K^0 \rightarrow l\nu)$$

есть вероятность лептонного распада K^0 . В силу СРТ-инвариантности теории вероятность $\Gamma(K^0 \rightarrow l\nu)$ равна вероятности распада $\Gamma(\bar{K}^0 \rightarrow \bar{l}\bar{\nu})$ античастицы \bar{K}^0 на античастицы $\bar{l}\bar{\nu}$.

Подставим теперь в лептонные слагаемые соотношения унитарности (145) выражения (135), (139) для $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$. Обозначим

$$\Gamma(K_{S,L} \rightarrow (l)) = \sum_{l=e, \mu} [\Gamma(K_{S,L} \rightarrow \pi^- l^+ \nu) + \Gamma(K_{S,L} \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu})].$$

Легко проверить с помощью (135) и (139), что

$$\Gamma(K_S \rightarrow (l)) = \Gamma(K_L \rightarrow (l)) = \Gamma(K^0 \rightarrow l^+ \pi^- \nu),$$

$$\sum_{(l\nu)} \langle \pi l\nu | T | K_S \rangle^* \langle \pi l\nu | T | K_L \rangle = \langle K_L | K_S \rangle \Gamma(K^0 \rightarrow l^+ \pi^- \nu) \approx 10^{-6} \Gamma_S.$$

При численной оценке мы воспользовались предыдущей оценкой (148) для $\langle K_L | K_S \rangle$ и экспериментальным значением $\Gamma(K_L \rightarrow (l)) \approx$

$\approx 10^{-3} \Gamma_S$. Таким образом, лептонные члены суммы в (145) пренебрежимо малы по сравнению с основными (двухпионными) слагаемыми.

Итак, в правой части соотношения унитарности (145) можно опустить все слагаемые в сумме по $|f\rangle$, кроме двухпионных. В левой части (145) можно пренебречь Γ_L по сравнению с Γ_S . Кроме того, мы положим $R = 1/3$ вместо опытного значения $R \approx 0,31$ (т. е. пренебрежем переходами с $\Delta I = 3/2$). Приближенное соотношение унитарности тогда записывается в виде

$$i \left(m_S - m_L - \frac{i}{2} \Gamma_S \right) \langle K_S | K_L \rangle = \frac{1}{3} \Gamma_S (2\eta_{+-} + \eta_{00}) = \varepsilon_0 \Gamma_S. \quad (149)$$

Но $\langle K_S | K_L \rangle$ вещественно, поэтому отсюда можно найти фазу параметра ε_0 :

$$\frac{\text{Im } \varepsilon_0}{\text{Re } \varepsilon_0} = \frac{2(m_S - m_L)}{\Gamma_S} \approx 0,96, \quad (150)$$

ибо в правой части стоят величины, непосредственно наблюдаемые на опыте.

Связь между параметрами СР-нарушения. Теперь, когда известны состояния $|K_S\rangle$ и $|K_L\rangle$, можно выяснить соотношения между экспериментальными и теоретическими параметрами СР-нарушения.

Подстановка формул (135) в определения параметров (130) и (132) вводит амплитуды перехода $\langle I | T | K^0 \rangle$ и $\langle I | T | \bar{K}^0 \rangle$, отмечаемые по полному изоспину I двухпионной системы. В силу инвариантности теории относительно отражения $\theta = \text{CPT}$, эти амплитуды взаимосвязаны.

Найдем эту связь.

В первом приближении теории возмущений (по $H'(x^0) = H_w(x^0) + H_{sw}(x^0)$) амплитуда перехода равна соответствующему матричному элементу от $H'(0)$. Вследствие θ -инвариантности $\theta H'(0) \theta^{-1} = H^1(0)$. Мы имеем (см. §§ 6.1 и 6.4)

$$\begin{aligned} \langle I | T | K^0 \rangle &= \langle I(\pi\pi), \text{out} | H'(0) | K^0 \rangle = \langle \theta I(\pi, \pi), \text{out} | \theta H'(0) | K^0 \rangle^* = \\ &= \langle I(\pi\pi), \text{in} | H'(0) | \bar{K}^0 \rangle^* = \langle \bar{K}^0 | H'(0) | I, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Матричный элемент в правой части можно разложить по полной системе состояний $|n, \text{out}\rangle$. При энергии, равной энергии покоящегося каона, ощутимый вклад может внести только двухпионное состояние, как единственно возможное состояние при учете только сильных взаимодействий. Трехпионные состояния $|\pi\pi\pi, \text{out}\rangle$ выпадают, если сохраняется G -четность. Электромагнитные переходы в состояния $|\pi\pi\gamma, \text{out}\rangle$ можно отбросить ввиду малости даваемого ими вклада. Поэтому можно положить

$$\langle I(\pi\pi), \text{out} | I(\pi\pi), \text{in} \rangle = e^{2i\delta_I},$$

где δ_I — фаза упругого пион-пионного рассеяния при энергии $E = m_K$

(в системе ц. и.) в состоянии с изоспином I . Следовательно,

$$\langle I | T | K^0 \rangle = \langle I | T | \bar{K}^0 \rangle^* e^{2i\delta_I}.$$

Эта формула позволяет выделить эффекты сильных взаимодействий (фаза рассеяния δ_I) и ввести амплитуды распада A_0 , A_2 , характеризующие слабые взаимодействия:

$$\langle 0 | T | K^0 \rangle = ie^{i\delta_0} A_0, \quad \langle 0 | T | \bar{K}^0 \rangle = -ie^{i\delta_0} A_0^*, \quad (151)$$

$$\langle 2 | T | K^0 \rangle = ie^{i\delta_2} A_2, \quad \langle 2 | T | \bar{K}^0 \rangle = -ie^{i\delta_2} A_2. \quad (152)$$

Состояния сильно взаимодействующих частиц $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ определены с точностью до фазы $\exp iY\alpha$. Переопределим эти состояния так, чтобы амплитуда A_0 стала вещественной (калибровка Ву—Янга):

$$\text{Im } A_0 = 0.$$

(При этом мы утрачиваем связь $\text{CP} |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$.)

При таком выборе фаз параметр ε_0 совпадает с параметром ε , характеризующим неортогональность состояний $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$:

$$\varepsilon_0 = \frac{\langle 0 | T | K_L \rangle}{\langle 0 | T | K_S \rangle} = \frac{\rho A_0 - q A_0^*}{\rho A_0 + q A_0^*} = \frac{\rho - q}{\rho + q} = \varepsilon.$$

Выражения для параметров ε_2 и ω принимают вид

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{A_0} (\varepsilon \text{Re } A_2 + i \text{Im } A_2) e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \approx \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im } A_2}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}, \quad (153)$$

$$\omega = \frac{1}{A_0} (\text{Re } A_2 + i\varepsilon \text{Im } A_2) e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \approx \frac{\text{Re } A_2}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}. \quad (154)$$

При переходе к приближенным формулам для ε_2 и ω была использована малость величины $|\varepsilon| \approx 10^{-3}$ (см. (148)). Параметр ε зависит только от состояний $|K_L\rangle$ и $|K_S\rangle$, но не от амплитуд распада A_0 и A_2 . Вещественная часть ε была определена из опытов по зарядовой асимметрии лептонных распадов K_L , а мнимая часть ε может быть теперь оценена из условия унитарности (150) и тождества $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Параметр ε_2 описывает CP-нарушение в амплитудах распада, параметр ω — нарушение правила $\Delta I = 1/2$.

Как явствует из (153), если правило $\Delta I = 1/2$ выполняется, так что $A_2 = 0$, то нарушение CP-симметрии может быть связано только со свойствами состояний K_L и K_S (параметр ε). В этом случае параметры η_{+-} и η_{00} равны: $\eta_{+-} = \eta_{00}$. Эксперимент, однако, не подтверждает этого равенства. Параметры ε_2 и ω зависят от фаз пион-пионного рассеяния δ_0 и δ_2 . Эти фазы пока известны очень плохо.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Стабильные частицы

Частица	$J^G (J^P)C$	Масса, Мэв	Среднее время жизни, сек	Основные каналы распада, %
γ	$0, 1(1^-)^-$	$0 (< 2 \cdot 10^{-21})$	стабилен	
ν_e	$J = 1/2$	$0 (< 60 \text{ эв})$	стабильно	
ν_μ		$0 (< 1,6)$	стабильно	
e	$J = 1/2$	$0,511006 \pm 0,000002$	стабилен	
μ	$J = 1/2$	$105,659 \pm 0,002$	$(2,198 \pm 0,001) \cdot 10^{-6}$	$e\nu^-$ 100
π^\pm	$1^-(0^-)$	$139,578 \pm 0,013$	$(2,603 \pm 0,00) \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu$ 100 $e\nu$ $(1,24 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$ $\mu\nu\nu$ $(1,24 \pm 0,25) \cdot 10^{-2}$ $\gamma\gamma$ $98,83 \pm 0,04$ γe^+e^- $1,17 \pm 0,04$
π^0	$1^-(0^-)^+$	134,975	$(0,89 \pm 0,18) \cdot 10^{-16}$	$\mu\nu$ $63,77 \pm 0,29$ $\pi\pi^0$ $20,93 \pm 0,30$ $\pi\pi^-\pi^+$ $5,57 \pm 0,04$ $\pi\pi^0\pi^0$ $1,70 \pm 0,05$ $\mu\pi^0\nu$ $3,18 \pm 0,11$ $e\pi^0\nu$ $4,85 \pm 0,07$
K^\pm	$1/2(0^-)$	$493,82 \pm 0,11$	$(1,235 \pm 0,004) \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu$ $68,7$ $\pi^0\pi^0$ $31,3 \pm 0,6$ $\pi^0\pi^0\pi^0$ $21,5 \pm 0,7$ $\pi^+\pi^-\pi^0$ $12,6 \pm 0,3$ $\pi\nu$ $26,8 \pm 0,7$ $\pi e\nu$ $38,8 \pm 0,8$ $\gamma\gamma$ $38,2 \pm 2,1$ $\pi\gamma\gamma$ $2,0 \pm 2,8$ 3π $31,4 \pm 2,7$ $\pi^+\pi^-\pi^0$ $23,0 \pm 1,1$ $\pi^+\pi^-\gamma$ $5,4 \pm 0,5$
K^0	$1/2(0^-)$	$497,76 \pm 0,16$	50% K_S , 50% K_L	
K_S	$1/2(0^-)$		$0,862 \pm 0,006) \cdot 10^{-10}$	
K_L	$1/2(0^-)$		$(5,38 \pm 0,19) \cdot 10^{-8}$	
η	$0^+(0^-)^+$	$548,8 \pm 0,6$	$\Gamma = 2,63 \pm 0,64 \text{ кэв}$	
p	$1/2(1/2^+)$	$938,256 \pm 0,005$	стабилен ($> 2 \cdot 10^{28}$ лет)	
n	$1/2(1/2^+)$	$939,550 \pm 0,005$	$(0,932 \pm 0,014) \cdot 10^8$	$pe\nu$ 100
Λ	$0^-(1/2^+)$	$1115,60 \pm 0,08$	$(2,51 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$	$p\pi^-$ $65,3 \pm 1,3$ $\pi\pi^0$ $34,7 \pm 1,3$ $p\pi^0$ $51,7 \pm 0,8$ $\pi\pi^+$ $48,3 \pm 0,8$ $\Lambda\gamma$ 100 $\pi\pi^-$ 100 $\Lambda\pi^0$ 100 $\Lambda\pi^-$ 100 $\Xi^0\pi^-$ $\Xi^-\pi^0$ ΛK^-
Σ^+	$1(1/2^+)$	$1189,40 \pm 0,19$	$(0,802 \pm 0,007) \cdot 10^{-10}$	
Σ^0	$1(1/2^+)$	$1192,46 \pm 0,12$	$1,0 \cdot 10^{-14}$	
Σ^-	$1(1/2^+)$	$1197,32 \pm 0,11$	$(1,49 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$	
Ξ^0	$1/2(1/2^+)$	$1314,7 \pm 0,7$	$(3,03 \pm 0,04) \cdot 10^{-10}$	
Ξ^-	$1/2(1/2^+)$	$1321,25 \pm 0,18$	$(1,66 \pm 0,04) \cdot 10^{-10}$	
Ω^-	$0(3/2^+)$	$1672,5 \pm 0,5$	$(1,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-10}$	

Таблица П.2

Мезоны

Частица	$J^G(J^P)C$	Масса, Мэв	Ширина, Мэв	Основные каналы распада. %
π^+ (140)	$1^-(0^-)^+$	139,58	0,0	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$, $\pi^0 \pi^0 \gamma$ 72
π^0 (135)	$0^+(0^-)^+$	134,97	$7,2 \pm 1,2$ эв	$\pi^+ \pi^- \pi^0$, $\pi^+ \pi^- \gamma$ 28
η (549)	$0^+(0^-)^+$	$548,8 \pm 0,6$	$2,70 \pm 0,67$ кэв	$\pi\pi$ 100
η_+ (700)	$0^+(0^+)^+$	≈ 700	$\gg 100$	≈ 100
ρ (765)	$1^+(1^-)^-$	765 ± 10	125 ± 20	$\pi^+ \pi^- \pi^0$ 89,7 ± 4,0
ω (784)	$0^-(1^-)^-$	$783,7 \pm 0,4$	$11,9 \pm 1,3$	$\pi^+ \pi^-$ 1,0 ± 0,25
η' (958)	$0^+(0^-)^+$	$957,7 \pm 0,8$	< 4	$\pi^0 \gamma$ 9,4 ± 1,2
δ (966)	≥ 1 (?)	966 ± 5	< 5	$\eta\pi\pi$ 65,7 ± 4,0
π_N (1016)	$1^-(0^+)^+$	1016 ± 10	25	$\rho^0 \gamma$ 29,6 ± 2,6
φ (1019)	$0^-(1^-)^-$	$1018,8 \pm 0,5$	$4,0 \pm 0,2$	$\gamma\gamma$ 4,7 ± 2,9
η_{+^0} (1060)	$0^+(0^+)^+$	1060 ± 20		$\pi\eta$ $K^\pm K^0$ < 80
A_1 (1070)	$1^-(1^+)^+$	1070 ± 20	95 ± 35	$K^+ K^-$ 46,9 ± 2,3
B (1235)	$1^+(1^+)^-$	1235 ± 15	102 ± 20	$K_L K_S$ 34,8 ± 2,3
				$\pi^+ \pi^- \pi^0$ 18,3 ± 2,6
				$\pi\pi$ $K\bar{K}$ < 65
				3π $K\bar{K}$ > 35
				$K\bar{K}$ ≈ 100
				$\omega\pi$ $< 0,25$
				$\pi\pi$ ≈ 100
				KK < 30
				KK < 2

Продолжение таблицы П.2

Частица	$J^G (J^P)C$	Масса, Мэв	Ширина, Мэв	Основные каналы распада, %
K_A (1240) или С	$1/2 (1^+)$	1247 ± 8	40 — 130	
K_A (1250— 1400)	$1/2 (1^+)$	1280 — 1360		
K_N (1420) или K^{**}	$1/2 (2^+)$	$1412,7 \pm 4,4$	96 ± 7	$K\pi$ 49,2±3,4 $K^*\pi$ 36,3±3,1 $K\rho$ 8,0±3,5 $K\omega$ 4,2±1,3 $K\eta$ 2,2±1,6 $K\pi\pi$
K_A (1775) или L	$1/2 (?)$	1773 ± 9		

Примечание. В экспериментах наблюдались также следующие максимумы в сечениях, которые можно в предварительном порядке сопоставить мезонам: σ (410), H (990), η (1080), A_1 (1170), Φ (1650), R (1750), ρ (1830), π (1830), S (1930), T (2100), T (2190), ρ (2275), ρ (2345), Φ (2380), X^- (2500), X^- (2620), X^- (2800), X^- (2880), X^- (3030), X^- (3075), X^- (3145), X^- (3475), X^- (3535), K_N (1980—1260), K_A (1175), K_A (1265), K_N (1660), K^* (2240). Спины этих резонансов не установлены достоверным образом; обозначения частиц отражают изоспины частиц в тех случаях, когда они известны.

Таблица П.3

Барныны

Чаагвица	$I (J^P)^1$	Масса, Мев	Ширина, Мев	Основные каналы распада, %	
р п	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	938,3 939,6			
N' (1470)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+) P'_{11}$	1435—1505	200—400	Nл Nлл	60 40
N' (1520)	$\frac{1}{2}(^3/2^-) D'_{13}$	1510—1540	105—150	Nл Nлл	50 50
N' (1535)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-) S'_{11}$	1500—1600	50—160	Nл Nη	34 66
N (1670)	$\frac{1}{2}(^5/2^-) D_{13}$	1655—1680	105—175	Nл Nлл Δ (1236) π	42 58
N (1688)	$\frac{1}{2}(^5/2^+) F_{13}$	1680—1692	105—180	Nл Nлл Δ (1236) π	60 40
N'' (1700)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-) S''_{11}$	1665—1765	100—400	Nл ΔК Nη	70 5
N'' (1780)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+) P''_{11}$	1750—1860	270—450	Nл ΔК Nη	34 ~1 ~10
N (1860)	$\frac{1}{2}(^3/2^+) P_{13}$	1840—1900	310—450	Nл Nлл ΔК Nη	27 <16
N (1990)	$\frac{1}{2}(^7/2^+) F_{17}$	1980—2000	220—250	Nл Nлл	11
N''' (2040)	$\frac{1}{2}(^3/2^-) D'''_{13}$	2030—2060	240—290	Nл Nлл	17
N (2190)	$\frac{1}{2}(^7/2^-) G_{17}$	2000—2260	300	Nл Nлл	35
N (2650)	$\frac{1}{2}(7^-)$	2650	360	Nл Nлл	
N (3030)	$\frac{1}{2}(?)$	3030	400	Nл Nлл	
Δ (1236)	$^3/2(^3/2^+) P'_{33}$	1236,0 ± 0,6	120 ± 2	Nл	99,4
Δ (1650)	$^3/2(\frac{1}{2}^-) S_{31}$	1620—1695	130—250	Nл Nлл	27 73
Δ (1670)	$^3/2(^3/2^-) D_{33}$	1650—1690	175—300	Nл Nлл	13

¹) Спектроскопические обозначения типа P₁₁, D₁₃ и т. д. характеризуют состояние в нерелятивистской квантовой модели (см. § 10.4).

Продолжение таблицы П.3

Частица	$I (J^P)$	Масса, Мэв	Ширина, Мэв	Основные каналы распада, %
Δ (1890)	$\frac{3}{2}(^5/2^+)$ F ₃₅	1840—1910	135—380	N π 17 N $\pi\pi$
Δ (1910)	$\frac{3}{2}(^1/2^+)$ P ₃₁	1835—1935	230—420	N π 25 N $\pi\pi$
Δ (1950)	$\frac{3}{2}(^7/2^+)$ F ₃₇	1935—1980	140—220	N π 45 Δ (1236) π \approx 50 Σ K 2,4 Σ (1385) K 1,4
Δ (2420)	$\frac{3}{2}(^{11}/2^+)$	2420	310	N π 11 N $\pi\pi$ >20
Δ (2850)	$\frac{3}{2}(^2^+)$	2850	400	N π N $\pi\pi$
Δ (3230)	$\frac{3}{2}(?)$	3230	440	N π N $\pi\pi$
Λ	$0(^1/2^+)$	1115,6	1,24	
Λ (1405)	$0(^1/2^-)$ S ₀₁	1405 \pm 5	40 \pm 10	$\Sigma\pi$ 100
Λ' (1520)	$0(^3/2^-)$ D' ₀₃	1518 \pm 2	16 \pm 2	N \bar{K} 46 \pm 1 $\Sigma\pi$ 41 \pm 1 L $\pi\pi$ 9,6 \pm 0,6 L $\pi\pi$ 1,0 \pm 2
Λ' (1670)	$0(^1/2^-)$ S' ₀₁	1670	15—38	N \bar{K} 20 $\Delta\eta$ 35 $\Sigma\pi$ 45
Λ'' (1690)	$0(^3/2^-)$ D'' ₀₃	1690	27—85	N \bar{K} 30 $\Sigma\pi$ 40 L $\pi\pi$ 20 L $\pi\pi$ 10
Λ (1815)	$0(^5/2^+)$ F ₀₅	1820 \pm 5	64—100	N \bar{K} 64 $\Sigma\pi$ 11 Σ (1385) π 17
Λ (1830)	$0(^5/2^-)$ D ₀₅	1835	66—150	N \bar{K} 10 $\Sigma\pi$ 30
Λ (2100)	$0(^7/2^-)$ G ₀₇	2100	60—145	N \bar{K} 25 $\Sigma\pi$ \sim 1 $\Delta\eta$ <3 $\Lambda\omega$ <10
Λ (2350)	$0(?)$	2350	140—324	N \bar{K}
Σ	$1(^1/2^+)$	(+) $\bar{1}189,4$ (0) $\bar{1}192,5$ (-) $\bar{1}197,3$		
Σ (1385)	$1(^3/2^+)$ P ₁₃	(+) $\bar{1}383\pm 1$ (-) $\bar{1}386\pm 2$	(+) $\bar{3}6\pm 3$ (-) $\bar{3}6\pm 6$	L π 90 \pm 3 $\Sigma\pi$ 10 \pm 3
Σ (1670)	$1(^3/2^-)$ D ₁₃	1670	50	N \bar{K} 9 $\Sigma\pi$

Продолжение таблицы П.3

Частица	$I (J^P)$	Масса, Мэв	Ширина, Мэв	Основные каналы распада, %
$\Sigma (1750)$	$1(\frac{1}{2}^-) S_{11}$	1750	50—80	$N\bar{K}$ ~15
$\Sigma (1765)$	$1(\frac{5}{2}^-) D_{15}$	1765 ± 5	120	$N\bar{K}$ 44 $\Lambda\pi$ 14 $\Lambda (1520) \pi$ 15 $\Sigma (1385) \pi$ 13 $\Sigma\pi$ ~1
$\Sigma (1910)$	$1(\frac{5}{2}^+) F_{15}$	1905	70	$N\bar{K}$ 11 $\Lambda\pi$ 7 $\Sigma\pi$ 4
$\Sigma (2030)$	$1(\frac{7}{2}^+) F_{17}$	2030	100—170	$N\bar{K}$ 10—27 $\Lambda\pi$ 14—38 $\Sigma\pi$ 1—3 ΣK <2
$\Sigma (2250)$	$1(?)$	2250	200	$N\bar{K}$
$\Sigma (2455)$	$1(?)$	2455	100	$N\bar{K}$
$\Sigma (2595)$	$1(?)$	2595	140	$N\bar{K}$
Ξ	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	(0)1314,7 (—)1321,3		
$\Xi (1530)$	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	(0)1528,9± ±1,1 (—)1533,8± ±1,9	7,3±1,7	$\Xi\pi$ 100
$\Xi (1820)$	$\frac{1}{2}(?)$	1795—1870	12—99	$\Lambda\bar{K}$ $\Xi\pi$ $\Xi (1530) \pi$ $\Sigma\bar{K}$
$\Xi (1930)$	$\frac{1}{2}(?)$	1894—1964	42—140	$\Xi\pi$ $\Xi (1530) \pi$
Ω^-	$0(\frac{3}{2}^+)$	1672,4		

Примечание. В экспериментах наблюдались также следующие резонансы в сечениях, которые, однако, пока нельзя еще однозначно сопоставить барионам: $N (1700) D_{13}$, $N (3245)$, $N (3690)$, $N (3755)$, $\Delta (1690) P_{33}$, $\Delta (1960) D_{33}$, $\Delta (2160) P_{33}$, $Z_0 (1780)$, $Z_0 (1865)$, $Z_1 (1900)$, $\Lambda (1330)$, $\Lambda (1750) P_{01}$, $\Lambda (1860) F_{07}$, $\Lambda (2010) P_{11}$, $\Lambda (2015) F_{07}$, $\Sigma (1440)$, $\Sigma (1480)$, $\Sigma (1620) P_{11}$, $\Sigma (1660) D_{13}$, $\Sigma (1690)$, $\Sigma (1880) P_{11}$, $\Sigma (1940) D_{13}$, $\Sigma (2080) P_{13}$, $\Sigma (2130) G_{17}$, $\Sigma (3000)$, $\Xi (1630)$, $\Xi (2030)$, $\Xi (2250)$, $\Xi (2500)$.

Здесь Z_I обозначает экзотическое состояние с гиперзарядом $Y=2$ и изоспином I .

Коэффициенты Клебша—Гордана

Обозначение:

$J_1 \times J_2$		J	J	...
		m	m	...
m_1	m_2	Коэффициенты без знаков корня		
m_1	m_2			
\vdots	\vdots			

Замечание. Знаки квадратных корней опущены из табл. П.4. Коэффициент Клебша—Гордана получается из числа в таблице добавлением корня. Например, число в таблице $-8/15$ означает $-\sqrt{8/15}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$		1				
		+1	1	0		
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	0	0		
	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	
			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
$1 \times \frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$				
		$+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$+1$	$+\frac{1}{2}$	1	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		
$+1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	$+\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
		0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$
		-1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
				-1	$-\frac{1}{2}$	1

Продолжение таблицы П.4

1×1		2								
		+2								
◆1	◆1	1	2	1						
			+1	+1						
+1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1	0				
0	+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0				
		+1	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
		0	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	2	1		
		-1	◆1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	-1		
				0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			2
				-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			-2
						-1	-1			1

$2 \times \frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$																	
		$+\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$															
$+2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$															
$+2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$												
$+1$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$										
		$+1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$						
		0	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$					
				-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
						-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
										-2	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
												-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
														-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
																-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
																		1	1

Продолжение таблицы П.4

2×1		3					
		+3	3	2			
+2	+1	1	+2	+2			
+2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	2	1	
+1	+1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	+1	
+2	-1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$			
+1	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	3	2	1
0	+1	$\frac{6}{15}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
+1	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$			
0	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	3	2	1
-1	+1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	-1	-1	-1
0	-1	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$			
-1	0	$\frac{8}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	3	2	
-2	+1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	-2	-2	
-1	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$				3
-2	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$				-3
		-2	-1				1

		$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$															
				2													
		+2		+2													
				2		1											
+ $\frac{3}{2}$		+ $\frac{1}{2}$		1		+1		+1									
+ $\frac{3}{2}$		- $\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		2		1							
+ $\frac{1}{2}$		+ $\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		- $\frac{1}{4}$		0		0							
				+ $\frac{1}{2}$		- $\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2		1			
				- $\frac{1}{2}$		+ $\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		- $\frac{1}{2}$		-1		-1			
								- $\frac{1}{2}$		- $\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$		2	
								- $\frac{3}{2}$		+ $\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		- $\frac{3}{4}$		-2	
												- $\frac{3}{2}$		- $\frac{1}{2}$		1	

Изоэскалярные множители для группы SU_3 [117]

Изоэскалярные множители вместе с коэффициентами Клебша—Гордана для группы SU_2 определяют, согласно (9.73), коэффициенты Клебша—Гордана для группы SU_3 . Изоэскалярный множитель

$$\left(\begin{array}{cc|c} n_1 & n_2 & n \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & I Y \end{array} \right)$$

зависит также от изоспинов I_1 , I_2 и гиперзарядов Y_1 , Y_2 частиц в SU_3 -мультиплетах \underline{n}_1 и \underline{n}_2 , произведение которых $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ мы изучаем. Ниже рассмотрены два произведения: $\underline{8} \times \underline{8}$ и $\underline{8} \times \underline{10}$ — при мезон-барионном рассеянии; первое представление \underline{n}_1 в произведении $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ относится к бариону.

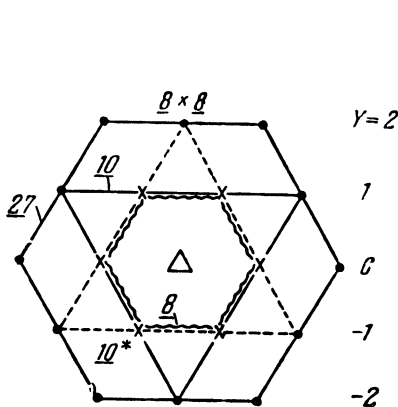


Рис. 30.

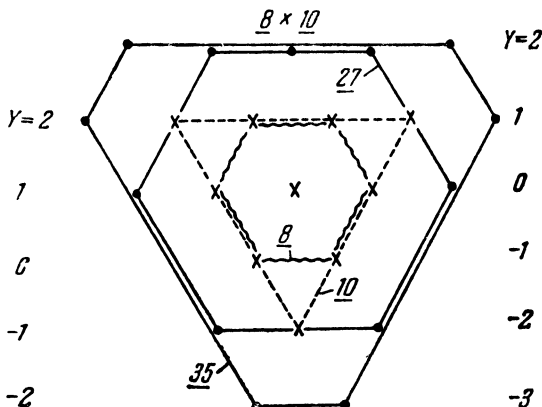


Рис. 31.

Состояния, возникающие при приведении произведения $\underline{8} \times \underline{8}$, изображены на рис. 30, а состояния, входящие в $\underline{8} \times \underline{10}$, — на рис. 31. Рис. 30 представляет собой весовую диаграмму $\underline{27}$ -плета, на которой также отмечены весовые диаграммы декуплетов $\underline{10}$ и $\underline{10}^*$ и октета. Крестом обозначены изоспинные состояния $\underline{27}$ -плета, встречающиеся дважды, а треугольником — состояния $\underline{27}$ -плета, встречающиеся трижды. Рис. 31 представляет собой весовую диаграмму $\underline{35}$ -плета, на которой также отмечены весовые диаграммы $\underline{27}$ -плета, декуплета и октета. Двухкратные состояния $\underline{35}$ -плета обозначены крестом.

Каждая таблица относится к заданной комбинации I и Y , которые выписаны над таблицей. В левом столбце перечислены комбинации состояний исходных мультиплетов, приводящие к данным I и Y . Каждый из последующих столбцов дает изоэскалярные множители для заданного результирующего представления \underline{n} . Знак \pm , помещенный под значением \underline{n} , даст множитель $\xi_1(n, n_1, n_2) = \pm 1$.

Продолжение таблицы П.5

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{27} + \underline{10} + \underline{10}^+ + \underline{8}_S + \underline{8}_A + \underline{1}$$

$$N: Y=1, I=1/2$$

$$\Delta: Y=1, I=3/2$$

$\frac{27}{+}$	$\frac{8}{+}_D$	$\frac{8}{-}_F$	$\frac{10}{-}^*$
----------------	-----------------	-----------------	------------------

$\frac{27}{+}$	$\frac{10}{-}$
----------------	----------------

$N\pi$	$\sqrt{5}/10$	$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$
ΣK	$-\sqrt{5}/10$	$-3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$
$N\eta$	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$
ΔK	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$-1/2$

$N\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
ΣK	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$$\Xi: Y=-1, I=1/2$$

$$Y=-1, I=3/2$$

$\frac{27}{+}$	$\frac{8}{+}_D$	$\frac{8}{+}_F$	$\frac{10}{-}$
----------------	-----------------	-----------------	----------------

$\frac{27}{+}$	$\frac{10}{-}^*$
----------------	------------------

$\Xi\pi$	$-\sqrt{5}/10$	$-3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$
$\Sigma\bar{K}$	$\sqrt{5}/10$	$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$
$\Xi\eta$	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$1/2$
$\Delta\bar{K}$	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$

$\Xi\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$\Sigma\bar{K}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$$\Lambda: Y=0, I=0$$

$\frac{27}{+}$	$\frac{8}{+}_D$	$\frac{1}{+}$	$\frac{8}{-}_F$
----------------	-----------------	---------------	-----------------

$N\bar{K}$	$\sqrt{15}/10$	$\sqrt{10}/10$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
ΞK	$-\sqrt{15}/10$	$-\sqrt{10}/10$	$-1/2$	$\sqrt{2}/2$
$\Sigma\pi$	$-\sqrt{10}/20$	$-\sqrt{15}/5$	$\sqrt{6}/4$	0
$\Delta\eta$	$3\sqrt{30}/20$	$-\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{2}/4$	0

$$\Sigma: Y=0, I=1$$

$\frac{27}{+}$	$\frac{8}{+}_D$	$\frac{8}{-}_F$	$\frac{10}{-}$	$\frac{10}{-}^*$
----------------	-----------------	-----------------	----------------	------------------

$N\bar{K}_1$	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{30}/10$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$
ΞK	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{30}/10$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$
$\Sigma\pi$	0	0	$\sqrt{6}/3$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$
$\Sigma\eta$	$\sqrt{30}/10$	$\sqrt{5}/5$	0	$1/2$	$1/2$
$\Delta\pi$	$\sqrt{30}/10$	$\sqrt{5}/5$	0	$-1/2$	$-1/2$

Продолжение таблицы П. 5

$$10 \times 8 = \underline{35} + \underline{27} + \underline{10} + \underline{8}$$

$$\Sigma: Y=0, I=1$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{10}$	$\underline{8}$
+	-	-	+

$$Y=0, I=2$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$
+	-

$\Sigma\pi$	$+\sqrt{3}/6$	$-3\sqrt{5}/10$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{30}/15$
$\Sigma\eta$	$\sqrt{2}/2$	$+\sqrt{30}/10$	0	$-\sqrt{5}/5$
$\Sigma\kappa$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{30}/15$
$\Delta\bar{\kappa}$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{5}/10$	$\sqrt{3}/3$	$-2\sqrt{30}/15$

$\Sigma\pi$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$\Delta\bar{\kappa}$	$1/2$	$+\sqrt{3}/2$

$$\Xi: Y=-1, I=1/2$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{10}$	$\underline{8}$
+	-	-	+

$$Y=-1, I=3/2$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$
+	-

$\Xi\pi$	$\nabla 1/4$	$-7\sqrt{5}/20$	$\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{5}/5$
$\Xi\eta$	$3/4$	$\nabla 3\sqrt{5}/20$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{5}/5$
$\Omega\kappa$	$\sqrt{2}/4$	$-3\sqrt{10}/20$	$-1/2$	$\sqrt{10}/5$
$\Sigma\bar{\kappa}$	$\nabla 1/2$	$\sqrt{5}/10$	$\sqrt{2}/2$	$\nabla \sqrt{5}/5$

$\Xi\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$\Sigma\bar{\kappa}$	$\sqrt{2}/2$	$+\sqrt{2}/2$

$$N: Y=1, I=1/2$$

$\underline{27}$	$\underline{8}$
-	∇

$$\Delta: Y=1, I=3/2$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{10}$
∇	-	-

$\Delta\pi$	$-\sqrt{5}/5$	$-2\sqrt{5}/5$
$\Sigma\kappa$	$-2\sqrt{5}/5$	$\nabla \sqrt{5}/5$

$\Delta\pi$	$\nabla 1/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{10}/4$
$\Delta\eta$	$\sqrt{5}/4$	$\nabla 3/4$	$\nabla \sqrt{2}/4$
$\Sigma\kappa$	$\sqrt{10}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$-1/2$

$$\Omega: Y=-2, I=0$$

$\underline{35}$	$\underline{10}$
+	-

$$Y=-2, I=1$$

$\underline{35}$	$\underline{27}$
∇	-

$$\Lambda: Y=0, I=0$$

$\underline{27}$	$\underline{8}$
-	+

$\Omega\eta$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$\Xi\bar{\kappa}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$\Omega\pi$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\Xi\bar{\kappa}$	$\sqrt{3}/2$	$\nabla 1/2$

$\Sigma\pi$	$-\sqrt{10}/5$	$-\sqrt{15}/5$
$\Xi\kappa$	$-\sqrt{15}/5$	$+\sqrt{10}/5$

Таблица П.6

Кроссинг-матрицы для изоспиновой группы SU_2

Реакция характеризуется по изоспинам участвующих в ней частиц. Перед каждой табличкой указаны реакции s -канала. Кроссинг-матрица X_{st} имеет матричные элементы $(X_{st})_{I_s I_t}$, где I_s и I_t — значения изоспинов в s - и t -каналах. Амплитуды с различными изоспинами, принадлежащие одному и тому же каналу, образуют столбец.

Обозначение:

		$I_{t1} \ I_{t2} \ \dots$	$I_{u1} \ I_{u2} \ \dots$	
X_{st}	I_{s1}	$(X_{st})_{I_s I_t}$	$(X_{su})_{I_s I_u}$	X_{su}
	I_{s2}			
	\vdots			
X_{ut}	I_{u1}	$(X_{ut})_{I_u I_t}$		
	I_{u2}			
	\vdots			

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow \frac{1}{2}'' + \frac{1}{2}'''$$

		0	1	0	1	
X_{st}	0	-1/2	-3/2	1/2	3/2	X_{su}
	1	-1/2	1/2	-1/2	1/2	
X_{ut}	0	1/2	-3/2			
	1	-1/2	-1/2			

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow 1 + 1'$$

		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
X_{st}	0	$-\sqrt{2/3}$	$-2\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{2/3}$	$-2\sqrt{2/3}$	X_{su}
	1	-2/3	2/3	2/3	-2/3	
X_{ut}	$\frac{1}{2}$	-1/3	4/3			
	$\frac{3}{2}$	2/3	1/3			

Продолжение таблицы П. 6

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2}'$$

		1 2		1 2			
X_{st}	0	$-3\sqrt{2}/4$	$-5\sqrt{2}/4$	$3\sqrt{2}/4$	$5\sqrt{2}/4$	X_{su}	
	1	$-\sqrt{10}/4$	$\sqrt{10}/4$	$-\sqrt{10}/4$	$\sqrt{10}/4$		
X_{ut}	1	$1/4$	$-5/4$				
	2	$-3/4$	$-1/4$				

$$1 + 1' \rightarrow 1'' + 1'''$$

		0 1 2			0 1 2				
X_{st}	0	$1/3$	1	$5/3$	$1/3$	1	$5/3$	X_{su}	
	1	$1/3$	$1/2$	$-5/6$	$-1/3$	$-1/2$	$5/6$		
	2	$1/3$	$-1/2$	$1/6$	$1/3$	$-1/2$	$1/6$		
X_{ut}	0	$1/3$	-1	$5/3$					
	1	$-1/3$	$1/2$	$5/6$					
	2	$1/3$	$1/2$	$1/6$					

$$1 + 1' \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2}'$$

		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$		
X_{st}	0	$1/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	X_{su}	
	1	$\sqrt{10}/6$	$2\sqrt{10}/15$	$-3/\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/6$	$-2\sqrt{10}/15$	$3/\sqrt{10}$		
	2	$1/\sqrt{6}$	$-4\sqrt{6}/15$	$\sqrt{6}/10$	$1/\sqrt{6}$	$-4\sqrt{6}/15$	$\sqrt{6}/10$		
X_{ut}	$\frac{1}{2}$	$1/6$	$-2/3$	$3/2$					
	$\frac{3}{2}$	$-1/3$	$11/15$	$3/5$					
	$\frac{5}{2}$	$1/2$	$2/5$	$1/10$					

Продолжение таблицы П. 6

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}' + \frac{1}{2}''$$

		1	2	1	2	
X_{st}	1	1/2	$\sqrt{5}/2$	1/2	$\sqrt{5}/2$	X_{su}
	2	$3\sqrt{5}/10$	-1/2	$-3\sqrt{5}/10$	1/2	
X_{ut}	1	-1/2	$\sqrt{5}/2$			
	2	$3\sqrt{5}/10$	1/2			

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}' \rightarrow \frac{1}{2}'' + \frac{1}{2}'''$$

		0	1	2	3	0	1	2	3	
X_{st}	0	-1/4	-3/4	-5/4	-7/4	1/4	3/4	5/4	7/4	X_{su}
	1	-1/4	-11/20	-1/4	21/20	-1/4	-11/20	-1/4	21/20	
	2	-1/4	-3/20	3/4	-7/20	1/4	3/20	-3/4	7/20	
	3	-1/4	9/20	-1/4	1/20	-1/4	9/20	-1/4	1/20	
X_{ut}	0	1/4	-3/4	5/4	7/4					
	1	-1/4	11/20	-1/4	-21/20					
	2	1/4	-3/20	-3/4	-7/20					
	3	-1/4	-9/20	-1/4	-1/20					

Таблица П.7

Кроссинг-матрицы для группы SU_3

Перед каждой табличкой указана реакция s -канала $\underline{n}_1 + \underline{n}_2 \rightarrow \underline{n}_3 + \underline{n}_4$, где \underline{n}_i есть SU_3 -мультиплет. Если \underline{n}_3 и \underline{n}_4 — возможные мультиплеты в s - и t -каналах, то кроссинг-матрица имеет матричные элементы $(X_{st})_{\underline{n}_s \underline{n}_t}$. Амплитуды с различными \underline{n} , принадлежащие одному и тому же каналу, образуют столбец. Смысл обозначений $\underline{8}_{SS}$, $\underline{8}_{SA}$, $\underline{8}_{AA}$, $\underline{8}_{AS}$ пояснен в § 10.3.

Обозначение:

		$\underline{n}_{t1} \quad \underline{n}_{t2} \quad \dots$
X_{st}	\underline{n}_{s1} \underline{n}_{s2} \vdots	$(X_{st})_{\underline{n}_s \underline{n}_t}$

$$\underline{8} + \underline{8}' \rightarrow \underline{8}'' + \underline{8}'''$$

		<u>1</u>	<u>8_{AS}</u>	<u>8_{SA}</u>	<u>8_{SS}</u>	<u>8_{AA}</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>27</u>
$X_{st} = X_{ts}$	<u>1</u>	1/8	0	0	1	1	5/4	5/4	27/8
	<u>8_{AS}</u>	0	-1/2	-1/2	0	0	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	0
	<u>8_{SA}</u>	0	-1/2	-1/2	0	0	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	0
	<u>8_{SS}</u>	1/8	0	0	-3/10	1/2	-1/2	-1/2	27/40
	<u>8_{AA}</u>	1/8	0	0	1/2	1/2	0	0	-9/8
	<u>10</u>	1/8	$1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	-2/5	0	1/4	1/4	-9/40
	<u>10</u>	1/8	$-1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	-2/5	0	1/4	1/4	-9/40
	<u>27</u>	1/8	0	0	1/5	-1/3	-1/12	-1/12	7/40
X_{su}	<u>1</u>	1/8	0	0	1	1	5/4	5/4	27/8
	<u>8_{AS}</u>	0	1/2	1/2	0	0	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	0
	<u>8_{SA}</u>	0	-1/2	-2/2	0	0	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	0
	<u>8_{SS}</u>	1/8	0	0	-3/10	1/2	-1/2	-1/2	27/40
	<u>8_{AA}</u>	-1/8	0	0	-1/2	-1/2	0	0	9/8
	<u>10</u>	-1/8	$-1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	2/5	0	-1/4	-1/4	9/40
	<u>10</u>	-1/8	$1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	2/5	0	-1/4	-1/4	9/40
	<u>27</u>	1/8	0	0	1/5	-1/3	-1/12	-1/12	7/40

Продолжение таблицы П. 7

$X_{tu} = X_{ut}$	$\underline{1}$	1/8	0	0	1	-1	-5/4	-5/4	27/8
	$\underline{8}_{AS}$	0	-1/2	1/2	0	0	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	0
	$\underline{8}_{SA}$	0	1/2	-1/2	0	0	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	0
	$\underline{8}_{SS}$	1/8	0	0	-3/10	-1/2	1/2	1/2	27/40
	$\underline{8}_{AA}$	-1/8	0	0	-1/2	1/2	0	0	9/8
	$\underline{10}$	-1/8	$1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	2/5	0	1/4	1/4	9/40
	$\underline{10}^*$	-1/8	$-1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	2/5	0	1/4	1/4	9/40
	$\underline{27}$	1/8	0	0	1/5	1/3	1/12	1/12	7/40
X_{us}	$\underline{1}$	1/8	0	0	1	-1	-5/4	-5/4	27/8
	$\underline{8}_{AS}$	0	1/2	-1/2	0	0	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	0
	$\underline{8}_{SA}$	0	1/2	-1/2	0	0	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	0
	$\underline{8}_{SS}$	1/8	0	0	-3/10	-1/2	1/2	1/2	27/40
	$\underline{8}_{AA}$	1/8	0	0	1/2	-1/2	0	0	-9/8
	$\underline{10}$	1/8	$-1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	-2/5	0	-1/4	-1/4	-9/40
	$\underline{10}^*$	1/8	$1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	-2/5	0	-1/4	-1/4	-9/40
	$\underline{27}$	1/8	0	0	1/5	1/3	1/12	1/12	7/40

$\underline{8} + \underline{8}' \rightarrow \underline{8}'' + \underline{10}$

		$\underline{8}_S$	$\underline{8}_A$	$\underline{10}$	$\underline{27}$
$X_{st} = X_{ts}$	$\underline{8}_S$	2/5	$1/\sqrt{5}$	$1/2\sqrt{2}$	27/20
	$\underline{8}_A$	$1/\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}/2/2$	$-9\sqrt{5}/20$
	$\underline{10}$	$\sqrt{2}/5$	$\sqrt{2}/5$	-1/2	$-9/10\sqrt{2}$
	$\underline{27}$	2/5	$-2/3\sqrt{5}$	$-1/3\sqrt{2}$	1/10
		$\underline{8}_S$	$\underline{8}_A$	$\underline{10}^*$	$\underline{27}$
X_{su}	$\underline{8}_S$	-2/5	$1/\sqrt{5}$	$-1/2\sqrt{2}$	27/20
	$\underline{8}_A$	$1/\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}/2/2$	$9\sqrt{5}/20$
	$\underline{10}$	$\sqrt{2}/5$	$-\sqrt{2}/5$	-1/2	$9/10\sqrt{2}$
	$\underline{27}$	-2/5	$-2/3\sqrt{5}$	$1/3\sqrt{2}$	1/10

Продолжение таблицы П. 7

		<u>8_S</u>	<u>8_A</u>	<u>10*</u>	<u>27</u>
X_{tu}	<u>8_S</u>	-2/5	-1/5	$1/2\sqrt{2}$	27/20
	<u>8_A</u>	$1/\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}/2/2$	$9\sqrt{5}/20$
	<u>10</u>	$\sqrt{2}/5$	$\sqrt{2}/5$	1/2	$9/10\sqrt{2}$
	<u>27</u>	-2/5	$2/3\sqrt{5}$	$-1/3\sqrt{2}$	1/10

8 + 8' → 10 + 10'

		<u>8</u>	<u>27</u>	<u>8</u>	<u>27</u>	
X_{st}	<u>10*</u>	$2\sqrt{2}/5$	$9\sqrt{2}/10$	$-2\sqrt{2}/5$	$-9\sqrt{2}/10$	X_{su}
	<u>27</u>	$2\sqrt{2}/5/3$	$-\sqrt{2}/5$	$2\sqrt{2}/5/3$	$-\sqrt{2}/5$	
		<u>8</u>	<u>27</u>	<u>10*</u>	<u>27</u>	
$X_{tu} = X_{ut}$	<u>8</u>	1/5	-9/5	$1/\sqrt{2}$	$9\sqrt{10}/20$	X_{ts}
	<u>27</u>	-8/15	-1/5	$\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{10}/5$	

8 + 10 → 8' + 10'

		<u>1</u>	<u>8_S</u>	<u>8_A</u>	<u>27</u>
X_{st}	<u>8</u>	$1/4\sqrt{5}$	$2/5\sqrt{2}$	$2/\sqrt{10}$	$9\sqrt{7}/20$
	<u>10</u>	$1/4\sqrt{5}$	$3/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{10}$	$-9\sqrt{7}/20$
	<u>27</u>	$1/4\sqrt{5}$	$-3/5\sqrt{2}$	$1/3\sqrt{10}$	$-7/20\sqrt{7}$
	<u>35</u>	$1/4\sqrt{5}$	$1/5\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{10}$	$9/20\sqrt{7}$
		<u>8</u>	<u>10*</u>	<u>27</u>	<u>35</u>
X_{su}	<u>8</u>	1/5	1/2	9/20	7/4
	<u>10</u>	-2/5	-3/4	9/40	7/8
	<u>27</u>	-2/15	1/12	-37/40	7/24
	<u>35</u>	2/5	-1/4	-9/40	1/8

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Газиорович, Физика элементарных частиц, «Наука», 1969.
2. Г. Челлен, Физика элементарных частиц, «Наука», 1966.
3. Р. Маршак, Э. Сударшан, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962.
4. К. Нишидзима, Фундаментальные частицы, «Мир», 1965.
5. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантовых полей, Гостехиздат, 1957.
6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, часть I, «Наука», 1968.
7. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
8. Particle Data Group, Review of Particle Properties, Phys. Lett. 33B, No. 1 (1970).
9. Lectures in Theoretical Physics, vol. VII-A, Lorentz Group, Ed. W. E. Britten, A. O. Barut, Boulder, 1965.
10. Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Ed. F. Gürsey, New York—London, 1964.
11. А. О. Вагут, The Theory of the Scattering Matrix, New York, 1967.
12. А. М. Балдин, В. И. Гольданский, И. Л. Розенталь, Кинематика ядерных реакций, Физматгиз, 1959.
13. Ю. Верле, Релятивистская теория реакций, Атомиздат, 1969.
14. Л. Б. Окунь, Слабое взаимодействие элементарных частиц, Физматгиз, 1963.
15. Ц. Ли, Ц. Ву, Слабые взаимодействия, «Мир», 1968.
16. Д. Бернштейн, Элементарные частицы и их токи, «Мир», 1970.
17. Н. Ф. Нелипа, Введение в теорию сильно взаимодействующих частиц, Атомиздат, 1970.
18. Е. Вигнер, Теория групп и ее приложения в квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.
19. М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, «Мир», 1966.
20. Д. П. Желобенко, Компактные группы Ли и их представления, «Наука», 1970.
21. G. C. Wick, E. P. Wigner, A. S. Wightman, Phys. Rev. 88, 101 (1952); D1, 3267 (1970).
22. G. C. Negefeldt, K. Kraus, E. P. Wigner, J. Math. Phys. 9, 2029 (1967).
23. E. P. Wigner, Ann. of Math. 40, 149 (1939).
24. V. Bargmann, Ann. of Math. 59, 1 (1954).
25. V. A. Фок, Zs. f. Physik 75, 622 (1932); перевод в кн.: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, изд-во ЛГУ, 1957.
26. R. M. F. Houtappel, E. Van Dam, E. P. Wigner, Rev. Mod. Phys. 37, 595 (1965).

27. W. Brenig, R. Haag, Fortschr. d. Phys. 7, 183 (1959).
28. M. Fierz, Helv. Phys. Acta 12, 13 (1939).
29. В. Паули, в сб. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.
30. G. Lüders, В. Zumino, Phys. Rev. 110, 450 (1958).
31. N. Burgoyne, Nuovo Cim. 8, 607 (1958).
32. G. F. Dell'Antonio, Ann. of Phys. 16, 153 (1961).
33. M. Froissart, J. R. Taylor, Phys. Rev. 153, 600 (1967).
34. T. G. Trapp et al., Phys. Lett. 28B, 203 (1968).
35. D. J. Srenell et al., Phys. Rev. Lett. 22, 487 (1969).
36. Н. С. Крылов, В. А. Фок, ЖЭТФ 17, 93 (1947).
37. A. Varvaro-Galtieri, Advances in Particle Physics, Ed. R. L. Cool, R. E. Marshak, New York, 1968.
38. Э. Карган, Теория спиноров, ИЛ, 1947.
39. Ю. Б. Румер, Спинорный анализ, ОНТИ, 1936.
40. М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
41. W. L. Vade, H. Jehle, Rev. Mod. Phys. 25, 714 (1953).
42. O. N. Williams, UCRL, preprint 11113, 1963.
43. G. W. Mackey, Ann. of Math. 55, 101 (1952).
44. Ю. М. Широков, ЖЭТФ 21, 748 (1951); ДАН 94, 857 (1954); Лекции по основаниям релятивистской квантовой теории, Новосибирск, 1964.
45. C. Fronsdal, Phys. Rev. 113, 1367 (1959).
46. L. L. Foldy, Phys. Rev. 102, 568 (1956).
47. L. S. Lomont, H. E. Moses, J. Math. Phys. 3, 405, (1963).
48. A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 5, 922 (1964).
49. И. С. Шапиро, ДАН 106, 647 (1956).
50. Чжоу Гуань-чжао, Л. Г. Заставенко, ЖЭТФ 35, 1417 (1958).
51. Ю. В. Новожилов, Е. В. Прохвятилов, ТМФ 1, 101 (1969).
52. H. Joos, Fortschr. d. Phys. 10, 65 (1962).
53. H. P. Stapp, Phys. Rev. 125, 2139 (1962).
54. S. Weinberg, Phys. Rev. 133, B1318 (1964).
55. D. L. Weaver, C. L. Hammer, R. H. Good, Jr., Phys. Rev. 135, B241 (1964).
56. S. Weinberg, Phys. Rev. 134, B882 (1964).
57. D. Zwanziger, Phys. Rev. 133, B1036 (1964).
58. M. Jacob, G. C. Wick, Ann. of Phys. 7, 404 (1959).
59. В. И. Ритус, ЖЭТФ 40, 352 (1961).
60. М. И. Широков, ЖЭТФ 40, 1387 (1961).
61. A. Macfarlane, Rev. Mod. Phys. 34, 41 (1962).
62. G. C. Wick, Ann. of Phys. 13, 65 (1962).
63. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A153, 447 (1936).
64. M. Fierz, Helv. Phys. Acta 12, 3 (1939).
65. M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. (London) A173, 211 (1939).
66. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. (London) A173, 91 (1939).
67. R. J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).
68. W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941).
69. V. Bargman, E. Wigner, Proc. Am. Acad. Sci. 34, 211 (1948).
70. Н. А. Крамерс, F. J. Belinfante, J. K. Lubanski, Physica 8, 597 (1941).
71. Н. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys. 17, 200 (1945); 21, 451 (1949).
72. Harish-Chandra, Phys. Rev. 71, 793 (1947); Proc. Roy. Soc. (London) A192, 195 (1947).
73. И. Е. Тамм, В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 17, 227 (1947).
74. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ 18, 703 (1947).
75. D. L. Pursey, Ann. of Phys. 32, 157 (1965).
76. W. K. Tung, Phys. Rev. 156, 1385 (1967).
77. S. J. Chang, Phys. Rev. 148, 1259 (1966).

78. L. Fonda, G. C. Ghirardi, Phys. Rev. **175**, 2082 (1968).
79. S. Tani, Phys. Rev. **D2**, 980 (1970).
80. C. S. Wu et al., Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
81. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
82. J. H. Christenson et al. Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
83. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 720 (1953); **94**, 1366 (1953).
84. D. Lüders, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd. **28**, № 5 (1954).
85. R. Jost, Helv. Phys. Acta **30**, 409 (1957).
86. П. Стритер, А. Вайтман, РСТ, спин и статистика и все такое, Наука, 1966.
87. H. A. Kramers, Proc. Acad. Amsterdam **33**, 959 (1930).
88. E. P. Wigner, Göttinger Nachr. Math.-Physik **5**, 546 (1932).
89. E. P. Wigner, Сборник [10], стр. 37.
90. T. D. Lee, G. C. Wick, Phys. Rev. **148**, 1385 (1966).
91. B. Zumino, D. Zwanziger, Phys. Rev. **164**, 1959 (1967).
92. L. D. Landau, Nucl. Phys. **3**, 127 (1957).
93. A. Salam, Nuovo Cim. **5**, 299 (1957).
94. T. D. Lee, R. Oehme, C. N. Yang, Phys. Rev. **106**, 340 (1957).
95. G. Lüders, B. Zumino, Phys. Rev. **106**, 385 (1957).
96. M. Gormly et al., Phys. Rev. Lett. **21**, 402 (1968).
97. P. D. Miller et al., Phys. Rev. Lett. **19**, 381 (1967).
98. J. L. Baird et al., Phys. Rev. **179**, 1285 (1969).
99. M. Gell-Mann, A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
100. A. Pais, O. Piccioni, Phys. Rev. **100**, 1487 (1955).
101. T. W. B. Kibble, Phys. Rev. **117**, 1159 (1960).
102. S. Mandelstam, Phys. Rev. **112**, 1344 (1958); перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960.
103. К. Нерр, Helv. Phys. Acta **36**, 355 (1963); **37**, 55 (1964).
104. A. O. Barut, I. Muzinich, D. Williams, Phys. Rev. **130**, 442 (1963).
105. K. Hardenberg, K. H. Mütter, W. R. Theis, Nuovo Cim. **62**, 385 (1969).
106. H. Kleinert, K. H. Mütter, Fortschr. d. Phys. **17**, 3 (1969).
107. M. D. Scadron, H. F. Jones, Phys. Rev. **173**, 1734 (1968).
108. B. H. Kellet, Nuovo Cim. **56A**, 1003 (1968).
109. C. de Calan, R. Stora, CERN, TH 1004 (1969).
110. P. Carruthers, Phys. Rev. Lett. **18**, 353 (1967).
111. O. Steinman, Phys. Lett. **25B**, 234 (1967).
112. L. Michel, Nuovo Cim. **10**, 319 (1953).
113. M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962); California Institute of Technology Synchrotron Lab., Report No. CTSL-20, 1961.
114. Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961).
115. R. E. Behrends et al., Rev. Mod. Phys. **34**, 1 (1962).
116. M. Gell-Mann, Y. Ne'eman, The Eightfold Way, New York, 1964.
117. J. J. Swart, Rev. Mod. Phys. **35**, 916 (1963).
118. S. Sakata, Progr. Theor. Phys. **16**, 686 (1956).
119. S. Okubo, Progr. Theor. Phys. **27**, 949 (1962).
120. J. J. Sakurai, Phys. Rev. Lett. **9**, 472 (1962).
121. C. A. Levenson, H. J. Lipkin, S. Meshkov, Phys. Rev. Lett. **10**, 361 (1963).
122. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, Теория унитарной симметрии, «Наука», 1970.
123. Нгуен Ван Хьеу, Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц, Атомиздат, 1967.

124. Сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», «Наукова думка», Киев, 1967.
125. M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8, 214 (1964).
126. G. Zweig, CERN, TH 401, TH 412 (1964).
127. L. O'Raifeartaigh, Phys. Rev. Lett. 14, 332 (1965); Phys. Rev. 139B, 1052 (1965).
128. R. Jost, Helv. Phys. Acta 39, 369 (1966).
129. F. Gürsey, L. A. Radicati, Phys. Rev. Lett. 13, 173 (1964).
130. B. Sakita, Phys. Rev. 136B, 1756 (1964).
131. E. P. Wigner, Phys. Rev. 51, 106 (1937).
132. M. A. Beg, B. W. Lee, A. Pais, Phys. Rev. Lett. 13, 514 (1964).
133. B. Sakita, Phys. Rev. Lett. 13, 643 (1964).
134. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cim. 1, 425 (1955); 6, 319 (1957).
135. J. Bros, H. Epstein, V. Glaser, Comm. Math. Phys. 1, 240 (1965).
136. Y. Hara, Phys. Rev. 136, B507 (1964).
137. L. C. Wang, Phys. Rev. 142, 1187 (1966).
138. T. L. Trueman, G. C. Wick, Ann. of Phys. 26, 322 (1964).
139. E. Leader, Phys. Rev. 166, 1599 (1968).
140. H. F. Jones, Nuovo Cim. 50, 814 (1967).
141. G. Cohen-Tennoudji, A. Morel, H. Navelet, Ann. of Phys. 46, 329 (1968).
142. C. Rebbi, R. Slansky, Rev. Mod. Phys. 42, 68 (1970).
143. J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. 35, 916 (1963).
144. L. Durand, P. de Celles, R. Marr, Phys. Rev. 126, 1882 (1962).
145. J. D. Bjorken, J. D. Walecka, Ann. of Phys. 38, 35 (1966).
146. W. R. Theis, P. H. Hertel, Nuovo Cim 66, 152 (1970).
147. M. D. Scadron, Phys. Rev. 165, 1640 (1968).
148. Е. В. Прохвятилов, ТМФ 9, 65 (1971).
149. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, 1958.
150. D. Olive, Phys. Rev. 135, B745 (1964).
151. R. J. Eden et al., The Analytic S-Matrix, 1966.
152. Д. Чью, Аналитическая теория S-матрицы, «Мир», 1963.
153. Р. Иден, Соударения элементарных частиц при высоких энергиях, «Наука», 1970.
154. L. D. Landau, Nucl. Phys. 13, 181 (1959).
155. M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. Thirring, Phys. Rev. 95, 1612 (1954).
156. M. L. Goldberger, Phys. Rev. 99, 979 (1955).
157. В. Н. Грибов, ЖЭТФ 41, 677, 1962 (1961).
158. M. Froissart, La Jolla Conference on Weak and Strong Interactions, 1961.
159. E. J. Squires, Complex Angular Momenta and Particle Physics, New York, 1963.
160. M. L. Goldberger, Dispersion Theory and Elementary Particles, 1961.
161. М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория рассеяния, «Наука», 1967.
162. Г. Бартон, Дисперсионные методы в теории поля, Атомиздат, 1968.
163. В. Б. Берестецкий, УФН 74, 25 (1962).
164. R. Omnes, Nuovo Cim. 19, 574 (1958).
165. G. Belletini et al., Phys. Lett. 14, 164 (1965).
166. W. Galbraith et al., Phys. Rev. 138B, 913 (1965).

167. K. J. Foley et al., Phys. Rev. Lett. 19, 857 (1967).
168. V. Barger, Rev. Mod. Phys. 40, 129 (1968).
169. J. V. Allaby et al., Phys. Lett. 30B, 500 (1969).
170. G. G. Beznogikh et al., Phys. Lett. 30B, 274 (1969).
171. O. W. Greenberg, F. E. Low, Phys. Rev. 124, 2047 (1961).
172. M. Froissart, Phys. Rev. 123, 1053 (1961).
173. A. Martin, Nuovo Cim. 42A, 930 (1966); 44A, 1219 (1966).
174. T. Kinoshita, J. J. Loeffel, A. Martin, Phys. Rev. Lett. 10, 460 (1963); Phys. Rev. 135B, 1464 (1964).
175. А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И. Т. Годоров, УФН 88, 51 (1966).
176. A. K. Common, F. J. Yndurain, CERN, TH 1185 (1970).
177. F. Cerulus, A. Martin, Phys. Rev. Lett. 8, 80 (1964).
178. J. D. Bessis, Nuovo Cim. 45, 974 (1966).
179. T. Regge, Nuovo Cim. 14, 957 (1959); 18, 947 (1960); см. также сб. переводов «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.
180. G. Ghew, S. Frautschi, Phys. Rev. Lett. 5, 12 (1960).
181. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 41, 667 (1961).
182. A. O. Barut, D. E. Zwanziger, Phys. Rev. 127, 974 (1962).
183. A. O. Barut, Phys. Rev. 128, 1959 (1963).
184. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 43, 308 (1962).
185. S. Mandelstam, Nuovo Cim. 30, 1113, 1148 (1963).
186. J. C. Polkinghorn, J. Math. Phys. 4, 1396 (1963).
187. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 42, 1142 (1962); Phys. Rev. Lett. 8, 343, 412 (1962).
188. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett. 8, 263 (1962).
189. В. Н. Грибов, ЖЭТФ 43, 1529 (1962).
190. V. Singh, Phys. Rev. 129, 1889 (1963).
191. Д. В. Ширков, УФН 102, 87 (1970).
192. E. Igi, Phys. Rev. Lett. 9, 76 (1962).
193. A. Logunov, L. D. Soloviev, A. N. Tavkhelidze, Phys. Lett. 24B, 181 (1967).
194. K. Igi, S. Matsuda, Phys. Rev. Lett. 18, 625 (1967).
195. R. Dolen, D. Horn, C. Schmid, Phys. Rev. 166, 1768 (1968).
196. H. Harari, Phys. Rev. Lett. 20, 1395 (1968).
197. P. G. O. Freund, Phys. Rev. Lett. 21, 235 (1968).
198. C. Schmid, Phys. Rev. Lett. 20, 628, 689 (1968).
199. G. F. Chew, A. Pignotti, Phys. Rev. Lett. 20, 1078 (1968).
200. P. D. B. Collins, R. C. Johnson, E. J. Squires, Phys. Rev. Lett. 27B, 23 (1968).
201. M. Jacob, CERN, TH 1010 (1970).
202. H. Harari, Phys. Rev. Lett. 22, 562 (1969).
203. J. L. Rosner, Phys. Rev. Lett. 22, 689 (1969).
204. G. Veneziano, Nuovo Cim. 57A, 190 (1968).
205. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.
206. S. Mandelstam, Phys. Rev. Lett. 21, 1724 (1968).
207. C. Lovelace, Phys. Lett. 28B, 264 (1968).
208. M. Ademollo, G. Veneziano, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 22, 83 (1969).
209. M. Jacob, Proceedings of the Lund Conference, 1969.
210. V. Alessandrini et al., CERN, TH 1160 (1970).
211. Л. Л. Енковский, В. В. Кухтин, В. П. Шелест, Дуальные резонансные модели, Ин-т теорет. физики АН УССР, ИТФ-70-43, 1970.

212. E. C. G. Sudarshan, R. E. Marshak, Proc. Padua Conference on Mesons and Recently Discovered Particles, 1957, p. 14.
213. R. P. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
214. С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **29**, 698 (1955).
215. M. Gell-Mann, Phys. Rev. **111**, 362 (1958).
216. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
217. M. Gell-Mann, Physics **1**, 63 (1964).
218. M. Ademollo, R. Gatto, Phys. Rev. Lett. **13**, 264 (1964).
219. R. Haag, Phys. Rev. **112**, 669 (1958).
220. K. Nishijima, Phys. Rev. **111**, 995 (1958).
221. W. Zimmermann, Nuovo Cim. **10**, 597 (1958).
222. Y. Nambu Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
223. Чжоу Гуань-чжао, ЖЭТФ **39**, 709 (1960).
224. M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
225. M. L. Goldberger, S. B. Treiman, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
226. S. L. Adler, Phys. Rev. **137**, B1022 (1965).
227. S. L. Adler, Phys. Rev. Lett. **14**, 1051 (1965).
228. W. I. Weisberger, Phys. Rev. Lett. **14**, 1047 (1965).
229. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18**, 507 (1967).
230. T. Das, V. S. Mathur, S. Okubo, Phys. Rev. Lett. **18**, 761 (1967).
231. K. Kawarabayashi, M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).
232. Riazuddin, Fayazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
233. C. H. Albright, P. R. Auvil, N. G. Deshpande, Nuovo Cim. **52A**, 301 (1967).
234. C. L. Cook et al., Phys. Rev. Lett. **20**, 295 (1968).
235. T. G. Trippe et al. Phys. Lett. **28B**, 203 (1968).
236. S. L. Adler, R. S. Dashen, Current Algebra and Applications to Particle Physics, New York, 1968.
237. B. Renner, Current Algebra and Applications, Oxford, 1968.
238. A. P. Balachandran, Rev. Mod. Phys. **41**, 531 (1969).
239. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, УФН **100**, 225 (1970).
240. В. М. Лобашев, Труды XIV Международной конференции по физике высоких энергий, Киев, 1970.
241. D. Dorian et al., Phys. Rev. Lett. **19**, 987 (1967).
242. S. Vennet et al., Phys. Rev. Lett. **19**, 993 (1967).
243. С. М. Биленький, в сб. «Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра», т. 1, вып. 1, Атомиздат, 1970.