

Ю. В. НОВОЖИЛОВ, Ю. А. ЯППА

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей университетов*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

Электродинамика. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А., учебное пособие, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 352 стр.

Книга представляет собой курс электродинамики, включающий элементы ряда современных ее применений: магнитной гидродинамики, нелинейной оптики, теории движения заряженных частиц в неоднородных полях и др. В ней содержатся как релятивистская электродинамика (с подробным рассмотрением теории излучения), так и основы нерелятивистской электродинамики сплошных сред. Изложение начинается с формулировки общих уравнений Максвелла, а затем рассматриваются их применения с учетом тех дополнительных соображений, которые при этом необходимы. Таким образом, всюду проведен принцип «от общего — к частному»; в этом состоит основное отличие данного курса электродинамики от всех других аналогичного объема, имеющих на русском языке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Основы электродинамики Максвелла	7
§ 1. Уравнения Максвелла. Единицы измерения электромагнитных величин	7
§ 2. Потенциалы электромагнитного поля. Градиентная инвариантность. Вектор Герца	23
§ 3. Законы изменения энергии, импульса и момента импульса	28
§ 4. Замечания о математических свойствах уравнений Максвелла. Единственность решения в ограниченной области. Условия на границе двух сред	34
Глава 2. Релятивистская формулировка электродинамики	40
§ 5. Принцип относительности. Преобразования Лоренца и основы релятивистской кинематики	40
§ 6. Релятивистская динамика материальной точки	51
§ 7. Уравнения Максвелла в релятивистской форме. Преобразования напряженностей	55
§ 8. Релятивистские уравнения движения заряда	65
§ 9*. Вариационный принцип для электромагнитного поля	70
§ 10*. Теорема Э. Нетер. Дифференциальные и интегральные законы сохранения для электромагнитного поля в релятивистской форме	77
Глава 3. Статические поля. Решение волнового уравнения. Поле излучения	86
§ 11. Электростатическое поле	86
§ 12. Магнитоэстатическое поле, создаваемое токами	94
§ 13. Решение неоднородного волнового уравнения. Потенциалы Льенара — Вихерта	99
§ 14. Напряженности поля точечного заряда. Поле излучения. Равномерно и прямолинейно движущийся заряд	106
§ 15*. Закон сохранения энергии-импульса для электромагнитного поля точечного заряда в релятивистской форме	112
§ 16. Энергия излучения движущегося заряда	119
§ 17. Излучение ограниченных колеблющихся источников	127
Глава 4. Свойства излучения в изотропных средах	135
§ 18. Плоские волны. Отражение и преломление. Интерференция	135
§ 19. Релятивистские преобразования плоской волны	142
§ 20. Принцип Гюйгенса. Основы теории дифракции	148
§ 21. Приближение геометрической оптики	156
§ 22. Основы термодинамики излучения	160

Глава 5. Уравнение Лоренца — Дирака. Рассеяние и поглощение электромагнитного поля	172
§ 23*. Уравнение Лоренца — Дирака. Реакция излучения	172
§ 24*. Перенормировка массы. Гиперболическое движение заряда	176
§ 25. Спектральный состав излучения осциллятора. Рассеяние и поглощение излучения	180
Глава 6. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле. Система взаимодействующих зарядов	190
§ 26. Интегрирование уравнений движения	190
§ 27. Теория дрейфа в неоднородном электромагнитном поле	203
§ 28. Система взаимодействующих частиц	210
Глава 7. Сплошные среды в электрическом поле	221
§ 29. Введение в электродинамику сплошных сред	221
§ 30. Свойства идеальных проводников в электростатическом поле	224
§ 31. Свойства диэлектриков в электростатическом поле. Изотропные диэлектрики	233
§ 32. Анизотропные диэлектрики	246
Глава 8. Электрический ток. Магнитное поле в сплошной среде	251
§ 33. Магнитная энергия и силы в системе контуров постоянного тока. Квазистационарные токи в линейных цепях	251
§ 34. Вихревые токи. Термоэлектрические и термомагнитные явления. Эффект Холла	260
§ 35. Элементы магнитной гидродинамики	267
§ 36. Простейшие свойства ферромагнетиков	274
§ 37. Феноменологическое описание сверхпроводимости	286
Глава 9. Переменное электромагнитное поле в сплошных средах	293
§ 38. Электромагнитные волны в проводниках. Волновод и резонатор	293
§ 39. Дисперсия электромагнитного поля в веществе. Волны в анизотропных средах	300
§ 40. Волны в магнитной гидродинамике	312
§ 41. Понятие о нелинейной оптике	317
Приложения	321
А. Основные формулы тензорного анализа	321
Б. Векторный анализ в трехмерном евклидовом пространстве	328
В. Основные формулы с дельта-функцией и ее производными	334
Г. Интегрирование по гиперповерхностям в пространстве Минковского	336
Д. Применение преобразования Фурье для решения волнового уравнения	341
Список принятых обозначений	345
Предметный указатель	348

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга возникла на основе опыта преподавания электродинамики в качестве составной части цикла лекций по теоретической физике, читаемых в Ленинградском университете для всех студентов физического факультета — как теоретиков, так и экспериментаторов. Изложение электродинамики опирается при этом на сведения по электромагнетизму, полученные студентами ранее в общем курсе физики, и вместе с тем должно впоследствии служить основой для многих специальных дисциплин (таких, как физика плазмы, распространение радиоволн, электромагнитные методы в геофизике, теория ускорителей и др.). Такая роль курса и обуславливает содержание и стиль этой книги.

Повышение уровня преподавания общей физики привело к тому, что, приступая к изучению электродинамики, студенты обладают достаточными сведениями о том научном материале, обобщением которого являются уравнения Максвелла. Это позволяет нам исходить в нашем изложении из самих этих уравнений и ставить себе задачу: показать, каким образом выводятся из них различные проблемы электромагнетизма с учетом свойств тех или иных материальных сред. Подход с точки зрения уравнений Максвелла позволяет подвести читателя наиболее экономным и современным путем к постановке целого ряда проблем, интенсивно разрабатываемых в настоящее время в научной литературе. Из затронутых в этой книге к ним относятся, например, некоторые вопросы магнитной гидродинамики, задача о движении заряженных частиц в неоднородном электромагнитном поле, формулировка феноменологических уравнений сверхпроводимости. Мы включили также понятие о пространственной дисперсии, сведения о постановке задач нелинейной оптики и пр. Разумеется, изложение всех таких вопросов не может претендовать здесь на полноту.

В согласии с назначением книги мы предполагаем, что математическая подготовка читателя должна соответствовать первым двум курсам физических факультетов. Этого достаточно для понимания всего ее содержания. В приложениях приводятся основные сведения из векторного и тензорного анализа, используемые на протяжении всего текста, а также некоторые свойства дельта-функции.

Особое внимание уделяется вопросам, связанным с применением специальной теории относительности. В главе 2 кратко

рассмотрены основы этой теории, а в других местах книги с ее помощью изучаются различные проблемы. В частности, особенно подробно излагается релятивистская теория излучения точечного заряда. Читатель, более интересующийся нерелятивистскими вопросами электродинамики, может пропустить некоторые параграфы. Они отмечены звездочкой.

Вопросы, требующие применения квантовой теории и статистической физики, не могли быть изложены. Поэтому книга не содержит обсуждения электродинамики материальных сред с точки зрения микроскопической их теории. Однако термодинамический аспект взаимодействия электромагнитного поля со средой обсуждается всюду, где это представилось возможным.

Объем книги не позволил включить в нее решение конкретных задач математической физики, возникающих на материале электродинамики. По этой же причине отсутствуют задачи и упражнения. В известном задачнике по электродинамике В. В. Батыгина и И. Н. Топтыгина читатель может найти подходящие задачи почти для всех разделов предлагаемого курса. Нужно, кроме того, иметь в виду, что изложение в нем довольно сжатое и требует внимательного чтения с самостоятельным проведением многих промежуточных выкладок.

Число рассматриваемых в книге вопросов довольно ограничено, так как она в основном соответствует читаемому в Ленинградском университете курсу. Надеемся, однако, что из ее содержания видно, насколько разветвленным является предмет электродинамики и каким образом некоторые из его ветвей связаны с их общим источником — уравнениями Максвелла.

Авторы глубоко благодарны научному редактору книги проф. С. В. Измайлову, а также рецензентам — проф. В. И. Григорьеву и проф. В. Г. Соловьеву. Их многочисленные критические замечания и конкретные предложения во многом способствовали улучшению нашей рукописи.

Стиль и содержание этой книги сложились при определяющем влиянии педагогических принципов нашего учителя Владимира Александровича Фока, светлой памяти которого мы хотели бы посвятить ее.

Ю. В. Новожилов, Ю. А. Янна

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА

§ 1. Уравнения Максвелла. Единицы измерения электромагнитных величин

1.1. Экспериментальное и теоретическое исследование физических явлений привело к выводу о существовании электромагнитного поля как физического объекта, обладающего определенными, характерными для него свойствами. Электромагнитное поле порождается источниками — электрическими зарядами, токами, постоянными магнитами — и обуславливает взаимодействие между источниками. Поле, создаваемое одним источником, может быть измерено по тому, как оно влияет на другие источники. Для количественного определения поля нужно прежде всего измерить ту механическую силу, с которой оно действует на так называемые пробные источники. Для того чтобы источник мог служить в качестве пробного, его пространственные размеры должны быть пренебрежимо малыми, а поле, создаваемое им самим, — настолько слабым, чтобы оно не влияло на результаты измерений. Таким образом, можно в принципе определить поле в любой точке пространства. Кроме того, поле, вообще говоря, зависит от времени. Механическую силу, измеренную в момент времени t с помощью пробного источника, помещенного в точку r , обозначим через $F(r, t)$.

Свойства электромагнитного поля «в чистом виде» проявляются при изучении действия его источников в *вакууме*. Всякая *материальная среда* состоит из простейших частиц — атомов, электронов, молекул, которые всегда обладают определенными электромагнитными свойствами. Эти их свойства, а также взаимное пространственное расположение частиц и состояние их движения относительно друг друга являются причиной той или иной реакции данной среды на «внешнее» электромагнитное поле. С макроскопической точки зрения оказывается по большей части возможным не учитывать дискретности строения вещества и описывать его в виде непрерывного распределения источников поля. Состояние этого распределения может изменяться под действием внешнего электромагнитного поля, создаваемого сторонними источниками, а также при изменении термодинамических условий, в которых находится среда. Электромагнитные свойства материальных сред чрезвычайно разнообразны, но они описываются, как мы вскоре увидим, с по-

мощью всего лишь двух макроскопических характеристик — электрической поляризации и намагниченности.

Математическую формулировку основных законов электромагнитного поля с учетом макроскопических свойств материальных сред представляет собой система уравнений Максвелла, которая будет рассмотрена в настоящем параграфе. Такая наиболее общая формулировка должна быть, по возможности, независимой от тех или иных конкретных предположений о микроскопической структуре сред. Разумеется, одна из основных задач физической теории состоит в микроскопическом объяснении наблюдаемых фактов. Более того, именно микроскопическая теория часто позволяет предсказать новые физические явления и способы их наблюдения. Однако феноменологическое описание, которым мы ограничимся в дальнейшем, имеет свое преимущество: оно использует только характеристики явлений, измеримые, хотя бы в принципе, с помощью макроскопических приборов. Любая микроскопическая теория со своей стороны должна неизбежно приводить к определенным выводам именно по отношению к феноменологическим характеристикам, предсказывать и объяснять то или иное их поведение. Это замечание относится не только к классической электронной теории, но и к современной квантовой теории строения вещества. По словам Н. Бора, «недвусмысленное истолкование любого измерения должно быть, по существу, выражено в терминах классических теорий, и мы можем сказать, что в этом смысле язык Ньютона и Максвелла останется языком физиков на все времена» *).

Всякая физическая закономерность, в том числе и уравнения Максвелла, удовлетворяет требованиям инвариантности по отношению к определенным группам преобразований связываемых ею физических величин. Прежде всего, должен выполняться принцип относительности, т. е. уравнения Максвелла должны приводить к одинаковым результатам при одних и тех же граничных и начальных условиях в любой инерциальной системе отсчета. Само понятие электромагнитного поля как физического объекта, не зависящего от выбора инерциальной системы, может быть определено лишь с помощью явного учета требований принципа относительности. В каждой данной инерциальной системе электромагнитное поле «расщепляется» на два различных по своим свойствам поля — электрическое и магнитное. Именно они и подлежат непосредственным измерениям. Мы отложим рассмотрение принципа относительности и выводов из него до следующей главы и ограничимся пока изучением уравнений Максвелла в произвольно выбранной инерциальной системе отсчета. В такой системе отсчета

*) См. Н. Бор, Максвелл и современная теоретическая физика (в сборнике «Дж. К. Максвелл. Статьи и речи», «Наука», 1968, стр. 251).

уравнения не должны зависеть от направления ее пространственных осей. Мы увидим, что уравнения Максвелла действительно записываются в виде соотношений между трехмерными векторами, так что требование инвариантности по отношению к вращениям координатных осей в трехмерном пространстве удовлетворяется *).

Итак, мы прежде всего попытаемся установить основные законы электрического и магнитного полей в произвольной, но фиксированной инерциальной системе отсчета, т. е. одной из тех систем, которые движутся относительно друг друга с произвольными постоянными скоростями. Нужно еще иметь в виду, что для применяемых в электродинамике величин должны быть определены размерности и единицы измерения. Эта проблема также будет нами рассмотрена.

1.2. Предположим вначале, что исследуемое поле является *статическим*. Это, по определению, означает, что сила, создаваемая заданным распределением источников и действующая на пробный источник, не зависит от времени, т. е. представляет собой некоторую функцию $F(\mathbf{r})$ трехмерного радиуса-вектора \mathbf{r} , определяющего положение точечного пробного источника в пространстве. Электрическое и магнитное статические поля порождаются различными по своим физическим свойствам источниками и обладают различной структурой. Для их определения большое значение имеет исследование того частного случая, когда источники, создающие поле, сами являются точечными. При этом поля таких точечных источников могут обладать различными свойствами симметрии, т. е. свойства функции $F(\mathbf{r})$ могут быть различными. Однако электрическое поле, с одной стороны, и магнитное поле, с другой, могут порождаться такими точечными источниками, которые имеют простейшие, характерные для этих полей, свойства.

Таким простейшим источником электрического поля является точечный заряд. Порожденное им поле имеет сферическую симметрию.

Экспериментальное исследование показывает, что если в некоторую точку пространства, окружающего произвольный (не обязательно точечный) источник электрического поля, помещать различные точечные заряды, то каждому из них можно поставить в соответствие такое число q , что для любых двух точечных зарядов выполняется равенство $F_{\alpha}^{(1)} : F_{\alpha}^{(2)} = q_1 : q_2$ ($\alpha = 1, 2, 3$). При этом оказывается, что число q (называемое *количеством заряда*) характеризует физические свойства самого точечного заряда, о котором идет речь: оно не зависит ни от свойств источника, поле которого действует на этот точечный заряд, ни от точки пространства, в которую помещается последний. Нет необходимости предполагать и то,

*) Краткое изложение необходимых сведений из векторного анализа см. в Приложениях А и Б в конце книги.

что поле, создаваемое самим точечным зарядом, является слабым по сравнению с полем, в которое он вносится. Для различных точечных зарядов характеристика q может принимать положительные и отрицательные значения.

Указанное определение количества заряда ничего не говорит о том, какой размерностью должна обладать эта величина. Ясно, однако, что некоторый заряд всегда можно определить как единичный. Сила, действующая со стороны данного источника электрического поля на единичный точечный заряд, называется *напряженностью поля* $E(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Результаты экспериментального изучения свойств напряженности статических электрических полей, создаваемых всевозможными источниками, выражаются в виде уравнений для вектора $E(\mathbf{r})$, которые мы сейчас сформулируем.

Прежде всего, если s — произвольный замкнутый контур, то выполняется равенство

$$\oint_s \mathbf{E} ds = 0. \quad (1.2)$$

Другими словами, работа при переносе точечного заряда в статическом электрическом поле по незамкнутому пути не зависит от пути переноса, а только от начальной и конечной точек этого пути. Формула (Б.25) позволяет найти соответствующее дифференциальное уравнение для векторной функции $E(\mathbf{r})$:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (1.3)$$

которому эта функция должна удовлетворять во всех точках пространства. Уравнения (1.2) и (1.3) выполняются для статического поля как в том случае, когда заряды находятся в вакууме, так и в присутствии каких-либо материальных сред.

Если источник электрического поля не является точечным зарядом, то создаваемое им поле оказывается возможным представить в общем случае как результат действия непрерывного распределения зарядов с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$ *). Полный заряд q источника, находящийся в объеме V , может быть выражен равенством

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.4)$$

*) В дальнейшем будут рассматриваться также и распределения на двумерных поверхностях с поверхностной плотностью λ , однако мы здесь не останавливаемся на такой возможности, которая не вносит сколько-нибудь существенных изменений в рассуждения.

Поле \mathbf{E} , создаваемое зарядом q в вакууме, как бы ни был этот заряд распределен в некотором объеме V , удовлетворяет следующему основному уравнению:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \mathbf{n} d\sigma = q. \quad (1.5)$$

Здесь σ — произвольная двумерная поверхность, охватывающая объем V , а \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к этой поверхности. Введение коэффициента ϵ_0 обусловлено соображениями, связанными с выбором размерностей и единиц измерения для электрических величин.

Определение (1.1) напряженности электрического поля показывает, что произведение размерностей величин q и \mathbf{E} должно быть равно размерности механической силы \mathbf{F} . Умножая обе стороны уравнения (1.5) на величину q' , имеющую размерность заряда, мы получим необходимое требование, которому должна удовлетворять эта размерность *):

$$[q]^2 = [F][L]^2[\epsilon_0]. \quad (1.6)$$

Выбор размерности для величины ϵ_0 , которая называется *электрической постоянной*, как мы увидим в дальнейшем, может быть различным; в соответствии с этим будет различной и размерность $[q]$. Существуют эксперименты (например, основанные на явлении электролиза), с помощью которых эталон заряда может быть, хотя бы в принципе, установлен совершенно независимо от механических измерений величины поля. Тогда размерность постоянной ϵ_0 определяется уравнением (1.6), а численное значение этой постоянной зависит от выбора эталонов основных механических величин и заряда.

В том частном случае, когда заряд q является точечным, возьмем поверхность σ в виде сферы радиусом r , центр которой совпадает с той точкой, где находится заряд. Из соображений симметрии ясно, что напряженность \mathbf{E} должна быть во всех точках этой сферы направлена по радиусу, т. е. $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$, причем на сфере $E = \text{const}$. Тогда (1.5) сразу же приводит к равенству

$$\mathbf{E} = \frac{qn}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.7)$$

т. е. к закону Кулона.

Возвращаясь к общему случаю и сжимая поверхность σ к любой точке, находящейся внутри первоначального объема V , мы, с помощью формулы (Б.22), получим $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int \rho(\mathbf{r}) dV$.

*) Квадратными скобками здесь обозначаются размерности.

т. е. при достаточно широких предположениях в отношении свойств функции $\rho(\mathbf{r})$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Таким образом, вместо интегральных соотношений (1.2) и (1.5) можно рассматривать систему дифференциальных уравнений (1.3) и (1.8).

Следует иметь в виду, что если рассматривается некоторое распределение зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, то, так как заряды могут быть положительными и отрицательными, из равенства $q = 0$, вообще говоря, не следует, что поле \mathbf{E} равно нулю. Это свойство электрического поля качественно отличает его от ньютоновского поля тяготения, где выполняются оба закона (1.2) и (1.5), но из условия $q = 0$ следует, что и $\mathbf{E} = 0$.

Уравнения электрического поля линейны. Поэтому к нему применим *принцип суперпозиции*: любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами решений уравнений (1.3) и (1.8) является также возможным их решением. В дальнейшем мы увидим, что этим свойством обладают и общие уравнения Максвелла для широкого класса материальных сред.

1.3. Рассмотрим теперь тот случай, когда в пространстве вокруг заряда, действие которого в вакууме определяется соотношением (1.5), находится некоторая материальная среда. Эта среда может заполнять какую-либо ограниченную область или все бесконечное пространство вокруг заряда. Пусть при этом количество заряда, заключенное внутри данной замкнутой поверхности σ , не изменяется по сравнению с тем, каким оно было в вакууме, так что правая часть уравнения (1.5) остается прежней. Опыт показывает, что напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, создаваемая зарядом в присутствии материальной среды, отличается от напряженности $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, создаваемой им же в вакууме, так что для $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ уравнение (1.5) перестает быть справедливым*). Напротив, для того чтобы сохранить в присутствии среды неизменной напряженность $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, создаваемую каким-либо распределением заряда в вакууме, нужно взять другой заряд. С целью математического описания таких экспериментальных фактов вводится векторное поле $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, называемое *электрической индукцией*, которое определяется так, чтобы поток вектора \mathbf{D} через произвольную замкнутую поверхность равнялся заряду, находящемуся внутри этой поверхности, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \mathbf{n} \, d\sigma = q. \quad (1.9)$$

*) В рассматриваемом случае может происходить перераспределение плотности заряда в объеме V при условии, что $\int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV = \int_V \rho_0(\mathbf{r}) \, dV$, если ρ_0 — плотность заряда в вакууме, а ρ — в среде.

Обозначения здесь те же, что и в уравнении (1.5). Совершенно аналогично с формулой (1.8) можно получить дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.10)$$

Для характеристики свойств среды определяется *вектор поляризации* \mathbf{P} с помощью равенства

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.11)$$

В вакууме вектор \mathbf{P} равен нулю.

Уравнение (1.2) (или соответственно (1.3)) остается, как уже было упомянуто выше, справедливым и в присутствии среды. Таким образом, в общем случае статическое электрическое поле определяется с помощью системы уравнений (1.2) и (1.9) (или в дифференциальной форме — (1.3) и (1.10)).

Фундаментальным свойством заряда, твердо установленным в экспериментальном отношении, является закон его сохранения: изменение количества заряда в объеме V , ограниченном произвольной замкнутой поверхностью σ , всегда равно потоку заряда через эту поверхность. Если обозначить через $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ плотность тока проводимости, т. е. количество заряда, протекающее за единицу времени в направлении вектора \mathbf{j} в точке \mathbf{r} и отнесенное к единичной площадке, перпендикулярной к \mathbf{j} , то закон сохранения заряда будет иметь вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = - \oint_{\sigma} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} d\sigma. \quad (1.12)$$

В частности, когда поверхность σ фиксирована, можно записать: $\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$. Так же, как это было сделано при выводе уравнений (1.8) или (1.10), можно получить дифференциальное выражение закона сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.13)$$

С физической точки зрения большую важность имеет тот случай, когда электрический ток \mathbf{j} существует в нейтральной среде. Рассмотрим объем V , имеющий форму тора. Предположим, что этот объем заполнен неподвижным в данной инерциальной системе распределением заряда одного знака и сквозь него движется объемно распределенный заряд противоположного знака так, что полное количество заряда, заключенное внутри любого отрезка тора, не изменяется со временем (часто это количество заряда можно считать равным нулю). Тогда уравнение (1.12) приводит к $\int_{\sigma_1} \mathbf{j} \mathbf{n}_1 d\sigma_1 =$

$= \int_{\sigma_2} \mathbf{j} n_2 d\sigma_2$ для двух произвольных поперечных сечений σ_1 и σ_2 тора (здесь положительное направление одной из нормалей \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 заменено на обратное). При этом \mathbf{j} не должно зависеть от времени t и ток называется *постоянным*. Легко обобщить рассмотренную картину на случай переменного тока, когда для каждого отрезка тора необходимо применять уравнение (1.12) и количество заряда, заключенное в этом отрезке, может изменяться. Интеграл $I = \int_{\sigma} \mathbf{j} n d\sigma$ называется *силой* (электрического) *тока* через поверхность σ .

1.4. Электрические токи, т. е. движущиеся заряды, взаимодействуют между собой при посредстве создаваемого ими *магнитного поля*. Если, как в только что рассмотренном случае, плотность тока не зависит от времени, то такой ток является источником *статического* магнитного поля. Помимо электрических токов, магнитное поле может порождаться ферромагнитными средами (магнитами). Тожественность свойств полей, источниками которых служат токи, с одной стороны, и магниты, с другой, была установлена экспериментальным изучением взаимодействия токов и магнитов *).

Свойства магнитного поля характеризуются тем, что, в отличие от рассмотренного выше электрического поля, не существует таких точечных источников, порождаемое которыми магнитное поле обладало бы сферической симметрией. Простейший по своим свойствам источник магнитного поля называется магнитным моментом. Для его описания нужно представить себе некоторый вектор \mathbf{m} в той точке, где этот источник находится **). Например, поведение бесконечно малой петли с током можно описать вектором \mathbf{m} , величина которого зависит от тока I , протекающего в этой петле, а направление выбирается по нормали к плоскости, в которой расположена петля, и связано по правилу правого винта с направлением тока. Вектор \mathbf{m} называется *магнитным моментом* замкнутого тока.

Действие магнитного поля на пробный источник такого рода проявляется в том, что он испытывает механический момент вращения \mathbf{N} , величина которого зависит от магнитного момента пробного источника и от магнитного поля. Напряженность магнитного поля \mathbf{B} определяется равенством

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (1.14)$$

Пока у нас еще нет средств определить сами величины \mathbf{m} и \mathbf{B} ; неизвестна и их размерность. Можно лишь сказать, что произведе-

*) Мы имеем в виду, прежде всего, классические опыты Эрстеда и Ампера, проведенные в конце второго десятилетия XIX века.

**) Точнее, \mathbf{m} , а также вводимая ниже величина \mathbf{B} , являются псевдовекторами. Обсуждение этого вопроса см. в начале § 2.

дение размерностей $[m]$ и $[B]$ должно равняться размерности механического момента вращения (или, что то же самое, — размерности работы). По историческим причинам поле \mathbf{B} называется обычно не полем напряженности, а полем *магнитной индукции*.

Свойства вектора \mathbf{B} могут быть описаны с помощью уравнений, выражающих основные свойства магнитного поля. Первое из этих уравнений мы запишем сначала для того случая, когда распределение источников, создающих магнитное поле, находится в вакууме. Если s — произвольный линейный замкнутый контур, а σ — произвольная двумерная поверхность, ограниченная контуром s , то основное уравнение магнитостатики утверждает, что

$$\frac{\alpha}{\mu_0} \oint_s \mathbf{B} ds = \int_{\sigma} j_n d\sigma, \quad (1.15)$$

т. е. что циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль контура s численно равна полному току, протекающему сквозь поверхность σ , или, другими словами, охватываемому контуром s . Множитель α/μ_0 является коэффициентом размерности, сама необходимость которого очевидна, так как размерность правой части уравнения (1.15) становится определенной, если только определить размерность заряда, а размерность величины \mathbf{B} остается еще неизвестной. Запись же этого коэффициента размерности в виде отношения двух величин, причем постоянная μ_0 называется *магнитной постоянной*, оказывается в дальнейшем весьма удобной.

Второй основной закон магнитостатики выражает в математической форме высказанное выше утверждение о том, что в природе не существует точечных зарядов, которые бы порождали магнитное поле. Другими словами, не существует точечных магнитных зарядов, а магнитное поле не может иметь сферическую симметрию. Не существует поэтому и таких магнитных полей, которые создавались бы распределениями магнитных зарядов с суммарным количеством заряда, отличным от нуля. Поэтому вместо формулы (1.5) для магнитного поля выполняется уравнение

$$\oint \mathbf{B} n d\sigma = 0, \quad (1.16)$$

где σ — произвольная замкнутая поверхность.

Если заданное распределение токов находится не в вакууме, а в материальной среде, то создаваемое им поле \mathbf{B} перестает удовлетворять уравнению (1.15). В этом случае, однако, можно определить поле магнитной напряженности $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (1.17)$$

где \mathbf{M} — поле намагниченности среды, равное нулю для вакуума. При этом требуется, чтобы выполнялось уравнение

$$\alpha \oint \mathbf{H} ds = \int_{\sigma} \mathbf{j}_n d\sigma. \quad (1.18)$$

Равенство же (1.16) продолжает оставаться в силе. Мы видим, в частности, что введенный ранее коэффициент μ_0 может связывать между собой различные, в принципе, размерности полей \mathbf{B} и \mathbf{H} аналогично тому, как ϵ_0 связывает размерности \mathbf{D} и \mathbf{E} .

Применяя (Б.22) к уравнению (1.16) и теорему Стокса (Б.26) к уравнению (1.18), легко найти их дифференциальные аналоги:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.19)$$

$$\alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (1.20)$$

1.5. Перейдем теперь к общему случаю полей, действующих в присутствии материальных сред и зависящих от времени.

Посмотрим прежде всего, при каком условии соотношение (1.10) между полем электрической индукции \mathbf{D} и зарядом q , выведенное первоначально для статического случая, будет выполняться и тогда, когда \mathbf{D} и ρ зависят от времени. Предполагая, что это так, и дифференцируя (1.10) по времени, получим соотношение между производными: $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Если же учесть закон сохранения заряда (1.13), то предыдущее равенство может быть записано в форме $\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$. Как видно из (Б.13), оно будет выполняться, если существует такое векторное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, что

$$\alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Наоборот, если выполняется (1.21), то, повторяя предыдущее рассуждение в обратном порядке, придем к равенству $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0$. Таким образом, если уравнение (1.10) выполняется в какой-либо момент времени, то, на основании (1.21), оно будет иметь место всегда. Уравнение (1.21) представляет собой обобщение уравнения (1.20) на случай, когда поля зависят от времени. Член $\partial \mathbf{D} / \partial t$, введенный впервые Максвеллом, называется *плотностью тока смещения*.

Нам остается сформулировать последнее основное соотношение теории электромагнитного поля. Рассмотрим линейный контур s и произвольную поверхность σ с краем s . Электродвижущей силой в контуре s называется интеграл $\oint \mathbf{E} ds$. Поток магнитной индукции выражается интегралом $\Phi = \int_{\sigma} \mathbf{B} n d\sigma$. Как было экспериментально установлено Фарадеем, изменение потока магнитной индук-

ции через поверхность σ вызывает электродвижущую силу в контуре s . Этот физический закон электромагнитной индукции формулируется в виде равенства

$$\beta \oint_s \mathbf{E} ds = - \frac{d}{dt} \int_{\sigma} B_n d\sigma. \quad (1.22)$$

Производная по времени в правой части этого равенства определяется как функциональной зависимостью подынтегральной функции $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ от времени, так и возможной зависимостью от времени пределов интегрирования. Последняя может возникнуть, если рассматриваемый контур s деформируется с течением времени или движется относительно источников магнитного поля. Множитель β в левой части введен, как и выше, для обеспечения равенства размерности правой и левой частей; это — последний необходимый нам коэффициент размерности. Из (1.5) легко сделать вывод, что размерность интеграла в левой части (1.22) равна $[\epsilon_0]^{-1} [q] [L]^{-1} [\beta]$. С другой стороны, из (1.12) и (1.15) следует, что размерность правой части есть $[\mu_0/\alpha] [q] [L] [T]^{-2}$. Эти размерности будут одинаковыми, если $[\mu_0\epsilon_0/\alpha\beta] = [L/T]^{-2}$ *).

Если зависимость от времени в правой части (1.22) целиком обусловлена изменением подынтегральной функции, то $\frac{d}{dt} \int \mathbf{Bn} d\sigma = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{n} d\sigma$ и, совершенно аналогично выводу соотношения (1.20), получим дифференциальную форму закона индукции Фарадея:

$$\beta \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.23)$$

Применение операции div к обеим частям (1.23) приводит к равенству $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Отсюда следует, что если уравнение (1.19) имеет место в какой-либо момент времени, то оно выполняется всегда.

Рассмотрим теперь уравнения (1.8), (1.19), (1.21) и (1.23) в вакууме (когда следует положить $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$), причем будем считать, что источники поля находятся вне той части пространства, в которой поле изучается (так что можно положить $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$). Применяя в этих условиях к обеим частям (1.21) операцию rot и используя формулу (Б.21), а также (1.19) и (1.23), получим в декартовых координатах уравнение второго порядка

*) Заметим, что размерности электрических и магнитных величин считаются пока независимыми. В частности, размерность магнитного момента не зависит от размерности электрического заряда. Из уравнений (1.1), (1.14) и (1.22) следует соотношение $\beta = \frac{[q]}{[m]} \frac{L^2}{T}$, непосредственно поясняющее физический смысл коэффициента β .

для H :

$$\left(\Delta - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\alpha \beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) H = 0. \quad (1.24)$$

С помощью (1.8) и (1.21) совершенно аналогичным способом из уравнения (1.23) можно сделать вывод, что и поле E удовлетворяет уравнению вида (1.24) с точно таким же коэффициентом при производной по времени.

С физической точки зрения сделанный вывод имеет принципиальную важность. Он показывает, что как поле H , так и поле E обладают способностью распространяться в вакууме со скоростью $c = \sqrt{\alpha\beta/(\mu_0\epsilon_0)}$, ибо именно такой смысл имеет коэффициент при второй производной по времени в волновом уравнении (1.24). Мы уже видели ранее, что размерность правой части в выражении для c действительно должна быть равна размерности скорости. Полученный результат связывает все введенные в уравнения Максвелла коэффициенты размерности с величиной, которая может быть экспериментально определена. Это обстоятельство можно положить в основу классификации систем единиц, используемых для измерения электромагнитного поля.

1.6. Все обычно применяемые системы единиц могут быть получены, если считать, что $\alpha = \beta$, так что должно выполняться соотношение

$$c = \alpha / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.25)$$

В свою очередь константе α приписывается то или иное значение. Нужно иметь в виду два следующих основных случая:

1. Положим $\alpha = c$. Тогда диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума должны быть связаны равенством $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1$. Система единиц будет определена полностью, если считать, что как ϵ_0 , так и μ_0 безразмерны, причем $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Такая система единиц называется *абсолютной системой* (СГС) или *гауссовой системой*. Из приведенных ранее определений (1.11) и (1.17) вытекает, что размерности всех четырех векторов E , D , B и H считаются в этой системе единиц одинаковыми. Размерность заряда оказывается при этом производной от размерностей механических величин (см. (1.6)).

2. Пусть постоянная α безразмерна и равна 1. В этом случае должно выполняться равенство $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Тогда широко используются следующие три способа введения системы единиц.

Во-первых, можно считать, что ϵ_0 — безразмерная величина, равная 1, а $\mu_0 = 1/c^2$. Соответствующая система единиц называется *электрической* (СГСЭ).

Во-вторых, можно условиться, что, напротив, μ_0 безразмерна и равна 1, а $\epsilon_0 = 1/c^2$. Тогда получается *магнитная система единиц* (СГСМ).

Наконец, как уже упоминалось выше (стр. 11), можно с самого начала отказаться от сведения размерности электрического заряда к размерностям механических величин и считать, что единица заряда устанавливается с помощью независимых измерений. Так, например, для электролиза одного килограмм-эквивалента вещества необходимо пропустить через электролит определенное количество электричества, которое может служить для введения единицы измерения (кулон). Удобно считать, что оно равно $96,485 \cdot 10^6$ Кл (кулон). Однако в связи с практической невозможностью осуществления такого эталона за основную единицу принимается единица силы тока — ампер (А). При этом $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$. Помимо секунды, в качестве основных механических единиц используются метр (м) и килограмм массы (кг). Такая система четырех основных единиц входит в состав Международной системы единиц (СИ), утвержденной XI Генеральной конференцией по мерам и весам в 1960 г. и принятой с 1 января 1963 г. в Советском Союзе в качестве государственного стандарта. В дальнейшем (см. § 29) будет показано, что величинам ϵ_0 и μ_0 в отдельности могут быть приписаны определенные численные значения.

Несомненно, система СИ наиболее удобна с практической точки зрения. Однако во многих физических вопросах, особенно относящихся к взаимодействию источников в вакууме, уравнения Максвелла приобретают более наглядный вид, если записывать их в гауссовой системе единиц. Отметим, кроме того, что мы всюду использовали так называемые рационализированные единицы. Нерационализированные единицы отличаются лишь другой нормировкой векторов поля, при которой плотность заряда в (1.10) и плотность тока в (1.20) должны быть умножены на 4π .

1.7. Итак, уравнения Максвелла могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{M.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{M.2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{M.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\alpha} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (\text{M.4})$$

Выбор $\alpha = 1$ или же $\alpha = c$ и $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ соответствует использованию системы единиц СИ или гауссовой системы единиц.

Интегральные аналоги уравнений (M.1) — (M.4) имеют форму:

$$\oint \mathbf{Dn} \, d\sigma = q, \quad (\text{M'.1})$$

$$\oint \mathbf{Bn} \, d\sigma = 0, \quad (\text{M'.2})$$

$$\oint \mathbf{E} \, ds = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \int \mathbf{Bn} \, d\sigma, \quad (\text{M'.3})$$

$$\oint \mathbf{H} \, ds = \frac{1}{\alpha} \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (\text{M'.4})$$

Равенство (М'.4) может быть получено интегрированием обеих сторон (М.4) по произвольной поверхности σ , ограниченной контуром s , и последующим применением теоремы Стокса (Б.26).

Именно систему уравнений Максвелла (М) или (М') следует теперь считать полной исходной формулировкой законов электромагнитного поля. При этом, например, закон сохранения заряда в форме уравнения непрерывности (1.13) может быть получен из системы (М), если продифференцировать по времени уравнение (М.1) и воспользоваться уравнением (М.4). С физической точки зрения более естественно, однако, считать закон сохранения заряда независимым от системы (М) соотношением и с его помощью, как это было сделано ранее, прийти к выводу о том, что уравнение (М.1) не изменяется с течением времени. Тогда основное значение приобретают уравнения (М.3) и (М.4), уравнение непрерывности (1.13) и уравнения (М.1) и (М.2), взятые в некоторый начальный момент времени.

Используя определения поляризации (1.11) и намагниченности (1.17), уравнения (М.1) и (М.4) можно записать также и несколько иначе:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad (\text{М.1}')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\alpha} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (\text{М.4}')$$

Система уравнений (М.1'), (М.2), (М.3) и (М.4') при заданных источниках ρ и \mathbf{j} определяет неизвестные функции $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ лишь тогда, когда известны характеристики среды \mathbf{P} и \mathbf{M} . Эти характеристики в свою очередь зависят от полей, создаваемых источниками в среде, и от физической структуры среды. Поэтому указанная система уравнений определяет электромагнитное поле по свойствам источников только в вакууме, когда $\mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$. В своем общем виде она представляет собой недоопределенную систему соотношений между связываемыми ею физическими величинами.

В принципе, для того чтобы уравнения Максвелла стали разрешимыми, необходимо знать функциональные зависимости типа $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$, или, что то же самое, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. Такие зависимости для каждой среды могут быть определены только с помощью исследования ее конкретных физических свойств. Однако экспериментальное исследование электромагнитных свойств материальных сред позволяет выделить целый ряд их важных разновидностей. Остановимся здесь на простейших из них; о некоторых обобщениях будет сказано в § 4.

Прежде всего, это — класс *изотропных* сред, для которых выполняются соотношения

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.26)$$

где χ_e — коэффициент диэлектрической, а χ_m — магнитной *восприимчивости*. Из (1.26) следует

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.27)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e), \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m). \quad (1.28)$$

Подставим (1.27) в уравнения (М) и предположим, что ε и μ постоянны, а ρ и \mathbf{j} равны нулю. Тогда совершенно аналогично выводу уравнения (1.24), мы получим равенство, состоящее в том, что оператор $\Delta - \frac{\varepsilon\mu}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, будучи применен к \mathbf{E} и к \mathbf{H} , дает нулевой результат. Коэффициент при производной по времени нужно считать равным обратному квадрату скорости распространения электромагнитного поля. При постоянных ε и μ среда называется *однородной*. Из (1.25) следует

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{v}. \quad (1.28')$$

Часто для характеристики среды (не только однородной) применяются относительные проницаемости $\varepsilon' = \varepsilon/\varepsilon_0$ и $\mu' = \mu/\mu_0$.

Более общие линейные зависимости

$$\mathbf{D}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{E}_\beta, \quad \mathbf{B}_\alpha = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{H}_\beta, \quad (1.29)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 (\delta_{\alpha\beta} + \chi_{(e)\alpha\beta})$ и $\mu_{\alpha\beta} = \mu_0 (\delta_{\alpha\beta} + \chi_{(m)\alpha\beta})$ — тензоры второго ранга относительно трехмерных вращений*) имеют место для *анизотропных* сред. Необходимо иметь в виду, что соотношения типа (1.27) и (1.29) могут выполняться лишь в определенном интервале значений аргументов \mathbf{E} и \mathbf{B} , за пределами которого (т. е. при достаточно сильных или, наоборот, слабых полях) они нарушаются. Применимость этих соотношений зависит и от термодинамического состояния среды, в частности от температуры, при которой среда рассматривается. Теоретический вывод «материальных соотношений» такого типа и определение условий их применимости представляют собой одну из проблем теории микроскопического строения вещества и в конечном счете относятся к области квантовой теории.

Эксперимент показывает, что всегда $\chi_e > 0$, но магнитная восприимчивость χ_m может быть как положительной, так и отрицательной. В первом случае среда называется *парамагнитной*, а во втором — *диамагнитной*. Во всех рассмотренных выше уравнениях поляризация \mathbf{P} и намагниченность \mathbf{M} обращаются в нуль вместе с соответствующими полями (\mathbf{E} или \mathbf{H}).

Это условие не выполняется для намагниченности *ферромагнитных* веществ и для поляризации *сегнетоэлектриков* благодаря

*) Из общих термодинамических соображений следует, что тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ симметричны (см. § 32).

тому, что для этих сред не имеют места простые линейные зависимости вида (1.29).

Для сегнетоэлектриков и ферромагнетиков характерно явление гистерезиса (см. § 36), благодаря которому вектор поляризации \mathbf{P} или намагниченности \mathbf{M} могут быть отличны от нуля при $\mathbf{E} = 0$ или соответственно $\mathbf{B} = 0$. Обозначим через M_0 такую остаточную намагниченность. Из уравнения (М.4') следует, что rot M_0 может служить источником поля \mathbf{B} . В этом состоит феноменологическое описание действия постоянных магнитов *). Заметим, что выше определенной температуры (точки Кюри) ферромагнетики превращаются в парамагнитные среды.

Кроме приведенной выше классификации сред, основное значение в электродинамике имеет разделение их на *проводники* и *диэлектрики*. В широком интервале значений \mathbf{E} выполняется закон Ома, а именно

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta + j_\alpha^{(ct)}, \quad (1.30)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — коэффициент (тензор) электропроводности, а $j^{(ct)}$ — та часть тока, которая может считаться заданной независимо от поля \mathbf{E} . Она создается «сторонними» по отношению к полю источниками, которые могут иметь неэлектромагнитный характер и действовать за счет превращения других видов энергии в работу по перемещению электрических зарядов (примеры: химический элемент, динамомашинка и т. д.). Предположим, что $j^{(ct)} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta}$, а σ и ϵ постоянны (мы считаем, что (1.27) также выполняется). Тогда уравнение непрерывности (1.13) после использования уравнения (М.1) и перечисленных выше условий примет вид

$$\operatorname{div} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Для того чтобы это равенство выполнялось, достаточно предположить, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp \left[-\frac{\sigma}{\epsilon} (t - t_0) \right]$. Из (М.1) видно, что аналогично будет зависеть от времени и плотность заряда: $\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{\sigma}{\epsilon} (t - t_0) \right]$. Величина ϵ/σ играет роль характерного для данной среды времени релаксации T . При $\epsilon/\sigma \gg T$ среда называется *диэлектриком*, а при $\epsilon/\sigma \ll T$ — *проводником*. Только в первом случае среда может содержать заряд достаточно долго, во втором же случае заряды, внесенные внутрь среды, быстро исчезают. Из закона сохранения заряда видно, что если проводник заполняет все пространство, то заряды уходят на бесконечность, если же он ограничен диэлектрической средой, то заряды могут задержаться на граничной поверхности между

*) См. об этом подробнее в § 36.

проводником и диэлектриком. При этом образуется поверхностный заряд. Из рассуждения, предшествующего формулировке уравнения (1.21), видно, что такое условие релаксации применимо при условии $H \approx 0$.

§ 2. Потенциалы электромагнитного поля. Градиентная инвариантность. Вектор Герца

2.1. Будучи инвариантными по отношению к вращениям в трехмерном пространстве, основные величины электрического и магнитного полей по-разному ведут себя при отражениях. Экспериментальные данные о свойствах электрического заряда не противоречат предположению о том, что количество заряда q — величина скалярная. Отсюда на основании закона сохранения заряда (1.12), где в левой части производится интегрирование по объему, а в правой — по ориентированной поверхности, следует, что плотность электрического тока \mathbf{j} обладает свойствами полярного вектора. Напряженность электрического поля \mathbf{E} также оказывается полярным вектором, что можно видеть из уравнения (М.1), записанного для вакуума. Но так как операция rot имеет псевдовекторный характер, из уравнения (М.3) видно, что магнитная индукция \mathbf{B} (а значит, в силу (1.17), напряженность \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{M}) должна также быть псевдовектором*). Другими словами, положительное направление этих векторов может быть определено лишь после того, как принято соглашение, какую из двух возможных ориентаций систем координат (правую или левую) нужно считать положительной. При отражении в трехмерном пространстве это направление изменится на противоположное**).

При исследовании уравнений Максвелла (М) важную роль играет возможность выразить электрическое и магнитное поля через вспомогательные поля — потенциалы. Характер преобразования потенциалов при вращениях и отражениях в трехмерном пространстве устанавливается с помощью выясненных выше свойств напряженностей и индукций.

Электромагнитные потенциалы вводятся следующим образом. Прежде всего, соотношение (Б.13) позволяет сделать вывод, что уравнение (М.2) будет решено, если удастся найти такую векторную функцию $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ (векторный, или магнитный, потенциал), чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.1)$$

*) См. Приложение Б, текст, следующий за формулой (Б.20).

**) Заметим, что в формуле (1.14) векторное произведение является псевдовектором — моментом вращения \mathbf{N} . В механике псевдовекторный характер момента \mathbf{N} обусловлен тем, что он равен векторному произведению двух полярных векторов. Но так как в нашем случае \mathbf{B} — псевдовектор, то и \mathbf{A} следует считать псевдовектором.

Если теперь подставить (2.1) в (М.3), то получим

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Поэтому на основании (Б.12) электрическое поле \mathbf{E} можно выразить в виде

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

где функция φ называется *скалярным* или *электрическим потенциалом*. Из формул (2.1) и (2.2) видно, что величина \mathbf{A} должна быть полярным вектором, а функция φ — скаляром (а не псевдоскаляром).

Выражения (2.1) и (2.2) для векторных функций \mathbf{B} и \mathbf{E} через потенциалы \mathbf{A} и φ не зависят от каких-либо предположений относительно свойств среды, в которой действуют поля \mathbf{B} и \mathbf{E} . При этом они показывают, что при заданных функциях \mathbf{B} и \mathbf{E} потенциалы могут быть выбраны бесконечным числом способов.

Действительно, из (Б.12) следует, что если функция $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) с заданной левой частью, то и любая функция \mathbf{A}' вида

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad (2.3)$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$ — произвольная дифференцируемая функция, также является решением этого уравнения. При этом и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ останется неизменной, как можно видеть из (2.2), если одновременно произвести замену φ на φ' , где

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Преобразование потенциалов, определенное уравнениями (2.3) и (2.4), при котором решения \mathbf{B} и \mathbf{E} уравнений Максвелла не изменяются (а значит, не изменяются и сами эти уравнения), называется *градиентным* (или *калибровочным*) *преобразованием*.

Для вывода уравнений, позволяющих вычислить потенциалы, необходимо использовать уравнения Максвелла (М.1) и (М.4), связывающие электромагнитное поле с его источниками. Рассмотрим случай изотропной однородной среды, когда выполняются соотношения (1.27) с постоянными ϵ и μ . При учете этих соотношений подстановка в упомянутые уравнения Максвелла формул (2.1) и (2.2) и использование равенства (Б.21) позволяют записать в декартовых координатах:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{\alpha} \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon \mu}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (2.4_1)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (2.4_2)$$

(здесь, как и в (1.28'), $v = \alpha / \sqrt{\epsilon\mu}$). Полученные уравнения для потенциалов существенно упрощаются, если можно считать, что выполнено *условие калибровки Лоренца* в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Действительно, в этом случае

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\frac{\mu}{\alpha} \mathbf{j}, \quad (2.6_1)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (2.6_2)$$

Покажем, что фактически можно всегда считать, что условие Лоренца выполнено. Эта возможность существует благодаря той свободе выбора потенциалов, которая обеспечивается градиентной инвариантностью. В самом деле, предположим, что каким-либо образом найдены функции \mathbf{A} и φ , удовлетворяющие, при заданных \mathbf{V} и \mathbf{E} , уравнениям (2.1) и (2.2), но для этих \mathbf{A} и φ соотношение (2.5) не имеет места. Совершим градиентное преобразование по формулам (2.3) и (2.4) и потребуем, чтобы для новых потенциалов \mathbf{A}' и φ' условие (2.5) было выполнено. Подставляя \mathbf{A}' и φ' в (2.5) и выражая их через \mathbf{A} и φ , получим условие для функции ψ :

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi = -\left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \quad (2.7)$$

Так как мы предположили, что \mathbf{A} и φ известны, правую часть этого неоднородного волнового уравнения можно считать заданной функцией. Таким образом, выбор в качестве функции ψ любого решения уравнения (2.7) позволяет, не изменяя физического содержания задачи, перейти к потенциалам \mathbf{A}' и φ' , для которых удовлетворяется (2.5). Но уравнение (2.7) имеет при весьма широких предположениях бесконечное множество решений. Более того, если для исходных потенциалов \mathbf{A} и φ условие Лоренца уже выполнено, то (2.7) превращается в однородное волновое уравнение для ψ , которое также обладает бесконечным множеством решений, удовлетворяющих принципу суперпозиции. Отсюда видно, что потенциалы, для которых выполняется условие Лоренца, могут быть определены лишь с точностью до градиентных преобразований специального вида с функцией ψ , являющейся произвольным решением однородного волнового уравнения. Легко видеть, что такие градиентные преобразования составляют подгруппу в группе всех градиентных преобразований.

Из предыдущих рассуждений видно, что условие Лоренца не является единственно возможным ограничением выбора потенциалов. Например, часто используется так называемая *кулоновская*

калибровка, определяемая требованием

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.8)$$

При этом уравнения (2.4₁) и (2.4₂) преобразуются к виду

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{\mu}{\alpha} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{\alpha} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (2.9_1)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (2.9_2)$$

Величина $\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в правой части (2.9₁) может быть вычислена, если известно решение уравнения (2.9₂), и представляет собой как бы добавку к току проводимости \mathbf{j} (см. об этом подробнее в § 13). Условие, аналогичное (2.7), для функции ψ , позволяющей перейти от произвольных потенциалов к таким, которые удовлетворяют кулоновской калибровке, имеет вид

$$\Delta \psi = -\operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (2.9_3)$$

Если известно распределение источников, т. е. заданы функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, то, решая сначала уравнения (2.6) или же (2.9) для потенциалов, можно вычислить поля \mathbf{B} и \mathbf{E} , создаваемые этими источниками, с помощью формул (2.1) и (2.2). Однако такие выражения для полей не являются самыми общими. В самом деле, если какие-либо источники находятся вне той области, в которой получено решение, то они все же могут создавать в ней поле. Соответствующие функции \mathbf{B} и \mathbf{E} должны в рассматриваемой области удовлетворять уравнениям (М) с $\mathbf{j} = 0$ и $\rho = 0$. Общее решение уравнений Максвелла выражается, таким образом, в виде суммы частного решения, найденного при заданных ρ и \mathbf{j} , и общего решения однородных уравнений Максвелла, как это и должно быть в случае системы линейных уравнений с частными производными.

Соображения, полностью аналогичные приведенным в начале этого параграфа, показывают, что решение уравнений Максвелла (М) при $\mathbf{j} = 0$ и $\rho = 0$ можно искать в виде

$$\mathbf{D} = -\operatorname{rot} \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^* - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}. \quad (2.10)$$

При этом \mathbf{A}^* следует считать псевдовектором, а φ^* — псевдоскаляром.

Из уравнений (М) следуют равенства

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}^* = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi^* = 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно ввести условие Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}^* + \frac{\varepsilon\mu}{\alpha} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

В случае, когда выполнены условия (1.27) с постоянными ϵ и μ , мы получим следующую запись общего решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} - \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} - \mu \text{grad } \varphi^*, \\ \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \text{rot } \mathbf{A}^*. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2. Рассмотрим теперь еще один метод решения уравнений Максвелла, который особенно удобен в том случае, когда они записываются в виде системы (М.1'), (М.2), (М.3), (М.4'), а функции \mathbf{j} и ρ можно считать равными нулю. При этом предположим, что поляризация \mathbf{P} и намагниченность \mathbf{M} удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} + \mathbf{M}_0. \quad (2.13)$$

Векторы \mathbf{P}_0 и \mathbf{M}_0 будем считать обусловленными не действием внешнего поля, но какими-либо особыми свойствами структуры рассматриваемой среды. Так, $\mathbf{P}_0 \neq 0$ для сегнетоэлектриков и пироэлектриков, а $\mathbf{M}_0 \neq 0$ для ферромагнетиков. Удобно описывать с помощью \mathbf{P}_0 и \mathbf{M}_0 также такие источники электромагнитного поля, которые встречаются в теории антенн. Учитывая (1.28), т. е. $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_0$, нашу систему уравнений Максвелла можно переписать (считая ϵ и μ постоянными) в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \text{div } \mathbf{P}_0, \quad (2.14_1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = -\frac{\mu_0}{\mu} \text{div } \mathbf{M}_0. \quad (2.14_2)$$

Обратим сначала внимание на уравнения (2.14₁). Предположим, что существует вспомогательное векторное поле $\mathbf{\Pi}$ (оно называется *вектором Герца*), которое удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \epsilon}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad \varphi = -\text{div } \mathbf{\Pi}. \quad (2.15)$$

При такой подстановке условие Лоренца (2.5) выполняется автоматически. Если при этом еще считать, что $\mathbf{M}_0 = 0$, так что $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, то поле \mathbf{H} также определится соотношением (2.1). Используя (2.1), (2.2) и (2.15), можно привести первое из уравнений (2.14₁) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \text{grad div } \mathbf{\Pi} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t}.$$

Таким образом, величина, заключенная в круглые скобки, может отличаться от $\frac{1}{\epsilon} \mathbf{P}_0$ только на слагаемое, равное произвольной функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, зависящей только от координат. Положим эту функцию

равной нулю. Тогда аналогичная подстановка показывает, что второе уравнение (2.14₁) удовлетворяется автоматически. Воспользовавшись формулой векторного анализа (Б.21), получим волновое уравнение для определения вектора Герца

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{\Pi} = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}_0. \quad (2.16)$$

Электромагнитное поле, полученное при перечисленных выше условиях, называется полем *электрического типа*.

Обратимся теперь к уравнениям (2.14₂) и предположим при этом, что $\mathbf{P}_0 = 0$. Тогда $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, а для определения векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} в этом случае воспользуемся формулами (2.10). Введем псевдовекторную величину $\mathbf{\Pi}^*$ (также называемую вектором Герца) так, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mu \varepsilon}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}, \quad \varphi^* = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}^* \quad (2.17)$$

(ясно, что \mathbf{A}^* и φ^* удовлетворяют при этом условию Лоренца). Подстановка в первое уравнение (2.14₂) формул (2.10) и (2.17) приводит на основании рассуждений, полностью подобных проведенным в предыдущем абзаце, к волновому уравнению для $\mathbf{\Pi}^*$ вида

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{\Pi}^* = -\frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{M}_0. \quad (2.18)$$

Электромагнитное поле, определенное при этих условиях, называется полем *магнитного типа*.

§ 3. Законы изменения энергии, импульса и момента импульса

3.1. Энергия. Уравнения Максвелла были сформулированы выше в самом общем виде. С их помощью можно сформулировать законы изменения величин, характеризующих механические свойства поля, которое взаимодействует с источниками в материальных средах. Ввиду общности рассмотрения этих величин их можно попытаться определить, руководствуясь, прежде всего, соображениями размерности.

Если размерность $[q]$ количества заряда установлена, то уравнение (1.1) вместе с уравнениями Максвелла приводят к следующим размерностям электрического и магнитного полей:

$$[D] = [q] \cdot [L^{-2}], \quad [H] = [D] \cdot [L] \cdot [T]^{-1} [\alpha]^{-1}. \quad (3.1)$$

Учитывая размерности векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , можно заключить, что

$$[ED] = [HB] = [F] [L]^2, \quad (3.2)$$

т. е. эти билинейные величины имеют размерность объемной плотности энергии независимо от выбора системы электромагнитных единиц. Поэтому можно ожидать, что с ними связано определение энергии \mathcal{E} поля. Закон же изменения энергии выводится с помощью уравнений Максвелла столь же автоматически, как, например, из уравнения Ньютона можно получить изменение энергии материальной точки.

Умножим обе стороны уравнения (М.3) скалярно на вектор \mathbf{H} , а обе стороны уравнения (М.4) — на вектор \mathbf{E} и после этого вычтем одно из другого. С помощью (Б.19) эта разность принимает вид

$$\alpha \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{jE} = 0. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.1) показывают, что величина $\alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ обладает размерностью $[\mathcal{E}] \cdot [L]^{-2} [T]^{-1}$. Рассмотрим объем V , ограниченный замкнутой поверхностью σ , проинтегрируем уравнение (3.3) по этому объему и применим в первом слагаемом теорему Остроградского — Гаусса. Мы получим интегральный аналог уравнения (3.3):

$$\alpha \oint [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \mathbf{n} d\sigma + \int \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int \mathbf{jE} dV = 0. \quad (3.4)$$

На основании (3.2) можно интерпретировать второе слагаемое в (3.4) как величину, выражающую изменение в единицу времени энергии поля, заключенного в рассматриваемом объеме. Член $\mathbf{E} \partial \mathbf{D} / \partial t$ определяется только свойствами электрического поля; поэтому естественно ожидать, что он равен скорости изменения объемной плотности $\partial \omega_e / \partial t$ «электрической энергии»; аналогичным образом величина $\mathbf{H} \partial \mathbf{B} / \partial t$ выражает изменение $\partial \omega_m / \partial t$ энергии магнитного поля, а сумма этих величин равна изменению $\partial \omega / \partial t$ объемной плотности полной энергии поля. Вывод соотношения (3.4) не зависит от каких-либо конкретных предположений о зависимостях $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Однако приращения $d\omega_e = \mathbf{E} d\mathbf{D}$, $d\omega_m = \mathbf{H} d\mathbf{B}$ и $d\omega = d\omega_e + d\omega_m$ не являются, вообще говоря, полными дифференциалами, так что нельзя указать явные выражения для ω_e , ω_m и ω . Если же выполняются уравнения (1.29) и $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ не зависят от времени, то, используя симметричность диэлектрической и магнитной проницаемостей по отношению к перестановке индексов, легко показать, что

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \mathbf{D}), \quad \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \mathbf{B}),$$

т. е.

$$\omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad \omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}, \quad \omega = \omega_e + \omega_m, \quad (3.5)$$

Рассматриваемый интеграл приобретает тогда смысл производной по времени от полной энергии электромагнитного поля, заключенной в объеме V . Такая интерпретация предоставляет ключ для понимания физического смысла также и остальных двух слагаемых, содержащихся в уравнении (3.4). Действительно, поверхностный интеграл выражает поток электромагнитной энергии, проходящий сквозь поверхность σ , причем его плотность и направление в каждой точке этой поверхности определяются вектором Умова — Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (3.6)$$

Наконец, последнее слагаемое в (3.4) равно работе, затрачиваемой в единицу времени электромагнитным полем на создание токов проводимости в рассматриваемом объеме. Частично этот член ответствен за обычно возникающие тепловые эффекты (см. § 33), поэтому несколько неточно это слагаемое называется *джоулевым теплом*.

Таким образом, уравнение (3.4) имеет смысл закона изменения энергии электромагнитного поля (а (3.3) — плотности этой энергии): энергия может изменяться только за счет создания джоулева тепла и потока энергии через граничную поверхность σ . Нужно иметь в виду, однако, что энергия поля может переходить в различные другие виды энергии: механическую, химическую, тепловую, а также возникать в результате превращения этих видов энергии. Поэтому, если в рассматриваемом объеме такие процессы происходят, то это должно учитываться включением в левую часть дополнительного слагаемого $d\mathcal{E}^{(cr)}/dt$, выражающего участие энергии $\mathcal{E}^{(cr)}$ «сторонних» источников в общем энергетическом балансе. Правда, часть таких факторов, а именно те из них, которые связаны с работой «сторонних» источников, затрачиваемой на перемещение зарядов, уже учтены в джоулевом тепле \mathbf{jE} . Действительно, как было упомянуто в § 1, ток \mathbf{j} обычно может быть представлен в виде $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(cr)}$, где член $\mathbf{j}^{(cr)}$ обусловлен действием на заряды сил неэлектромагнитного происхождения. Когда закон Ома выполняется, часто пользуются также записью $\mathbf{j}^{(cr)} = \sigma\mathbf{E}^{(cr)}$; это уравнение, разумеется, представляет собой просто определение вектора $\mathbf{E}^{(cr)}$. То обстоятельство, что выражение для тока может иметь такую структуру, будем иметь в виду и в дальнейших рассуждениях настоящего параграфа.

3.2. Импульс и момент импульса. Перейдем теперь к выводу с помощью уравнений Максвелла закона изменения импульса электромагнитного поля.

Рассмотрим, прежде всего, величину $(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{D}$. Из определений операции rot (см. (Б.10) и (Б.11)) и векторного произведения (Б.3) следует, что

$$[(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{D}]_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\delta\zeta} \frac{\partial E_{\zeta}}{\partial x^{\delta}} D_{\gamma}.$$

С помощью первой из формул (Б.1) произведем суммирование по индексу β . Результат примет вид

$$\begin{aligned} [(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{D}]_{\alpha} &= \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} D_{\gamma} - \frac{\partial E_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} D_{\gamma} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (E_{\alpha} D_{\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{E} \mathbf{D}) + \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^{\gamma}} - E_{\alpha} \text{div } \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Предположим теперь, что выполняются соотношения (1.29) с $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$, не зависящими от координат *). В этом случае, как мы видели выше, $\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (\mathbf{E} \mathbf{D})$. Используя, кроме того, уравнение (М.1), получим

$$[(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{D}]_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left(E_{\alpha} D_{\gamma} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{E} \mathbf{D} \right) - \rho E_{\alpha}. \quad (3.8)$$

Ясно, что величина

$$T_{\alpha\gamma}^{(e)} = E_{\alpha} D_{\gamma} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad (3.9)$$

является по отношению к трехмерным вращениям тензором второго ранга. Этот тензор при наших предположениях не обязательно симметричен ($E_{\alpha} D_{\gamma} = \epsilon_{\gamma\delta} E_{\alpha} E_{\delta} \neq \epsilon_{\alpha\delta} E_{\gamma} E_{\delta}$).

Совершенно аналогичное преобразование приводит с помощью (1.29) к результату

$$[(\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{B}]_{\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\gamma}^{(m)}}{\partial x^{\gamma}} \quad (3.10)$$

(при этом учтено, что $\text{div } \mathbf{B} = 0$). Здесь

$$T_{\alpha\gamma}^{(m)} = H_{\alpha} B_{\gamma} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{H} \mathbf{B}. \quad (3.11)$$

Тензор $T_{\alpha\gamma} = T_{\alpha\gamma}^{(e)} + T_{\alpha\gamma}^{(m)}$ называется *тензором натяжений Максвелла*, $T_{\alpha\gamma}^{(e)}$ — его электрической, а $T_{\alpha\gamma}^{(m)}$ — магнитной частью.

Образум теперь векторное произведение, умножив обе стороны уравнения Максвелла (М.4) на вектор \mathbf{B} , а уравнения (М.3) — на вектор \mathbf{D} . Сложение полученных результатов приводит, с применением (3.8), (3.9) и (3.10), к соотношению

$$\frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]_{\beta} + \rho E_{\beta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \times \mathbf{B}]_{\beta}. \quad (3.12)$$

При его физической интерпретации можно руководствоваться тем фактом, что $\rho \mathbf{E}$ представляет собой объемную плотность силы, действующей со стороны электрического поля на заряды. По ана-

*) Не следует, разумеется, в дальнейшем путать диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta}$ с псевдоскаляром $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$!

логии с этим имеющую ту же размерность величину $\frac{1}{\alpha} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, полностью определяемую распределением токов \mathbf{j} и магнитной индукцией \mathbf{B} , нужно понимать как силу, с которой магнитное поле действует на токи *). Полная объемная плотность сил называется плотностью *силы Лоренца*:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \rho \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

По определению механического импульса \mathbf{p} , следует считать, что

$$\mathbf{f} = \partial \mathbf{p} / \partial t. \quad (3.14)$$

Но аналогичную структуру имеет и последнее слагаемое в правой части (3.12). Так как оно вполне определяется векторами \mathbf{D} и \mathbf{B} , можно сделать вывод, что векторное произведение

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{D} \times \mathbf{B}] \quad (3.15)$$

выражает *объемную плотность импульса электромагнитного поля*. Уравнение (3.12) принимает в этих обозначениях вид

$$\frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} + \mathbf{g})_\beta. \quad (3.16)$$

В частном случае, когда выполняются условия (1.27), вектор \mathbf{g} пропорционален вектору \mathbf{S} Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{g} = \frac{1}{v^2} \mathbf{S} \quad (3.17)$$

(здесь использованы соотношения (1.25) и (1.28'); ясно, что для поля в вакууме $v = c$).

Теперь рассмотрим левую часть (3.12). Проинтегрируем ее по объему V , ограниченному поверхностью σ . Полученный интеграл с помощью теоремы Остроградского — Гаусса преобразуем в поверхностный. Подынтегральное выражение в поверхностном интеграле имеет вид

$$\Phi_\beta = T_{\beta\gamma} n^\gamma. \quad (3.18)$$

Размерность вектора Φ равна размерности силы, отнесенной к единице поверхности. Отсюда виден также и смысл тензора натяжения $T_{\beta\gamma}$. Он устанавливает линейное соотношение между вектором силы в данной точке поверхности σ и единичным вектором нормали к поверхности в этой точке. Если поверхность σ не зависит от времени, то, приравнявая рассмотренный только что интеграл от левой

*) Разумеется, в дальнейшем такая интерпретация должна быть проверена на конкретных примерах (см., например, § 12).

части (3.12) объемному интегралу от правой части этого равенства, получим результат

$$\oint \varphi d\sigma = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{p} + \mathbf{g}) dV, \quad (3.19)$$

представляющий собой закон изменения импульса. Именно, скорость изменения полного импульса поля, зарядов и токов, заключенных в некотором объеме, равна полной силе, действующей на граничную поверхность, или, что то же самое, — потоку импульса. Аналогично тому, что было отмечено в связи с законом изменения энергии (см. стр. 30), в объеме V может происходить изменение других видов импульса благодаря тому, что заряды и токи могут подвергаться действию сил неэлектромагнитного происхождения. В этом случае нужно добавить в правой части равенства (3.19) изменение импульса $dP^{(c1)}/dt$, а в левой — поверхностную плотность сил $\varphi^{(c1)}$, соответствующие этим «сторонним» воздействиям.

После того как определен импульс, становится очевидным, что поле обладает также и моментом импульса. Действительно, плотность момента импульса, обусловленная полем, а также токами и зарядами, согласно общим правилам механики, измеряется выражением $\tilde{m} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} + \mathbf{g})$. При этом \mathbf{r} не зависит от времени, будучи радиусом-вектором фиксированного элемента объема. Умножая обе стороны дифференциального закона изменения импульса векторно на радиус-вектор \mathbf{r} , получим соотношение

$$\varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma \frac{\partial T^{\delta\zeta}}{\partial x^\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma (\mathbf{p} + \mathbf{g})^\delta = \frac{\partial \tilde{m}^\beta}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Но

$$\varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma \frac{\partial T^{\delta\zeta}}{\partial x^\zeta} = \varepsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\zeta} (x^\gamma T^{\delta\zeta}) - \delta_{\gamma\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} T^{\delta\zeta} = \frac{\partial}{\partial x^\zeta} (\varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma T^{\delta\zeta}) - \varepsilon_{\beta\gamma\delta} T^{\delta\gamma}.$$

Если тензор натяжений симметричен ($T^{\delta\gamma} = T^{\gamma\delta}$), то последнее слагаемое тождественно равно нулю. Тогда выполняется уравнение

$$\frac{\partial \pi_{\beta\zeta}}{\partial x^\zeta} = \frac{\partial \tilde{m}^\beta}{\partial t}, \quad (3.21)$$

где $\pi_{\beta\zeta} = \varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma T^{\delta\zeta}$. Физический смысл этого тензора можно определить, если проинтегрировать его по объему и воспользоваться теоремой Остроградского — Гаусса в форме (Б.23'):

$$\int \frac{\partial \pi_{\beta\zeta}}{\partial x^\zeta} dV = \oint \varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma T^{\delta\zeta} n_\zeta d\sigma = \oint \varepsilon_{\beta\gamma\delta} x^\gamma \varphi^\delta d\sigma = \oint [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}]_\beta d\sigma.$$

Здесь применено соотношение (3.18). Мы получили полный момент поверхностных сил, действующих на границу σ рассматриваемого объема (он же — поток момента импульса). Окончательно закон

изменения момента импульса принимает следующий интегральный вид:

$$\frac{d}{dt} \int \tilde{m} dV = \oint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi} d\sigma. \quad (3.22)$$

Здесь также может оказаться необходимым учет действия «сторонних» сил.

В дальнейшем (см. § 9) законы сохранения будут рассмотрены с более общей точки зрения. При этом мы воспользуемся вариационным принципом и изучим связь этих законов со свойствами инвариантности поля по отношению к преобразованиям различного типа. Заметим, что в однородных средах все законы сохранения выполняются в форме (3.3), (3.12) и (3.21), причем плотность энергии определяется уравнением (3.5), а тензор натяжений — уравнениями (3.9) и (3.11).

§ 4. Замечания о математических свойствах уравнений Максвелла. Единственность решения в ограниченной области. Условия на границе двух сред

4.1. Математические свойства системы уравнений Максвелла, разумеется, существенно зависят от того, какие предположения сделаны в отношении функциональных зависимостей $P(\mathbf{E})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ (или $\mathbf{M}(\mathbf{H})$). В простейшем случае однородной изотропной среды при известной зависимости источников ρ и \mathbf{j} от координат и времени уравнения (М) сводятся, как мы видели, к волновым уравнениям вида (2.6) для потенциалов, решение которых при заданных граничных и начальных условиях будет нами рассмотрено в § 13. Применим теперь операцию rot к обеим сторонам уравнений (М.3) и (М.4). Если использовать формулу (Б.21), а также остальные уравнения Максвелла, то легко показать, что напряженности удовлетворяют в декартовых координатах волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} &= \frac{\mu}{\alpha^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \rho, \\ \left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} &= -\frac{\mu}{\alpha} \text{rot } \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Необходимо иметь в виду, что решение уравнений (2.6) эквивалентно решению уравнений Максвелла первого порядка, в то время как (4.1) представляет собой лишь необходимое следствие последних. Частный вид уравнений (4.1) в пространстве, свободном от источников, мы уже использовали в § 1 в форме (1.24).

Большой интерес представляет с физической точки зрения исследование таких сред, для которых выполняются соотношения (1.29), где $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ являются функциями координат и времени. В некоторых случаях при этом можно предполагать, что векторы

индукции в точке \mathbf{r} в момент времени t зависят от напряженностей, заданных в той же точке и в тот же момент времени. Тогда для векторов поля можно получить дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Однако обычно следует учитывать явления дисперсии, выражающиеся в том, что значения индукции в точке \mathbf{r} и в момент времени t зависят также от значений напряженностей в более ранние моменты времени (это явление называется *частотной дисперсией*) и напряженностей, существующих в других точках среды (*пространственная дисперсия*). В этом случае, записывая соотношения вида (1.29), нужно считать $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ операторами, которые, действуя, например, на напряженность \mathbf{E} , превращают ее в индукцию \mathbf{D} . Во многих случаях эти операторы являются линейными и интегральными, так что (1.29) принимает, например, вид

$$D_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int dV \epsilon_{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_{\beta}(\mathbf{r}', t'). \quad (4.2)$$

Уравнения же Максвелла становятся при этом интегродифференциальными. Подставляя в (4.2) разложение в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = \int d\omega \int d\mathbf{k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t')} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.3)$$

и аналогичное разложение для \mathbf{D} , можно привести равенство (4.2) к виду

$$D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.4)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ — коэффициенты Фурье для функций $\epsilon_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r})$. В дальнейшем (см. § 39) мы еще вернемся к проблеме дисперсии. Отметим, однако, уже здесь, что при этом необходимо учитывать и затухание электромагнитного поля в среде, которое, как мы увидим, проявляется в том, что вектор \mathbf{k} нужно считать комплексным. Поэтому изучение дисперсии тесно связано с рассмотрением тензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ методами теории функций комплексной переменной.

Наконец, если зависимости $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ нелинейны, то уравнения Максвелла приобретают характер нелинейных дифференциальных (без учета дисперсии) или же нелинейных интегродифференциальных уравнений (с ее учетом). В § 1 уже упоминалось, что нелинейная зависимость $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ имеет место для ферромагнитных сред, а зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ нелинейна для сегнетоэлектриков. Кроме того, эти зависимости могут становиться нелинейными в том случае, когда поля \mathbf{B} и \mathbf{E} достаточно сильны, хотя бы даже среда обладала линейными свойствами по отношению к слабым полям. В связи с технической возможностью создания столь сильных полей, например, лазерными источниками, такие случаи приобрели большой физический интерес в недавнее время и служат

предметом изучения в нелинейной оптике (см. § 41). В нелинейном случае принцип суперпозиции не выполняется.

Итак, с математической точки зрения свойства уравнений Максвелла могут быть чрезвычайно разнообразными в зависимости от свойств тех сред, электромагнитные свойства которых подлежат изучению. Весьма различны и математические методы, применяемые для их решения.

4.2. Рассмотрим две теоремы, необходимые для дальнейшего. Одна из них применима для однородных сред, другая же описывает свойства решений уравнений Максвелла в общем случае.

Покажем, что решения уравнений Максвелла в однородной среде единственным образом определяются с помощью задания граничных и начальных условий. Рассмотрим ограниченный объем пространства. Если среда однородна, то, как было показано в § 3, закон сохранения энергии имеет вид

$$\alpha \oint [E \times H] n d\sigma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (ED + HB) dV + \int jE dV = 0. \quad (4.5)$$

Пусть, для определенности, выполняется и закон Ома в форме $j = \sigma E$. «Материальные константы» σ , $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ всегда неотрицательны. Поэтому всегда неотрицательны и подинтегральные выражения jE , ED и HB . Первый интеграл и производная по времени от второго могут, разумеется, принимать как положительные, так и отрицательные значения. Предположим теперь, что найдены два решения уравнений Максвелла E_1 , H_1 и E_2 , H_2 , принимающие на поверхности σ одинаковые значения, т. е. удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям:

$$E_1|_{\sigma} = E_2|_{\sigma}, \quad H_1|_{\sigma} = H_2|_{\sigma}, \quad (4.6)$$

и одинаковым начальным условиям:

$$E_1|_{t=t_0} = E_2|_{t=t_0}, \quad H_1|_{t=t_0} = H_2|_{t=t_0}. \quad (4.7)$$

Так как при наших предположениях принцип суперпозиции имеет место, векторные поля $E = E_1 - E_2$ и $H = H_1 - H_2$ будут также решением уравнений Максвелла. Это решение, как показывают уравнения (4.6) и (4.7), удовлетворяет нулевым граничным и начальным условиям:

$$E|_{\sigma} = 0, \quad H|_{\sigma} = 0, \quad E|_{t=t_0} = 0, \quad H|_{t=t_0} = 0. \quad (4.8)$$

Но для полей E и H должен выполняться закон сохранения энергии (4.5). При этом первое слагаемое в (4.5) равно нулю благодаря первым двум условиям (4.8). Проинтегрировав остальные два слагаемых по времени от начального момента t_0 до произвольного момента t , получим соотношение

$$\left[\frac{1}{2} \int (ED + HB) dV \right]_{t=t_0}^t = \frac{1}{2} \left[\int (ED + HB) dV \right]_t = - \int_{t_0}^t dt' \int dV jE.$$

Первое из этих равенств является следствием начальных условий (4.8). Правая часть выведенного соотношения неположительна, левая же — неотрицательна. Поэтому они равны лишь в том случае, когда обе обращаются в нуль, что в свою очередь возможно только при $E = 0$ и $H = 0$, т. е. при $E_1 = E_2$ и $H_1 = H_2$.

Если поле рассматривается в бесконечном объеме, то его свойства следует изучать с помощью равенства (4.5) в пределе, когда граничная поверхность σ неограниченно расширяется. Единственность решения зависит от поведения интегралов в этом пределе, которое в свою очередь определяется характером поведения функций E и H при $|r| \rightarrow \infty$. Если эти граничные свойства соответствуют, например, так называемому условию излучения (см. § 20), то решения уравнений Максвелла обладают свойством единственности и в бесконечном объеме.

Теперь рассмотрим тот случай, когда электромагнитные свойства среды различны по обе стороны некоторой поверхности σ , которая с макроскопической точки зрения является бесконечно тонкой. Будем считать, что по одну сторону от этой поверхности находится среда I, а по другую — среда II.

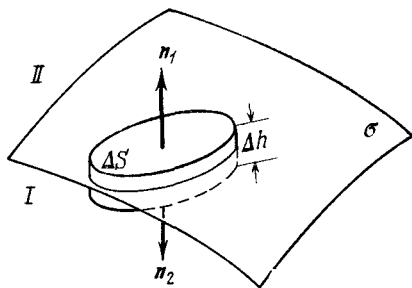


Рис. 1.

Векторы E , D , B и H будем, в соответствии с этим, отмечать значками I или II в зависимости от того, в какой из этих сред рассматриваются свойства поля. При этом обычно можно предположить, что сами векторы поля при переходе через границу двух сред конечны, а производные их по времени изменяются непрерывно. Уравнения Максвелла в интегральной форме (M') позволяют тогда сделать определенные выводы о том, как связаны между собой значения векторов поля при переходе через границу раздела.

Прежде всего, применим уравнение ($M'.1$) к объему, ограниченному цилиндрической поверхностью, верхнее основание которой находится в среде II, а нижнее — в среде I, причем они достаточно малы, чтобы их можно было считать с хорошей точностью параллельными участку поверхности σ , выделяемому тем же цилиндром (рис. 1). Пусть ΔS — площадь основания цилиндра, а Δh — его высота. В этом случае полный заряд, заключенный внутри цилиндра, равен $q = \rho \Delta h \Delta S$ (с точностью до величин более высокого порядка малости), причем ρ — значение плотности заряда в некоторой точке внутри цилиндра. Предположим, что площадь ΔS настолько мала, что значение вектора D можно считать постоянным на каждом из оснований. В этом случае, с точностью до бесконечно

малых более высокого порядка, из (M'.1) получим равенство

$$\Delta S (D^{II}n_1 + D^I n_2) + \text{интеграл по боковой поверхности} = \rho \Delta h \Delta S.$$

Боковая поверхность пропорциональна Δh . Устремим теперь Δh к нулю (это фактически означает, что площадь боковой поверхности мы считаем бесконечно малой высшего порядка по сравнению с ΔS). При этом будем считать, что $\rho \rightarrow \infty$, но выполняется условие, при котором предел $\lim_{\rho \rightarrow \infty, \Delta h \rightarrow 0} \rho \Delta h \equiv \lambda$ остается конечным.

Ясно, что величину λ следует назвать *поверхностной плотностью* заряда на поверхности σ в той точке, к которой стягивается цилиндрическая поверхность. Если ρ непрерывна в этой точке, то $\lambda = 0$. Учитывая все эти обстоятельства и обозначая $n_1 = n$, $n_2 = -n$, мы приходим к результату

$$(D^{II} - D^I) n = \lambda. \quad (4.9)$$

Здесь n_1 и n_2 — внешние нормали к цилиндрической поверхности σ , которые используются при вычислении потока вектора в теореме Остроградского — Гаусса, а n — направление перехода из среды I в среду II, т. е. вектор нормали к поверхности σ , направленный из среды I в среду II.

Обратимся теперь к уравнению (M.4) и выберем контур интегрирования в левой части этого уравнения в виде бесконечно малого прямоугольника (рис. 2), верхняя сторона которого проходит в среде II, нижняя —

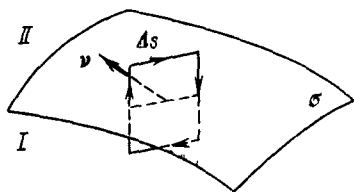


Рис. 2.

в среде I и обе они направлены параллельно некоторой касательной к поверхности σ . Обозначим через Δs длину каждой из этих сторон, а Δl — длину остальных двух сторон контура. Пусть $s_1 = s$, $s_2 = -s$, где s — единичный вектор касательной к поверхности σ . Тогда, считая, что Δl стремится к нулю быстрее, чем Δs , уравнение (M'.4) можно, с точностью до величин более высокого порядка малости, записать в виде *)

$$(H^{II} - H^I) s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\partial D_v}{\partial t} + j_v \right) \Delta l.$$

Определим поверхностную плотность тока условием

$$i = \lim_{j \rightarrow \infty, \Delta l \rightarrow 0} j \Delta l.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю благодаря предположению о непрерывности производной $\partial D/\partial t$. Итак,

$$(H^{II} - H^I) s = i_v. \quad (4.10)$$

*) Направление вектора v связано с обходом контура по правилу правого винта, как изображено на рис. 2.

Применив соображения, совершенно аналогичные предыдущим, к уравнениям (M'.2) и (M'.3), получим результат:

$$(\mathbf{E}^{\text{II}} - \mathbf{E}^{\text{I}}) \mathbf{s} = 0, \quad (4.11)$$

$$(\mathbf{B}^{\text{II}} - \mathbf{B}^{\text{I}}) \mathbf{n} = 0. \quad (4.12)$$

Уравнения (4.9) — (4.12) называются *граничными условиями* или *условиями сопряжения* векторов поля по обе стороны границы раздела двух сред. В этой форме они, однако, не определяют полностью характера перехода из одной среды в другую. Так, например, неизвестно поведение тангенциальных составляющих вектора \mathbf{B} , нормальной составляющей вектора \mathbf{E} и т. д. Недостающие сведения можно получить лишь в том случае, когда известны дальнейшие свойства сред I и II, например, в форме соотношений (1.11) и (1.17) с заданными поляризациями и намагнитченностями. Из общих граничных условий (4.9) — (4.12) следует:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 (\mathbf{E}^{\text{II}} - \mathbf{E}^{\text{I}}) \mathbf{n} &= \lambda + (\mathbf{P}^{\text{I}} - \mathbf{P}^{\text{II}}) \mathbf{n}, \\ (\mathbf{B}^{\text{II}} - \mathbf{B}^{\text{I}}) \mathbf{s} &= \mu_0 i_v + \mu_0 (\mathbf{M}^{\text{II}} - \mathbf{M}^{\text{I}}) \mathbf{s}, \\ (\mathbf{D}^{\text{II}} - \mathbf{D}^{\text{I}}) \mathbf{s} &= (\mathbf{P}^{\text{II}} - \mathbf{P}^{\text{I}}) \mathbf{s}, \\ (\mathbf{H}^{\text{II}} - \mathbf{H}^{\text{I}}) \mathbf{n} &= (\mathbf{M}^{\text{I}} - \mathbf{M}^{\text{II}}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Эти соотношения упрощаются для того случая, когда имеют место соотношения (1.27), т. е. для изотропных сред, и принимают вид

$$\begin{aligned} (\epsilon^{\text{II}} \mathbf{E}^{\text{II}} - \epsilon^{\text{I}} \mathbf{E}^{\text{I}}) \mathbf{n} &= \lambda, \\ \left(\frac{1}{\mu^{\text{II}}} \mathbf{B}^{\text{II}} - \frac{1}{\mu^{\text{I}}} \mathbf{B}^{\text{I}} \right) \mathbf{s} &= i_v, \\ \frac{1}{\epsilon^{\text{II}}} \mathbf{D}^{\text{II}} \mathbf{s} &= \frac{1}{\epsilon^{\text{I}}} \mathbf{D}^{\text{I}} \mathbf{s}, \\ \mu^{\text{II}} \mathbf{H}^{\text{II}} \mathbf{n} &= \mu^{\text{I}} \mathbf{H}^{\text{I}} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Они используются, например, при изучении отражения и преломления электромагнитных волн (ср. § 18).

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 5. Принцип относительности. Преобразования Лоренца
и основы релятивистской кинематики

5.1. Наблюдатели, изучающие электромагнитное поле, могут находиться в различных системах отсчета, отличающихся одна от другой относительным движением. Формулировка законов электромагнетизма, изложенная в главе 1, целиком основана на предположении, что существуют такие системы отсчета, в которых эти законы подтверждаются физическими измерениями. Основой всякого эксперимента является умение измерять пространственные расстояния и промежутки времени. Тогда могут быть определены и кинематические характеристики движения любого материального тела: его скорость и ускорение в данной системе отсчета.

Так как всякая система отсчета связана с некоторым материальным телом и приборами, служащими для измерений, то естественным образом можно определить класс *инерциальных* систем отсчета. В этот класс входят системы, обладающие тем свойством, что любые две из них движутся относительно друг друга с постоянной скоростью. С точки зрения наблюдения физических событий всякая инерциальная система характеризуется следующими свойствами.

1. При отсутствии сил тело в инерциальной системе движется прямолинейно и равномерно (фактически в этом заключается основа для определения понятия механической силы).

2. Измеряемая в инерциальной системе скорость c электромагнитного поля в вакууме не зависит от скорости движения источника этого поля относительно наблюдателя (принцип независимости скорости света в вакууме от движения источника *).

Класс инерциальных систем занимает особое положение среди всех возможных систем отсчета. А именно, физические законы могут быть сформулированы так, чтобы не зависеть от того, в какой из инерциальных систем они рассматриваются. Другими словами, должен выполняться *принцип относительности*: равномерное и прямолинейное движение системы как целого не влияет на ход

*) Это второе требование, которое отсутствовало в классической механике, не учитывавшей электромагнитных явлений, было впервые введено Эйнштейном в 1905 г.

процессов, происходящих внутри системы, т. е. законы физических процессов одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим две инерциальные системы: систему K и систему K' ; движущуюся относительно K с постоянной скоростью v . Пусть в системе K используются декартовы координаты x^1, x^2, x^3 и время t , а в системе K' — декартовы координаты $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ и время t' . Для того чтобы определить, как связаны между собой уравнения, выражающие любой физический закон с точки зрения систем K и K' , необходимо прежде всего выяснить связь пространственных и временных измерений x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) и $x^{i'}$ ($i' = 0', 1', 2', 3'$); при этом удобно обозначить $x^0 = ct$ и $x^{0'} = ct'$. С математической точки зрения задача заключается в определении возможного вида функций:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (5.1)$$

причем нужно использовать сформулированные выше свойства инерциальных систем и принцип относительности *). Функции $f^{i'}$ должны быть такими, чтобы уравнение (5.1) можно было разрешить относительно переменных x^i (т. е. чтобы существовало обратное преобразование). Кроме того, нужно как-то ограничить тот класс функций, в котором следует искать решение (естественно, например, предположить, что эти функции по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы). Одно из важных ограничений возможного вида связи между переменными $x^{i'}$ и x^i вытекает из принципа независимости скорости света в вакууме от движения источника. В самом деле, если точки испускания и последующего поглощения света по измерениям, произведенным в системе K , отделены расстоянием dr и этот процесс происходит за время dt , то соответствующие измерения в системе K' должны привести к результатам dr' и dt' . Но скорость распространения света c , в соответствии с упомянутым принципом, в обеих системах одинакова. Другими словами, из равенства $c^2 dt^2 = dr^2$ должно следовать равенство $c^2 dt'^2 = dr'^2$, и обратно. Решение математической задачи определения возможного вида функций $f^{i'}$ на основе указанных физических принципов **) приводит к теореме о том, что эти функции могут быть только линейными, т. е. они должны иметь вид

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + a^{i'}, \quad x^i = A_i^i x^{i'} + a^i, \quad (5.2)$$

*) Наше изложение теории относительности служит в основном лишь в качестве сводки для дальнейшего использования. Оно не может заменить основного изучения предмета, для которого следует обратиться к специальным руководствам. Наиболее строгое изложение можно найти в книге В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения» (Физматгиз, 1961), гл. I и II. См. также В. А. Угаров, Специальная теория относительности, «Наука», 1977.

**) См. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961, § 8.

причем коэффициенты A_i^i , A_i^j и величины a^i , a^j постоянны. Если же выполняются соотношения (5.2), то принцип независимости скорости света от движения источника приводит к равенству

$$c^2 dt'^2 - dr'^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \quad (5.3)$$

(независимо от того, обращается ли эта квадратичная форма в нуль или нет). Величина $ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dr^2$, таким образом, инвариантна относительно преобразования (5.2). Она называется *пространственно-временным интервалом* между двумя событиями, а преобразования (5.2) — *преобразованиями Лоренца*. Величины a^i характеризуют возможный сдвиг начала отсчета измерений пространственных координат и времени в одной системе по отношению к другой. Положим пока $a^i = 0$, ограничиваясь такими инерциальными системами, прямолинейные траектории которых определяются тем условием, что в некоторый (общий для всех этих систем) начальный момент времени совпадают их начала отсчета пространственных координат.

5.2. Если использовать геометрическую терминологию (см. Приложение А), то на основании сказанного выше мы видим, что принцип относительности определяет геометрию четырехмерного пространственно-временного многообразия как псевдоевклидову геометрию, в которой инвариантное скалярное произведение выражается формулой (А.14), где $N = 4$ и $k = 1$ (ясно, что геометрические соотношения будут точно такими же, если положить $N - k = 1$ и $k = 3$). Интервал ds^2 интерпретируется, таким образом, как квадрат длины четырехмерного «радиуса-вектора», характеризующий «пространственно-временное расстояние» между соответствующими физическими событиями, не зависящее от выбора инерциальной системы отсчета. Коэффициенты преобразований Лоренца связаны при этом уравнениями (А.11), поэтому однородное преобразование Лоренца может зависеть, вообще говоря, от шести линейно независимых параметров (а самое общее, неоднородное, преобразование при $a^i \neq 0$ — от десяти). Геометрический смысл этих параметров очевиден: так как преобразование Лоренца представляет собой, как видно из предыдущего, вращение в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, оставляющее инвариантным интервал ds^2 , то оно может быть разложено на шесть независимых вращений по числу взаимно ортогональных плоскостей четырехмерного пространства. Ясно, что совокупность преобразований Лоренца образует группу. Обычные вращения трехмерного евклидова пространства (определяемые условиями $dr^2 = dr'^2$ и $dt = dt'$), очевидно, также удовлетворяют определению преобразований Лоренца; они составляют подгруппу группы Лоренца.

Итак, если руководствоваться геометрической картиной, то мы видим, что всякой инерциальной системе отсчета следует сопо-

ставить некоторую систему базисных векторов \vec{e}_i в псевдоевклидовом пространстве R_4^* *) указанной выше структуры, нормированных так, как в уравнении (A.13), т. е.

$$\vec{e}_0^2 = 1, \quad \vec{e}_\alpha^2 = -1, \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (5.4)$$

Переходу к новой инерциальной системе соответствует поворот векторов \vec{e}_i в пространстве R_4^* , переводящий их в векторы $\vec{e}_{i'}$, сопоставленные этой новой системе, т. е. преобразование

$$\vec{e}_{i'} = A_i^i \vec{e}_i, \quad \vec{e}_i = A_i^{i'} \vec{e}_{i'} \quad (5.5)$$

(ср. (A.2)). При этом коэффициенты преобразования Лоренца должны быть подчинены уравнениям (A.11)

$$g_{ij} A_i^i A_j^{j'} = g_{i'j'} \quad \text{или} \quad g^{ij} A_i^{i'} A_j^{j'} = g^{i'j'}. \quad (5.6)$$

Здесь $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ и $g_{i'j'} = (\vec{e}_{i'}, \vec{e}_{j'})$, а потому $g_{00} = 1$, $g_{\alpha\alpha} = -1$, $g_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Всякое преобразование Лоренца может быть разложено на некоторые трехмерные вращения и преобразование, переводящее базисные векторы \vec{e}_0, \vec{e}_1 соответственно в векторы $\vec{e}_{0'}, \vec{e}_{1'}$ и не затрагивающее остальных базисных векторов (оно называется *частным* преобразованием Лоренца). Ясно, что именно последнее представляет, с нашей точки зрения, интерес, так как свойства трехмерных вращений можно считать хорошо известными.

Мы не будем приводить доказательства этого утверждения **), а поступим следующим образом. Ясно, что преобразование, при котором выполняются равенства $x^2 = x^{2'}$ и $x^3 = x^{3'}$, причем $(dx^0)^2 - (dx^1)^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{1'})^2$, сохраняет пространственно-временной интервал и является частным преобразованием Лоренца. Определить коэффициенты этого преобразования нетрудно. После того как это будет сделано, мы покажем, как с помощью этих коэффициентов выражается преобразование Лоренца общего вида.

Уравнения (5.6) в указанном двумерном случае принимают форму

$$(A_0^0)^2 - (A_0^1)^2 = 1, \quad (A_1^0)^2 - (A_1^1)^2 = -1, \quad A_0^0 A_1^0 = A_0^1 A_1^1. \quad (5.7)$$

Решение этих уравнений может быть выражено через параметр $\beta = A_0^1/A_0^0 = A_1^0/A_1^1$. В результате уравнения (A.5) для преобразования координат приобретают вид

$$x^{0'} = \frac{x^0 + \beta x^1}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{x^1 + \beta x^0}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad (5.8)$$

*) Стрелками обозначаются векторы в четырехмерном пространстве.

**) См., например, П. К. Раешевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, 1953, § 48.

причем знаки плюс или минус можно выбирать в первых двух формулах независимо. Коэффициенты преобразования (5.8) можно записать в виде матрицы

$$(A_i^{i'}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.8')$$

где $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Этим обозначением мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Остановимся сначала на том случае, когда выбраны оба знака плюс. Прежде всего можно определить физический смысл параметра β . Рассмотрим в системе K движение той точки, координаты $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ которой в системе K' фиксированы. Записывая соотношения между дифференциалами координат, следующие из (5.8), получим уравнения движения этой точки в системе отсчета K :

$$\frac{dx^1}{dx^0} = -\beta, \quad \frac{dx^2}{dx^0} = 0, \quad \frac{dx^3}{dx^0} = 0.$$

Отсюда видно, что $\beta = \mp v/c$, где v — скорость точки, фиксированной в системе K' (т. е. самой системы K') относительно системы K . Знак минус следует выбрать, если эта скорость направлена одинаково с осью x^1 , а знак плюс в противоположном случае. Преобразования, обратные (5.8), имеют совершенно аналогичный вид, с заменой x^0 на $x^{0'}$, x^1 — на $x^{1'}$, и обратно, а также β на $-\beta$.

Для движения фиксированной в системе K' точки первое из уравнений (5.8) принимает вид

$$dx^{0'} = \sqrt{1 - \beta^2} dx^0. \quad (5.9)$$

Смысл полученного соотношения состоит в том, что если часы, находящиеся в этой точке в системе K' , измеряют промежуток времени $dx^{0'}$, то по часам системы K точка системы K' движется от своего положения в системе K , соответствующего началу промежутка времени $dx^{0'}$, до положения, соответствующего его концу, за время dx^0 . Таким образом, это соотношение выражает релятивистский эффект замедления времени.

Пусть теперь два физических события одновременны в системе K , т. е. для них $dx^0 = 0$. Обозначим dx^1 пространственное расстояние между ними в этой системе (это означает, что начало и конец пространственного расстояния измеряются в один и тот же момент времени). Тогда, согласно (5.8):

$$dx^1 = \sqrt{1 - \beta^2} dx^{1'}, \quad (5.10)$$

где $dx^{1'}$ — расстояние между теми же событиями в системе K' . Мы получили выражение для релятивистского эффекта сокращения масштабов. Отсюда, а также из того, что $dx^{2'} = dx^2$ и $dx^{3'} = dx^3$,

сразу следует правило преобразования трехмерного объема:

$$dV = \sqrt{1 - \beta^2} dV'. \quad (5.10')$$

Нужно подчеркнуть, что смысл этого соотношения состоит в следующем. Если непрерывное множество точечных физических событий, происходящих в состоянии покоя относительно системы K' , заполняет в этой системе отсчета трехмерный объем dV' , то измерения трехмерных положений этих событий, произведенные в системе K в один и тот же момент времени по часам этой системы, заполнят трехмерный объем dV .

Ясно, что оба рассмотренных эффекта являются проявлением инвариантности пространственно-временного интервала.

Возвращаясь к исходным геометрическим соображениям, нетрудно заметить, что в рассматриваемом частном (двумерном) случае вектор \vec{e}_1 совпадает по направлению с вектором относительной скорости \mathbf{v} в системе K , а вектор \vec{e}_1' — с вектором $-\mathbf{v}$ с точки зрения системы K' . Предположим теперь, что оси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и оси $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ подвергнуты одинаковому трехмерному вращению относительно рассмотренного основного положения. При этом оси системы K' останутся параллельными осям системы K , а вектор \mathbf{v} будет образовывать такие же углы с осями системы K , как вектор $-\mathbf{v}$ с осями системы K' . Трехмерный радиус-вектор \mathbf{r} в системе K может быть представлен в виде суммы двух ортогональных проекций: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, где \mathbf{r}_{\parallel} — составляющая вектора \mathbf{r} в направлении вектора \mathbf{v} , а \mathbf{r}_{\perp} — в ортогональной к вектору \mathbf{v} двумерной плоскости. Аналогично $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ (по отношению к направлению вектора $-\mathbf{v}$). Обозначим через \mathbf{v}_1 единичный вектор в направлении \mathbf{v} . Тогда преобразования Лоренца частного вида (5.8) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r}'_{\perp}, & \mathbf{r}'_{\parallel} \mathbf{v}_1 &= \gamma \left(\mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{v}_1 - \frac{v}{c} x^0 \right), \\ x^{0'} &= \gamma \left(x^0 - \frac{1}{c} \mathbf{r} \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

(в последнем соотношении учитывается, что $\mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{v} = \mathbf{r} \mathbf{v}$). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (\mathbf{r}'_{\parallel} \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}'_{\perp} = \gamma \left[(\mathbf{r} \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 - \frac{1}{c} x^0 \mathbf{v} \right] + \mathbf{r}_{\perp} = \\ &= \gamma \left[(\mathbf{r} \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 - \frac{1}{c} x^0 \mathbf{v} \right] + \mathbf{r} - (\mathbf{r} \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{1}{v^2} (\mathbf{r} \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} x^0 = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \mathbf{r}_{\parallel} - \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} x^0, \\ x^{0'} &= \gamma \left(x^0 - \frac{1}{c} \mathbf{r} \mathbf{v} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Мы получили преобразование Лоренца, связывающее между собой инерциальные системы отсчета, пространственные оси которых параллельны, но относительная скорость не направлена вдоль какой-либо из осей.

Наконец, наиболее общее преобразование Лоренца соответствует тому случаю, когда пространственные оси двух систем не параллельны. Но этот случай получается из предыдущего, если повергнуть вектор r' соответствующему трехмерному вращению S (т. е. в левой части (5.12) заменить r' на Sr').

5.3. Выведем теперь релятивистскую формулу сложения скоростей. Пусть движение материальной точки (вообще говоря, ускоренное) изучается в системах отсчета K и K' . Скорость материальной точки в системе K в некоторый момент времени по часам этой системы равна $u = dr/dt$. В системе K' скорость той же материальной точки в соответствующий (согласно преобразованию Лоренца) момент времени будет равна $u' = dr'/dt'$. С помощью (5.12) легко найти соотношения между dr' и dr , с одной стороны, и между dt' и dt — с другой. Образова отношения этих дифференциалов, получим искомую формулу в виде

$$u' = \frac{u + v \left[(\gamma - 1) \frac{1}{c^2} uv \pm \gamma \right]}{\gamma \left(1 \pm \frac{1}{c^2} uv \right)}. \quad (5.13)$$

Вектор u' называется релятивистской суммой скоростей u и v . Нужно иметь в виду, что результат такого сложения зависит от того, в каком порядке складываются скорости u и v (правая часть в (5.13), вообще говоря, изменяется, при замене u на v , а v на u).

В частности, когда u и v ортогональны, то $u' = \frac{1}{\gamma} (u \pm \gamma v)$.

В случае же, соответствующем частному преобразованию Лоренца, формула (5.13) принимает вид

$$u'_x = \frac{u_x \pm v}{1 \pm u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 \pm u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 \pm u_x v/c^2}. \quad (5.13')$$

При величине v , очень малой по отношению к скорости света в вакууме c , можно положить $\beta \approx 0$, т. е. $\gamma \rightarrow 1$. В этом пределе формулы (5.12) и (5.13) превращаются в преобразования Галилея и закон сложения скоростей классической механики:

$$r' \simeq r \pm vt, \quad t' \simeq t, \quad u' \simeq u \pm v. \quad (5.14)$$

При $v > c$, т. е. при $|\beta| > 1$, коэффициенты в формулах преобразования (5.14) становятся мнимыми. Следует считать, что это обстоятельство свидетельствует о невозможности физического осуществления инерциальных систем, удовлетворяющих условию $v > c$. Скорость c света в вакууме оказывается, таким образом, предельной

скоростью распространения физического процесса. Действительно, всегда можно считать, что с материальным носителем этого процесса связана некоторая система отсчета. При этом «распространением» называется ряд последовательных состояний, находящихся друг с другом в причинно-следственной связи. В соответствии с этим всевозможные интервалы ds^2 , связывающие данное физическое событие с любым другим, разделяются на три класса. Если $ds^2 = 0$, то соответствующие два события можно рассматривать как совпадающие с началом и концом распространения светового луча (такой интервал называется поэтому *световым*). Если $ds^2 > 0$, то события могут быть связаны с помощью процесса, распространяющегося со скоростью $v < c$ (*времениподобный интервал*). Наконец, при $ds^2 < 0$ причинной связи между событиями существовать не может (*пространственноподобный интервал*). Аналогичным образом по характеру их пространственно-временной длины \bar{r}^2 различаются и конечные радиусы-векторы \bar{r} в пространстве-времени *). Световые интервалы, исходящие из данной точки пространства-времени, образуют *световой конус*. События, связанные с данным пространственноподобными интервалами, называются квазиодновременными с ним. Ясно, что квазиодновременные события не могут влиять друг на друга. Если же $ds^2 > 0$, то при $dt > 0$ события принадлежат абсолютному будущему, а при $dt < 0$ — абсолютному прошлому по отношению к тому событию, которое является началом такого времениподобного интервала. Указанное разделение событий по отношению к любому из них имеет инвариантный характер, благодаря инвариантности пространственно-временных интервалов. Легко понять, что с геометрической точки зрения события, времениподобные данному, находятся внутри светового конуса с вершиной в нем, а квазиодновременные — вне этого светового конуса.

С физической точки зрения большую важность имеют *времениподобные кривые* и *пространственноподобные гиперповерхности* в пространстве-времени. Первые определяются условием $ds^2 > 0$ для любых двух точек, находящихся на такой кривой. Вторые же — условием $ds^2 < 0$ для любых двух точек, принадлежащих такой гиперповерхности. Ясно, что времениподобные кривые и пространственноподобные (трехмерные) гиперповерхности являются инвариантными геометрическими образами. Из предыдущих замечаний следует, что любая времениподобная кривая представляет собой геометрическую картину возможного движения материальной точки (такого, что скорость может быть переменной, но никогда не достигает величины c). Пространственноподобные гиперповерхности важны тем, что на них можно произвольно задавать состояния физических объектов, не заботясь о выполнении принципа причинности. Важный пример пространственноподобной гиперпо-

*) Как и раньше, стрелкой обозначаются четырехмерные векторы.

верхности, это — трехмерная гиперплоскость, определяемая уравнением $t = \text{const}$ в некоторой системе отсчета. В дальнейшем (см. § 9) мы познакомимся с интегрированием по пространственноподобным гиперповерхностям. Эта операция существенна при изучении вариационного принципа.

5.4. Времениподобная кривая, которая также часто называется *мировой линией*, может быть определена с помощью уравнений вида $x^i = x^i(\tau)$, где τ , вообще говоря, — произвольный параметр. Удобно выбрать этот параметр пропорциональным длине дуги кривой, а именно в виде

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2} = dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5.15)$$

Тогда он называется *собственным временем* движущейся материальной точки. Естественно при этом ввести понятия *четырёхмерной скорости* \vec{u} и *четырёхмерного ускорения* $\vec{\omega}$, которые определяются следующим образом:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad \omega^i = \frac{du^i}{d\tau}. \quad (5.16)$$

Если выбрана какая-либо инерциальная система отсчета, то компоненты этих величин можно легко выразить через трехмерные скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} :

$$u^0 = c\gamma, \quad u^\alpha = c\beta^\alpha\gamma, \quad (5.17_1)$$

$$\omega^0 = \gamma^4(\beta\mathbf{a}), \quad \omega^\alpha = a^\alpha\gamma^4 + \beta^\alpha\gamma^4(\beta\mathbf{a}). \quad (5.17_2)$$

Последнее равенство легко привести также к виду

$$\vec{\omega} = \gamma^4(\mathbf{a} + \boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}]) \quad (5.17_3)$$

(здесь всюду используется очевидное обозначение $\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{v}/c$).

Из (5.17₁) следует:

$$\vec{u}^2 \equiv (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = c^2. \quad (5.18)$$

Отсюда

$$\vec{u}\vec{\omega} = 0. \quad (5.19)$$

Кроме того, с помощью (5.17₂) не составляет труда вычислить:

$$\vec{\omega}^2 = (\omega^0)^2 - \boldsymbol{\omega}^2 = -\gamma^6 [(\beta\mathbf{a})^2 + \gamma^{-2}\mathbf{a}^2]$$

или

$$\vec{\omega}^2 = -\gamma^6 (\mathbf{a}^2 - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}]^2). \quad (5.20)$$

Таким образом, $\vec{\omega}^2 < 0$, т. е. $\vec{\omega}$ — пространственноподобный вектор. Это свойство $\vec{\omega}$ можно вывести и из (5.19), если учесть, что \vec{u} — времениподобный вектор.

Заметим, что при действиях с векторами в псевдоевклидовом пространстве-времени необходимо различать ковариантные и контравариантные их компоненты, как об этом сказано в Приложении А (см., в частности, формулу (А.17)).

5.5. Остановимся теперь на выборе знаков знаменателей в нашем основном преобразовании (5.8). Ясно, что нашему выбору знаков (в обоих случаях плюс) соответствует непрерывная совокупность инерциальных систем, получаемых при изменении численного параметра β . При этом определитель преобразования Лоренца все время остается равным $+1$. Все инерциальные системы такого рода называются системами с одинаковой ориентацией, совпадающей с ориентацией исходной системы, получаемой при $\beta = 0$.

Выбор различных знаков приводит при $\beta = 0$ к следующим возможностям:

а) $x^{0'} = x^0, x^{1'} = -x^1;$

б) $x^{0'} = -x^0, x^{1'} = x^1;$

в) $x^{0'} = -x^0, x^{1'} = -x^1.$

Случай а) представляет собой преобразование *пространственного отражения*, случай б) — *отражения времени*, случай в) — *пространственно-временного отражения*. Определитель преобразования в первых двух случаях равен -1 , т. е. он испытывает разрывное изменение по сравнению со значением при отсутствии отражений. В случае в) он равен $+1$, но лишь как результат двух разрывных преобразований. В каждом из указанных трех случаев с помощью последующего непрерывного изменения параметра β можно получить соответствующую совокупность инерциальных систем. Заметим, что преобразование отражения в трехмерном пространстве может быть определено также и условием $x^{\alpha'} = -x^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), когда изменяется знак всех трех пространственных координат (преобразование инверсии). Однако изучение отражений в трехмерном пространстве показывает, что при этом мы не получаем ничего нового. Отражение же только в двух направлениях не изменяет знака определителя, а потому может быть сведено к непрерывному преобразованию вращения. Все эти отображения легко можно распространить и на преобразования Лоренца общего вида (5.12). Первоначально сделанный выбор преобразований, не изменяющих ориентации, определяет группу преобразований, называемую обычно *собственной группой Лоренца*. Совокупность всевозможных преобразований Лоренца (включающая указанные выше преобразования отражения а, б, в) называется *полной группой Лоренца*. Итак, полная группа Лоренца распадается на четыре связанные области — четыре компоненты. Внутри каждой из этих компонент «перечислить» содержащиеся в ней инерциальные

системы можно с помощью непрерывного изменения параметров преобразования Лоренца. Переход же от одной из этих компонент к любой другой совершается с помощью разрывного преобразования отражения. Кстати, из формулы (5.12) и следующего за ней замечания легко установить физический смысл входящих в нее параметров. Три из них — это компоненты относительной скорости \mathbf{v} , а три остальные — углы трехмерного вращения, если оно необходимо.

5.6. Часто оказывается полезным применение *бесконечно малых преобразований Лоренца*. Коэффициенты таких преобразований следует записать в виде

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \omega_{i'}^{i'} = \delta_i^{i'} + g_{ij} \omega^{i'j}, \quad (5.21)$$

где $\omega^{i'j} \rightarrow 0$. Подстановка (5.21) в основную формулу (5.6) приводит к условию

$$\omega_{j'i} \delta_j^{i'} + \omega_{i'j} \delta_i^{i'} = 0 \quad (5.22)$$

(при этом учитываются лишь члены, линейные относительно бесконечно малых $\omega^{i'j}$). Само же преобразование координат в пространстве-времени записывается с помощью (5.21) в виде

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i \approx x^i + \omega_{i'}^{i'} x^i.$$

Благодаря бесконечной малости коэффициентов $\omega_{i'}^{i'}$ и так как в нулевом приближении $x^{i'} = x^i$, штрихованные и нештрихованные индексы у $\omega_{i'}^{i'}$ различать не нужно. Поэтому окончательно преобразование принимает вид

$$(x^{i'})' = x^i + \omega_{i'}^{i'} x^i = x^i + g^{ii} \omega_{ij} x^j, \quad (5.23)$$

причем на основании (5.22)

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (5.23')$$

Таким образом, тензор ω_{ij} имеет шесть линейно независимых компонент, определяющих бесконечно малые вращения в шести взаимно ортогональных плоскостях четырехмерного пространства-времени. В самом общем случае, когда нужно использовать преобразования (5.2), нужно учесть еще четыре бесконечно малые трансляции, соответствующие входящему в (5.2) вектору. При этом (5.23) принимает вид

$$(x^i)' = x^i + g^{ii} \omega_{ij} x^j + \omega^i. \quad (5.24)$$

Не составляет труда убедиться в том, что коэффициенты $\omega_{\alpha\beta}$ соответствуют трехмерным вращениям.

§ 6. Релятивистская динамика материальной точки

В предыдущем параграфе (см. стр. 46) было показано, что преобразования Галилея, представляющие собой основу классической механики, являются предельным частным случаем преобразований Лоренца при $v \ll c$. Отсюда ясно, что понятия классической механики нуждаются в уточнении, чтобы они стали инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Только после этого механика будет удовлетворять принципу относительности, т. е. ее законы приобретут физический смысл, не зависящий от выбора системы отсчета, в которой они записываются. Так как при малых по сравнению со скоростью света скоростях относительного движения законы Ньютона выполняются с очень большой точностью, необходимо потребовать, чтобы точные законы механики переходили в законы Ньютона в этом приближении *).

Будем рассматривать мировые линии точечных частиц (см. стр. 48). Прямолинейные мировые линии (и только они) отвечают описанию равномерных прямолинейных движений материальных точек. Поэтому, если материальная точка испытывает ускорение по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета, то ее мировая линия будет искривленной — и это свойство мировой линии должно наблюдаться в любой инерциальной системе. Примем в качестве меры такого искривления величину четырехмерного ускорения в данной точке мировой линии. Тогда, по аналогии со вторым законом Ньютона классической механики, можно определить величину *четырёхмерной силы* \vec{F} с помощью уравнения

$$\vec{F} = m_0 \vec{\omega}. \quad (6.1)$$

При этом предполагается, что динамическое поведение материальной точки можно охарактеризовать с помощью параметра m_0 , имеющего размерность массы и инвариантного по отношению к преобразованиям Лоренца. Кроме того, мы пока будем считать, что m_0 не зависит от собственного времени τ , отсчитываемого вдоль мировой линии. Уравнение (6.1) представляет собой основной постулат релятивистской механики, правильность которого может быть в конечном счете установлена лишь с помощью экспериментальной проверки. Пока можно только сказать, что определение силы (6.1) инвариантно по отношению к переходу из одной инерциальной системы в другую и, по-видимому, является простейшим обобщением второго закона Ньютона, которое обладает этим свойством.

Рассмотрим уравнение (6.1) с точки зрения некоторой произвольно выбранной инерциальной системы. Четырёхмерная сила \vec{F}

*) Это требование обычно называют «принципом соответствия Эйнштейна».

определяет в этой системе четыре величины $K^i = \gamma^{-1}F^i$. Пространственные компоненты K^α имеют при этом вид

$$K^\alpha = m_0 \frac{du^\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dp^\alpha}{dt}. \quad (6.2)$$

Мы воспользовались предположением о независимости m_0 от τ , а потому и от t , а также уравнением (5.17₁). Здесь

$$p^\alpha = m v^\alpha, \quad m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}. \quad (6.3)$$

Но уравнение (6.2) можно интерпретировать как запись второго закона Ньютона для материальной точки с массой m_0 и импульсом \mathbf{p} , с тем отличием от классической механики, что масса движущейся материальной точки зависит от скорости движения по отношению к данной системе отсчета. Величина m_0 , т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе, скорость которой в данный момент совпадает со скоростью материальной точки (такую систему называют мгновенно сопутствующей), называется *массой покоя*. Зависимость (6.3) подтверждается экспериментально.

Компонента F^0 четырехмерного вектора силы также имеет физический смысл. Из соотношения (5.19) совместно с уравнениями (5.17₁) и определением (6.1) видно, что

$$cK^0 = \mathbf{K}\mathbf{v}. \quad (6.4)$$

Так как вектор \mathbf{K} был интерпретирован как ньютоновская сила (уточненная благодаря учету зависимости массы от скорости), то из (6.4) следует, что величина cK_0 должна выражать работу силы в единицу времени. Обозначая через \mathcal{E} энергию материальной точки, мы видим с помощью (6.1) и формулы (5.17₁) для u^0 , что

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = cK^0 = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е. что с точностью до постоянного слагаемого, которое мы положим равным нулю,

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}. \quad (6.5)$$

С другой стороны, если воспользоваться определением (5.16) четырехмерной скорости u^i , то $p^\alpha = m_0 u^\alpha$. Поэтому четырехмерный вектор \mathbf{p} с компонентами

$$p^i = m_0 u^i \quad (6.6)$$

называется *четырёхмерным импульсом*. Тогда

$$p_0 = \mathcal{E}/c \quad (6.7)$$

и основное уравнение (6.1) может быть переписано в виде

$$F^i = dp^i/d\tau. \quad (6.8)$$

Из соотношения (5.18) следует, что

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2,$$

т. е.

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (6.9)$$

Определение энергии (6.5) приводит к выводу, имеющему фундаментальное физическое значение: материальная точка в той системе отсчета, где ее скорость обращается в нуль, обладает энергией покоя, равной

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2. \quad (6.10)$$

Это уравнение, установленное Эйнштейном, выражает закон *взаимосвязи массы и энергии*. Заметим, что оно является непосредственным следствием того, что при выводе уравнения (6.5) возможное постоянное слагаемое было положено равным нулю. Однако ненулевая добавка к энергии (6.5) приводила бы к физически бессмысленному результату. Действительно, предположим, что $\mathcal{E}/c = m_0 c / \sqrt{1 - \beta^2} + a^0$, где a^0 — постоянная. Выражение для трехмерного импульса определено уравнением (6.2) также с точностью до некоторых постоянных a^α . Итак, запишем $p^i = m_0 u^i + a^i$. Величины a^i должны быть компонентами некоторого пространственно-временного вектора для того, чтобы четырехмерный импульс \vec{p} представлял собой физическую величину с точки зрения принципа относительности. Но трехмерный импульс \mathbf{p} по своему физическому смыслу непременно должен быть равен нулю при нулевой скорости материальной точки, а потому величины a^α должны быть равны нулю во всех системах отсчета. Тогда и $a^0 = 0$ во всех системах; иначе существовали бы и такие системы, где $a^\alpha \neq 0$.

Закон взаимосвязи массы и энергии утверждает, по сути дела, что всякое изменение инертной массы покоя частицы сопровождается изменением энергии, и наоборот. Это утверждение служит основой для интерпретации чрезвычайно обширного круга явлений, связанных, например, с превращением одних элементарных частиц в другие. В частности, энергия электромагнитного излучения может превращаться в массу покоя таких частиц, как электрон и позитрон (или протон и антипротон). Напротив, масса покоя одних частиц может превращаться в кинетическую энергию движения других или в энергию электромагнитного излучения.

Из закона взаимосвязи массы и энергии следует, таким образом, что массу покоя m_0 в самом общем случае нужно считать зависящей от времени. В качестве соответствующего обобщения уравнения (6.1) нужно рассматривать уравнение вида (6.8), где импульс, как и прежде, определяется соотношением (6.6), в котором, однако, $m_0 = m_0(\tau)$.

Чаще всего изменения массы покоя m_0 могут происходить при столкновениях частиц. В этом случае мировые траектории частиц, вступающих в столкновение, и частиц, выходящих после него, являются прямолинейными и образуют пучок, проходящий через одну точку в пространстве-времени. Взаимодействие же ограничивается весьма малой областью пространства-времени, окружающей эту точку. Физическое событие, состоящее в столкновении частиц и в превращении одних частиц в другие в ходе такого столкновения, должно характеризоваться выполнением законов сохранения импульса и энергии. Более подробно это значит, что полные импульс \mathbf{p} и энергия \mathcal{E} частиц непосредственно перед моментом столкновения (когда частицы еще не взаимодействуют) должны быть соответственно равны полным импульсу $\tilde{\mathbf{p}}$ и энергии $\tilde{\mathcal{E}}$ частиц, появление которых отражает результат взаимодействия, происшедшего при столкновении. Мы здесь можем ограничиться предположением, что частицы полностью характеризуются значениями их масс покоя (хотя на практике необходимо учитывать еще их спины, заряды и т. д.). Законы сохранения энергии и импульса, упомянутые выше, объединяются благодаря соотношениям (6.6) и (6.7) в единый релятивистски-инвариантный закон сохранения энергии-импульса, записываемый в виде

$$p^i = \tilde{p}^i. \quad (6.11)$$

Здесь $p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l$, причем N — число сталкивающихся частиц, а \mathcal{E}_l — энергия l -й частицы перед столкновением; $\tilde{p}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{c} = \frac{1}{c} \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{N}} \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{l}}$, где \tilde{N} — число частиц, возникших после столкновения, а $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{l}}$ — энергия \tilde{l} -й частицы. При этом, на основании (6.10): $\mathcal{E}_l = \sqrt{m_{0l}^2 c^4 + \mathbf{p}_l^2 c^2}$ и аналогично $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{l}} = \sqrt{m_{0\tilde{l}}^2 c^4 + \mathbf{p}_{\tilde{l}}^2 c^2}$. Столкновение можно назвать упругим, если $N = \tilde{N}$ и массы покоя m_{0l} не изменяются. В противоположном случае столкновение будет неупругим и сопровождается обменом энергии между частицами, часть которой может превратиться в массу покоя. Пространственные компоненты соотношения (6.11) с помощью введенных обозначений могут быть подробнее записаны в виде

$$\sum_{l=1}^N \mathbf{p}_l = \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{N}} \mathbf{p}_{\tilde{l}}. \quad (6.12)$$

Это уравнение выражает закон сохранения импульса.

§ 7. Уравнения Максвелла в релятивистской форме. Преобразования напряженностей

7.1. Приступая к применению принципа относительности в электродинамике, необходимо потребовать, чтобы физический закон сохранения заряда приобрел инвариантный смысл, т. е. не зависел бы от того, в какой инерциальной системе он рассматривается. Для этого достаточно считать, что плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} связаны между собой как компоненты *четырёхмерного вектора тока* s^i , а именно

$$c\rho = s^0, \quad j^\alpha = s^\alpha. \quad (7.1)$$

Действительно, уравнение непрерывности для электрического заряда (1.13) при этом может быть записано в виде

$$\partial s^i / \partial x^i = 0, \quad (7.2)$$

где левая часть является скаляром по отношению к преобразованиям Лоренца *).

Из определений (7.1) видно, что уравнения Максвелла (М.1) и (М.4) должны быть как-то объединены друг с другом, если рассматриваются переходы между различными инерциальными системами. С этой точки зрения мы изучим прежде всего уравнения Максвелла в вакууме. Запись их становится наиболее простой, если воспользоваться гауссовой системой единиц, т. е. положить $\alpha = c$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, откуда следует, что $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Покажем, что упомянутое объединение уравнений может быть достигнуто, если считать, что со своей стороны скалярный потенциал ϕ и векторный потенциал \mathbf{A} представляют собой компоненты Φ_i *четырёхмерного вектора*, а именно

$$\phi = -\Phi_0, \quad A_\alpha = \Phi_\alpha. \quad (7.3)$$

Формулы (2.1) и (2.2), определяющие напряженности \mathbf{B} и \mathbf{E} через потенциалы, теперь могут быть записаны в виде

$$B_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x^\gamma} \right), \quad E_\alpha = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^0}. \quad (7.4)$$

Отсюда можно заключить, что величина

$$F_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}, \quad (7.5)$$

преобразующаяся как антисимметрический тензор второго ранга при преобразованиях Лоренца, позволяет полностью описать

*) Напоминаем о необходимости здесь и в дальнейшем внимательно относиться к различию между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров в пространстве-времени.

электрическое и магнитное поля в любой инерциальной системе с помощью равенств

$$E_\alpha = F_{\alpha 0}, \quad B_1 = F_{23}, \quad B_2 = F_{31}, \quad B_3 = F_{12}. \quad (7.6)$$

Последние три определения учитывают псевдовекторный характер магнитного поля \mathbf{B} при отражениях в трехмерном пространстве, являясь просто другой записью первого из уравнений (7.4). Тензор F_{ik} называется *тензором поля* или *тензором напряженностей*.

Вводя обозначения (7.6) и (7.1) в уравнения Максвелла (М.1) и (М.4), легко видеть, что оба они могут быть записаны в форме одного равенства

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} s^i, \quad (7.7)$$

инвариантность которого по отношению к преобразованиям Лоренца очевидна. Заметим, что из формулы (А.19) следуют соотношения

$$F^{\alpha 0} = -F_{\alpha 0}, \quad F^{\alpha\gamma} = F_{\alpha\gamma}. \quad (7.8)$$

Оставшиеся уравнения Максвелла (М.2) и (М.3) также принимают инвариантный вид

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (7.9)$$

Это проверяется непосредственным переписыванием уравнения (7.9) с подстановкой «трехмерных» обозначений (7.6). Левая часть (7.9) — это тензор третьего ранга, полностью антисимметричный по отношению к перестановкам своих индексов.

Итак, на основании постулатов (7.1) и (7.4) система уравнений Максвелла в вакууме превращается в инвариантную систему (7.7) и (7.9), служащую для определения тензора поля F_{ik} . Именно введение этого тензора позволяет описывать электромагнитное поле инвариантным образом в смысле принципа относительности. Его компоненты могут быть физически интерпретированы по отдельности, только если выбрана система координат в четырехмерном пространстве-времени, т. е. какая-либо инерциальная система отсчета. Только в этом случае можно разделить понятия электрического и магнитного полей. Рассмотрим подробнее, как осуществляется такое разделение.

С помощью тензора поля F_{ik} можно, прежде всего, построить величины, квадратично зависящие от компонент электрического и магнитного полей и инвариантные относительно преобразований Лоренца. Если определить псевдотензор $F_{lm}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{lmik} F^{ik}$, то из элементарных свойств тензоров (см. Приложение А) видно, что такими инвариантными величинами будут

$$I_1 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \quad (7.10)$$

и

$$I_2 = 1/4 F_{ik} F^{ik} = EB. \quad (7.10)$$

При этом первая из них инвариантна относительно любых преобразований Лоренца, вторая же — только относительно преобразований Лоренца без отражений, а при отражениях ее знак изменится на обратный.

7.2. Преобразования напряженностей B и E можно найти с помощью общего закона преобразования тензора поля

$$F^{i'k'} = A_i^{i'} A_k^{k'} F^{ik}. \quad (7.11)$$

При этом основную роль играет, разумеется, та форма, которую этот закон приобретает, когда совершается преобразование Лоренца частного вида (5.8). Воспользовавшись таблицей коэффициентов (5.8') этого преобразования, а также соотношениями (7.6) и (7.8), нетрудно переписать уравнение (7.11) в виде

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, & E_2' &= \gamma(E_2 + \beta B_3), & E_3' &= \gamma(E_3 - \beta B_2), \\ B_1' &= B_1, & B_2' &= \gamma(B_2 - \beta E_3), & B_3' &= \gamma(B_3 + \beta E_2). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Вспоминая то, что было сказано на стр. 43 о виде общего преобразования Лоренца, можно понять, что мы получим правильный результат для произвольного направления относительной скорости систем отсчета, если перепишем закон преобразования (7.12), придав ему форму, инвариантную по отношению к трехмерным вращениям, с помощью трехмерных векторных обозначений. Роль направлений осей x_1 и x_1' должны в этом случае играть направления относительной скорости \mathbf{v} в рассматриваемых системах отсчета. Так как в формулах (7.2) $\beta = -v_1/c$ *), то, учитывая, что при частном преобразовании Лоренца $v_2 = v_3 = 0$, мы видим:

$$\beta B_3 = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_2, \quad -\beta B_2 = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_3.$$

Применив аналогичные соображения ко второй строчке (7.12), получим желаемый результат:

$$\begin{aligned} E_{\parallel}' &= E_{\parallel}, & E_{\perp}' &= \gamma \left(E_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \\ B_{\parallel}' &= B_{\parallel}, & B_{\perp}' &= \gamma \left(B_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Здесь значком \parallel отмечаются составляющие векторов E , E' , B и B' , параллельные направлению относительной скорости \mathbf{v} , а значком \perp — лежащие в ортогональной к ней плоскости. Формулы обратных преобразований имеют аналогичный вид с заменой E на E' , B на B' и обратно, а также \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$.

*) Если считать, что система K' движется в положительном направлении оси x_1 .

При $v \ll c$ в формулах (7.13) можно считать $\gamma \approx 1$, т. е.

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & E'_{\perp} &\simeq E_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & B'_{\perp} &\simeq B_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7.13')$$

Выразив параллельные и ортогональные скорости компоненты векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} с помощью единичного вектора \mathbf{v}/v , получим также

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{E}\mathbf{v}) + \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{B}\mathbf{v}) - \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Инварианты I_1 и I_2 можно использовать для характеристики различных типов электромагнитного поля. При этом инварианты, как и само поле, являются, разумеется, функциями от пространственных координат и времени. Поэтому и классификация полей по значениям инвариантов может быть проведена лишь «локально». Благодаря непрерывности функций \mathbf{B} и \mathbf{E} , а значит, и инвариантов их свойства сохраняются в достаточно малой окрестности вокруг выбранной точки пространства-времени.

Мы видим, что если $I_2 = 0$, то это означает взаимную ортогональность соответствующих полей \mathbf{B} и \mathbf{E} во всех инерциальных системах отсчета. При этом инвариантные типы электромагнитного поля различаются еще по тем значениям, которые принимает другой инвариант, I_1 . Пусть $I_1 > 0$, т. е. $B^2 > E^2$ во всех системах отсчета. Тогда существует такая система отсчета K' , в которой $\mathbf{E}' = 0$. Действительно, из первой строчки (7.13) видно, что если в K поля \mathbf{B} и \mathbf{E} заданы и взаимно ортогональны, то можно выбрать скорость \mathbf{v} системы K' так, что $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = 0$ и $\mathbf{E}'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0$, т. е. $\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}$. Это будет выполнено, если абсолютная величина скорости такова, что $v/c = E/B_{\perp}$. Направление скорости \mathbf{v} всегда можно выбрать ортогональным вектору \mathbf{B} . При этом $v/c = E/B < 1$, т. е. такая система K' действительно существует.

Напротив, если $I_1 < 0$, то с помощью совершенно аналогичных рассуждений можно убедиться, что, направляя вектор \mathbf{v} ортогонально плоскости, проходящей через векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} , и определяя его абсолютную величину равенством $v/c = B/E$, можно ввести такую систему отсчета K' , в которой электромагнитное поле становится чисто электрическим, т. е. $\mathbf{B}' = 0$. Здесь также $v < c$.

Из приведенных соображений видно, что если в некоторой инерциальной системе оказывается $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{B} = 0$, то во всех остальных инерциальных системах оба поля отличны от нуля и взаимно ортогональны, причем в первом случае всегда $E' < B'$, а во втором $B' < E'$.

Рассмотрим теперь такой класс полей, для которых $I_2 \neq 0$. Можно показать, что в этом случае всегда существует такая инерциальная система, в которой электрическое и магнитное поля параллельны одно другому. Другими словами, если в некоторой системе отсчета K поля \mathbf{B} и \mathbf{E} удовлетворяют условию $\mathbf{B}\mathbf{E} \neq 0$, то существует и такая система отсчета K' , в которой выполняется также и условие $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$.

Если уже в системе K выполняется равенство $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0$, то задача становится тривиальной. Предположим поэтому, что $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq 0$. Тогда существует вполне определенная плоскость, содержащая векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} . Выберем скорость \mathbf{v} новой системы K в направлении, ортогональном этой плоскости. Таким выбором обеспечивается выполнение равенств $E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0$ и $B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0$, а поэтому и $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp}$, $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\perp}$ и $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp}$. Из формул преобразования (7.13) и условия $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$ следует, что скорость \mathbf{v} должна при заданных \mathbf{B} и \mathbf{E} удовлетворять соотношению

$$\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \times \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right] = 0.$$

После перемножения с учетом ортогональности векторов \mathbf{v} и \mathbf{B} , а также векторов \mathbf{v} и \mathbf{E} это соотношение приводится к виду

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} ([\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \mathbf{v}) \mathbf{v} = 0.$$

Как видно из предыдущего, вектор \mathbf{v} может быть направлен параллельно или антипараллельно вектору $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Предположим первое. Тогда, проектируя предыдущее равенство на направление вектора \mathbf{v} , получим квадратное уравнение для $\beta \equiv v/c$:

$$\beta^2 - \frac{E^2 + B^2}{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|} \beta + 1 = 0.$$

Такое уравнение при заданных \mathbf{B} и \mathbf{E} всегда имеет два положительных корня β_1 и β_2 , причем $\beta_1 \beta_2 = 1$. Отсюда следует, что один из этих корней всегда будет меньше единицы. Выбирая абсолютное значение скорости, соответствующее этому корню, мы вполне определим движение системы K' , в которой выполняется соотношение $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$. Если теперь перейти от этой системы K' к любой другой инерциальной системе отсчета K'' , скорость которой в системе K' совпадает по направлению с параллельными один другому векторами \mathbf{B}' и \mathbf{E}' , то из (7.14) ясно, что и в такой системе отсчета K'' , какова бы ни была абсолютная величина ее скорости, векторы \mathbf{B}'' и \mathbf{E}'' остаются параллельными один другому. Скорость \mathbf{u}' любой такой системы K'' по отношению к исходной системе K определяется релятивистской формулой сложения взаимно ортогональных скоростей системы K' относительно K и K'' — относительно K' (см. стр. 46).

7.3. Обратимся к выводу уравнений для потенциалов электромагнитного поля. Подставляя выражение (7.5) тензора поля через четырехмерный потенциал Φ_i в левую часть (7.9), легко убедиться, что это релятивистское уравнение Максвелла удовлетворяется тождественно. Такой результат понятен, так как (7.9) представляет собой инвариантную запись как раз тех двух уравнений (М.2) и (М.3), которые служат для определения связи между напряженностями и потенциалами. Далее, соотношения (7.3) позволяют записать в инвариантном виде условие калибровки Лоренца:

$$\partial\Phi^i/\partial x^i = 0. \quad (7.15)$$

Преыдущее равенство получено непосредственно из (2.5). Ясно, что условие кулоновской калибровки (2.8) не имеет инвариантного смысла. Градиентные же преобразования (2.3) и (2.4) принимают вид

$$\check{\Phi}^i = \Phi^i + \frac{\partial\psi}{\partial x^i}. \quad (7.15')$$

Таким образом, если функция ψ инвариантна, то градиентное преобразование не нарушает векторного характера потенциала Φ^i . Наконец, подстановка (7.5) в (7.7) дает, при учете (7.15), уравнение второго порядка для четырехмерного потенциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} \Phi^i = -\frac{1}{c} s^i. \quad (7.16)$$

Таким образом, задача определения электромагнитного поля сводится в этом случае к решению волнового уравнения (7.16) при заданных граничных и начальных условиях, с учетом требования (7.15). Уравнения (7.16) полностью совпадают при любом выборе инерциальной системы отсчета с полученными ранее (2.6₁) и (2.6₂).

Изучим несколько подробнее также и свойства вектора тока s^i . Так как обычно можно записать $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, то из определения (5.17₁) четырехмерной скорости u^i следует, что

$$s^i = \rho_0 u^i, \quad (7.17)$$

где $\rho_0 = \rho \sqrt{1 - \beta^2}$. Соотношению (7.17) можно удовлетворить, только считая, что ρ_0 — скаляр (он называется *инвариантной плотностью заряда*). Смысл инвариантной плотности легко понять, если рассмотреть заряд, заполняющий объем dV' , с плотностью ρ_0 в той системе отсчета, где все точки объема dV' покоятся. Тогда в другой системе отсчета, относительно которой объем dV' движется с постоянной скоростью \mathbf{v} , будет на основании (5.10') выполняться равенство $\rho dV = \rho_0 dV'$. Другими словами, полное количество заряда остается инвариантным по отношению к преобразованию Лоренца.

Поставим себя теперь на место наблюдателя, находящегося в системе отсчета K . Так как s^i — вектор в пространстве-времени,

его компоненты преобразуются по формулам (5.12) с заменой x^α на $s^\alpha = j^\alpha$ и x^0 — на $s^0 = c\rho$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{j}' + (\gamma - 1) \frac{1}{v^2} (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \gamma \rho' \mathbf{v}, \\ \rho &= \gamma \left(\rho' + \frac{1}{c^2} \mathbf{j}' \cdot \mathbf{v} \right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

В соответствии со сказанным выше мы выписали формулы преобразования от K' к K . Отсюда видно, в частности, что плотность ρ' заряда, покоящегося в системе K' , определяет в системе K часть тока проводимости, пропорциональную $\rho' \mathbf{v}$ и называемую *конвекционным током*. С другой стороны, в формуле для плотности заряда возникает релятивистская добавка $\frac{1}{c^2} \mathbf{j}' \cdot \mathbf{v}$, благодаря которой даже в том случае, когда в движущейся системе $\rho' = 0$, но $\mathbf{j}' \neq 0$, наблюдатель в системе K должен заметить некоторое распределение заряда в движущемся относительно него теле и измерить соответствующее этому распределению электрическое поле.

7.4. Перейдем к построению релятивистской теории электромагнитного поля в *материальных средах*. Прежде всего запишем основные формулы релятивистской электродинамики вакуума в международной системе единиц вместо использованной ранее гауссовой системы. При этом возникает возможность различать векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} , с одной стороны, и векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , с другой. Эти векторы связаны соотношениями $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. В системе единиц СИ коэффициент α в уравнениях (М) принимается равным единице. Определение компонент тока s^i остается прежним. Компоненты же потенциала принято определять иначе. Именно, вместо (7.4) введем вектор $\bar{\Phi}_i$ с компонентами

$$\bar{\Phi}_0 = -\frac{1}{c} \varphi, \quad \bar{\Phi}_\alpha = A_\alpha. \quad (7.19)$$

Условие Лоренца (2.5) в вакууме имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, т. е. на основании (1.25) $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Считая, что дифференцирование выполняется по контравариантным компонентам x^α , x^0 , и подставляя вместо \mathbf{A} и φ контравариантные компоненты Φ^i , соответствующие определению (7.19), найдем, что условие Лоренца примет инвариантный вид (7.15) с заменой Φ^i на $\bar{\Phi}^i$.

Обратимся к определению тензора поля. В системе единиц СИ, как мы видели в § 1, одинаковую размерность имеют величины $c\mathbf{B}$ и \mathbf{E} . Компоненты тензора

$$\bar{F}_{ik} = c \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial x^k} \right) \quad (7.20)$$

с учетом (7.19) выражаются следующим образом:

$$\bar{F}_{\alpha 0} = E_{\alpha}, \quad \bar{F}_{12} = cB_3 \quad \text{и т. д.} \quad (7.21)$$

Формулы преобразования напряженностей (7.13) и их следствия останутся, разумеется, в силе, но в них нужно заменить \mathbf{B} на $c\mathbf{B}$. То же относится и к релятивистскому уравнению Максвелла (7.9). В нем нужно лишь заменить F_{ik} на \bar{F}_{ik} .

Для релятивистской записи уравнений Максвелла с источниками необходимо пользоваться уже не векторами \mathbf{B} и \mathbf{E} , а величинами \mathbf{H} и \mathbf{D} , имеющими другую размерность. Соображения § 1, относящиеся к размерности, показывают, что в системе СИ одинаковую размерность имеют \mathbf{H} и $c\mathbf{D}$. При этом

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c\mathbf{B}, \quad c\mathbf{D} = c\epsilon_0 \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}. \quad (7.22)$$

Из определений (7.20) и (7.21) следует, что величина

$$f_{ik} = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \bar{F}_{ik} \quad (7.23)$$

является тензором, причем

$$f_{\alpha 0} = cD_{\alpha}, \quad f_{12} = H_3 \quad \text{и т. д.} \quad (7.24)$$

С помощью этого тензора получим

$$\partial^{ik} f_{ik} / \partial x^k = s^i. \quad (7.25)$$

Этим уравнением следует заменить уравнение (7.7). Из (7.25) с помощью (7.23), (7.20) и (7.15) можно вывести волновое уравнение для потенциалов:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \bar{\Phi}^i = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} s^i = -\mu_0 s^i. \quad (7.26)$$

Совместное рассмотрение тензора поля \bar{F}_{ik} и тензора f_{ik} , который мы назовем *тензором индукций*, необходимо при построении релятивистской электродинамики для материальных сред. Такое построение может быть осуществлено только с помощью дополнительного постулата, характеризующего поведение полей \mathbf{B} и \mathbf{E} , а также полей \mathbf{H} и \mathbf{D} в материальных средах, когда совершается переход из одной инерциальной системы в другую. Такой постулат подлежит экспериментальной проверке. Он, в частности, должен удовлетворять требованию, чтобы для наблюдателя, покоящегося относительно среды, уравнения электромагнитного поля совпадали с уравнениями Максвелла (М).

С этой точки зрения наиболее естественным представляется предположение, что векторы $c\mathbf{B}$ и \mathbf{E} в среде описываются, так же как в вакууме, тензором \bar{F}_{ik} , а векторы \mathbf{H} и $c\mathbf{D}$ — тензором f_{ik} , хотя связь между \mathbf{B} и \mathbf{H} , а также между \mathbf{D} и \mathbf{E} уже, вообще говоря, не сводится к простой пропорциональности. Инвариантную запись

уравнений Максвелла составят тогда релятивистские уравнения той же формы (7.9) и (7.25), что и ранее. При изучении электромагнитных свойств сред в релятивистском пределе они называются *уравнениями Минковского*. Во избежание недоразумений нужно подчеркнуть, что пропорциональности вида (7.23) между тензорами f_{ik} и F_{ik} , вообще говоря, уже не будет и тензор f_{ik} определяется в любой инерциальной системе только с помощью соотношений (7.24).

Разность между тензором (7.23) индукций в вакууме и тензором f_{ik} индукций в среде есть также тензор:

$$\mathfrak{M}_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} F_{ik} - f_{ik}. \quad (7.27)$$

Сравнивая определения (7.21) и (7.24) с определениями поляризации (1.11) и намагниченности (1.17), легко видеть, что компоненты \mathfrak{M}_{ik} имеют следующий физический смысл:

$$\mathfrak{M}_{\alpha 0} = -\frac{1}{c} P_\alpha, \quad \mathfrak{M}_{12} = M_3 \quad \text{и т. д.} \quad (7.28)$$

Тензор \mathfrak{M}_{ik} принято называть *тензором моментов*. С геометрической точки зрения структура этого тензора вполне аналогична структуре исследованного ранее тензора поля F_{ik} . В частности, закон преобразования компонент тензора моментов при переходе к новой инерциальной системе может быть сразу выписан по аналогии с уравнениями (7.13):

$$\begin{aligned} P'_\parallel &= P_\parallel, & P'_\perp &= \gamma \left(P_\perp + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{M} \right), \\ M'_\parallel &= M_\parallel, & M'_\perp &= \gamma \left(M_\perp - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{P} \right). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Из (7.29) вытекает важное физическое следствие. Именно, если некоторое тело в сопутствующей ему инерциальной системе (системе покоя) обладает электрической поляризацией, но не намагничено, то оно оказывается намагниченным с точки зрения любой другой инерциальной системы. Наоборот, если тело только намагничено в системе покоя, то в движущейся относительно него системе оно имеет также и электрическую поляризацию. Такая «кинематическая» (т. е. являющаяся следствием преобразований Лоренца) связь между поляризацией и намагничением подтверждается экспериментально. Если $\mathbf{P} = 0$, а $\mathbf{M} \neq 0$, то в нерелятивистском пределе ($\gamma \approx 1$) уравнения (7.29) принимают вид

$$\mathbf{P}' \simeq \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}' \simeq \mathbf{M}. \quad (7.29_1)$$

Если же, напротив, $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{P} \neq 0$, то

$$\mathbf{M}' \simeq -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}' \simeq \mathbf{P}. \quad (7.29_2)$$

Остановимся теперь на том важном частном случае, когда связь между индукциями и напряженностями в той системе отсчета, где среда неподвижна, выражается равенствами (1.27). Какой вид примет соотношение между этими величинами для движущейся среды? Ответ на этот вопрос можно получить, если учесть, что закон преобразования индукций \mathbf{D} и \mathbf{H} записывается в виде, вполне аналогичном преобразованию напряженностей (7.13):

$$\begin{aligned} D_{\parallel}' &= D_{\parallel}, & D_{\perp}' &= \gamma \left(D_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right), \\ H_{\parallel}' &= H_{\parallel}, & H_{\perp}' &= \gamma (H_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Коэффициенты перед векторными произведениями в этих формулах соответствуют используемой здесь системе единиц СИ; в гауссовой системе оба они должны быть равны $1/c$, как в (7.13).

Пусть среда находится в состоянии покоя в системе отсчета K' , так что $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}'$. Воспользуемся в левой части этих соотношений уравнениями преобразования (7.30), а в правой части — уравнениями (7.13) (где, как мы уже упоминали, в используемой системе единиц нужно заменить \mathbf{B} на $c\mathbf{B}$). Полученный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \epsilon (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \mu (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Снова в отдельности для продольных и поперечных компонент из предыдущих формул следует

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \epsilon E_{\parallel}, & \left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \beta^2 \right) D_{\perp} &= \epsilon (1 - \beta^2) E_{\perp} + (\epsilon \mu - \epsilon_0 \mu_0) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \\ B_{\parallel} &= \mu H_{\parallel}, & \left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \beta^2 \right) B_{\perp} &= \mu (1 - \beta^2) H_{\perp} + (\epsilon \mu - \epsilon_0 \mu_0) [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (7.32)$$

При этом принимается во внимание, что $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

Определение в релятивистском случае для поля в среде таких сохраняющихся величин, как энергия и импульс, далеко не тривиально и требует внимательного обсуждения*). Мы ограничимся, однако, изложенными выше формальными основами электродинамики движущихся сред**). Они достаточны для понимания того, какие проблемы могут возникнуть в этом случае и в чем его отличие от релятивистской электродинамики в вакууме. С экспериментальной точки зрения среды, движущиеся с релятивистскими скоростями,

*) См. В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, «Наука», 1975, гл. 12.

***) Дополнительные сведения в этом отношении см. в книгах А. Зоммерфельда «Электродинамика» и В. А. Угарова «Специальная теория относительности».

исследованы совершенно недостаточно, а это затрудняет физическую интерпретацию теории. Практически важен ее нерелятивистский предел для сред, движущихся относительно наблюдателя достаточно медленно. В этом пределе (когда учитываются только члены порядка не выше v/c) возникает целый ряд интересных эффектов. Один из них (индукция Фарадея в движущемся контуре) будет подробно изучен в дальнейшем в связи с основами магнитной гидродинамики (см. § 35). Другие эффекты (например, униполярную индукцию) читатель может изучить по книге И. Е. Тамма «Основы теории электричества» («Наука», 1976, гл. 8).

§ 8. Релятивистские уравнения движения заряда

8.1. Релятивистские уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле должны представлять собой частный случай релятивистской механики, изложенной в § 6. Нужно лишь установить, каким в этом случае будет выражение для силы \vec{F} , а именно, как оно связано с тензором электромагнитного поля F^{lm} .

В § 3 было показано, что действие поля на заряды и токи выражается объемной плотностью силы Лоренца (3.13). Именно это выражение для силы должно быть теперь изучено с целью получить его релятивистское обобщение.

Построим четырехмерный вектор $\frac{1}{c} s_l F^{lk}$. С помощью определений (7.1), (7.6) и (7.8) можно выписать компоненты этого вектора в любой инерциальной системе отсчета. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} s_l F^{l\alpha} &= \rho E^\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]^\alpha, \\ s_l F^{l0} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Соотношения (8.1) показывают, что выражение $\frac{1}{c} s_l F^{lk}$ можно считать искомым релятивистским обобщением силы Лоренца. В самом деле, его пространственные компоненты совпадают с (3.13), четвертая, временная, компонента, как и должно быть в соответствии с § 6, равна работе силы Лоренца при перемещении зарядов.

Из самой формулировки (8.1) видно, что мы получили выражение для объемной плотности силы в выбранной инерциальной системе отсчета. Поэтому его следует приравнять производной по собственному времени от объемной плотности импульса среды, движущейся под действием приложенного «внешнего» электромагнитного поля. Будем рассматривать «пылевидную» среду, характеризуемую тем, что частицы ее не взаимодействуют между собой, т. е. движутся в электромагнитном поле совершенно независимо одна от другой. Ясно, что во всяком случае объемная плотность

импульса среды (не обязательно «пылевидной») может быть выражена в виде $\kappa_0 u^k$, где κ_0 — инвариантная плотность массы покоя (определяемая совершенно аналогично инвариантной плотности заряда, см. стр. 60). При этом аналогично закону сохранения заряда должен выполняться закон *сохранения массы*. Легко понять, что этот закон может быть выражен в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\kappa_0 u^k) = 0. \quad (8.2)$$

Если вспомнить закон взаимосвязи массы и энергии (см. § 6), то можно сделать вывод, что масса покоя каждого элемента среды зависит от взаимодействия его со всеми другими элементами этой среды, т. е., вообще говоря, $\frac{d\kappa_0}{d\tau} = \frac{\partial \kappa_0}{\partial x^k} u^k \neq 0$ (здесь τ — собственное время, отсчитываемое вдоль мировой линии данного элемента среды). В случае пылевидной материи такого взаимодействия нет, поэтому нет и зависимости κ_0 от τ . Таким образом, $d\kappa_0/d\tau = 0$, откуда на основании (8.2) следует, что $\partial u^k / \partial x^k = 0$.

Вспомним уравнения движения, установленные в § 6. Из приведенных выше соображений мы видим, что релятивистское уравнение движения бесконечно малого элемента пространственного объема пылевидной среды может быть записано в виде

$$\kappa_0 \frac{du^k}{d\tau} = \frac{1}{c} s_l F^{lk} = \frac{1}{c} \rho_0 u_l F^{lk}.$$

Во втором равенстве использовано выражение (7.17) для четырехмерного тока s_l .

8.2. К изучению пылевидной среды мы вернемся в конце этой главы. Здесь же рассмотрим подробнее движение точечной частицы под действием заданного поля. Для этого следует предположить, что инвариантные плотности заряда и массы покоя выражаются так:

$$\kappa_0 = m_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}(\tau)), \quad \rho_0 = q \delta(\vec{x} - \vec{x}(\tau)).$$

Здесь m_0 — масса покоя, q — заряд точечной частицы. Дельта-функция определяется равенством

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}(\tau)) = \prod_{l=0}^3 \delta(x^l - x^l(\tau)),$$

причем $x^l(\tau)$ — координаты частицы, соответствующие ее положению на своей мировой линии в точке, определяемой значением τ собственного времени.

Подставляя эти формулы в уравнение движения и интегрируя по всему пространству-времени обе стороны уравнения с исполь-

зованием основного свойства дельта-функции, получим равенство

$$m_0 \frac{du^k}{d\tau} = \frac{q}{c} u_l F^{lk}, \quad (8.3)$$

в котором F^{lk} зависит от τ через посредство координат частицы в пространстве-времени.

Воспользуемся в правой части (8.3) выражением (7.5) для тензора поля. Благодаря равенству $\frac{\partial \Phi^k}{\partial x_l} u_l = \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^l} \frac{dx_l}{d\tau} = \frac{d\Phi^k}{d\tau}$ можно переписать (8.3) в форме

$$\frac{d\pi^k}{d\tau} = -\frac{q}{c} u_l \frac{\partial \Phi^l}{\partial x_k}, \quad (8.4)$$

где

$$\pi^k = m_0 u^k - \frac{q}{c} \Phi^k. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.4) может быть получено с помощью вариационного принципа. Пусть, в соответствии с нашими исходными предположениями, в некоторой области пространства-времени можно считать заданным четырехмерный потенциал электромагнитного поля $\bar{\Phi}(\vec{x})$. Возьмем внутри этой области две фиксированные пространственно-временные точки \vec{x}_1 и \vec{x}_2 (причем будем считать для определенности, что \vec{x}_2 находится в области абсолютного будущего по отношению к \vec{x}_1). Рассмотрим всевозможные времениподобные кривые, соединяющие точку \vec{x}_1 с точкой \vec{x}_2 . Вариационный принцип утверждает, что существует функция Лагранжа $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u})$, с помощью которой можно построить интеграл действия $\mathcal{S} = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}) d\tau$, принимающий экстремальное значение на мировой траектории, по которой действительно движется частица под действием заданных сил. Другими словами, на этой мировой траектории выполняется условие

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}) d\tau = 0. \quad (8.6)$$

Необходимым следствием выполнения такого условия экстремума являются уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}. \quad (8.7)$$

В интересующем нас случае точечной частицы во внешнем поле уравнения (8.7) совпадают с уравнениями движения (8.4), если выбрать

функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 (u^k u_k - c^2) - \frac{q}{c} \Phi^k u_k. \quad (8.8)$$

Это проверяется непосредственно подстановкой (8.8) в (8.7)*). Таким образом, равенство (8.8) определяет функцию Лагранжа точечного заряда, взаимодействующего с заданным электромагнитным полем.

Вариационный принцип (8.6) с функцией Лагранжа (8.8) имеет следующие характерные черты. Прежде всего, очевидно, функция Лагранжа и сформулированный с ее помощью вариационный принцип удовлетворяют требованию релятивистской инвариантности. Далее, вариационный принцип применяется здесь для определения мировой линии, заданной параметрически с помощью уравнений $x^k = x^k(\tau)$. Так как фактически параметр выбран так, что выполняется равенство (5.18), т. е. $u^k u_k = c^2$, то, когда начальный и конечный концы варьируемых траекторий фиксированы, функция действия \mathcal{S} зависит уже только от геометрической формы этих траекторий и не изменяется при переходе к новому параметру τ' , если только этот переход достаточно непрерывен и обладает свойством монотонности. В этом непосредственно можно убедиться, если произвести в интеграле (8.6) с функцией Лагранжа (8.8) замену параметра τ на новый параметр τ' , причем $d\tau = \frac{d\tau'}{dt'} dt'$ и скорость u_k нужно после такой замены определять как $dx_k/d\tau'$.

Наконец, градиентное преобразование вида (7.15') не изменяет уравнений движения (8.4). Действительно, из (8.8) видно, что в результате такого преобразования к функции Лагранжа добавляется производная $\frac{\partial \psi}{\partial x_k} u_k = \frac{d\psi}{d\tau}$ (если функция ψ не зависит от параметра τ явно), не влияющая, как видно из (8.6), на результат исследования условия экстремума.

8.3. Уравнения движения заряженной частицы могут быть записаны и в *гамильтоновой форме*. Прежде всего из сравнения (8.5) и (8.8) видно, что

$$\partial \mathcal{L} / \partial u_k = \pi^k. \quad (8.9)$$

Уравнения (8.5) можно использовать для того, чтобы выразить компоненты скорости u_k как функции от переменных \bar{x} и π . Гамильтонова форма уравнений движения будет получена, если считать, что именно координатами x_k и импульсами π_k определяется состояние исследуемой частицы.

Функцию Гамильтона \mathcal{H} , аналогично тому, как это делается в классической механике материальной точки, определим

*) При этом коэффициент $m_0/2$ играет роль множителя Лагранжа, заранее считаемого постоянным.

равенством

$$\mathcal{H} = \pi^k u_k - \mathcal{L}. \quad (8.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} &= \pi^l \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = - \frac{d\pi^k}{d\tau}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^k} &= u_k + \pi^l \frac{\partial u_l}{\partial \pi^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial \pi^k} = u_k = \frac{dx_k}{d\tau}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Мы получили уравнения движения в гамильтоновой форме. При их выводе использованы уравнения движения Лагранжа (8.7) и соотношения (8.9).

Определение (8.10) совместно с (8.8) и (8.5) приводит к следующему выражению для функции Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{\pi} + \frac{q}{c} \vec{\Phi} \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2}. \quad (8.12)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения, согласно (8.5), равно $\frac{1}{2} m_0 \vec{u}^2 = \frac{1}{2} m_0 c^2$. Таким образом, на той мировой линии частицы, которая реально осуществляется в заданном поле потенциала $\vec{\Phi}$, т. е. на экстремали функции действия \mathcal{S} , импульс π_k частицы должен удовлетворять соотношению

$$\mathcal{H}(\vec{\pi}, \vec{x}) - \frac{m_0 c^2}{2} = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{\pi} + \frac{q}{c} \vec{\Phi} \right)^2 = \frac{1}{2} m_0 c^2. \quad (8.13)$$

С помощью этого соотношения можно временную компоненту π^0 четырехмерного импульса $\vec{\pi}$ выразить как функцию четырехмерного радиуса-вектора \vec{x} и остальных трех компонент π^α импульса: $\pi^0 = \pi^0(x, \pi)$. Если функцию π^0 подставить в гамильтониан \mathcal{H} , то уравнения (8.12) и (8.13) приводят к тождеству

$$\mathcal{H}(\pi, \pi^0(x, \pi), \vec{x}) = m_0 c^2. \quad (8.14)$$

Дифференцируя (8.14), получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^0} \frac{\partial \pi^0}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^0} \frac{\partial \pi^0}{\partial \pi^\alpha} = 0. \quad (8.15)$$

Из уравнений Гамильтона (8.11) с помощью (8.15) следует:

$$\frac{dx_\alpha}{dx_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^0} = - \frac{\partial \pi^0}{\partial \pi^\alpha}, \quad \frac{d\pi^\alpha}{dx_0} = \frac{\partial \pi^0}{\partial x_\alpha}.$$

Поэтому, если выбрана какая-либо инерциальная система отсчета, то функцию $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\vec{x}, \pi)$ можно назвать «трехмерным» гамильтонианом частицы, причем последние уравнения примут вид

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \pi^\alpha}, \quad \frac{d\pi^\alpha}{dt} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x^\alpha}. \quad (8.16)$$

Явное выражение для функции $\tilde{\mathcal{H}}$ можно найти, если переписать равенство (8.14) в используемой инерциальной системе:

$$-\left(\boldsymbol{\pi} - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\mathcal{H}}}{c} - \frac{q}{c} \Phi\right)^2 = m_0^2 c^2.$$

Следует при этом вспомнить формулы (7.3) для потенциала и использовать его контравариантные компоненты или же ковариантные компоненты одновременно для $\vec{\pi}$ и для $\vec{\Phi}$. Отсюда

$$\tilde{\mathcal{H}} = q\Phi + c \left[m_0^2 c^2 + \left(\boldsymbol{\pi} - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8.17)$$

В нерелятивистском приближении, когда $v \ll c$, т. е. $\left(\boldsymbol{\pi} - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}} \right)^2 \ll m_0^2 c^2$,

$$\tilde{\mathcal{H}} \simeq q\Phi + \frac{1}{2m_0} \left(\boldsymbol{\pi} - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}} \right)^2 + m_0 c^2. \quad (8.18)$$

В этом приближении можно пользоваться уже не преобразованиями Лоренца, а преобразованиями Галилея. Тогда энергия и импульс не составляют более единого четырехмерного вектора и постоянная $m_0 c^2$, т. е. энергия покоя, может быть в (8.18) отброшена. Это условие определяет в данном случае просто выбор начала отсчета для энергии частицы, которая приравняется разности $\tilde{\mathcal{H}} - m_0 c^2$.

При этом из (8.18) видно, что $\boldsymbol{\pi} - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}} = m_0 \mathbf{v}$.

Так как на экстремали выполняется равенство $\vec{u}^2 = c^2$, то, обозначив $-\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + m_0 c^2$, получим

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\mathcal{L}} dt = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\Phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}. \quad (8.19)$$

В таком виде функция Лагранжа используется очень часто. При $\beta \ll 1$ она приближенно равна разности кинетической и потенциальной энергий частицы (если отбросить слагаемое $-m_0 c^2$).

§ 9*. Вариационный принцип для электромагнитного поля

9.1. Подобно тому как уравнения движения заряженной материальной точки во внешнем электромагнитном поле могут быть выведены из вариационного принципа, можно сформулировать и вариационный принцип, из которого будут вытекать уравнения Максвелла. Это имеет важное значение, поскольку, с одной стороны, многие вычислительные методы основаны на вариационных принципах, а с другой стороны, вариационный принцип электродинамики является прототипом для всех вариационных принципов, позволяющих устанавливать уравнения поля для микрочастиц в современной физике.

Применения вариационного принципа к теории электромагнитного поля связаны с интегрированием в четырехмерном пространстве-времени. Рассмотрим поэтому сначала такое интегрирование в его геометрическом аспекте. Действительно, оно может производиться по объектам различной геометрической природы: по четырехмерному объему, по какой-либо трехмерной гиперповерхности, по двумерным поверхностям и, наконец, вдоль одномерных кривых.

При интегрировании по четырехмерному объему бесконечно малый элемент этого объема может быть выражен в произвольно выбранной инерциальной системе отсчета в виде $d\Omega = dV dx^0$. При преобразованиях Лоренца без отражений, т. е. не изменяющих ориентации первоначально выбранной системы отсчета, этот элемент четырехмерного объема инвариантен. В самом деле, если $x^{i'} = A_i^{i'} x^i$, то

$$d\Omega' = d\Omega \frac{\partial (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)} = d\Omega \cdot \det(A_i^{i'}) = d\Omega.$$

Теперь рассмотрим трехмерную гиперповерхность Σ . Элемент объема такой гиперповерхности определится бесконечно малым параллелепипедом, построенным на трех некопланарных векторах \vec{dx} , \vec{dy} , \vec{dz} , исходящих из одной и той же точки и лежащих внутри гиперповерхности Σ . По определению в качестве меры этого объема в любой инерциальной системе принимается антисимметризованное произведение компонент $dx^i dy^k dz^l$. Квадратные скобки, поставленные при индексах, обозначают операцию антисимметризации (альтернирования), а именно

$$dx^i dy^k dz^l = \frac{1}{3!} \sum_{(P)} \pm P dx^i dy^k dz^l. \quad (9.1)$$

При этом какой-либо порядок значений индексов (например, расположение их в порядке возрастания) принимается за исходный; суммирование же производится по всем возможным $3!$ перестановкам P этих индексов. В сумме берется знак плюс в случае четной перестановки и знак минус — в случае нечетной. Соотношением (9.1) определяется полностью антисимметричный тензор третьего ранга (ср. Приложение А). Удобно, однако, применять для измерения элемента трехмерного объема гиперповерхности Σ псевдовектор $n^*{}^m$, определяемый в пространстве-времени соотношением

$$n^*{}^m d\Sigma = \varepsilon_{miki} dx^i dy^k dz^l. \quad (9.2)$$

Здесь ε_{miki} — единичный псевдоскаляр четырехмерного пространства-времени, введенный в уравнении (А.9), т. е. $\varepsilon_{0123} = 1$, а множитель $d\Sigma$ (т. е. абсолютная величина элемента трехмерного объема)

определяется условием $n_m n^{*m} = 1$. Псевдовектор n_m^* нормален к гиперповерхности Σ в рассматриваемой точке. Действительно, всякий вектор $\vec{d}\vec{a}$, исходящий из этой точки и принадлежащий гиперповерхности Σ , может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{d}\vec{x}$, $\vec{d}\vec{y}$ и $\vec{d}\vec{z}$: $da^m = \alpha dx^m + \beta dy^m + \gamma dz^m$. Но тогда

$$(n_m^* da^m) d\Sigma = \alpha dx^m \varepsilon_{mkl} dx^l dy^k dz^l + \dots \equiv 0.$$

Такое определение объема трехмерной гиперповерхности в четырехмерном пространстве вполне аналогично определению площади двумерной поверхности в трехмерном пространстве; как оно, например, получается в соответствии с уравнением (Б.7).

Выпишем формулы для частного случая трехмерной пространственноподобной гиперповерхности, определяемой в некоторой системе отсчета уравнением $x^0 = \text{const}$. В этом случае $dx^0 = dy^0 = dz^0 = 0$ для векторов $\vec{d}\vec{x}$, $\vec{d}\vec{y}$, $\vec{d}\vec{z}$, построенных в любой точке такой гиперповерхности. Но из приведенного выше определения (9.2) следует, что

$$n_\alpha^* = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad n_0^* d\Sigma = dx^1 dx^2 dx^3 = dV. \quad (9.3)$$

Для гиперповерхности же общего вида выражение (9.2) приводит к формулам

$$\begin{aligned} n_0^* d\Sigma &= dx^1 dx^2 dx^3, & n_1^* d\Sigma &= dx^2 dx^3 dx^0, \\ n_2^* d\Sigma &= dx^3 dx^0 dx^1, & n_3^* d\Sigma &= dx^0 dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Ясно, что замкнутый четырехмерный объем Ω ограничивается некоторой трехмерной гиперповерхностью Σ . При этом в полной аналогии с обычным выводом теоремы Гаусса — Остроградского может быть доказано ее обобщение на этот случай в виде

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega = \int_{\Sigma} A^i n_i^* d\Sigma, \quad (9.5)$$

а также

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} d\Omega = \int_{\Sigma} T^{ik} n_k^* d\Sigma. \quad (9.5')$$

В дальнейшем мы не будем рассматривать операции отражения, а поэтому не будем и проводить различия между векторами и псевдовекторами.

Свойства интегралов по двумерным поверхностям и связь их с интегралами по трехмерному объему не требуют дальнейших пояснений, так как мы будем рассматривать эти операции внутри заранее выбранной из каких-либо соображений трехмерной гиперповерхности. В этом случае не будет никаких дополнительных слож-

ностей по сравнению с известными теоремами, приведенными в Приложении Б.

Наиболее важным для использования в дальнейшем будет интегрирование по четырехмерному объему, определенному следующим образом. Возьмем две пространственноподобные гиперповерхности Σ_1 и Σ_2 такие, что любая точка гиперповерхности Σ_1 содержится в области абсолютного будущего по отношению к некоторым точкам гиперповерхности Σ_2 (рис. 3). Проведем интегрирование сначала по четырехмерной области, ограниченной цилиндрической трехмерной гиперповерхностью, основания которой лежат на Σ_1 и Σ_2 . Часто нужен предел такого интеграла, когда боковая поверхность цилиндра удаляется на бесконечность в пространственноподобных направлениях, так что основания его заполняют всю поверхность Σ_1 и всю поверхность Σ_2 . Заметим, что к внутренней области такого цилиндра можно применять теорему Остроградского — Гаусса в форме (9.5) или (9.5').

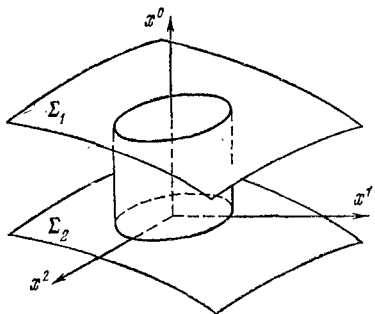


Рис. 3.

9.2. После этих предварительных замечаний обратимся к сообщениям о формулировке уравнений электромагнитного поля с помощью *вариационного принципа*.

Состояние электромагнитного поля в некоторой области пространства-времени можно считать известным, если в этой области задан четырехмерный потенциал Φ^l . Определим функцию действия поля как интеграл по рассматриваемой пространственно-временной области от некоторой функции Лагранжа \mathcal{L} :

$$\mathcal{S}[\Phi_l(x^i)] = \int_{\Omega} \mathcal{L}\left(x^i, \Phi_l(x^i), \frac{\partial \Phi_l(x^i)}{\partial x^m}\right) d\Omega. \quad (9.6)$$

Здесь следует считать, что индексы i, l, m пробегают все возможные для них значения. Это же условие нужно иметь в виду и в отношении всех прочих формул настоящего параграфа. Интеграл действия \mathcal{S} рассматривается как функционал, зависящий от электромагнитного потенциала Φ_l , что и указано в левой части равенства. Кроме того, он, разумеется, зависит и от вида области Ω , по которой производится интегрирование.

Основное утверждение вариационного принципа состоит в том, что уравнения движения электромагнитного поля, т. е. уравнения Максвелла, а также физические законы сохранения, которым это поле подчиняется, могут быть получены в качестве необходимых условий экстремума функционала \mathcal{S} . Этот экстремум должен

достигаться по отношению к бесконечно малым вариациям пространственно-временных координат x^i и функций $\Phi_i(x^i)$.

Мы будем применять вариационный принцип прежде всего к изучению электромагнитного поля в вакууме при отсутствии источников. Если обратиться к рис. 3, то это означает, что в слое между Σ_1 и Σ_2 существует поле, созданное источниками, действовавшими в промежуток времени, более ранний по отношению к Σ_2 , причем в самом этом слое источники, по той или иной причине, могут уже не учитываться. В конкретных формулах, относящихся к этому случаю, мы будем использовать гауссову систему единиц. Нашей задачей будет показать, что функция Лагранжа в формуле (9.6) действительно может быть выбрана так, что с ее помощью будут получены уравнения Максвелла, вид которых нам известен. Вначале, однако, мы рассмотрим интеграл действия и условия его экстремума в общем виде и лишь затем обратимся к конкретизации полученных результатов для случая электромагнитного поля.

Предположим, что координаты x^i и функции $\Phi_i(x^i)$, входящие в (9.6), подвергаются преобразованию, при котором вместо x^i вводятся новые координаты \tilde{x}^i , а вместо $\Phi_i(x^i)$ — новые функции $\tilde{\Phi}_i(\tilde{x}^i)$. Определим вариации δx^i и $\delta \Phi_i(x^i)$, которые будем считать бесконечно малыми *), равенствами

$$\tilde{x}^i - x^i = \delta x^i, \quad (9.7_1)$$

$$\tilde{\Phi}_i(\tilde{x}^i) - \Phi_i(x^i) = \delta \Phi_i(x^i). \quad (9.7_2)$$

Важным примером бесконечно малой вариации координат является формула (5.24) для преобразования Лоренца. По поводу формулы (9.7₂) заметим еще, что вариация функций Φ_i может совершаться, вообще говоря, независимо от вариации координат, но так как с помощью (9.7₁) координаты x^i можно выразить через \tilde{x}^i , то новые функции $\tilde{\Phi}_i$ можно всегда считать зависящими от этих последних. Действительно, вариации δx^i в формуле (9.7₁) нужно рассматривать как заданные функции.

Переход от x^i к \tilde{x}^i связан, разумеется, с изменением области интегрирования. Новую область обозначим $\tilde{\Omega}$. Таким образом, в результате вариации будет получен новый интеграл действия, имеющий вид

$$\mathcal{S}[\tilde{\Phi}_i(\tilde{x}^i)] = \int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}(\tilde{x}^i, \dot{\tilde{\Phi}}_i(\tilde{x}^i), \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial \tilde{x}^m}(\tilde{x}^i)) d\tilde{\Omega}. \quad (9.8)$$

*) Изучение вариационного принципа проводится ниже в соответствии с изложением в курсе И. М. Гельфанда и С. В. Фомина «Вариационное исчисление» (Физматгиз, 1961), а также в гл. I книги Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей» («Наука», 1976). Подробное вычисление вариаций необходимо для правильной их интерпретации.

Необходимое условие экстремума для \mathcal{S} состоит в том, что если рассмотреть разность

$$\mathcal{S} [\tilde{\Phi}_l(\bar{x}^i)] - \mathcal{S} [\Phi_l(x^i)], \quad (9.9)$$

разложенную в ряд Тейлора по степеням вариаций δx^i и $\delta \Phi_l$, то член первого порядка в этом разложении должен обращаться в нуль при произвольных бесконечно малых δx^i и $\delta \Phi_l$.

9.3. Для исследования формулы (9.9) понадобится ряд дополнительных сведений о вариациях, которые мы сейчас получим.

Определим прежде всего бесконечно малую разность

$$\tilde{\Phi}_l(x^i) - \Phi_l(x^i) = \bar{\delta} \Phi_l(x^i), \quad (9.10)$$

которую естественно назвать *вариацией формы* функции $\Phi_l(x^i)$. Из (9.7₂) и (9.10) видно, что

$$\begin{aligned} \delta \Phi_l(x^i) &= \tilde{\Phi}_l(\bar{x}^i) - \tilde{\Phi}_l(x^i) + \bar{\delta} \Phi_l(x^i) \simeq \\ &\simeq \frac{\partial \tilde{\Phi}_l}{\partial x^i} \delta x^i + \bar{\delta} \Phi_l(x^i) \simeq \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i} \delta x^i + \bar{\delta} \Phi_l. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Таким образом, полная вариация функции $\delta \Phi_l$ представлена с точностью до бесконечно малых порядка выше первого в виде суммы двух членов, первый из которых обусловлен вариацией координат, а второй не зависит от этой вариации. В дальнейшем знаком \simeq всюду обозначаются равенства, выполняющиеся с такой же точностью. Далее

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}. \quad (9.12)$$

Обозначим теперь через $\delta \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i} \right)$ главную часть разности $\frac{\partial \tilde{\Phi}_l(\bar{x}^k)}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \Phi_l(x^k)}{\partial x^i}$. Можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_l(\bar{x}^k)}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \Phi_l(x^k)}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} [\tilde{\Phi}_l(\bar{x}^k) - \Phi_l(\bar{x}^k)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^i} [\Phi_l(\bar{x}^k) - \Phi_l(x^k)] + \left(\frac{\partial \Phi_l(\bar{x}^k)}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \Phi_l(\bar{x}^k)}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (9.13)$$

В правой части (9.13) дифференцируемая функция в первом слагаемом — величина первого порядка малости; поэтому в силу (9.12) $\partial/\partial \bar{x}^k$ можно заменить на $\partial/\partial x^k$. Итак, первое слагаемое с точностью до величин более высокого порядка малости может быть записано

в виде $\frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{\delta}\Phi_l(\bar{x}^k)) \simeq \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{\delta}\Phi_l(x^k))$. Второе слагаемое после разложения дифференцируемой функции в ряд Тейлора с такой же точностью равно $\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial x^k} \delta x^k \right)$.

Наконец,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Phi_l(\bar{x}^k) \simeq \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Phi_l(x^k) \simeq - \frac{\partial(\delta x^m)}{\partial x^i} \frac{\partial\Phi_l(x^k)}{\partial x^m}.$$

Итак, окончательно

$$\delta \left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial x^i} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{\delta}\Phi_l) + \frac{\partial^2\Phi_l}{\partial x^i \partial x^m} \delta x^m. \quad (9.14)$$

Элемент интегрирования $d\tilde{\Omega}$ в интеграле (9.8) связан, как обычно, с $d\Omega$ соотношением

$$d\tilde{\Omega} = \frac{\partial(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d\Omega.$$

Из формулы (9.7₁) видно, что

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \delta_{ik} + \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^k};$$

поэтому главная часть якобиана равна

$$\frac{\partial(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \simeq 1 + \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i}. \quad (9.15)$$

Если теперь обозначить через $\delta\mathcal{S}$ сумму членов в (9.9), линейных относительно δx^i и $\delta\Phi_l$, то с учетом (9.15) получим

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_l} \delta\Phi_l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi_l/\partial x_i)} \delta \left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial x^i} \right) + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i} \right] d\Omega. \quad (9.16)$$

Если же выразить $\delta\Phi_l$ через $\bar{\delta}\Phi_l$ с помощью (9.11), а также воспользоваться формулой (9.14), то

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_l} \frac{\partial\Phi_l}{\partial x^k} \delta x^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi_l/\partial x_i)} \frac{\partial^2\Phi_l}{\partial x^k \partial x^i} \delta x^i + \right. \\ \left. + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi_l/\partial x^k)} \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{\delta}\Phi_l) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_l} \bar{\delta}\Phi_l \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Первые четыре подынтегральных слагаемых можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\mathcal{L} \delta x^k),$$

а пятое — в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi_l/\partial x^k)} \bar{\delta}\Phi_l \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi_l/\partial x^k)} \right) \bar{\delta}\Phi_l.$$

В результате получим

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_l} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)} \right] \bar{\delta} \Phi_l + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)} \bar{\delta} \Phi_l + \mathcal{L} \delta x^k \right] \right\} d\Omega. \quad (9.17)$$

Вектор Φ_l называется *экстремальным вектором функционала* \mathcal{S} , если он является решением уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_l} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)}. \quad (9.18)$$

Предположим теперь, что по отношению к произведенной вариации координат x^i и потенциалов Φ_l функция действия \mathcal{S} инвариантна, т. е. разность (9.9) обращается в нуль. Тогда из (9.17), (9.18) и (9.11) следует, что любой экстремальный вектор Φ_l удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)} \bar{\delta} \Phi_l + \mathcal{L} \delta x^k \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)} \left(\delta \Phi_l - \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^m} \delta x^m \right) + \mathcal{L} \delta x^k \right] = 0. \quad (9.19)$$

Это соотношение — основное при выводе законов сохранения.

§ 10*. Теорема Э. Нетер. Дифференциальные и интегральные законы сохранения для электромагнитного поля в релятивистской форме

10.1. Пусть бесконечно малая вариация координат представляет собой неоднородное преобразование Лоренца (5.24), т. е.

$$\delta x^k = g^{kk} \omega_{kj} x^j + \omega^k. \quad (10.1)$$

Все параметры ω_{kj} и ω^k линейно независимы между собой. Функция Φ^k определяется тем, что она преобразуется как вектор при собственных преобразованиях Лоренца, при трансляциях же не изменяется. Тогда, по самому определению вектора, при бесконечно малых преобразованиях должно иметь место соотношение

$$\delta \Phi^k = g^{kk} \omega_{kj} \Phi^j, \quad (10.2)$$

аналогичное (10.1). При подстановке (10.1) и (10.2) в (9.19) коэффициенты при каждом из параметров ω_{kj} и ω^k должны обращаться в нуль независимо друг от друга.

Определим тензорные величины:

$$T^{\cdot k}_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^k)} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^m} - \delta_{km} \mathcal{L}, \quad (10.3)$$

$$\mu_{kmj} = T_{km} x_j - T_{kj} x_m \quad (10.4)$$

и

$$\sigma_{kmj} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_j / \partial x^k)} \Phi_m - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi^m / \partial x^k)} \Phi_j. \quad (10.5)$$

Тогда результат упомянутой подстановки с учетом антисимметричности параметров ω_{kj} выразится в виде уравнений

$$\frac{\partial \Gamma^{km}}{\partial x^k} = 0 \quad (10.6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\mu^{kmj} + \sigma^{kmj}) = 0. \quad (10.7)$$

По причинам, которые вскоре станут понятными, T^{km} называется тензором энергии-импульса, μ^{kmj} — тензором момента импульса, а σ^{kmj} — тензором спина электромагнитного поля. Точнее, эти тензоры описывают плотности названных физических величин. Мы видим, что выполнение равенства (10.6) следует из инвариантности функции действия \mathcal{S} относительно группы трансляций в пространстве-времени, а равенства (10.7) — из инвариантности относительно группы собственных преобразований Лоренца. Совместное же выполнение обоих этих равенств является следствием инвариантности функции действия \mathcal{S} по отношению к неоднородной группе Лоренца, которая включает указанные преобразования в качестве своих подгрупп. Соотношения (10.6) и (10.7) называются дифференциальными законами сохранения энергии-импульса и четырехмерного момента импульса. Мы доказали в нашем частном случае так называемую первую *теорему Нетер*. Эта теорема утверждает, что инвариантности функции действия относительно всякой группы преобразований с конечным числом параметров соответствует выполнение дифференциального закона сохранения. Нужно помнить, что таким законам сохранения удовлетворяют, как видно из вышеизложенного, только функции Φ^i , обладающие свойством экстремальности, т. е. являющиеся решениями уравнений Лагранжа.

Мы видим, что дифференциальным законом сохранения для некоторой величины называется утверждение о том, что четырехмерная дивергенция этой величины обращается в нуль. Смысл такой терминологии можно понять, если вспомнить формулу (7.2), выражающую закон сохранения заряда в дифференциальной форме, т. е. уравнение непрерывности в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции вектора тока. Формулы (10.6) и (10.7) отличаются лишь тем, что аналогичному условию подчиняются величины тензорного типа. Более конкретное их истолкование будет рассмотрено ниже.

10.2. Перейдем к изучению некоторых важных особенностей тензоров (10.3) — (10.5) в связи с формулировкой для них законов сохранения.

Пусть, прежде всего, ψ^{lkm} — произвольный тензор третьего ранга, антисимметричный по отношению к индексам k и l , т. е. $\psi^{klm} = -\psi^{lkm}$. Рассмотрим величину

$$T'^{km} = T^{km} + \partial\psi^{lkm}/\partial x^l. \quad (10.8)$$

Так как $\partial^2\psi^{lkm}/\partial x^k\partial x^l \equiv 0$ по предположению о свойстве антисимметрии тензора ψ^{klm} , то T'^{km} удовлетворяет закону сохранения (10.6), если T^{km} удовлетворяет этому закону. Другими словами, форму тензора энергии-импульса можно изменить преобразованием вида (10.8), не нарушая закона сохранения.

Рассмотрим теперь момент импульса (10.4) и вычислим его дивергенцию $\partial\mu^{kmj}/\partial x^k$, входящую в уравнение (10.7). Непосредственно из (10.4) следует

$$\partial\mu^{kmj}/\partial x^k = T^{jm} - T^{mj}, \quad (10.9)$$

если только T^{km} удовлетворяет уравнению (10.6). Поэтому в случае, когда T^{km} — симметричный тензор, правая часть (10.9) обращается в нуль. Отсюда, принимая во внимание (10.7), получим равенства

$$\frac{\partial\mu^{kmj}}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial\sigma^{kmj}}{\partial x^k} = 0. \quad (10.10)$$

Другими словами, если тензор энергии-импульса симметричен, то момент импульса и спин поля сохраняются каждый в отдельности. Если же тензор энергии-импульса не симметричен, то в принципе можно попытаться использовать преобразование (10.8), подобрав функцию ψ^{lkm} так, чтобы тензор T'^{km} оказался симметричным.

С помощью дифференциальных законов сохранения (10.6) и (10.7) могут быть получены интегральные законы сохранения. Для этого достаточно проинтегрировать равенства (10.6) и (10.7) сначала по цилиндрической четырехмерной области, изображенной на рис. 3. Если Σ — полная поверхность, ограничивающая такую область, то теорема Остроградского — Гаусса вида (9.5') приводит к равенствам

$$\oint_{\Sigma} T^{ik} n_k^* d\Sigma = 0, \quad \oint_{\Sigma} (\mu^{kmj} + \sigma^{kmj}) n_k^* d\Sigma = 0.$$

Устраним теперь боковую поверхность цилиндра, неограниченно расширяя ее между фиксированными пространственноподобными поверхностями Σ_1 и Σ_2 . Ограничимся исследованием таких полей, для которых интегралы от рассматриваемых тензоров по этой боковой поверхности обращаются в нуль при упомянутом предельном переходе. Это означает, что поле должно достаточно быстро убывать на пространственноподобной бесконечности. Тогда интеграл по Σ сведется к интегралам по Σ_1 и Σ_2 . Как всегда, применение

теоремы Остроградского — Гаусса связано с выбором положительного направления нормали n_k , например в сторону, внешнюю по отношению к объему, по которому производится интегрирование. Определив вместо этого вектор n_k с положительным направлением в сторону области абсолютного будущего на обеих гиперповерхностях, получим равенство

$$\int_{\Sigma_1} T^{ik} n_k d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} T^{ik} n_k d\Sigma_2, \quad (10.11)$$

и аналогичное равенство для второго интеграла. Введем определения:

$$\begin{aligned} P^i[\Sigma] &= A \int_{\Sigma} T^{ik} n_k d\Sigma, \\ M^{mj}[\Sigma] &= B \int_{\Sigma} (\mu^{kmj} + \sigma^{kmj}) n_k d\Sigma, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где Σ — произвольная пространственноподобная гиперповерхность, а A и B — скалярные коэффициенты. Из предыдущих рассуждений следует, что если T^{ik} и $\mu^{kmj} + \sigma^{kmj}$ удовлетворяют дифференциальным законам сохранения, то P^i и M^{mj} не зависят от выбора гиперповерхности Σ . Это и значит, что для P^i и M^{mj} выполняются *интегральные законы сохранения*.

10.3. Нам нужно применить изложенную общую теорию к исследованию электромагнитного поля. Ясно, что основой такого применения является правильный выбор функции Лагранжа. Инвариантность функции действия (9.6) по отношению к преобразованиям Лоренца будет обеспечена, если функция Лагранжа будет инвариантом этих преобразований, так как $d\Omega$ сам по себе обладает этим свойством (см. стр. 71). Поэтому в качестве функции Лагранжа следует взять инвариант преобразований Лоренца, построенный с помощью потенциалов и их производных. Из релятивистской теории, изложенной в § 7, видно, что непосредственное отношение к описанию электромагнитного поля имеет инвариант I_1 , определенный равенством (7.10₁). Выберем функцию Лагранжа \mathcal{L} в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} I_1 = -\frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad (10.13)$$

и покажем, что такой выбор приводит к правильным с физической точки зрения результатам. Разумеется, умножение функции Лагранжа на постоянный множитель, в частности изменение ее знака, существенно не влияет на эти результаты. Удобнее всего функцию \mathcal{L} переписать так:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{ii} g^{kk} F_{ik}^2 = -\frac{1}{4} g^{ii} g^{kk} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} \right)^2, \quad (10.14)$$

в соответствии с формулой (7.5). Такая функция \mathcal{L} обладает и свойством градиентной инвариантности. Это очевидно, так как тензор F_{ik} градиентно-инвариантен.

Уравнения Эйлера — Лагранжа (9.18) принимают в нашем случае вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_k / \partial x^i)} = 0, \quad (10.15)$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x_l} \right). \quad (10.16)$$

Благодаря градиентной инвариантности функции \mathcal{L} можно всегда считать, что потенциалы подчинены условию Лоренца (7.15). Тогда предыдущее равенство примет вид однородного волнового уравнения

$$\partial^2 \Phi_k / \partial x_i \partial x^i = 0 \quad (10.17)$$

для электромагнитного поля в отсутствие источников.

Перейдем к исследованию сохраняющихся величин. Прежде всего вычислим производную $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial \Phi_l / \partial x^m)$. Так как в (10.14) проведено суммирование по всем значениям индексов i и k , производная $\partial \Phi_l / \partial x^m$ при фиксированных значениях l и m встретится в этой сумме дважды: в члене F_{lm}^2 и в члене F_{ml}^2 . Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi_l / \partial x^m)} = -g^{ll} g^{mm} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^m} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial x^l} \right) = -F_{ml} g^{ll} g^{mm}.$$

Здесь по l и по m уже не проводится суммирование. В выражение для тензора энергии-импульса (10.3) входит, таким образом, сумма $g^{kk} g^{ll} F_{kl} \partial \Phi_l / \partial x^m$. Запишем ее в виде

$$g^{kk} g^{ll} F_{kl} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^m} = \\ = g^{kk} g^{ll} F_{kl} F_{ml} + g^{kk} g^{ll} \frac{\partial}{\partial x^l} (F_{kl} \Phi_m) - g^{kk} g^{ll} \Phi_m \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^l} \quad (10.18)$$

(суммирование только по индексу l). Но последнее слагаемое обращается в нуль, так как $g^{kk} g^{ll} \partial F_{kl} / \partial x^l$ равно левой части уравнения (10.17). Предпоследнее же слагаемое имеет вид добавки к тензору, рассмотренной в связи с преобразованием (10.8). Отбросим его и перейдем тем самым к новому тензору T^{km} , не нарушая закона сохранения. Этот новый тензор энергии-импульса оказывается к тому же симметричным:

$$T_{km} = -g^{ll} F_{kl} F_{ml} - g_{km} \mathcal{L} = -g^{ll} F_{kl} F_{ml} + \frac{1}{4} g_{km} F_{pq} F^{pq}. \quad (10.19)$$

Путем умножения обеих частей предыдущего равенства на g_{hk} индекс k тензора $T_{.m}^k$ был опущен вниз. Из (10.19) следует

$$T_{00} = -g^{\alpha\alpha} F_{0\alpha} F_{0\alpha} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (10.20)$$

Вспоминая закон сохранения энергии поля, который был сформулирован в § 3, мы видим, что компонента T_{00} имеет физический смысл плотности энергии поля.

Так же, непосредственно из сравнения (10.19) с определениями (7.6) и формулами § 3, находим *)

$$T_{\alpha 0} = T_{0\alpha} = -[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_{\alpha} = -\frac{1}{c} S_{\alpha}, \quad (10.20_2)$$

$$-T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(e)} + T_{\alpha\beta}^{(m)} \equiv T_{\alpha\beta}^{(M)}. \quad (10.20_3)$$

При этом были использованы определения (3.6), (3.9) и (3.11) вектора Умова — Пойнтинга \mathbf{S} и тензора натяжений Максвелла, который мы обозначаем здесь $T_{\alpha\beta}^{(M)}$.

10.4. Теперь изучим интегральные сохраняющиеся величины (10.12). Возьмем гиперповерхность Σ в виде гиперплоскости, определяемой условием $t = \text{const}$. Тогда вектор n_k определяется формулой (9.3). При этом

$$\begin{aligned} P^0[\Sigma] &= A \int_V T^{00} dV, \\ P^{\alpha}[\Sigma] &= A \int_V T^{\alpha 0} dV = cA \int_V S_{\alpha} dV. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Таким образом, если взять $A = c^{-1}$, то временная компонента вектора $P^i[\Sigma]$ равна полной энергии поля, деленной на c , а его пространственные компоненты равны соответствующим компонентам полного импульса поля. Поэтому $P^i[\Sigma]$ называется *вектором энергии-импульса*; для гиперповерхности Σ общего вида

$$P^i[\Sigma] = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} T^{ik} n_k d\Sigma. \quad (10.22)$$

Если, кроме того, выбрать $B = c^{-1}$, то на основании (10.22) и (10.4) можно во второй формуле (10.12) **) записать:

$$dM^{mj} = \frac{1}{c} \mu^{kmj} n_k d\Sigma = x^j dP^m - x^m dP^j. \quad (10.23)$$

Это равенство напоминает определение момента импульса в классической механике в виде векторного произведения радиуса-вектора на импульс.

Ввиду антисимметричности тензора M^{mj} , он обладает шестью линейно независимыми компонентами. При этом, как непосредственно видно из формулы (10.23), пространственные компоненты

*) Правила обращения с ко- и контравариантными индексами показывают, что $T^{\alpha 0} = -T_{\alpha 0}$, $T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} = -T_{\alpha,\beta}$.

**) Учитывая лишь плотность μ^{kmj} , так как здесь выполняются равенства (10.10).

$dM^{\alpha\beta}$ могут быть в трехмерных обозначениях представлены векторным произведением $\mathbf{r} \times d\mathbf{P}$, т. е. совпадают с классическим определением плотности момента импульса. Остальные же три компоненты записываются в виде $dM^{0\alpha} = x^\alpha \frac{d\omega}{c} - ct dP^\alpha$. Сравнение с классической механикой приводит к выводу, что закон сохранения этих трех величин представляет собой закон движения центра инерции рассматриваемого элемента объема поля. Действительно, $d\omega/c^2 \equiv dm$ — это масса, соответствующая энергии, заключенной в данном элементе объема. В частном случае, когда закон сохранения величины $dM^{0\alpha}$ применяется к двум бесконечно близким гиперплоскостям $t = \text{const}$, получим $dM^{0\alpha}/dt = 0$, т. е. $(dm) \mathbf{v} = d\mathbf{P}$, где $v^\alpha = dx^\alpha/dt$.

Если перейти к трехмерным обозначениям, то закон сохранения (10.6) для тензора энергии-импульса примет следующую форму:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (10.24)$$

Первое из этих уравнений при учете (10.20) оказывается законом сохранения энергии (3.3): $\partial\omega/\partial t + \text{div } \mathbf{S} = 0$, для поля в той области пространства, где отсутствуют источники \mathbf{j} . Второе же следует сравнить с законом сохранения импульса (3.13), так как $\frac{1}{c} T^{0\alpha}$ интерпретируется в качестве плотности импульса поля. И здесь имеет место полное совпадение.

С точки зрения упомянутой на стр. 78 теоремы Нетер полученный результат нужно интерпретировать так: если интеграл действия поля инвариантен относительно преобразований неоднородной группы Лоренца, то различным подгруппам, которые содержатся в этой группе, соответствуют следующие законы сохранения: подгруппе трансляций на времениподобный вектор — закон сохранения энергии; подгруппе трансляций в трехмерном пространстве — закон сохранения импульса; подгруппе трехмерных вращений — закон сохранения момента импульса; наконец, подгруппе вращений в плоскостях вида $(0, \alpha)$ — интеграл движения центра инерции.

Мы видели, что существует еще одна сохраняющаяся величина — спиновый момент импульса, конкретное выражение для которого определяется формулами (10.5) и (10.14). Физическая интерпретация этой величины может быть получена с помощью квантовой теории поля. С точки зрения этой теории электромагнитное поле описывается как совокупность элементарных частиц — фотонов, каждый из которых обладает собственным, присущим ему, моментом импульса — спином (помимо орбитального момента, рассмотренного выше). Суммарная величина спина и описывается в классическом приближении формулой (10.5) (ср. § 5 книги Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова, цитированной на стр. 74). Напомним

вновь, что, как показывает формула (10.10), спиновый и орбитальный моменты импульса сохраняются каждый в отдельности. Поэтому, если ограничиваться вопросами классической электродинамики, то наличие спинового момента можно не учитывать.

Определение (10.13) функции Лагранжа, которое мы использовали, не является единственно возможным в теории электромагнитного поля. Так, например, в качестве функции Лагранжа часто применяется выражение

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^m}{\partial x^m} \right)^2, \quad (10.25)$$

где \mathcal{L} определяется, как и раньше, формулой (10.13). При этом легко видеть, что

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^m}{\partial x^l} \right)^2 g^{mm} g^{ll} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\Phi^k \frac{\partial \Phi^m}{\partial x^k} - \Phi^m \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^k} \right).$$

Так как второе слагаемое имеет вид дивергенции, в качестве функции Лагранжа можно использовать и одно лишь первое слагаемое, не изменяя физического содержания вариационного принципа. Определение (10.25) не обладает свойством градиентной инвариантности. Уравнения движения при использовании этой функции Лагранжа получаются непосредственно в виде (10.17); таким образом, функция Лагранжа \mathcal{L}' включает в себя условие Лоренца. Физические величины, получаемые с помощью \mathcal{L}' , также не будут удовлетворять градиентной инвариантности. Однако можно показать, что разности между ними и ранее полученными с помощью функции \mathcal{L} градиентно-инвариантными величинами не дают вклада в интегральные динамические характеристики поля, удовлетворяющие законам сохранения. Мы не будем останавливаться подробнее на этом вопросе, хотя представление функции Лагранжа в виде (10.25) оказывается удобным в квантовой электродинамике.

10.5. Перейдем теперь к формулировке вариационного принципа для электромагнитного поля, взаимодействующего с источниками в вакууме. Такая формулировка зависит, разумеется, от того, какие предположения следует сделать в отношении свойств источников. В случае, когда источники распределены в пространстве как «пылевидная» среда, рассмотренная в § 8, функцию Лагранжа можно взять в виде

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{1}{c} \Phi_i s^i - \frac{1}{2} \kappa_0 u_i u^i,$$

где $s^i = \rho_0 u^i$ — вектор тока. Вариация функции действия $\delta \mathfrak{S} = \delta \int \tilde{\mathcal{L}} d\Sigma$ может вычисляться двояким образом. Если эту вариацию производить, считая, что вектор u^i , а значит, и ток s^i не варьируются, а изменяются потенциалы, как это было ранее при исследовании свободного поля, то уравнения Лагранжа — Эйлера принимают вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} s^i$$

вместо (10.16), как это и должно быть.

Предположим теперь, что вектор Φ^i можно считать заданным и не варьировать. В формуле для вариации функции действия

интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{c} \int \Phi^i s_i d\Sigma = \int dq \int \Phi_i \frac{\partial x^i}{\partial \tau} d\tau.$$

Здесь $dq = \rho_0 dV$ и dV — объем элемента среды в той системе отсчета, где он покоится. Предположим, что варьированию подвергаются мировые линии элементов среды с фиксированными начальными и конечными точками. Условие экстремума по отношению к такой вариации примет вид уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u^i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^i}.$$

Подстановка функции Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}$ приводит к результату

$$-\kappa_0 \frac{du^i}{d\tau} + \frac{\rho_0}{c} \frac{d\Phi^i}{d\tau} = \frac{1}{c} s_k \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i},$$

т. е., так как $\frac{d\Phi^i}{d\tau} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} u^k$, то $\kappa_0 \frac{du^i}{d\tau} = \frac{1}{c} s_k F^{ki}$.

Фактически мы здесь повторили рассуждения § 8 при использовании функции Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}$ и с учетом дополнительных условий по отношению к способу вариации. Функция Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}$ может быть применена для вывода законов сохранения системы поля и источников. Мы не будем здесь разбирать этот вывод, так как он не содержит ничего принципиально нового. Отметим лишь, что, например, закон сохранения тензора энергии-импульса в этом случае примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (T^{ik} + T_{ист}^{ik}) = 0,$$

где $T_{ист}^{ik} = \kappa_0 u^i u^k$ представляет собой тензор энергии-импульса источников, т. е. «пылевидной» материи.

Разумеется, можно рассматривать также и распределения источников, обладающие более сложными свойствами, чем «пылевидная» среда, — например свойствами идеальной жидкости. При этом массу покоя κ_0 следует уже считать зависящей от собственного времени благодаря взаимодействию между элементами среды. В дальнейшем, однако, нам не представится случая воспользоваться этой теорией, и поэтому мы не будем здесь на ней останавливаться *).

*) Изложение вариационного принципа при различных свойствах среды и определение тензора энергии-импульса см. в §§ 32, 46—49 книги В. А. Фока, цитируемой на стр. 41.

СТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 11. Электростатическое поле

11.1. В § 2 было показано, что основными уравнениями, управляющими поведением электромагнитного поля в однородных изотропных средах, можно считать волновые уравнения (2.6₁) и (2.6₂) для потенциалов при лоренцевой калибровке последних. Решение этих уравнений становится возможным, если потребовать выполнения начальных и граничных условий, соответствующих физической постановке задачи. Функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, определяющие распределение в пространстве источников поля и изменение этого распределения с течением времени, будем считать известными в той мере, в какой это необходимо для решения.

Предположим, что $\mathbf{j} = 0$, магнитное поле полностью отсутствует, плотность же распределения заряда ρ и скалярный потенциал φ не зависят от времени. Уравнение (2.6₂) принимает при этом вид уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\rho(\mathbf{r}), \quad (11.1)$$

которое является основным уравнением электростатического поля. Действительно, знание функции $\varphi(\mathbf{r})$ обеспечивает возможность вычисления напряженности электрического поля по формуле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (11.2)$$

Напомним известные из теории уравнений математической физики факты, относящиеся к решению уравнения Пуассона (11.1).

Основную роль играет нахождение так называемого фундаментального решения уравнения Пуассона. Оно определяется как решение, соответствующее точечному источнику в бесконечном пространстве (когда граничные условия состоят в требовании достаточно быстрого убывания решения на бесконечности). Плотность распределения точечного источника в пространстве выражается дельта-функцией $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, где \mathbf{r}' — радиус-вектор той точки, в которой находится источник. Другими словами, фундаментальным решением уравнения (11.1) является частное решение $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ неоднородного уравнения

$$\Delta f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (11.1')$$

удовлетворяющее требованию достаточной быстроты убывания при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Можно показать, что

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.3)$$

Действительно, обозначим $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. При $\mathbf{R} \neq 0$ выполняется равенство $\Delta \frac{1}{R} = 0$, которое легко проверить непосредственным вычислением. Однако $\int \Delta \frac{1}{R} dV' \neq 0$ ввиду сингулярности подынтегральной функции при $R = 0$ (дифференцирование совершается по переменной \mathbf{r} , а интегрирование — по переменной \mathbf{r}'). Значение этого интеграла можно оценить с помощью следующего (совсем нестрогого) рассуждения. Пусть интегрирование производится по трехмерному объему, содержащему точку $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ и ограниченному замкнутой сферой σ с центром в этой точке. По теореме Остроградского — Гаусса $\int \Delta \frac{1}{R} dV' = \oint \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d\sigma$. Но так как $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}$, а $d\sigma = R^2 d\Omega$ (здесь $d\Omega$ — элемент телесного угла на сфере), получим $\int \Delta \frac{1}{R} dV' = -4\pi$, т. е. $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$. Мы не будем здесь пытаться обосновать более строго полученный результат.

Из формулы (11.3) сразу же следует, что решение уравнения (11.1) в бесконечном пространстве представляется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.4)$$

Здесь и в дальнейшем мы обозначаем буквой \mathbf{r} радиус-вектор точки наблюдения, а буквой \mathbf{r}' — радиус-вектор местонахождения источника *). Если применить оператор Δ к обеим частям равенства (11.4) и учесть (11.1') с использованием свойств дельта-функции, то функция (11.4) действительно оказывается решением уравнения (11.1). Заметим, что фундаментальное решение (11.3) симметрично: $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, так же, как и дельта-функция. Поэтому оно удовлетворяет и уравнению вида (11.1') с оператором Δ' , действующим на штрихованные переменные. Вообще, дифференциальные операции по отношению к \mathbf{r}' обозначаются штрихом. Важно иметь в виду, что

$$\text{grad} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\text{grad}' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (11.5)$$

Это соотношение часто используется.

Общее решение неоднородного уравнения (11.2) можно записать в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (11.6)$$

*) Краткая сводка формул, выражающих простейшие свойства дельта-функций, приведена в Приложении В.

где F — общее решение однородного уравнения $\Delta'F = 0$ (здесь и в дальнейшем нам удобно пользоваться оператором Δ' , функции же G и F считаются симметричными). Функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ называется *функцией Грина* для уравнения Пуассона. С ее помощью можно получить решение этого уравнения в конечном объеме пространства при определенных граничных условиях на поверхности σ , заключающей в себе данный объем. В качестве таких граничных условий часто используются условия Дирихле, когда на σ задаются значения потенциала φ , и условия Неймана, когда на σ считается заданной по нормали производная потенциала $\partial\varphi/\partial n$, т. е. нормальная составляющая электрической напряженности (11.2).

Условия Дирихле и условия Неймана обеспечивают единственность решения граничной задачи. Предположим, что найдены два решения φ_1 и φ_2 уравнения (11.1), удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям на поверхности σ .

Обозначим $u = \varphi_1 - \varphi_2$. Воспользуемся теперь формулой (Б.27), полагая в ней $\psi = \varphi = u$. Эта формула примет вид

$$\int_V (u \Delta' u + |\text{grad}' u|^2) dV' = \oint_{\sigma} u \frac{\partial u}{\partial n'} d\sigma'. \quad (11.7)$$

Но в области V выполняется уравнение $\Delta' u = 0$, на границе же σ этой области либо $u = 0$ (если φ_1 и φ_2 удовлетворяют одним и тем же условиям Дирихле), либо же $\partial u/\partial n' = 0$ (в случае условий Неймана).

В обоих случаях должно иметь место равенство $\int_V |\text{grad}' u|^2 dV' = 0$, возможное, лишь если $\text{grad}' u = 0$ в объеме V , т. е. если u постоянна в этом объеме. Для условий Дирихле приходим к выводу, что $u = 0$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, для условий же Неймана φ_1 может отличаться от φ_2 на аддитивную постоянную, что несущественно.

Воспользуемся теперь в применении к нашей области V формулой Грина (Б.28), считая при этом, что φ — какое-либо решение уравнения (11.1), а ψ — какая-либо функция Грина вида (11.6), удовлетворяющая уравнению (11.1'). С помощью свойств дельта-функции получим интегральное уравнение для функции φ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\sigma} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] d\sigma'. \quad (11.8)$$

Выбирая ту или иную функцию Грина G , можно удовлетворить тем или иным граничным условиям. Так, если функция Грина G_D обладает свойством $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ при $\mathbf{r}' \in \sigma$, то первое слагаемое в интеграле по σ обратится в нуль и мы получим решение, соответствующее заданию граничных условий Дирихле. Несколько более сложно получить интегральную формулу для граничных условий Неймана. Наконец, если положить $G = f$, то формула (11.8)

примет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{\sigma} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] d\sigma'. \quad (11.9)$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что так как задание на поверхности σ одной лишь функции φ или одной лишь производной $\partial\varphi/\partial n'$ однозначно определяет решение φ уравнения (11.1), равенство (11.9) следует рассматривать как интегральное соотношение, которому должно удовлетворять решение, соответствующее произведенному выбору $G = f$.

Если заряд распределен не в трехмерном объеме, как до сих пор предполагалось, а на двумерной поверхности σ с поверхностной плотностью $\lambda(\mathbf{r}')$, то, по аналогии с первым слагаемым в (11.9) или с формулой (11.4) для бесконечного пространства, можно записать:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\sigma} \frac{\lambda(\mathbf{r}') d\sigma'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (11.10)$$

Это — так называемый потенциал *простого слоя* (т. е. слоя зарядов, нанесенного на поверхность σ). Члены вида (11.10) следует добавлять в правую часть формулы (11.8) в тех случаях, когда внутри объема V содержатся двумерные *простые слои*. Вместе с тем, по аналогии с (11.10), первое слагаемое в поверхностном интеграле формулы (11.9) может быть названо потенциалом простого слоя, нанесенного на граничную поверхность σ с поверхностной плотностью заряда, численно равной $\partial\varphi/\partial n'$. Второе слагаемое в этом интеграле также допускает физическое описание, которое мы рассмотрим позже.

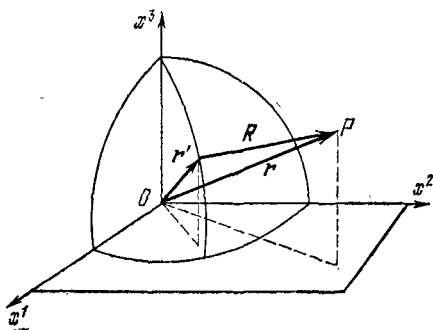


Рис. 4.

11.2. Разложение потенциала по мультипольным потенциалам. Применим формулу (11.4) для вычисления потенциала в важном частном случае, когда весь заряд, создающий поле, находится внутри некоторой сферы конечного радиуса R (ограниченное распределение заряда) и нас интересует потенциал вне этой сферы. Возьмем за начало отсчета O любую точку внутри этой сферы (удобно, однако, считать началом отсчета центр сферы) и будем интересоваться значениями поля в точке наблюдения P , находящейся вне сферы (рис. 4). Рассматривая величину $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ как

функцию компонент x'^α вектора \mathbf{r}' , можно разложить ее в ряд Тейлора около точки $\mathbf{r}' = 0$:

$$f(\mathbf{r}') = \frac{1}{r} - x'^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{x'^\alpha x'^\beta}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \left(\frac{1}{r} \right) - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x'^{\alpha_1} \dots x'^{\alpha_n} \frac{\partial^n}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (11.11)$$

Заметим, что принятые условия $r > R$, $r' < R$ обеспечивают сходимость полученного ряда. Подстановка его в исходное выражение (11.4) приводит к бесконечному ряду для потенциала

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \quad (11.12)$$

причем

$$\Phi_n = \frac{(-1)^n}{4\pi\epsilon n!} \int \rho(\mathbf{r}') x'^{\alpha_1} \dots x'^{\alpha_n} dV' \frac{\partial^n}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (11.12')$$

Член Φ_n этого ряда называется потенциалом *мультиполя порядка n* , а само разложение (11.12) носит название *разложения по мультиполям*.

Рассмотрим более подробно первые два члена разложения (11.12). Прежде всего член

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \int \rho(\mathbf{r}') dV'$$

имеет вид потенциала точечного заряда $q = \int \rho(\mathbf{r}') dv'$, сосредоточенного в начале координат. Выражение Φ_0 может быть получено, если в формулу (11.4) подставить $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')$.

Следующий член в векторном обозначении принимает вид

$$\Phi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\mathbf{p}, \text{grad} \frac{1}{r} \right), \quad (11.13)$$

где вектор \mathbf{p} определяется равенством

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad (11.14)$$

и называется *дипольным моментом* распределения зарядов.

Выражение вида (11.13) может быть получено из общей формулы (11.4) следующим образом. Предположим, что точечный отрицательный заряд $-q$ находится в начале координат, а точечный положительный заряд $+q$ — в точке с радиусом-вектором \mathbf{l} . Плотность такого распределения зарядов представляется в виде

$$\rho(\mathbf{r}') = q[\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{l}) - \delta(\mathbf{r}')].$$

Считая вектор \mathbf{l} малым по абсолютной величине, можно формально разложить первое слагаемое в ряд Тейлора по \mathbf{l} и ограничиться

двумя первыми членами этого разложения, так что

$$\rho(\mathbf{r}') \simeq -q(\mathbf{l}, \text{grad}' \delta(\mathbf{r}')), \quad (11.15)$$

причем значение градиента берется в точке, характеризуемой условием $\mathbf{l} = 0$, т. е. в начале координат. Пусть теперь абсолютная величина вектора \mathbf{l} стремится к нулю, а величина заряда q — к бесконечности таким образом, что предел произведения $\lim_{q \rightarrow \infty, \mathbf{l} \rightarrow 0} p\mathbf{l} \equiv \mathbf{p}$

существует. Вектор \mathbf{p} называется тогда дипольным моментом *точечного диполя* (находящегося в нашем случае в начале координат). Подставляя (11.15) после такого предельного перехода в формулу (11.4) и пользуясь свойствами производной от дельта-функции) (см. Приложение В), получим, с учетом соотношения (11.5),

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{(\mathbf{p}, \text{grad}' \delta(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=0})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\mathbf{p}, \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\mathbf{p}, \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\mathbf{p}, \text{grad} \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (11.16)$$

Сравнивая формулы (11.13) и (11.16), мы замечаем их формальную тождественность. Таким образом, член φ_1 разложения потенциала ограниченного распределения зарядов по мультиполям можно рассматривать как потенциал точечного диполя, помещенного в точку, выбранной, как это сделано выше, за начало отсчета. Дипольный момент этого диполя численно выражается формулой (11.14).

Заметим, что уравнением (11.14) дипольный момент определяется неоднозначно, так как он зависит от выбора начала координат. Легко убедиться, что если перенести начало координат в точку \mathbf{r}_0 , так что $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}''$, то дипольный момент делается равным

$$\mathbf{p}' = \int \rho(\mathbf{r}'') \mathbf{r}'' dV'' = \mathbf{p} - q\mathbf{r}_0,$$

где q — полный заряд, заключенный внутри сферы σ . Дипольный момент не зависит от выбора начала координат только для нейтральной в целом системы (когда $q = 0$). То же относится и к мультиполям высшего порядка (см. ниже). Мультиполь порядка n определен неоднозначно, только если равны нулю все мультиполи порядков ниже n .

Выражение (11.16) может быть использовано для непосредственного построения некоторых обобщений. Так, если считать вектор \mathbf{p} функцией пространственных координат, то можно представить себе распределение точечных диполей в пространстве или на двумерной поверхности. Электрические потенциалы, создаваемые такими распределениями в точке наблюдения \mathbf{r} , будут выражаться формулой

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \left(\mathbf{p}(\mathbf{r}'), \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (11.17)$$

в случае объемного распределения диполей. Если диполи распределены по поверхности σ , то нужно лишь заменить интегрирование по объему интегрированием по этой поверхности. Такая поверхность с распределенными на ней диполями называется *двойным слоем*. Можно заметить, что именно формальную структуру потенциала двойного слоя имеет второе слагаемое в поверхностном интеграле, входящем в формулу (11.9). При этом нужно считать, что диполи направлены по нормали к поверхности σ и $p_n(\mathbf{r}') \equiv p(\mathbf{r}') = -\varphi(\mathbf{r}')$. Таким образом, весь этот поверхностный интеграл представляется физической картиной простого и двойного слоев, одновременно нанесенных на поверхность σ .

Напряженность электростатического поля \mathbf{E} , вычисляемая, как было уже сказано выше, по формуле (11.2), может быть записана для рассмотренных выше случаев в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \rho(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (11.18_1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{grad} \left(\mathbf{p}, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{grad} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{r})}{r^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} (\mathbf{p}, \operatorname{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (11.18_2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V (\mathbf{p}(\mathbf{r}'), \operatorname{grad}) \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (11.18_3)$$

Первая из этих формул получается с помощью (11.4), вторая, определяющая напряженность поля, создаваемого точечным диполем, получается из (11.16) с помощью (Б.18) и, наконец, третья следует из (11.17).

Упомянем важную теорему о том, что если плотность заряда $\rho(\mathbf{r}')$ является ограниченной и кусочно-непрерывной функцией пространственных координат*), то потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, определяемые формулами (11.4) и (11.18₁), будут конечными и непрерывными функциями от \mathbf{r} . Аналогичным свойством обладают потенциал и напряженность, создаваемые распределением диполей согласно формулам (11.17) и (11.18₃), причем условие теоремы должно теперь выполняться для плотности распределения диполей $\mathbf{p}(\mathbf{r}')$. Если функция $\lambda(\mathbf{r}')$, определяющая потенциал простого слоя в выражении (11.10), ограничена и кусочно-непрерывна на поверхности σ , то этот потенциал ограничен и непрерывен во всем пространстве, а значит, не испытывает разрыва при переходе через поверхность σ . Однако напряженность поля, создаваемого простым слоем, имеет конечный разрыв при переходе через этот слой. Это непосредственно следует из гранич-

*) То есть существует конечное число областей, в каждой из которых функция $\rho(\mathbf{r}')$ непрерывна.

ных условий для уравнений Максвелла, рассмотренных в § 4. Наконец, двойной слой обладает тем свойством, что при переходе через него уже сам потенциал испытывает конечный скачок.

11.3. Аналогично тому, как на стр. 90 мы рассмотрели поле двух противоположных по знаку зарядов, представим себе теперь два точечных диполя с противоположно направленными и равными по абсолютной величине дипольными моментами, находящиеся в точках $\mathbf{r}' = 0$ и $\mathbf{r}' = \mathbf{l}$. Подынтегральное выражение в (11.17) может быть тогда преобразовано с помощью разложения:

$$p^\alpha(\mathbf{r}') = p^\alpha [\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{l}) - \delta(\mathbf{r}')] \simeq -p^\alpha l^\beta \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \delta(\mathbf{r}') |_{\mathbf{l}=0}.$$

Пусть существует предел $d^{\alpha\beta} = \lim_{p \rightarrow \infty, \mathbf{l} \rightarrow 0} p^\alpha l^\beta$, когда рассматриваемые диполи помещаются в одну и ту же точку, причем величина дипольного момента бесконечно возрастает. Тензор $d^{\alpha\beta}$ называется *квадрупольным моментом* получаемого при этом распределения зарядов, которое носит название *квадруполя*. В этом пределе

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon} d^{\alpha\beta} \int_V \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \delta(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} d^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x'^\beta \partial x^\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon} d^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Сравнение с формулой (11.12) показывает, что член разложения потенциала по мультиполям можно рассматривать как потенциал некоторого квадруполя. Такой процесс образования мультиполей все более высокого порядка может быть продолжен неограниченно.

Тензор $d^{\alpha\beta}$ можно считать симметричным, так как его антисимметричная часть все равно выпадает из рассмотрения благодаря суммированию; другими словами, перед переходом к пределу произведение $p^\alpha l^\beta$ может быть симметризовано. Для непрерывного распределения зарядов нужно положить

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int x'_\alpha x'_\beta \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (11.19_1)$$

Рассмотрим тензор:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV'. \quad (11.19_2)$$

Легко показать, что

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{d_{\alpha\beta}}{4\pi\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} = \frac{1}{6} \frac{Q_{\alpha\beta}}{4\pi\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}.$$

Таким образом, тензор $Q_{\alpha\beta}$ можно принять в качестве определения квадрупольного момента непрерывного распределения зарядов.

Этот тензор обладает свойством: $\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} = 0$, т. е. у него имеется лишь пять линейно независимых компонент.

Подсчитаем в заключение силу \mathbf{F} , с которой заданное электростатическое поле \mathbf{E} действует на диполь. Из предыдущего ясно, что эта сила должна определяться выражением

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} q [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})],$$

если диполь находится в точке \mathbf{r} . Производя разложение в ряд Тейлора и вспоминая определение дипольного момента \mathbf{p} , получим

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}, \text{grad}) \dot{\mathbf{E}}. \quad (11.20)$$

Формула (11.20) для статического поля может быть записана в виде $\mathbf{F} = -\text{grad } U$, где

$$U = -\mathbf{p}\mathbf{E} \quad (11.21)$$

— потенциальная энергия диполя в поле \mathbf{E} . Вращающий момент, действующий на диполь со стороны поля \mathbf{E} , может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{N} = \lim_{q \rightarrow \infty, l \rightarrow 0} \mathbf{l} \times (q\mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (11.22)$$

так как равные с точностью до бесконечно малых поправок силы $+|q|\mathbf{E}$ и $-|q|\mathbf{E}$, действующие на положительный и отрицательный заряды, образуют механическую пару сил.

В дальнейшем мы еще вернемся к изучению электростатического поля, в частности его энергетических свойств, тензора натяжений Максвелла и т. д. (см. гл. 7).

§ 12. Магнитостатическое поле, создаваемое токами

12.1. Перейдем теперь к изучению статического магнитного поля, источником которого является распределение токов с не зависящей от времени плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, рассматриваемое в некоторой инерциальной системе отсчета. В том случае, когда среда однородна и изотропна, т. е. $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и магнитная проницаемость μ постоянна, основные уравнения (1.19) и (1.20) статического магнитного поля принимают вид

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{\mu}{\alpha} \mathbf{j}. \quad (12.1)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} при условии $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ (обеспечивающем отсутствие электрического поля в данной системе отсчета) удовлетворяет в декартовых координатах уравнению

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{\mu}{\alpha} \mathbf{j}. \quad (12.2)$$

Заметим, что плотность заряда ρ считается равной нулю.

Решение уравнения (12.2) в неограниченном пространстве, удовлетворяющее условию достаточно быстрого убывания на бесконечности, можно построить для каждой компоненты вектора \mathbf{A} в отдельности точно так же, как это было сделано в предыдущем параграфе для случая скалярного потенциала ϕ . Результат записывается в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int \frac{j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (12.3)$$

Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ вычисляется с помощью формулы (2.1) $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. При этом дифференциальная операция rot производится по отношению к радиусу-вектору \mathbf{r} точки наблюдения. Применяв формулу (Б.14₃), получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.4)$$

Рассмотрим случай, когда распределение токов может быть представлено в виде некоторого числа замкнутых линейных контуров. Элемент объема каждого из этих контуров может быть записан в виде $dV' = d\sigma' ds'$, где $d\sigma'$ — площадь поперечного сечения, а ds' — элемент касательной в данной точке. Считая, что направления векторов плотности тока \mathbf{j} и касательной \mathbf{s}' совпадают, и определяя полную силу тока I формулой $I = j d\sigma$, получим полезное для дальнейшего соотношение

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = I ds'. \quad (12.5)$$

Из уравнения непрерывности ясно, что $I = \text{const}$ вдоль всего контура. Учитывая это, можно выписать частный вид формулы (12.4), определяющий напряженность $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ магнитного поля, создаваемую в точке \mathbf{r} наблюдения данным замкнутым контуром:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi\alpha} \oint \left(\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times ds'. \quad (12.6)$$

Мы получили математическую формулировку закона Био — Савара — Лапласа. Этот закон часто записывается в дифференциальной форме:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi\alpha} \frac{ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (12.7)$$

Заменим теперь в формуле (12.7) обозначения I на I_1 , ds' — на $d\mathbf{s}_1$ и \mathbf{r}' — на \mathbf{r}_1 и предположим, что в точке \mathbf{r}_2 существует электрический ток с плотностью $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2)$. Тогда напряженность $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$ определяет по формуле (3.13) объемную плотность силы $\mathbf{f}_{12}(\mathbf{r}_2)$, действующей на этот ток:

$$\mathbf{f}_{12}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu I_1}{4\pi\alpha} \oint \mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2) \times \left[d\mathbf{s}_1 \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right]. \quad (12.8)$$

Полная же сила, действующая со стороны первого контура на второй, может быть вычислена, если проинтегрировать $\mathbf{f}_{12}(\mathbf{r}_2)$ по всему второму контуру. Пользуясь при этом аналогичным (12.5) соотношением $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2) dV_2 = I_2 d\mathbf{s}_2$, получим результат:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \int \mathbf{f}_{12} dV_2 = \frac{\mu I_1}{4\pi\alpha} \int \mathbf{j}_2 dV_2 \times \oint d\mathbf{s}_1 \times \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi\alpha} \oint_1 \oint_2 d\mathbf{s}_2 \times \left[d\mathbf{s}_1 \times \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} \right], \end{aligned} \quad (12.9)$$

где $\mathbf{R}_{12} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. С помощью (Б.6) интегралы, входящие в (12.9), можно переписать в виде

$$\oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_1 (d\mathbf{s}_2, \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} - \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} (d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2).$$

Но $\left(d\mathbf{s}_2, \text{grad} \frac{1}{R_{12}} \right) = \frac{d}{ds_2} \left(\frac{1}{R_{12}} \right) ds_2$, а потому первое слагаемое содержит интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала и обращается в нуль. Таким образом,

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi\alpha} \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} (d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2) = -\mathbf{F}_{21}, \quad (12.10)$$

где \mathbf{F}_{21} — сила, действующая со стороны второго контура на первый и получаемая перестановкой индексов 1 и 2, с учетом того, что $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$. Итак, силы, действующие между двумя замкнутыми контурами, удовлетворяют третьему закону Ньютона. Из (12.10), в частности, видно, что одинаково направленные токи притягиваются, а противоположно — отталкиваются.

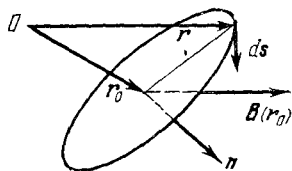


Рис. 5.

12.2. Рассмотрим достаточно малый замкнутый контур с током (рис. 5).

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем выводе, для силы, действующей на элемент $d\mathbf{s}$ контура, в магнитном поле запишем выражение

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} dV \times \mathbf{B} = \frac{1}{\alpha} I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}.$$

Силе $d\mathbf{F}$ будет соответствовать механический момент

$$d\mathbf{N} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \frac{I}{\alpha} \mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}],$$

так как $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$. С помощью (Б.6) можно видеть, что полный момент вращения, действующий на контур, равен

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\alpha} I \oint \mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}] = \frac{I}{\alpha} \oint (\mathbf{r} \mathbf{B}) d\mathbf{r} - \frac{I}{\alpha} \oint \mathbf{B} (\mathbf{r} d\mathbf{r}).$$

Если контур бесконечно мал, то второе слагаемое, на основании интегральной теоремы о среднем, преобразуется к виду $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \oint d(r^2/2) = 0$, где \mathbf{r}_0 — некоторая точка внутри контура. Считая, что всюду внутри контура $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$, подынтегральное выражение в первом интеграле можно, опять-таки с помощью (Б.6), преобразовать к следующему виду:

$$(\mathbf{r}\mathbf{B}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} [[\mathbf{r} \times d\mathbf{r}] \times \mathbf{B}] + \frac{1}{2} d((\mathbf{r}\mathbf{B})\mathbf{r}). \quad (12.11)$$

При этом учитывается, что $d\mathbf{B} = 0$. Интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю, и, таким образом, получаем окончательный результат:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (12.12)$$

где величина

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2\alpha} \oint (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = \frac{I}{\alpha} \int \mathbf{n} d\sigma = \frac{I}{\alpha} S\mathbf{n} \quad (12.13)$$

называется *магнитным моментом* рассматриваемого малого контура с током. В формуле (12.13) \mathbf{n} — нормаль к плоскости контура, а $d\sigma$ — элемент площади. Другими словами, магнитный момент пропорционален площади, охватываемой контуром, несущим ток.

Можно сравнить выражения (12.12) и (11.22). Это сравнение показывает, что действие магнитного поля \mathbf{B} на элементарный контур с током, обладающий магнитным моментом \mathbf{m} , аналогично действию электрического поля \mathbf{E} на точечный диполь с дипольным моментом \mathbf{p} . Такая аналогия доказана нами пока лишь в отношении «пассивного» поведения токов в поле, создаваемом внешними источниками. Однако мы сейчас покажем, что она имеет место и для токов, когда они рассматриваются в качестве источников магнитного поля.

12.3. Исследуем подробнее вид формулы (12.3) для того случая, когда все токи, создающие магнитное поле, заключены внутри ограниченного трехмерного объема. Тогда можно воспользоваться разложением (11.11). Подставив его в (12.3), получим в векторных обозначениях

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' - \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int \left(\mathbf{r}', \text{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int \left\{ \mathbf{r}' \text{grad} \left(\mathbf{r}' \text{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \dots \quad (12.14) \end{aligned}$$

Рассмотрим первые два члена. Распределение токов вновь будем считать таким, что его можно разложить на некоторое число замкнутых нитей. Так как окончательная формула может быть получена суммированием по этим нитям, рассмотрим одну из них в отдель-

ности. При этом первый член оказывается равным нулю, так как $\int \mathbf{j} dV' = I \oint ds' = 0$. Ненулевым и наиболее медленно убывающим с расстоянием членом является второй. Подынтегральное выражение, входящее в него, можно преобразовать с помощью формулы, аналогичной (12.11). Нужно лишь в последней заменить \mathbf{r} на \mathbf{r}' , $d\mathbf{r}$ — на $d\mathbf{r}'$, вместо \mathbf{B} подставить $\text{grad } \frac{1}{r}$, а дифференцирование во втором слагаемом правой части применять к \mathbf{r}' , считая точку наблюдения фиксированной, так что $d(\text{grad } \frac{1}{r}) = 0$. Таким образом,

$$\left(\mathbf{r}' \text{ grad } \frac{1}{r}\right) d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{2} \left[[\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'] \times \text{grad } \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{2} d \left(\left(\mathbf{r}' \text{ grad } \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}' \right). \quad (12.15)$$

При интегрировании полного дифференциала по замкнутому контуру получаем нуль и, отбрасывая более быстро убывающие члены, что можно сделать на достаточно больших расстояниях от объема, занятого токами, приходим к формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi\alpha} \mathbf{m} \times \text{grad } \frac{1}{r}. \quad (12.16)$$

Здесь магнитный момент контура, порождающего магнитное поле, определяется прежним выражением (12.13).

Обратимся теперь вновь к основным уравнениям (12.1) и заметим, что во всех тех точках пространства, где $\mathbf{j} = 0$, выполняется равенство $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, а также $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Попробуем на основании этих равенств ввести скалярный магнитный потенциал ψ вместо векторного \mathbf{A} , которым мы до сих пор пользовались, с помощью определения

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \psi. \quad (12.17)$$

Предположим для простоты, что токи, создающие поле, как и раньше, составляют несколько замкнутых контуров. Интегральная форма (1.18) основного уравнения магнитостатики в нашем случае может быть записана в следующем виде:

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{1}{\alpha} I, \quad (12.18)$$

где I — полный ток, протекающий сквозь контур, по которому проводится интегрирование в левой части. Если теперь $\psi_0(\mathbf{r})$ — некоторое значение магнитного потенциала, установленное при начале обхода контура, то по завершении этого обхода и возвращении в точку \mathbf{r} потенциал ψ должен принимать некоторое новое значение $\psi(\mathbf{r})$ такое, что

$$|\psi(\mathbf{r}) - \psi_0(\mathbf{r})| = \frac{1}{\alpha} I; \quad (12.19)$$

этот результат можно проверить, подставив (12.17) в (12.18). Таким образом, магнитный скалярный потенциал не может быть однозначно определен как функция от \mathbf{r} , в отличие от электростатического скалярного потенциала, так как $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ повсюду. Нужно подчеркнуть, что наше обсуждение относится здесь к магнитному полю, источником которого являются электрические токи. Но магнитное поле может порождаться и постоянными магнитами, т. е. ферромагнетиками, о чем уже упоминалось в § 1. В применении к этому случаю понятие магнитного скалярного потенциала будет полезным, и мы вернемся еще к его обсуждению в § 36 *). В главе 8 будут рассмотрены дальнейшие вопросы, касающиеся структуры магнитного поля токов, а также энергетические свойства магнитного поля в различных средах.

§ 13. Решение неоднородного волнового уравнения. Потенциалы Льенара — Вихерта

13.1. Решения уравнений Максвелла во многих важных случаях удовлетворяют волновым уравнениям с постоянными коэффициентами. Так, в § 1 было получено однородное волновое уравнение (1.24) для напряженностей электромагнитного поля в вакууме при отсутствии источников, а в § 2 выведены для этого же случая волновые уравнения для потенциалов. Последние принимают особенно симметричный вид (2.6₁) и (2.6₂), если используется лоренцева калибровка. Напомним, кстати, что в § 7 была установлена релятивистская инвариантность уравнений (2.6) и условия Лоренца для полей в вакууме. Свойства решений таких волновых уравнений при тех или иных граничных и начальных условиях можно изучить на примере волнового уравнения вида

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = -g(\mathbf{r}, t) \quad (13.1)$$

для скалярной функции ψ , считая при этом функцию g заданной.

При $g \equiv 0$ мы получаем соответствующее однородное уравнение, сферически-симметричные решения которого, как легко проверить непосредственным дифференцированием, выражаются в виде

$$\chi(r, t) = \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{h(r+ct)}{r}, \quad (13.2)$$

где f и h — произвольные дважды дифференцируемые функции. Решение это имеет особенность в точке $r = 0$. Первое слагаемое

*) Заметим здесь, что источником этого потенциала является распределение магнитных диполей. При этом магнитный диполь, в отличие от электрического, не имеет смысла представлять в виде пары положительного и отрицательного зарядов. Магнитные заряды сами по себе не существуют. Важно лишь то, что простейшие (в идеале — точечные) источники магнитного поля обладают ориентацией, которая и характеризуется направлением их магнитных моментов.

описывает волны, расходящиеся из этой точки, второе же — волны, сходящиеся в нее. Роль решения (13.2) по отношению к уравнению (13.1) аналогична роли, которую играет функция $1/R$ в уравнении Пуассона, изучение которого содержится в § 11.

Рассмотрим область V трехмерного пространства, ограниченную поверхностью σ , и попытаемся определить решение уравнения (13.1) в «точке наблюдения» $\mathbf{r}' = 0$, находящейся внутри области V , в момент времени $t' = 0$. Воспользуемся для этой цели формулой Грина (Б.28), считая, что входящая в нее функция ψ удовлетворяет уравнению (13.1), а функция φ является решением однородного волнового уравнения. Эти условия приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(\mathbf{r}', t') g(\mathbf{r}', t') dV' + \frac{1}{c^2} \int_V \left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \right) dV' = \\ = \oint_{\sigma} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Проинтегрируем обе части равенства (13.3) по времени. Пределы интегрирования t'_1 и t'_2 выберем при этом так, чтобы на всей граничной поверхности σ выполнялись неравенства

$$t'_1 + \frac{r'}{c} < 0, \quad t'_2 + \frac{r'}{c} > 0. \quad (13.4)$$

Предполагая, что поверхность σ расположена на конечном расстоянии от точки наблюдения, условие (13.4) можно всегда удовлетворить. Так как $\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t'} \right)$, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \int_V dV' \varphi(\mathbf{r}', t') g(\mathbf{r}', t') + \frac{1}{c^2} \int_V dV' \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t'} \right) \Big|_{t'_1}^{t'_2} = \\ = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \oint_{\sigma} d\sigma \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right). \end{aligned}$$

С физической точки зрения понятно, что в качестве функции φ нужно взять то решение однородного волнового уравнения, которое описывает волны, сходящиеся в точку наблюдения $\mathbf{r}' = 0$. Кроме того, будем считать, что эти волны представляют собой «мгновенные импульсы», т. е. положим $h(t' + r'/c) = \delta(t' + r'/c)$. Наконец, так как выбранная функция сингулярна в точке $\mathbf{r}' = 0$, окружим эту точку сферой σ_1 , радиус которой следует впоследствии устремить к нулю. Благодаря условию (13.4) дельта-функция обращается в нуль на пределах интегрирования. Поэтому в левой части второе

слагаемое исчезает. В результате

$$\int_{t'_1}^{t'_2} dt \int dV' \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \frac{g(r', t')}{r'} = \\ = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \oint_{\sigma} d\sigma \left(\left[\psi \operatorname{grad}' \frac{\delta(t' + r'/c)}{r'} - \frac{\delta(t' + r'/c)}{r'} \operatorname{grad}' \psi \right], \mathbf{n}' \right). \quad (13.5)$$

Здесь использовано определение $\partial/\partial n' = (\mathbf{n}', \operatorname{grad}')$. Нужно иметь в виду, что поверхностный интеграл в правой части состоит из двух слагаемых: из интеграла по прежней («внешней») граничной поверхности и интеграла по сфере σ_1 , введенной выше. Далее,

$$\operatorname{grad}' \frac{\delta(t' + r'/c)}{r'} = \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \operatorname{grad}' \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} \operatorname{grad}' \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) = \\ = \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \operatorname{grad}' \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} \left[\frac{\partial}{\partial r'} \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \right] \operatorname{grad}' r' = \\ = \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \operatorname{grad}' \frac{1}{r'} + \frac{1}{cr'} \left[\frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) \right] \operatorname{grad}' r'.$$

При этом

$$\int_{t'_1}^{t'_2} dt' \psi(\mathbf{r}', t') \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) = - \frac{\partial \psi}{\partial t'} \Big|_{t' = -r'/c}.$$

Используя свойства дельта-функции и в остальных слагаемых, результат для внешней границы можно записать в следующем виде:

$$\oint \left(\psi \operatorname{grad}' \frac{1}{r'} - \frac{1}{cr'} \frac{\partial \psi}{\partial t'} \operatorname{grad}' r' - \frac{1}{r'} \operatorname{grad}' \psi, \mathbf{n}' \right) \Big|_{t' = -r'/c} d\sigma'. \quad (13.6)$$

Перейдем к интегралу по внутренней сфере. При этом будем искать решение ψ в классе таких функций, которые вместе со своими производными регулярны в точке наблюдения $\mathbf{r}' = 0$. Так как $d\sigma' = r'^2 d\Omega'$, где $d\Omega'$ — элемент телесного угла, то оценка интеграла вида (13.5) при $r' \rightarrow 0$ с помощью теоремы о среднем показывает, что в нем остается конечным лишь первое слагаемое. Нужно учесть при этом, что направление положительной нормали \mathbf{n}' к внутренней сфере σ_1 прямо противоположно направлению вектора \mathbf{r}' (рис. 6). Поэтому

$$\oint_{\sigma_1} \psi \left(\operatorname{grad}' \frac{1}{r'}, \mathbf{n}' \right) d\sigma' = \oint \psi \frac{1}{r'^2} r'^2 d\Omega' \rightarrow 4\pi \psi \Big|_{r' = 0}. \quad (13.7)$$

Собирая результаты (13.5), (13.6) и (13.7), получим

$$\begin{aligned} \psi|_{r'=0, t'=0} = & \frac{1}{4\pi} \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \int_V dV' \frac{\delta(t'+r'/c)}{r'} g(\mathbf{r}'; t') + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \frac{1}{r'} \text{grad}' \psi + \frac{1}{cr'} \frac{\partial \psi}{\partial t'} \text{grad}' r' - \psi \text{grad}' \frac{1}{r'} \right\}_{t'=t-r'/c} \mathbf{n}' d\sigma. \end{aligned}$$

Ясно, что эта формула останется справедливой, если заменить t' на $t' - t$ и \mathbf{r}' — на $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ при единственном условии: $t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c = 0$.

Это означает, что наблюдение проводится в точке с координатами \mathbf{r} и в момент времени t . Окончательно:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V dV' \frac{\delta(t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} g(\mathbf{r}', t') + I_K, \quad (13.8)$$

где интеграл по внешней границе рассматриваемой области

$$I_K = \frac{1}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{R} \text{grad}' \psi + \frac{1}{cR} \frac{\partial \psi}{\partial t'} \text{grad}' R - \psi \text{grad}' \frac{1}{R} \right)_{t'=t-R/c} \mathbf{n}' d\sigma \quad (13.9)$$

называется *интегралом Кирхгофа* *). Мы обратимся к более подробному рассмотрению его в § 20 в связи с теорией дифракции электромагнитных волн. Пока же предположим, что поверхность σ расширяется на бесконечность и что при этом выполняется условие $I_K \rightarrow 0$. Это условие выделяет класс таких решений ψ , которые достаточно быстро убывают на бесконечности. В этом случае решение может быть записано в виде

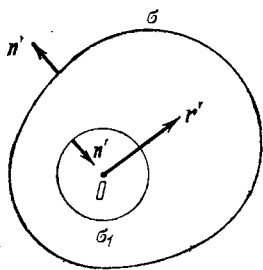


Рис. 6.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{g(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}. \quad (13.10)$$

В дальнейшем всюду в этой главе мы будем считать, что $I_K = 0$. В частности, для электромагнитных потенциалов в декартовых координатах

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V dV' \frac{\delta(t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t'), \quad (13.11_1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V dV' \frac{\delta(t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'). \quad (13.11_2)$$

Такие потенциалы называются *запаздывающими*.

*) При этом мы для простоты обозначений устремили t'_1 к $-\infty$, а t'_2 — к $+\infty$, что, как видно из предыдущего, не влияет на результат.

13.2. Физический смысл формул (13.11) совершенно очевиден. Потенциал, наблюдаемый в точке \mathbf{r} в момент времени t , представляет собой суммарный эффект мгновенных импульсов, успевающих к этому времени с конечной скоростью c распространения дойти от источников до точки наблюдения. Ясно, что решение для произвольной однородной изотропной среды получится просто заменой c на скорость v распространения электромагнитных импульсов в этой среде. Имея это в виду, мы будем в дальнейшей части этого параграфа выписывать формулы для случая вакуума, используя при этом гауссову систему единиц.

Если применить оператор $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к обеим частям формулы (13.8), то получим необходимое следствие того факта, что эта формула выражает решение уравнения (13.1) (в бесконечном пространстве, так как $I_K = 0$):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(t' - t). \quad (13.12)$$

Функция G имеет вид

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (13.12')$$

Она называется *фундаментальным решением* неоднородного волнового уравнения. Отсюда можно видеть, что формула (13.8) записывается также следующим образом:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_V dV' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') g(\mathbf{r}', t'). \quad (13.13)$$

При этом фундаментальное решение (13.12') обеспечивает выполнение условия причинности, совпадающего с рассмотренным выше условием запаздывания.

Функция (13.12') релятивистски-инвариантна. Действительно, формула (В.7) показывает, что при любом фиксированном $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

$$\begin{aligned} \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} g(\mathbf{r}', t') = \\ = \int dt' \delta\left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|(t' - t) + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{c}\right) g(\mathbf{r}', t'), \end{aligned}$$

но вместе с тем при интегрировании по dV' должно быть $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -c(t' - t)$ в силу свойств дельта-функции. Поэтому можно записать также:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{t > t'} d\Omega' \delta\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{c} - c(t' - t)^2\right) g(\mathbf{r}', t'),$$

где $d\Omega' = dt' dV'$ — элемент четырехмерного объема в пространстве Минковского. Интегрирование производится по той половине

светового конуса $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = c^2(t - t')^2$, имеющего вершину в точке наблюдения, которая направлена в прошлое ($t' < t$). С учетом релятивистских обозначений для тока (7.1) и потенциалов (7.3), формулы (13.11) также принимают явно инвариантный вид:

$$\Phi^i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi c} \int_{t > t'} d\Omega' \delta\left(\frac{1}{c} \bar{R}^2\right) s^i(\mathbf{r}', t'). \quad (13.14)$$

Здесь \bar{R} — четырехмерный вектор в пространстве-времени с компонентами $R^0 = c(t - t')$ и $R^\alpha = r^\alpha - r'^\alpha$.

Заметим, что использование при решении волнового уравнения сбоих слагаемых формулы (13.2) (а не только второго из них, как это было сделано выше) с дельтообразными функциями h и f привело бы, как легко в этом убедиться, просмотрев еще раз ход решения, к представлению потенциалов в бесконечном пространстве в виде суммы рассмотренных выше запаздывающих выражений с опережающими, для которых должно выполняться противоположное условие $t = t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, и которые, таким образом, не удовлетворяют условию причинности. В четырехмерной записи (13.14) этому соответствует интегрирование по всему световому конусу с вершиной в точке наблюдения ct, \mathbf{r} , т. е. отказ от условия $t > t'$.

13.3. Важный частный случай полученного решения (13.11) для потенциалов имеет место тогда, когда источником электромагнитного поля является единственный точечный заряд. При этом удобнее всего использовать формулы (13.11), включающие дельта-функцию. Предположим, что уравнение движения заряда $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}''(t')$ известно. Плотность заряда выражается в виде $\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t'))$, а электрический ток, соответствующий движению заряда в пространстве, равен $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \rho\mathbf{v}$. Скорость \mathbf{v} также можно считать известной функцией от t' . Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int dV' \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t')) = \\ &= \frac{q}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Формула для A отличается лишь присутствием множителя $\beta = \frac{1}{c} \mathbf{v}(t')$ под интегралом.

Дельта-функция зависит здесь от аргумента $T = t' - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}|$, переменной же интегрирования является t' . Для вычисления интеграла следует использовать формулу (B.8). При этом

$$\kappa \equiv dT/dt' = 1 - \beta n, \quad (13.16)$$

где $n = R/R$, $R = r - r'(t)$ и $\beta = v/c = dr'/c dt'$. Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\kappa R} \Big|_{t'=t-R/c}. \quad (13.17)$$

Совершенно аналогичное вычисление приводит к результату:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\beta}{4\pi\kappa R} \Big|_{t'=t-R/c}. \quad (13.18)$$

Вводя, как в формуле (13.14), четырехмерный вектор \vec{R} , лежащий на световом конусе в прошлом (для которого $R^0 = |\mathbf{R}|$), легко убедиться в том, что выражения (13.17) и (13.18) записываются релятивистски-инвариантным образом:

$$\Phi^i(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi} \frac{u^i}{u^k R_k} \Big|_{R^0 = R}. \quad (13.19)$$

Потенциалы (13.17) и (13.18) точечного источника называются *потенциалами Льенара — Вихерта*. С их помощью можно вычислить напряженности поля, создаваемого таким источником, что и будет сделано в следующем параграфе.

13.4. Напомним еще раз, что волновое уравнение принимает одинаковый для всех декартовых компонент четырехмерного потенциала явно релятивистски-инвариантный вид (13.1) лишь при использовании лоренцевской калибровки. В кулоновской калибровке (см. § 2) уравнения для потенциалов имеют форму (2.9). Уравнение (2.9₂) для скалярного потенциала представляет собой уравнение Пуассона и решение его может быть записано в виде (11.4)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (13.20)$$

Обращаем внимание на то, что (13.20) описывает мгновенное действие источника, так как аргумент t должен быть одинаковым в обеих частях равенства. Кроме того, теперь можно считать член $\frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в уравнении (2.9₁) для векторного потенциала известной функцией от координат и времени.

С помощью уравнения непрерывности (1.13) можно записать:

$$\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{grad} \int \frac{\text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (13.21)$$

С другой стороны, выражение для \mathbf{j} может быть записано в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_L, \quad (13.22)$$

где, по определению,

$$\mathbf{j}_L = -\text{grad} \int \frac{\text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (13.23)$$

Ясно, что $\text{rot } \mathbf{j}_L = 0$. Кроме того,

$$\text{div } \mathbf{j}_T = \text{div } \mathbf{j} + \Delta \int \frac{\text{div}' j}{4\pi |r-r'|} dV' = \text{div } \mathbf{j} - \int \text{div}' j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' = 0.$$

Этот результат получен с использованием (11.1') и (11.3). Формула (13.22) представляет разложение тока \mathbf{j} на «поперечную» часть \mathbf{j}_T и «продольную» \mathbf{j}_L . Подставляя это разложение в правую часть уравнения (2.9₂) и учитывая, что в силу (13.21) и (13.23) $\mathbf{j}_L = \text{grad } \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, получим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \mathbf{j}_T. \quad (13.24)$$

Решение же этого последнего уравнения выражается формулой (13.11₂), если заменить в ней \mathbf{j} на поперечную часть тока \mathbf{j}_T .

Использование кулоновской калибровки не изменяет физического смысла решений уравнений Максвелла, хотя и не обладает явной релятивистской инвариантностью. Если, например, источник электромагнитного поля находится в той же системе отсчета, что и наблюдатель, то исследование этого поля с помощью кулоновской калибровки часто упрощается.

§ 14. Напряженности поля точечного заряда.

Поле излучения. Равномерно и прямолинейно движущийся заряд

14.1. Напряженности поля произвольно движущегося точечного заряда могут быть вычислены по формулам (2.1) и (2.2), если Φ и \mathbf{A} представляют собой потенциалы Льенара — Вихерта, определенные выражениями (13.17) и (13.18). Содержащаяся в этих формулах дельта-функция облегчает учет условия запаздывания. Производя под знаком интеграла дифференцирование по времени t и координатам \mathbf{r} наблюдения, заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \text{grad } \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) &= \frac{\partial}{\partial R} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) \text{grad } R = \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) \frac{\partial T}{\partial R} \text{grad } R = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta(T)}{\partial T} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Здесь, как и в § 13, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$, $\text{grad} = \partial/\partial \mathbf{r}$, $T \equiv t' - t + R/c$. Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \delta}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \delta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{d\delta}{dT}, \\ \text{grad } \frac{\delta(T)}{R} &= -\frac{1}{R^2} \mathbf{n} \delta(T) + \frac{1}{cR} \mathbf{n} \frac{d\delta(T)}{dT}, \\ \text{rot} \left(\mathbf{\beta} \frac{\delta(T)}{R} \right) &= \left(\text{grad } \frac{\delta(T)}{R} \right) \times \mathbf{\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= q \int \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \delta(T) + \frac{1}{cR} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \frac{d\delta(T)}{dT} \right] dt', \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= q \int [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}] \left\{ \frac{1}{cR} \frac{d\delta(T)}{dT} - \frac{\delta(T)}{R^2} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (14.1)$$

С помощью формул (В.3) и (В.8), а также обозначения (13.16) для производной можно записать следующие выражения для интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{n}}{R^2} \delta(T) dt' &= \frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} \Big|_{T=0}, \\ \int \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{R} \frac{d\delta(T)}{dT} dt' &= - \frac{d}{dT} \left[\frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right]_{T=0} = - \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right]_{T=0}. \end{aligned}$$

Условие $T = 0$ есть просто условие запаздывания. В результате (14.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= q \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{T=0}, \\ 4\pi \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= q \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R} \right] \right\}_{T=0}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Остается произвести в полученных формулах дифференцирование по времени t' . Эта операция будет в дальнейшем обозначаться точкой. Запишем:

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \dot{R} = - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} + \frac{\mathbf{n}(\dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} = \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R}.$$

Здесь использована формула (Б.6) с учетом того, что $\mathbf{n}^2 = 1$. Выполняя теперь дифференцирование, можно сначала получить равенства

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= q \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{T=0}, \\ 4\pi \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= q \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \times \mathbf{n} \right]_{T=0}, \end{aligned}$$

откуда видно, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (14.3)$$

Доведя до конца дифференцирование, указанное в формуле для \mathbf{E} , получим после громоздкого, но элементарного приведения подобных членов

$$4\pi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \Big|_{T=0} + \frac{q}{c} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^3 R} \Big|_{T=0}. \quad (14.4)$$

Первое слагаемое зависит только от скорости источника и убывает при увеличении расстояния от него пропорционально R^{-2} ; второе

же объединяет все члены, зависящие от ускорения $\ddot{\beta}$, и убывает пропорционально R^{-1} . Обозначим первое слагаемое E^0 , а второе $E^{(1)}$. Аналогичным образом может быть разделен на две части вектор B , определяемый формулой (14.3).

14.2. Рассмотрим поток энергии через двумерную сферу $R(t') = \text{const}$ (при некотором фиксированном t'), который вычисляется с помощью (3.6) и (3.4). Так как элемент поверхности этой сферы имеет вид $R^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, а произведение $E \times B$, определяющее плотность потока энергии, содержит, как видно из (14.3) и (14.4), члены, пропорциональные R^{-2} , R^{-3} и R^{-4} , то при достаточно больших значениях R только первые из них могут давать ненулевой вклад в полный поток энергии, проходящий через сферу. Но это именно те члены, которые определяются векторным произведением $E^{(1)} \times B^{(1)}$. Итак, наблюдатель, находящийся достаточно далеко от излучающего заряда, заметит поток энергии, определяемый только векторами $E^{(1)}$ и $B^{(1)}$. Поэтому $E^{(1)}$ и $B^{(1)} = n \times E^{(1)}$ называются *полями излучения*. Более быстро убывающие с расстоянием поля E^0 и B^0 можно назвать *квазистационарными*. Отметим, что из (14.4) следует:

$$nE^{(1)} = 0. \quad (14.5)$$

Поэтому часть вектора S , определяющая на больших расстояниях от заряда поток энергии, после применения (Б.6) выражается в виде

$$S = c[E^{(1)} \times [n \times E^{(1)}]] = cn |E^{(1)}|^2. \quad (14.6)$$

С другой стороны, с помощью (14.5) и (Б.6)

$$E^{(1)} = B^{(1)} \times n. \quad (14.7)$$

Во всех приводимых формулах необходимо иметь в виду условие запаздывания. Равенства (14.3) и (14.7) показывают, что векторы n , $E^{(1)}$ и $B^{(1)}$, взятые в момент времени t' в точке $R(t')$, образуют ортогональную тройку векторов (рис. 7). При этом вектор n , как видно из (14.6), определяет направление распространения энергии излучения. Таким образом, поле излучения является поперечным (по отношению к n). Далее, из (14.3) или (14.7) следует, что

$$|E^{(1)}| = |B^{(1)}|. \quad (14.8)$$

Поэтому выражение (14.6) для потока энергии можно использовать также в виде

$$S = cn |B^{(1)}|^2 = cn \cdot \frac{1}{2} (|E^{(1)}|^2 + |B^{(1)}|^2) = cn\omega^{(1)}, \quad (14.9)$$

где $\omega^{(1)}$ — плотность энергии поля излучения в данной точке, согласно (3.5). Итак, явление излучения состоит в переносе энергии $\omega^{(1)}$ со скоростью c (мы рассматриваем излучение в вакууме).

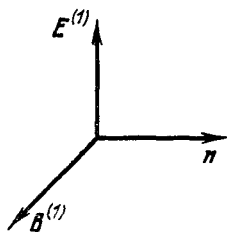


Рис. 7.

С точки зрения релятивистского описания электромагнитного поля соотношение (14.3) приводит к тому, что оба инварианта (7.10) для поля излучения обращаются в нуль. Отсюда видно, что поперечность поля излучения и равенство (14.8) являются релятивистски-инвариантными свойствами этого поля, т. е. имеют место в любой инерциальной системе отсчета.

Мы еще вернемся в дальнейшем к более детальному рассмотрению свойств излучения.

14.3. Изучим сейчас подробнее тот случай, когда $\dot{\beta} = 0$ и поэтому поля \mathbf{E} и \mathbf{B} целиком сводятся к их квазистационарным составляющим \mathbf{E}^0 и \mathbf{B}^0 . Вплоть до конца настоящего параграфа мы не будем выписывать индекс 0, имея в виду только эти составляющие. Итак, формулы

$$4\pi\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[\frac{(n - \beta)(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{T=0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{(\beta \times \mathbf{n})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{T=0}. \quad (14.10)$$

определяется электромагнитное поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно относительно наблюдателя. Эти формулы сравним с результатом релятивистских преобразований (7.13) электромагнитного поля.

Прежде всего, в той системе отсчета (обозначим ее \bar{K}), где заряд покоится, т. е. при условии $\beta = 0$, получим

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}|_{\beta=0} = \frac{qn}{4\pi R^2}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}|_{\beta=0} = 0. \quad (14.11)$$

Как и следовало ожидать, это — обычное выражение для электростатического поля точечного заряда (ср. § 11). Условия запаздывания $T = 0$ здесь учитывать не нужно просто потому, что \mathbf{R} в данном случае не зависит от времени.

Если в системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно вместе с точечным зарядом, поле, создаваемое им, определяется формулами (14.11), то поле, наблюдаемое в любой другой инерциальной системе отсчета, может быть получено с помощью преобразований Лоренца (7.13) для напряженностей. При этом нужно иметь в виду, что вектор \mathbf{R} , входящий в (14.11), следует интерпретировать как расстояние между положениями заряда и точки наблюдения, одновременными по отношению к системе отсчета, связанной с зарядом. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, введем для него новое обозначение $\bar{\mathbf{R}}$ и перепишем формулу (14.11) в виде

$$\bar{\mathbf{E}} = q \frac{\bar{\mathbf{R}}}{4\pi \bar{R}^3}, \quad \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (14.11')$$

так как $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{R}}/R$. Рассмотрим теперь электрическое поле \mathbf{E} в системе отсчета K наблюдателя, по отношению к которой заряд

движется со скоростью \mathbf{v} . Непосредственное применение формул, обратных (7.13), дает результат:

$$E = \bar{E}_{\parallel} + \gamma \bar{E}_{\perp} = \frac{q}{4\pi R^3} (\bar{R}_{\parallel} + \gamma \bar{R}_{\perp}) = \gamma \frac{q}{4\pi R^3} R, \quad (14.12)$$

если обозначить R радиус-вектор, соединяющий положения заряда и наблюдателя, одновременные по отношению к системе отсчета K^* . Действительно, формулы $\bar{R}_{\parallel} = \gamma R_{\parallel}$ и $\bar{R}_{\perp} = R_{\perp}$, использованные для вывода (14.12), выражают эффект сокращения движущегося масштаба, рассмотренный в § 5.

Совпадение формул (14.12) и (14.10) еще не очевидно, однако оно имеет место, как этого и следует ожидать. Для того чтобы убедиться в этом, запишем формулу (14.12) в несколько ином виде, определив в системе отсчета новый вектор R_* равенствами $R_{*\parallel} = R_{\parallel}$, $R_{*\perp} = \gamma^{-1} R_{\perp}$. Тогда

$$\bar{R}^2 = (\gamma R_{\parallel} + R_{\perp})^2 = \gamma^2 R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2 = \gamma^2 R_*^2,$$

т. е. $\bar{R} = \gamma R$ и

$$E = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\gamma^2 R_*^2} R. \quad (14.13)$$

Кроме того, $R_*^2 = R_{\parallel}^2 + \gamma^{-2} R_{\perp}^2 = R^2 + (\gamma^{-2} - 1) R_{\perp}^2 = R^2 - \beta^2 R_{\perp}^2 = R^2 - [\beta \times R]^2$, так как $R_{\perp}^2 = \beta^{-2} [\beta \times R]^2$.

Теперь следует учесть, что вектор R , используемый в формуле (14.10), вычисляется в системе отсчета K наблюдателя, но связывает между собой не одновременные положения источника и наблюдателя, а вычисляется с учетом условия запаздывания. При этом можно записать $R(t') = R(t) + (t' - t) \frac{dR}{dt'}$, так как $\frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = -\beta = \text{const}$ (напомним, что $\beta = \frac{1}{c} \frac{dr'}{dt'}$, а $R = r - r'$). Если условие запаздывания выполняется, то $t' = t - R_{\text{зап}}/c$ и $R_{\text{зап}} = R - \frac{R_{\text{зап}}}{c} \frac{dR}{dt'} = R + \beta R_{\text{зап}}$. Отсюда, кстати, сразу следует, что $\beta \times R_{\text{зап}} = \beta \times R$, а вектор R , соединяющий одновременные положения, совпадает по своему смыслу с входящим в (14.13).

С помощью (13.16) и предыдущих формул легко убедиться в том, что

$$(\kappa R)_{\text{зап}}^2 = R^2 - [\beta \times R_{\text{зап}}]^2 = R^2 - [\beta \times R]^2 = R_*^2$$

и $n - \beta = (R_{\text{зап}} - \beta R_{\text{зап}}) / R_{\text{зап}} = R / R_{\text{зап}} = \kappa R / R_*$. Подстановка этих результатов в формулу (14.10) приводит ее к виду (14.13).

С помощью аналогичных соображений можно записать магнитное поле, создаваемое равномерно и прямолинейно движущимся зарядом, в виде

$$B = \frac{q}{4\pi} \frac{\beta \times R}{\gamma^2 R_*^3}. \quad (14.14)$$

В нерелятивистском пределе $\gamma \approx 1$, а потому и $R_* \approx R$. Если еще ввести обозначение $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ для тока, обусловленного движе-

*) Напомним, что индексы \parallel и \perp обозначают компоненты, соответственно параллельные и ортогональные к относительной скорости \mathbf{v} .

нием заряда, то выражение (14.14) формально совпадает с законом Био — Савара — Лапласа (12.7), если положить $I ds' = j$. Совпадение это имеет, однако, лишь очень ограниченный физический смысл. Прежде всего, сам дифференциальный закон (12.7) может быть должным образом интерпретирован лишь в связи с интегральным соотношением (12.6), определяющим магнитное поле, которое создается в данной точке пространства замкнутым контуром постоянного тока, рассматриваемым как целое. Кроме того, вектор магнитного поля точечного заряда, определяемый по формуле (14.14), изменяется по величине и направлению при движении этого заряда в пространстве, в отличие от постоянного поля, определяемого выражением (12.7). Таким образом, аналогия между рассматриваемыми полями ограничена лишь бесконечно малым промежутком времени. Для того чтобы она стала более полной, можно представить себе, что точечный заряд, уходящий из данной точки пространства, сразу же сменяется в этой точке другим таким же зарядом, движущимся с той же скоростью. Но и в этом случае аналогия ограничивается тем, что не существует такой системы отсчета, в которой поле точечного заряда оказалось бы чисто магнитным; напротив, как мы видели выше, существует такая система отсчета, в которой оно чисто электростатическое.

С точки зрения релятивистской теории преобразований электромагнитного поля (см. § 7) поле точечного заряда относится к классу таких полей, для которых выполняется неравенство $I_1 < 0$, где инвариант I_1 определяется формулой (7.10₁). Напротив, магнитостатическое поле, рассмотренное в § 12, является примером противоположного случая, когда $I_1 > 0$. Действительно, такое поле может создаваться, например, током, протекающим внутри замкнутого контура (проводника) произвольной формы, все части которого находятся в покое в некоторой инерциальной системе отсчета, в которой и будут справедливы формулы, выведенные в § 12. При этом проводник всегда можно считать нейтральным, благодаря чему в этой системе отсчета будет отсутствовать электрическое поле. Условие нейтральности можно считать выполненным в том случае, если плотности положительного и отрицательного зарядов распределены по объему проводника с макроскопической точки зрения непрерывно и в каждой точке этого объема уравновешивают друг друга. Распределение точечных зарядов привело бы к наличию дипольного момента, поэтому и необходимо предположить, что плотности заряда не имеет особенностей.

С точки зрения другой инерциальной системы K' равенство положительной и отрицательной плотностей заряда нарушится (при этом полный заряд, разумеется, останется равным нулю *). Поэтому в системе K' , помимо магнитного, появится и электриче-

*) См. формулы преобразования (7.18) на стр. 61.

ское поле, которое можно вычислить по формулам (7.13), если известно поле \mathbf{B} в системе отсчета K . Разумеется, поле, создаваемое движением положительного заряда, находящегося в объеме dV' проводника, с некоторой скоростью \mathbf{v} в системе K по отношению к отрицательному, который для простоты будем считать неподвижным, может быть вычислено по формуле (12.7), если подставить в нее $I ds' = \mathbf{j} dV' = \rho \mathbf{v} \cdot dV'$.

В заключение заметим, что точечный заряд, движущийся по замкнутому контуру, будет испытывать ускорение, а поэтому в принципе должен излучать, постоянный же ток не создает излучения.

§ 15*. Закон сохранения энергии-импульса для электромагнитного поля точечного заряда в релятивистской форме

15.1. С помощью формул, полученных в предыдущем параграфе, можно непосредственно вычислить поток энергии излучения, создаваемого точечным зарядом, угловое распределение этого потока и т. п. (см. § 16). Однако из этих формул трудно понять, какой смысл имеет явление излучения с точки зрения специальной теории относительности. Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно придать всему исследованию поля излучения релятивистскую форму, опираясь на релятивистски-инвариантную запись потенциалов Льенара — Вихерта (13.19). Это и будет сделано ниже. Приведенные в настоящем параграфе результаты получены разными авторами совсем недавно *).

Прежде всего, представим напряженность поля, создаваемого точечным зарядом, и тензор энергии-импульса этого поля в удобной для дальнейшего применения форме.

Обозначим через \bar{x} четырехмерный радиус-вектор точки P в пространстве Минковского, в которой наблюдается излучение, и через \bar{z} — радиус-вектор мировой линии точечного заряда (рис. 8). Будем считать, что на этой мировой линии задан параметр собственного времени τ , так что $\bar{z} = \bar{z}(\tau)$. Дифференцирование по параметру τ обозначается в дальнейшем точкой. Напомним формулы (5.16),

*) Наше изложение здесь и частично в § 23 основано на работе: P. A. Hogan, Nuovo Cimento 15B, 136 (1973), которая в свою очередь опирается на результаты Синга и Рорлиха.

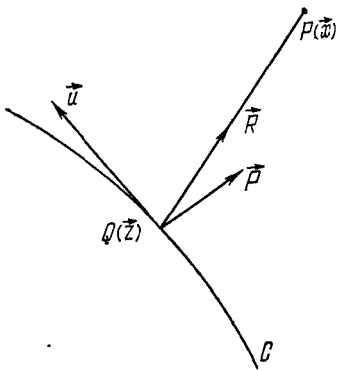


Рис. 8.

(5.18) и (5.19):

$$\vec{u} = \dot{\vec{z}}, \quad \vec{w} = \dot{\vec{u}}, \quad \vec{u}^2 = c^2, \quad \vec{u}\vec{w} = 0. \quad (15.1)$$

Вектор \vec{u}/c — единичный времениподобный вектор, касательный к мировой линии заряда в точке \vec{z} , вектор же четырехмерного ускорения \vec{w} пространственноподобен.

Определим

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{z}(\tau). \quad (15.2)$$

Как было показано в § 13, условие возможности наблюдения в точке P электромагнитного излучения, испускаемого в точке Q , состоит в том, что

$$\vec{R}^2 = 0, \quad (15.3)$$

т. е. $R^0 = x^0 - z^0 = \pm |\mathbf{R}|$, где $|\mathbf{R}|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (x^\alpha - z^\alpha)^2$. Наблюдение в P происходит по времени позже, чем испускание в Q , в том случае, когда $R^0 > 0$, т. е. $R^0 = +|\mathbf{R}|$. Поэтому нулевой вектор $\vec{R} = \{ +|\mathbf{R}|, \mathbf{R} \}$ будем называть запаздывающим.

Введем теперь в точке Q пространственноподобный вектор \vec{p}^* , определяемый так, что

$$\vec{p}^2 = -1, \quad \vec{u}\vec{p} = 0, \quad (15.4)$$

причем требуется, чтобы можно было записать разложение

$$\vec{R} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{p}, \quad (15.5)$$

где ρ и ρ' — некоторые числа. Другими словами, \vec{p} является единичным вектором проекции вектора \vec{R} на пространственноподобную гиперплоскость, ортогональную к вектору \vec{u} . Из (15.3) и (15.5) с учетом (15.1) следует $\rho' = \pm \rho/c$, т. е. $\vec{R} = \rho (\vec{p} \pm \vec{u}/c)$. С помощью (15.4) и (15.1) отсюда получим $\rho = \pm \frac{1}{c} (\vec{u}\vec{R})$.

Учтем теперь условие запаздывания. Так как выражение для ρ релятивистски-инвариантно, можно подсчитать его в мгновенно сопутствующей системе отсчета, где $\vec{u} = \{c, 0\}$ и, таким образом, $\rho = \pm R^0$, т. е. если для \vec{R} выполняется условие запаздывания, то $\rho = \pm |\mathbf{R}|$. Таким образом, можно выбрать верхний знак, считать ρ для «запаздывающего» вектора \vec{R} произвольным неотрицательным числом и записать разложение этого вектора в виде

$$\vec{R} = \rho (\vec{p} + \vec{u}/c). \quad (15.6)$$

*) Он, разумеется, не имеет ничего общего с четырехмерным импульсом

Из определения ρ' и ρ видно, что выбору $\rho = + |R|$ должен соответствовать выбор знака плюс в скобках. Заметим, что второе из условий (15.4) может быть записано в виде $\rho^0 = \frac{1}{c} \mathbf{v} \mathbf{p}$, и поэтому в мгновенно сопутствующей системе $\rho^0 = 0$. С другой стороны, из (15.6) следует

$$\rho = -\bar{p}\bar{R}. \quad (15.7)$$

Таким образом, в мгновенно сопутствующей системе $\rho = \mathbf{p}\mathbf{R}$. Отметим также для дальнейших ссылок рассмотренное выше равенство

$$\rho = \frac{1}{c} \bar{u}\bar{R}. \quad (15.8)$$

Потенциал Льенара — Вихерта в точке \vec{x} , определяемый формулой (13.19), с учетом (15.8) принимает вид

$$\Phi_n(\vec{x}) = -\frac{q}{4\pi c} \frac{u_n}{\rho}. \quad (15.9)$$

15.2. Вычисление тензора $F_{mn}(\vec{x})$ напряженностей поля должно производиться с помощью дифференцирования выражений (15.9) по координатам x' точки наблюдения P . При этом нужно рассматривать виртуальные смещения dx' этой точки. Но эти смещения должны быть такими, чтобы точка P оставалась возможной точкой наблюдения. Для того чтобы удовлетворить этому требованию, нужно при дифференцировании вводить также и смещение точки Q по мировой линии частицы такое, чтобы точки P и Q все время оставались связанными одна с другой нулевым запаздывающим вектором \vec{R} . Итак, при дифференцировании по точке P нужно учитывать равенство $\vec{R} d\vec{R}/d\tau = 0$, т. е. $\vec{R} (d\vec{x}/d\tau - \vec{u}) = 0$.

Появление здесь производной $d\vec{x}/d\tau$ как раз и обусловлено тем обстоятельством, что при заданной мировой линии точку P нельзя смещать «куда угодно» без риска нарушить условие возможности наблюдать в ней излучение, испускаемое с этой мировой линии. Использование формулы (15.6) с учетом (15.1) и (15.4) дает

$$\frac{1}{c\rho} R_m \frac{dx^m}{d\tau} = 1. \quad (15.10)$$

Но при такой однозначной связи точек P и Q можно и параметр τ считать функцией координат x^m (т. е. параметризовать рассматриваемый участок мировой линии с помощью этих координат). Тогда $d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x^m} dx^m$. Сравнивая это выражение с (15.10), можно видеть, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^m} = \frac{1}{c\rho} R_m. \quad (15.11)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u_r}{\partial x^p} = \frac{du_r}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^p} = \frac{1}{c\rho} \omega_r R_p. \quad (15.12)$$

Далее, из определения (15.2) следует

$$\frac{\partial R^r}{\partial x^p} = \delta_p^r - \frac{dz^r}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^p} = \delta_p^r - \frac{1}{c\rho} u^r R_p \quad (15.13)$$

и из (15.8), (15.12) и (15.13):

$$c \frac{\partial \rho}{\partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x^r} (u^l R_l) = u_r - \frac{c}{\rho} R_r \left\{ 1 - \frac{\vec{\omega} \vec{R}}{c^2} \right\}.$$

Введем обозначения:

$$W \equiv \frac{\vec{\omega} \vec{R}}{c^2} = \frac{\rho}{c^2} (\vec{\omega} \vec{\rho}) \quad (15.14)$$

и

$$B \equiv \frac{1}{\rho} (1 - W). \quad (15.15)$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^r} = \frac{u_r}{c} - BR_r = W \frac{u_r}{c} - p_r (1 - W). \quad (15.16)$$

Теперь из (15.9), (15.12) и (15.16) получим

$$-\frac{4\pi c}{q} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{u_n}{\rho} \right) = \frac{1}{c\rho^2} \omega_n R_m + \frac{B}{\rho^2} u_n R_m - \frac{u_n u_m}{c\rho^2}. \quad (15.17)$$

Определим вектор:

$$\vec{V} \equiv \frac{1}{c} \vec{\omega} + B \vec{u}. \quad (15.18)$$

Тогда

$$F_{mn} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x^m} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial x^n} = \frac{q}{4\pi c} \frac{V_{[m} R_{n]}}{\rho^2}. \quad (15.19)$$

Здесь $A_{[m} B_{n]} \equiv A_m B_n - A_n B_m$. Последнее слагаемое в (15.17) при антисимметризации исчезает. Формулы (15.19) при переходе к трехмерным обозначениям совпадают с выражениями для напряженностей поля, полученными в § 14. В качестве полезного упражнения предлагаем читателю убедиться в этом.

Вспомогательный вектор \vec{V} обладает следующими свойствами:

$$\vec{V}^2 = \frac{1}{c^2} \vec{\omega}^2 + c^2 B^2, \quad \vec{V} \vec{R} = c, \quad \vec{V} \vec{u} = c^2 B. \quad (15.20)$$

При выводе второго из них нужно воспользоваться соотношением (15.6) и определениями (15.14) и (15.15).

15.3. Подставим формулы (15.19) в определение (10.19) тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Учитывая второе из

равенств (15.20), а также (15.3), получим

$$\rho^4 \left(\frac{4\pi c}{q} \right)^2 F_{ab} F^{ab} = (V_a R_b - V_b R_a)(V^a R^b - V^b R^a) = \\ = 2\vec{V}^2 \vec{R}^2 - 2(\vec{V}\vec{R})^2 = -2c^2.$$

Аналогично вычисляется и член $F_{kl} F^l{}_m$. В результате

$$\left(\frac{4\pi c}{q} \right)^2 T_{km} = \frac{1}{\rho^4} \left[c(V_k R_m + V_m R_k) - R_k R_m \vec{V}^2 - \frac{c^2}{2} g_{km} \right]. \quad (15.21)$$

С помощью последней формулы легко вычислить также «проекции» тензора энергии-импульса на векторы \vec{p} , \vec{R} и \vec{u}/c , которые необходимы для дальнейших вычислений. Именно, пользуясь разложением (15.6), а также обозначениями (15.14) и (15.15), запишем

$$\left(\frac{4\pi}{q} \right)^2 T^{km} p_m = \frac{1}{\rho^4} \left[\left(\frac{W}{\rho} + \rho \frac{\vec{V}^2}{c^2} \right) R^k - \frac{\rho}{c} V^k - \frac{1}{2} p^k \right], \quad (15.22)$$

$$\left(\frac{4\pi}{q} \right)^2 T^{km} R_m = \frac{1}{2\rho^3} \left(p^k + \frac{u^k}{c} \right), \quad (15.23)$$

$$\left(\frac{4\pi}{q} \right)^2 T^{km} \frac{u_m}{c} = \frac{1}{c\rho^4} \left[\rho V^k + \left(cB - \frac{\rho \vec{V}^2}{c} \right) R^k - \frac{1}{2} u^k \right]. \quad (15.24)$$

Знание тензора энергии-импульса позволяет рассмотреть законы сохранения. Проведем в пространстве-времени вокруг мировой

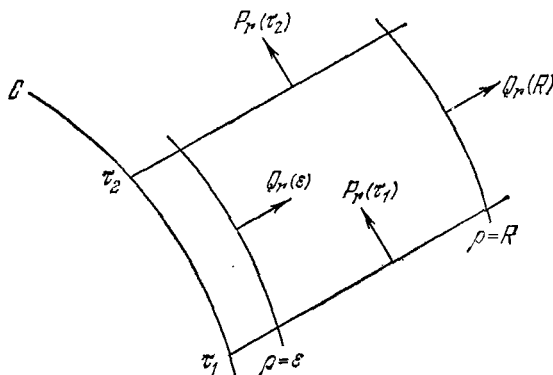


Рис. 9.

линии C точечного заряда две цилиндрические гиперповерхности, определяемые уравнениями $\rho = \epsilon$ и $\rho = R$ (рис. 9). Обозначим через Ω четырехмерный объем, ограниченный этими поверхностями, а также пересекающимися их двумя световыми конусами, отходящими от мировой линии C в точках $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, как показано на рисунке. Из уравнения $\partial T^{rs}/\partial x^s = 0$, которому удовлетворяет тензор энергии-импульса в этом объеме, с помощью интегрирова-

ния по объему Ω и применения теоремы Остроградского — Гаусса следует

$$\oint T^{rs} d\Sigma_s = 0. \quad (15.25)$$

Считая за положительное направление нормали к граничной гиперповерхности, внешнее по отношению к объему Ω , уравнение (15.25) можно переписать в виде

$$P_r(\tau_1) - P_r(\tau_2) = Q_r(R) - Q_r(\varepsilon). \quad (15.26)$$

Обозначения здесь ясны из чертежа. В частности,

$$Q_r(R) = \frac{1}{c} \int_{\substack{\tau=\tau_2 \\ (\rho=R)}}^{\tau=\tau_1} T^{rt} d\Sigma_t, \quad Q_r(\varepsilon) = \frac{1}{c} \int_{\substack{\tau=\tau_1 \\ (\rho=\varepsilon)}}^{\tau=\tau_2} T^{rt} d\Sigma_t. \quad (15.27)$$

Нас будут интересовать равенства (15.26) и (15.27) в пределе, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, а $R \rightarrow \infty$. Для того чтобы произвести вычисление векторов $Q_r(\varepsilon)$ и $Q_r(R)$, необходимо прежде всего выяснить геометрические свойства гиперповерхностей $\rho = \varepsilon$ и $\rho = R$ при указанном переходе к пределу.

Направление нормали к гиперповерхности $\rho = \text{const}$ совпадает с направлением $\text{grad } \rho$ *). Последнее может быть определено с помощью равенств (15.16) и (15.14). Так как $W \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, то из (15.16) следует, что в этом пределе

$$\partial\rho/\partial x^r \simeq -p_r, \quad (15.28)$$

т. е. гиперповерхность, по которой производится интегрирование при вычислении $Q_r(\varepsilon)$, следует считать времениподобной (нормаль — p_r к ней пространственноподобна).

В пределе $R \rightarrow \infty$ имеет место неравенство $|W| \gg 1$, поэтому из (15.16) вытекает, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^r} \simeq W \left(\frac{u_r}{c} + p_r \right) = \frac{W}{R} R_r. \quad (15.29)$$

Другими словами, в пределе $R \rightarrow \infty$, $\left| \frac{\partial\rho}{\partial x^r} \frac{\partial\rho}{\partial x^r} \right| \rightarrow 0$ и гиперповерхность $\rho = R$ принимает характер светового конуса. В настоящем параграфе нас интересует именно этот предел, т. е. величина $Q_r(R)$ при $R \rightarrow \infty$ **).

Элемент объема светового конуса может быть вычислен по формуле (Г.8), где направление нормали произвольно. Будем считать, что $\vec{n} = \vec{p}$; тогда в формуле (Г.8) $d\Sigma$ будет элементом времениподоб-

*) Здесь, разумеется, grad — четырехмерный градиент в пространстве Минковского.

**) Вычислением $Q_r(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и физической интерпретацией этой величины мы займемся в § 23.

ной плоскости, который в свою очередь может быть вычислен по формуле (Г.4). Эту произвольную времениподобную плоскость можно считать локально совпадающей с участком времениподобной поверхности $\rho = \epsilon$, так что из (Г.8), (Г.4) и (15.28) для элемента интегрирования $d\Sigma_t$ в интеграле $Q_r(R)$ следует

$$d\Sigma_t = \frac{R_t d\Sigma}{|\dot{\rho} R|} = \frac{R_t}{R} \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^r} \right| p^r \left| R^2 d\omega ds = R_t R d\omega ds, \quad (15.30)$$

Из (15.27) и (15.23) при $\rho \simeq R$ видно, что

$$Q_r(R) \sim \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{R^2} \int \left(p_r + \frac{u_r}{c} \right) d\omega \rightarrow 0 \quad (15.31)$$

при $R \rightarrow \infty$, так как интеграл по $d\omega$ конечен, а интеграл по ds при достаточно близких друг к другу значениях s_1 и s_2 можно представить в виде $\Delta s/R^2$.

Выберем теперь четырехмерный объем Ω интегрирования так, как это показано на рис. 10. Он образован пересечением двух пространственноподобных плоскостей 1 и 2, обладающих общей нормалью u^r/c с двумя световыми конусами. При $R \rightarrow \infty$ поток энергии-импульса через оба световых конуса стремится к нулю, как это было показано в выражении (15.31). Поэтому поток энергии-импульса через часть гиперповерхности 1, вырезаемую этими световыми конусами, равен потоку через аналогичную часть гиперповерхности 2 и в этом смысле выполняется закон сохранения энергии-импульса для поля излучения вдали от источника. Для вычисления потока энергии-импульса излучения нужно оценить интеграл

$$Pr(s) = \frac{1}{c} \int T^{rm} \frac{u_m}{c} d\Sigma' \simeq \frac{1}{c^2} \int T^{rm} u_m R^2 d\rho d\omega$$

(ср. формулу (Г.2)) по участку пространственноподобной гиперплоскости с единичной нормалью u_m/c . Подсчитаем поток излучения через сферический слой толщины $d\rho = c dt$ в этой гиперплоскости. Тогда

$$\frac{dPr}{dt} \simeq \frac{1}{c} \int T^{rm} u_m R^2 d\omega.$$

Воспользуемся теперь формулой (15.24). При $\rho = R \rightarrow \infty$ конечное выражение дает только слагаемое $\sim \frac{1}{c^2 R^3} \bar{V}^2 R^k =$

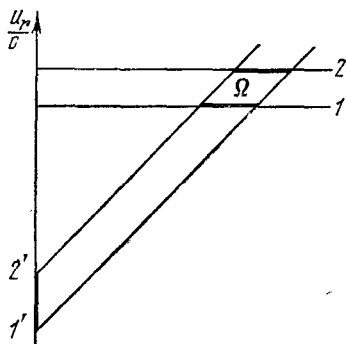


Рис. 10.

$= -\frac{1}{c^2 R^3} \vec{V}^2 \left(p^k + \frac{u^k}{c} \right)$. Подставляя \vec{V}^2 по формуле (15.20) и B согласно (15.15), получим при $R \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{4\pi}{q} \right)^2 T_{rm} \frac{u_m}{c} R^2 \simeq -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{\omega}^2}{c^2} + c^2 B^2 \right) \left(p^k + \frac{u^k}{c} \right) \simeq \\ \simeq -\frac{1}{c^4} (\vec{\omega}^2 + (\vec{\omega}\vec{p})^2) \left(p^k + \frac{u^k}{c} \right).$$

так как

$$B^2 = \frac{(1-W)^2}{\rho^2} \simeq \frac{W^2}{R^2} = \frac{(\vec{\omega}\vec{p})^2}{c^2}.$$

В полученном выражении можно отбросить слагаемое, пропорциональное p^k , так как члены, содержащие его, зависят от нечетного числа сомножителей p^i и при интегрировании по $d\omega$ дают нуль (см. Приложение Г, п. 2). Итак,

$$\frac{dPr}{d\tau} = -\left(\frac{q}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{c^3} \int d\omega (\vec{\omega}^2 + (\vec{\omega}\vec{p})^2) u^r.$$

Интегрирование производится с помощью формул (Г.5) и (Г.6). Именно:

$$\int \vec{\omega}^2 d\omega = \vec{\omega}^2 \int d\omega = 4\pi \vec{\omega}^2, \quad \int \omega^k d\omega = 4\pi \omega^k, \quad (15.32) \\ \int p^k (\vec{\omega}\vec{p}) d\omega = \omega^l \int p^k p_l d\omega = -\frac{4\pi}{3} \omega^l \left(\delta_l^k - \frac{u^k u_l}{c^2} \right) = -\frac{4\pi}{3} \omega^k,$$

так как $\vec{\omega}i = 0$. Аналогично

$$\int (\vec{\omega}\vec{p})^2 d\omega = -\frac{4\pi}{3} \vec{\omega}^2. \quad (15.32')$$

Выражения (15.32) будут еще использованы в § 23. Окончательно получаем

$$\frac{dPr}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2q^2}{3c^5} u^r \vec{\omega}^2. \quad (15.33)$$

Этой формулой определяется количество энергии и импульса, переносимое полем излучения за единицу собственного времени заряда. Рассматриваемые энергия и импульс излучения являются результатом действия заряда на отрезке $d\tau$ его мировой линии между точками $1'$ и $2'$ на рис. 10, когда эти точки неограниченно сближаются одна с другой.

§ 16. Энергия излучения движущегося заряда

16.1. Для вычисления потока энергии, переносимой полем излучения, можно воспользоваться формулами (14.6) или (14.9). Нас будет интересовать угловое распределение излучения, а также его полная энергия, проинтегрированная по углам. Разумеется,

результаты будут зависеть от того, с точки зрения какой системы отсчета они получены, т. е. просто от того, каково значение скорости источника \mathbf{v} в выражениях для напряженностей поля.

Начнем с простого вычисления полной энергии излучения в той системе отсчета, в которой в данный момент времени $\mathbf{v} = 0$. При этом условии формулы (14.4) и (14.3) принимают вид *)

$$4\pi\mathbf{E} = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R}, \quad 4\pi\mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{[\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{n}]}{R}. \quad (16.1)$$

Обозначая через ϑ угол между направлениями векторов \mathbf{n} и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, мы видим с помощью (14.9), что поток энергии следующим образом зависит от этого угла:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{q^2}{c^3 R^2} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta \cdot \mathbf{n}. \quad (16.2)$$

Из (16.2) видно, что максимальный поток энергии в собственной системе отсчета заряда находится в плоскости, ортогональной к ускорению ($\vartheta = \pi/2$), тогда как вдоль направления $\dot{\mathbf{v}}$ ($\vartheta = 0, \pi$) излучения нет. Интенсивность излучения убывает обратно пропорционально R^2 , что соответствует хорошо известному закону для точечного источника света.

Элементарное интегрирование по сфере σ радиуса R позволяет получить полную энергию, излучаемую источником по всем направлениям за единицу времени:

$$\oint \mathbf{S} \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3}. \quad (16.3)$$

В соответствии с условием запаздывания для наблюдения, производимого в момент времени t , центр сферы σ следует поместить в той точке, где находился источник в момент $t - R/c$. Соотношение (16.3) называется *формулой Лармора*.

16.2. Перейдем к общему случаю, когда заряд движется относительно наблюдателя со скоростью \mathbf{v} . При этом обратим внимание на условие запаздывания в применении к формуле (14.3) для вектора Пойнтинга. Согласно этому условию левая часть формулы определяет поток энергии, отнесенный к времени наблюдения t , правая же ее часть вычисляется в момент $t' = t - R/c$. Однако нас прежде всего интересует вычисление мощности излучения не за время наблюдения dt , а за время dt' испускания этого излучения. Действительно, именно это количество энергии теряет заряд, порождающий электромагнитное поле. В соответствии с этим для

*) Всюду в этом параграфе мы опускаем индекс 1 у напряженностей поля, имея в виду только поле излучения. Условие запаздывания также явно не указывается; оно должно учитываться всюду.

мощности, излучаемой зарядом в телесный угол $d\Omega$, получим

$$-\frac{\partial\omega(\vartheta, \varphi)}{\partial t'} d\Omega = |\mathbf{S}| \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega = |\mathbf{S}| \kappa R^2 d\Omega, \quad (16.4)$$

где $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \beta \mathbf{n} = \kappa$, как и в формуле (13.16).

Квадрат длины вектора \mathbf{E} выражается следующим образом:

$$(4\pi)^2 E^2 = \frac{q^2}{c^2 \kappa^6 R^2} \{ \dot{\beta}^2 \kappa^2 - (\mathbf{n}\dot{\beta})^2 (1 - \beta^2) + 2\kappa (\mathbf{n}\dot{\beta}) (\beta\dot{\beta}) \}. \quad (16.5)$$

Воспользуемся системой сферических координат, как это показано на рис. 11. Азимутальный угол ζ отсчитывается от плоскости, содержащей векторы \mathbf{v} и $\dot{\mathbf{v}}$, полярный же угол ϑ — от вектора \mathbf{v} . Из рис. 11 видно, что

$$\mathbf{n}\mathbf{v} = v \cos \vartheta,$$

$$\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}} = \dot{v} (\cos \vartheta' \cos \vartheta + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos \zeta),$$

$$\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = v\dot{v} \cos \vartheta'. \quad (16.6)$$

Подставляя (16.6) в (16.5), (16.5) в (14.6), а эту последнюю формулу в (16.4), мы выразим мощность излучаемой в телесный угол $d\Omega$ энергии через углы ϑ и ζ . Она будет зависеть при этом также и от угла ϑ' между скоростью и ускорением. Для нахождения полной мощности излучения необходимо проинтегрировать по $d\Omega$. Займемся прежде всего этой задачей.

Существенное значение для дальнейшего вычисления имеет разложение

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{v}}_{\perp} \quad (16.7)$$

— вектора ускорения на составляющие, параллельную и ортогональную скорости. Подставим это разложение в (16.5) и выпишем прежде всего те члены, которые содержат произведения компонент $\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}$ на компоненты $\dot{\mathbf{v}}_{\perp}$. Они имеют вид

$$\frac{2}{c^2 \kappa^6 R^2} \{ \kappa (\beta \dot{\beta}_{\parallel}) - (1 - \beta^2) (\mathbf{n}\dot{\beta}_{\parallel}) \} (\mathbf{n}\dot{\beta}_{\perp}). \quad (16.8)$$

Из (16.6) следует, что

$$\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \dot{v} \cos \vartheta' \cos \vartheta, \quad \mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \dot{v} \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos \zeta,$$

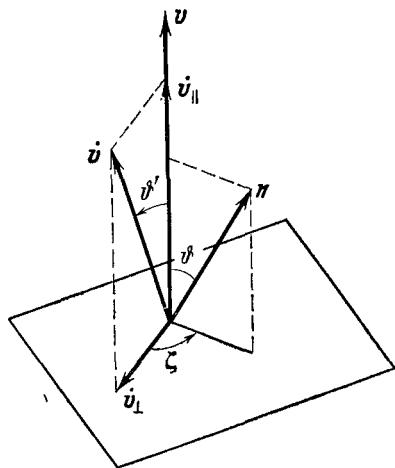


Рис. 11.

г. е. выражение (16.8) пропорционально $\cos \zeta$, а поэтому приводит к нулевому результату при интегрировании по всем углам ζ . Остальные множители в (16.4) от угла ζ не зависят, поэтому при интегрировании слагаемое (16.8) можно отбросить. В интеграле, содержащем (16.5), остаются два члена. Один из них зависит только от $\dot{\mathbf{v}}_{\perp}$, другой же — только от $\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}$. Итак,

$$\frac{dW}{dt'} = \int \frac{d\omega(\vartheta, \zeta)}{dt'} d\Omega = \frac{dW_{\perp}}{dt'} + \frac{dW_{\parallel}}{dt'}. \quad (16.9)$$

Подынтегральные функции вычисляются с помощью (16.4) и (16.5):

$$-\frac{d\omega_{\perp}}{dt'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{q^2}{c\kappa^5} \{ \kappa^2 \dot{\beta}_{\perp}^2 - (1 - \beta^2)(n\dot{\beta}_{\perp})^2 \}, \quad (16.10)$$

$$-\frac{d\omega_{\parallel}}{dt'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{q^2}{c\kappa^5} \{ \dot{\beta}_{\parallel}^2 - (n\dot{\beta}_{\parallel})^2 \}. \quad (16.11)$$

Таким образом, если подставить выражения для κ , $n\dot{\beta}_{\parallel}$, $n\dot{\beta}_{\perp}$ через углы, то получим

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{\perp}}{dt'} &= \frac{q^2 \dot{v}_{\perp}^2}{(4\pi)^2 c^3} \left\{ \int \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\zeta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} - (1 - \beta^2) \int \frac{\sin^3 \vartheta \cos^2 \zeta d\vartheta d\zeta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{\dot{v}_{\perp}^2}{(1 - \beta^2)^3}, \end{aligned} \quad (16.12)$$

$$-\frac{dW_{\parallel}}{dt'} = \frac{q^2}{(4\pi)^2} \frac{\dot{v}_{\parallel}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{\dot{v}_{\parallel}^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (16.13)$$

Наконец, складывая две предыдущие формулы, получим

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi c} \{ \dot{\beta}_{\parallel}^2 + (1 - \beta^2) \dot{\beta}_{\perp}^2 \} (1 - \beta^2)^{-3} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2 - [\dot{\beta} \times \beta]^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (16.14)$$

Этот результат (несколько неожиданно после его громоздкого вывода) имеет очень простой смысл с точки зрения релятивистской кинематики частицы. Действительно, вспоминая формулу (5.20), мы видим, что

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{q^2 \vec{\omega}^2}{c^3}, \quad (16.15)$$

где $\vec{\omega}$ — четырехмерный вектор ускорения. Сравнение же с полученной ранее в системе покоя заряда формулой Лармора (16.3) показывает, что последняя совпадает с (16.15), если заменить $\dot{\mathbf{v}}$ на $\vec{\omega}$. Кстати, формула Лармора получена при условии $\kappa = 1$, и поэтому в ней $dt = dt'$. Выражение (16.15) совпадает с временной компонентой уравнения (15.33), если учесть в последнем то, что $P^0 = W/c$,

$u^0 = c\gamma$ и $\gamma dt = dt'$. Различие в знаках между этими формулами обусловлено тем, что, как было сказано в § 15, выражение (15.33) равно энергии, переносимой излучением, в то время как (16.15) — это энергия, теряемая при излучении источником — ускоренно движущимся точечным зарядом.

16.3. Рассмотрим теперь отдельно те случаи, когда ускорение направлено вдоль скорости, т. е. $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_{\parallel}$, и когда оно ортогонально к ней, т. е. $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_{\perp}$. В первом из этих случаев для углового распределения мощности излучения следует применять формулу (16.11), во втором же — формулу (16.10). Разумеется, вывод каждой из этих формул в отдельности несколько упрощается, если воспользоваться условиями о направлении ускорения непосредственно в выражении для E . Сравнивая соответствующие этим случаям выражения (16.13) и (16.12) для полной мощности, убеждаемся в том, что при одинаковой абсолютной величине ускорения отношение полного излучения при $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ к полному излучению при $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$ равно $1 - \beta^2$. Формула (16.11), выраженная через угол ϑ , которую мы уже использовали при вычислении интеграла (16.13), дает

$$\frac{dw}{dt'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{q^2}{c^3 R^2} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}. \quad (16.16)$$

Зависимость от угла ϑ может быть исследована с помощью обычных методов дифференциального исчисления при разных значениях параметра β . При этом качественный характер распределения с увеличением β изменяется так, как это показано на рис. 12. Случай $\beta = 0$ отвечает, разумеется, условию применимости формулы Лармора (16.3). Характерно — при этом все больше с возрастом β вытягивание «лепестков» излучения (или, скорее, «конуса», так как картина симметрична относительно оси \mathbf{v}) и сближение их с направлением вектора \mathbf{v} . Можно показать, что угол, при котором мощность излучения максимальна, равен

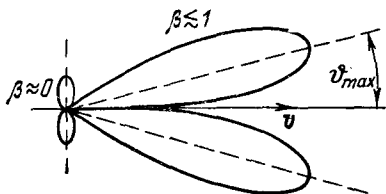


Рис. 12.

$$\vartheta_{\max} = \arccos \left(\frac{1}{3\beta} \sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right).$$

В пределе $\beta = 1$ этот угол стремится к значению $1/2\gamma$, а сама мощность в максимуме пропорциональна γ^8 . Приближенно,

$$-\frac{dw}{dt'} \simeq \frac{2}{\pi^2} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma \vartheta)^2}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^5}, \quad -\frac{dW}{dt'} \simeq \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \frac{1}{4\pi}. \quad (16.17)$$

Предыдущее рассмотрение показывает, в частности, что при торможении электрона во внешнем поле он излучает: возникает

тормозное излучение, учет которого важен в целом ряде физических задач. Если торможение происходит без изменения направления движения электрона, то тормозное излучение может быть исследовано на основе приведенных формул.

Случай $\beta\beta = 0$ имеет место, например, для мгновенного излучения при движении заряда по окружности. Применяемая здесь формула (16.10) при условии $\beta \rightarrow 1$ (т. е. $\gamma \rightarrow \infty$) приближенно записывается в виде

$$-\frac{dw}{dt'} \simeq \frac{1}{2\pi^2} \frac{q^2 \dot{\vartheta}^2}{c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \dot{\vartheta}^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \zeta}{(1 + \gamma^2 \dot{\vartheta}^2)^2} \right]. \quad (16.18)$$

При этом опять-таки очевидна концентрация излучения в направлении движения (т. е. при $\vartheta \rightarrow 0$). Такого рода «игольчатое» излучение наблюдается при движении заряженных частиц в циклических ускорителях (рис. 13).

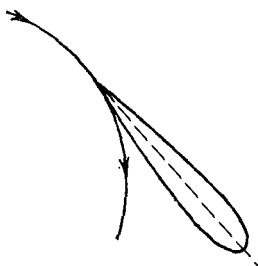


Рис. 13.

16.4. Помимо энергии, вычисление которой мы до сих пор производили, поле излучения обладает также и механическим импульсом, который определяется формулами (10.22). Вычисление импульса ничем, по существу, не отличается от проведенного выше для энергии. Несколько более сложен вывод выражения для момента импульса $M^{\alpha\beta}$ поля излучения с помощью

общего выражения (10.23), которое в трехмерных обозначениях приводит к закону изменения (3.22). Стоящая в этой формуле под знаком поверхностного интеграла функция $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}$ может быть интерпретирована как поток момента импульса через границу σ рассматриваемого объема. Вектор $\boldsymbol{\varphi}$, как было показано в § 3, определяется соотношением $\varphi^\alpha = T^{\alpha\beta} n_\beta$, где $T^{\alpha\beta}$ — тензор натяжений Максвелла, а \mathbf{n} — нормаль к поверхности σ . С помощью формул § 3 для тензора натяжения легко видеть, что

$$\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{n} \frac{E^2 + B^2}{2} + \mathbf{E}(\mathbf{nE}) + \mathbf{B}(\mathbf{nB}), \quad (16.19)$$

а отсюда можно подсчитать в векторной форме плотность $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}$ потока момента импульса. В частности, рассмотрим эту величину в системе покоя источника, когда $\mathbf{v} = 0$, и подсчитаем полный поток момента импульса через сферу, центр которой совпадает с положением источника, т. е. вычислим интеграл

$$\oint [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{n} d\sigma \quad (16.20)$$

по этой сфере, причем нормаль к ней совпадает с вектором $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Но

$$[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{n} = (\mathbf{r} \times \mathbf{E}, \mathbf{n})(\mathbf{nE}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{B}, \mathbf{n})(\mathbf{nB}). \quad (16.21)$$

С помощью формул (16.1), определяющих значения напряженностей поля, легко видеть, что в нашем случае $[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{n} = 0$ и, значит, момент количества движения сохраняется в системе покоя частицы.

16.5. Выше мы рассматривали поток энергии излучения в элементарный телесный угол $d\Omega$ за время dt' и затем интегрировали его по углам. Часто представляет интерес другая задача: рассчитать поток энергии, проходящий в данный телесный угол в течение всего времени излучения. При этом обычно требуется определить этот поток с точки зрения наблюдателя, т. е. рассмотреть мощность излучения как функцию от времени t , без пересчета к времени t' , произведенного выше в формуле (16.4). Обозначим через \mathcal{E} полную энергию излучения, проинтегрированную по времени. Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = c \int_{-\infty}^{+\infty} R^2 (E(t))^2 dt. \quad (16.22)$$

В дальнейшем для краткости введем обозначение $\mathbf{A}(t) \equiv c^{1/2} R \mathbf{E}(t)$. Необходимо иметь в виду, что имеющиеся у нас формулы непосредственно определяют поле \mathbf{E} с учетом запаздывания, т. е. для времени t' . Это обстоятельство будет принято во внимание при вычислении. Кроме того, при использовании формулы (16.22) фактически предполагается, что за все время излучения область, в которой находится источник, видна из точки наблюдения под малым телесным углом.

Воспользуемся разложениями в интеграл Фурье, аналогичными формулам приложения (Д.12) и (Д.13):

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (16.23)$$

Удобнее записывать нормировочный множитель при интегралах несколько иначе, чем это сделано в Приложении Д. Так как $\mathbf{A}(t)$ — вещественная величина, т. е. $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t)^*$, то

$$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}^*(-\omega). \quad (16.24)$$

Формулы (16.23) выражают спектральное разложение излучаемого поля по всевозможным частотам ω . Подстановка их в (16.22) приводит к результату

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathbf{A}(\omega') \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega'+\omega)t} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{+\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (16.25)$$

куда входит квадрат модуля комплексной величины $|A(\omega)|^2$. Здесь использовано разложение (В.14) дельта-функции в интеграл Фурье и соотношение (16.24).

Можно определить также энергию $d\mathcal{E}(\omega)/d\Omega$, излучаемую в единичный телесный угол; прежде всего подсчитаем ту ее часть, которая переносится колебаниями с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Как можно видеть из формулы (16.25),

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega, \quad (16.26)$$

где

$$dI(\omega)/d\Omega = 2|A(\omega)|^2 \quad (16.27)$$

— спектральная интенсивность излучения в единичный телесный угол.

Конкретизируем предыдущие общие формулы на случай поля излучения, определяемого членом $E^{(1)}$ в выражении (14.4) (по-прежнему обозначая этот член просто E). Из (16.23) получим

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left(\frac{q^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^3} \right]_{t'=t-R/c} dt = \\ &= \left(\frac{q^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t'+R/c)} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2} dt'. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Для сокращения обозначений выберем начало отсчета в той ограниченной области, где совершается движение источника, и будем считать, что точка наблюдения находится от этой области очень далеко; т. е. что $r \gg r'$. Тогда

$$R(t') \simeq r - \mathbf{n}r'(t'). \quad (16.29)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — в отличие от предыдущих случаев, где мы обозначали так единичный вектор направления \mathbf{R} . Подставляя (16.29) в (16.28), получим, если отбросить постоянный фазовый множитель $\exp\left(\frac{i}{c}\omega r\right)$,

$$A(\omega) = \left(\frac{q^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\omega\left[t - \frac{\mathbf{n}r(t')}{c}\right]\right\} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2} dt. \quad (16.30)$$

Непосредственно вычисляя производную, можно показать, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]}{\kappa} \right) = \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2}$$

(напоминаем, что $\kappa = 1 - n\beta$). Поэтому интеграл в формуле (16.30) можно вычислить по частям, если считать при этом, что β обращается в нуль в начале и в конце промежутка интегрирования. Это вполне согласуется с уже использованным условием о характере той области, из которой совершается излучение. Тогда формула для спектральной интенсивности (16.27) принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2c} \omega^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \beta] \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{n\mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (16.31)$$

Заметим, что если заменить q на ρdV , а выражение $\rho\beta$ положить равным \mathbf{j}/c , то с помощью (16.31) можно найти формулу для излучения, создаваемого непрерывным распределением источников:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^3} \left| \int dt \int dV \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)] \exp \left[i\omega \left(t - \frac{n\mathbf{r}}{c} \right) \right] \right|^2. \quad (16.32)$$

При этом неявно предполагается, что все элементы объема этого распределения источников излучают независимо один от другого.

§ 17. Излучение ограниченных колеблющихся источников

17.1. Поле точечного заряда было вычислено выше без применения каких-либо приближений. Формулы (13.11) позволяют, в принципе, вычислять электромагнитные поля, создаваемые произвольными распределениями источников в бесконечном пространстве. Однако если и известны функции $\rho(\mathbf{r}', t')$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$, такое вычисление представляет обычно весьма трудную задачу и лишь в исключительных случаях может быть проведено точно. Мы рассмотрим сейчас один из простейших и, вместе с тем, практически наиболее важных случаев приближенного вычисления поля на основе формул (13.11). Условие запаздывания при этом будет учитываться с помощью дельта-функции.

В радиотехнике, а также при классическом рассмотрении излучения атома нужно считать, что заряды и токи, создающие излучение, сосредоточены в каком-то фиксированном объеме. Вычисление, к которому мы переходим, позволяет определить поле именно в этом случае, причем на расстояниях, больших по сравнению с линейными размерами области, занятой источниками *).

Воспользуемся для функций \mathbf{A} , ϕ , \mathbf{j} и ρ разложениями в интегралы Фурье вида (Д.12) и подставим эти разложения в формулы

*) Более полное изложение этого вопроса читатель может найти в книгах по теоретической радиофизике, например: В. В. Никольский, *Электродинамика и распространение радиоволн*, «Наука», 1973; Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны*, «Сов. радио», 1957; Дж. Страттон, *Теория электромагнетизма*, Гостехиздат, 1948, гл. 8.

(13.11). Пользуясь свойствами дельта-функции и сравнивая коэффициенты при $\exp(-i\omega t)$ в правой и левой частях этих формул, легко получить соотношения для амплитуд (которые имеют вид (Д.18))

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi_{\omega}(\mathbf{r}) &= \int dV' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho_{\omega}(\mathbf{r}'), \\ 4\pi c\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) &= \int dV' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Здесь, как обычно, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, а λ — длина волны гармонического колебания с циклической частотой ω , распространяющегося со скоростью c (для определенности мы будем иметь в виду случай вакуума). В дальнейших формулах мы, как правило, будем отбрасывать индекс ω при амплитудах.

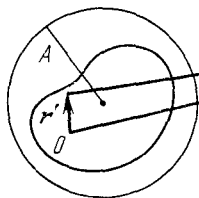


Рис. 14.

Предположим теперь, что заряды и токи, создающие электромагнитное поле, по крайней мере за промежуток времени, существенный для наблюдения, не выходят за пределы ограниченной области пространства. Размеры этой области можно охарактеризовать тем, что всю ее можно заключить в сферу конечного радиуса A . Выберем для простоты начало отсчета пространственных координат где-либо внутри этой области (рис. 14). Нас будет интересовать поле в точке наблюдения, находящейся очень далеко от расположения источников. Это значит, что $r \gg A$. При этом, так как $r' < A$, $r \gg r'$.

Однако для применения того приближенного метода вычисления, которым мы собираемся воспользоваться, одного этого условия еще недостаточно. Нужно, кроме того, предположить, что длина λ тех волн излучения, которые нас интересуют, также значительно больше характеристической длины A , так что фактически условия приближения можно записать в виде

$$A \ll \lambda \quad \text{и} \quad A \ll r. \quad (17.2)$$

Из (17.2) следует, что $kr' \ll 1$.

Рассмотрим разложение функции $\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ по указанным малым параметрам kr' и r'/r . При этом мы будем вычислять лишь члены, убывающие с расстоянием не быстрее чем r^{-2} . С такой точностью разложение можно провести весьма просто. Действительно, для этой цели можно в выражении $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}') + r'^2}$ пренебречь отношением $(r'/r)^2$ по сравнению

с единицей уже под знаком корня и записать

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r \sqrt{1 - \frac{2}{r} n r'} \simeq r - n r'. \quad (17.3)$$

Здесь n обозначает единичный вектор \mathbf{r}/r , а не \mathbf{R}/R , как это было раньше. Следует иметь в виду, что отброшенное под корнем слагаемое при более точном вычислении приводит под знаком интеграла к таким добавкам, как, например, $(r'/r)^2 \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Их можно не учитывать лишь при той точности вычислений, к которой мы здесь стремимся.

Воспользовавшись приближением (17.3) также и в показателе экспоненты, разлагая последнюю в ряд по малому параметру kr' и сохраняя члены интересующего нас порядка, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (17.4)$$

где

$$4\pi\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \quad (17.5)$$

и

$$4\pi\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') (n r') dV'. \quad (17.6)$$

Аналогичные формулы получатся, разумеется, и для амплитуды $\varphi(\mathbf{r})$, причем нужно лишь заменить в подынтегральных выражениях \mathbf{j} на ρ .

Из формул, связывающих напряженности с потенциалами, видно, что если последние зависят от времени по закону $e^{-i\omega t}$, то такой же будет зависимость от времени и напряженностей. Подставляя в уравнения Максвелла выражения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, получим

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}_\omega \quad (17.7)$$

для точек пространства, находящихся вне области расположения источников. При этом, как обычно, магнитное поле вычисляется по формуле

$$\mathbf{B}_\omega = \text{rot } \mathbf{A}_\omega. \quad (17.8)$$

В дальнейшем индекс ω отбрасывается, как это уже было сделано для потенциалов. При исследовании результатов мы можем учитывать еще сравнительную величину λ и r (считая, разумеется, что (17.2) все время выполняется). Область, где $r \gg \lambda$, называется *волновой зоной*, область же, где $r' \ll r \ll \lambda$, — *ближней зоной*.

Для дальнейшего применения удобно привести интегралы, входящие в (17.5), к несколько иному виду. Именно, используя уравнение непрерывности, которое в нашем случае принимает форму

$$i\omega\rho_\omega = \text{div } \mathbf{j}_\omega, \quad (17.9)$$

можно подынтегральное выражение записать через ρ . Для каждой компоненты x'^{α} радиуса-вектора \mathbf{r}' с помощью (Б.14₂), запишем:

$$\operatorname{div}'(x'^{\alpha} \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = x'^{\alpha} \operatorname{div}' \mathbf{j} + (\operatorname{grad}' x'^{\alpha}, \mathbf{j}) = x'^{\alpha} \operatorname{div}' \mathbf{j} + j^{\alpha}. \quad (17.10)$$

Но интеграл по объему от левой части этого соотношения может быть преобразован в интеграл по поверхности, а поверхность проведена так, чтобы токи на ней равнялись нулю (например, можно взять хотя бы сферу, изображенную на рис. 14). Таким образом, из (17.9) и (17.5) получим

$$4\pi \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (17.11)$$

где

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (17.12)$$

т. е. \mathbf{p} представляет собой дипольный момент распределения источников, определяемый точно так же, как в § 11. Для рассматриваемой гармонической составляющей потенциала, которая обладает частотой ω , можно также записать $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \dot{\mathbf{p}}(t) e^{ikr}/4\pi rc$, если $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} e^{-i\omega t}$. Такое представление для $\mathbf{A}^{(1)}$ через $\dot{\mathbf{p}}$ остается, очевидно, справедливым для всех тех длин волн, по отношению к которым выполнены условия применимости использованного при выводе приближения.

17.2. Вычисление электромагнитного поля в первом приближении осуществляется подстановкой (17.11) в (17.8), после чего нужно применить (17.7). Элементарное вычисление с помощью (Б.14₃) приводит к результату

$$4\pi \mathbf{B}^{(1)} = k^2 [\mathbf{n} \times \mathbf{p}] \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \quad (17.13)$$

$$4\pi \mathbf{E}^{(1)} = k^2 [\mathbf{n} \times \mathbf{p}] \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + \{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}) - \mathbf{p}\} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr}. \quad (17.14)$$

Совершенно так же, как и выше, и при тех же оговорках вместо $k^2 \mathbf{p}$ можно записать $-\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{p}}$, а $-ik\mathbf{p}$ заменить на $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{p}}$. Это относится и к выражениям, которые рассматриваются в дальнейшем.

В ближней зоне формулы (17.13) и (17.14) принимают вид

$$4\pi \mathbf{B}^{(1)} = ik [\mathbf{n} \times \mathbf{p}] \frac{1}{r^2}, \quad 4\pi \mathbf{E}^{(1)} = \{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}) - \mathbf{p}\} \frac{1}{r^3}. \quad (17.15)$$

Первая из них совпадает с законом Био — Савара — Лапласа, если только вместо элемента тока $I ds'$ подставить в него $-i\omega \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$. Это совпадение имеет место в каждый момент времени, причем обе части равенства зависят от времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Совершенно так же нужно учитывать зависимость от времени и во второй формуле. Как легко убедиться с помощью результатов § 11, поле $\mathbf{E}^{(1)}$

в ближней зоне является напряженностью статического электрического поля, создаваемого диполем с дипольным моментом \mathbf{p} .

В волновой зоне

$$4\pi \mathbf{B}^{(1)} = k^2 [\mathbf{n} \times \mathbf{p}] \frac{e^{ikr}}{r}, \quad 4\pi \mathbf{E}^{(1)} = k^2 [\mathbf{n} \times \mathbf{p}] \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (17.16)$$

Эти выражения показывают, что волновое поле имеет структуру, аналогичную полю излучения точечного заряда. Прежде всего, сравнение зависимости полей (17.15) и (17.16) от расстояния r позволяет повторить вывод о том, что только волновому полю соответствует поток энергии на больших расстояниях от источников (ср. стр. 108). Далее, оно определяется второй производной $\ddot{\mathbf{p}}(t)$ по времени аналогично тому, как поле заряда определяется его ускорением. Наконец, непосредственно из (17.16) следуют соотношения

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}. \quad (17.17)$$

При этом второе из них выполняется, как можно видеть из (17.13) и (17.14), не только в волновой зоне, но всюду в пределах применимости условий (17.2). Таким образом, волновое поле является поперечным и векторы \mathbf{n} , $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{B}^{(1)}$ расположены в каждой его точке так, как это показано на рис. 7. Существенным отличием является, однако, то обстоятельство, что в выражениях (17.13)—(17.16) левая и правая части относятся к одному и тому же моменту времени t , т. е. моменту наблюдения, в то время как, например, в (14.14) нужно в явном виде учитывать запаздывание.

17.3. При вычислении потока энергии в интересующем нас здесь случае приходится иметь в виду, что напряженности выражены в комплексной форме. На стр. 108 поток энергии определен с помощью вещественных напряженностей. Можно, разумеется, разделить вещественные части в формулах (17.16). Однако когда зависимость от времени гармоническая, проще воспользоваться непосредственно этими формулами, если еще считать, что наблюдение производится в течение промежутка времени Δt , значительно превышающего период наблюдаемых колебаний электромагнитного поля. Тогда интересующей наблюдателя величиной фактически является среднее значение потока $(\mathbf{S}\mathbf{n}) r^2$ в единицу телесного угла за этот промежуток времени. Ввиду условий ортогональности (17.17) $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \mathbf{n} = EB$. Нас интересует, однако, не эта комплексная величина, а произведение $\text{Re } E \cdot \text{Re } B$, которое только и имеет физический смысл. Так как $\text{Re } E = \frac{1}{2}(E + E^*)$ и аналогичное выражение можно записать для $\text{Re } B$, то

$$\text{Re } E \cdot \text{Re } B = \frac{1}{4}(EB + E^*B^* + E^*B + EB^*).$$

В случае чисто гармонической зависимости с частотой ω первые два слагаемых содержат $\exp(-2i\omega t)$ и $\exp 2i\omega t$ соответственно,

экспоненциальные же множители в остальных двух слагаемых взаимно сокращаются. Обозначая через $\langle \dots \rangle_{\Delta t}$ операцию усреднения за время Δt , мы видим, таким образом, что

$$\langle \operatorname{Re} E \cdot \operatorname{Re} B \rangle_{\Delta t} = 1/4 (E^* B + E B^*) = 1/2 \operatorname{Re} (E B^*), \quad (17.18)$$

причем в правой части этой формулы можно считать, что E и B — комплексные амплитуды. Поэтому усредненная мощность излучения электрического диполя \mathbf{p} в обозначениях предыдущего параграфа записывается в виде

$$- (4\pi)^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{2} \operatorname{Re} \{ r^2 [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] \mathbf{n} \} d\Omega = \frac{c}{2} k^4 |\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{p}]|^2 d\Omega. \quad (17.19)$$

Здесь были использованы формулы (17.16).

Обозначая через ϑ угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{p} и предполагая, что колебания составляющих дипольного момента \mathbf{p} не отличаются по фазе, получим формулу для углового распределения мощности, теряемой диполем на излучение:

$$- (4\pi)^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{2} k^4 p^2 \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (17.20)$$

Проинтегрировав предыдущую формулу по углам, определим полную мощность:

$$- \frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{3} c k^4 p^2. \quad (17.21)$$

17.4. Вычисление поля в следующем приближении осуществляется совершенно аналогичным образом на основе формулы для потенциала (17.6). При этом подынтегральное выражение следует представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$\mathbf{j}(nr') = 1/2 [\mathbf{j}(nr') + \mathbf{r}'(n\mathbf{j})] + 1/2 [\mathbf{j}(nr') - \mathbf{r}'(n\mathbf{j})] \quad (17.22)$$

и рассмотреть каждую из них в отдельности.

Интеграл, содержащий симметричную часть выражения (17.22), можно преобразовать, используя соотношение

$$n_{\beta} \operatorname{div}' (x'^{\alpha} x'^{\beta} \mathbf{j}) = n_{\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta} \operatorname{div}' \mathbf{j} + [\mathbf{j}(nr') + \mathbf{r}'(n\mathbf{j})]^{\alpha} \quad (17.23)$$

и учитывая, точно так же, как это было сделано по отношению к формуле (17.10), что интегрирование левой части дает нулевой результат. Применяя еще уравнение непрерывности в виде (17.9), получим соответствующую часть векторного потенциала:

$$4\pi \mathcal{A}_{\text{сим}}^{(2)}(\mathbf{r}) = - \frac{k^2}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \int \mathbf{r}'(nr') \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (17.24)$$

Сравнение с (11.19) позволяет записать входящий сюда интеграл в виде $n^{\alpha} d_{\alpha\beta}$. Поэтому поле, определяемое «симметричной» частью векторного потенциала, можно назвать *квадрупольным*,

По формулам (17.7) и (17.8) можно, с помощью (17.24), вычислить квадрупольные электрическое и магнитное поля. Мы приведем здесь лишь некоторые результаты. В волновой зоне

$$\mathbf{B}^{(2)} = ik [\mathbf{n} \times \mathbf{A}^{(2)}], \quad \mathbf{E}^{(2)} = ik [\mathbf{n} \times \mathbf{A}^{(2)}] \times \mathbf{n}. \quad (17.25)$$

При этом, если использовать определение (11.19) квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ и ввести вектор \mathbf{Q} с помощью равенства $Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n^\beta$, то

$$4\pi \mathbf{B}^{(2)} = -\frac{ik^3}{6} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}). \quad (17.26)$$

Вычисление же средней мощности излучения аналогично тому, как это было сделано на стр. 132, и приводит к формулам

$$-(4\pi)^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{72} k^6 |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2, \quad -4\pi \frac{dW}{dt} = \frac{ck^6}{360} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2. \quad (17.27)$$

Отметим зависимость от k^6 , в отличие от дипольного излучения, мощность которого пропорциональна k^4 .

Антисимметричное слагаемое в (17.22) непосредственно преобразуется к виду: $\frac{1}{2} \mathbf{n} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{r}'] = \frac{1}{2} [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] \times \mathbf{n}$. Вспомним теперь определение магнитного момента (12.13) (при этом сейчас $\alpha = c$) и учтем (12.5). Ясно, что выражение

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{j} \quad (17.28)$$

имеет смысл объемной плотности магнитного момента. Полный же магнитный момент, получаемый интегрированием плотности (17.28) по всему объему, обозначим \mathcal{M} . Таким образом,

$$4\pi \mathbf{A}_{ac}^{(2)} = ik [\mathbf{n} \times \mathcal{M}] \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right). \quad (17.29)$$

При тех же оговорках, которые были указаны в отношении (17.15), можно записать также $i\omega \mathcal{M} = -\dot{\mathcal{M}}(t)$. Сравнение полученного результата с формулой (17.13) для $\mathbf{B}^{(1)}$ показывает, что с точностью до постоянного коэффициента эти выражения формально совпадают, если в (17.13) заменить \mathbf{p} на \mathcal{M} . Поэтому вычисление с помощью (17.29) магнитного поля $\mathbf{B}^{(2)}$ по формуле (17.8), также с точностью до постоянного коэффициента, дает результат, совпадающий с формулой для $\mathbf{E}^{(1)}$, вычисленной на основе (17.7). Итак,

$$4\pi \mathbf{B}^{(2)} = k^2 [\mathbf{n} \times \mathcal{M}] \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + \{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathcal{M}) - \mathcal{M}\} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr}. \quad (17.30)$$

Теперь легко установить, что электрическое поле имеет вид

$$4\pi \mathbf{E}^{(2)} = -k^2 [\mathbf{n} \times \mathcal{M}] \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \quad (17.31)$$

т. е. может быть формально получено из (17.13), если заменить \mathbf{p} на \mathcal{M} и знак на обратный.

Электромагнитное поле, определяемое магнитным моментом \mathcal{M} по формулам (17.30) и (17.31), называется *полем магнитного диполя*,

Таким образом, в интересующем нас приближении поле ограниченного распределения источников может быть представлено как сумма полей электрического и магнитного диполей и электрического квадруполья.

Из того, что было сказано выше о формальных соответствиях между полями электрического и магнитного диполей, можно сделать вывод, что во втором случае все формулы, в частности — для мощности излучения, получаются из соответствующих выражений для первого случая заменой E на B , B на $-E$ и p на \mathcal{M} . Однако

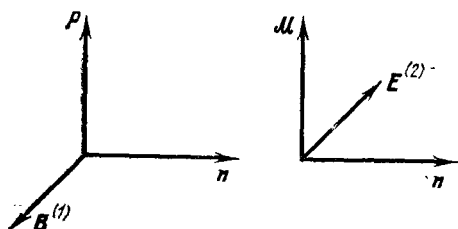


Рис. 15.

поля электрического и магнитного диполей отличаются направлением электрического вектора по отношению к векторам n и p в первом случае и n и \mathcal{M} — во втором, т. е. поляризацией (рис. 15).

Сделаем еще одно общее замечание, относящееся к методу вычисления полей излучения. Мы убедились выше в той существенной роли, ко-

торую играет при вычислении полей уравнение непрерывности. Во многих случаях распределение источников, создающее поле, обладает такими свойствами, что уравнение непрерывности можно учесть с самого начала. Действительно, предположим, что существует вектор P_0 , удовлетворяющий соотношениям

$$j = \partial P_0 / \partial t, \quad \rho = -\operatorname{div} P_0. \quad (17.32)$$

Тогда уравнение непрерывности будет выполняться тождественно, уравнения же Максвелла примут вид (2.14₁). Как было показано в § 2, их можно решить, рассматривая волновое уравнение второго порядка (2.16) для вектора Герца Π , определяемого соотношениями (2.15). Решение волнового уравнения может быть получено обычным способом; в частности, для гармонической компоненты Π с волновым числом $k = \omega/v$ выполняется формула

$$4\pi\Pi(r) = \int_V P_0(r') \frac{e^{ikR}}{R} dV'. \quad (17.33)$$

Она может служить отправной точкой для получения приближений совершенно аналогично тому, как это было сделано выше для потенциалов. Зная вектор Герца, можно вычислить потенциалы по формулам (2.15) или же поля по формулам

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad H = \epsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (17.34)$$

Такой метод часто используется, например, при исследовании излучения, создаваемого антеннами.

СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 18. Плоские волны. Отражение и преломление.
Интерференция

18.1. В предыдущих параграфах (см. также Приложение Д) было показано, как построить решение неоднородного волнового уравнения с помощью функции Грина, в качестве которой выбирается решение однородного волнового уравнения, обладающее особенностью нужного типа при $R \rightarrow 0$. В частности, нужно обратить внимание на формулу (Д.17), определяющую вид сферически-симметричной функции Грина для уравнения Гельмгольца. Соответствующее решение волнового уравнения, гармонически зависящее от времени и описывающее поле, которое распространяется от точечного источника, имеет форму

$$\frac{A}{R} e^{i(kR - \omega t)} \quad (18.1)$$

и называется *сферической волной*. Если выбрать произвольную сферическую систему координат с началом отсчета в той точке, где находится источник, то амплитуда A может зависеть от координатных углов θ и φ этой системы.

Формулы (17.11) и (17.16), полученные для потенциала и напряженностей, соответствующих наиболее медленно убывающему с расстоянием в волновой зоне электромагнитному полю электрического диполя, также имеют вид сферической волны (18.1), причем амплитуда A определяется свойствами источника. На очень больших расстояниях от источника сферические волны могут рассматриваться с достаточно хорошим приближением как плоские. Это вполне очевидно с геометрической точки зрения, но может быть показано и с помощью уравнения (18.1). Выберем новую точку наблюдения P , имеющую радиус-вектор R_1 , как показано на рис. 16, так что $R = R_1 + r$ и $R_1 = \text{const}$. Если R_1 настолько больше r , что с хорошим приближением можно положить $1/R = 1/R_1$, то

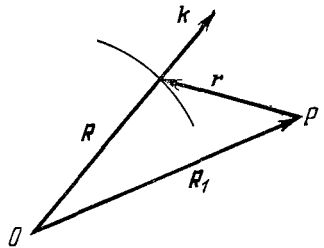


Рис. 16.

(18.1) будет лишь на постоянный множитель $\frac{A}{R_1} e^{ikR_1}$ отличаться от функции $e^{i(kr-\omega t)}$, определяющей плоскую волну.

Свойства плоских волн играют весьма существенную роль в теории электромагнитного поля. Это должно быть очевидно уже из того важного значения, которое имеет разложение Фурье по плоским волнам, введенное и использованное в предыдущей главе.

Для электромагнитного поля такого вида особенно простое выражение получает связь между потенциалами и напряженностями. Действительно, если положить

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\omega k} e^{i(kr - \omega t)}, \quad \varphi = \varphi_{\omega k} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (18.2)$$

где $\mathbf{A}_{\omega k}$ и $\varphi_{\omega k}$ — постоянные амплитуды, а $k = \omega/c$ *, то условие Лоренца, которому должны удовлетворять потенциалы, чтобы волновые уравнения для них имели одинаковую форму, запишется в виде

$$\varphi_{\omega} = n \mathbf{A}_{\omega}. \quad (18.3)$$

Здесь и в дальнейшем, говоря о плоских волнах, мы обозначаем через n единичный вектор k/k , а индекс k при амплитудах часто отбрасывается для сокращения записи. Из предыдущего рассмотрения очевидно, что вектор n ортогонален к плоскости, совпадающей с фронтом волны.

Подстановка выражений (18.2) в основные формулы (2.1) и (2.2) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega} &= -i(k\varphi_{\omega} - k\mathbf{A}_{\omega}) = -ikn \times [n \times \mathbf{A}_{\omega}], \\ \mathbf{B}_{\omega} &= ikn \times \mathbf{A}_{\omega}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Заметим, что аналогично условию (Д.6), для того чтобы потенциалы \mathbf{A} и φ были вещественными, нужно, чтобы комплексные амплитуды обладали следующими свойствами:

$$\mathbf{A}_{\omega k} = \mathbf{A}_{\omega, -k}^*, \quad \varphi_{\omega k} = \varphi_{\omega, -k}^*. \quad (18.5)$$

Физический смысл имеют, разумеется, вещественные части формул (18.4). Образуя суммы $1/2(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ и $1/2(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)$, получим

$$\operatorname{Re} \mathbf{E}_{\omega} = kn \times [n \times \operatorname{Im} \mathbf{A}_{\omega}], \quad \operatorname{Re} \mathbf{B}_{\omega} = -kn \times \operatorname{Im} \mathbf{A}_{\omega}, \quad (18.6)$$

так что $\operatorname{Re} \mathbf{E}_{\omega} = \operatorname{Re} \mathbf{B}_{\omega} \times n$ и $\operatorname{Re} \mathbf{B}_{\omega} = n \times \operatorname{Re} \mathbf{E}_{\omega}$. Здесь $\operatorname{Im} \mathbf{A}_{\omega} = -1/2i(\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{\omega}^*)$. Мы видим, что электромагнитная плоская волна поперечна: векторы напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{B} лежат в плоскости ее фронта. Кроме того, они взаимно ортогональны. Напомним, что рассматриваемые здесь плоские волны с вещественными значениями k являются решениями уравнений электромагнитного поля в однородном изотропном диэлектрике.

*) Величины k и ω считаются вещественными.

Пусть при постоянных ϵ и μ выполняются соотношения $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Тогда, представляя векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} в виде плоских волн, распространяющихся со скоростью v в среде с постоянными амплитудами, можно получить с помощью уравнений Максвелла (М.3) и (М.4) (записанных, например, в гауссовой системе единиц)

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (18.7)$$

откуда следует, в частности,

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H} = \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}. \quad (18.8)$$

Разумеется, этот результат мог быть получен и с помощью выписанных выше выражений для потенциалов.

18.2. Из (18.7) видно, что векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} всегда образуют праввинтовую систему. По исторической традиции (Френель) плоскость, содержащую векторы \mathbf{B} и \mathbf{n} , называют обычно плоскостью поляризации, а направление вектора \mathbf{B} — направлением поляризации. Если при распространении волны это направление не изменяется в плоскости ее фронта, то такая волна называется линейно поляризованной. В общем случае конец вектора \mathbf{B} будет с течением времени описывать некоторую кривую в этой плоскости. Определим характер этой кривой. Введем декартовы координаты в плоскости фронта волны. Изменение компонент вектора \mathbf{B} в этих координатах может отличаться, самое большее, начальной фазой. Записывая уравнения в вещественной форме, получим

$$B_1 = a_1 \cos(\tau + \delta_1), \quad B_2 = a_2 \cos(\tau + \delta_2), \quad (18.9)$$

где $\tau \equiv \mathbf{kr} - \omega t$. Ясно, что (18.9) описывает процесс сложения двух таких колебаний, которые мы выше назвали линейно поляризованными (в направлении первой и второй осей). Интересующее нас уравнение кривой будет получено, если исключить переменную τ из (18.9). Оно имеет вид

$$\left(\frac{B_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{B_2}{a_2}\right)^2 - 2\frac{B_1}{a_1}\frac{B_2}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (18.10)$$

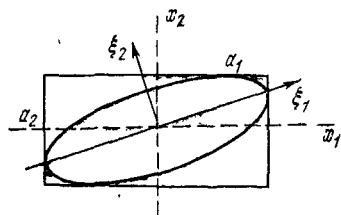


Рис. 17.

где $\delta = \delta_1 - \delta_2$. Легко убедиться с помощью обычных методов аналитической геометрии, что уравнение (18.10) определяет эллипс, вписанный в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат и равны соответственно $2a_1$ и $2a_2$ (рис. 17). Конец магнитного вектора, описывающий эллипс, может двигаться по нему в любом из двух возможных направлений. Из соотношений (18.7) следует, что и электрический вектор описывает в этом случае эллипс, параметры которого легко определить. Такой общий случай

называется эллиптически поляризованной плоской волной. При $\delta = \pi/2$ получается частный случай круговой поляризации, а при $\delta = 0$ — линейной поляризации. В первом из них происходит вырождение эллипса в окружность, во втором же он представляется в виде двух взаимно ортогональных прямых, каждая из которых определяет одно из возможных направлений колебаний. В общем случае поляризация называется правой, если наблюдателю, смотрящему навстречу лучу, представляется, что конец магнитного

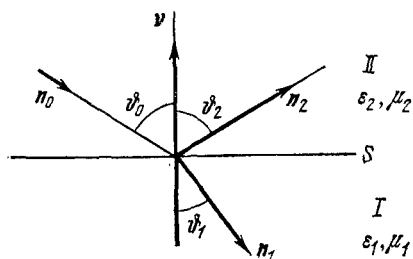


Рис. 18.

вектора движется по часовой стрелке; в противоположном случае она называется левой *).

18.3. Посмотрим теперь, что происходит, когда плоская волна падает на границу раздела S двух сред, различающихся значениями ϵ и μ (рис. 18). Обозначим через \mathbf{v} единичный вектор нормали к плоскости раздела S , направленный из среды I в среду II , и выберем для удоб-

ства начало отсчета где-либо на этой плоскости. Тогда уравнение плоскости раздела будет иметь вид $\mathbf{vr} = 0$.

Пусть падающая на S плоская волна распространяется со стороны среды II . Напряженности поля \mathbf{E}_n и \mathbf{H}_n этой волны можно записать в виде

$$\mathbf{E}_n = E_0 e^{i k_2 \mathbf{n}_0 \mathbf{r} - i \omega t}, \quad \mathbf{H}_n = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_n. \quad (18.11)$$

Вторая из этих формул следует из второй формулы (18.7), если учесть, что скорость распространения волны $v_2 = (\epsilon_2 \mu_2)^{-1/2}$ и $k_2 = \omega/v_2$. Мы обозначили через \mathbf{n}_0 единичный вектор, указывающий направление падающей волны. Плоскость, содержащая векторы \mathbf{n}_0 и \mathbf{v} , называется плоскостью падения. Поле плоской волны, имеющееся в среде II , должно на границе S этой среды удовлетворять граничным условиям (4.14). Будем считать, что на плоскости S нет ни зарядов, ни токов, т. е. что в формулах (4.14) $\lambda = 0$ и $\mathbf{i} = 0$. Прежде всего, из граничных условий видно, что в среде I при падении волны на границу раздела также должно возникнуть электромагнитное поле, которое мы обозначим $\mathbf{E}_{\text{пр}}$, $\mathbf{H}_{\text{пр}}$ и назовем преломленной волной. Можно показать, однако, что граничным условиям удовлетворить возможно только в том случае, если в среде II возникает еще одна компонента поля, которая называется отраженной волной. Обозначим ее $\mathbf{E}_{\text{отр}}$, $\mathbf{H}_{\text{отр}}$. Попытаемся удовлетворить граничным условиям, предполагая, что преломленная и отраженная

*) Заметим, что часто плоскость поляризации определяют не магнитным, а электрическим вектором.

волны являются плоскими, как и падающая, и имеют ту же частоту ω . В очевидных обозначениях (см. также рис. 18)

$$\begin{aligned} E_{\text{пр}} &= E_1 e^{ik_1 n_1 r - i\omega t}, & H_{\text{пр}} &= \frac{k_1}{\omega \mu_1} n_1 \times E_{\text{пр}}, \\ E_{\text{отр}} &= E_2 e^{ik_2 n_2 r - i\omega t}, & H_{\text{отр}} &= \frac{k_2}{\omega \mu_2} n_2 \times E_{\text{отр}}. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Условия непрерывности тангенциальных составляющих поля могут быть записаны, например, в виде $[\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1] e^{ik_1 n_1 r} = [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_0] e^{ik_2 n_0 r} + [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2] e^{ik_2 n_2 r}$ (при этом \mathbf{r} лежит в плоскости S). Но векторы \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 считаются не зависящими от \mathbf{r} . Отсюда сразу следует, что требуемая непрерывность будет иметь место лишь в том случае, когда показатели экспонент совпадают при $\mathbf{r} \in S$, т. е. когда $n_0 \mathbf{r} = n_1 \mathbf{r}$ и $n_0 \mathbf{r} = n_2 \mathbf{r}$. Воспользуемся теперь тождественным равенством $\mathbf{r} = (\mathbf{r}\mathbf{v}) \mathbf{v} - [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]]$, откуда $\mathbf{r} = -[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]]$ на S , когда $\mathbf{v}\mathbf{r} = 0$. С его помощью получим $k_2 n_0 [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]] = k_2 n_2 [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]] = k_1 n_1 [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]]$. Из (Б.5) следует $n_0 [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]] = [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] [n_0 \times \mathbf{v}]$ и аналогичные формулы для остальных двух векторных произведений. Таким образом,

$$\begin{aligned} ([n_0 \times \mathbf{v}] - [n_2 \times \mathbf{v}]) [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] &= 0, \\ (k_2 [n_0 \times \mathbf{v}] - k_1 [n_1 \times \mathbf{v}]) [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] &= 0. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Отсюда следует, что все векторы \mathbf{v} , \mathbf{n}_0 , \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 лежат в одной и той же плоскости (т. е. в плоскости падения). Обозначая углы так, как это показано на рис. 18, получаем в результате

$$\sin \vartheta_2 = \sin(\pi - \vartheta_0) = \sin \vartheta_0, \quad k_2 \sin \vartheta_0 = k_1 \sin \vartheta_1. \quad (18.14)$$

Этими равенствами выражаются законы отражения и преломления Снеллиуса.

С помощью граничных условий можно продвинуться еще дальше и определить соотношения между амплитудами *), которые позволяют вычислить относительные интенсивности падающей, отраженной и преломленной волн. Далее можно изучить изменения состояния поляризации плоской волны в ходе преломления и отражения. Заметим, что выведенные выше законы Снеллиуса справедливы и в том случае, когда среды I и II обладают электропроводностями, отличными от нуля. Таким образом, например, равенство углов падения и отражения наблюдается и при падении света на ровную поверхность воды, и на металлическую амальгаму обычного зеркала. Соотношения между интенсивностями волн, о которых было упомянуто выше, могут оказаться при этом весьма различными **).

*) Они называются формулами Френеля.

**) Их вывод и исследование заняли бы слишком много места и потому, к сожалению, не могут быть приведены здесь. См., например, М. Борн и Э. Вольф, Основы оптики, «Наука», 1970, § 1.5. Там же рассматривается явление полного внутреннего отражения.

18.4. Рассмотрим процесс сложения полей двух плоских монохроматических волн, т. е. опишем простейший случай явления интерференции. Предположим, что обе эти волны имеют одну и ту же частоту ω и запишем их в комплексном виде: $E_1 = A_1 e^{-i\omega t}$, $E_2 = A_2 e^{-i\omega t}$. Здесь A_1 и A_2 — комплексные амплитуды, причем можно предполагать, что множитель e^{ikr} включен в них. Результирующее поле благодаря принципу суперпозиции, который в свою очередь выполняется по причине линейности уравнений Максвелла, а в данном случае — однородного волнового уравнения, запишется в виде $E = E_1 + E_2$. Обозначим через A амплитуду поля E . Разумеется, представляет интерес тот поток энергии, который переносится полем E . Будем считать, что наблюдение поля E совершается в течение промежутка времени, достаточно большого по сравнению с периодом колебаний, так что наблюдателя интересует средний поток энергии за это время. Тогда применимы соображения, рассмотренные на стр. 131 в § 17 и приводящие к формуле (17.18). Имея в виду общий случай однородной изотропной среды, когда справедливы соотношения (18.8), можно записать абсолютную величину вектора Умова — Пойнтинга для поля излучения в виде

$$S = v \langle \omega \rangle = c \sqrt{\varepsilon/\mu} \langle (\operatorname{Re} E)^2 \rangle.$$

Угловые скобки, как и в § 17, обозначают усреднение по времени. В нашем случае равенство (17.18) принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \langle (\operatorname{Re} E)^2 \rangle &= 1/2 |E|^2 = 1/2 |E_1 + E_2|^2 = \\ &= 1/2 |A_1|^2 + 1/2 |A_2|^2 + \operatorname{Re}(A_1 A_2^*). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Первые два члена описывают интенсивности каждой из волн в отдельности, последнее же слагаемое называется интерференционным членом. Заметим, что мы переписали формулу (17.18) в применении к векторам вместо их абсолютных значений, что, как легко убедиться, не нарушает условий ее вывода. Множители типа e^{ikr} , упомянутые выше, взаимно сократятся в правой части (18.15), так что в дальнейшем их также можно не учитывать. Запишем теперь комплексные величины A_1 и A_2 , отделяя вещественные и мнимые их части в виде $A_{1\alpha} = a_\alpha e^{ig_\alpha}$, $A_{2\alpha} = b_\alpha e^{ih_\alpha}$, где a_α , b_α , g_α , h_α вещественны и $\alpha = 1, 2, 3$. В этих обозначениях

$$\operatorname{Re}(A_1 A_2^*) = \sum_{\alpha} a_\alpha b_\alpha \operatorname{Re}[e^{i(g_\alpha - h_\alpha)}] = \sum_{\alpha} a_\alpha b_\alpha \cos(g_\alpha - h_\alpha). \quad (18.16)$$

Предположим теперь, что условия эксперимента обеспечивают равенство разностей $g_\alpha - h_\alpha$ при всех α : $g_\alpha - h_\alpha = \delta$ ($\alpha = 1, 2, 3$) *).

*) Такие условия обеспечиваются в классических опытах с бипризмой Френеля, билинзой Бийе и пр. (см. любой курс общей физики), когда интерферируют две волны, исходящие из одного и того же источника.

Величина δ называется разностью фаз волн, приходящих в точку наблюдения. Тогда интерференционный член примет вид

$$J_{12} \equiv \operatorname{Re}(A_1 A_2^*) = (ab) \cos \delta. \quad (18.17)$$

Все эти результаты получены без использования того факта, что электромагнитные волны чисто поперечны*). Рассмотрим частный случай интерференции двух волн, не предполагая заранее, что они поперечные, когда обе волны распространяются в направлении 3, электрический вектор одной из них лежит в плоскости (1, 3), а электрический вектор второй — в плоскости (2, 3). Тогда в использованных выше обозначениях $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ и $J_{12} = a_3 b_3 \cos \delta$. Опыты Френеля и Араго показали в свое время, однако, что при этих условиях на самом деле $J_{12} = 0$ независимо от величины δ , так что интерференция отсутствует. Отсюда нужно заключить, что $a_3 = b_3 = 0$, т. е. что волны действительно поперечны, как это и следует из общей теории.

В упомянутом частном случае распространения выпишем формулы для интенсивности поля E , предполагая еще, что обе волны линейно поляризованы и их электрические векторы направлены вдоль оси 1. При этом $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$, так что полная интенсивность равна $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, где $I_1 = a_1^2/2$, $I_2 = b_1^2/2$. Таким образом, интерференция будет наблюдаться в виде чередования максимумов интенсивности при $|\delta| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ с ее минимумами при $|\delta| = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ Удобно с помощью соотношения $\Delta l = \lambda_0 \delta / 2\pi$ ввести так называемую оптическую разность хода Δl двух волн; здесь λ_0 — длина волны в вакууме, соответствующая частоте ω .

Мы рассмотрели интерференцию двух монохроматических волн. Весьма важной проблемой является определение тех условий, при которых электромагнитные волны, порождаемые физическими источниками в реальных условиях, могут интерферировать. Допустим, что излучение, наблюдаемое в некоторой точке пространства, создается N источниками. Каждый из них создает в этой точке свое поле E_k , H_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Так как электромагнитное поле удовлетворяет принципу суперпозиции, все источники вместе порождают поле $E = \sum_{k=1}^N E_k$ и $H = \sum_{k=1}^N H_k$. Поток энергии поля, который, как мы видели ранее, и характеризует явление излучения, определяется абсолютной величиной вектора Пойнтинга

$$|S| = c |E \times H| = c \left| \sum_{k,l} E_k \times H_l \right|.$$

*) Действительно, при их выводе не применялась теория электромагнитного поля, так что они справедливы для волн любой природы.

Как мы уже упоминали, наблюдается обычно среднее значение вектора Пойнтинга за некоторый промежуток времени (обозначаемое угловыми скобками). Таким образом, интенсивность I_P поля излучения в точке P выражается формулой

$$I_P = |\langle \mathbf{S} \rangle| = c \left| \sum_k \langle \mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_k \rangle + \sum_{k \neq l} \langle \mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_l \rangle \right|.$$

Если выполняется условие $\sum_{k \neq l} \langle \mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_l \rangle = 0$, т. е. $I(P) = \left| \sum_k \langle \mathbf{S}_k \rangle \right|$, где \mathbf{S}_k — вектор Пойнтинга, соответствующий k -му источнику, то рассматриваемые поля \mathbf{E} , \mathbf{H} называются *некогерентными*. Интерференция в принципе возможна, лишь если условие некогерентности не имеет места (мы вынуждены ограничиться этим «отрицательным» определением). Выше было показано, что две монохроматические волны интерферируют. Условия когерентности в общем случае слишком сложны, чтобы можно было рассмотреть их здесь; для этого требуется подробное изучение усреднения полей *). Вообще говоря, поле не является когерентным, если его слагаемые можно считать взаимно статистически-независимыми. Это условие выполняется для естественных источников света, поле излучения которых порождается обычно огромным числом независимо излучающих атомов. Однако в настоящее время существуют и широко применяются такие оптические и радиотехнические приборы (например, лазеры), которые создают почти монохроматическое излучение. Принцип действия таких приборов основан на квантовой теории **).

§ 19. Релятивистские преобразования плоской волны

19.1. Обратимся к вопросу о том, как электромагнитное поле плоской волны в вакууме описывается с точки зрения различных инерциальных систем отсчета. В предыдущей главе уже говорилось, что такие особенности поля излучения, как взаимная ортогональность векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} и равенство их абсолютных величин обладают релятивистской инвариантностью. Заметим теперь, что условие Лоренца для плоской волны, выраженное формулой (18.3), можно переписать в виде

$$k' \Phi_i = 0, \quad (19.1)$$

если обозначить $k^0 = \omega/c$ и вспомнить определение четырехмерного вектора потенциала (7.3). В § 7 мы убедились, что условие Лоренца, сформулированное для потенциалов общего вида, релятивистски-инвариантно. Отсюда следует, что и соотношение (19.1) для потен-

*) См. цитируемую выше книгу М. Борна и Э. Вольфа, гл. 10.

**) Элементарную теорию их см., например, в книге Н. И. Калитеевского «Волновая оптика».

циалов плоской волны инвариантно. Но это может быть лишь в том случае, когда четыре величины k^i являются компонентами пространственно-временного (т. е. четырехмерного) вектора. Отсюда следует также, что фаза плоской волны может быть записана в виде $k\mathbf{r} - \omega t = k\mathbf{r} - k^0 x^0 = -k^i x_i$, т. е. она релятивистски-инвариантна. Четырехмерный вектор k^i при этом является нулевым, т. е. удовлетворяет равенству $k^i k_i = 0$.

Умножим теперь вектор \mathbf{E} , определяемый формулой (18.4), скалярно на единичный вектор \mathbf{n} : $\mathbf{E}\mathbf{n} = i(k\varphi_\omega - k\mathbf{A}_\omega) = 0$. Очевидно, что образованное скалярное произведение имеет релятивистски-инвариантный характер. Поэтому поперечность электрического (и аналогично — магнитного) вектора по отношению к направлению распространения плоской волны — также релятивистски-инвариантное свойство.

Пусть в инерциальной системе K плоская волна характеризуется величинами \mathbf{k} и ω . В системе отсчета K' , которая движется относительно K со скоростью \mathbf{v} , та же плоская волна будет иметь волновой вектор \mathbf{k}' и частоту ω' . Значения \mathbf{k}' и ω' связаны с \mathbf{k} и ω , как показывает предыдущее рассуждение, преобразованиями Лоренца вида (5.12), причем \mathbf{k} преобразуется как радиус-вектор \mathbf{r} , а ω/c — как координата времени x^0 . Удобно записать эти формулы преобразования в следующем виде:

$$\mathbf{k}' = (1 - \gamma) \mathbf{k}_\perp + \gamma \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \omega \right), \quad (19.2_1)$$

$$\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (19.2_2)$$

Как всегда, значком \perp отмечается составляющая, ортогональная к относительной скорости \mathbf{v} . При этом $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ и $\mathbf{k}' = \frac{\omega'}{c} \mathbf{n}'$. Первую из этих формул можно также переписать несколько иначе, а именно $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + (\gamma - 1) \mathbf{k}_\parallel - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \omega$, откуда следует, что вектор \mathbf{k}' лежит в плоскости, содержащей векторы \mathbf{k} и \mathbf{v} .

Преобразование частоты (19.2₂) представляет собой релятивистскую формулировку *эффекта Доплера*. Если обозначить через ϕ угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{v} , то (19.2₂) можно более подробно переписать в виде

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (19.3)$$

Отметим свойство релятивистской формулы (19.3), качественно отличающее ее от нерелятивистского описания эффекта Доплера. Если $\phi = \pi/2$, т. е. световая волна попадает в систему отсчета наблюдателя по направлению, ортогональному к его скорости \mathbf{v} относительно источника, то эффект Доплера не исчезает, как это было в классической теории, а выражается формулой $\omega' = \omega / \sqrt{1 - \beta^2}$

(поперечный эффект Доплера). Такая связь частот обусловлена эффектом релятивистского замедления времени в движущейся системе. Можно представить себе, например, что «покоящаяся» система отсчета K соединена с источником, излучающим световые волны, имеющие частоту ω . Тогда должно выполняться равенство $\omega' dt' = \omega dt$, так как число, например, максимумов волн, подсчитываемых двумя наблюдателями за соответственные промежутки времени, должно быть одним и тем же. Но $dt' = dt \sqrt{1 - \beta^2}$. В случае же, когда движение имеет и радиальную составляющую, нужно еще учитывать классический эффект Доплера *).

Обозначим через ϑ' угол, образуемый вектором \mathbf{k}' с направлением вектора \mathbf{v} (выше мы видели, что этот угол отсчитывается в той же плоскости, что и угол ϑ). Проекции преобразования (19.2₁) на направления, ортогональное и параллельное \mathbf{v} , имеют вид

$$\omega' \sin \vartheta' = \omega \sin \vartheta, \quad \omega' \cos \vartheta' = \gamma \omega (\cos \vartheta - v/c). \quad (19.4)$$

Поделив первое равенство на второе, получим

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \vartheta}{\cos \vartheta - \beta}. \quad (19.5)$$

Предположим, что $\mathbf{k}\mathbf{v} \simeq 0$, т. е. $\vartheta \simeq \pi/2$, а скорость относительного движения нерелятивистская, так что $\beta \ll 1$. Пусть, однако, $\cos \vartheta \ll \beta$ (например, можно рассмотреть случай, когда угол ϑ точно равен $\pi/2$). Тогда $\operatorname{tg} \vartheta' = -\beta^{-1}$. Для интерпретации этой формулы можно рассмотреть в качестве источника света какую-либо звезду, расположенную на небесном своде таким образом, что в связанной с нею системе отсчета направление движения Земли по орбите образует с испускаемым звездой лучом света угол ϑ . Тогда формула (19.5) определяет тот угол, под которым эта звезда будет видна с движущейся Земли. Смысл только что рассмотренного нерелятивистского приближения понятен без дальнейших объяснений из рис. 19. Этот эффект

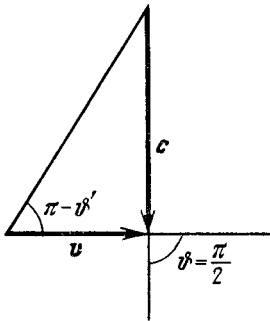


Рис. 19.

наблюдается в астрономии и называется астрономической аберрацией. Предсказываемые точной формулой (19.5) поправки порядка β^2 и выше слишком малы, чтобы их можно было измерить в настоящее время.

Релятивистскую аберрацию (19.5) следует рассматривать как эффект, возникающий благодаря сложению скорости света со ско-

*) Поперечный эффект Доплера был экспериментально обнаружен в 1938 г. Айвсом и Стилвеллом.

ростью наблюдателя относительно той системы, в которой источник света покоится. Это сложение должно производиться по релятивистской формуле (5.13). Из нее непосредственно видно, что скорость u' лежит в плоскости, определяемой векторами u и v . Обозначая через ϑ угол между этими векторами, а через ϑ' — угол между u' и v , можно спроектировать обе стороны выражения (5.13) на направление v и на ортогональную к v плоскость, а затем поделить второе из полученных при этом выражений на первое. В результате получим

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{u \sin \vartheta \sqrt{1 - \beta^2}}{u \cos \vartheta - v}. \quad (19.6)$$

В частном случае, когда $u = c$, формулы (19.6) и (19.5) совпадают.

Формулу сложения скоростей уместно применить также для объяснения результата *опыта Физо*, в котором измерялась скорость света, распространяющегося в движущейся со скоростью v относительно наблюдателя среде. Как мы уже отмечали, скорость света по отношению к покоящейся среде равна c/n , где $n \equiv \sqrt{\epsilon\mu}$, а c — скорость света в вакууме. Без ограничения общности можно считать, что среда движется вдоль оси x в системе отсчета наблюдателя, а свет распространяется в том же (или в прямо противоположном) направлении. Тогда можно применить преобразование Лоренца частного вида от системы отсчета, движущейся вместе со средой, к системе наблюдателя и взять соответствующую формулу сложения скоростей (5.13'). Если обозначить через c' скорость света по отношению к наблюдателю, то из (5.13') следует, что

$$c' = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/cn} \simeq \left(\frac{c}{n} \pm v \right) \left(1 \mp \frac{v}{cn} \right) \simeq \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (19.7)$$

при нерелятивистских скоростях v движения среды. Таким образом, нужно не просто сложить скорость света c/n со скоростью v среды, что следовало бы из преобразования Галилея, но еще умножить предварительно эту скорость на так называемый коэффициент Френеля $1 - 1/n^2$. Этот результат здесь просто следует из релятивистской кинематики и справедлив, разумеется, не только для плоских волн, но и для световых импульсов произвольной формы, распространяющихся в среде с групповой скоростью c/n *).

19.2. Рассмотрим, как преобразуется абсолютная величина вектора электрического поля в волновой зоне при переходе к новой системе отсчета. Вначале не будем предполагать, что волна плоская, а используем лишь условие поперечности. Выберем начало системы пространственных координат в некоторой точке пространства системы отсчета K , через которую проходит световая волна, направив ее оси так, как показано на рис. 20. Направление вектора v

*1 О понятии групповой скорости см. в § 39.

относительной скорости новой системы K' определим с помощью полярного угла ϑ и азимутального угла ζ . Возведем в квадрат первую из формул (7.14). Обозначая $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}/v$, получим $E'^2 = -\beta^2 \gamma^2 (E\mathbf{v}_1)^2 + \gamma^2 \left(E + \frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right)^2$. Но

$$E\mathbf{v}_1 = E \cos \zeta \sin \vartheta,$$

$$\left[\frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right]^2 = \beta^2 E^2 (1 - \cos^2(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{v}})) = \beta^2 E^2 (1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \vartheta),$$

$$2E \left[\frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right] = 2 \frac{v}{c} [\mathbf{B} \times \mathbf{E}] = -2 \frac{v_z}{c} E^2 = -2\beta E^2 \cos \vartheta,$$

причем в последних двух равенствах было учтено, что $E = B$ в волновой зоне. Окончательно, после приведения подобных членов:

$$E' = \gamma E (1 - \beta \cos \vartheta). \quad (19.8)$$

С помощью формулы Доплера (19.3) этот результат для плоских волн может быть выражен в виде

$$E'/\omega' = E/\omega. \quad (19.9)$$

Соответствующая плотность потока энергии определяется абсолютной величиной вектора Умова — Пойнтинга

$$S' = cE'^2 = S (1 - \beta \cos \vartheta)^2 / (1 - \beta^2),$$

отсюда

$$S'/S = (\omega'/\omega)^2. \quad (19.10)$$

Интересно подсчитать, какая энергия заключена в конечном объеме, движущемся вместе с плоской волной. Для этого необходимо провести некоторые вспомогательные рассуждения. Пусть имеются две инерциальные системы: система K и движущаяся относительно нее со скоростью \mathbf{v} система K' . Для наших целей достаточно считать при этом, что выполняются условия, при которых системы K и K' связаны между собой преобразованием Лоренца частного вида. Рассмотрим некоторую пространственную область, все точки которой имеют по отношению к системе K' скорость \mathbf{u}' , образующую с осью x' угол ϑ' . Обозначим через dV_0 «собственный» объем этой области, измеренный неподвижным относительно нее наблюдателем. С точки зрения системы K' объем области, как мы видели при выводе уравнения (5.10), равен $dV' = dV_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$. Относительно

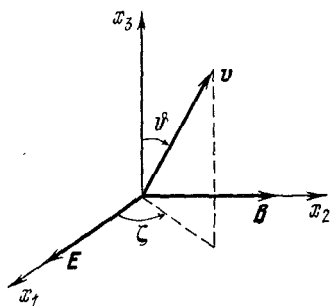


Рис. 20.

системы отсчета K та же движущаяся область имеет скорость u , которую можно определить с помощью релятивистской формулы сложения скоростей (5.13'). Из этой формулы следует

$$u^2 = \frac{u'^2 + 2u'v \cos \vartheta' + v^2 - (u'^2 v^2 / c^2) \sin^2 \vartheta'}{[1 + (u'v/c^2) \cos \vartheta']^2},$$

откуда $\sqrt{1 - u^2/c^2} = [1 + (u'v/c^2) \cos \vartheta']^{-1} \sqrt{1 - u'^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Но $dV = dV_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$ — это объем с точки зрения системы отсчета K , поэтому $dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2} \left(1 + \frac{u'}{c} \beta \cos \vartheta'\right)^{-1}$. Заметим, что при $u' \rightarrow c$ одновременно $u \rightarrow c$, а объемы dV и dV' стремятся к нулю. Однако выведенная формула показывает, что отношение dV/dV' в этом пределе принимает определенное значение. Именно, при $u' \rightarrow c$ $dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2} / (1 + \beta \cos \vartheta')$, т. е. $dV \cdot \omega = dV' \cdot \omega'$.

Энергия поля, содержащегося в объеме V , определится равенством: $W = \frac{1}{2} \int (E^2 + H^2) dV = \int E^2 dV$. Но мы видели, что E^2 преобразуется пропорционально ω^2 . Используя только что полученное соотношение для V , придем к выводу, что

$$W/\omega = W'/\omega'. \quad (19.11)$$

Обозначим через D общее значение этого отношения, являющееся инвариантом преобразований Лоренца. Полный импульс поля, заключенный в объеме V , на основании формул § 3 равен

$$P = \frac{1}{c} \int [E \times H] dV = \frac{1}{c} n \int E^2 dV = \frac{\omega}{c} nD.$$

Таким образом, величины W/c и P образуют совместно четырехмерный вектор нулевой длины ($W^2/c^2 - P^2 = 0$), пропорциональный вектору k^i . Квантовая теория утверждает, что $D = Nh/2\pi$, где N — произвольное целое число, а h — постоянная Планка. При $N = 1$ мы получаем соотношения, выполняющиеся для отдельного кванта поля излучения — фотона. Так, из определения длины волны $\lambda = c/v = 2\pi c/\omega$ получим, в частности,

$$G = h/\lambda, \quad \mathcal{E} = h\omega/2\pi. \quad (19.12)$$

Здесь \mathcal{E} — энергия, а G — импульс фотона.

19.3. В заключение этого параграфа покажем, как релятивистские формулы преобразования позволяют определить характеристики световой волны, отраженной от движущегося зеркала. Пусть в системе отсчета K , относительно которой зеркало движется со скоростью v , световая волна, падающая на зеркало, характеризуется частотой ω и направление ее распространения образует с осью x угол ϑ_0 . В системе K' , движущейся вместе с зеркалом, согласно формулам (19.2), получим частоту ω' и волновой вектор k' .

Мы запишем здесь эти формулы для большей наглядности в виде, соответствующем частному преобразованию Лоренца от K к K' :

$$\omega' = \omega_0 \frac{1 - \beta \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad n'_{x'} = \frac{\cos \vartheta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta_0}, \quad n'_{y'} = \frac{\sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta_0}.$$

Предположим, что в системе K' выполняется обычный закон отражения Снеллиуса (18.14), выведенный выше. Тогда в этой системе отраженная волна получится просто заменой $n'_{x'}$ на $-n'_{x'}$, т. е. для этой волны $n'_{x'} = -(\cos \vartheta_0 - \beta)/(1 - \beta \cos \vartheta_0)$. А теперь с помощью формул преобразования, обратного по отношению к (19.2), для отраженной волны, рассматриваемой уже с точки зрения системы K , находим

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' \frac{1 + \beta n'_{x'}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega_0 \frac{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2}{1 - \beta^2} \simeq \omega_0 (1 - 2\beta \cos \vartheta_0), \\ \cos \vartheta &= n_x = \frac{n'_{x'} + \beta}{1 + \beta n'_{x'}} = -\frac{\cos \vartheta_0 - 2\beta + \beta^2 \cos \vartheta_0}{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2} \simeq -\cos \vartheta_0 + 2\beta \sin^2 \vartheta_0, \\ \sin \vartheta &= n_y = \frac{n'_{y'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n'_{x'}} = \frac{\sin \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2} \simeq \sin \vartheta_0 + 2\beta \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0. \end{aligned} \quad (19.13)$$

В конце каждой строки указано нерелятивистское приближение. Эти формулы играют важную роль в теории теплового излучения, будучи основой вывода закона смещения Вина, который рассматривается в § 22.

§ 20. Принцип Гюйгенса. Основы теории дифракции

20.1. Перейдем к вопросу о том, что произойдет, если распространяющееся в пространстве поле излучения встретит какое-либо препятствие (например, в виде экрана с отверстиями). Эта проблема (составляющая предмет теории дифракции) очень важна для оптики и теории распространения радиоволн. Из курса общей физики читатель знаком с элементарной формулировкой принципа Гюйгенса и методом рассмотрения дифракции с помощью зон Френеля. Здесь мы имеем возможность, опираясь на известное уже решение волнового уравнения, изучить постановку задачи о дифракции в более общем виде.

Вспомним запись решения неоднородного волнового уравнения в виде формул (13.8) и (13.9). Как было указано в начале § 13, в качестве функции ψ может быть взята любая из декартовых компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Пусть область, в которой нас интересуют напряженности электромагнитного поля, не содержит источников этого поля и имеет граничную поверхность σ . Тогда на основании упомянутых формул должно выполняться соотношение между значением

поля в точке наблюдения и его значениями на замкнутой граничной поверхности σ , окружающей эту точку:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\sigma} \mathbf{n} \left[\frac{\text{grad}' \psi(\mathbf{r}', t')}{R} - \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{r}', t') - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=t-R/c} d\sigma.$$

Напомним, что $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Считая, что зависимость функции ψ от времени — гармоническая, т. е. что $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$, можно сразу же переписать предыдущую формулу в виде соотношения между амплитудами:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\sigma} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \left[\text{grad}' \psi(\mathbf{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{R}{R} \psi(\mathbf{r}') \right] d\sigma. \quad (20.1)$$

При выводе равенства (20.1) следует заметить, что в рассматриваемой области функция $\psi(\mathbf{r})$ должна быть решением однородного уравнения Гельмгольца *). Применим теперь к этой области формулу Грина (Б.28), считая, что функция $\varphi = G$ является функцией Грина для уравнения Гельмгольца, т. е. $(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Тогда, интегрируя, как это было сделано и в § 13, по штрихованной переменной, получим

$$\psi(\mathbf{r}) = \oint_{\sigma} \mathbf{n} (G \text{grad}' \psi - \psi \text{grad}' G) d\sigma. \quad (20.2)$$

Если в качестве функции Грина подставить в (20.2) фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в виде расходящейся сферической волны, определяемой формулой (Д.17) со знаком плюс в показателе степени, то мы возвратимся к соотношению (20.1). Однако формула (20.2) — более общая, так как произвольная функция Грина G может быть получена как сумма фундаментального решения, использованного при выводе (20.1), с общим решением однородного уравнения. Легко также заметить аналогию между соотношением (20.1) и формулами § 11, связывающими электростатическое поле в точке наблюдения с простым и двойным слоями, нанесенными на граничную поверхность. Из предыдущих рассуждений ясно, что вид интеграла в (20.2) должен определяться действием источников, находящихся, по предположению, вне поверхности σ , но обуславливающих существование поля внутри этой поверхности.

В области, ограниченной поверхностью σ , единственность решения ψ обеспечивается, как это было и в случае статического поля (см. § 11), заданием на σ либо только значений ψ (задача Дирихле), либо только $d\psi/dn$ (задача Неймана). Доказательство этого факта вполне аналогично проведенному в § 11, если использовать уравнение Гельмгольца, а не уравнение Пуассона. Поэтому значения ψ

*) См. формулу (Д.14).

и $d\psi/dn$ не могут быть заданы на поверхности одновременно произвольным образом, а (20.1) является интегральным соотношением, непротиворечивость которого нуждается в проверке в каждом конкретном случае.

Формулу (20.2) можно интерпретировать как правило, позволяющее построить электромагнитное поле в точке наблюдения в виде «суммы» элементарных волн вида G , излучаемых каждым элементом граничной поверхности σ (при этом под знаком интеграла функции ψ и $\text{grad}' \psi$ следует считать известными, заданными в качестве граничных значений на σ). В частности, в (20.1) эти элементарные волны являются сферическими. При таком истолковании (20.2) представляет собой общую формулировку принципа Гюйгенса.

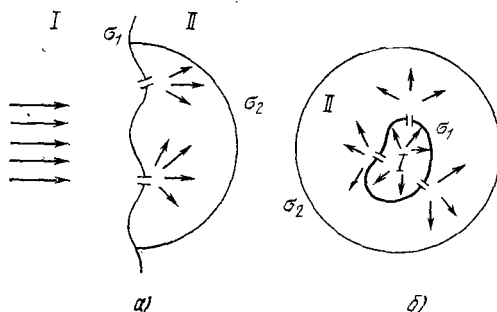


Рис. 21.

Предположим, что пространство разделено на две части бесконечной поверхностью, которая обладает некоторыми физическими свойствами. Эту поверхность мы будем в дальнейшем называть экраном. Пусть все источники электромагнитного поля находятся по одну сторону от экрана, сам же экран имеет какое-то количество отверстий. При падении поля излучения, создаваемого источниками, на экран, часть поля отражается от экрана в обратном направлении, часть же проходит через экран в другое полупространство. При этом представляет интерес сравнение проходящей волны с падающим на экран излучением. Если свойства этого излучения, а также свойства экрана известны, то определение проходящей волны представляет собой одну из основных задач теории дифракции. Можно рассматривать также экран в виде замкнутой поверхности, внутри которой находятся источники (рис. 21). Область, содержащую источники, будем в дальнейшем обозначать цифрой I , а область, в которой измеряется дифрагированное излучение, — цифрой II .

Рассмотрим сначала первый из вариантов постановки задачи о дифракции (рис. 21, а). Образует замкнутую поверхность $\sigma_1 + \sigma_2$,

часть которой σ_2 представляет собой полусферу, содержащуюся в области II и вырезающую из экрана часть σ_1 . Формула (20.1) определяет поле в любой точке внутри этой поверхности, если только известны значения поля на экране σ_1 и на полусфере σ_2 . Таким образом, $\psi(\mathbf{r}) = I[\sigma_1] + I[R]$, где I — поверхностный интеграл, входящий в правую часть формулы (20.1), а R — радиус полусферы σ_2 . Рассмотрим теперь $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$. Значения этого предела

зависят, разумеется, от предположений о свойствах функции ψ , содержащейся под интегралом. Те или иные предположения такого рода выделяют класс функций, в котором мы ищем решение интересующей нас проблемы. Будем рассматривать такие функции ψ , которые удовлетворяют условию излучения, а именно, принимают вид расходящейся сферической волны вдали от экрана, т. е. при достаточно больших значениях R

$$\psi \simeq f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R \rightarrow \infty. \quad (20.3)$$

Легко подсчитать, что на σ_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} \simeq \left(ik - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right)^2 f(\vartheta, \varphi), \\ \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} &\simeq \left(ik - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right)^2 f(\vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

и члены порядков $1/R$, $1/R^2$ и $1/R^3$ в подынтегральном выражении взаимно сокращаются. Остающиеся же члены убывают быстрее, чем $1/R^3$, и, следовательно, если условие излучения выполнено, то $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$. После перехода к пределу интеграл $I[\sigma_1]$ будет распространен уже на весь экран (разумеется, вместе с имеющимися в нем отверстиями).

Аналогичным образом при выполнении условия излучения обращается в нуль интеграл по сфере σ_2 , проведенной в области II , как это показано на рис. 21, б. Поэтому предыдущее рассуждение полностью применимо и в данном случае, если вначале граница области состоит из двух поверхностей σ_1 и σ_2 и в пределе остается только интеграл по поверхности σ_1 , совпадающей с экраном. Нужно еще учесть, что в приведенных выше формулах положительным направлением нормали считается направление из области II в область I , в соответствии с обычным выбором его при использовании теоремы Гаусса и ее следствий. С физической точки зрения естественно изменить этот выбор на обратный. Сделав это, получим

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_1} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \left[\text{grad}' \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{R}{R} \psi \right] d\sigma. \quad (20.4)$$

Итак, поле в области II , в принципе, можно вычислить, если только известно поле на поверхности σ_1 . Разумеется, даже если

полностью известны свойства источников, нахождение поля на σ_1 представляет задачу, разрешимую только в исключительных случаях. Это поле зависит от физических свойств экрана и при его определении следует учитывать взаимодействие падающего поля с экраном. Однако огромное число задач классической оптики оказывается возможным разрешить с достаточной точностью, если воспользоваться так называемым *приближением Кирхгофа*. Оно содержит следующие предположения:

1. Функции ψ и $\text{grad } \psi$ на σ_1 обращаются в нуль всюду со стороны этой поверхности, примыкающей к области II, за исключением отверстий.

2. Функции ψ и $\text{grad } \psi$ в отверстиях экрана равны соответствующим величинам падающей волны при отсутствии экрана.

Сформулированные условия, строго говоря, несовместны с математической точки зрения. Действительно, как уже было упомянуто выше, значения ψ и $\text{grad } \psi$ нельзя задавать в точках граничной поверхности независимо одни от других. Нужно заметить также, что если в экране имеются отверстия, то предположения 1 и 2 приводят к тому, что вдоль контура каждого из этих отверстий функция ψ испытывает разрыв непрерывности, в то время как теорема Грина справедлива только для функций, непрерывных всюду на граничной поверхности σ . Успешность приближения Кирхгофа в оптических задачах объясняется главным образом тем, что отношение длины волны к характерным размерам отверстий в этих задачах мало *). Поэтому дифрагированное излучение в основном сохраняет направление падающей волны и предположение о равенстве нулю поля на затененной стороне экрана приблизительно выполняется.

Формулу Кирхгофа (20.4) можно в принципе заменить другим соотношением, которое строго соответствует теореме единственности. Для этого нужно вернуться к уравнению (20.2) и, вместо того чтобы брать в качестве функции G фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, определить эту функцию с помощью следующих дополнительных условий:

$$G = 0 \text{ на } \sigma_1, \quad R \left(\frac{\partial G}{\partial n} - ikG \right) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (20.5)$$

Благодаря второму из них

$$\int_{\sigma_2} \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) R^2 d\Omega = \int R^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - ik\psi \right) G d\Omega \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, если по-прежнему предполагать, что функция ψ удовлетворяет условию излучения. Первое же из условий (20.5) выражает отличие функции G от сферической волны, использованной ранее.

*) Обычно взаимодействие вещества экрана с излучением можно считать сильным на расстояниях порядка длины волны.

Благодаря ему член в подынтегральном выражении, умноженный на $\partial\psi/\partial n$, исчезает и результат записывается в виде

$$4\pi\psi(\mathbf{r}) = - \int_{\sigma_1} \psi \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (20.6)$$

Таким образом, здесь достаточно знать лишь граничные условия для функции ψ , и предположение Кирхгофа, относящееся к этой функции, может быть использовано без каких-либо противоречий.

С физической точки зрения, однако, применение условий Кирхгофа и в данном случае можно оправдать лишь приближенно, так как электромагнитное излучение всегда взаимодействует с экраном и потому в отверстиях отличается от падающей волны. Кроме того, оно не может и полностью исчезать на затененной стороне экрана. С точки же зрения практического вычисления применение формулы (20.6) связано с необходимостью определения функции Грина, удовлетворяющей условиям (20.5). При этом первое из них фактически требует нахождения своей функции Грина для каждой конкретной формы экрана. Решение такой задачи представляет значительные математические трудности и может быть получено в замкнутом виде лишь в случае плоского экрана. Математическая же нестрогость формулы Кирхгофа мало сказывается в том приближении, в котором она применима, но компенсируется ее общностью.

Рассмотрим теперь геометрическую поверхность σ_1 , не являющуюся экраном (т. е. лишенную каких-либо физических свойств) и разделяющую все пространство на области I и II , как это показано на рис. 21. Тогда в области II при выполнении условия излучения поле $\psi(\mathbf{r})$ будет определяться формулой (20.4), где интегрирование проводится по всей поверхности σ_1 , а под интегралом стоит выражение для падающей волны. Пусть теперь с поверхностью σ_1 совпадает материальный экран, прорезанный, как и ранее, отверстиями. Обозначим через $\sigma_1^{(a)}$ сплошную часть экрана σ_1 , а через $\sigma_1^{(b)}$ его геометрическую часть, образованную отверстиями, так что можно записать $\sigma_1 = \sigma_1^{(a)} + \sigma_1^{(b)}$. Если применимо приближение Кирхгофа, то поле $\psi_b(\mathbf{r})$ в области II определяется только интегралом по $\sigma_1^{(b)}$. Заменим сплошную часть экрана $\sigma_1^{(a)}$ отверстиями, а отверстия $\sigma_1^{(b)}$ — сплошной поверхностью. В этом случае поле $\psi_a(\mathbf{r})$ в области II определяется интегралом, взятым только по $\sigma_1^{(a)}$. Из этих соображений сразу же следует, что $\psi_a(\mathbf{r}) + \psi_b(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$. Экраны, для которых вычислены дифрагированные поля ψ_a и ψ_b , естественно назвать взаимно дополнительными. Выведенное только что равенство называется *принципом Бабине* для дифракции на таких экранах.

Важно отметить, что выведенные до сих пор формулы являются скалярными, т. е. все компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} рассматриваются отдельно одна от другой. Такая скалярная теория дифракции

не позволяет рассмотреть эффекты, связанные с тем, что поляризация дифрагированной волны может изменяться. Эти эффекты часто существенны, например, при изучении дифракции электромагнитных волн в диапазоне радиочастот. Имеется векторное обобщение формулы Кирхгофа, позволяющее их вычислить.

Проще всего такая задача решается записью формулы (20.2) для каждой компоненты вектора \mathbf{E} и векторным сложением, в результате которого получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\sigma} [G(\mathbf{n} \operatorname{grad}') \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{n} \operatorname{grad}' G)] d\sigma. \quad (20.7)$$

Аналогично записывается выражение для \mathbf{B} . Формула (20.7) оканчивается, однако, неудобной для вычислений. На практике чаще используются другие формулы*).

20.2. Не имея возможности изучать здесь векторные формулы, попытаемся несколько продвинуться вперед в физической интерпретации соотношения (20.6) для простейшего случая. Именно, предположим, что экран плоский, причем плоскость его определяется уравнением $z = 0$, а точечный источник излучения

расположен в точке P с координатами x, y, z (рис. 22). Пусть точка S — зеркальный образ точки P относительно экрана, т. е. она имеет координаты $x, y, -z$. Составим для произвольной точки Q с координатами ξ, η, ζ (на рисунке она изображена лежащей в плоскости экрана, т. е. при $\zeta = 0$) функцию

$$G(\xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{4\pi r_2}. \quad (20.8)$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет условиям, определяющим функцию Грина, в том числе и условиям (20.5). Из последующего вывода будет ясно, что особенность функции G в точке S (т. е. при $r_2 = 0$) роли не играет. Из (20.8) следует

$$4\pi \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{d}{dr_1} \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} - \frac{d}{dr_2} \left(\frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial \zeta}.$$

Если точка Q находится на экране, то (см. рис. 22) $r_1 = r_2 = r$, $\frac{\partial r_1}{\partial \zeta} = -\frac{\partial r_2}{\partial \zeta} = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}})$, т. е. $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \zeta} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}})$. Но

*) См., например, Х. Хенл, Л. Мауэ, К. Вестфаль, Теория дифракции, «Мир», 1964, стр. 33—35.

$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \simeq \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r}$, если считать, что источник P находится далеко от экрана, а именно $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$. Теперь (20.6) при подстановке функции Грина (20.8) примет вид

$$i\lambda\psi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}}) \psi \, d\sigma, \quad (20.9)$$

где, в соответствии с приближением Кирхгофа, интегрирование производится лишь по отверстиям в плоском экране. Итак, формула (20.9) говорит о том, что из каждого элемента $d\sigma$ отверстия выходит сферическая волна, амплитуда и фаза которой определяются падающей волной ψ . Поле по ту сторону отверстия представляется в виде суперпозиции этих сферических волн. Мы вновь получили принцип Гюйгенса в его наиболее наглядной формулировке.

Подставим для подынтегральной функции ψ значения, соответствующие падающей сферической волне с амплитудой A , испускаемой точечным источником, находящимся на расстоянии r' от отверстия. Тогда

$$i\lambda\psi(r) = \frac{A}{4\pi} \int e^{ik(r+r')} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}'})}{rr'} \, d\sigma. \quad (20.10)$$

Если характерные размеры отверстия, т. е. области интегрирования в правой части (20.10), малы по сравнению с r и с r' , то множитель $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}})/rr'$ почти постоянен и его можно вынести за знак интеграла. Для применимости приближения Кирхгофа нужно, кроме того, считать, что k — большая величина, и поэтому функция $e^{ik(r+r')}$ очень быстро осциллирует. Разложим r по степеням ξ и η , причем $\xi = 0$. Если R — значение r , соответствующее началу координат O (помещаемому, как и раньше, на плоскости экрана), а α и β — направляющие косинусы луча, соединяющего точку O с точкой наблюдения, относительно осей ξ и η , то разложение имеет вид

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2} \simeq R - \frac{x}{R} \xi - \frac{y}{R} \eta + \frac{1}{2R} (\xi^2 + \eta^2) - \\ - \frac{1}{2R^3} (x\xi + y\eta)^2 \simeq R - \alpha\xi - \beta\eta + \frac{1}{2R} [\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2]. \quad (20.11)$$

Пусть α_0, β_0 — аналогичные косинусы для луча, соединяющего источник P с точкой O , а $-\alpha_0, -\beta_0$ — для противоположного вектора. Для r' можно записать приближенное выражение, аналогичное (20.11), с заменой R на R' и α, β — на α_0, β_0 . Отсюда $\exp[ik(r+r')] = \exp[ik(R+R')] \exp(-ik\Phi)$, где Φ — квадратичная форма относительно ξ и η , которую легко выразить в явном виде с помощью использованных разложений вида (20.11). Считая медленно изменяющийся множитель под интегралом равным его

значению в точке O , получим

$$i\lambda\psi(\mathbf{r}) = \frac{A}{4\pi RR'} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{R}}) e^{ik(R+R')} \int e^{-ik\Phi} d\xi d\eta. \quad (20.12)$$

При всех использованных предположениях задача о вычислении дифрагированной волны сводится, таким образом, к вычислению интеграла, входящего в формулу (20.12), по площади отверстия. Если еще можно считать, что $R \rightarrow \infty$ и $R' \rightarrow \infty$, то выражение для Φ сводится к линейной функции: $\Phi \simeq (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta$, и вычисление существенно упрощается. Такой случай называется *дифракцией Фраунгофера*. Общее же выражение (20.12) определяет *дифракцию Френеля*.

Так же, как и в предыдущих параграфах, мы ограничим изучение явления дифракции одной лишь постановкой задачи и кратким обсуждением ее физического смысла, приведенным выше. Для решения конкретных проблем математической физики, относящихся к дифракции, развито большое число методов, подробное описание которых можно найти в специальных монографиях *).

§ 21. Приближение геометрической оптики

21.1. Описание поля излучения в пределе очень коротких длин волн ($\lambda \rightarrow 0$) может быть сведено к ряду геометрических закономерностей.

Предположим, что среда изотропна и не обладает электропроводностью. Особый интерес в дальнейшем представляет случай, когда эта среда неоднородна. Для монохроматического излучения, как мы видели в предыдущих главах, уравнения Максвелла при отсутствии источников принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0 \varepsilon \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0 \mu \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Здесь можно считать, что \mathbf{H} и \mathbf{E} — амплитуды, зависящие только от \mathbf{r} . Кроме того, $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$, где λ_0 — длина волны в вакууме, а ε и μ могут зависеть от \mathbf{r} .

Попытаемся теперь приближенно представить электромагнитное поле на очень больших расстояниях от источников в комплексном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{ik_0 C(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{ik_0 C(\mathbf{r})}, \quad (21.2)$$

где \mathbf{e} , \mathbf{h} , C — вещественные функции. Подставим (21.2) в (21.1). С помощью формул векторного анализа (см. Приложение Б)

*) См., например, книгу, цитированную на стр. 154.

получающиеся при этом соотношения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \text{grad } C \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} &= -\frac{1}{ik_0} \text{rot } \mathbf{h}, \\ \text{grad } C \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= -\frac{1}{ik_0} \text{rot } \mathbf{e}, \\ (\mathbf{e}, \text{grad } C) &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{e} \text{ grad } (\ln \epsilon) + \text{div } \mathbf{e}), \\ (\mathbf{h}, \text{grad } C) &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{h} \text{ grad } (\ln \mu) + \text{div } \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (21.3)$$

Нас интересует предел при $k_0 \rightarrow \infty$. Если в этом пределе правыми частями предыдущих уравнений можно пренебречь, то получаются соотношения

$$\begin{aligned} \text{grad } C \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} &= 0, & \text{grad } C \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= 0, \\ \mathbf{e} \text{ grad } C &= 0, & \mathbf{h} \text{ grad } C &= 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Ясно, что независимыми из этих уравнений являются лишь первые два. Исключая функцию \mathbf{h} , получим

$$(\mathbf{e} \text{ grad } C) \text{ grad } C - \mathbf{e} (\text{grad } C)^2 + \epsilon \mu \mathbf{e} = 0,$$

т. е. на основании третьего из уравнений (21.4)

$$(\text{grad } C)^2 = n^2, \quad (21.5)$$

если обозначить $n = \sqrt{\epsilon \mu}$.

Предположения, сделанные при выводе уравнений (21.4), можно считать оправданными, если ϵ , μ и $|\text{grad } C|$ — величины порядка единицы, а изменения функций \mathbf{e} и \mathbf{h} на расстояниях, сравнимых с длиной волны, малы по отношению к самим \mathbf{e} и \mathbf{h} . Если поле излучения достаточно резко стремится к нулю на границах некоторой области (например, там, где начинается тень), то указанное условие нарушается. Не выполняется оно и в окрестностях фокусов оптических приборов, где интенсивность излучения резко возрастает.

Функция C , введенная определением (21.2), называется оптическим путем или *эйконалом*, уравнение же (21.5) — уравнением эйконала. Поверхности, определяемые условием

$$C(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad (21.6)$$

называются геометрическими *волновыми фронтами*, а кривые, ортогональные к этим поверхностям, — геометрическими *световыми лучами*. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ является параметрическим уравнением светового луча, причем в качестве параметра s выбрана длина дуги луча, отсчитываемая от некоторой взятой на нем начальной точки. Тогда $d\mathbf{r}/ds \equiv \mathbf{s}$ есть единичный вектор, касательный к лучу, и условие ортогональности луча волновому фронту выражается в виде

$$n\mathbf{s} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad } C. \quad (21.7)$$

Выясним физический смысл вектора \mathbf{s} , а именно покажем, что он определяет направление, в котором распространяется поток энергии излучения. Так как мы рассматриваем предел очень больших частот, то для вычисления этого потока должна быть использована усредненная формула вида (17.18)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]. \quad (21.8)$$

Подставим сюда \mathbf{h} из второго уравнения (21.4). С помощью третьего уравнения (21.4), а также (21.7), можно преобразовать (21.8) к виду

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v \langle \omega \rangle \mathbf{s}. \quad (21.9)$$

Здесь на основании (17.18) среднее значение энергии равно

$$\langle \omega \rangle = 2 \langle \omega_e \rangle = 2 \langle e^2 \rangle,$$

а v — скорость распространения волн в среде, равная $c/\sqrt{\mu\epsilon}$. Итак, наше утверждение доказано. Формулу (21.9) поучительно сравнить с точной формулой (14.9) для излучения точечного заряда и с полученными на стр. 132 аналогичным усреднением по времени формулами для ограниченного распределения источников.

Если в области распространения излучение не производит механической работы, то легко понять, что закон сохранения энергии (3.3)

примет вид $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$. Отсюда и для среднего по времени следует $\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = 0$. Интенсивность излучения определяется как абсолютная величина усредненного вектора Пойнтинга: $I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = v \langle \omega \rangle$. Следовательно, $\operatorname{div} (I\mathbf{s}) = 0$. Рассмотрим трубку, образованную световыми лучами и замкнутую поперечными поверхностями $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ (рис. 23). Применение теоремы Гаусса к этой трубке непосредственно дает

$$I_1 d\sigma_1 = I_2 d\sigma_2, \quad (21.10)$$

если учесть, что нормаль к боковой поверхности трубки всюду ортогональна к вектору \mathbf{s} . Формула (21.10) называется *законом интенсивности* в геометрической оптике. В частности, если световые лучи исходят из одной точки и прямолинейны (мы вскоре увидим, что условие прямолинейности выполняется в однородной среде), то, выбирая в качестве $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ элементы сферических поверхностей, общим центром которых является источник, получим

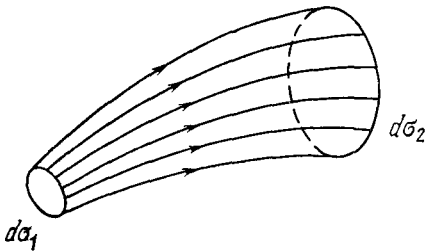


Рис. 23.

$I(R) = \text{const}/R^2$, т. е. закон обратного квадрата расстояния для интенсивности излучения.

Соотношение (21.7) можно выразить также в форме

$$dC/ds = n, \quad (21.11)$$

где слева стоит производная функция C по направлению светового луча. Интеграл вдоль светового луча между взятыми на нем точками

P_1 и P_2 $\int_{P_1}^{P_2} n ds = C(P_2) - C(P_1)$ называется *оптической длиной*

этого отрезка луча. Как мы видели выше, $n ds = c ds/v = c dt$, где dt — время, за которое энергия распространяется на расстояние ds по лучу. Отсюда следует, что оптическая длина отрезка светового луча, деленная на скорость света в вакууме, равна времени, в течение которого излучение пройдет весь этот отрезок.

21.2. Исследуем некоторые дальнейшие свойства уравнения (21.7). Прежде всего с помощью (21.5) можно исключить функцию C . Именно

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} (\text{grad } C) = (\mathbf{s}, \text{grad}) \text{grad } C = \\ &= \frac{1}{n} (\text{grad } C, \text{grad}) \text{grad } C = \frac{1}{2n} \text{grad} (\text{grad } C)^2 = \frac{1}{2n} \text{grad } n^2, \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) &= \text{grad } n. \end{aligned} \quad (21.12)$$

В частности, отсюда следует, что $d^2 \mathbf{r}/ds^2 = 0$ при $n = \text{const}$, т. е. что в однородной среде световые лучи представляют собой прямые линии.

Далее, непосредственно из уравнения (21.7) следует соотношение

$$\text{rot}(n\mathbf{s}) = 0. \quad (21.13)$$

Так как по формуле (Б.14₃) $\text{rot}(n\mathbf{s}) = \text{grad } n \times \mathbf{s} + n \text{rot } \mathbf{s}$, то из (21.13) вытекает также, что $\mathbf{s} \text{rot } \mathbf{s} = 0$. В однородной же среде, где $n = \text{const}$, выполняется равенство $\text{rot } \mathbf{s} = 0$. Рассмотрим теперь произвольную незамкнутую поверхность σ с контуром l . Проинтегрируем по этой поверхности нормальную к ней составляющую $\text{rot}(n\mathbf{s})$ и применим теорему Стокса. Вследствие формулы (21.13)

$$\oint \mathbf{n}\mathbf{s} dl = 0. \quad (21.14)$$

Интеграл в левой части этого равенства называется *интегральным инвариантом Лагранжа*. Такое название объясняется тем, что, как видно из (21.13), значение интеграла вида $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{n}\mathbf{s} dl$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки P_1 и P_2 .

Из теоремы Лагранжа (21.14) выводится вариационный принцип Ферма (принцип наименьшего оптического пути), которому удовлетворяют реальные световые лучи. Для этого нужно предположить, что рассматриваемая область пространства является регулярной, т. е. что в ней не существует таких точек, в которых световые лучи могли бы взаимно пересекаться. Подсчитаем оптические длины отрезка A_1P_2 одного из световых лучей и кривой C , соединяющей те же точки (рис. 24). Точки Q_1, Q_2 и C_1, C_2 взяты на пересечениях светового луча и кривой C соответственно со световыми фронтами 1 и 2, как это показано на рисунке. Точка Q'_2 находится на пересечении светового фронта 2 со световым лучом, исходящим из точки C_1 . Применим теперь (21.14) к замкнутому контуру $C_1C_2Q'_2C_1$. Именно

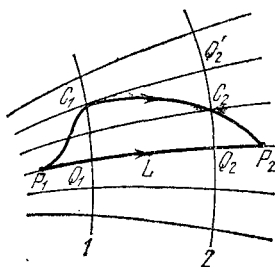


Рис. 24.

$$(ns, dl)_{C_1C_2} + (ns, dl)_{C_2Q'_2} - n ds_{C_1Q'_2} = 0.$$

(21.15)

На волновом фронте 2 выполняется соотношение ортогональности $(s, dl)_{Q_2Q'_2} = 0$, так как dl лежит на этом волновом фронте, а s — направление светового луча. Далее, из (21.11) видно, что $(n ds)_{C_1Q'_2} = (n ds)_{Q_1Q_2}$. Наконец, из определения скалярного произведения $(ns, dl)_{C_1C_2} \leq (n ds)_{C_1C_2}$. Итак, (21.15) принимает вид $(n ds)_{Q_1Q_2} \leq (n ds)_{C_1C_2}$, поэтому

$$\int_B n ds < \int_C n ds. \quad (21.16)$$

Знак равенства мог бы иметь место, лишь если $s dr = ds$ всюду на кривой C , т. е. если эта кривая является реальным лучом. Но такой случай исключается введенным выше предположением, что через каждую точку рассматриваемой области проходит лишь один луч. Формула (21.16) и представляет собой математическое выражение принципа Ферма.

Геометрическое исследование световых лучей является основой построения теории оптических изображений, на которой мы не имеем возможности здесь останавливаться *).

§ 22. Основы термодинамики излучения

22.1. Термодинамические свойства поля излучения были впервые исследованы в трудах Кирхгофа, Стефана, Больцмана, Вина и Планка, относящихся к последней четверти XIX века. При этом

*) См. подробное изложение геометрической оптики, например, в книге М. Борн и Э. Вольф, Основы оптики, «Наука», 1970, гл. 3 и 4.

были получены условия, выполнение которых необходимо для теплового равновесия излучения с окружающей средой, определено понятие температуры равновесного излучения, изучено уравнение состояния последнего и выведен ряд закономерностей, относящихся к зависимости спектральной плотности энергии излучения от длины волны. Применение в дальнейшем к излучению основных положений классической статистической механики привело, как известно, к противоречию, выход из которого указала квантовая теория вещества. В настоящем параграфе мы изучим вкратце основные аспекты термодинамики излучения, непосредственно примыкающие к классической электродинамике.

Для установления термодинамических свойств излучения чрезвычайно важно определить, какое давление оказывает излучение на вещество. Вычислим давление излучения прежде всего для простого частного случая. Именно, пусть вещество заполняет все полупространство справа от плоскости $x^1 = 0$, а слева на эту плоскость падает плоская волна, распространяющаяся вдоль оси x^1 . Выделим в веществе цилиндр, основание которого $d\sigma$ лежит на плоскости $x^1 = 0$, а высота равна h . Будем предполагать, что на расстоянии h от границы вещества все излучение, проходящее внутрь этого вещества, поглощается последним, так что поля \mathbf{E} и \mathbf{H} можно считать равными нулю.

Вспомним теперь уравнения (3.9) — (3.16), определяющие силы, действующие со стороны электромагнитного поля на среду, которую будем считать линейной, так что $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Считая, что $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$, получим

$$f_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_\alpha, \quad (22.1)$$

где

$$T_{\alpha\beta} = (E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}). \quad (22.2)$$

Поперечность электромагнитного поля плоской волны выражается в нашем случае равенствами $E_1 = 0$, $H_1 = 0$. С их учетом объемная сила f_1 , действующая ортогонально к границе $x^1 = 0$ на основании формул (22.1) и (22.2) принимает вид

$$f_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_1. \quad (22.3)$$

Поверхностная же сила ϕ_1 , как следует из соотношения (3.19), определяется равенством $\int f_1 dV = \int \phi_1 d\sigma$. Если рассмотреть упомянутый выше цилиндр, то отсюда следует $\phi_1 = \int_0^h f_1 dx$. Наблюдаемой величиной, однако, является не мгновенное значение этой силы, но среднее по времени, которое можно определить так:

$\langle \varphi_1 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_1 dt$. Таким образом, нас интересует величина

$\langle \varphi_1 \rangle = \int_0^h \langle f_1 \rangle dx$. При вычислении среднего значения $\langle f_1 \rangle$ с помощью

(22.3) учтем, что зависимость от времени вектора Пойнтинга плоской волны гармоническая. Поэтому величина $\int_{-T}^T \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_1 dt =$

$= [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_1 \Big|_{-T}^T$ ограничена и при вычислении предела, входящего в определение среднего значения, результат получается равным нулю. Производя интегрирование первого члена (22.3) по dx с учетом того, что на глубине h поле обращается в нуль, для величины давления излучения на границу вещества получим

$$p = \langle \varphi_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B} \rangle = \omega, \quad (22.4)$$

где ω — плотность энергии электромагнитного поля на границе вещества.

Рассмотрим теперь другой случай. Именно, представим себе, что излучение заполняет замкнутую полость, окруженную веществом (стенками). Свойства вещества внутри полости будем считать неотличимыми от свойств вакуума, так что в применяемых здесь гауссовых единицах $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Можно считать, что излучение либо порождается стенками, либо же излучателями, находящимися внутри полости, но занимающими ничтожно малую часть ее объема. Далее, поле излучения будем предполагать изотропным, т. е. таким, что в среднем (за достаточно большой промежуток времени) свойства его одинаковы по всем направлениям. В любых двух взаимно перпендикулярных направлениях компоненты поля предполагаются статистически-независимыми. Собственно говоря, по определению это означает, что выполняются равенства вида $\langle E_1 E_2 \rangle = 0$. Кроме того, без доказательства примем, что средние значения от производных равны производным от средних значений. Обоснование всех этих предположений требует значительно более серьезного, чем мы можем предпринять здесь, изучения статистических свойств электромагнитного поля. Если же они выполняются, то вычисление давления становится элементарным.

Среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю ввиду статистической независимости различных компонент поля, выраженной приведенными в предыдущем абзаце равенствами. Но тогда $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = 0$. Кроме того, благодаря предположению об изотропии выполняются равенства вида $\langle E_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle E^2 \rangle$. Рассмотрим элемент поверхности стенки и направим ось x^1 по нор-

мали к этому элементу внутри вещества. Из соображений симметрии (как для идеального газа в сосуде) следует, что лишь компонента f_1 силы может быть отлична от нуля. Все эти соображения с помощью уравнения (22.3) приводят к результату

$$\langle f_1 \rangle = \frac{\partial}{\partial x^1} \left\langle E_1^2 + H_1^2 - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \right\rangle = -\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x^1} \langle E^2 + H^2 \rangle,$$

откуда для давления p получим

$$p = \int \langle f_1 \rangle dx = \frac{1}{6} \langle E^2 + H^2 \rangle = \frac{1}{3} \omega. \quad (22.5)$$

К совершенно такому же результату можно прийти, если считать, что стенки полностью отражают падающее на них излучение. Соотношение (22.5) между давлением и плотностью энергии, как мы вскоре увидим, позволяет получить фундаментальные законы термодинамики излучения*). Оно играет при этом роль уравнения состояния «фотонного газа». Во всех дальнейших рассуждениях мы будем иметь в виду именно такое излучение в полости, для которого было получено это уравнение.

22.2. Для того чтобы можно было пользоваться термодинамическими соображениями, необходимо определить понятие *температуры* излучения. Естественно считать, что излучение находится в состоянии теплового равновесия со стенками, имеющими некоторую температуру θ , если последние за единицу времени поглощают столько же энергии, сколько излучают. Тогда излучение называется равновесным и его состояние следует определять той же температурой θ .

Заключенное в полости излучение состоит из волн, обладающих, вообще говоря, всевозможными частотами. Если обозначить через $\omega_\nu dv$ количество энергии излучения в единице объема, которым обладают волны, имеющие частоту в пределах от ν до $\nu + dv$, то

$$\omega = \int_0^{\infty} \omega_\nu dv. \quad (22.6)$$

Именно введенная здесь функция ω_ν (*спектральная плотность энергии*) представляет в дальнейшем основной интерес.

Казалось бы на первый взгляд естественным предположить, что распределение энергии равновесного излучения по частотам должно зависеть от свойств того вещества, с которым это излучение находится в равновесии. Однако, как показал Кирхгоф, такое

*) Подробное обсуждение вопросов термодинамики излучения можно найти в книгах: М. Планк, Теория теплового излучения, и Р. Беккер, Электронная теория (ОНТИ, 1936), к сожалению, в наше время являющихся библиографической редкостью. См. также И. П. Базаров, Термодинамика, «Высшая школа», 1976.

предположение противоречит второму началу термодинамики: если бы оно было справедливо, то можно было бы построить вечный двигатель второго рода. Поэтому имеет место закон Кирхгофа: функция w_ν определяется только температурой θ и не зависит ни от каких величин, характеризующих конкретные свойства вещества стенок *).

Прежде чем перейти к дальнейшему исследованию свойств функции $w_\nu(\theta)$, необходимо ввести еще некоторые величины, тесно связанные с этой функцией. Рассмотрим внутри полости, заполненной излучением, бесконечно малый элемент поверхности $d\sigma$ (в частном случае он может совпадать с элементом поверхности стенки, а вообще говоря, — это бесконечно малая часть произвольной геометрической поверхности). Элемент $d\sigma$ по всем направлениям пронизывается излучением, поэтому можно рассмотреть свойства излучения, исходящего из этого элемента поверхности. Пусть телесный угол $d\Omega$ исходит из элемента $d\sigma$ под углом ϑ к нормали. Поток энергии, проходящий в этот телесный угол, будет, в частности, пропорционален $\cos \vartheta$ (так как излучение предполагается изотропным, а в этом случае поток энергии пропорционален поперечному сечению трубки, в которую попадает энергия, распространяющаяся от $d\sigma$ под углом ϑ). Поэтому энергию, поступающую за время dt в телесный угол $d\Omega$, следует считать равной $K \cos \vartheta d\Omega d\sigma dt$. Здесь коэффициент K называется яркостью или удельной интенсивностью излучения и, как обычно, $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\zeta$.

Посмотрим, как связаны величины K и w . Пусть $d\sigma$ — элемент поверхности стенки, а V — произвольный, но очень малый объем внутри полости, находящийся на расстоянии r от элемента $d\sigma$. Возьмем такой телесный угол $d\Omega$, чтобы соответствующий ему конус пересекался с объемом V ; при этом ввиду малости объема V получается почти цилиндр. Обозначим через df поперечное сечение и через h — высоту этого цилиндра. По определению телесного угла, $d\Omega = df/r^2$. Если какая-то энергия излучается элементом $d\sigma$ стенки за единицу времени в направлении $d\Omega$, то в цилиндре находится часть h/c этой энергии, т. е., согласно определению в предыдущем абзаце, в нем содержится количество энергии, равное $\frac{h}{c} K \cos \vartheta d\sigma \frac{df}{r^2}$. Просуммируем теперь по всем пучкам излучение, исходящее из $d\sigma$ и пересекающееся с объемом V . Так как (с достаточной точностью) $\sum h df = V$, получим энергию, содержащуюся во всем объеме V ; она равна $VKd\sigma \frac{\cos \vartheta}{cr^2}$. А теперь проинтегрируем по всей границе объема. Результат можно записать в виде

$$wV = \frac{VK}{c} \int \frac{\cos \vartheta d\sigma}{r^2}.$$

*) Вывод закона Кирхгофа из второго начала термодинамики см. в книгах, цитированных на стр. 163.

Интеграл в правой части — это сумма телесных углов, под которыми видна стенка из объема V ; он равен 4π . Итак, мы получаем связь между K и ω в форме следующего простого равенства: $\omega = \frac{4\pi}{c} K$. Его можно, очевидно, записать в виде соотношения между спектральными плотностями

$$\omega_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu d\nu. \quad (22.7)$$

Часто используется понятие одностороннего излучения. Так называется излучение, испускаемое элементом стенки в полусферу (т. е. в телесный угол 2π). Соответствующая энергия L равна

$$K \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi K. \quad (22.8)$$

Отсюда и из (22.7) получаем

$$L = \frac{1}{4} c \omega. \quad (22.9)$$

22.3. Определив термодинамическое состояние равновесного излучения, можно применять к нему все методы термодинамики. Так, например, рассматривая равновесное излучение в качестве «рабочего вещества» гипотетической тепловой машины, можно изучить соответствующий цикл Карно. При этом определяется энтропия теплового излучения. Если состояние излучения определяется объемом полости и температурой, то основное термодинамическое соотношение можно записать в обычном виде:

$$\theta d\mathcal{S} = d\mathcal{U} + p dV. \quad (22.10)$$

Здесь \mathcal{S} — полная энтропия в объеме V , а \mathcal{U} — энергия. Нужно, очевидно, считать, что в наших условиях энергия излучения равномерно распределена по занятому им объему, так что $\mathcal{U} = \omega V$.

С помощью (22.10), при использовании уравнения состояния излучения (22.5), можно вывести закон Стефана — Больцмана: плотность энергии излучения пропорциональна четвертой степени температуры. Так как по закону Кирхгофа ω зависит только от θ , то

$$d\mathcal{U} = \omega dV + V \frac{d\omega}{d\theta} d\theta. \quad (22.11)$$

Подставляя (22.11) и (22.5) в (22.10), получим

$$d\mathcal{S} = \frac{V}{\theta} \frac{d\omega}{d\theta} d\theta + \frac{4}{3} \frac{\omega}{\theta} dV, \quad (22.12)$$

так что $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right)_V = \frac{V}{\theta} \frac{d\omega}{d\theta}$ и $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial V}\right)_\theta = \frac{4}{3} \frac{\omega}{\theta}$. Так как \mathcal{S} — функция состояния, должно выполняться равенство $\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial V \partial \theta} = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \theta \partial V}$. Вычислив

эти вторые производные, получим соотношение $dw/d\theta = 4w/\theta$, из которого видно, что

$$w = \sigma\theta^4. \quad (22.13)$$

Здесь σ — универсальная постоянная Стефана — Больцмана, значение которой равно $5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт \cdot м⁻² \cdot град⁻⁴ в единицах СИ. Из (22.13) и (22.7): $K = \frac{\sigma c}{4\pi} \theta^4$. Давление $p = \frac{1}{3} \sigma\theta^4$, а для энтропии получается результат: $\mathcal{S} = \frac{4}{3} \sigma\theta^3 V$.

Мы можем перейти теперь к доказательству закона Вина, который сводит определение спектральной плотности $w_\nu(\theta)$ к задаче нахождения другой функции, которая зависит только от ν/θ . В этом доказательстве излучение рассматривается в такой полости, стенки которой предполагаются абсолютно отражающими (зеркальными). По этому поводу нужно сделать следующее замечание. Из условий вывода закона Кирхгофа и самого этого закона видно, что равновесное излучение образуется в том случае, когда излучатель обладает способностью поглощать все те частоты, которые он испускает, причем интенсивность поглощения для каждой частоты равна интенсивности ее испускания. Такой излучатель обычно называется *абсолютно черным телом*, а равновесное излучение — излучением абсолютно черного тела или даже «черным» излучением. При выводе закона Вина для полости с зеркальными стенками предполагается, что абсолютно черный излучатель вводится внутрь этой полости и является очень малым («пылинка сажи»). Именно благодаря взаимодействию с таким излучателем излучение будет равновесным. При этом предполагается, что если объем полости подвергается бесконечно медленному адиабатическому изменению, то излучение в ходе такого изменения объема остается равновесным*). Можно представлять себе полость в виде цилиндра с поршнем.

Рассмотрим, что будет происходить с функцией w_ν , когда поршень движется. Поверхность его, обращенная к излучению, представляет собой медленно движущееся зеркало. В § 19 мы получили результаты, показывающие, что при отражении от такого зеркала частота излучения изменяется. Этот эффект Доплера выражается первой из формул (19.13) (она понадобится нам здесь в нерелятивистском приближении). Так как одностороннее излучение стенки определяется соотношением (22.8), а частота ν в наших условиях, как только что было сказано, изменяется, энергия $w_\nu dv \cdot V$, соответствующая частоте ν , уменьшается за время dt на величину $\nu K_\nu A dv dt$, где A — полная площадь движущегося зеркала. Но за тот же промежуток времени отражение от движущегося зеркала переведет другие частоты в интересующий нас интервал от ν до $\nu + dv$. Вычислим увеличение энергии, соответствующей этому

*) См. цитируемую выше книгу Планка.

интервалу частот, которое происходит благодаря такому эффекту. Обозначим через ν' частоту падающего на поршень излучения. Если излучение направлено в пределах телесного угла $d\Omega$, образующего угол ϑ с нормалью к поверхности поршня, то за время dt энергия излучения в интервале частот от ν' до $\nu' + d\nu'$, как видно из определения величины $K_{\nu'}$, равна $AK_{\nu'} \cos \vartheta d\Omega dt d\nu'$. Это излучение приобретет частоту ν после отражения, если ν и ν' связаны соотношением (19.13). Но в § 19 было показано также, что связь между энергиями и частотами излучения, измеряемыми в различных системах отсчета, выражается равенством $W/\nu = W'/\nu'$. Поэтому при вычислении энергии в системе, неподвижной относительно стенок, нужно умножить указанное выражение еще на отношение

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \frac{2v}{c} \cos \vartheta. \quad (22.14)$$

Из всех этих соображений видно, что в интервал частот $(\nu, \nu + d\nu)$ поступит энергия, равная

$$A \int_{\Omega} K_{\nu} \cos \vartheta \frac{\nu}{\nu'} d\Omega d\nu' dt. \quad (22.15)$$

При очень малых разностях $\nu' - \nu$ можно, воспользовавшись соотношением (22.14), получить $K_{\nu'} = K_{\nu} + \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} (\nu' - \nu) = K_{\nu} - \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} \frac{2v\nu}{c} \cos \vartheta$. Подставляя это значение $K_{\nu'}$ в формулу (22.15) и интегрируя по полусфере, получим

$$A \left(\pi K_{\nu} - \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} \frac{2v\nu}{c} \frac{2\pi}{3} \right) d\nu dt.$$

Отсюда нужно вычесть указанное ранее уменьшение энергии $\omega_{\nu} d\nu$ за счет выхода частот из рассматриваемого интервала. Тогда

$$d(V\omega_{\nu}) = -\frac{4\pi}{3} A \frac{v dt}{c} \nu \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu}.$$

Но ясно, что $A v dt = -dV$, и поэтому, если учесть (22.7), то $d(V\omega_{\nu}) = \frac{\nu}{3} \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \nu} dV$. Так как зависимость ω_{ν} от V выражает, по сути дела, зависимость этой функции от времени при движении поршня, последнее соотношение приводит к уравнению

$$V \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial V} = \frac{\nu}{3} \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \nu} - \omega_{\nu}. \quad (22.16)$$

Для того чтобы определить функцию ω_{ν} , удобно перейти к новым переменным: $x = V$, $y = \nu^3 V$. Рассматривая теперь ω_{ν} как функцию этих переменных, можно (22.16) привести к виду $\frac{\partial}{\partial x} (x\omega_{\nu}) = 0$, откуда следует, что $x\omega_{\nu} = \psi(y)$. Функция ψ не может быть

конкретно определена на основании сделанных предположений. Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\omega_v(V) = \frac{1}{V} \psi(v^3 V) \equiv v^3 \varphi(v^3 V), \quad (22.17)$$

где введено обозначение $\varphi = v^3 \psi / V$.

Функция ω_v рассматривается выше в зависимости от V . Но нас интересует зависимость ω_v от θ ! Для того чтобы получить ее, воспользуемся записью первого начала термодинамики для адиабатического процесса, связанного с движением поршня:

$$d(V\omega) + p dV = 0. \quad (22.18)$$

С помощью закона Стефана — Больцмана (22.13) и указанного в связи с этим законом выражения для p , (22.18) приводится к виду

$$d(V\theta^4) + \frac{1}{3}\theta^4 dV = 0.$$

Отсюда следует, что $V\theta^3 = \text{const}$. Поэтому (22.17) можно записать и так:

$$\omega_v(\theta) = v^3 f(v/\theta). \quad (22.19)$$

Этим равенством и выражается *закон Вина*. С его помощью получается и другой закон Вина — так называемый *закон смещения*. Для этого перейдем от распределения энергии по частотам к распределению по длинам волн: $\omega_\lambda d\lambda$. Так как $|dv| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$, из (22.19) сразу видно, что $\omega_\lambda(\theta) = \lambda^{-5} g(\lambda\theta)$. Обозначим через λ_m ту длину волны, при которой для данной температуры θ функция $\omega_\lambda(\theta)$ достигает максимума. Условие $\partial\omega_\lambda/\partial\lambda = 0$ принимает форму: $5g(\lambda_m\theta) = \lambda_m\theta g'(\lambda_m\theta)$. Другими словами, произведение $\lambda_m\theta$ должно быть равно некоторой универсальной постоянной, определяемой как корень уравнения $5g(\xi) = \xi g'(\xi)$. Равенство $\lambda_m\theta = \text{const}$ и выражает закон смещения.

22.4. Для того чтобы полностью определить вид функции $\omega_v(T)$, соображений, вытекающих из классической электродинамики и термодинамики, оказалось недостаточно. Более того, дальнейшее их развитие привело к явно неверной с физической точки зрения формуле Релея — Джинса для этой функции. Только возникшая из исследований Планка и Эйнштейна квантовая теория излучения указала выход из этих принципиальных трудностей. Полученное Планком распределение энергии позволяет, в частности, вычислить ту постоянную, которая должна входить в закон смещения. Результат этого вычисления может быть записан в виде $\lambda_m T \approx \frac{h}{k} \frac{c}{4,965}$. Здесь h — постоянная Планка, а k — постоянная Больцмана.

Упомянутая формула Релея — Джинса, полностью (но неверно) определяющая функцию $\omega_v(\theta)$, была получена с помощью более детального исследования свойств излучения, которое заполняет

полость с зеркальными стенками, используемую при выводе закона Вина. При этом применялось представление поля излучения в виде бесконечной суммы стоячих волн. Аналогичный метод применяется и в современной электродинамике, например при переходе к квантованию электромагнитного поля. Отличие от метода Джинса состоит в том, что стоячие волны считаются при этом поперечными, в то время как в полости с отражающими стенками электрический или магнитный вектор волны обязательно имеет и продольную составляющую (см. § 38). Если же рассматривать только поперечные волны, то можно представлять себе, что поле излучения создается в вакууме чрезвычайно удаленными источниками. При этом предполагается, что в поле можно выделить такой объем (например, кубической формы), что свойства поля остаются неизменными при переносах на длину ребра этого куба (в направлении любого из его ребер) достаточно большое число раз (*условие периодичности*).

Изучим несколько подробнее метод стоячих поперечных волн ввиду его большого теоретического значения. Формулы (18.3) и (18.4) показывают, что для того чтобы световая волна была поперечной, достаточно положить $\varphi_\omega = 0$, так как тогда

$$n\mathbf{A}_\omega = 0, \quad \mathbf{E}_\omega = ik\mathbf{A}_\omega \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_\omega = ik[\mathbf{n} \times \mathbf{A}_\omega].$$

Таким образом, условие $\varphi = 0$ или соотношение $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, следующее при этом из условия калибровки Лоренца, сами выражают условия калибровки, допустимые для поля поперечных электромагнитных волн. При этом

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (22.20)$$

Если имеет место периодичность по отношению к кубу со стороной L , то

$$\mathbf{A}(x+L, y, z) = \mathbf{A}(x, y+L, z) = \mathbf{A}(x, y, z+L) = \mathbf{A}(x, y, z). \quad (22.21)$$

При этом в рассматриваемом случае

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = 0. \quad (22.22)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda} [q_{\lambda}(t) \mathbf{A}_{\lambda} + q_{\lambda}^*(t) \mathbf{A}_{\lambda}^*]. \quad (22.23)$$

При этом обеспечена вещественность потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, а комплексные функции q_{λ} и \mathbf{A}_{λ} удобнее здесь обозначать с помощью индексов λ , а не ω , как это было в § 18. При подстановке (22.23) в (22.22) переменные разделяются и должны выполняться уравнения

$$(\Delta + v_{\lambda}^2/c^2) \mathbf{A}_{\lambda} = 0, \quad \ddot{q}_{\lambda} + v_{\lambda}^2 q_{\lambda} = 0 \quad (22.24)$$

при любом λ . Здесь v_λ^* — постоянная разделения переменных. Решениями этих уравнений будут

$$\mathbf{A}_\lambda = c\epsilon_\lambda e^{i(\kappa_\lambda \mathbf{r})}, \quad q_\lambda = |q_\lambda| e^{-iv_\lambda t}. \quad (22.25)$$

При этом $|\kappa_\lambda| = v_\lambda/c$, а ϵ_λ — вектор, определяющий направление поляризации; ввиду поперечности $\epsilon_\lambda \kappa_\lambda = 0$. Таким образом, $q_\lambda \mathbf{A}_\lambda$ — это волна, распространяющаяся в направлении $+\kappa_\lambda$. В дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{A}_{-\lambda}$ волну, направление распространения которой определяется вектором $-\kappa_\lambda$.

Если должно выполняться условие периодичности (22.21), то компоненты векторов κ_λ определяются равенствами

$$\kappa_{\lambda\alpha} = \frac{2\pi}{L} n_{\lambda\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (22.26)$$

где $n_{\lambda\alpha}$ — произвольные целые (положительные или отрицательные) числа.

Из формулы (22.25) следует, что выполняются соотношения ортогональности и нормировки:

$$\int (\mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\mu^*) dV = \int (\mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_{-\mu}) dV = c^2 \delta_{\lambda\mu}. \quad (22.27)$$

Здесь и в дальнейшем будем для простоты считать $L = 1$.

Введем теперь вещественные переменные:

$$Q_\lambda = q_\lambda + q_\lambda^*, \quad P_\lambda = -iv_\lambda (q_\lambda - q_\lambda^*) = Q_\lambda. \quad (22.28)$$

Функция

$$\mathcal{H}_\lambda = 2v_\lambda^* q_\lambda q_\lambda^* = 1/2 (P_\lambda^2 + v_\lambda^2 Q_\lambda^2) \quad (22.29)$$

имеет вид гамильтоновой функции осциллятора, колеблющегося с частотой v_λ .

Покажем, что энергия поля может быть представлена в виде суммы энергий таких осцилляторов со всевозможными частотами, т. е.

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV = \sum_\lambda H_\lambda. \quad (22.30)$$

Из (22.20) и (22.23) видно, что $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \sum_\lambda (\dot{q}_\lambda \mathbf{A}_\lambda + \dot{q}_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*)$. Вычис-

ление интеграла $\int \mathbf{E}^2 dV$ с использованием этой формулы, уравнения (22.27) и первого из определений (22.28) дает в результате

$$\sum_\lambda \dot{Q}_\lambda^2 = \sum_\lambda P_\lambda^2.$$

Для того чтобы вычислить $\int \mathbf{H}^2 dV$, рассмотрим сначала интеграл вида $\int (\text{rot } \mathbf{A}_\lambda, \text{rot } \mathbf{A}_\mu) dV$. Подынтегральное выражение можно

преобразовать по формуле

$$(\text{rot } \mathbf{A}_\lambda, \text{rot } \mathbf{A}_\mu) = \text{div} [\mathbf{A}_\mu \times \text{rot } \mathbf{A}_\lambda] + [\mathbf{A}_\mu, \text{rot rot } \mathbf{A}_\lambda].$$

Ввиду периодичности $\oint \mathbf{n} [\mathbf{A}_\mu \times \text{rot } \mathbf{A}_\lambda] d\sigma = 0$ (интегрирование производится по граничной поверхности куба). Поэтому

$$\int (\text{rot } \mathbf{A}_\lambda, \text{rot } \mathbf{A}_\mu) dV = \frac{v_\lambda^2}{c^2} \int \mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\mu dV.$$

С помощью соотношений (22.27) при подстановке $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ получим $\int \mathbf{H}^2 dV = \sum_\lambda v_\lambda^2 Q_\lambda^2$. Собирая все эти результаты, мы видим, что равенство (22.30) действительно выполняется.

Подсчитаем теперь число осцилляторов поля, соответствующих определенному направлению поляризации ϵ_λ , вектору κ_λ , лежащему в элементе телесного угла $d\Omega$, и частотам от ν до $\nu + d\nu$. Из (22.26) видно, что

$$v_\lambda^2 = (2\pi c/L)^2 (n_{\lambda_1}^2 + n_{\lambda_2}^2 + n_{\lambda_3}^2). \quad (22.31)$$

Всем частотам, меньшим, чем некоторая частота ν_λ , соответствуют точки с целочисленными координатами n_1, n_2, n_3 , попадающие внутрь шара в трехмерном пространстве. Грубый подсчет количества таких точек, заключенных в шаровом слое от ν_λ до $\nu_\lambda + d\nu_\lambda$, можно произвести, считая распределение точек в этом слое приблизительно непрерывным. Тогда $n^2 dn d\Omega = \nu^2 d\nu d\Omega L^3 / (2\pi c)^3$, и число осцилляторов поля, отнесенное к единице объема, оказывается пропорциональным ν^2 . Если $\bar{\epsilon}_\nu$ — средняя энергия, приходящаяся на каждый такой осциллятор поля, то $\omega_\nu \sim \nu^2 \bar{\epsilon}_\nu$. Мы упоминали, что в применении к термодинамическим свойствам излучения рассматривалась полость с зеркальными стенками, здесь же постановка задачи несколько иная. Однако в § 38 мы увидим, что число стоячих волн в такой полости определяется совершенно аналогичным соотношением. Теорема классической статистики о равномерном распределении энергии по степеням свободы: $\bar{\epsilon}_\nu = \bar{\epsilon} = k\theta$ и приводит к формуле Релея — Джинса, согласно которой полная плотность энергии, вычисляемая в соответствии с (22.6), бесконечна при любой температуре. Для того чтобы получить правильные результаты, необходимо использовать формулу средней энергии Планка

$$\bar{\epsilon}_\nu = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k\theta) - 1}.$$

УРАВНЕНИЕ ЛОРЕНЦА — ДИРАКА. РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 23*. Уравнение Лоренца — Дирака. Реакция излучения

23.1. Поля, порождаемые движущимся электрическим зарядом, должны с этим зарядом взаимодействовать и тем самым влиять на его движение. Наиболее примитивным образом можно оценить такой эффект, применяя закон сохранения энергии к явлению излучения, рассмотренному в § 16. Мы видели тогда, что в нерелятивистском приближении система, состоящая из заряда и создаваемого им поля, излучает за единицу времени по всем направлениям энергию, выражаемую формулой Лармора (16.3). Будем считать, что закон сохранения энергии выполняется благодаря замедлению движения излучающего заряда, которое является результатом действия на него со стороны поля излучения добавочной силы $F_{\text{рад}}$, аналогичной силе трения. Такая сила называется радиационным трением или *реакцией излучения*. Потребуем, чтобы работа этой силы компенсировала потерю энергии, происходящую благодаря излучению. Тогда на основании (16.3) можно записать:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\text{рад}} \mathbf{v} dt = -\frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} dt = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left[-(\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \mathbf{v} dt \right].$$

Здесь произведено интегрирование по частям. Предположим теперь, что внеинтегральный член по тем или иным причинам равен нулю. Например, если рассматривается колебательное движение заряда, когда \mathbf{v} и $\dot{\mathbf{v}}$ достаточно хорошо аппроксимируются периодическими функциями, можно сравнивать левую и правую части предыдущей формулы после усреднения по большому числу периодов. Тогда в среднем внеинтегральный член действительно можно считать равным нулю, а для силы трения принять выражение

$$F_{\text{рад}} = m\tau_0 \ddot{\mathbf{v}}, \quad (23.1)$$

где

$$\tau_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3 m}. \quad (23.2)$$

Величина τ_0 имеет размерность времени. Учитывая радиационное трение, уравнение движения заряда нужно писать в виде

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau_0 \ddot{\mathbf{v}}) = F, \quad (23.3)$$

где F — все внешние силы, действующие на заряд (например, сила Лоренца), за исключением реакции излучения. Значение параметра τ , введенного равенством (23.2), полностью определяется зарядом и массой частицы, порождающей излучение. Так, если q и m — заряд и масса электрона, то для τ_0 получится величина порядка 10^{-24} с. За это время свет проходит расстояние порядка 10^{-13} см.

23.2. Неудовлетворительность приведенного выше обоснования уравнения (23.3) очевидна. Помимо фактически произвольного устранения внеинтегрального члена, этот вывод не удовлетворяет требованию релятивистской инвариантности, в результате чего и окончательный результат (23.3) не инвариантен. Тем не менее применение его для исследования излучения заряда, движущегося под действием квазиупругой силы (т. е. осциллятора), приводит к правильным результатам в отношении спектрального состава этого излучения (см. ниже, § 25).

Релятивистское исследование вопроса о реакции излучения было проведено Дираком в 1938 г. *). При этом, однако, использовались не только запаздывающие, но и опережающие потенциалы для вычисления электромагнитного поля. Кроме того, уравнение движения было выведено с применением асимптотического условия, состоящего в том, что действие сил на заряд прекращается в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем.

Мы выведем здесь релятивистское уравнение движения электрона с учетом реакции излучения (уравнение Лоренца — Дирака) с помощью методов, уже использованных в § 15 для иной цели. При этом асимптотическое условие Дирака оказывается ненужным. Вспомним закон сохранения энергии-импульса электромагнитного поля, выражаемый соотношениями (15.26) и (15.27). Если в § 15 нас интересовали свойства поля на очень больших расстояниях от излучающего заряда, то здесь, как видно из предыдущего, мы должны изучать их в непосредственной близости от заряда, т. е., в обозначениях § 15, при $\epsilon \rightarrow 0$.

Прежде всего нужно вычислить величину $Q_r(\epsilon)$ в этом пределе. Некоторые необходимые для этого формулы, в частности (15.28), были уже получены в § 15. Вычисление элемента времениподобной гиперповерхности $\rho = \epsilon$ производится с помощью формулы (Г.4), в которой производная $\partial\rho/\partial x^r$ должна быть выражена в виде (15.16). Тогда, считая, что направление нормали к гиперповерхности $\rho = \epsilon$ достаточно хорошо определяется оценкой (15.28) (это предположение сводится к отбрасыванию бесконечно малой величины более высокого порядка), можно записать

$$Q_r(\epsilon) = \int_{s=s_1}^{s=s_2} ds \int T^{km} p_m \epsilon^2 (1 - W) d\omega. \quad (23.4)$$

*) См., например, А. А. Соколов и И. М. Тернов, Релятивистский электрон, «Наука», 1974, § 11.

Подынтегральное выражение определяется здесь формулой (15.22). Полезно выразить все входящие в него члены с помощью (15.20) и (15.15) через величину W , которая, как показывает ее определение (15.14), пропорциональна ρ , т. е. ϵ . Кроме того, для R^k нужно подставить разложение (15.6). Те члены в подынтегральном выражении, которые содержат произведения нечетного числа сомножителей p_i , могут быть отброшены, так как при последующем интегрировании по $d\omega$ они дают нулевой результат (см. Приложение Г, п. 2). Заметим, что W пропорционально p_i . Таким образом, можно привести подынтегральную функцию к виду

$$-\frac{1}{c\epsilon} \left[\omega^k + \frac{3}{2} p^k (\overline{\omega p}) \right] + \frac{u^k}{c^4} \left[\overline{\omega^2} + (\overline{\omega p})^2 \right] + O(\epsilon). \quad (23.5)$$

Интегралы по $d\omega$ вычисляются с помощью формул (15.32) и (15.32'). Окончательный результат:

$$\int T^{rm} p_m \epsilon^2 (1 - W) d\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{q^2}{c^2} \left(-\frac{\omega^r}{2\epsilon} + \frac{2}{3c^3} u^r \overline{\omega^2} \right) + O(\epsilon). \quad (23.6)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что первое слагаемое в правой части при $\epsilon \rightarrow 0$ расходится. Мы вскоре увидим, что оно связано с «собственной энергией» излучающего заряда.

Из (15.26), (15.31) и (23.4) следует

$$P^r(\tau_2) - P^r(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\omega T^{rm} p_m \epsilon^2 (1 - W), \quad (23.7)$$

где внутренний интеграл по $d\omega$ имеет вид (23.6).

Будем считать, что τ_1 и τ_2 очень близки друг к другу, а именно $\tau_2 \equiv \tau$, $\tau_1 = \tau - \Delta\tau$, где $\Delta\tau > 0$ и $\Delta\tau = O(\epsilon)$. Для вычисления интеграла по $d\tau$ от выражения (23.6) воспользуемся теоремой о среднем. Тогда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \dots \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{q^2}{c^2} \left[-\frac{\omega^r(\tau - k\Delta\tau)}{2\epsilon} + \frac{2}{3c^3} u^r(\tau - k\Delta\tau) \overline{\omega^2}(\tau - k\Delta\tau) \right] \Delta\tau + O(\epsilon \Delta\tau). \quad (23.8)$$

Здесь $0 < k < 1$. Применяя разложение в ряд Тейлора к левой части соотношения (23.7) и к формуле (23.8), получим по сокращении на $\Delta\tau$

$$\frac{dP^r}{d\tau} = \frac{q^2}{4\pi c^2} \left[-\frac{\omega^r(\tau)}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \frac{k\Delta\tau}{\epsilon} b^r(\tau) + \frac{2}{3c^3} u^r(\tau) \overline{\omega^2}(\tau) \right] + O(\epsilon).$$

Здесь $b^r \equiv d\omega^r/d\tau$. Член b^r мы сохраняем потому, что он делится на ϵ . Положим теперь $k\Delta\tau = 4\epsilon/3c$. Смысл этого условия, как мы

вскоре увидим, состоит в том, чтобы обеспечить ортогональность четырехмерной силы к четырехмерной скорости и тем самым — постоянство массы покоя излучающего заряда вдоль его мировой линии. При этом

$$\frac{dPr}{d\tau} = \frac{q^2}{4\pi c^2} \left[-\frac{\omega^r(\tau)}{2e} + \frac{2}{3c} \left(b^r + \frac{u^r \bar{\omega}^2}{c^2} \right) \right] + O(\varepsilon).$$

Полный 4-импульс поля и частицы должен сохраняться при переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, должно выполняться равенство

$$\frac{d}{d\tau} (\mu u^r) = \frac{dPr}{d\tau} + F_{\text{внешн}}^r. \quad (23.9)$$

Здесь $\vec{F}_{\text{внешн}}$ — внешние силы, действующие на частицу и не зависящие от того, излучает она или же нет. Производная $dPr/d\tau$, как мы уже упоминали, содержит расходящийся член, пропорциональный ε^{-1} . Однако он может быть устранен с помощью *метода перенормировки*. Именно, будем считать, что масса покоя μ (так называемая «затравочная» или «голая» масса частицы) ненаблюдаема. Образуем сумму:

$$m_0 = \mu + \frac{q^2}{8\pi c^2 \varepsilon}. \quad (23.10)$$

Наша теория предсказывает, что для точечной частицы $m_0 \rightarrow \infty$. Отнесем это на счет недостатков теории, не дающей объяснения происхождению массы и заряда и формально приравняем m_0 наблюдаемому (конечному и постоянному) значению массы покоя *). Тогда уравнение (23.9) примет вид

$$m_0 \omega^r = \frac{1}{4\pi} \frac{2q^2}{3c^3} \left(b^r + \frac{u^r \bar{\omega}^2}{c^2} \right) + F_{\text{внешн}}^r. \quad (23.11)$$

Мы получили релятивистское *уравнение Лоренца — Дирака*, определяющее движение излучающего заряда с учетом свойств создаваемого им поля излучения. Заметим, что из соотношения $\vec{\omega} \vec{u} = 0$ следует, что

$$\vec{b} \vec{u} = -\vec{\omega}^2. \quad (23.12)$$

Поэтому, как и утверждалось выше, проекция на \vec{u} правой части уравнения Лоренца — Дирака равна нулю. Член, пропорциональный \vec{b} , называется *вектором Шотта*, а слагаемое в круглых скобках — *вектором Абрагама*. В нерелятивистском пределе уравнение (23.11) совпадает с (23.3).

*) См. дополнительные замечания по этому поводу в начале следующего параграфа.

§ 24*. Перенормировка массы. Гиперболическое движение заряда

24.1. Перенормировка массы (23.10) была произведена в точном уравнении движения Лоренца — Дирака для ускоренно движущегося заряда. Для того чтобы яснее понять физический смысл

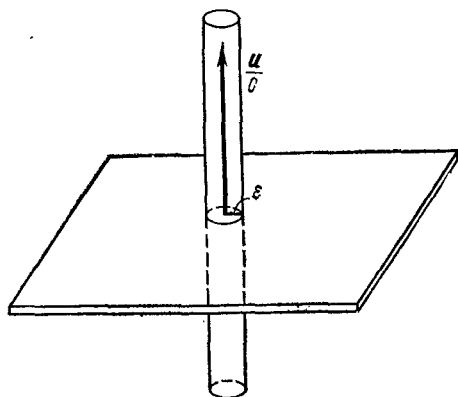


Рис. 25.

перенормировки, рассмотрим заряд, движущийся с постоянной скоростью, т. е. положим $\vec{w} = 0$. Будем считать, что этот заряд в своей системе покоя имеет форму сферы радиусом ϵ . Произведем вычисление вектора энергии-импульса поля, содержащегося в пространственноподобной плоскости, ортогональной к мировой линии заряда (рис. 25). Плотность энергии-импульса определяется по формуле (15.24). Но так как выражения (15.14), (15.15) и (15.18) приводятся в данном

случае к виду $W = 0$, $B = 1/\rho$, $\vec{V} = \vec{u}/\rho$, так что $\vec{V}^2 = c^2/\rho^2$, формула (15.24) принимает простой вид:

$$\left(\frac{4\pi}{q}\right)^2 T^{km} \frac{u_m}{c} = \frac{1}{2c\rho^4} u^k.$$

Поэтому

$$P^k = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 \frac{u^k}{2c^2} \int \frac{d\sigma}{\rho^4}.$$

Так как множитель при u^k должен быть инвариантным, вычисление интеграла по $d\sigma$ дает одинаковый результат в любой системе отсчета. В частности, можно воспользоваться сопутствующей заряду системой, в которой, как было показано в Приложении Г, можно считать ρ радиусом-вектором в сферических координатах трехмерного евклидова пространства, так что $d\sigma = \rho^2 d\rho d\omega$ и интеграл оказывается равным $4\pi/\epsilon$. Окончательно $P^k = \frac{q^2}{8\pi c^2 \epsilon} u^k$. Таким образом,

вектор энергии-импульса равномерно движущегося заряда принимает вид $P^k = m_{el} u^k$, где масса m_{el} (называемая *электромагнитной массой* частицы) как раз равна добавочному (перенормирующему) слагаемому в формуле (23.10). Для точечного заряда она расходится. Смысл m_{el} можно видеть из того факта, что $q^2/8\pi\epsilon$ — это энергия электростатического поля заряда в его системе покоя, а множитель c^{-2} соответствует переходу от энергии к массе покоя по формуле

Эйнштейна. Таким образом, в общую инерцию частицы входит эффект инерции увлекаемого ею поля. Нужно иметь в виду, что компонента cP^0 получаемого выражения обладает смыслом энергии только в сопутствующей системе. Энергия же $cP^{0'}$ частицы в какой-либо другой системе отсчета связана с энергией в сопутствующей системе обычными формулами преобразования: $cP^0 = \gamma (cP^{0'} + vP^1)$.

24.2. Обратимся теперь к уравнению Лоренца — Дирака (23.11) и рассмотрим случай, когда внешние силы отсутствуют, т. е. $\vec{F}_{\text{внешн}} = 0$. Тогда это уравнение принимает вид

$$\omega^r = \tau_0 (b^r + u^r \vec{\omega}^2/c^2). \quad (24.1)$$

Ясно, что $\vec{\omega} \equiv 0$ является решением этого уравнения. Однако помимо данного решения, которое одно лишь имеет физический смысл, существуют и другие. Пусть движение происходит по прямой в трехмерном пространстве, так что четырехмерные векторы можно представить лишь двумя ненулевыми проекциями (на оси 1 и 0). Как обычно, $u^0 = \gamma c$, $u^1 = \gamma v \equiv u$. Отсюда $v = uc (c^2 + u^2)^{-1/2}$ и $u^0 = (c^2 + u^2)^{1/2}$. Далее, $\omega^1 = \dot{u}$, $\omega^0 = \dot{u}u (c^2 + u^2)^{-1/2}$. Таким образом, из (24.1) получаем

$$\dot{u} = \tau_0 \left(\ddot{u} - \frac{\dot{u}^2 u}{c^2 + u^2} \right).$$

Подставим $u = c \operatorname{sh} \lambda$. Тогда предыдущее уравнение приводится к виду $\dot{\lambda} - \tau_0 \ddot{\lambda} = 0$. Отсюда $\lambda = Ae^{\tau/\tau_0} + B$, т. е. $u = c \operatorname{sh} (Ae^{\tau/\tau_0} + B)$. Таким образом, при $\tau \rightarrow \infty$ скорость u неограниченно возрастает, если только $A \neq 0$. При $A = 0$ получается предыдущий случай равномерного движения. Самоускоряющиеся движения свободной частицы, полученные при $A \neq 0$, лишены физического смысла. Это показывает, что при исследовании уравнения Лоренца — Дирака, вообще говоря, нельзя обойтись без дополнительных условий, которые бы отбирали физические решения этого уравнения *). Так, например, можно потребовать, чтобы скорость частицы оставалась конечной при $\tau \rightarrow \infty$ — это требование имеет характер асимптотического условия для движения заряда в бесконечно удаленном будущем.

Перейдем к тому случаю, когда движение излучателя можно назвать *равномерно ускоренным*. Уравнение (23.11) было выведено в предположении, что масса покоя частицы постоянна. Поэтому, как мы видели, вся правая его часть, а также оба составляющих ее слагаемых в отдельности ортогональны к вектору \vec{u} четырехмерной скорости. Условие $\vec{\omega} = \dot{\vec{b}} = 0$ противоречит этому предположению. В этом легко убедиться, скалярно умножив обе стороны

*) Несмотря на то, что сам вывод уравнения в § 23 их не использовал.

(23.11) на вектор \vec{u} (если только $\vec{\omega} \neq 0$). Однако понятие равномерно ускоренного движения следует вводить в релятивистской механике иначе. А именно, движение называется равномерно ускоренным, если постоянным остается значение четырехмерного вектора ускорения, вычисленное в любой момент собственного времени при переходе в систему покоя движущейся частицы. Так как компоненты четырехмерного ускорения выражаются по формулам (5.17₂), это означает, что условие $\vec{\omega}(\tau_2) = \vec{\omega}(\tau_1)$ сводится к условию $\mathbf{h} \equiv \equiv da/dt = 0$ в системе покоя. Из (5.17₂) легко построить с помощью дифференцирования компоненты четырехмерного вектора \vec{b} в общем случае. Они равны

$$b^0 = \frac{1}{c} \gamma^5 (a^2 + \mathbf{v}\mathbf{h}) + \frac{4\gamma^7}{c^3} (\mathbf{v}\mathbf{a})^2,$$

$$\mathbf{b} = \gamma^3 \mathbf{h} + \frac{3\gamma^5}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{a}) \mathbf{a} + \frac{b^0}{c} \mathbf{v}.$$

В системе покоя ($\mathbf{v} = 0$ и $\gamma = 1$) они принимают значения $b^0 = = a^2/c$, $\mathbf{b} = \mathbf{h}$. Определим составляющую \vec{b}_\perp четырехмерного вектора \vec{b} , ортогональную четырехмерной скорости \vec{u} , соотношением $\vec{b}_\perp \vec{u} = 0$. Это соотношение, разумеется, релятивистски-инвариантно. На основании (23.12) можно сделать вывод, что

$$\vec{b}_\perp = \vec{b} - \frac{\vec{b} \vec{u}}{c^2} \vec{u} = \vec{b} + \frac{\vec{\omega}^2}{c^2} \vec{u}.$$

В системе покоя получаем $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} = \mathbf{h}$, $\mathbf{b}_\perp^0 = 0$; поэтому условие, при котором движение следует назвать равномерно ускоренным, принимает в этой системе отсчета вид $\vec{b}_\perp = 0$. Но в такой форме оно инвариантно и должно иметь место в произвольной системе отсчета. Итак, равномерно ускоренное движение определяется соотношением

$$\vec{b} + \frac{\vec{\omega}^2}{c^2} \vec{u} = 0, \quad (24.2)$$

т. е. при таком движении обращается в нуль вектор Абрагама. С помощью приведенных выше выражений для компонент вектора \vec{b} предыдущее равенство принимает следующий вид в трехмерной записи (в произвольной системе отсчета):

$$\mathbf{h} + \frac{3\gamma^3}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{a}) \mathbf{a} = 0. \quad (24.3)$$

Из (24.2) следует $\vec{b} \vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\vec{\omega})^2 = 0$. Таким образом, мощность излучения, равная, согласно (15.33) или (16.15), $\mathcal{R} = = -\frac{1}{4\pi} \frac{2q^2}{3c^3} \vec{\omega}^2$, постоянна, а уравнение Лоренца — Дирака запи-

сывается в форме: $m\vec{\omega} = \vec{F}_{\text{внешн}}$. Тем не менее закон сохранения энергии-импульса выполняется, так как приведенные соотношения получены как непосредственные следствия именно этого закона в рассматриваемом частном случае. При этом, однако, правая часть $\vec{F}_{\text{внешн}}$ уравнения Лоренца — Дирака не может быть задана произвольно, но должна быть согласована с условием (24.2), из которого следует $\dot{\vec{F}}_{\text{внешн}} = -(\vec{F}_{\text{внешн}} \vec{\omega}) \frac{\vec{u}}{c^2}$. Такое изменение со временем приложенной внешней силы компенсирует диссипацию энергии, происходящую благодаря излучению. При этом четырехмерная сила изменяется в пространстве Минковского только по направлению, так как

$$\vec{F}\dot{\vec{F}} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \vec{F}^2 = 0.$$

В кинематическом отношении релятивистское равномерно ускоренное движение вполне определено. Действительно, (24.2) приводится к виду

$$\frac{d^2\vec{u}}{d\tau^2} = \Lambda^2\vec{u},$$

где $\Lambda^2 \equiv \mathcal{E} / (\tau_0 mc^2)$ — постоянная, $\Lambda > 0$. Отсюда

$$\vec{u} = \vec{\alpha} e^{\Lambda\tau} + \vec{\beta} e^{-\Lambda\tau}, \quad (24.4)$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ не зависят от τ . Условие $\vec{u}^2 = c^2$ показывает, что эти векторы должны удовлетворять равенствам $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 = 0$ и $2\vec{\alpha}\vec{\beta} = c^2$. Далее, из (24.4)

$$\vec{r} = \vec{\gamma} + \Lambda^{-1}(\vec{\alpha} e^{\Lambda\tau} - \vec{\beta} e^{-\Lambda\tau}). \quad (24.5)$$

Рассмотрим простой частный случай, когда одномерное движение происходит вдоль оси x в некоторой системе отсчета, а $\vec{\gamma} = 0$. Выберем $\alpha^0 = -\beta^0 = c/2$, а $\alpha^1 = \beta^1 = c/2$. При этом условия, определяющие свойства векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, выполняются. Тогда $ct = A \operatorname{ch}(\Lambda\tau)$ и $x = A \operatorname{sh}(\Lambda\tau)$, где $A = c\Lambda^{-1}$. Отсюда $c^2 t^2 - x^2 = A^2$, т. е. мировая линия частицы является времениподобной окружностью в пространстве Минковского и изображается на диаграмме Минковского в виде гиперболы. Благодаря наличию такого частного случая релятивистское равномерно ускоренное движение называется иногда *гиперболическим* *).

*) Рекомендуем читателю ознакомиться с вопросом о гиперболическом движении также по книге: В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, «Наука», 1975, гл. 2.

§ 25. Спектральный состав излучения осциллятора. Рассеяние и поглощение излучения

25.1. Вернемся к нерелятивистскому уравнению (23.3), описывающему движение заряда при учете реакции излучения. Рассмотрим его сначала в том случае, когда движение одномерно, а внешнюю силу можно считать квазиупругой. Тогда уравнение (23.3) принимает следующий вид:

$$\ddot{x} - \tau_0 \dddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (25.1)$$

Точками в (25.1) обозначается дифференцирование по времени t . Если бы постоянная τ_0 была равна нулю, то это уравнение описывало бы гармонические колебания с частотой ω_0 ; выбирая должным образом начало отсчета на оси x и начальную скорость, решение его можно представить в виде $x(t) = x_0 e^{-i\omega_0 t}$, где x_0 — вещественная постоянная. При $\tau_0 \neq 0$ будем искать решение уравнения (25.1) с помощью подстановки $x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$, считая α комплексным числом. Для определения α получаем уравнение

$$\tau_0 \alpha^3 + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Корни этого кубического уравнения для α могут быть определены в замкнутом виде. Один из них — вещественный и отрицательный. Легко понять, что он должен быть отброшен, так как соответствует «самоускоряющемуся» решению. Комплексные же корни удобнее выразить приближенно, считая, что $\xi \equiv \omega_0 \tau_0 \ll 1$. Оценка величины τ_0 , приведенная в начале § 23, позволяет предположить, что такое условие может выполняться для широкого класса излучателей. Введем безразмерную величину $\alpha' = \alpha / \omega_0$. Уравнение принимает вид $\xi \alpha'^3 + \alpha'^2 + 1 = 0$. Теперь подставим разложение $\alpha' \simeq \beta + \gamma \xi + \delta \xi^2$. Оставляя лишь члены порядка не выше ξ^2 и приравняв нулю коэффициенты при ξ^0 , ξ^1 , ξ^2 в отдельности, получим равенства $\beta^2 + 1 = 0$, $\beta^2 + 2\gamma = 0$ и $3\gamma\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\delta = 0$, откуда последовательно находим $\beta = \pm i$, $\gamma = 1/2$ и $\delta = \mp 5/8 i$. Здесь верхние и нижние знаки для β и δ должны выбираться одновременно. Подставив найденные коэффициенты в разложение для α' и возвращаясь к α , получим в рассматриваемом приближении

$$\alpha = 1/2 \Gamma \pm i (\omega_0 + \Delta\omega),$$

где

$$\Gamma = \omega_0^2 \tau_0, \quad \Delta\omega = -5/8 \omega_0^2 \tau_0^2.$$

Величина Γ называется *естественной шириной уровня*, а $\Delta\omega$ — *сдвигом спектральной линии*. Смысл такой терминологии будет ясен в этом параграфе, когда мы будем исследовать свойства излу-

чения, испускаемого осциллирующим зарядом. Уравнение движения такого заряда принимает вид

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{+i\omega' t},$$

где $\omega' \equiv \omega_0 + \Delta\omega$. Таким образом, благодаря реакции излучения колебания, как и следовало ожидать, являются затухающими. Поправка $\Delta\omega$ весьма мала и, как правило, не учитывается. Поэтому в дальнейшем можно считать $\omega' \approx \omega_0$.

Рассмотрим теперь сферический осциллятор, уравнения движения которого имеют вид (25.1) для каждой из трех пространственных координат. В изучаемом нерелятивистском пределе энергия излучения определяется формулой Лармора (16.3), т. е. она пропорциональна $\dot{\mathbf{r}}^2$. Если осциллятор совершает гармонические колебания с частотой ω_0 , то его электромагнитное излучение будет иметь характер волн такой же частоты. При учете радиационного трения движение осциллятора, как уже было показано, будет иметь экспоненциально затухающий характер. Можно представить себе, что первоначальное отклонение частицы от положения равновесия вызывается в момент $t = 0$ какой-либо внешней силой, которая тут же перестает действовать. Затухающие колебания заряда приведут к излучению, которое также будет лишено гармонического характера, а именно будет сходиться на нет со временем. Спектральный состав такого излучения исследуется с помощью разложений в интеграл Фурье.

Мы увидим в дальнейшем, что затухание колебаний вызывается не только силой реакции излучения, но и взаимодействием осциллятора с окружающей средой, которое феноменологически описывается включением в уравнение движения силы трения, пропорциональной $\dot{\mathbf{r}}$. Более того, такая сила, действие которой учитывается в уравнении (25.11), оказывает обычно значительно большее влияние на движение осциллятора, а потому и на характер излучаемого им электромагнитного поля, чем реакция излучения. Однако при решении уравнения (25.11) будет показано, что и это влияние может быть описано с помощью введения ширины спектральной линии.

Общее решение задачи о движении осциллятора, как видно из результатов, полученных выше, может быть представлено в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}e^{-(\Gamma/2 + i\omega')t} + \mathbf{B}e^{-(\Gamma/2 - i\omega')t}.$$

Так как \mathbf{r} — вещественная величина, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$, должно выполняться равенство $\mathbf{A} = \mathbf{B}^*$. Произведем спектральный анализ первого слагаемого; при этом будем требовать, чтобы $\mathbf{r}(t) = 0$ при $t < 0$ в соответствии с предположением о характере движения.

Тогда, пользуясь формулой типа (Д.12), можно записать:

$$Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega't} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{при } t > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Если проинтегрировать обе части этого равенства по времени от $-\infty$ до $+\infty$, то в левой части интеграл фактически должен вычисляться в пределах от нуля до $+\infty$. Выполним интегрирование, предварительно умножив правую и левую стороны равенства на $e^{i\bar{\omega}t}$. Тогда

$$A \int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{\Gamma}{2} + i(\bar{\omega} - \omega')\right)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{\omega} - \omega)t} dt = 2\pi\alpha(\bar{\omega}),$$

где использована формула (В.14) для дельта-функции. Производя элементарное интегрирование в левой части, получим (заменяя обозначение $\bar{\omega}$ на ω)

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{\Gamma/2 - i(\omega - \omega')}. \quad (25.2)$$

Ясно, что разложение в интеграл Фурье второго слагаемого в формуле для \mathbf{r} будет отличаться лишь заменой ω' на $-\omega'$. Дифференцирование же по t под знаком интеграла при вычислении $\ddot{\mathbf{r}}$ дает дополнительный множитель ω^2 . Итак,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (25.3)$$

где

$$\mathbf{f}(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} \left[\frac{A}{\Gamma/2 - i(\omega - \omega')} + \frac{A^*}{\Gamma/2 - i(\omega + \omega')} \right]. \quad (25.4)$$

При этом $\mathbf{f}^*(-\omega) = \mathbf{f}(\omega)$. В результате формулу (25.3) можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}^*(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}. \quad (25.5)$$

Полная энергия излучения, испускаемого осциллятором за время от $t=0$ до $t = +\infty$, равна, согласно (16.3),

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} \frac{2q^2}{3c^3} \int_0^{\infty} \ddot{\mathbf{r}}(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(\omega) d\omega, \quad (25.6)$$

где правая часть является определением величины $\mathcal{W}(\omega)$, которая называется *спектральной плотностью энергии*. Из формул (25.3),

(25.5) и (В.14) следует

$$\int_0^{\infty} \dot{r}^2 dt = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\omega) \mathbf{f}^*(\bar{\omega}) e^{i(\bar{\omega}-\omega)t} dt d\omega d\bar{\omega} = \\ = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{f}(\omega)|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |\mathbf{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (25.7)$$

так как в нашем случае $|\mathbf{f}(-\omega)|^2 = |\mathbf{f}(\omega)|^2$. Подсчет этого подынтегрального выражения должен быть произведен с помощью (25.4). Можно во многих случаях считать, что $\Gamma \ll \omega_0$, и ограничиваться узкой полосой частот ω , определяемой условием $|\omega - \omega_0| \ll |\omega_0|$. Тогда по абсолютной величине первое слагаемое в (25.4) гораздо больше второго, которое на этом основании не будем принимать во внимание в дальнейшем. При этом

$$\mathcal{W}^{\circ}(\omega) = \frac{2q^2}{3c^3} |\mathbf{f}(\omega)|^2 = \frac{\mathcal{W}}{\Gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2} \frac{\Gamma}{2}, \quad (25.8)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{W} \equiv \frac{2q^2}{3c^3} \frac{\omega'^4}{(2\pi)^2} \frac{2}{\Gamma}$$

и, в соответствии с указанными выше предположениями, произведена замена величины ω^4 на ω'^4 . Смысл введенного обозначения состоит в том, что $\mathcal{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}^{\circ}(\omega) d\omega$, т. е. это — полная энергия,

излучаемая осциллятором за все то время, в течение которого он совершает свои колебания. Мы не будем здесь останавливаться на выполнении этого интегрирования.

Характер зависимости от ω энергии $\mathcal{W}^{\circ}(\omega)$, соответствующей формуле (25.8) и излучаемой в виде волн с частотами, лежащими в интервале от ω до $\omega + d\omega$, можно видеть на рис. 26. Ясно, что максимум излучаемой энергии

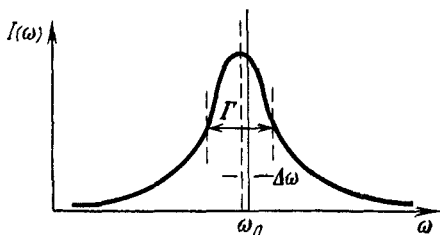


Рис. 26.

приходится на $\omega' \approx \omega_0$ и осциллятор излучает волны всевозможных частот с различными интенсивностями, в то время как излучение гармонического осциллятора состоит только из волн с частотой ω_0 .

Из графика видно, что величина Γ равна ширине распределения энергии на ординате, равной $\mathcal{W}^{\circ}_{\max}/2$. Поэтому часто называют Γ полушириной (это название не соответствует ее истинному смыслу).

25.2. До сих пор мы рассматривали «свободное» движение осциллирующего излучателя, находящегося под действием двух сил: квазиупругой, которая стремится восстановить равновесие, и силы со стороны излучаемого поля. Перейдем теперь к задаче о «вынужденных» колебаниях, вызываемых действием внешних сил, приложенных к частице в данный промежуток времени. Такие внешние силы могут быть вызваны взаимодействием частицы с электромагнитными волнами. Это взаимодействие приводит к рассеянию и поглощению излучения.

Предположим сначала, что квазиупругая сила отсутствует и что плоская монохроматическая электромагнитная волна взаимодействует с заряженной частицей, в других отношениях свободной. Под действием поля волны заряд ускоряется и излучает. Все рассмотрение, как и везде в этом параграфе, нерелятивистское. При этом, так как $v \ll c$, действием магнитного поля падающей волны можно пренебречь и записывать уравнение движения заряда в виде

$$m\ddot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} = q\boldsymbol{\varepsilon}Ee^{i(k\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — единичный вектор поляризации волны, а E — ее амплитуда. Волны, излучаемые при ускоренном движении заряда в этих условиях, называются рассеянными. Поток энергии такого рассеянного излучения должен вычисляться по формуле (16.2) с учетом (17.18), так как ускорение записано в комплексном виде. Последнюю формулу можно считать применимой, если за время наблюдения рассеяния излучающий заряд под действием падающего на него поля волны успевает совершить достаточно большое число колебаний. Итак,

$$|\mathbf{S}|d\Omega = c \left(\frac{q}{4\pi c^2 R} \right)^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{v}}|^2$$

и

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{2} |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta.$$

Здесь аналогично § 16 θ — угол между направлением ускорения заряда (т. е. направлением поляризации падающей волны) и направлением излучения в телесный угол $d\Omega$. Так как $1/2 |\boldsymbol{\varepsilon}|^2$ — усредненный по времени поток энергии падающей волны через единицу интенсивности (ср. § 17), то удобно определить отношение вычисленной интенсивности рассеянных волн к этому потоку $d\sigma/d\Omega$, которое называется *дифференциальным сечением рассеяния*. Если, как показано на рис. 27, обозначить через ψ азимутальный угол вектора поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}$ (в направлении которого, как мы видели, совершаются вынужденные колебания излучателя) в сферической системе координат, то угол θ совпадает с углом между векторами \mathbf{n} и $\boldsymbol{\varepsilon}$, откуда $\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 (\varphi - \psi)$.

Предположим теперь, что падающее излучение не поляризовано и усредним сечение по углу ψ . Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (25.9)$$

Полученное выражение называется *формулой Томсона*. Полное томоновское сечение рассеяния вычисляется интегрированием по $d\Omega$:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2} \right)^2. \quad (25.10)$$

Величина, заключенная в скобки, называется *классическим радиусом частицы* (в частности, электрона или протона, если подставить соответствующие значения заряда и массы).

Перейдем к тому случаю, когда электромагнитное излучение взаимодействует с частицей, связанной квазиупругой силой с положением равновесия. Реакцию излучения учитывать сначала не будем, но предположим, что на частицу действуют какие-либо силы трения со стороны окружающей среды, пропорциональные скорости. Как и в предыдущей задаче, магнитными силами будем пренебрегать. Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma' \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(t), \quad (25.11)$$

где Γ' — коэффициент трения. Решение этого неоднородного уравнения может быть получено с помощью разложения Фурье в форме (Д.12) функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$. При этом (аналогично рассмотренным выше случаям) благодаря вещественности \mathbf{r} и \mathbf{E} соответствующие коэффициенты Фурье удовлетворяют соотношениям $\mathbf{r}(\omega) = = \mathbf{r}^*(-\omega)$ и $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}^*(-\omega)$. Из (25.11) получим

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{q}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\omega\Gamma' - \omega^2}. \quad (25.12)$$

Работа, совершаемая излучением при вынужденных колебаниях заряда, равна

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{E} dt. \quad (25.13)$$

Поле $\mathbf{E}(t)$ можно взять в точке равновесия осциллятора, если амплитуда его колебаний достаточно мала. Дифференцируя разложение для $\mathbf{r}(t)$ и подставляя его и разложение для $\mathbf{E}(t)$ в формулу (25.13),

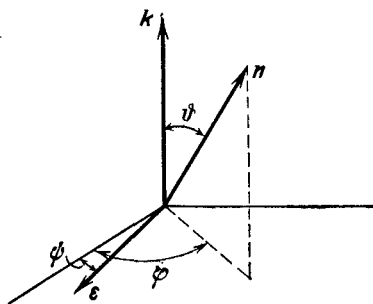


Рис. 27.

получим

$$W = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \mathbf{r}(\omega) \mathbf{E}^*(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} \omega \operatorname{Im}(\mathbf{r}(\omega) \mathbf{E}^*(\omega)) d\omega.$$

Последнее равенство является следствием указанных выше условий вещественности $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$. С помощью (25.12) оно приводится к виду

$$W = \frac{4\pi q^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{|E(\omega)|^2 \omega^2 \Gamma'}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma'^2} d\omega. \quad (25.14)$$

Подынтегральное выражение имеет острый максимум при $\omega = \omega_0$. Заменим поэтому $E(\omega)$ на $E(\omega_0)$; вычисление интеграла дает результат $\pi/2$. Таким образом, полная работа падающего на осциллятор излучения равна

$$W = \frac{2\pi^2 q^2}{m} |E(\omega_0)|^2. \quad (25.15)$$

Это выражение может быть записано также несколько иначе. Совершенно аналогично соотношению (25.7) можно получить равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega, \quad (25.16)$$

связывающее вещественную функцию $A(t)$ с ее преобразованием Фурье (в теории интеграла Фурье это соотношение называется *формулой Планшереля*). В частности, для отнесенного к единице площади потока энергии излучения, которое вынуждает колебания заряженной частицы, получим

$$S = c \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}^2 dt = 4\pi c \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega. \quad (25.17)$$

Таким образом, $dS/d\omega \equiv s(\omega) = 4\pi c |E(\omega)|^2$ и

$$W = \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{mc} s(\omega_0) = 2\pi^2 r_0 c s(\omega_0). \quad (25.18)$$

Эта величина представляет собой энергию, расходуемую излучением на возбуждение колебаний заряда, и, таким образом, она определяет поглощение излучения осциллятором. С другой стороны, если определить $\sigma(\omega) \equiv dW/d\omega$, то формулы (25.14) и (25.18) могут быть переписаны в виде

$$\int_0^{+\infty} \sigma(\omega) d\omega = 2\pi^2 r_0 s(\omega_0). \quad (25.19)$$

Последнее уравнение называется иногда правилом суммирования.

Обратимся теперь к *рассеянию* и *поглощению* излучения осциллятором при учете реакции излучения, продолжая предполагать, что на осциллятор действуют также силы трения, пропорциональные скорости заряженной частицы. Ограничимся случаем падающей монохроматической волны, когда $\mathbf{E}(t) = \boldsymbol{\varepsilon} E e^{-i\omega t}$ (мы будем считать, что поле волны мало отличается от его значения в точке равновесия осциллятора, которую примем за начало отсчета пространственных координат). Вместо (25.11) нужно тогда решать уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma' \dot{\mathbf{r}} - \tau \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m} \boldsymbol{\varepsilon} E e^{-i\omega t}. \quad (25.20)$$

После подстановки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ найдем

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q}{m} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{E e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \tilde{\Gamma}}, \quad (25.21)$$

где

$$\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma' + (\omega/\omega_0)^2 \Gamma. \quad (25.22)$$

25.3. Займемся прежде всего вопросом о *рассеянии*. Для этого, аналогично тому, как это было сделано в задаче о рассеянии на свободном заряде, нужно вычислить энергию, излучаемую осциллятором при его движении, которое определяется формулой (25.21).

Электрическое поле излучения, испускаемого осциллятором, может быть определено формулой (16.1), т. е.

$$\mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{q}{4\pi c^2 R} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{r}}]]_{\text{зап.}}$$

Здесь R — расстояние от положения равновесия осциллятора до точки, в которой производится наблюдение излучения. При достаточно большом удалении от осциллятора можно считать его точечным. Условия для этого были подробно исследованы в § 17. В силу запаздывания нужно подставить $\ddot{\mathbf{r}}$ в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{q}{m} \omega^2 \frac{E e^{-i\omega t'}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega \tilde{\Gamma}} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $t' = t - R/c$ и t — время наблюдения. Далее, так как вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ ортогонален к вектору \mathbf{n} , а последний имеет единичную длину: $\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}] = -\boldsymbol{\varepsilon}$.

Предположим, что нужно вычислить ту часть энергии излучения, которую переносит волна, поляризованная в направлении $\boldsymbol{\varepsilon}'$. Из предыдущих формул находим

$$\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{q^2}{4\pi m c^2} \frac{E e^{-i\omega t'} e^{ikR}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \tilde{\Gamma}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'}{R}.$$

На расстоянии R от излучателя в телесный угол $d\Omega$ проходит энергия $1/2c |(\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{E}_{\text{изл}})|^2 R^2 d\Omega$. Энергия же, вызывающая колебания заряда, благодаря которым совершается излучение по всем направлениям, равна $1/2c |\mathbf{E}|^2$ (также на единицу поверхности). Отношение

первой из этих величин ко второй называется, как и в рассмотренной выше задаче о свободном заряде, дифференциальным сечением рассеяния излучения, поляризованного в направлении \mathbf{e}' :

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} = \left| \frac{R}{E} (\mathbf{e}' E_{\text{изл}}) \right|^2 = \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2} \right)^2 (\mathbf{e}\mathbf{e}')^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tilde{\Gamma}^2}. \quad (25.23)$$

При $\omega \ll \omega_0$, когда $\tilde{\Gamma} \simeq \Gamma'$, получим приближенную формулу

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} \simeq \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2} \right)^2 (\mathbf{e}\mathbf{e}')^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (25.24)$$

Этот случай называется *рассеянием Релея*.

Пусть теперь $\omega \simeq \omega_0$, так что имеет место резонанс падающей волны с собственной частотой колебаний осциллятора. Тогда в знаменателе формулы (25.23) можно записать: $(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, а в числителе заменить ω^4 на ω_0^4 . При этом $\tilde{\Gamma} \simeq \simeq \Gamma' + \Gamma$, как видно из (25.22). Таким образом, сечение рассеяния определяется величиной $[(\omega_0 - \omega)^2 + (\tilde{\Gamma}/2)^2]^{-1}$ с точностью до коэффициента, не зависящего от ω . Такое рассеяние называется *резонансной флуоресценцией*. Интегрирование по углам $d\Omega$ и по частотам приводит к полному сечению рассеяния, пропорциональному $(\Gamma/\tilde{\Gamma})^2$.

Легко видеть, что при $\omega \gg \omega_0$ формула (25.23) переходит в формулу Томсона (25.9) (при учете определения углов в этих двух выражениях).

Перейдем к *поглощению*. Из предыдущего рассмотрения видно, что поглощение определяется формулой вида (25.14), где нужно лишь Γ' заменить на $\tilde{\Gamma}$. Поэтому в предположении о монохроматичности падающего поля получаем

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{4\pi q^2}{m} |E(\omega)|^2 \frac{\omega^2 \tilde{\Gamma}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tilde{\Gamma}^2}. \quad (25.25)$$

Деля на энергию падающей волны, равную, как можно видеть из обсуждения формулы (25.17), $4\pi c |E(\omega)|^2$, получим величину, называемую *сечением поглощения*:

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = \frac{q^2}{mc} \frac{\omega^2 \tilde{\Gamma}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tilde{\Gamma}^2}.$$

Соответственно трем случаям, упомянутым выше при изучении рассеяния,

$$\frac{mc}{q^2} \sigma_{\text{погл}}(\omega) = \begin{cases} \omega^2 \tilde{\Gamma} / \omega_0^4 & \text{при } \omega \ll \omega_0, \\ \frac{1}{4} \frac{\tilde{\Gamma}}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\tilde{\Gamma}/2)^2} & \text{при } \omega \simeq \omega_0, \\ \tilde{\Gamma} / \omega^2 & \text{при } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (25.26)$$

Заметим, что сечение поглощения, как это часто и делается, можно назвать *полным сечением*. Действительно, энергия рассеянных волн возникает за счет превращения энергии падающего излучения в энергию движения излучателя. В формулах же для сечения поглощения учитывается и работа по преодолению нерадиационных сил трения, характеризуемых величиной Γ' . Разность полного сечения и сечения рассеяния называется *сечением реакции*.

При использовании полученных в настоящем параграфе формул нужно иметь в виду, что они выведены на основе классической теории. При больших частотах, сравнимых с величиной mc^2/\hbar , где mc^2 — собственная энергия рассеивающей частицы, а \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π , начинают играть существенную роль квантовые эффекты. В этих эффектах проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения, состоящего из фотонов, и характер зависимости поглощения и рассеяния от частоты существенно изменяется.

Расширение спектральной линии, описываемое величиной $\tilde{\Gamma}$, имеет, по сути дела, простую причину, а именно оно обусловлено тем обстоятельством, что излучатель (например, атом) в течение конечного промежутка времени испускает световые колебания, имеющие частоты, достаточно близкие к некоторой средней частоте ω_0 . Помимо реакции излучения, рассмотренной в начале этого параграфа, причиной прерывания процесса испускания света могут быть, например, столкновения между излучающими атомами. Именно такие процессы и учитываются в уравнении движения членом $\Gamma' \dot{r}$, который был интерпретирован выше как действие сил трения со стороны окружающей среды. Совсем другой причиной расширения наблюдаемых спектральных линий, испускаемых атомами, является эффект Доплера. Если даже не учитывать сил трения и считать, что осциллятор в сопутствующей ему системе отсчета испускает свет, частота которого в точности равна ω_0 , то при движении осциллятора относительно наблюдателя эта частота смещается. Если скорости наблюдаемых излучателей обладают каким-либо разбросом (например, распределены по закону Максвелла), то полная интенсивность наблюдаемого излучения будет зависеть от частоты. При максвелловском распределении скоростей получим $I = I_0 \exp [-(\omega - \omega_0)/D]^2]$, где $D = \frac{\omega_0}{c} (2R\theta/m)^{1/2}$ (доплерова ширина спектральной линии), R — газовая постоянная и θ — температура.

**ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.
СИСТЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЗАРЯДОВ**

§ 26. Интегрирование уравнений движения

Если можно считать электромагнитное поле, действующее на заряженную частицу, заданным как функция координат и времени, то проблема определения траектории точечной частицы сводится к интегрированию уравнения (8.3) с известной правой частью. При этом влияние поля, создаваемого самой частицей, на ее движение, проявляющееся в реакции излучения, не учитывается*). Напомним, что правая часть (8.3) имеет вид (3.13) (здесь будет использоваться гауссова система единиц, и потому следует положить $\alpha \approx 1$).

Проблема интегрирования уравнения движения может быть решена точно лишь в некоторых частных случаях. В настоящем параграфе будут рассмотрены наиболее важные из них. Предположим сначала, что выполняются условия применимости нерелятивистского приближения. Тогда, как следует из общего уравнения движения частицы (см. § 6), параметр собственного времени τ может быть заменен на время t . Таким образом, в этом пределе уравнение приобретает форму

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (26.1)$$

Релятивистский случай будет изучен несколько позднее (см. п. 4 этого параграфа).

26.1. Рассмотрим статическое однородное магнитное поле \mathbf{B} ; $\mathbf{E} = 0$.

Выберем ось z в направлении вектора \mathbf{B} . В проекциях на оси координат уравнение (26.1) примет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_L v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_L v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (26.2)$$

Здесь введен важный для дальнейшего параметр

$$\omega_L \equiv \frac{qB}{m_0 c}, \quad (26.3)$$

*) Это означает, что потерей энергии заряда на излучение пренебрегается, т. е., как видно из § 16, ускорение следует считать здесь «достаточно малым», поэтому при использовании результатов настоящего параграфа следует иметь в виду их приближенный характер.

называемый *циклотронной* или *ларморовой частотой* *). Начальную скорость обозначим через \mathbf{v}_0 . Третье уравнение (26.2) описывает равномерное движение вдоль оси z и интереса не представляет. Интегрирование остальных двух уравнений проще всего произвести, если умножить второе из них на мнимую единицу i и почленно сложить с первым. В результате получим

$$\frac{d\omega}{dt} + i\omega_L \omega = 0, \quad (26.4)$$

где $\omega \equiv v_x + iv_y$. Обозначим $\omega_0 \equiv v_{0x} + iv_{0y}$. Тогда $\omega = \omega_0 e^{-i\omega_L t}$. Разделение вещественной и мнимой частей дает

$$v_x = v_{0x} \cos \omega_L t + v_{0y} \sin \omega_L t,$$

$$v_y = v_{0y} \cos \omega_L t - v_{0x} \sin \omega_L t,$$

так что $v_x^2 + v_y^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \equiv v_{0\perp}^2$, где значком \perp обозначена ортогональность к вектору \mathbf{B} . Предыдущие формулы можно записать в векторном виде

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_{0\perp} \cos \omega_L t - [\mathbf{B}_1 \times \mathbf{v}_0] \sin \omega_L t. \quad (26.5)$$

Здесь $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}/B$ — единичный вектор оси z . Обозначая $\mathbf{v}_\perp \equiv d\mathbf{r}_\perp/dt$, сразу получаем

$$\omega_L \mathbf{r}_\perp = [\mathbf{B}_1 \times \mathbf{v}_0] \cos \omega_L t + \mathbf{v}_{0\perp} \sin \omega_L t, \quad (26.6)$$

если постоянную интегрирования приравнять $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{v}_0$. Это означает просто выбор определенного положения начала отсчета на плоскости x, y . Пусть $v_{0z} = 0$, так что $v_0 = v_{0\perp}$. Из (26.6): $r_\perp = v_0/\omega_L = cm_0 v_0/qB$. Таким образом, частица описывает в плоскости, ортогональной направлению поля \mathbf{B} , окружность радиусом r_\perp (тем меньшим, чем больше напряженность поля) с частотой ω_L . Начало отсчета выбрано нами в центре этой окружности. В дальнейшем вместо r_\perp мы будем использовать обозначение r_L (радиус Лармора). Непосредственно из (26.6) и (26.5) получаем

$$\mathbf{v} = \omega_L \mathbf{r}_L \times \mathbf{B}_1.$$

Частицу, вращающуюся по окружности под действием магнитного поля, можно рассматривать как линейный ток, которому нужно приписать силу $I = qv_0/2\pi r_L$ (так как $v = v_0$). Вспомним теперь определение (12.13) магнитного момента такого тока. В нашем случае его можно записать в виде $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{c} \mathbf{n} I S$, где S — площадь круга радиусом r_L . Положительное направление нормали \mathbf{n} совпадает с направлением вектора $\mathbf{r}_L \times \mathbf{j}$, т. е. у нас $\mathbf{r}_L \times \mathbf{v} =$

*) Иногда частотой Лармора называют $\omega_L = qB/(2m_0c)$. См. стр. 194 и 218.

$= -\omega_L r_L^2 \mathbf{B}_1$. Итак,

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2c} \mathbf{B}_1 q v_0 r_L = -\mathbf{B} \frac{m_0}{2} \left(\frac{v_0}{B}\right)^2. \quad (26.7)$$

Первое из этих равенств фактически не зависит от причины, вызывающей вращение, так как здесь \mathbf{B}_1 — просто единичный вектор нормали к плоскости орбиты. Оно может быть записано также в виде $\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2c} \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}$. Сравним эту формулу с формулой для момента импульса заряда при вращении его по орбите. Этот момент равен $\boldsymbol{\mu}_{\text{мех}} = \mathbf{r}_L \times m_0 \mathbf{v}$. Отсюда следует важное соотношение, связывающее абсолютные величины механического момента импульса и рассмотренного здесь «орбитального» магнитного момента:

$$\frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_{\text{мех}}} = \frac{q}{2m_0 c}. \quad (26.7')$$

Например, для электрона это отношение определяется универсальными постоянными — его зарядом и массой.

Нужно обратить внимание на то, что направления вращения в заданном магнитном поле взаимно противоположны для частиц с противоположным знаком заряда, магнитный же момент тока, создаваемого этими частицами, согласно предыдущим формулам, вне зависимости от знака их заряда направлен в сторону, противоположную вектору поля \mathbf{B} .

26.2. Уравнение (26.1) интегрируется и в том более общем случае, когда магнитное поле \mathbf{B} по-прежнему статическое и однородное, однако присутствует также и электрическое поле, направление которого постоянно, но абсолютная величина может зависеть

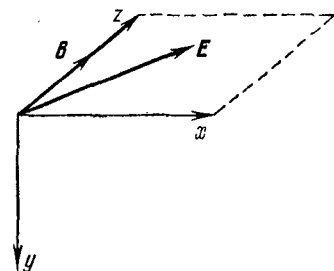


Рис. 28.

от времени. Ось z системы координат, так же как и в предыдущей задаче, направим вдоль вектора \mathbf{B} . Оси же x и y всегда можно считать при этом направленными так, чтобы плоскость x, z содержала вектор \mathbf{E} (рис. 28). Проектируя (26.1) на оси координат и вводя комплексную величину ω , как это было сделано в п. 1, получим уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = -i\omega_L \omega + \frac{c\omega_L}{B} E_x(t), \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m_0} E_z(t). \quad (26.8)$$

Параметр ω_L по-прежнему определяется равенством (26.3). Здесь уравнение для v_z может быть в принципе проинтегрировано, если $E_z(t)$ — известная функция времени, и основной интерес вновь представляет функция ω . Решение уравнения, которому она

удовлетворяет, равно сумме решения однородного уравнения (26.4) и частного решения ω_1 , соответствующего заданной в (26.8) правой части. Легко убедиться с помощью подстановки, что такое частное решение можно взять в виде

$$\omega_1(t) = e^{-i\omega_L t} \int_0^t E_x(t') e^{i\omega_L t'} dt' \left(\frac{c\omega_L}{B} \right). \quad (26.9)$$

Таким образом,

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-i\omega_L t} + \omega_1(t), \quad (26.10)$$

где ω_0 имеет тот же смысл, что и в п. 1.

Пусть теперь $\mathbf{E} = \text{const}$. Тогда из (26.9) следует

$$\omega_1(t) = ic \frac{E_x}{B} (e^{-i\omega_L t} - 1). \quad (26.11)$$

Подстановка (26.11) в (26.10) и приравнивание вещественных и мнимых частей дают результат

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \cos \omega_L t + (v_{0y} + cE_x/B) \sin \omega_L t, \\ v_y + cE_x/B &= (v_{0y} + cE_x/B) \cos \omega_L t - v_{0x} \sin \omega_L t, \end{aligned} \quad (26.12)$$

который мог бы быть получен из (26.5) заменой v_y на $v'_y = v_y + cE_x/B$ и v_{0y} — на $v'_{0y} = v_{0y} + cE_x/B$. Таким образом, вектор \mathbf{v}'_{\perp} с компонентами $v'_x = v_x$ и v'_y соответствует вращению в плоскости x, y с частотой ω_L , рассмотренному в п. 1. Так как при нашем выборе системы координат $E_y = 0$, легко убедиться в том, что выполняется равенство

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}'_{\perp} + \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (26.13)$$

Итак, частица, вращаясь по круговой орбите, кроме того, смещается в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{B} , с постоянной скоростью, равной второму слагаемому в (26.13). Такое перемещение называется *электрическим дрейфом*, а мгновенный центр вращения — *ведущим центром*.

Заметим, что полученный результат непосредственно следует из уравнения (26.2), если положить $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp}$ и перейти к новой, движущейся, системе отсчета, выбрав ее так, чтобы скорость частицы относительно этой системы была равна

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Другой важный частный случай формул (26.9) и (26.10) имеет место, когда поле $\mathbf{E}(t)$ периодически зависит от времени, так что $E_x(t) = E_0 \cos \omega t$. Интеграл в (26.9) легко вычисляется. При этом удобно записать $\cos \omega t$ в комплексной форме, а $e^{-i\omega_L t}$ представить

в виде $\exp[-1/2i(\omega_L - \omega)t] \cdot \exp[-1/2i(\omega_L + \omega)t]$ и $e^{i\omega t}$ — в виде $\exp[1/2i(\omega_L + \omega)t] \cdot \exp[-1/2i(\omega_L - \omega)t]$. Тогда после разделения вещественной и мнимой частей в интеграле (26.9) (полагая $\omega_1 = v_{1x} + iv_{1y}$) получим

$$v_{1x} = \frac{c\omega_L E_0}{B} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos^{1/2}(\omega_L - \omega)t \sin^{1/2}(\omega_L + \omega)t}{\omega_L + \omega} + \frac{\sin^{1/2}(\omega_L - \omega)t \cos^{1/2}(\omega_L + \omega)t}{\omega_L - \omega} \right],$$

$$v_{1y} = \frac{2c\omega_L^2 E_0}{B(\omega_L^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_L - \omega)t}{2} \cdot \sin \frac{(\omega_L + \omega)t}{2}.$$

Предположим, что частота ω внешнего поля почти совпадает с ларморовой частотой ω_L . При этом условии $(\omega_L - \omega)^{-1} \sin^{1/2}(\omega_L - \omega)t \simeq t/2$. Таким образом, в этом случае, который называется *циклотронным резонансом*,

$$v_{1x} \simeq \frac{cE_0}{2B} \sin \omega_L t + \frac{c\omega_L E_0}{2B} t \cos \omega_L t,$$

$$v_{1y} \simeq \frac{cE_0 \omega_L}{2B} t \sin \omega_L t.$$

Если пренебречь вкладом первого слагаемого в v_{1x} , имеющего периодическую зависимость от t (это, во всяком случае, законно, если иметь в виду усреднение по времени), то кинетическая энергия K поперечного движения будет неограниченно возрастать:

$$K = \frac{m_0}{2} (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) \simeq \frac{c^2 \omega_L^2 E_0^2 t^2}{8B^2} = \frac{(qE_0 t)^2}{8m_0}.$$

Этот эффект используется для ускорения заряженных частиц. Разумеется, на практике действуют разнообразные силы трения, благодаря чему кинетическая энергия ограничена.

26.3. Представляет интерес тот случай, когда на заряд, помимо статического магнитного поля действует квазиупругая сила. Предположим, что $E = 0$. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m_0 c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (26.14)$$

Обозначая $\zeta \equiv x + iy$ и производя вычисления точно так же, как в п. 1, получим решение в виде

$$\zeta = e^{i\omega'_L t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}), \quad (26.15)$$

где A и B — постоянные. В данном случае $\omega'_L = qB/(2m_0 c)$, т. е. этот параметр оказывается вдвое меньшим, чем в п. 1. На составляющую колебаний вдоль оси z магнитное поле, направленное по условию вдоль той же оси, влияния не оказывает.

Если произвести анализ излучения такого осциллятора аналогично тому, как это было сделано в начале § 25 (причем здесь можно считать $\Gamma = 0$), то легко убедиться в том, что, помимо спектральной линии с частотой ω_0 , возбуждаемой колебаниями осциллятора вдоль оси z , появится еще излучение с частотами $\omega_0 - \omega'_1$ и $\omega_0 + \omega'_1$. Таким образом, вращение осциллятора под действием магнитного поля приводит к расщеплению испускаемой им спектральной линии на три составляющие. Это явление называется *нормальным эффектом Зеемана*. Если излучателем является атом, то столь простая модель неприменима и полное описание излучения в присутствии магнитного поля достигается на основе квантовой теории.

26.4*. Обратимся теперь к исследованию релятивистского уравнения (8.3), т. е.

$$m_0 \frac{du^k}{d\tau} = \frac{q}{c} u_l F^{lk}.$$

В том случае, когда все компоненты тензора напряженностей F_{ik} постоянны, можно получить некоторые общие выводы о характере решения. Будем искать решение в виде

$$x^l = x_0^l \exp\left(\frac{q}{m_0 c} \lambda \tau\right),$$

где x_0^l вещественны, а λ — комплексная постоянная. Подстановка в (8.3) приводит к алгебраической системе уравнений

$$\lambda x_{0i} = x_{0l} F^l_{\cdot i}.$$

Эта система имеет решение, если выполняется условие

$$\det(F^l_{\cdot i} - \lambda \delta^l_i) = 0, \quad (26.16)$$

т. е. если λ является решением характеристического уравнения (собственным значением матрицы $\|F^l_{\cdot i}\|$). В том случае, когда λ — корень уравнения (26.16), можно записать:

$$\begin{aligned} \det(F^l_{\cdot i} + \lambda \delta^l_i) &= \det(F^l_{\cdot i} + \lambda \delta^l_i) = \\ &= \det(-F^l_{\cdot i} + \lambda \delta^l_i) = + \det(F^l_{\cdot i} - \lambda \delta^l_i) = 0. \end{aligned}$$

В первом из этих равенств использована неизменяемость определителя при перестановке строк и столбцов, а во втором — свойство антисимметрии тензора $F^l_{\cdot i}$ *). Таким образом, $-\lambda$ также является корнем. Поэтому уравнение (26.16) должно иметь вид $\lambda^4 + \alpha \lambda^2 + \beta = 0$, причем, так как оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, постоянные α и β должны выражаться через величины I_1 и I_2 , определенные уравнениями (7.10). Конкретный вид α и β проще всего определить, непосредственно вычисляя детерминант.

*) Третье равенство справедливо для определителя четного (в нашем случае — четвертого) порядка.

Обозначая $a^l_i \equiv F^l_i - \lambda \delta^l_i$ и ε_{iklm} — единичный псевдоскаляр, определенный в Приложении А, воспользуемся формулой

$$\det (a^l_i) = \varepsilon_{l_1 l_2 l_3 l_4} a^{l_1}_{i_1} a^{l_2}_{i_2} a^{l_3}_{i_3} a^{l_4}_{i_4}, \quad (26.17)$$

в которой правая часть фактически является определением левой и которая непосредственно связана с законом преобразования (А.9) псевдоскаляра. Ввиду антисимметричности тензора F^l_i диагональные элементы a^l_i равны просто $-\lambda$. Поэтому член в (26.17) с коэффициентом ε_{1234} равен λ^4 . Коэффициент α при λ^2 получим, если выделим все те ненулевые члены суммы, в которых только какие-либо два сомножителя равны диагональным элементам a^l_i . Например, такой член будет получен, если $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 4, i_4 = 3$; он равен $\lambda^2 \varepsilon_{1234} F^1_3 F^3_4 = -\lambda^2 \varepsilon_{1234} (F_{34})^2 = -\lambda^2 E_3^2$ на основании (7.6). Здесь для несколько большего удобства вычислений мы временно заменили индекс 0 на 4. Таким образом, можно показать, что $\alpha = B^2 - E^2$.

Перейдем к вычислению коэффициента β , когда ни один из элементов a^l_i не диагональный. В этом случае

$$\beta = \det (F^l_i) = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} F^{i_1}_{i_1} F^{i_2}_{i_2} F^{i_3}_{i_3} F^{i_4}_{i_4}.$$

Свойства антисимметрии тензора F^l_k и коэффициента ε_{iklm} приводят к следующим комбинациям значений индексов i_1, i_2, i_3, i_4 , дающим ненулевой результат: 2143, 2341, 2413, 3142, 3421, 4123, 4312, 4321. Соответствующие члены суммы имеют, например, такой вид: $\varepsilon_{2341} F^2_1 F^3_2 F^4_3 F^1_4 = -E_1 E_3 B_1 B_3$, или $\varepsilon_{3412} = F^3_1 F^4_2 F^1_3 F^2_4 = -E_2^2 B_2^2$. Окончательно получим

$$\det (F^l_i) = -(EB)^2. \quad (26.18)$$

Заметим, что при опускании индекса l значение определителя не изменяется. Равенство нулю коэффициентов при λ и λ^3 , которое было показано выше из общих соображений, может быть, разумеется, получено непосредственно с помощью вычисления, аналогичного проведенному здесь.

Уравнение (26.16) приводится к виду

$$\lambda^4 + (B^2 - E^2) \lambda^2 - (EB)^2 = 0. \quad (26.19)$$

Отсюда

$$\lambda = \pm [1/2 (E^2 - B^2) \pm \sqrt{1/4 (E^2 - B^2)^2 + (EB)^2}]^{1/2}. \quad (26.20)$$

Случай, когда оба инварианта электромагнитного поля равны нулю, является особым и должен быть исследован отдельно. Поэтому, исключая этот случай, выражение, стоящее в скобках под знаком корня, положительно. В общем случае при $I_1 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$

$$1/2 |B^2 - E^2| < |\sqrt{1/4 (B^2 - E^2)^2 + (EB)^2}|.$$

Как при $B^2 > E^2$, так и при $E^2 < B^2$ выбор знака плюс перед корнем делает выражение, заключенное в квадратные скобки, положительным, а знака минус — отрицательным. В первом случае получаются два вещественных, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значения: $\lambda_1 = -\lambda_2$. Во втором же — два чисто мнимых взаимно сопряженных значения: $i\omega$, $-i\omega$. Вещественным собственным значениям соответствуют аперидические движения, зависящие от $e^{\pm\lambda\tau}$, мнимым же — периодические вида $e^{\pm i\omega\tau}$.

Запишем на основании проведенного исследования возможный вид решения в вещественной форме:

$$\vec{x}(\tau) = a(\vec{\xi} \cos \omega\tau - \vec{\eta} \sin \omega\tau) + b(\vec{\alpha} \operatorname{ch} \lambda\tau - \vec{\beta} \operatorname{sh} \mu\tau) + \vec{x}_0. \quad (26.21)$$

Здесь a , b — вещественные амплитуды, а $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, \vec{x}_0 — постоянные векторы в пространстве Минковского, причем \vec{x}_0 определяется начальными данными. Знаки в предыдущей формуле выбраны из соображений удобства. Подстановка (26.21) в (8.3) и приравнивание входящих в правую и левую части членов, обладающих одинаковой зависимостью от τ , приводят к следующим уравнениям для векторов:

$$\omega \vec{\xi}^n = \frac{q}{cm_0} \eta^l F_l^n, \quad \omega \eta^n = -\frac{q}{cm_0} \xi^l F_l^n, \quad (26.22_1)$$

$$\mu \vec{\alpha}^n = -\frac{q}{cm_0} \beta^l F_l^n, \quad \mu \beta^n = -\frac{q}{cm_0} \alpha^l F_l^n. \quad (26.22_2)$$

В формуле (26.21) мы пользуемся прежними собственными значениями, умноженными на q/m_0c . Исследование уравнений (26.22) показывает, что они совместны, причем векторы $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ можно считать взаимно ортогональными. Действительно, из (26.22₁)

$$\omega \xi^i \eta_i = \frac{q}{cm_0} F_l^i \eta^l \eta_i = 0$$

благодаря антисимметрии тензора F_l^i . Совершенно аналогично из (26.22₂) следует, что $\alpha^i \beta_i = 0$. Используя теперь первое уравнение (26.22₁) и затем — второе уравнение (26.22₂), найдем

$$\omega \xi^l \alpha_l = \frac{q}{cm_0} F_l^i \eta^l \alpha_l = \mu \eta^l \beta_l.$$

Аналогично из второго уравнения (26.22₁) и первого (26.22₂) имеем

$$\omega \eta^i \beta_i = -\frac{q}{cm_0} \xi^l F_l^i \beta_i = -\mu \xi^l \alpha_l.$$

Здесь также использована антисимметричность F_l^i . Из двух предыдущих равенств получим

$$\omega \xi^l \alpha_l = -\frac{\mu^2}{\omega} \xi^l \alpha_l = \frac{\mu^2}{\omega^2} \eta^l \beta_l.$$

Таким образом, $(\omega^2 + \mu^2) \xi'_i \alpha_i = 0$ и, так как ω и μ вещественны, $\xi'_i \alpha_i = 0$, а значит, и $\eta'_i \beta_i = 0$. Итак, взаимная ортогональность векторов $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ доказана. Совершенно сходным путем проверяются равенства $\vec{\xi}^2 = \vec{\eta}^2$ и $\vec{\alpha}^2 = -\vec{\beta}^2$. Благодаря присутствию коэффициентов a и b можно считать векторы $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ единичными. Но из четырех взаимно ортогональных векторов в пространстве Минковского три должны быть пространственноподобными и один — времениподобным. Из соотношений между длинами этих векторов видно, что имеются лишь две возможности: времениподобным может быть либо вектор $\vec{\alpha}$, либо вектор $\vec{\beta}$. Но отсюда, в свою очередь, следует, что компонента движения во времениподобном направлении всегда является аperiодической, как это и должно быть*). Четырехмерная скорость движения должна быть времениподобной. На основании (26.21), с учетом указанных выше свойств векторных амплитуд, получается равенство $(d\vec{x}/dt)^2 = -a^2\omega^2 \mp b^2\mu^2$, причем верхний знак соответствует времениподобному вектору $\vec{\alpha}$, а нижний — времениподобному вектору $\vec{\beta}$. В первом случае условие для скорости не может быть выполнено. Поэтому именно вектор $\vec{\beta}$ следует считать времениподобным.

Дальнейшее исследование при произвольном направлении полей \mathbf{B} и \mathbf{E} не может быть проведено в общем виде, даже если эти поля, как здесь предполагается, статические и однородные. Однако несколько важных частных случаев могут быть полностью исследованы. Они выделяются условиями относительно значений инвариантов электромагнитного поля. Полезно при этом вспомнить сведения о свойствах преобразований поля, изложенные в § 7.

26.5*. Прежде всего, будем считать, что $\mathbf{EB} = 0$, и поэтому, согласно (26.18), $\det(F_{ii}) = 0$. Рассмотрим сначала случай $B^2 > E^2$. В § 7 было показано, что при этих условиях существует такая система отсчета, в которой $\mathbf{E}' = 0$. Из (26.20) видно, что имеются два ненулевых собственных значения: $i\omega = \pm i \frac{q}{m_0c} (B^2 - E^2)^{1/2}$. Заметим, что в вышеупомянутой системе отсчета, где электромагнитное поле является чисто магнитным \mathbf{B}' , абсолютная величина этих собственных значений совпадает с ларморовой частотой (26.3). В данном случае, однако, нужно еще учесть, что благодаря указанному равенству нулю определителя существует ненулевое решение v^i системы алгебраических уравнений

$$v^i F_i{}^i = 0, \quad (26.23)$$

а поэтому, помимо решения вида (26.21) (где нужно положить $\mu = 0$), уравнению (8.3) можно удовлетворить также, положив

*) Разумеется, периодическое движение вдоль оси времени означало бы нарушение принципа причинности!

$x^i = v^i \tau + v_0^i$, где второе слагаемое постоянно. Общее решение принимает вид

$$\vec{x}(\tau) = a(\vec{\xi} \cos \omega \tau - \vec{\eta} \sin \omega \tau) + \vec{v} \tau, \quad (26.24)$$

если выбрать начало отсчета так, чтобы постоянное слагаемое в (26.21) в сумме с \vec{v}_0 обратилось в нуль. Следует заметить, что аргументом в (26.24) является именно собственное время τ , а не время t в какой-либо произвольной системе отсчета. Чтобы ввести в качестве аргумента это последнее, нужно определить функциональную зависимость $\tau = \tau(t)$ и разрешить ее относительно t .

Обозначим буквой \mathbf{v} трехмерную скорость, соответствующую четырехмерной скорости \vec{v} . Тогда, переходя к трехмерным обозначениям, уравнение (26.23) можно переписать в виде $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -c\mathbf{E}$. В § 7 мы видели, что тогда \mathbf{v} является скоростью той самой системы отсчета, в которой $\mathbf{E}' = 0$. Умножая предыдущее равенство векторно на \mathbf{B} и используя формулу для двойного векторного произведения, получим, что проекция скорости \mathbf{v} на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{B} , равна $\mathbf{v}_\perp = \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Мы вновь получили скорость электрического дрейфа, входящую и в нерелятивистское равенство (26.13). Таким образом, скорость \mathbf{v} — это скорость ведущего центра, который движется равномерно и прямолинейно.

Перейдем в систему отсчета, связанную с ведущим центром, и обозначим через \mathbf{v} скорость частицы в этой системе отсчета. Так как $\mathbf{E}' = 0$, нулевая компонента уравнения движения (8.3) частицы примет вид $d(\gamma m_0 c) / dt = 0$, т. е. $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \text{const}$, а значит, и $v = \text{const}$. Первые два члена в формуле (26.24) описывают, таким образом, равномерное ларморово вращение. При этом из $d\tau/dt = \gamma^{-1}$ следует $\tau = t\gamma^{-1}$ и аргумент тригонометрических функций записывается в виде $\omega\tau = \frac{qB'}{\gamma m_0 c} t$. Поэтому в системе отсчета, связанной с ведущим центром, релятивистская частица вращается так же, как это было в нерелятивистской задаче (п. 1). Нужно лишь заменить в формуле (26.3) массу покоя m_0 на массу движения $m = m_0\gamma$.

Этот же результат немедленно и еще проще получается и из пространственных компонент уравнения (8.3), которые в системе отсчета ведущего центра вполне аналогичны уравнениям (26.2), а

именно: $\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m_0 c \gamma} \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}$, и могут быть проинтегрированы совершенно так же, как это было сделано в п. 1. Поэтому и выводы об эквивалентном магнитном моменте, указанные в конце п. 1, остаются в силе при замене m_0 на m .

26.6. Продолжая считать $\mathbf{BE} = 0$, предположим теперь, что $E^2 > B^2$. Для исследования такой задачи удобнее всего воспользоваться результатами § 7 и проводить вычисления в той системе

отсчета, где выполняется равенство $B = 0$. Пространственные компоненты уравнения (8.3) в этой системе записываются в виде $d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}$ — релятивистский импульс частицы. Направим ось x вдоль вектора \mathbf{E} . Проектирование уравнения на ось x и на ортогональную к ней плоскость приводит к результату: $p_x = m_0\gamma v_x = qEt + p_{0x}$, $\mathbf{p}_\perp = m_0\gamma\mathbf{v}_\perp = \mathbf{p}_{0\perp} = \text{const}$. Здесь p_{0x} и $\mathbf{p}_{0\perp}$ определяются начальной скоростью. Теперь можно воспользоваться соотношением $m_0\gamma c = (\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2)^{1/2} = (p_x^2 + \omega_0^2)^{1/2} = [(qEt + p_{0x})^2 + \omega_0^2]^{1/2}$ (ср. § 6), где $\omega_0^2 \equiv \mathbf{p}_\perp^2 + m_0^2c^2 = \text{const}$, определяющим временную компоненту импульса. Для большей наглядности последующих формул ограничимся в дальнейшем тем случаем, когда $p_{0x} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = cqEt [\omega_0^2 + (qEt)^2]^{-1/2}, \\ \mathbf{v}_\perp &= \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = c\mathbf{p}_{0\perp} [\omega_0^2 + (qEt)^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (26.25)$$

Разумеется, в плоскости, ортогональной оси x , всегда можно направить одну из лежащих в ней координатных осей (пусть это будет ось y) вдоль $\mathbf{p}_{0\perp}$. Интегрирование формул (26.25) от начального момента времени $t_0 = 0$ дает результат:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{qE} [\omega_0^2 + (qEt)^2]^{1/2}, \\ y(t) &= \frac{cp_{0y}}{qE} \text{Arsh} \frac{qEt}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (26.26)$$

Здесь начало отсчета на плоскости (x, y) выбрано так, чтобы постоянные слагаемые в (26.26) были равны нулю. Вся траектория лежит в этой плоскости. Из (26.26) можно исключить время и получить уравнение траектории частицы в виде

$$x = \frac{c\omega_0}{qE} \text{ch} \left(\frac{qEy}{cp_{0y}} \right). \quad (26.27)$$

В нерелятивистском пределе положим $\omega_0 \simeq m_0c$ и $p_{0y} \simeq m_0v_{0y}$. Так как мы рассматриваем случай $p_{0x} = 0$, начальная кинетическая энергия частицы равна $1/2 m_0 v_{0y}^2 \equiv T_0$. Нерелятивистское приближение справедливо лишь на достаточно малых расстояниях от точки, из которой начинается движение частицы, так как благодаря ускоряющему действию поля скорость ее в принципе может достигать значений, сколь угодно близких к c . Считая аргумент в ch достаточно малым, получим

$$x \simeq \frac{1}{4} \frac{q}{m_0} \frac{E}{T_0} y^2 + \text{const}. \quad (26.28)$$

Это — уравнение параболы в плоскости (x, y) . Предоставим исследование траектории в общем случае читателю в качестве упражнения.

26.7. Рассмотрим случай, когда $\mathbf{EB} = EB$, т. е. электрическое и магнитное поля параллельны. Ось z пространственных координат может быть повернута вдоль общего направления этих векторов. При этом $E_z = E$, $B_z = B$. Уравнение (8.3) записывается, как нетрудно в том убедиться, в виде следующей системы равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \omega_L \frac{dy}{d\tau}, & \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\omega_L \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{qE}{m_0} \frac{dt}{d\tau}, & \frac{d^2t}{d\tau^2} &= \frac{qE}{m_0 c^2} \frac{dz}{d\tau}. \end{aligned}$$

Здесь ω_L — нерелятивистская частота Лармора (26.3). Очевидно, первые два уравнения описывают периодическое движение с частотой ω_L , вторая же пара уравнений — апериодическое движение вдоль оси z . Можно сравнить этот результат с формулой (26.21), однако мы не будем изучать такое движение более подробно.

26.8. В заключение настоящего параграфа исследуем движение частицы в поле плоской волны. При этом оба инварианта электромагнитного поля равны нулю. Анализ движения в периодически зависящем от времени поле, проведенный в п. 2, предполагал это поле однородным в пространстве и, кроме того, был нерелятивистским. В данном случае имеют место формулы (18.7)

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}\mathbf{n} = 0, \quad (26.29)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Зависимость от времени имеет вид $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] = \exp[-i\omega(t - \mathbf{nr}/c)]$. Запись ее в комплексной форме здесь несущественна, и мы используем фактически вещественную часть экспоненты, считая при этом векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} также вещественными. С помощью (26.29) пространственные компоненты уравнения (8.3) принимают следующую форму:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \right\} = q \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c} \right) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{n} (E\mathbf{v}) \right\}. \quad (26.30)$$

Временная же компонента, как обычно, выражает закон сохранения энергии, т. е. $\frac{d}{dt} (mc^2) = q(E\mathbf{v})$. Проектируя (26.30) на постоянный вектор \mathbf{n} и принимая во внимание (26.29), получим $\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}\mathbf{n}) = \frac{q}{c} E\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (mc)$. Таким образом, $m(\mathbf{v}\mathbf{n} - c) = \text{const}$. Примем за начало отсчета $t = 0$ тот момент времени, когда $\mathbf{v} = 0$ и, следовательно, $m = m_0$. Тогда $m\mathbf{v}\mathbf{n} = (m - m_0)c$, т. е. $\mathbf{v}\mathbf{n} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c$ или $\frac{d\tau}{dt} = \gamma^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c} = \frac{dt'}{dt}$, если обозначить $t' \equiv t - \frac{\mathbf{nr}}{c}$. Отсюда

$m\mathbf{v} = m_0 \frac{dt}{dt'} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt'}$. Умножим обе части уравнения (26.30) на dt/dt' . Тогда при учете предыдущих соотношений получим

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2} = \frac{q}{m_0} \mathbf{E} + \frac{q}{m_0 c} \mathbf{n} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right). \quad (26.31)$$

Следует полагать, что вектор \mathbf{E} может быть задан как функция от t' . Направим ось x по вектору \mathbf{n} распространения плоской волны. Проектируя (26.31) на этот вектор и на ортогональную ему плоскость, находим

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{q}{m_0 c} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right) = \frac{q}{m_0 c} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt'} \right), \quad \frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dt'^2} = \frac{q}{m_0} \mathbf{E}. \quad (26.32)$$

Из второго уравнения (26.32)

$$\mathbf{r}_\perp(t') = \frac{q}{m_0} \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} \mathbf{E}(t''') dt''''.$$

Тогда первое уравнение дает

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{q^2}{m_0^2 c} \mathbf{E}(t') \int_0^{t'} \mathbf{E}(t'') dt'' = \frac{q^2}{2m_0^2 c} \frac{d}{dt'} \left[\int_0^{t'} \mathbf{E}(t'') dt'' \right]^2.$$

Отсюда

$$x(t') = \frac{q^2}{2m_0^2 c} \int_0^{t'} dt'' \left[\int_0^{t''} \mathbf{E}(t''') dt'''' \right]^2, \quad \mathbf{r}(t') = x(t') \mathbf{n} + \mathbf{r}_\perp(t'). \quad (26.33)$$

Важно еще раз подчеркнуть, что предыдущими формулами \mathbf{r} задается как функция вспомогательной переменной времени t' или, что в данном случае то же самое, как функция собственного времени t . Для того чтобы определить закон движения частицы в зависимости от времени t , следовало бы исключить t' из уравнения $t = t' + \mathbf{r}(t') \mathbf{n}/c = t' + x(t') c$, где $x(t')$ определяется по формуле (26.33). Интегрирование в этой формуле произвести легко, так как вещественная часть поля записывается в виде $\mathbf{E}(t''') = \mathbf{E}_0 \cos \omega t'''$, однако уравнение для t' является трансцендентным, а потому может быть решено лишь численными методами.

Изученные выше случаи не исчерпывают всех возможностей точного решения уравнений движения. Так, например, можно было бы рассмотреть некоторые статические, но уже неоднородные магнитные поля. Такие результаты можно найти в специальной литературе *).

*) См., например, Б. Ленерт, Динамика заряженных частиц, Атомиздат, 1967.

§ 27. Теория дрейфа в неоднородном электромагнитном поле

27.1. Для исследования поведения частицы в неоднородных и зависящих от времени полях применяются различные приближенные методы. Мы остановимся здесь на одном широко используемом в таких задачах методе теории возмущений, причем будем руководствоваться наиболее простыми предположениями. Грубо говоря, физическая картина, лежащая в основе этого метода, — это движение в виде достаточно быстрых ларморовых осцилляций, наложенное на сравнительно медленное перемещение «ведущего центра». В однородных статических электрическом и магнитном полях такая картина движения является точной (см. предыдущий параграф, п. 2). В неоднородных полях, при определенных условиях, она достаточно хорошо соответствует описанию поведения частицы в первом приближении.

Все вычисления будут проводиться в нерелятивистском пределе. Предположим, прежде всего, что магнитное поле достаточно медленно изменяется как в пространстве, так и во времени. Это условие выражается неравенствами

$$r_L \left| \frac{\partial B_j}{\partial x^k} \right| \ll |B_j|, \quad \frac{1}{\omega_L} \left| \frac{\partial B_j}{\partial t} \right| \ll |B_j|.$$

Здесь ω_L и r_L — ларморовы частота и радиус, определенные по формулам п. 26.1. Производные по координатам и по времени вычисляются в системе отсчета, сопутствующей частице. Аналогичные неравенства должны выполняться и для остальных внешних сил, действующих на частицу. В качестве таких внешних сил мы будем учитывать в дальнейшем в явном виде только электрическую силу $q\mathbf{E}$. Если действуют также и силы \mathbf{f} другого происхождения, то все последующие формулы будут выполняться при замене $q\mathbf{E}$ на $q\mathbf{E} + \mathbf{f} = \mathbf{F}$. Нужно лишь предположить, что составляющие $F_{\parallel} = \mathbf{V}(\mathbf{F}\mathbf{B})/B^2$, параллельные магнитному полю, малы, а составляющие F_{\perp} не изменяют существенным образом ларморова радиуса r_L .

Для применения теории возмущений приведем уравнение движения (26.1) к безразмерному виду. Для этого обозначим буквой L характеристический размер той области неоднородного поля, в которой изучается движение, $B_0(t)$ — напряженность магнитного поля в момент t и v_0 — скорость движения по ларморовой окружности в этом поле. Тогда безразмерные переменные могут быть введены с помощью равенств: $\rho = 1/Lr$, $\tilde{T} = v_0 t/L$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(t)/B_0(t)$. Если еще определить безразмерную величину $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{c}{v_0 B_0} \mathbf{E}$, то уравнение (26.1) принимает после подстановки всех этих функций

безразмерную форму:

$$\frac{r_L}{L} \frac{d^2 \rho}{d\tilde{T}^2} = \tilde{E} + \frac{d\rho}{d\tilde{T}} \times \tilde{B}. \quad (27.1)$$

Здесь, как и в п. 26.1, $r_L = m_0 c v_0 / q B_0$. Но уравнение (27.1) формально совпадает с (26.1), если заменить r_L/L на $m_0 c / q$. Поэтому каждому решению одного из этих уравнений соответствует решение другого. Можно, таким образом, применять теорию возмущений непосредственно к уравнению (26.1). Малым параметром в (27.1) будем считать r_L/L . Тогда малым параметром при исследовании уравнения (26.1) будет $\varepsilon \equiv m_0 c / q$:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = cE + v \times B. \quad (27.2)$$

Введем теперь основное предположение теории возмущений, которую мы рассмотрим здесь лишь с точностью до первого порядка по параметру ε . Именно, предположим, что радиус-вектор частицы можно записать в виде

$$r(t) = r_{\text{ц}}(t) + r_L(t) = r_{\text{ц}}(t) + \varepsilon (e_1 \cos \omega_L t + e_2 \sin \omega_L t). \quad (27.3)$$

Здесь, аналогично формуле (26.6), векторы e_1 и e_2 считаются единичными и взаимно ортогональными, причем

$$\varepsilon e_1 = \frac{B_1 \times v_0}{\omega_L}, \quad \varepsilon e_2 = \frac{v_0}{\omega_L}. \quad (27.4)$$

Радиус-вектор $r_{\text{ц}}(t)$ описывает движение «ведущего центра», а $r_L(t)$ — ларморово вращение, упомянутое в начале этого параграфа. В дальнейшем будут использоваться также обозначения $v_{\text{ц}} = dr_{\text{ц}}/dt$ и $v_L = dr_L/dt$, так что $v = v_{\text{ц}} + v_L$.

Применяя условие о медленности изменения полей, можно воспользоваться их разложениями вблизи точки $r_{\text{ц}}$ в виде

$$\begin{aligned} B(r) &= B_{\text{ц}} + \delta B = B_{\text{ц}} + (r, \text{grad}) B_{\text{ц}}, \\ E(r) &= E_{\text{ц}} + \delta E = E_{\text{ц}} + (r, \text{grad}) E_{\text{ц}}. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Индекс «ц» означает вычисление каждого из слагаемых в точке $r = r_{\text{ц}}$. Подставим (27.3) и (27.5) в уравнение (27.2), причем вместо параметра ε можно воспользоваться его явным выражением. Тогда получим

$$\begin{aligned} m_0 \frac{dv_{\text{ц}}}{dt} - q \left(E_{\text{ц}} + \frac{1}{c} v_{\text{ц}} \times B_{\text{ц}} \right) - \frac{q}{c} v_L \times \delta B = \\ = q \delta E + \frac{q}{c} v_{\text{ц}} \times \delta B + \left(\frac{q}{c} v_L \times B_{\text{ц}} - m_0 \frac{dv_L}{dt} \right). \end{aligned} \quad (27.6)$$

Последние два члена в правой части неявно содержат множитель ε . Такой же множитель содержит и последнее слагаемое в левой части, но его обсуждение требует осторожности и будет проведено

несколько позднее. Поэтому можно считать, что разность $m_0 \frac{d\mathbf{v}_L}{dt} - \frac{q}{c} \mathbf{v}_L \times \mathbf{B}_0$ «почти равна нулю». Это и означает, что частица совершает прежде всего вращательное движение с ларморовой частотой. В результате такого (достаточно быстрого) вращения поля \mathbf{B} и \mathbf{E} в системе отсчета, сопутствующей частице, периодически изменяются со временем с частотой ω_L .

Произведем в обеих частях уравнения (27.6) усреднение по времени. Такое усреднение составляет чрезвычайно существенную черту излагаемого метода теории возмущений и позволяет отделить сравнительно быстрые движения от медленных. Ясно, что при этом средние значения векторов \mathbf{r}_L и \mathbf{v}_L равны нулю. Кроме того, равны нулю и средние значения «флуктуаций» $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{B}$ электромагнитного поля. На первый взгляд кажется, что и член $\mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B}$ должен давать нулевой вклад, однако мы убедимся сейчас, что это не так.

Прежде всего запишем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_L} \mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B} &= [\mathbf{r}_L \times \mathbf{B}_0] \times ((\mathbf{r}_L \text{ grad}) \mathbf{B}) = \\ &= -\mathbf{r}_L (\mathbf{B}_0, (\mathbf{r}_L \text{ grad}) \mathbf{B}) + \mathbf{B}_0 (\mathbf{r}_L, (\mathbf{r}_L \text{ grad}) \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Пусть направление оси z локальной системы координат совпадает с вектором \mathbf{B}_0 в начале отсчета этой системы. Проекция \mathbf{r}_L на ось z при этом равна нулю. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_L} [\mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B}]_x &= -r_{Lx} (\mathbf{r}_L, \text{grad}) B_z = -r_{Lx}^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} - r_{Lx} r_{Ly} \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{\omega_L} [\mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B}]_y &= -r_{Ly} (\mathbf{r}_L \text{ grad}) B_z = -r_{Ly} r_{Lx} \frac{\partial B_x}{\partial x} - r_{Ly}^2 \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{\omega_L} [\mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B}]_z &= r_{Lx} (\mathbf{r}_L \text{ grad}) B_x + r_{Ly} (\mathbf{r}_L \text{ grad}) B_y = \\ &= r_{Lx}^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} + r_{Ly}^2 \frac{\partial B_y}{\partial y} + r_{Lx} r_{Ly} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Средние по времени от r_{Lx}^2 и r_{Ly}^2 равны $r_L^2/2$, средние же по времени от $r_{Lx} r_{Ly}$ равны нулю. Используем, кроме того, уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$, т. е. $\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = -\partial B_z/\partial z$. Тогда, обозначая скобками $\langle \rangle$ результат усреднения, получим

$$\langle \mathbf{v}_L \times \delta\mathbf{B} \rangle = -\frac{1}{2} \omega_L r_L^2 \text{grad } B_z. \quad (27.7)$$

Но если воспользоваться предположениями о малости компонент поля B_x и B_y по сравнению с компонентой B_z и о медленном их изменении, то

$$\begin{aligned} \text{grad } B_z &= \frac{1}{2B_z} \text{grad } B_z^2 = \\ &= \frac{1}{2B_z} (\text{grad } B^2 - 2B_x \text{grad } B_x - 2B_y \text{grad } B_y) \simeq \text{grad } B. \end{aligned}$$

Подстановка (27.7) в (27.6), с учетом всех сделанных приближений, приводит к уравнению

$$m_0 \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE + \frac{q}{c} \mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} - M \text{grad } B. \quad (27.8)$$

Здесь $M = \frac{q\omega_L r_L^2}{2c} = \frac{q}{2c} v_L r_L = \frac{m_0 v_0^2}{2B}$. Таким образом, M является абсолютной величиной магнитного момента тока, соответствующего движению частицы по ларморовой орбите, определенной ранее уравнением (26.7). Можно сказать, что в данном приближении реальная частица заменяется «эквивалентной» частицей, движение которой совпадает с траекторией ведущего центра, причем эта частица обладает, помимо заряда, еще и магнитным моментом M . Физический смысл полученной картины является вполне наглядным; необходимо, однако, еще раз подчеркнуть решающую роль усреднения по периодическому ларморову движению при ее выводе.

Рассмотренное первое приближение, разумеется, весьма грубо изображает реальность. Для самого его обоснования и установления границ его применимости необходимо было бы изучить разложение $\mathbf{r}(t)$, а также полей \mathbf{B} и \mathbf{E} в бесконечные ряды по степеням ϵ , а также с достаточной строгостью провести усреднение. Такая задача решена в трудах различных авторов, однако она, разумеется, слишком сложна, чтобы быть здесь изложенной *).

27.2. Перейдем к дальнейшему исследованию уравнения дрейфового движения (27.8). Индекс « \parallel » при этом можно не выписывать. Проектируя это уравнение на вектор \mathbf{B}_1 , получим дрейф в направлении магнитного поля:

$$m_0 \left(\frac{dv}{dt} \right)_{\parallel} = qE_{\parallel} - M (\mathbf{B}_1 \text{grad}) B.$$

Вывести уравнение для поперечного дрейфа в удобной форме более трудно. Обозначим через $\mathbf{v}_{\parallel 1}$ единичный вектор скорости вдоль магнитных силовых линий. Тогда $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel 1} + \mathbf{v}_{\perp}$ и $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\parallel 1} \frac{dv_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} + v_{\parallel} \frac{d\mathbf{v}_{\parallel 1}}{dt}$. Если теперь умножить уравнение (27.8) векторно на \mathbf{B}_1 и учесть, что $B^{-2} [\mathbf{B} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]] = \mathbf{v} - \mathbf{B}_1 (\mathbf{v} \mathbf{B}_1) \equiv \mathbf{v}_{\perp}$, а также $\mathbf{v}_{\parallel 1} \times \mathbf{B}_1 = 0$, то оно примет вид

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{c}{qB^2} \left[qE - M \text{grad } B - m_0 \left(\frac{dv_{\perp}}{dt} + v_{\parallel} \frac{d\mathbf{v}_{\parallel 1}}{dt} \right) \right] \times \mathbf{B}. \quad (27.9)$$

Но, по самому своему определению, вектор $\mathbf{v}_{\parallel 1}$ направлен всегда вдоль поля \mathbf{B} , т. е. $d\mathbf{v}_{\parallel 1} = d\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_1 \text{grad}) \mathbf{B}_1 dl$, причем $dl = v dt$, где v_{\parallel} — значение скорости в начале рассматриваемого бесконечно малого приращения. Таким образом, $\frac{d\mathbf{v}_{\parallel 1}}{dt} = v_{\parallel} (\mathbf{B}_1 \text{grad}) \mathbf{B}_1$. На основании формулы (Б.18), при $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{B}_1$, так что $\text{grad } a^2 = 0$, имеет место соотношение $(\mathbf{B}_1 \text{grad}) \mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_1 \times$

*) См., например, цитируемую на стр. 202 книгу Б. Ленерта.

$\times \text{rot } \mathbf{B}_1$. Далее, $\text{rot } \mathbf{B}_1 = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B} \text{rot } \mathbf{B} + \left[\text{grad } \frac{1}{B} \times \mathbf{B} \right]$, по формуле (Б.14₃). Обозначая $(\text{grad } B)_\perp \equiv \text{grad } B - \mathbf{B}_1 (B_1 \text{ grad } B)$, получим

$$(\mathbf{B}_1 \text{ grad}) \mathbf{B}_1 = \frac{1}{B^2} ((\text{grad } B)_\perp - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}). \quad (27.10)$$

Подставим (27.10) в формулу для производной $d\mathbf{v}_\perp/dt$, а эту последнюю — в уравнение (27.9). Выполним векторное умножение на \mathbf{B} , указанное в этом уравнении, и учтем при этом, что $(\text{grad } B)_\perp \times \mathbf{B} = (\text{grad } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$, а также воспользуемся очевидным обозначением: $(\text{rot } \mathbf{B})_\perp \equiv \mathbf{B}_1 \times [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}_1]$. На основании уравнения Максвелла $(\text{rot } \mathbf{B})_\perp = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}$ окончательно получим

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_I + \mathbf{v}_P,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E &= \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, & \mathbf{v}_I &= \frac{m_0}{qB^2} \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt}, \\ \mathbf{v}_B &= \frac{M}{qB^2} \left(1 + \frac{2v_\parallel^2}{v_L^2} \right) [\mathbf{B} \times \text{grad } B], & \mathbf{v}_P &= \frac{m_0}{qB^2 c} \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}. \end{aligned}$$

Член \mathbf{v}_E описывает *электрический дрейф*, аналогичный тому, который был рассмотрен в п. 26.2. Скорость \mathbf{v}_I соответствует так называемому *поперечному инерционному дрейфу*. Он пропорционален массе m_0 частицы и представляет собой как бы результат центробежной силы, действующей на эту частицу при ее движении вдоль искривленной магнитной силовой линии. Слагаемое \mathbf{v}_P называется *поляризационным дрейфом*. Его присутствие связано с тем, что при движении в переменном электрическом поле электрический дрейф частицы изменяется с течением времени. При этом внешнее электрическое поле совершает над частицей некоторую работу, приводящую к ее дополнительному ускорению. Помимо равномерного движения со скоростью \mathbf{v}_E , которое совершалось бы, если бы электрическое поле было постоянным, частица еще «падает» в поле от одной его эквипотенциальной поверхности к другой.

Наконец, член \mathbf{v}_B , пропорциональный $\text{grad } B$ и магнитному моменту M называется *градиентным дрейфом*. Он обусловлен неоднородностью магнитного поля и направлен вдоль поверхностей $B = \text{const}$. Более подробное его изучение показывает, что первое слагаемое в нем описывает влияние неоднородности поля на ларморовское вращение, второе же связано с влиянием кривизны магнитных силовых линий.

Обратим внимание на то, что все слагаемые дрейфа, кроме \mathbf{v}_E , изменяют свой знак при перемене знака заряда. Благодаря этому явление дрейфа используется на практике для разделения противоположных зарядов, например электронов и ионов плазмы.

27.3. Движение частицы в рассматриваемом приближении с механической точки зрения является *почти периодическим*: на периодическое движение — вращение по ларморовой орбите, налагается весьма медленное по сравнению с ним перемещение ведущего центра. Если движение, которому соответствуют обобщенная координата q и обобщенный импульс p , строго периодически, то в аналитической механике доказывается, что выражение $J = \oint p dq$, где интегрирование производится по периоду колебания, является инвариантом движения. При почти периодическом движении, когда параметры системы изменяются адиабатически, т. е. достаточно медленно по сравнению с периодом, причем характерное время этого изменения не соизмеримо с ним (это условие исключает возможный в противном случае резонанс), указанные интегралы остаются постоянными и называются поэтому *адиабатическими инвариантами* рассматриваемой системы.

В п. 26.1 для случая строго периодического движения в статическом магнитном поле было показано, что эквивалентный магнитный момент M тока, обусловленного таким движением, инвариантен. Для движения с учетом дрейфа, описываемого уравнением (27.8), можно доказать, что в используемом приближении по-прежнему $dM/dt = 0$, т. е. что M является адиабатическим инвариантом.

Умножим скалярно (27.8) на вектор \mathbf{v}_c . Полученное соотношение

$$\frac{m_0}{2} \frac{d\mathbf{v}_c^2}{dt} = q(\mathbf{E}\mathbf{v}_c) - M(\mathbf{v}_c \text{ grad } B) \quad (27.11)$$

выражает закон изменения энергии при дрейфе. Полный закон сохранения энергии имеет, как обычно, вид

$$\frac{m_0}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_L)^2 = q(\mathbf{E}, \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_L). \quad (27.12)$$

Вычтем почленно равенство (27.11) из (27.12). Тогда

$$\frac{m_0}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_L^2 + 2\mathbf{v}_L\mathbf{v}_c) = q(\mathbf{E}\mathbf{v}_L) + M(\mathbf{v}_c \text{ grad } B). \quad (27.13)$$

Вторым слагаемым в левой части можно пренебречь, так как в нашем приближении $v_c \ll v_L$. Подставим выражение электрического поля через потенциалы $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и проинтегрируем обе части (27.13) по времени за период ларморова вращения $T_L = 2\pi/|\omega_L|$. Если \mathbf{v}_c , B , \mathbf{E} и \mathbf{v}_c (но не \mathbf{v}_L) слабо зависят от времени, то результатом интегрирования будет

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{2} T_L \frac{d\mathbf{v}_L^2}{dt} \simeq \\ & \simeq T_L M(\mathbf{v}_c \text{ grad } B) - q \int_0^{T_L} (\text{grad } \varphi, \mathbf{v}_L) dt - \frac{q}{c} \int_0^{T_L} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{v}_L \right) dt. \end{aligned} \quad (27.14)$$

Но $\mathbf{v}_L dt = d\mathbf{r}_L$. Поэтому

$$\int_0^{r_L} (\text{grad } \varphi, \mathbf{v}_L) dt = \oint (\text{grad } \varphi, d\mathbf{r}_L) \simeq 0,$$

$$\frac{q}{c} \int_0^{r_L} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{v}_L dt \right) = \frac{q}{c} \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, d\mathbf{r}_L \right) = -\frac{|q|}{c} \int_{\sigma} \frac{\partial B_n}{\partial t} d\sigma \simeq$$

$$\simeq -\pi r_L^2 \frac{|q|}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (27.15)$$

В первом соотношении равенство нулю приближенное, так как частица движется по почти замкнутой, но все же не в точности замкнутой кривой. Во втором же используется теорема Стокса по отношению к ларморовой окружности и охватываемому ею кругу. Знак устанавливается из того соображения, что вращение в заданном магнитном поле по ларморовой окружности противоположно для частиц с разным знаком заряда (для отрицательно заряженных — против, а для положительно заряженных — по часовой стрелке). Учитывается, кроме того, приближительная ортогональность магнитного поля плоскости вращения и малость его изменения на расстояниях порядка r_L .

Подставим (27.15) в (27.14) и учтем, что $M = \frac{|q|}{2c} v_L r_L$ согласно формуле (26.7). Результат принимает вид

$$\frac{m_0}{2} \frac{d(v_L^2)}{dt} = M \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_c, \text{grad}) \right) B.$$

Производная по времени d/dt является здесь «субстанциональной», т. е., как и всюду выше, вычисляется в системе отсчета, сопутствующей частице. Вообще говоря, $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}, \text{grad})$, где \mathbf{v} — полная скорость. Однако в уравнении (27.8), где выполнено усреднение по периодической компоненте \mathbf{v}_L , фактически следует считать, что $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}_c, \text{grad})$. Так как можно записать еще $M = m_0 v_L^2 / 2B$, что тоже указано в (26.7), то предыдущее равенство преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} (MB) = M \frac{dB}{dt}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dM}{dt} = 0$$

в рассматриваемом приближении.

При некоторых конфигурациях магнитного поля имеются и другие адиабатические инварианты, кроме эквивалентного магнитного момента. Так, могут существовать поперечный адиабатический инвариант вида \mathbf{p}_\perp^2 / B , где \mathbf{p}_\perp — импульс движения, ортогонального по отношению к полю, и продольный адиабатический инвариант, определяемый импульсом продольного дрейфа. Первый случай соответствует возможности почти замкнутой траектории попереч-

ного дрейфового движения (рис. 29, а), второй же — периодическому дрейфовому движению между силовыми линиями поля, имеющему характер последовательных отражений от них, как от зеркал (рис. 29, б). Мы не будем здесь изучать эти возможности. В каждой точке траекторий такого типа совершается быстрое лармово вращение, причем эквивалентный магнитный момент сохраняется, как это было показано выше.

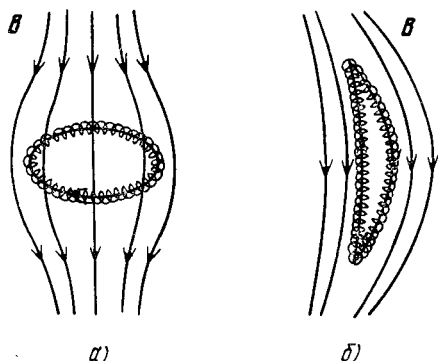


Рис. 29.

§ 28. Система

взаимодействующих частиц

28.1. Пусть имеются две заряженные частицы. Задачу о движении таких частиц естественно рассматривать в системе отсчета, связанной с их центром инерции, который движется равномерно и прямолинейно. Мы ограничимся тем случаем, когда масса одной из частиц настолько больше, чем масса другой, что с достаточной точностью можно считать центр инерции системы совпадающим с большей массой и совместить с ним начало отсчета пространственных координат. В такой системе отсчета взаимодействие частиц описывается законом Кулона. Тогда задача сводится к определению траектории более легкой частицы в заданном кулоновском поле (задача Кеплера). Рассмотрим ее решение в релятивистской форме.

Сила взаимодействия имеет вид $\mathbf{f} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$. Запишем уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r}, \quad \frac{d}{dt} (\gamma c^2) = \frac{k}{r^3} \mathbf{v} \mathbf{r}, \quad (28.1)$$

где, как обычно, $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а $k \equiv q_1 q_2 / m_0$. В случае притяжения $k < 0$, а в случае отталкивания $k > 0$. Правая часть второго из уравнений равна $-\frac{d}{dt} \left(\frac{k}{r} \right)$, поэтому, как и должно быть, это уравнение выражает закон сохранения энергии в виде

$$\gamma c^2 + k/r = W, \quad (28.2)$$

где W — постоянная. Умножим теперь обе части первого уравнения на \mathbf{r} векторно. Так как $\mathbf{r} \times \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} (\gamma [\mathbf{r} \times \mathbf{v}])$, получаем

$$\gamma [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \mathbf{A}, \quad (28.3)$$

где A — постоянная. Это соотношение выражает закон сохранения момента импульса. Из него видно, что движение происходит в некоторой определенной плоскости. Введем цилиндрические координаты с осью z , направленной вдоль вектора $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, нормального плоскости движения; обозначим через r , φ полярные координаты в этой плоскости. В таких координатах соотношение (28.3) принимает форму

$$\gamma r^2 \frac{d\varphi}{dt} = A. \quad (28.4)$$

Далее, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$ и, с другой стороны, легко проверить равенство $\gamma^2 v^2 = c^2 (\gamma^2 - 1)$; отсюда

$$\gamma^2 \dot{r}^2 = c^2 (\gamma^2 - 1) - \gamma^2 r^2 \dot{\varphi}^2 = c^2 (\gamma^2 - 1) - A^2/r^2.$$

Здесь была использована формула (28.4). Оставшуюся в правой части величину γ^2 выразим через переменную r с помощью уравнения (28.2). Тогда

$$\gamma \dot{r} = \left[\frac{1}{c^2} \left(W - \frac{k}{r} \right)^2 - \frac{A^2}{r^2} - c^2 \right]^{1/2}. \quad (28.5)$$

В свою очередь из (28.4) следует $\gamma \dot{\varphi} = A/r^2$, и, так как $d\varphi/dr = \dot{\varphi}/\dot{r}$, получим

$$\begin{aligned} \varphi &= A \int \frac{r^{-2} dr}{\left[\frac{1}{c^2} \left(W - \frac{k}{r} \right)^2 - \frac{A^2}{r^2} - c^2 \right]^{1/2}} + \varphi_0 = \\ &= -A \int \frac{d(r^{-1})}{\left[\left(\frac{W}{c} - \frac{A_0}{r} \right)^2 - \frac{W_0^2}{c^2} - \frac{A^2}{r^2} \right]^{1/2}} + \varphi_0. \end{aligned} \quad (28.6)$$

Здесь введены обозначения $W_0 \equiv c^2$, $A_0 \equiv k/c$. Введенные в (28.2) и (28.3) энергия W и момент импульса A отнесены к единице массы движущейся частицы. Вернемся к равенству (28.5). Разумеется, величина $\gamma \dot{r}$ принимает только вещественные значения. Устремим сначала в правой части r к бесконечности. При $|W| < c^2$ подкоренное выражение отрицательно, поэтому при $|W| < W_0$ уход частицы на бесконечность невозможен. Теперь рассмотрим случай $r \rightarrow 0$. Сохраним под корнем только члены, пропорциональные r^{-2} . В этом случае корень становится мнимым при $A > |k/c| = |A_0|$. Нужно заметить, что $A_0 > 0$ при отталкивании и $A_0 < 0$ при притяжении. Только что выписанное неравенство следует рассматривать как условие, при выполнении которого невозможно падение частицы на центр.

Интегрирование в формуле (28.6) может быть легко проведено. С помощью обозначений

$$(A^2 - A_0^2)^{1/2} \equiv \alpha, \quad \frac{\alpha}{r} + \frac{W A_0}{\alpha} \equiv \xi, \quad b \equiv \left[\left(\frac{W A}{\alpha} \right)^2 - \frac{W_0^2}{c^2} \right]^{1/2}, \quad (28.7)$$

эта формула приводится к виду

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{A}{\alpha} \int \frac{d\xi}{(b^2 - \xi^2)^{1/2}} = \frac{A}{\alpha} \operatorname{arccos} \frac{\xi}{b} = \frac{A}{\alpha} \operatorname{arccos} \frac{1}{b} \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{W A_0}{c \alpha} \right).$$

Отсюда

$$r = p [1 + \varepsilon \cos \zeta (\varphi - \varphi_0)]^{-1}. \quad (28.8)$$

Здесь

$$p \equiv -\frac{c \alpha^2}{A_0 W} = \frac{A_0^2 - A^2}{A_0 W} c, \quad \varepsilon \equiv -\left[1 + \frac{(A^2 - A_0^2)}{A_0^2} \frac{(W^2 - W_0^2)}{W^2} \right]^{1/2},$$

$$\zeta \equiv \frac{\alpha}{A} = \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2} \right)^{1/2}. \quad (28.9)$$

При исследовании уравнения траектории (28.8) необходимо учитывать, что, как видно из (28.2), притяжению соответствуют значения $W < \gamma W_0$, т. е. в крайне релятивистском случае представляют интерес значения $W < W_0$. Напротив, отталкивание имеет место непременно при $W > W_0$. Если бы выполнялось равенство $\zeta = 1$ (что невозможно), то уравнение (28.8) описывало бы эллипс при $|\varepsilon| < 1$, гиперболу при $|\varepsilon| > 1$ и параболу при $|\varepsilon| = 1$. Фактически же движение имеет более сложный характер. Перечислим наиболее важные частные случаи.

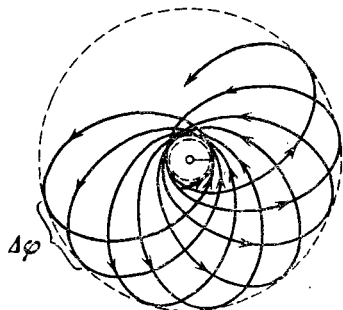


Рис. 30.

а) $W < W_0$, $A > A_0$. Из (28.9) видно, что $|\varepsilon| < 1$. Однако r возвращается к своему исходному значению при изменении угла не на величину $\Delta\varphi = 2\pi$, а на $\Delta\varphi = 2\pi/\zeta = 2\pi (1 - A_0^2/A^2)^{-1/2}$. Такая траектория представляет собой эллипс, прецессирующий вокруг начала отсчета (часто говорят при этом об эффекте смещения перигелия, пользуясь терминологией, заимствованной из астрономии). Она изображена на рис. 30.

б) $W > W_0$, $A > A_0$. Траектория мало отличается от гиперболы.

в) $W < W_0$, $A < |A_0|$. В этом случае $\zeta = i\xi'$, где ξ' — вещественная постоянная. Траектория имеет вид спирали, неограниченно приближающейся к началу координат. В случае притяжения $A_0 < 0$, поэтому $p > 0$. При этом $r = p [1 + \varepsilon \operatorname{ch} \xi' (\varphi + \varphi_0)]$. Знак величины A_0 соответствует, разумеется, тому или иному направлению движения частицы по своей траектории. Эти направления для притяжения и отталкивания взаимно противоположны.

г) $W > W_0$, $A < A_0$. При $A_0 > 0$ (отталкивание) траектория, аналогично случаю (б) имеет характер гиперболы. Если же $A_0 < 0$, то вновь получается спираль, неограниченно приближающаяся к началу координат (т. е. к притягивающей массе).

28.2. Если массы взаимодействующих частиц сравнимы по величине, то релятивистская задача определения их движения становится чрезвычайно сложной. В этом случае необходимо рассматривать систему уравнений вида

$$m_{01} \frac{du_1^r}{d\tau} = q_1 u_{1s} F_{(2)}^{sr}, \quad m_{02} \frac{du_2^r}{d\tau} = q_2 u_{2s} F_{(1)}^{sr}.$$

При этом $F_{(2)}^{sr}$ определяется, с учетом запаздывания, полем второй частицы, действующим на первую, а $F_{(1)}^{sr}$ — также с учетом запаздывания, полем первой частицы, действующим на вторую. С математической точки зрения такие уравнения называются разностно-дифференциальными, и исследование их в интересующем нас случае мало продвинуто.

При упрощающих предположениях, сводящихся в основном к достаточной медленности движения частиц по сравнению со скоростью света, можно получить полезные приближенные результаты, относящиеся к свойствам системы, состоящей из N частиц. Для того чтобы это сделать, удобно сначала рассмотреть запаздывающие потенциалы, создаваемые непрерывным распределением зарядов и токов, которые определяются по формулам (13.11). Прежде всего займемся формулой для скалярного потенциала, а именно:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV', \quad R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (28.10)$$

Предположим, что $\rho(\mathbf{r}', t')$ соответствует «почти точечной» частице, причем скорость этой частицы и высшие производные ее координат по времени t' достаточно медленно изменяются со временем. Тогда можно произвести разложение функции ρ по степеням c^{-1} и сохранить лишь несколько первых членов:

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) = \rho(\mathbf{r}', t) - \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{2c^2} R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(\mathbf{r}', t) + \dots \quad (28.11)$$

Подстановка (28.11) в (28.10), с учетом того, что $\int \rho(\mathbf{r}', t) dV' = q$ не зависит от времени (q — полный заряд частицы), дает

$$4\pi\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) dV'}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho(\mathbf{r}', t) R dV' + \dots \quad (28.12)$$

Если учесть, что $\rho(\mathbf{r}', t) = q_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a(t))$, то (28.12) принимает вид

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|} + \frac{q_a}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)| = \\ &= \frac{q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|} - \frac{q_a}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} \right), \end{aligned} \quad (28.13)$$

где $v_a \equiv d\mathbf{r}_a/dt$. Совершенно аналогичным образом, принимая, что $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, можно получить первый член разложения векторного

потенциала, который совпадает с полученным ранее потенциалом статического магнитного поля:

$$4\pi A(\mathbf{r}, t) = \frac{q_a \mathbf{v}_a}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (28.14)$$

Дальнейшие члены разложения векторного потенциала не учитываются, так как в уравнениях движения слагаемые, содержащие векторный потенциал, имеют дополнительный множитель c^{-1} .

Воспользуемся теперь градиентным преобразованием (2.4) и (2.3), причем положим

$$4\pi\phi = -\frac{q_a}{2c} \frac{(\mathbf{v}_a, \mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (28.15)$$

Новый скалярный потенциал сводится к статическому кулоновскому потенциалу, векторный же потенциал получает добавку, которую нетрудно подсчитать по формуле (Б.18):

$$\text{grad} \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{r} = (\mathbf{v} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Таким образом, если обозначить новые потенциалы так же, как исходные, получим

$$4\pi\phi = \frac{q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad 4\pi A = \frac{q_a}{2c} \left[\frac{\mathbf{v}_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)(\mathbf{v}_a, \mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^3} \right]. \quad (28.16)$$

Из сравнения с формулами (2.8) и (2.9) видно, что в ходе вычисления совершен переход к кулоновской калибровке потенциалов. Равенство $\text{div} \mathbf{A} = 0$, характеризующее эту калибровку, легко проверить непосредственно с помощью (28.16).

Рассмотрим функцию Лагранжа (8.19), описывающую поведение частицы с зарядом q и радиусом-вектором \mathbf{r} в заданном поле, причем будем считать, что это поле определяется потенциалами (28.16) и создается другой частицей. Очевидно, что слагаемые $-q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A}\mathbf{v}$ в функции Лагранжа симметричны относительно перестановки зарядов q и q_a и скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}_a частиц. Эти слагаемые можно интерпретировать как выражение мгновенного дальнего действия между частицами, хотя, как мы видели выше, структура их определяется с помощью приближенного учета запаздывания. Если теперь перейти к рассмотрению системы N частиц, то соответствующая функция Лагранжа может быть определена формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \sum_a m_a c^2 \left(1 - \frac{v_a^2}{c^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{a, b \\ a \neq b}} \frac{q_a q_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \\ & + \frac{1}{16c^2\pi} \sum_{\substack{a, b \\ a \neq b}} q_a q_b \left[\frac{(\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{(\mathbf{v}_a, \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)(\mathbf{v}_b, \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \right]. \quad (28.17) \end{aligned}$$

В используемом приближении

$$-\sum_a m_a c^2 \left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{1/2} \simeq -\sum_a m_a c^2 + \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2. \quad (28.18)$$

Формула (28.17) называется *лагранжианом Дарвина*. Он играет значительную роль в квантовомеханических расчетах спектров многоэлектронных атомов. Квантовомеханический аналог рассмотренного здесь взаимодействия называется *взаимодействием Дарвина — Брейта*.

Исходя из (28.17) и (28.18), найдем формулу для функции Гамильтона системы частиц. Для сокращения записи введем обозначения: $\mathbf{r}_{ab} \equiv \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ и $\mathbf{n}_{ab} \equiv \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$. Запишем

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_a} = m_a \mathbf{v}_a + \frac{1}{16\pi c^2} \sum_b \frac{q_a q_b}{r_{ab}} [\mathbf{v}_b + \mathbf{n}_{ab} (\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})].$$

Скорости можно выразить через импульсы путем последовательных приближений. Если пренебречь вторым слагаемым, то $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$. Подставляя это приближение для скорости во второе слагаемое, получим

$$m_a \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a - \frac{1}{16\pi c^2} \sum_b \frac{q_a q_b}{m_b r_{ab}} [\mathbf{p}_b + \mathbf{n}_{ab} (\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})].$$

Практически важен случай, когда все массы m_a равны одному и тому же значению m_0 (например, массе электрона). Определяя обычным образом гамильтониан, нетрудно с помощью предыдущих формул получить с точностью до членов порядка $(v/c)^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \sum_a (\mathbf{p}_a \mathbf{v}_a) - \mathcal{L} \simeq \\ &\simeq \sum_a \left(m_0 c^2 + \frac{p_a^2}{2m_0} \right) + \frac{1}{8\pi} \sum \frac{q_a q_b}{r_{ab}} \left[1 - \frac{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{n}_{ab} \mathbf{p}_a) (\mathbf{n}_{ab} \mathbf{p}_b)}{2m_0^2 c^2} \right], \end{aligned} \quad (28.19)$$

где $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{ab}$. Именно это выражение представляет интерес для квантовой теории атома. Если система взаимодействующих частиц находится в заданном внешнем поле, то в исходном выражении для функции Лагранжа нужно заменить φ на $\varphi + \varphi'$ и \mathbf{A} — на $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$, если φ' и \mathbf{A}' — потенциалы этого внешнего поля.

28.3. В том случае, когда существует такая система отсчета, в которой все скорости зарядов в точности равны нулю, из формулы (28.19), если принять в качестве нерелятивистского определения энергии разность $U = \mathcal{H}' - \sum m_0 c^2$, получаем потенциальную энергию такой системы зарядов:

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{a, b \\ a \neq b}} \frac{q_a q_b}{r_{ab}}. \quad (28.20)$$

Разумеется, это выражение для энергии можно получить и непосредственно из уравнений электростатики, рассмотренных в § 11. Ввиду важности формулы (28.20) проведем такой вывод. Общее выражение для энергии электростатического поля в вакууме можно преобразовать следующим путем:

$$\begin{aligned} \int E^2 dV &= - \int (\mathbf{E}, \text{grad } \varphi) dV = - \int \text{div} (\varphi \mathbf{E}) dV + \int \varphi \text{div } \mathbf{E} dV = \\ &= - \oint_{\sigma} \varphi E_n d\sigma + \int \rho \varphi dV. \end{aligned}$$

При этом были последовательно использованы соотношение $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, справедливое в электростатике, формула (Б.14₂) векторного анализа, теорема Гаусса — Остроградского и, наконец, уравнение $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ (мы продолжаем пользоваться гауссовой системой единиц и поэтому не делаем в вакууме различия между \mathbf{D} и \mathbf{E}). Будем считать, что все заряды находятся на конечных расстояниях друг от друга, а именно внутри выбранной здесь замкнутой поверхности σ . Можно считать, что при удалении этой поверхности на бесконечность первый из полученных интегралов стремится к нулю, так как подынтегральное выражение пропорционально r^{-3} . Если заряды точечные, то их распределение описывается формулой $\rho(\mathbf{r}) = \sum_a q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$. Поэтому второй интеграл при-

нимает вид $\sum_a q_a \varphi(\mathbf{r}_a)$. Пользуясь выражением $\varphi(\mathbf{r}_a) = \frac{1}{4\pi} \sum_{(a \neq b)} \frac{q_b}{r_{ab}}$

для кулоновского потенциала, создаваемого в точке \mathbf{r}_a всеми прочими зарядами, и учитывая множитель $1/2$, входящий в формулу для энергии поля, получим (28.20) *).

Пусть теперь скорости и ускорения зарядов настолько малы, что электростатическую потенциальную энергию можно считать, несмотря на их движение, достаточно точным выражением их мгновенного дальнего действия. При этом полная энергия системы заряженных частиц имеет вид $W = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U$ и движение каждой частицы описывается уравнением классической механики

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (28.21)$$

*) В действительности $\varphi(\mathbf{r}_a)$ содержит член $b = a$, который бесконечен в случае точечных зарядов, поэтому $\int E^2 dV$ содержит бесконечную собственную энергию зарядов. Конечное значение (28.20) получается в результате «перенормировки», при которой бесконечная собственная энергия просто отбрасывается и сохраняется лишь «взаимная» энергия зарядов.

Умножим обе части этого уравнения скалярно на \mathbf{r}_a . Тогда его можно преобразовать к виду

$$m_a \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a) - m_a \mathbf{v}_a^2 = -\mathbf{r}_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}.$$

Произведем теперь суммирование по индексу a . После подстановки в правую часть для U выражения (28.20) можно записать результат в виде суммы по a и по b при $a \neq b$ членов вида

$$\begin{aligned} q_a q_b \left(\mathbf{r}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{r_{ab}} + \mathbf{r}_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{1}{r_{ab}} \right) = \\ = -q_a q_b \frac{1}{r_{ab}^3} [\mathbf{r}_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) + \mathbf{r}_b (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)] = -\frac{q_a q_b}{r_{ab}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sum_a \mathbf{r}_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = -U$. Этот результат следует и из теоремы Эйлера об однородных функциях. Вводя еще обозначение $Q \equiv \sum_a m_a (\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_a m_a \mathbf{r}_a^2$, получим $2K = -U + dQ/dt$, где K — полная кинетическая энергия. Если частицы, составляющие систему, совершают почти периодические движения, то при усреднении по достаточно большому промежутку времени (как это было и выше, мы обозначаем такое усреднение угловыми скобками) $\langle Q \rangle = 0$. Полученный результат называется *теоремой вириала*:

$$2 \langle K \rangle = - \langle U \rangle. \quad (28.22)$$

При ее выводе применялись лишь следствия классической механики. Формула (28.22) может выполняться лишь при $\langle U \rangle < 0$, т. е. если действие сил притяжения преобладает над действием сил отталкивания. Далее, для постоянной полной энергии замкнутой системы получаем: $W = \langle K \rangle + \langle U \rangle = -\langle K \rangle$. При уменьшении размеров системы в пространстве ее потенциальная энергия убывает по абсолютной величине, кинетическая же энергия увеличивается (на величину, вдвое меньшую).

28.4. Теорема Лармора. Как и в п. 3, будем считать, что влиянием запаздывания и магнитными полями, создаваемыми системой зарядов, можно пренебречь, и поставим задачу о поведении этой системы в заданном внешнем поле. Относительно внешнего электрического поля предположим, что оно обладает цилиндрической симметрией. Введем ось z координат, направленную вдоль оси симметрии. Величины зарядов, входящих в систему, будем считать равными между собой. В наших предположениях потенциал внешнего электрического поля, действующий на заряд a , может быть представлен в виде $\varphi(z_a, r_a)$, где $r_a \equiv \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$. Уравнение движения частицы записывается в виде

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}}_a = -q \text{grad}_a \Phi, \quad (28.23)$$

где

$$\Phi \equiv \sum_b \varphi(z_b, r_b) + \frac{1}{q} U, \quad (28.24)$$

а grad_a обозначает дифференцирование по координатам r_a .

Теорема Лармора, которую мы здесь получим, показывает, как преобразуется движение такой системы заряженных частиц при включении внешнего статического однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z .

Пусть функции $x_a(t)$, $y_a(t)$, $z_a(t)$ описывают решение системы уравнений (28.23). Обозначим через $r'_a(t)$ координаты, описывающие движение частицы после включения магнитного поля. Тогда электрические взаимодействия в присутствии магнитного поля будут определяться функцией Φ' , которую можно получить из формулы (28.24) с помощью подстановки r'_a вместо r_a , т. е. $\Phi'(r'_1, \dots, r'_N) = \Phi(r_1, \dots, r_N)$ (здесь N — число частиц). Уравнения движения с учетом магнитного поля принимают вид

$$m_a \ddot{r}'_a = -\text{grad}'_a \Phi' + \frac{q}{c} \mathbf{v}'_a \times \mathbf{B}. \quad (28.25)$$

Здесь grad'_a — операция дифференцирования по r'_a , а $\mathbf{v}'_a \equiv d\mathbf{r}'_a/dt$. Проекция уравнения (28.25) на ось z имеет в наших условиях точно такой же вид, как проекция на ту же ось уравнения (28.23). Поэтому основной интерес представляет сравнение движений в плоскости (x, y) , описываемых уравнениями (28.23) и (28.25). Аналогично тому, как это было сделано в п. 26.1, введем комплексные переменные: $\xi_a(t) = x_a(t) + iy_a(t)$ и $\zeta'_a(t) = x'_a(t) + iy'_a(t)$. Тогда x - и y -компоненты уравнений (28.25) можно объединить в одно равенство вида

$$\ddot{\zeta}'_a = -\frac{q}{c} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'_a} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y'_a} \right) + 2i\omega'_L \dot{\zeta}'_a. \quad (28.26)$$

Здесь

$$\omega'_L = -qB/(2m_0c). \quad (28.27)$$

Эта величина совпадает с обозначенной так же частотой, введенной в п. 26.3. Нужно обратить внимание на то, что она вдвое меньше, чем частота ω_L , которая соответствует движению заряда, взаимодействующего с одним лишь статическим магнитным полем.

Мы покажем сейчас, что если внешнее магнитное поле достаточно слабое, то приближенное решение уравнений (28.26) выражается в виде

$$\zeta'_a = \xi_a e^{i\omega'_L t}, \quad (28.28)$$

т. е. в вещественной форме

$$x'_a = x_a \cos \omega'_L t - y_a \sin \omega'_L t, \quad y'_a = x_a \sin \omega'_L t + y_a \cos \omega'_L t.$$

Таким образом, исследуемое движение является вращением в плоскости x, y с частотой ω'_L . В этом и заключается формулировка теоремы Лармора.

Для доказательства обратим внимание на тот факт, что функция Φ в соответствии со сделанным выше предположением зависит только от величин r_a и $(r_a - r_b)^2$. Но эти величины не изменяются при указанном вращении. Поэтому, если новые радиусы-векторы определяются с помощью (28.28), то $\Phi'(r'_1, \dots, r'_N) = \Phi(r_1, \dots, r_N)$. Со своей стороны, из формул преобразования координат x_a и y_a следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = e^{-i\omega'_L t} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right).$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) \Phi' = e^{i\omega'_L t} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi.$$

Подставим эту формулу, а также выражения, получаемые из (28.28) при дифференцировании по t , в уравнение (28.26). Оно принимает вид

$$\ddot{\xi}_a = -\frac{q}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y_a} \right) - \omega'^2_L \xi_a.$$

Таким образом, если $\xi_a(t)$ является, как мы предполагаем, решением для (28.23), а член, пропорциональный ω'^2_L , настолько мал, что его можно отбросить, то в рассматриваемом приближении функции (28.28) действительно представляют решение уравнений (28.26).

Для оценки сделанного приближения предположим, что движение под действием одних лишь электрических сил достаточно хорошо описывается как почти периодический процесс с некоторой характерной частотой ω_0 . Тогда решение ξ_a при отсутствии внешнего магнитного поля будет приблизительно пропорционально $e^{i\omega_0 t}$, а предположение о малости ω'_L можно выразить неравенством $|\omega'_L| = \left| \frac{qB}{2m_0 c} \right| \ll \omega_0$. Если, например, считать характерную частоту ω_0 величиной порядка частоты оптических колебаний, а значение отношения q/m_0 взять для электрона, то оказывается, что теорема Лармора применима при очень больших значениях поля B (до сотен миллионов гаусс). Сам процесс включения магнитного поля, если оно ранее отсутствовало, требует специального исследования, так как переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля E , для которого $\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$. Поэтому теорему Лармора естественнее всего рассматривать как утверждение, относящееся к сравнению двух разных систем зарядов, на одну из которых магнитное поле действует постоянно, на другую же нет.

Из (28.28), повторяя вычисления, аналогичные проведенным в п. 26.1, легко видеть, что теорема Лармора может быть сформулирована также следующим образом: если до включения магнитного поля заряженные частицы обладали скоростями \mathbf{v}_a^0 , то после включения этого поля их скорости становятся равными $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a^0 + [\boldsymbol{\omega}'_L \times \mathbf{r}_a]$, где $\boldsymbol{\omega}'_L = \boldsymbol{\omega}'_L \mathbf{B}_1 = -\frac{q}{2m_0c} \mathbf{B}$. На основании соображений п. 26.1 видно также, что система зарядов обладает эквивалентным магнитным моментом, равным

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]. \quad (28.29)$$

При этом часть магнитного момента, индуцированная внешним полем, выражается формулой

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2c} \sum_a q_a [\mathbf{r}_a \times [\boldsymbol{\omega}'_L \times \mathbf{r}_a]].$$

Наблюдаемое значение такого магнитного момента можно получить, произведя усреднение по времени. Если считать, что все $q_a = q$, то среднее значение магнитного момента в направлении магнитного поля, т. е. вдоль оси z , равно

$$\langle \mu_z(\mathbf{B}) \rangle = \frac{q\omega'_L}{2c} \sum_a \langle r_a^2 - z_a^2 \rangle = -\frac{q^2 B}{4m_0 c^2} \sum_a \langle x_a^2 + y_a^2 \rangle.$$

Если распределение зарядов можно считать сферически-симметричным, то $\langle x_a^2 \rangle = \langle y_a^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_a^2 \rangle$. Отсюда

$$\langle \mu_z(\mathbf{B}) \rangle = -\frac{q^2 B}{6m_0 c} \sum_a \langle r_a^2 \rangle. \quad (28.30)$$

Коэффициент при B называется *диамагнитной восприимчивостью* системы зарядов.

Существует и аналог другого важного вывода, полученного в п. 26.1 для свободной заряженной частицы в магнитном поле. А именно, продолжая считать, что система состоит из одинаковых частиц, момент импульса такой системы запишем в виде $\mathbf{M} = m_0 \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]$. Сравнивая его с магнитным моментом (28.29), получаем

$$\boldsymbol{\mu}/\mathbf{M} = q/(2m_0c). \quad (28.31)$$

Таким образом, отношение магнитного момента системы к ее механическому моменту импульса в этом случае является универсальной постоянной.

СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 29. Введение в электродинамику сплошных сред

29.1. В самом начале книги уже было упомянуто (см. § 1), что в теории электромагнитных явлений необходимо различать два подхода к изучению, хотя они неразрывно связаны и не могут существовать в отдельности. Один из них можно назвать макроскопической электродинамикой. Он окончательно сложился во второй половине XIX века и воплощен в уравнениях Максвелла, описывающих электромагнитные свойства материальных сред и электромагнитное поле как материальную среду особого рода. Можно сказать, что исследования Фарадея и Максвелла привели к определению того, что следует называть электромагнитными явлениями с макроскопической точки зрения. Это определение согласуется со всеми требованиями макроскопической физики, в частности — со всеми экспериментами, и не зависит от детальной теории атомистических свойств вещества. Другой подход состоит в объяснении макроскопических свойств материальных сред (в частности — самого электромагнитного поля) с помощью представления об их атомистической структуре и электромагнитных свойствах молекул, атомов, электронов, ядер. Впервые такая микроскопическая теория электромагнетизма была создана Лоренцем на рубеже XIX и XX столетий и с тех пор непрерывно развивается и совершенствуется, по мере того как углубляются знания о частицах вещества и их взаимодействиях. Современная микроскопическая теория должна строиться на основе квантовой физики, а объяснение с ее помощью макроскопических свойств веществ — на основе квантовой статистики.

Часто получают макроскопические величины, связанные уравнениями Максвелла, следующим путем. Сначала рассматривают классическую систему зарядов и токов в вакууме и принимают ее в качестве модели распределения микроскопических источников поля. Порождаемые этими источниками поля также называют микроскопическими. Далее вводится предположение о том, что измерения, производимые макроскопическим наблюдателем, соответствуют усредненным значениям этих микроскопических величин. Усреднение должно проводиться и по пространственным координатам, и по времени. Сама по себе идея такого усреднения вполне

разумна, более того, она неизбежна при всякой попытке обосновать соотношения между непосредственно наблюдаемыми величинами с точки зрения теории строения вещества. Однако при этом, вообще говоря, следует руководствоваться современной теорией, а не классической физикой. Кроме того, сама операция усреднения должна производиться на основе достаточно четкого применения методов теории вероятностей. Приводимый обычно в учебниках классической электродинамики «вывод» макроскопических уравнений Максвелла для материальных сред не удовлетворяет этим требованиям. По этой причине в дальнейшем изложении мы ограничиваем себя феноменологической стороной электродинамики материальных сред и не пытаемся «обосновывать» ее методами классической физики. Во избежание недоразумений, нужно подчеркнуть, что мы совсем не хотим сказать, будто бы в современной физике применение упомянутой классической модели всегда лишено смысла. Однако вопрос о пределах ее применимости всегда должен решаться по отношению к достаточно конкретным задачам, а не к «электродинамике вообще». Интересующийся классическим методом усреднения читатель найдет достаточно подробное его изложение, например, в книге Дж. Джексона «Классическая электродинамика» («Мир», 1965 г.).

29.2. Перечислим те фундаментальные соотношения, которые были сформулированы в главе 1 и которые постоянно должен помнить читатель, приступающий к изучению нерелятивистской электродинамики сплошных сред. Прежде всего это, разумеется, уравнения Максвелла, которые в форме, допускающей использование либо Международной системы единиц (СИ), либо гауссовой системы единиц, имеют вид (М.1) — (М.4). Эти уравнения должны быть дополнены определениями электрической поляризации (1.11) и намагниченности (1.17). С их помощью, как это было показано в § 1, систему уравнений Максвелла можно записать также в виде (М.1'), (М.2), (М.3) и (М.4'). Такая форма уравнений будет встречаться в этой и последующих главах.

При исследовании взаимодействий зарядов и распространения излучения в вакууме, проведенном в главах 4—6, удобнее всего, как это и делалось, пользоваться гауссовой системой единиц, когда электрическая постоянная ϵ_0 и магнитная постоянная μ_0 безразмерны и считаются равными единице. Напротив, свойства материальных сред, несомненно, проявляются более отчетливо, если применять Международную систему единиц. Различие размерностей напряженностей и индукций в этой системе единиц отражает различие физического смысла этих величин, не существенное в случае вакуума, но не учитываемое в гауссовой системе также и в применении к материальным средам, когда его следует постоянно иметь в виду. Если применяется Международная система единиц, то, как было показано в § 1, коэффициент α в уравнениях Макс-

велла нужно считать безразмерным и положить равным единице. Величины ϵ_0 и μ_0 приобретают определенную размерность, а их численные значения должны быть связаны соотношением (1.25), где c — скорость света в вакууме, которую во всех практических применениях можно считать равной $3 \cdot 10^8$ м/с. Величина заряда измеряется в системе СИ в единицах, не зависящих от механических основных единиц. Такая единица заряда называется *кулоном*.

Здесь мы не будем излагать определений единиц измерения основных электрических и магнитных величин и соотношений между этими единицами в различных системах. Остановимся лишь на определении численных значений коэффициентов ϵ_0 и μ_0 в системе СИ, так как многие формулы дальнейших параграфов содержат эти величины. Ясно, что если известно значение одной из них, то соотношение (1.25) определяет и другую. Мы будем исходить из определения магнитной проницаемости μ_0 . Для этой цели можно воспользоваться уравнением (12.10), выражающим силу взаимодействия между токами, учитывая, что фактически в Международной системе единиц за основу принимается единица силы тока — *ампер* (ср. § 1). В этом уравнении следует положить для нашей цели $\alpha = 1$ и $\mu = \mu_0$. Если входящие в него механические величины (силу и расстояние) измерять в единицах СГС и положить $\mu_0 = 4\pi$ (продолжая считать $\alpha = 1$), то единица силы тока может быть выражена через механические единицы. В этом случае она получает размерность $M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$ и называется *электромагнитной единицей силы тока* или *абсолютным ампером*. Величина же ампера в системе СИ по определению полагается равной 0,1 абсолютного ампера и, как упоминалось выше, принимается за основную единицу этой системы наряду с механическими. В системе СГС имеет место соотношение 1 дина = 1 (абс. ампер)². Для перевода в систему СИ нужно единицу силы системы СГС — дину выразить через единицу силы системы СИ — ньютон, использовать только что упомянутое соотношение между абсолютным ампером и ампером СИ и учесть коэффициент $\mu_0/4\pi$ в уравнении (12.10). Подставляя также равенство 1 А = 1 Кл/с, получим: 10^{-5} Н = 10^{-5} кг·м/с² = $= \mu_0/4\pi 10^2$ Кл²/с², откуда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м/Кл}^2 \simeq 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м/Кл}^2.$$

Заметим, что единица, равная 1 кг·м²/Кл², в системе СИ называется 1 генри (Г). Таким образом, магнитная проницаемость измеряется в единицах 1 Г/м.

Из (1.25) получаем

$$\epsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{с}^2/\text{кг} \cdot \text{м}^3.$$

Единица 1 Кл²·с²/кг·м³ в системе СИ называется 1 фарада (Ф), т. е. диэлектрическая проницаемость измеряется в единицах 1 Ф/м.

Если среда линейна, т. е. выполняются соотношения (1.27), то часто удобно характеризовать ее свойства с помощью безразмерных относительных проницаемостей $\epsilon' \equiv \epsilon/\epsilon_0$ и $\mu' \equiv \mu/\mu_0$, которые, согласно (1.28'), связаны между собой при постоянных ϵ и μ следующим образом:

$$\sqrt{\epsilon'\mu'} = c/v.$$

Здесь v — скорость распространения электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

§ 30. Свойства идеальных проводников в электростатическом поле

30.1. Исходя из уравнения непрерывности электрического заряда в форме (1.31), мы видели в § 1, что все материальные среды могут быть разделены на два класса — проводников и диэлектриков. Такое разделение является приближенным, однако оно во многих случаях достаточно четко соблюдается на практике. Основным свойством проводников следует считать возможность свободного перемещения зарядов по их объему. В результате, как уже упоминалось в § 1, при отсутствии переменного электромагнитного поля устанавливается состояние, при котором внутри проводников $\rho = 0$ и $\mathbf{E} = 0$. Если проводник занимает ограниченный объем и окружен диэлектрической средой, то на его поверхности может существовать распределение заряда с поверхностной плотностью λ . В настоящем параграфе мы, как правило, будем рассматривать свойства системы N таких ограниченных проводников. При этом будем считать, что диэлектрик, в который погружены эти проводники, является неограниченным, однородным и изотропным, т. е. что для него выполняется соотношение вида (1.27), причем $\epsilon = \text{const}$. Предположим, кроме того, что объемный заряд в этом диэлектрике отсутствует, так что в каждой его точке $\text{div } \mathbf{D} = 0$. Это условие почти всегда выполняется в практически важных случаях, и оно несколько упрощает вывод тех результатов, которые мы намерены здесь получить.

Рассмотрим электростатическое поле в непосредственной близости от поверхности σ проводника. Для этого воспользуемся граничными условиями в виде уравнения (4.11) и первого из уравнений (4.14). Пусть среда I — проводник, а среда II — примыкающий к его поверхности диэлектрик. Тогда, как было уже упомянуто, можно считать, что $\mathbf{E}_I = 0$ и $\mathbf{D}_I = 0$. Пользуясь формулой (11.2), выражающей электростатическое поле \mathbf{E} через потенциал φ , из (4.11) получим (индекс II не будем выписывать)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{\sigma} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\sigma} = \text{const.} \quad (30.1)$$

Другими словами, поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью электростатического поля. Силовые линии этого поля ортогональны к этой поверхности в каждой ее точке.

С другой стороны, из граничного условия (4.14) следует

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\sigma} = -\frac{\lambda}{\epsilon},$$

откуда

$$q = -\epsilon \oint_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \oint_{\sigma} D_n d\sigma, \quad (30.2)$$

где q — полный заряд, находящийся на поверхности проводника *).

Полученные уравнения составляют основу электростатики проводников и с их помощью можно вывести целый ряд дальнейших соотношений.

Обозначим через σ_i поверхность i -го проводника ($i = 1, 2, \dots$), и через σ — некоторую замкнутую поверхность, проведенную так, что все рассматриваемые

проводники содержатся внутри нее (рис. 31). Возьмем теперь два различных распределения поверхностных зарядов на проводниках σ_i , так что в одном случае это распределение представляется функциями $\lambda_i(\mathbf{r})$, а в другом — $\lambda'_i(\mathbf{r})$. При этом предположим, что ни форма, ни взаимное расположение проводников не изменяются. В первом случае заряды создают в пространстве, окружающем проводники, электрическое поле с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$, во втором же — поле с некоторым другим потенциалом $\varphi'(\mathbf{r})$. Воспользуемся формулой Грина (Б.28)

в применении к объему V , внешнему по отношению к проводникам и заключенному внутри поверхности σ , полагая в этой формуле $\psi = \varphi'$. Тогда $\Delta\varphi = \Delta\varphi' = 0$, так что левая часть формулы Грина обращается в нуль, поверхностный же интеграл, входящий в правую часть, будет равен сумме интегралов по всем поверхностям проводников и по поверхности σ . Что касается этой последней, то при устремлении ее в бесконечность соответствующий поверхностный интеграл стремится к нулю (подынтегральное выражение пропорционально r^{-3}); предположим, что этот предельный переход

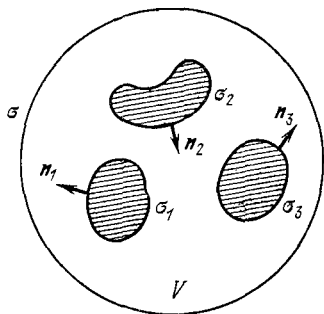


Рис. 31.

*) Здесь считается положительным направление нормали из проводника в диэлектрик.

выполнен. Тогда формула Грина приводит к соотношению

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma_i = \sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_i.$$

Но при любом электростатическом поле, как мы видели выше, $\varphi|_{\sigma_i} = \varphi_i$, $\varphi'|_{\sigma_i} = \varphi'_i$, где φ_i и φ'_i постоянны на поверхности i -го проводника. Вынося эти постоянные за знак интеграла, мы получим в каждом члене суммы выражения вида (30.2) для полного заряда q_i на поверхности соответствующего проводника. Итак,

$$\sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^N q'_i \varphi_i. \quad (30.3)$$

Эта формула называется *соотношением взаимности Грина*. Она имеет большое практическое значение при решении электростатических задач, как можно видеть из следующих простейших примеров.

Рассмотрим частный случай формулы Грина (30.3), когда $N = 2$, $q_1 = q'_2 = q$ и $q'_1 = q_2 = 0$. Тогда из нее следует, что $\varphi'_1 = \varphi_2$. Другими словами, при нанесении заряда q на поверхность проводника 2, потенциал незаряженного проводника 1 будет таким же, что и потенциал незаряженного проводника 2 при нанесении заряда q на поверхность проводника 1.

Добавим к обеим частям равенства (30.3) сумму $\sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$.

Тогда получим

$$\sum_{i=1}^N q_i (\varphi_i + \varphi'_i) = \sum_{i=1}^N (q_i + q'_i) \varphi_i.$$

Это означает, что если зарядам q_i соответствуют потенциалы φ_i , а зарядам q'_i — потенциалы φ'_i , то заряды $q_i + q'_i$ создают потенциалы $\varphi_i + \varphi'_i$. Таким образом, имеет место *принцип суперпозиции*, выражающий линейную зависимость потенциалов от создающих их зарядов.

Предположим теперь, что в формуле (30.3) подвергается изменению только один из зарядов, так что $q'_k = q_k + \delta_{qk}$ и $q'_i = q_i$ при $i \neq k$. Обозначим $\delta\varphi_i \equiv \varphi'_i - \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). После подстановки этих обозначений равенство (30.3) принимает вид

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^N s_{ki} q_i, \quad (30.4)$$

где введено определение $s_{ki} \equiv \delta\varphi_i / \delta q_k$. Величины s_{ki} называются *потенциальными коэффициентами*. Из (30.4) следует, что величина s_{ki} равна потенциалу, который устанавливается на k -м про-

воднике, если поместить единичный заряд на i -й проводник, причем на всех прочих проводниках заряды отсутствуют. Вывод, полученный выше из соотношения взаимности Грина для случая двух проводников, показывает, что $s_{ki} = s_{ik}$. Можно доказать это свойство симметричности также и непосредственно с помощью (30.3), если записать это равенство в форме $\sum_i q_i \delta \varphi_i = \sum_i \delta q_i \varphi_i$. Коэффициенты s_{ik} всегда положительны, так как помещение положительного заряда на проводник повышает потенциалы остальных проводников.

Систему уравнений (30.4) можно разрешить относительно зарядов q_k :

$$q_k = \sum_{i=1}^N c_{ki} \varphi_i. \quad (30.5)$$

Здесь c_{ki} — элементы матрицы, обратной по отношению к матрице, составленной из потенциальных коэффициентов. Числа c_{ki} называются *коэффициентами емкости* рассматриваемых проводников. При этом $c_{ki} = c_{ik}$. Диагональные элементы c_{kk} называются собственными емкостями, а c_{ik} при $i \neq k$ — взаимными емкостями (или индукционными коэффициентами).

При соединении двух проводников так, что у них образуется общая поверхность (непосредственным сближением или при помощи проводящей проволоки), на этой поверхности устанавливается новое общее для этих проводников значение потенциала. В частности, большую роль играет понятие заземления, когда проводник соединяется с Землей, а потенциал Земли считается равным нулю. Потенциал заземленного проводника ввиду огромной емкости Земли также практически равен нулю. Пользуясь этим понятием, можно сказать, что собственная емкость c_{kk} равна отношению заряда к потенциалу на k -м проводнике, когда все остальные проводники заземлены.

30.2. Вычислим теперь *энергию* электростатического поля, создаваемого поверхностными зарядами проводников. Для этого нужно воспользоваться формулами § 3 и, в частности, плотностью энергии вида (3.5). С помощью (Б.14₂) и (11.2) получим

$$\begin{aligned} 2W &= \int_V \mathbf{D} \mathbf{E} dV = - \int_V (\mathbf{D}, \text{grad } \varphi) dV = \\ &= - \int_V \text{div} (\varphi \mathbf{D}) dV + \int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} dV. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Здесь объем V определяется так же, как при выводе формулы (30.3) (рис. 31). При этом можно считать, что интегрирование распространяется на всю область внутри поверхности σ , так как значение подынтегрального выражения внутри проводников обра-

щается в нуль. Применим теперь теорему Остроградского — Гаусса к первому слагаемому в правой части предыдущего уравнения:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_{\sigma} \varphi D_n d\sigma - \sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} \varphi D_{n_i} d\sigma_i. \quad (30.7)$$

Интеграл по внешней поверхности σ обращается в нуль при удалении этой поверхности на бесконечность. В остающихся интегралах $\varphi = \varphi_i = \text{const}$ на поверхности каждого из проводников и $D_{n_i} = \lambda_i$ на основании граничного условия (нужно обратить внимание на то, что в соответствии с соглашением, принятым при записи теоремы Остроградского — Гаусса, положительным направлением нормали считается внешнее по отношению к области интегрирования, т. е. обратное сравнительно с записью граничных условий). Считая в виде исключения, что в диэлектрике существует объемный заряд, так что $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (30.8)$$

С помощью (30.4) и (30.5), если вновь положить $\rho = 0$, можно видеть, что энергия системы заряженных проводников выражается также в виде билинейной формы от зарядов или от потенциалов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N s_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N c_{ik} \varphi_i \varphi_k. \quad (30.9)$$

В уравнении (30.8) энергия приобретает вид, характерный для дальнего действия между зарядами, помещенными на проводниках. В данном случае статического поля, когда запаздывание не играет роли, само поле оказывается исключенным из выражений для величин, характеризующих взаимодействие. Отметим также формальную аналогию между первым слагаемым в (30.8) и выражением (28.20) для энергии взаимодействия точечных зарядов. В этом последнем случае, однако, энергия действия заряда самого на себя бесконечна и должна быть отброшена, в то время как в (30.8) учитывать и действия каждого из проводников самого на себя, в данном случае конечные.

Докажем теперь *теорему Томсона*: поверхностное распределение зарядов на проводниках обладает тем свойством, что энергия создаваемого ими электростатического поля минимальна. Минимальность энергии имеет при этом место по отношению к таким виртуальным изменениям поверхностной плотности заряда, при которой полные заряды, находящиеся на поверхности каждого из проводников, остаются неизменными.

Пусть \mathbf{D} — поле индукции, фактически установившееся в диэлектрике, который заполняет пространство, окружающее проводники, а \mathbf{D}' — поле, являющееся результатом вариации поверхностных распределений. На основании (30.2) условие, при котором совершается эта вариация, можно записать в виде

$$\oint_{\sigma_i} (D'_{n_i} - D_{n_i}) d\sigma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (30.10)$$

Учитывая, что $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$, получим для разности энергий следующее тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} 2(W' - W) &= \int (\mathbf{E}' \mathbf{D}' - \mathbf{E} \mathbf{D}) dV = \\ &= \int (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV - 2 \int \mathbf{E} \mathbf{D} dV + \int \mathbf{E} \mathbf{D}' dV + \int \mathbf{E}' \mathbf{D} dV = \\ &= \int (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV + 2 \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Последнее слагаемое можно рассмотреть тем же путем, как это было сделано выше при вычислении энергии. Именно, подставим $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, воспользуемся формулой (Б.14₂), а также теоремой Остроградского — Гаусса. Тогда, учитывая, что интеграл по внешней поверхности σ , как и ранее, можно считать равным нулю, имеем

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV &= \sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} \varphi (D'_{n_i} - D_{n_i}) d\sigma_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint (D'_{n_i} - D_{n_i}) d\sigma_i = 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$W' - W = \frac{\epsilon}{2} \int (\mathbf{E}' - \mathbf{E})^2 dV > 0 \quad (30.12)$$

при $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E}$.

Решение электростатической задачи при заданных граничных условиях единственно (см. §§ 4 и 11). Поэтому теореме Томсона следует рассматривать как установление свойства экстремальности этого единственного решения по отношению к рассматриваемым вариациям источников.

Легко показать, что как потенциал φ , так и его производные могут достигать максимума или минимума только на поверхностях проводников. Действительно, предположим обратное, а именно — пусть в некоторой точке внутри окружающего проводники диэлектрика потенциал φ имеет минимум (для случая максимума ниже следующее рассуждение видоизменяется очевидным образом). Для этого нужно, чтобы в этой точке все три частных производные

$\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ были положительны. Но это противоречит тому, что в диэлектрике, по предположению, выполняется уравнение Пуассона $\Delta\varphi = 0$. Отсюда следует, что ни в одной точке электростатического поля точечный заряд не может находиться в состоянии устойчивого равновесия, если только на него не действуют силы неэлектрического происхождения. Это утверждение представляет собой частный случай *теоремы Ирншоу*.

Аналогично теореме Томсона доказывается, что введение незаряженного проводника в поле заданной системы заряженных проводников уменьшает полную энергию этого поля. Обозначим через σ_0 поверхность незаряженного проводника, а через V_0 — объем, заключенный внутри этой поверхности. Так же, как и выше, пусть V — объем, внешний по отношению к N заряженным проводникам, находящимся внутри некоторой поверхности σ . Если ввести еще один, незаряженный, проводник также внутрь поверхности σ , то вне всех проводников объем будет равен $V_1 = V - V_0$. Разность энергий поля W до внесения незаряженного проводника и W' — после его внесения определится равенством

$$2(W - W') = \int_V \mathbf{E}\mathbf{D} dV - \int_{V_1} \mathbf{E}'\mathbf{D}' dV = \int_{V_0} \mathbf{E}\mathbf{D} dV + \int_{V_1} (\mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{E}'\mathbf{D}') dV. \quad (30.13)$$

Второе слагаемое преобразуется точно так же, как в (30.11). Оно вновь равно (30.12), где интеграл следует брать по объему V_1 , так как полный заряд на каждом из заряженных проводников не изменяется. Но и первое слагаемое в (30.13) неотрицательно. Отсюда $W > W'$, что и следовало доказать.

Так как энергия реально установившегося поля по теореме Томсона должна быть минимальной, то из полученного результата видно, что незаряженный проводник должен как бы втягиваться в область, где расположены заряженные проводники. Действующие при этом на него силы объясняются тем обстоятельством, что поле, в котором он находится, вызывает его поляризацию: положительные и отрицательные заряды перераспределяются на его поверхности так, что, оставаясь в целом нейтральным, проводник приобретает свойства, аналогичные системе диполей. В одних точках его поверхности образуется избыток положительного заряда, в других же — отрицательного.

Предположим, что незаряженный проводник находится настолько далеко от зарядов, что создаваемое ими поле \mathbf{E} можно в окрестности проводника считать однородным. В результате разделения зарядов на его поверхности проводник можно заменить некоторым эквивалентным диполем с дипольным моментом \mathbf{p} . Потенциальная энергия диполя U определяется формулой (11.21). Дипольный момент \mathbf{p} линейно зависит от напряженности \mathbf{E} , а именно $p_i =$

$= V\alpha_{ik}E_k$ *). Здесь V — объем проводника, а коэффициенты α_{ik} образуют так называемый *тензор поляризуемости* **). При этом

$$U = -\frac{1}{2} V\alpha_{ik}E^iE^k. \quad (30.14)$$

30.3. Общей формулой, которая определяет силы, действующие на поверхность проводника, является (3.18), причем в данном случае тензор натяжений Максвелла следует использовать в виде (3.9). Нужно учесть, что напряженность у поверхности проводника имеет только нормальную составляющую. Поэтому $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$ и поверхностная плотность сил принимает вид

$$\varphi_i = T_{ik}^{(e)}n^k = \varepsilon E_i E_k n^k - \frac{\varepsilon E^2}{2} n^i = \frac{\varepsilon E^2}{2} n^i. \quad (30.15)$$

Здесь положительная нормаль направлена из проводника в окружающий его диэлектрик. Отсюда видно, что силы (30.15) являются растягивающими, т. е. стремятся увеличить объем проводника, на поверхность которого они действуют. Полная сила определяется интегралом $\int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathbf{n} d\sigma$. Явление изменения объема тела (в данном случае проводника) под действием внешнего поля называется *электрострикцией*; мы еще вернемся к его рассмотрению в следующем параграфе.

Для вычисления сил, действующих на проводники, иногда удобно пользоваться свойством минимальности энергии, определяемой формулами (30.9), и приравнивать работу сил вариации энергии при виртуальных перемещениях проводников, как это обычно делается в механике. Предположим, что расположение проводников может быть охарактеризовано с помощью задания некоторого числа обобщенных координат ξ_α , соответствующих имеющимся механическим степеням свободы. Представляют интерес два вида виртуальных перемещений системы, соответствующие двум способам записи энергии, указанным в (30.9): либо при условии неизменности заряда на каждом из проводников, либо при условии неизменности потенциала на его поверхности. Обозначим через F_α обобщенную силу, соответствующую виртуальному изменению координаты ξ_α . Тогда при выполнении первого из вышеупомянутых условий для произведенной работы получим

$$\delta A = -(\delta W)_{\text{всех } q_i = \text{const}} = -\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha} \right)_{q_i} \delta \xi_\alpha.$$

С другой стороны, как обычно, $\delta A = \sum_{\alpha} F_\alpha \delta \xi_\alpha$. Сравнивая эти два выражения и пользуясь первым из равенств (30.9), приходим к

*) Ранее греческие индексы использовались для компонент трехмерных тензоров. Здесь и в дальнейших главах будут встречаться только такие тензоры. поэтому удобнее обозначать их индексы латинскими буквами.

**) Они зависят от формы проводника.

Выводу:

$$F_{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{\partial s_{ik}}{\partial \xi_{\alpha}} q_i q_k. \quad (30.16)$$

Если теперь проводники смещаются так, что заряды, находящиеся на них, не изменяются, то потенциалы не могут оставаться прежними. Поэтому, если нужно обеспечить постоянство потенциалов при виртуальном перемещении в отличие от предположений, приводящих к предыдущей формуле, то придется изменять количества зарядов, находящиеся на каждом из проводников. Можно представить себе, что во время процесса их перемещения проводники соединяются с каким-то резервуаром зарядов, с помощью которого можно ввести недостающие заряды и удалить излишние. При перемещении этих компенсирующих зарядов между проводниками и резервуаром будет совершаться дополнительная работа $\delta A'$, которую необходимо учитывать в общем балансе энергии, так что $\delta A = \delta A' - \delta W$. Если по условию все потенциалы постоянны, то из (30.5) следует $dq_i = \sum_k \varphi_k dc_{ik} = \sum_k \varphi_k \sum_{\alpha} \frac{\partial c_{ik}}{\partial \xi_{\alpha}} d\xi_{\alpha}$.

Пусть резервуар зарядов имеет потенциал $\varphi_0 = 0$. Тогда работа по перемещению заряда dq_i на i -й проводник из резервуара (которая в электростатическом поле не зависит от пути этого перемещения)

$$A'_i = - (dq_i) \int E ds = (dq_i) \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} d\varphi = \varphi_i (dq_i).$$

Знак минус выбран в связи с тем, что здесь вычисляется работа против сил поля, создаваемого источниками. Таким образом, полная работа по зарядке проводников в процессе их виртуального перемещения при условии постоянства потенциалов равна

$$\delta A' = \sum_{i=1}^N \varphi_i dq_i = \sum_{i, k=1}^N \varphi_i \varphi_k \sum_{\alpha} \frac{\partial c_{ik}}{\partial \xi_{\alpha}} d\xi_{\alpha}.$$

Как видно из второго равенства (30.9),

$$\sum_{i, k=1}^N \varphi_i \varphi_k \frac{\partial c_{ik}}{\partial \xi_{\alpha}} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_{\alpha}} \right)_{\text{все } \varphi_i = \text{const}}.$$

Поэтому $\delta A = \delta A' - \delta W = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \varphi_i d\xi_{\alpha}$, т. е.

$$F_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N \frac{\partial c_{ik}}{\partial \xi_{\alpha}} \varphi_i \varphi_k. \quad (30.17)$$

Следует обратить внимание на то, что если бы работа $\delta A'$ не была учтена, то выражение для F_{α} получилось бы с обратным знаком.

§ 31. Свойства диэлектриков в электростатическом поле. Изотропные диэлектрики

31.1. В предыдущем параграфе мы видели, что внутренний объем идеального проводника в электростатике не содержит ни зарядов, ни поля. В противоположность этому диэлектрики характеризуются тем, что электростатическое поле пронизывает весь их объем, а значит, может оказывать влияние на их физическую структуру. Так, например, даже если материальные частицы, из которых состоит диэлектрик, остаются в целом нейтральными, при действии на них электрического поля в каждой из них может возникнуть дипольный электрический момент. Это проявляется как поляризация среды, причем становится необходимым различать понятия электрической индукции и электрической напряженности (как было уже указано в § 1).

Для лучшего уяснения понятий индукции и поляризации полезно рассмотреть простой эксперимент. Фактически он впервые был проведен Фарадеем. Возьмем два проводника, имеющих поверхностные заряды. Для определенности предположим, что они имеют форму плоских пластин, расположенных параллельно одна другой (плоский конденсатор). Если между пластинами находится вакуум, то заряды будут создавать внутри конденсатора поле E_0 , которое непосредственно вблизи поверхностей пластин может быть определено из граничного условия (4.14): $E_{0n} = \lambda/\epsilon_0$, аналогично тому, как это было сделано в общем случае в начале предыдущего параграфа. При этом, если потенциал одной из пластин равен φ_1^0 , а другой $\varphi_2^0 > \varphi_1^0$, то из $E_0 = -\text{grad } \varphi$ легко видеть, что $E_0 = (\varphi_2^0 - \varphi_1^0)/d$, где d — расстояние между пластинами. Введем теперь в пространство между пластинами слой диэлектрика. Опыт показывает, что потенциал на каждой из пластин при этом изменится, причем изменится и напряженность электрического поля внутри конденсатора. Это — результат возникновения в диэлектрике добавочного внутреннего поля. Новая напряженность электрического поля E определится из условия $E = -\text{grad } \varphi$, где φ — новый потенциал. В частности, если диэлектрик однородный и изотропный, то $E = (\varphi_2 - \varphi_1)/d$. Если внутрь диэлектрика может быть помещен сторонний заряд, то именно такая сила действует на единицу этого заряда. Напряженность E уже не удовлетворяет условию $E_n = \lambda/\epsilon_0$, однако можно определить вектор P , зависящий от структуры диэлектрика, такой, что $E_n = (\lambda - P_n)/\epsilon_0$. Слагаемое P_n объясняется появлением на границе диэлектрического слоя поверхностных «связанных» зарядов, экранирующих «истинные» заряды, находящиеся на обкладках конденсатора.

Предположим теперь, что пластины конденсатора соединены с источником электрического заряда (электрическим элементом), поддерживающим на них одинаковую разность потенциалов как

в отсутствие диэлектрического слоя, так и при его наличии. В этом случае напряженность электрического поля внутри конденсатора останется неизменной: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, но количество заряда на обкладках конденсатора при внесении диэлектрика изменится; плотность его вместо λ станет равной λ' . При этом выполняется соотношение:

$$E_{0n} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{N} - P'_n) = \frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

Все такие эффекты и были учтены с самого начала при формулировке уравнения Максвелла для вектора электрической индукции, как было сделано в § 1.

Перейдем к общему исследованию уравнения (М.1). Подставив $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, мы приведем его к виду

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'), \quad (31.1)$$

где величина $\rho' = -\text{div } \mathbf{P}$ иногда называется объемной плотностью связанных зарядов. Слагаемое же $(\mathbf{P}^I - \mathbf{P}^{II}) \mathbf{n}$ в равенстве (4.13) можно назвать поверхностной плотностью связанных зарядов на границе двух диэлектриков. Решение уравнения Пуассона (31.1) с учетом потенциала, который могут создавать связанные заряды, появляющиеся на границах раздела различных сред, может быть сразу же выписано по аналогии с формулами (11.4) и (11.10) в форме

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho - \text{div}' \mathbf{P}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda + (\mathbf{P}^I - \mathbf{P}^{II}) \mathbf{n}}{R} d\sigma'. \quad (31.2)$$

Здесь, как обычно, $R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и штрихом отмечается дифференцирование по координатам источника. Применим теперь в первом слагаемом формулу (Б.14₂):

$$\frac{1}{R} \text{div}' \mathbf{P} = \text{div}' \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \left(\text{grad}' \frac{1}{R}, \mathbf{P} \right),$$

а затем — теорему Остроградского — Гаусса. С помощью последней получим

$$\int \text{div}' \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dV' = \oint_{\sigma} \frac{P_n}{R} d\sigma' + \sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} \frac{P_n}{R} d\sigma'_i.$$

Здесь первый из интегралов взят по некоторой достаточно удаленной замкнутой поверхности, охватывающей интересующий нас объем. Если объем, занятый диэлектриком, ограничен, то эту поверхность всегда можно провести так, чтобы поляризация в каждой ее точке равнялась нулю. Что же касается второго слагаемого — суммы по границам раздела, отделяющим одну от другой части диэлек-

трика с различными свойствами, то нужно учитывать, что каждая такая граница входит в эту сумму дважды (рис. 32) с противоположными направлениями нормалей (например, при интегрировании «со стороны объема V_1 » и «со стороны объема V_2 »). Совершенно аналогично можно разбить второй член в поверхностном интеграле, входящем в (31.2) (направления нормалей в нем противоположны тем, которые выбираются при использовании теоремы Остроградского — Гаусса). В результате можно видеть, что получающиеся интегралы по внутренним поверхностям разрыва все взаимно сокращаются и остается лишь вклад нормальной составляющей поляризации внешней поверхности диэлектрика. Что же касается объемного потенциала (который только и будет интересовать нас здесь), то он записывается в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\mathbf{P}, \text{grad}' \frac{1}{R} \right) dV'. \quad (31.3)$$

Сравнение с формулой (11.17) показывает, что второе слагаемое имеет вид потенциала, создаваемого объемным распределением диполей с плотностью электрического момента \mathbf{P} (напомним, что $\text{grad}' \frac{1}{R} = -\text{grad} \frac{1}{R}$).

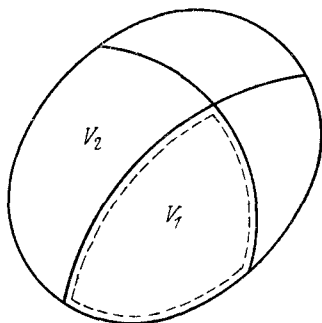


Рис. 32.

Ясно, что создание объемного дипольного момента в диэлектрике требует затрат энергии. При их вычислении необходимо учитывать термодинамические условия, в которых находится диэлектрическая среда. В зависимости от этих условий энергия, необходимая для возникновения определенной поляризации, может быть различной.

31.2. Изучение закона сохранения энергии, проведенное в § 3 и основанное непосредственно на уравнениях Максвелла в их общей форме, показало, что изменение энергии поля в среде, независимо от структуры этой последней (т. е. без каких-либо конкретных предположений относительно связи между \mathbf{D} и \mathbf{E}) выражается членом $\mathbf{E} d\mathbf{D}$. Поэтому первое начало термодинамики с учетом действия на среду электрического поля должно быть сформулировано в следующем виде:

$$dU = dQ + \xi dx + \mathbf{E} d\mathbf{D}. \quad (31.4)$$

Здесь все величины отнесены к единице объема, U — внутренняя энергия, dQ — количество теплоты, x — плотность массы, ξ — химический потенциал. Обозначение d выражает тот основной факт термодинамики, что количество теплоты не является полным дифференциалом, но зависит от того процесса, при котором изменяется

состояние среды. Согласно второму началу термодинамики

$$dQ = T dS, \quad (31.5)$$

где T — температура и S — энтропия, которая, как и внутренняя энергия U , является функцией состояния, т. е. однозначно определяется параметрами, необходимыми для определения состояния. Такими параметрами считаются здесь величины κ и \mathbf{D} . Рассматриваются обратимые (квазистатические) процессы.

Большую роль в дальнейшем играет свободная энергия — функция состояния, определяемая равенством

$$F = U - TS. \quad (31.6)$$

Отсюда следует, что

$$dF = -S dT + \zeta d\kappa + \mathbf{E} d\mathbf{D}. \quad (31.7)$$

Таким образом, напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}} \right)_{S, \kappa} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right)_{T, \kappa}. \quad (31.8)$$

Используется и другая термодинамическая функция

$$\tilde{F} = F - \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (31.9)$$

так что

$$d\tilde{F} = -S dT + \zeta d\kappa - \mathbf{D} d\mathbf{E}, \quad (31.10)$$

и поэтому индукция

$$\mathbf{D} = - \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}} \right)_{T, \kappa}. \quad (31.11)$$

Покажем, что выражение (3.5) $\frac{1}{2} (\epsilon E^2)$ для плотности энергии изотропного диэлектрика непосредственно связано с его термодинамической свободной энергией. При этом не нужно предполагать, что диэлектрик однородный, так что ϵ может зависеть от координат. Экспериментальные данные показывают, что диэлектрическая проницаемость может зависеть от плотности и от температуры: $\epsilon = \epsilon(\kappa, T)$. Будем считать пока, что плотность κ постоянная. Тогда $d\mathbf{D} = \epsilon d\mathbf{E} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$ и (31.4) с учетом (31.5) принимает вид

$$dU = T dS + \frac{\epsilon}{2} d(E^2) + E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT. \quad (31.12)$$

Состояние среды удобно характеризовать температурой T и величиной E^2 . Так как U и S — функции состояния, можно записать:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial (E^2)} d(E^2), \quad dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial (E^2)} d(E^2). \quad (31.13)$$

Подставляя эти последние формулы в (31.12) и сравнивая коэффициенты при dT и при $d(E^2)$, получим

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right), \quad \frac{\partial S}{\partial (E^2)} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial (E^2)} - \frac{\epsilon}{2} \right). \quad (31.14)$$

Но вследствие того, что dS — полный дифференциал, вторые производные функции S не зависят от порядка дифференцирования. Аналогичное утверждение выполняется по отношению к U . Учитывая это и раскрывая равенство

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial (E^2)} = \frac{\partial^2 S}{\partial (E^2) \partial T},$$

с помощью (31.14) приходим к уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial (E^2)} = \frac{1}{2} \left(\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right). \quad (31.15)$$

Подстановка (31.15) во второе из соотношений (31.14) дает результат:

$$\frac{\partial S}{\partial (E^2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T}. \quad (31.16)$$

Из (31.15) и (31.16) следует

$$U = U_0(T) + \frac{E^2}{2} \left(\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right), \quad S = S_0(T) + \frac{E^2}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T}. \quad (31.17)$$

Здесь U_0 и S_0 не зависят от электрических величин ϵ и E^2 . С помощью (31.17) свободная энергия (31.6) принимает вид

$$F = F_0(T) + \frac{1}{2} \epsilon E^2. \quad (31.18)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что выражение (3.5) представляет собой слагаемое в свободной энергии, приращение которой, как известно из термодинамики, равно максимальной механической работе, которая может быть совершена при изотермическом процессе. Слагаемое же $F_0 = U_0 - TS_0$ равно той свободной энергии, которой обладает среда в отсутствие электрического поля.

На основании сказанного будем при всех последующих вычислениях энергии изотропных диэлектриков считать, что процессы изменения энергии являются изотермическими, и поэтому пользоваться свободной энергией в виде (31.18).

Нужно заметить, что возникновение поляризации в изотропных диэлектриках обусловлено, вообще говоря, двумя факторами. В некоторых диэлектриках молекулы обладают и при отсутствии внешнего поля дипольными моментами, но направления этих моментов распределены хаотично (дипольные диэлектрики). Внешнее поле в известной степени упорядочивает молекулярные дипольные моменты, что и приводит к макроскопическому эффекту поляризации. В других средах внешнее поле само индуцирует дипольные моменты

молекул, без него отсутствующие. Для многих дипольных диэлектриков (газообразных и жидких) зависимость ϵ от температуры может быть представлена формулой

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\text{const}}{T}. \quad (31.19)$$

Из первой формулы (31.17) видно, что изменение энергии, обусловленное полем, равно $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, т. е. что слагаемое в (31.19) зависящее от температуры, вклада в энергию не дает *).

Формула (31.17) далее показывает, что энтропия возрастает с увеличением E при $d\epsilon/dT > 0$ и убывает при $d\epsilon/dT < 0$. Во втором случае это значит, что упорядоченность вещества увеличивается; в частности, так обстоит дело, когда выполняется равенство (31.19). В первом случае, который может наблюдаться в твердых телах, напротив, молекулярные диполи обладают некоторой упорядоченностью при отсутствии внешнего поля. Поле же, вызывая поворот этих диполей, может нарушить первоначальный порядок.

Тепло, поглощенное в единице объема при включении поля, на основании (31.5) и (31.17) равно

$$dQ = T dS = \mathbf{E} d\mathbf{D} \cdot \frac{T}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}.$$

В частности, если применима формула (31.19), то $dQ < 0$ при $d\mathbf{D} > 0$, т. е. тепло выделяется при наложении поля и поглощается при снятии его.

31.3. Вычислим теперь энергию диэлектрического тела во внешнем поле. Предположим, что в некоторой диэлектрической среде с проницаемостью ϵ_1 создано поле \mathbf{E}_1 . В эту среду вводится «инородное» диэлектрическое тело, проницаемость которого равна ϵ_2 **). Источники поля \mathbf{E}_1 считаются при этом неизменными. Процесс внесения инородного тела предполагается изотермическим. До начала этого процесса электростатическая энергия равна

$$W_1 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 dV, \quad \sim$$

где интеграл берется по всему пространству. После внесения тела установится новое поле \mathbf{E} . Рассмотрим достаточно большую часть пространства, ограниченную поверхностью σ , внутри которой содержится внесенный диэлектрик (рис. 33). Объем последнего обозначим через V_2 , остальной же объем внутри σ , заполненный прежним диэлектриком, обозначим через V_1 . Представляет интерес

*) Действительно, при подстановке (31.19) в (31.17) слагаемые ϵ , зависящие от T , взаимно сокращаются.

**) Точнее, некоторый объем диэлектрика с проницаемостью ϵ_1 заменяется диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 .

разность энергий поля в новом и в старом состояниях:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} \mathbf{E} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 dV, \quad (31.20)$$

которая должна быть равна работе, совершенной при изотермическом процессе внесения диэлектрического тела в поле, а потому равна потенциальной энергии этого тела. Предположим, что отсутствуют как объемные заряды, так и поверхностные заряды на границе двух диэлектриков. Тожественное преобразование позволяет записать равенство (31.20) в виде

$$2\Delta W = \int \mathbf{E} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1) dV + \int (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) \mathbf{D}_1 dV. \quad (31.21)$$

Первое слагаемое преобразуем, как это уже неоднократно делалось в аналогичных случаях выше, с помощью подстановки $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ и использования формулы (Б.14₂) и теоремы Остроградского — Гаусса. Учтывая, что $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{D}_1 = 0$, получим

$$\int_{V_1+V_2} \mathbf{E} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1) dV = - \int_{V_1+V_2} \text{div} (\varphi (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1)) dV.$$

Далее, если обозначить через σ' поверхность раздела двух диэлектриков, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{V_1+V_2} \text{div} (\varphi (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1)) dV &= \int_{V_1} \text{div} (\varphi (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1)) dV + \\ &+ \int_{V_2} \text{div} (\varphi (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1)) dV = \oint_{\sigma} \varphi (D_n - D_{1n}) d\sigma + \\ &+ \oint_{\sigma'} \varphi (D_n^I - D_{1n}^I) d\sigma' - \oint_{\sigma'} \varphi (D_n^{II} - D_{1n}^{II}) d\sigma'. \end{aligned}$$

Считая, что первый из полученных интегралов обращается в нуль при удалении поверхности σ на бесконечность, и выполнив этот предельный переход, правую часть предыдущей формулы приведем к виду

$$\oint_{\sigma'} \varphi (D_n^I - D_n^{II}) d\sigma' - \oint_{\sigma'} \varphi (D_{1n}^I - D_{1n}^{II}) d\sigma' = 0$$

в силу условия о том, что поверхностные заряды отсутствуют. Перейдем ко второму слагаемому в формуле (31.21). Так как $\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}$ в объеме V_1 и $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$, можно записать

$$\int_{V_1} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1) dV = \int_{V_1} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1) dV.$$

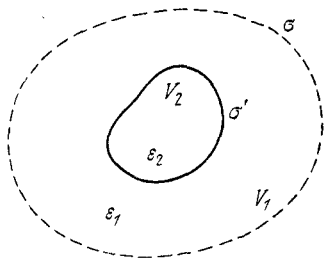


Рис. 33.

Совершенно так же, как это было сделано в предыдущем абзаце, можно показать, что

$$\int_{V_1+V_2} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1) dV = \int_{V_1} (\mathbf{E}_1, \mathbf{D} - \mathbf{D}_1) dV + \int_{V_2} (\mathbf{E}_1, \mathbf{D} - \mathbf{D}_1) dV = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} 2\Delta W = \int_{V_1+V_2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1) dV &= \int_{V_2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1) dV - \\ &- \int_{V_2} (\mathbf{E}_1, \mathbf{D} - \mathbf{D}_1) dV = \int_{V_2} (\mathbf{E}\mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_1\mathbf{D}) dV. \end{aligned}$$

Или, так как $\mathbf{D} = \varepsilon_2 \mathbf{E}$ в объеме V_2 , а $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E} \mathbf{E}_1 dV. \quad (31.22)$$

В случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, т. е. диэлектрик вносится в вакуум, и если учесть, что $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \mathbf{E}$, формула (31.22) принимает вид

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{P} \mathbf{E}_1 dV. \quad (31.23)$$

Из соотношения (31.22) следует, что если диэлектрическая проницаемость в объеме, заполненном диэлектриком, претерпевает бесконечно малое увеличение, так что $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta\varepsilon$, где $\delta\varepsilon > 0$ и, очевидно, $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}_1$ с точностью до бесконечно малых, то

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int (\delta\varepsilon) \mathbf{E}^2 dV, \quad (31.24)$$

т. е. полная энергия поля уменьшается. Более тонкие термодинамические соображения, на которых мы не будем останавливаться, показывают, что для любого диэлектрика выполняется неравенство $\varepsilon > \varepsilon_0$.

31.4. С помощью известных нам теперь формул могут быть вычислены *силы*, действующие в диэлектрике. Рассмотрим те силы, которые действуют на бесконечно малую плоскость, проведенную внутри диэлектрической среды. Они определяются формулой (3.18). Среди всевозможных направлений этой плоскости могут быть выделены такие, что вектор поверхностной силы оказывается совпадающим с вектором нормали, т. е. выполняется равенство $\Phi = \lambda \mathbf{n}$ или $T_{ik} n^k = \lambda n_i$. Это — так называемые главные направления тензора натяжений Максвелла. Они могут быть определены из условия разрешимости предыдущего уравнения, т. е. из соотношения $\det (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$. Заметим, что из симметричности тензора натяжений ($T_{ik} = T_{ki}$) следует, что главные направления, соответствующие различным значениям λ , взаимно ортогональны.

Действительно, пусть $T_{ik}n_1^k = \lambda_1 n_{1i}$ и $T_{ik}n_2^k = \lambda_2 n_{2i}$. Умножим первое из этих уравнений на n_{2i} , второе — на n_{1i} и просуммируем после этого по i . Получим $T_{ik}n_1^k n_2^i = \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)$, $T_{ik}n_2^k n_1^i = T_{ik}n_1^k n_2^i = = \lambda_2 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)$. Отсюда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 0$. Если же какие-либо два или все три возможных значения числа λ совпадают между собой, то соответствующие главные направления всегда могут быть ортогонализированы.

Если тензор натяжений имеет, в частности, вид (3.9), то вычисление определителя третьего порядка, указанного выше, приводит к уравнению $8\lambda^3 + 4\lambda^2 \varepsilon E^2 - 2\lambda \varepsilon^2 E^4 - \varepsilon^3 E^6 = 0$. Решениями этого уравнения являются три корня: $\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{2} E^2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\varepsilon}{2} E^2$. При этом ось 1 выбирается вдоль вектора \mathbf{E} , а две остальные оси — в ортогональной к этому вектору плоскости. Результат интерпретируется как сила растяжения вдоль поля и силы сжатия, поперечные по отношению к полю \mathbf{E} *).

Вычисление объемных сил, действующих в диэлектрике, мы проведем, учитывая также зависимость ε от плотности масс κ и от координат. На основе общих принципов механики работа $\delta \mathcal{A}$ таких сил \mathbf{f} при бесконечно малом смещении $\delta \mathbf{r}$ элемента объема dV равна $\delta \mathcal{A} = \mathbf{f} \delta \mathbf{r}$. Полная работа сил, произведенная в некотором объеме, должна равняться изменению свободной энергии этого объема:

$$\Delta W = - \int \delta \mathcal{A} dV. \quad (31.24')$$

С другой стороны, если может быть найден такой тензор T_{ik} , для которого будет выполнено соотношение $f_i = \partial T_{ik} / \partial x_k$, то он будет тензором натяжений, описывающим, в принципе, упомянутые выше эффекты неоднородности, которые не принимались во внимание при выводе тензора натяжений Максвелла в § 3.

При смещении элемента объема среды в электрическом поле он, вообще говоря, испытывает деформацию. Обозначая через dV_1 — начальный и dV_2 — конечный элементы объема, заключающие одну и ту же массу вещества, можно записать

$$dV_2 = \left[\det \left(\frac{\partial x_2^i}{\partial x_1^k} \right) \right] dV_1,$$

где x_1^i и x_2^i — координаты точек объема в его начальном и конечном положениях. Если $x_2^i = x_1^i + \delta x^i$, где смещение бесконечно малое, то, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, при вычислении определителя следует оставить лишь его диагональные

*) Следует подчеркнуть, что речь идет о тензорном представлении сил, с которыми электрическое поле действует на связанные заряды.

элементы:

$$\det \begin{pmatrix} \partial x_2^i \\ \partial x_1^i \end{pmatrix} \simeq 1 + \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x_1^i} = 1 + \operatorname{div} \mathbf{s},$$

где для сокращения обозначено $\mathbf{s} \equiv \delta \mathbf{r}$.

Из условия сохранения массы смещаемого элемента объема видно, что $\kappa_1 dV_1 = \kappa_2 dV_2 = \kappa_2 dV_1 (1 + \operatorname{div} \mathbf{s})$, т. е. $\kappa_2 - \kappa_1 \equiv \delta \kappa \simeq -\kappa \operatorname{div} \mathbf{s}$. Если перейти из точки $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ в точку \mathbf{r} , то изменение диэлектрической постоянной с той же точностью равно

$$\delta \varepsilon = -(\mathbf{s}, \operatorname{grad} \varepsilon) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \delta \kappa = -(\mathbf{s}, \operatorname{grad} \varepsilon) - \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \operatorname{div} \mathbf{s}.$$

Теперь из формулы (31.24) в нашем приближении следует

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int E^2 \left\{ (\mathbf{s}, \operatorname{grad} \varepsilon) + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \operatorname{div} \mathbf{s} \right\} dV. \quad (31.25)$$

Преобразуем второе слагаемое подынтегральной функции по формуле (Б.14₂):

$$E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \operatorname{div} \mathbf{s} = \operatorname{div} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \mathbf{s} \right) - (\mathbf{s}, \operatorname{grad} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \right)).$$

По теореме Остроградского — Гаусса

$$\int \operatorname{div} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \mathbf{s} \right) dV = \oint E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} s_n d\sigma + \sum_{i=1}^N \oint E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} s_n d\sigma.$$

Как обычно, первый интеграл в правой части вычисляется по достаточно удаленной поверхности и его можно считать равным нулю. Наличие второго интеграла обусловлено возможностью присутствия погруженных в диэлектрик N проводников, на поверхности которых этот интеграл и распространяется. Будем считать эти проводники жесткими в том смысле, что на их поверхностях смещение удовлетворяет условию $s_n = 0$. Тогда

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \operatorname{grad} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \right) \right\} \mathbf{s} dV.$$

Из (31.24) и определения работы объемных сил наконец получаем

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \right). \quad (31.26)$$

Сам вывод этой формулы для объемных сил показывает, что если в диэлектрике существует распределение ρ объемного заряда, то необходимо учитывать еще работу сил, действующих на этот заряд и вычисленных уже в § 3 при предположении о том, что диэлектрическая проницаемость ε постоянна. Такие силы равны $\rho \mathbf{E}$ и должны быть добавлены к правой части формулы (31.26).

Легко проверить непосредственным дифференцированием, что с учетом члена $\rho \mathbf{E}$ имеет место равенство $f_i = \partial T_{ik} / \partial x_k$, где

$$T_{ik} = E_i D_k - \frac{\delta_{ik}}{2} (1 - b) \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (31.27)$$

причем

$$b \equiv \frac{\kappa}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa}. \quad (31.28)$$

Обратим теперь внимание на то, что при вычислении объемных сил мы не учитывали не зависящего от электрических величин члена $F_0(T)$, входящего в полное выражение (31.18) для свободной энергии. Однако этот член тоже изменяется при виртуальном смещении элемента объема, и это изменение ответственно за возникновение механических сил давления. Произведем вкратце соответствующие вычисления, для того чтобы получить полную силу, действующую в диэлектрике. Прежде всего,

$$\delta(F_0 dV) = F_0 \delta(dV) + \frac{\partial F_0}{\partial \kappa} \delta \kappa dV.$$

Но, как мы видели выше, $\delta(dV) = \operatorname{div} \mathbf{s} dV$ и $\delta \kappa = -\kappa \operatorname{div} \mathbf{s}$. Таким образом,

$$\delta \int F_0 dV = \int \left(F_0 - \kappa \frac{\partial F_0}{\partial \kappa} \right) \operatorname{div} \mathbf{s} dV. \quad (31.29)$$

Напомним, что величина F_0 относится к единице объема. Свободная энергия, заключенная в достаточно малом объеме V , содержащем массу M , равна $F_0 V = \frac{F_0 M}{\kappa}$. Отсюда $\frac{\partial(F_0 V)}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial(\kappa^{-1})} (F_0 \kappa^{-1})$, а это последнее выражение совпадает с заключенным в скобки в (31.29). Но если поддерживать постоянными все термодинамические характеристики состояния, за исключением объема, то левая часть последнего равенства равна $-p$. Производя вычисления, аналогичные выполненным при переходе от (31.25) к (31.26), получим $\delta \int F_0 dV = \int (\operatorname{grad} p, \mathbf{s}) dV$, откуда сила $\mathbf{f}_{\text{давл}} = -\operatorname{grad} p$, где p — давление.

Выпишем общее выражение объемных сил с учетом всех указанных выше соображений:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(E^2 \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \right). \quad (31.30)$$

Термодинамические формулы (31.6) и (31.7) были записаны для величин, отнесенных к единице объема. Если же представляют интерес полные значения величин в некотором объеме, то величина этого последнего является одним из параметров, определяющих термодинамическое состояние. Первое начало термодинамики для них принимает вид (пока без учета энергии электрического поля):

$$d\mathcal{F}_0 = -\mathcal{S} dT - p dV. \quad (31.31)$$

Фактически это соотношение уже было использовано выше при выводе сил гидростатического давления. Величина ΔW , определяемая формулой (31.23), представляет собой электрическую часть свободной энергии, содержащуюся в объеме диэлектрика. Предположим, что в рассматриваемом объеме электрическое поле \mathbf{E} почти однородно. Тогда $\mathcal{F}_E \equiv \Delta W = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\mathbf{E}$, где \mathcal{P} — полная поляризация, т. е. дипольный момент всего объема. Пусть, далее, вектор \mathcal{P} линейно зависит от \mathbf{E} : $\mathcal{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$, где χ_e — скалярная диэлектрическая восприимчивость. При вариации поля \mathbf{E} изменение свободной энергии \mathcal{F}_E запишется в виде $d\mathcal{F}_E = -\mathcal{P}d\mathbf{E}$. Этот член должен быть добавлен в предыдущее соотношение (31.31). Обозначим $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_E$.

31.5. Остановимся более подробно на термодинамическом смысле величины \mathcal{F}_E . Вспомним прежде всего первое начало термодинамики (31.4) для объемных плотностей, считая для простоты κ постоянной. Подставляя (31.5) и пользуясь соотношением $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, получим

$$d\left(U - \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) = T dS + \mathbf{E} d\mathbf{P}. \quad (31.32)$$

Левая часть имеет смысл изменения внутренней энергии единицы объема за вычетом энергии поля \mathbf{E} в вакууме. Отсюда

$$d\left(F - \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) = -S dT + \mathbf{E} d\mathbf{P}.$$

Величина $F - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ является, таким образом, функцией состояния в том случае, когда в качестве внутренних параметров рассматриваются T и \mathbf{P} . Аналогично переходу от (31.6) к (31.9) можно перейти к параметрам T и \mathbf{E} , если рассмотреть $F' = F - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 - \mathbf{P}\mathbf{E}$. Тогда

$$dF' = -S dT - \mathbf{P} d\mathbf{E}. \quad (31.33)$$

При изотермическом процессе ($dT = 0$) и условии, что поле \mathbf{E} изменяется по величине, оставаясь однородным в пределах рассматриваемого объема, интегрирование по объему предыдущего равенства приводит к величине $d\mathcal{F}_E$. Само же это равенство является гораздо более общим, так как при его выводе не предполагалось никаких ограничений в отношении зависимости \mathbf{P} от \mathbf{E} .

Вместо объема V часто удобнее считать независимым параметром давление p . Для этого вместо свободной энергии \mathcal{F} вводится другая функция состояния — термодинамический потенциал $\Phi = \mathcal{F} + pV$. Из предыдущих соображений видно, что при изотермических процессах $d\Phi = V dp - \mathcal{P} d\mathbf{E}$. Так как $d\Phi$ — полный дифференциал, отсюда следует

$$\left(\frac{\partial V}{\partial E_i}\right)_{T, p} = -\left(\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial p}\right)_{T, E}. \quad (31.34)$$

Это соотношение определяет зависимость объема диэлектрика от величины приложенного поля (эффект *электрострикции*). В правой части зависимость поляризации \mathcal{P} от давления p обусловлена, разумеется, конкретной структурой рассматриваемого диэлектрика. В результате под действием электрического поля может наблюдаться как растяжение, так и сжатие различных диэлектриков. Если выполняется равенство (1.26), то соотношение (31.34) принимает вид

$$V - V_0 = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\epsilon}}{\partial p} \right)_{T, E}. \quad (31.35)$$

Здесь V_0 — объем диэлектрика в отсутствие внешнего поля.

Вернемся к формуле (31.30) для объемных сил, действующих в изотропных диэлектриках. Предполагая, что $\rho = 0$, условие механического равновесия диэлектрика $\mathbf{f} = 0$ можно с помощью простого преобразования выразить в виде

$$\text{grad } p = \frac{\kappa}{2} \text{grad} \left(E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa} \right).$$

Если известно уравнение состояния жидкости, т. е. зависимость давления p от плотности κ , то отсюда следует

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\kappa} = \frac{E^2}{2} \frac{d\epsilon}{d\kappa} \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (31.36)$$

где p_i — давление в точке \mathbf{r}_i . Таким образом, давление зависит только от электрического поля в данной точке. Часто можно считать, что выполняется условие несжимаемости, т. е. κ не зависит от p . Зависимость ϵ от κ в ряде случаев хорошо аппроксимируется следующей формулой Клаузиуса — Мосотти (которую называют также и формулой Лорентц — Лоренца):

$$\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} = C\kappa,$$

где $\epsilon' \equiv \epsilon/\epsilon_0$, а C — константа, зависящая от конкретной природы диэлектрика. Легко подсчитать, что тогда $\kappa d\epsilon/d\kappa = 1/3 \epsilon_0 (\epsilon' - 1) \times (\epsilon' + 2)$ и (31.36) приводится к виду

$$p_2 - p_1 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{(\epsilon' - 1)(\epsilon' + 2)}{3} \Big|_1^2.$$

В заключение отметим следующее обстоятельство. Зная тензор натяжений, можно вывести ряд механических соотношений, которые должны иметь место на границе между двумя различными средами. Действительно, на такой границе должно выполняться равенство действия и противодействия для поверхностных сил, а именно $\Phi^I = -\Phi^{II}$, где Φ^I — поверхностная сила, действующая из первой среды на вторую, а Φ^{II} — из второй среды на первую. С помощью

тензора натяжений это равенство переписывается в виде $T_{ik}^I n^{1k} = -T_{ik}^{II} n^{1k}$. Здесь n^I и n^{II} взаимно противоположны. Полагая $n = n^I$, получим $(T_{ik}^I - T_{ik}^{II})n^k = 0$. Если теперь выразить T_{ik}^I через величины, относящиеся к первой среде, а T_{ik}^{II} — ко второй, по формуле (31.27) (к которой для учета гидростатического давления нужно, как видно из приведенных ранее соображений, добавить слагаемое $-p\delta_{ik}$ в правую часть), то можно получить соотношение для разности давлений у поверхности раздела. При этом из граничных условий следует, что в тангенциальных направлениях равенство сил выполняется тождественно, соотношение же для нормального направления нетривиально. Мы не будем здесь выписывать эти формулы, предоставляя это в качестве упражнения читателю.

§ 32. Анизотропные диэлектрики

32.1. Анизотропными диэлектриками называются такие диэлектрические среды, поляризация \mathbf{P} которых не совпадает по направлению с электрической напряженностью \mathbf{E} . Анизотропными свойствами обладают обычно среды, частицы которых образуют кристаллическую решетку. Последняя характеризуется своей симметрией, т. е. регулярностью расположения частиц в пространстве. Сама же эта симметрия объясняется тем, что взаимодействия частиц в кристалле в одних направлениях гораздо сильнее, чем в других (таковы особенности химической связи молекул). В результате и направления электрических дипольных моментов, образующихся в молекулах под действием внешнего поля, определяются не только этим полем, но и распределением взаимодействий в кристаллической решетке. Простейший пример — так называемые пироэлектрические среды, в которых поляризация существует и в отсутствие внешнего поля. Ясно, что для того, чтобы дипольные моменты молекул давали, складываясь, ненулевой общий эффект, необходима определенная закономерность в расположении молекул. Полный вектор поляризации \mathbf{P}_0 , возникающий в этом случае («спонтанная» поляризация), определяет в среде выделенное направление. Поэтому симметрия пироэлектрического кристалла должна, в частности, характеризоваться наличием такого направления (в кристаллографии говорят при этом об оси симметрии).

Теория симметрии кристаллов, в которой рассматривается и связь этой симметрии с физическими свойствами кристаллической среды, слишком обширна, чтобы мы могли ею здесь заняться *). Однако некоторые свойства анизотропных диэлектриков можно рассмотреть и без конкретных результатов этой теории.

*) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, 1957 или Дж. Най, *Физические свойства кристаллов*, ИЛ, 1960.

Будем в дальнейшем предполагать, что анизотропная среда является линейной. Это значит, как было упомянуто еще в § 1, что между поляризацией и электрической напряженностью выполняется линейное соотношение

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E^j + P_{0,i}. \quad (32.1)$$

В этой формуле учитывается и возможность существования спонтанной поляризации P_0 , упомянутой выше. Величина χ_{ij} должна быть тензором второго ранга, так как P и E — векторы. Она называется *диэлектрической восприимчивостью*. При этом между напряженностью E и индукцией D выполняется соотношение (1.29), где диэлектрическая проницаемость ϵ_{ij} также будет тензором второго ранга. Кроме того, среду будем считать однородной, т. е. компоненты тензоров χ_{ij} и ϵ_{ij} не зависящими от координат точки среды. Это значит, что физические свойства среды, измеренные по взаимно параллельным направлениям в любых двух ее точках, совпадают.

При изучении термодинамических свойств анизотропных диэлектриков следует обратить внимание на то, что основные термодинамические соотношения, рассмотренные в предыдущем параграфе, остаются применимыми и в данном случае, так как были сформулированы без специального предположения об изотропии. Это относится, в частности, к уравнениям (31.4), (31.7), (31.10), а также (31.33) и (31.32). Последнее из них удобно использовать для доказательства симметричности тензора χ_{ij} диэлектрической восприимчивости. При адиабатическом процессе, когда $dS = 0$, это уравнение принимает вид $dW = E dP$, где W — термодинамическая функция состояния, имеющая смысл внутренней энергии среды. Подставим сюда соотношение (32.1), считая для простоты, как и всюду в дальнейшем, что $P_0 = 0$ и χ_{ij} не изменяется при термодинамическом процессе. Тогда $dW = \epsilon_0 \chi_{ij} E^i dE^j$. Но так как dW — полный дифференциал, должно выполняться равенство $\frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_j \partial E_i}$ для любой пары индексов i и j , откуда и следует $\chi_{ij} = \chi_{ji}$. Это значит, что и $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Поэтому поле в анизотропной среде обладает плотностью энергии w_e , определяемой уравнением (3.5), при выводе которого симметричность тензора ϵ_{ij} использовалась без доказательства.

32.2. Перейдем к некоторым вопросам, относящимся к связи между механическими свойствами твердого тела и его электрическими свойствами. Предположим, что на поверхность твердого диэлектрика действует поверхностная сила Φ . Совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 3 при рассмотрении тензора натяжений Максвелла (когда фактически использовалось условие изотропии), можно определить в общем случае тензор натяжений τ_{ij} соотношением

$$\Phi_i = \tau_{ij} n^j, \quad (32.2)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности. Предположим, что тензор натяжений симметричен: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Такие натяжения называются однородными. С помощью (32.2) легко убедиться, что на поверхности куба однородность натяжений означает равенство по величине и противоположность по направлению сил, действующих на противоположные грани. Мы не будем заниматься вопросом о том, как выражаются компоненты тензора τ_{ij} через напряженность и индукцию в анизотропном случае.

Существуют такие твердые кристаллы, у которых приложенные к их поверхности силы вызывают электрическую поляризацию. Это явление называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом*. При этом можно записать соотношение между поляризацией и механическим натяжением:

$$P_i = d_{i,kl} \tau^{kl}. \quad (32.3)$$

Пьезоэлектрические коэффициенты $d_{i,kl}$ являются компонентами тензора третьего ранга, причем по индексам k, l они симметричны. В дальнейшем мы рассмотрим также *обратный пьезоэлектрический эффект*, состоящий в том, что внешнее электрическое поле вызывает деформацию кристалла вследствие возникающих под его действием механических натяжений. Однако сначала вспомним некоторые сведения, относящиеся к описанию деформаций в механике сплошной среды.

Пусть под действием приложенных сил точки среды смещаются из своих первоначальных положений, причем смещение точки, имевшей радиус-вектор \mathbf{r} , равно $\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Деформация среды определяется тем, насколько различно смещаются соседние точки, т. е. она характеризуется вектором $\delta \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \mathbf{s}(\mathbf{r}) \simeq (\delta \mathbf{r}, \text{grad}) \mathbf{s}$ (при бесконечно малом $\delta \mathbf{r}$). Это равенство можно переписать в виде $\delta s^i = a_{ik} \delta x^k + b_{ik} \delta x^k$, где $a_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right)$ и $b_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right)$. Тензор b_{ik} определяет вращение рассматриваемого бесконечно малого объема как целого. Действительно, по формуле (Б.10) можно ввести $\overset{*}{\mathbf{b}} = \text{rot } \mathbf{s}$, т. е. $b_{ik}^* = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial s_l}{\partial x^k}$, так что $b_{ik} = = \frac{1}{2} \varepsilon_{kil} \overset{*}{b}_l$ и $b_{ik} \delta x^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilk} \overset{*}{b}^l dx^k = \frac{1}{2} [\text{rot } \mathbf{s} \times \delta \mathbf{r}]_i$. Поэтому данная часть смещения не представляет интереса. Тензор же a_{ik} симметричен; он определяет собственно деформации, а именно, растяжения и сдвиги. В частности, чистое растяжение происходит, если выполняется условие $a_{ik} \delta x^k = \lambda \delta x_i$, т. е. оно имеет место при смещении вдоль главных осей тензора a_{ik} . С помощью приближенного вычисления якобиана легко установить также, что коэффициент объемного расширения равен $(\delta V' - \delta V)/\delta V = \text{div } \mathbf{s}$ (ср. вычисление сил в изотропном диэлектрике, проведенное в предыдущем параграфе).

Во многих случаях выполняется эмпирический *обобщенный закон Гука*, состоящий в том, что тензор натяжений τ_{ij} связан с тензором деформаций a_{ij} линейно:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} a^{kl}, \quad a_{ij} = s_{ijkl} \tau^{kl}. \quad (32.4)$$

При этом коэффициенты c_{ijkl} называются *модулями упругости*, а s_{ijkl} — *коэффициентами упругости*. Матрицы, составленные из величин c и s , взаимно обратны.

Термодинамическое состояние твердого тела можно определить заданием температуры T , электрического поля \mathbf{E} и, например, компонент тензора натяжений τ_{ij} . Тогда должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} da_{ij} &= \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau_{kl}} \right)_{E, T} d\tau_{kl} + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial E_k} \right)_{\tau, T} dE_k + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial T} \right)_{E, \tau} dT, \\ dP_i &= \left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau_{kl}} \right)_{E, T} d\tau_{kl} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k} \right)_{\tau, T} dE_k + \left(\frac{\partial P_i}{\partial T} \right)_{\tau, E} dT, \\ dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial \tau_{kl}} \right)_{E, T} d\tau_{kl} + \left(\frac{\partial S}{\partial E_k} \right)_{\tau, T} dE_k + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\tau, E} dT. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Коэффициенты в правых частях этих уравнений описывают следующие физические эффекты *). В первом уравнении это — упругость, обратный пьезоэлектрический эффект и тепловое расширение. Во втором — прямой пьезоэлектрический эффект, электрическая поляризация и пироэлектрический эффект. Наконец, в третьем — пьезокалорический и электрокалорический эффекты, а также теплоемкость, деленная на T . Между всеми этими эффектами существует ряд соотношений, которые могут быть получены, исходя из свойств термодинамических функций состояния.

Первое начало термодинамики можно записать в виде

$$dW = \tau_{ij} da^{ij} + \mathbf{E} d\mathbf{P} + T dS.$$

Здесь первый член, как можно показать с помощью теории упругости, описывает изменение упругой энергии сплошной среды. Часто, однако, удобнее пользоваться другой термодинамической функцией, а именно термодинамическим потенциалом Гиббса G , который определяется следующим образом:

$$G = W - \tau_{ij} a^{ij} - \mathbf{E} \mathbf{P} - TS,$$

так что

$$dG = -a_{ij} d\tau^{ij} - \mathbf{P} d\mathbf{E} - S dT.$$

*) Ниже мы перечисляем эти коэффициенты слева направо в правых частях каждого из уравнений (32.5).

Из того обстоятельства, что dG — полный дифференциал, следует, в частности, равенство

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau_{ij} \partial E_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial \tau_{ij}}, \text{ т. е. } \frac{\partial P_k}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial E_k}.$$

Общее значение этого выражения может быть обозначено также через $d_{k,ij}$, как показывает определение (32.3). Но отсюда следует, что обратный пьезоэлектрический эффект, т. е. зависимость тензора натяжений от внешнего поля, определяется теми же пьезоэлектрическими коэффициентами, что и прямой эффект.

Более подробное исследование позволяет вычислить, например, объемные силы, возникающие в анизотропном диэлектрике при его деформации под действием электрического поля. Мы не рассматриваем эту задачу *), так как она потребовала бы гораздо более детального изучения свойств тензоров натяжений и деформаций.

*) См., например, цитируемую выше книгу Ландау и Лифшица, или Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948 (особенно § 2.22).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

§ 33. Магнитная энергия и силы в системе контуров постоянного тока. Квазистационарные токи в линейных цепях

33.1. В § 12 мы уже рассматривали электрические токи в изотропной однородной среде, для которой выполняется соотношение (1.27) между магнитной индукцией и магнитной напряженностью, причем магнитная проницаемость μ считается постоянной. Электрические токи изучались в виде линейных контуров постоянного тока. Основным интерес представляли магнитное поле, создаваемое токами, и взаимодействие токов между собой при посредстве этого поля. В результате были получены формула (12.3) для векторного потенциала, закон Био—Савара—Лапласа (12.7) и выражение (12.10) для полной силы, действующей между двумя линейными контурами. При использовании Международной системы единиц СИ коэффициент α во всех этих формулах нужно положить равным единице. В настоящем параграфе дополним результаты § 12, а именно исследуем энергетические свойства магнитного поля постоянных токов. Далее будут рассмотрены некоторые свойства переменных токов. В § 34, привлекая термодинамические соображения, мы приведем некоторые сведения об электрических и магнитных эффектах, связанных с одновременным наличием электрического тока и потока тепла в среде.

Будем предполагать, что плотность тока удовлетворяет обобщенному закону Ома (1.30), который для изотропных сред принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}}. \quad (33.1)$$

Плотность тока $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ обусловлена «сторонними» силами, вызывающими движение зарядов в среде. Как уже упоминалось в § 1, такие силы могут возникать за счет использования химической энергии (элемент, батарея), механической энергии (динамомашинна) и т. п. Для того чтобы описать сторонние силы, удобно определить вектор \mathbf{E}' соотношением

$$\mathbf{j}_{\text{ст}} = \sigma \mathbf{E}', \quad \text{тогда} \quad \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}'). \quad (33.2)$$

В замкнутом контуре достаточно малого поперечного сечения, в котором имеется электрический ток (такие контуры будем называть

квазилинейными *)), полная электродвижущая сила U определяется интегралом по этому контуру:

$$U = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}') ds. \quad (33.3)$$

Если магнитное поле не изменяется со временем, можно положить $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, и поэтому первое слагаемое в предыдущей формуле, определяемое электростатическим полем, обращается в нуль. С помощью (33.2) и (33.3) получаем соотношение

$$U = \oint \mathbf{E}' ds = \oint \frac{j ds}{\sigma}. \quad (33.4)$$

Вспомним равенство (12.5), которое можно рассматривать просто как определение силы тока I . Направление тока в каждой точке квазилинейного контура совпадает с направлением $d\mathbf{s}$ в этой точке. Кроме того, элемент объема контура можно записать в виде $dV = ds \cdot \Delta\Sigma$, где $\Delta\Sigma$ — площадь поперечного сечения контура. Поэтому с помощью (12.5) подынтегральное выражение в (33.4) переписывается следующим образом:

$$j ds = j ds = \frac{I ds}{\Delta\Sigma}.$$

Если ток постоянный, то, по определению, это означает, что величина I одинакова во всех сечениях контура. Тогда при подстановке предыдущего выражения в (33.4) это последнее принимает вид

$$U = IR, \quad (33.5)$$

где $R \equiv \oint \frac{ds}{\sigma \Delta\Sigma}$. Величина R называется полным сопротивлением контура; разумеется, если электропроводность σ и сечение контура $\Delta\Sigma \equiv S$ постоянны на всем протяжении контура, то $R = l/\sigma S$, где l — длина контура. Размерность величины σ легко определить, если известны размерности плотности тока j и электрической напряженности E ; тогда определяется и размерность сопротивления R , а затем по формуле (33.5) — размерность электродвижущей силы U . В системе СИ единицей сопротивления является 1 Ом, а единицей электродвижущей силы (которая называется также напряжением в контуре) — 1 вольт (В). Сила тока при этом измеряется в амперах (ср. § 1 и § 29).

Предположим теперь, что контур разомкнут, так что постоянного тока в нем быть не может и $\mathbf{j} = 0$, но сторонние силы в этом контуре действуют. Тогда с помощью (33.3), интегрируя по контуру между

*) Точнее, квазилинейным называется контур (проводник), в котором электропроводность σ и поперечное сечение $\Delta\Sigma$ зависят только от одной линейной координаты s , отсчитываемой вдоль контура.

его концами 1 и 2, получим равенство

$$-\int_1^2 \mathbf{E} ds = \int_1^2 \mathbf{E}' ds = \oint \mathbf{E}' ds = U. \quad (33.6)$$

Интеграл по замкнутому контуру записывается с учетом того, что на разомкнутом участке цепи $\mathbf{E}' = 0$. Левая часть формулы (33.6) характеризует электростатическое напряжение в разомкнутой цепи и равна разности потенциалов $\varphi(1) - \varphi(2)$. Смысл этой формулы состоит в том, что в разомкнутой цепи действие сторонних сил компенсируется возникновением электростатического поля зарядов, другими словами, э. д. с. измеряется разностью потенциалов на концах разомкнутой цепи.

33.2. Пусть в однородной изотропной среде с магнитной проницаемостью μ имеется N квазилинейных контуров s_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) с постоянными токами I_α . Изучим выражение для энергии W магнитостатического поля, создаваемого этими токами. Используя определение плотности магнитной энергии, рассмотренное в начале § 3, и последовательно применяя формулу (2.1), соотношение (Б.19) и уравнение Максвелла (1.21) при $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$, можно записать следующее преобразование:

$$2W = \int \mathbf{H} \mathbf{B} dV = \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} dV = \int \operatorname{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{H}] dV + \int \mathbf{J} \mathbf{A} dV. \quad (33.7)$$

Первое слагаемое в этой формуле с помощью теоремы Остроградского — Гаусса может быть представлено в виде интеграла $\oint [\mathbf{A} \times \mathbf{H}] \mathbf{n} d\sigma$ по замкнутой поверхности, охватывающей все контуры тока. При удалении поверхности на бесконечность можно считать этот интеграл стремящимся к нулю, так как подынтегральное выражение пропорционально r^{-3} . Обратимся ко второму слагаемому. Оно может быть преобразовано двояким способом. Прежде всего, можно сразу учесть, что интегрирование производится в нем лишь по той области, где $\mathbf{j} \neq 0$, т. е. только по контурам тока. Тогда с помощью (12.5) получим

$$\int \mathbf{J} \mathbf{A} dV = \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha \oint_{s_\alpha} \mathbf{A} ds_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha \Phi_\alpha. \quad (33.8)$$

При этом по теореме Стокса

$$\oint_{s_\alpha} \mathbf{A} ds_\alpha = \int \operatorname{rot}_n \mathbf{A} d\sigma_\alpha = \int B_n d\sigma_\alpha \equiv \Phi_\alpha. \quad (33.9)$$

Здесь, как обычно, s_α — двумерная поверхность, краем которой является контур s_α . Величина Φ_α — магнитный поток, протекающий сквозь площадь, определяемую контуром s_α .

С другой стороны, воспользуемся выражением (12.3) для векторного потенциала, найденным при решении уравнений

магнитостатики:

$$\int \mathbf{jA} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV dV'.$$

Интегрирование, так же как и раньше, распространяется здесь лишь на сами квазилинейные контуры. При этом нужно различать два случая: объемы dV и dV' могут принадлежать одному и тому же контуру или различным контурам. Соответственно этому двойной интеграл может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV dV' &= \sum_{\alpha=1}^N \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_\alpha)\mathbf{j}(\mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}'_\alpha|} dV_\alpha dV'_\alpha + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ (\alpha \neq \beta)}} \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_\alpha)\mathbf{j}(\mathbf{r}_\beta)}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta|} dV_\alpha dV_\beta. \end{aligned}$$

Учитывая, что токи постоянны, перепишем правую часть в форме

$$\sum_{\alpha=1}^N L_{\alpha\alpha} I_\alpha^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} L_{\alpha\beta} I_\alpha I_\beta = \sum_{\alpha, \beta} L_{\alpha\beta} I_\alpha I_\beta, \quad (33.10)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\alpha} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_\alpha^2} \int \int_{(V_\alpha)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_\alpha)\mathbf{j}(\mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}'_\alpha|} dV_\alpha dV'_\alpha, \\ L_{\alpha\beta} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_\alpha I_\beta} \int \int_{V_\alpha V_\beta} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_\alpha)\mathbf{j}(\mathbf{r}_\beta)}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta|} dV_\alpha dV_\beta. \end{aligned} \quad (33.11)$$

Эти величины не зависят от силы тока. Применяя к правой части равенства (33.11) для $L_{\alpha\beta}$ соотношение (12.15), получим

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_\alpha} \oint_{s_\beta} \frac{ds_\alpha ds_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta|} \quad (\alpha \neq \beta). \quad (33.11')$$

Аналогичный переход в $L_{\alpha\alpha}$ не имеет смысла, так как для линейных проводников соответствующий интеграл расходится. Для вычисления $L_{\alpha\alpha}$ надо пользоваться формулой (33.11).

Величины $L_{\alpha\beta}$ называются *коэффициентами индукции*; в частности, при $\alpha = \beta$ *коэффициентами самоиндукции*, а при $\alpha \neq \beta$ *коэффициентами взаимной индукции* рассматриваемой системы квазилинейных контуров. Радиусы-векторы \mathbf{r}_α , \mathbf{r}'_α пробегают точки контура с номером α .

В формуле (33.11') элементы ds_α и ds_β берутся на различных контурах. В § 12, рассматривая два контура, мы ограничивались лишь этим последним случаем. Из самих выражений (33.11) видно, что

коэффициенты индукции определяются только геометрической формой каждого контура и их взаимным расположением в пространстве. Очевидно также, что $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$.

С помощью (33.10) выражение (33.9) для магнитного потока принимает вид

$$\Phi_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^N L_{\alpha\beta} I_{\beta}. \quad (33.12)$$

Из (33.7), (33.8) и (33.12) следует, что магнитная энергия системы контуров записывается следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N I_{\alpha} \Phi_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta}. \quad (33.13)$$

Такое выражение для энергии соответствует представлению о мгновенном дальнем действии между токами. Слагаемые с $\alpha = \beta$ описывают действие данного тока самого на себя. Слагаемые же с $\alpha \neq \beta$ следует интерпретировать как результат взаимодействия между разными контурами s_{α} и s_{β} . Если учесть симметричность $L_{\alpha\beta}$, то энергия такого взаимодействия равна

$$W_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta}. \quad (33.14)$$

33.3. Пусть контур s_{α} виртуально смещается как твердое тело, так что радиус-вектор \mathbf{r}_{α} в любой точке этого контура получает одно и то же бесконечно малое приращение. Обозначим через grad_{α} соответствующую операцию дифференцирования. Будем считать, что все остальные контуры s_{β} при $\beta \neq \alpha$ неподвижны. Тогда формулу (12.10) для силы взаимодействия можно применить к взаимодействию между контуром s_{α} и любым из контуров s_{β} . Если индекс 1 заменить в этой формуле на β , а индекс 2 — на α и воспользоваться обозначением (33.11), то сила, действующая со стороны контура β на контур α , принимает вид

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = (\text{grad}_{\alpha} L_{\alpha\beta}) I_{\alpha} I_{\beta}. \quad (33.15)$$

Если считать, что смещается один из контуров s_{β} , а прежний контур s_{α} остается неподвижным, то $\text{grad}_{\alpha} L_{\alpha\beta} = -\text{grad}_{\beta} L_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$, так как зависимость от координат определяется функцией $\frac{1}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|}$ в формуле (33.11). Отсюда вновь следует закон равенства действия и противодействия $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$, уже рассмотренный в § 12.

Полезно, однако, попытаться обосновать выражение для силы (33.15) непосредственно с помощью энергии поля (33.13). Именно, можно опять рассмотреть виртуальное смещение каждого из контуров и изучить происходящее при этом изменение энергии. Если,

например, контур s_β смещается, как твердое тело, со скоростью \mathbf{u}_β , то механическая работа силы \mathbf{F}_β , действующей на этот контур со стороны магнитного поля, за единицу времени равна $\mathbf{F}_\beta \mathbf{u}_\beta$. Поэтому, казалось бы, можно записать закон сохранения энергии в виде $\mathbf{F}_\beta \mathbf{u}_\beta + dW/dt = 0$ и отсюда, подставляя (33.13), вычислить силу \mathbf{F}_β . При этом, однако, получится неверный результат. Дело в том, что при таком смещении контура изменяются магнитные потоки, проходящие сквозь все контуры. Это произойдет благодаря явлению электромагнитной индукции, которое вызовет в каждом контуре дополнительную электрическую напряженность \mathbf{E} , а эта последняя приведет к возникновению токов индукции. Поэтому во время смещения токи в каждом из контуров перестанут быть постоянными и формула (33.13) неприменима. Можно, однако, предположить, что в ходе виртуального смещения сторонние силы, действующие в каждом контуре и обеспечивающие наличие тока, изменяются так, что благодаря их действию совместно с электродвижущей силой индукции все токи сохраняют свою первоначальную величину.

Запишем формулы, соответствующие этим соображениям. Закон сохранения энергии, согласно § 3, следует выразить так:

$$\mathbf{F}_\beta \mathbf{u}_\beta + \frac{dW}{dt} + \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = 0. \quad (33.16)$$

Здесь последнее слагаемое представляет собой работу электрических сил. Ток с учетом сторонних сил имеет вид (33.2), поэтому $\mathbf{j} \mathbf{E} = \sigma^{-1} \mathbf{j}^2 - \mathbf{j} \mathbf{E}'$. Переходя от объемного интегрирования к интегрированию по квазилинейным контурам с помощью формулы (12.5), аналогично тому, как это делалось выше, и считая, что токи в каждом контуре постоянны, получим

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} \mathbf{E}' dV &= \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha \oint_{s_\alpha} \mathbf{E}' ds_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha U_\alpha, \\ \int \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dV &= \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha^2 \oint_{s_\alpha} \frac{ds_\alpha}{\sigma \Delta \Sigma_k} = \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha^2 R_\alpha. \end{aligned} \quad (33.17)$$

Таким образом, (33.16) принимает вид

$$\mathbf{F}_\beta \mathbf{u}_\beta + \frac{dW}{dt} + \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha^2 R_\alpha - \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha U_\alpha = 0. \quad (33.18)$$

С другой стороны, закон Фарадея (М.3) для произвольного контура s_α после подстановки $\mathbf{E} = \sigma^{-1} \mathbf{j} - \mathbf{E}'$ записывается аналогичным образом в виде

$$I_\alpha R_\alpha - U_\alpha = -d\Phi_\alpha/dt. \quad (33.19)$$

Считая опять-таки все токи постоянными, можно воспользоваться формулой (33.13). При этом $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} I_{\alpha} \frac{d\Phi_{\alpha}}{dt}$. Подставляя это равенство, а также (33.19) в (33.18), получаем

$$F_{\beta} u_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} I_{\alpha} \frac{d\Phi_{\alpha}}{dt} = \left(\frac{dW}{dt} \right)_{\text{всех } I_{\alpha} = \text{const}}. \quad (33.20)$$

Без учета всех предшествующих соображений правая часть этой формулы имела бы обратный знак. Так как смещению подвергается только контур s_{β} , правую часть можно записать и следующим образом: $dW/dt = \text{grad}_{\beta} W \cdot u_{\beta}$ *). Разумеется, фактически подвергаются дифференцированию коэффициенты индукции (33.11), входящие в выражение энергии W , а именно те из них, которые зависят от r_{β} , т. е. коэффициенты $L_{\beta\alpha}$ при всех α . Таким образом, ввиду произвольности вектора u_{β} скорости смещения, сила, действующая на данный контур s_{β} со стороны всех контуров (включая его самого), равна

$$F_{\beta} = \text{grad}_{\beta} W. \quad (33.21)$$

Отсюда непосредственно выводится уравнение (33.15) для силы взаимодействия двух разных контуров, но на этом мы останавливаться не будем.

§ 3.4. Займемся теперь исследованием переменных токов в неразветвленном линейном контуре. При этом будем считать, что токи квазистационарны. Это значит, что сила тока $I(t)$ в любой момент времени t одинакова во всех точках контура, но с течением времени может изменяться**). Тогда полученные выше формулы (33.17) остаются в силе. Обозначим через L коэффициент самоиндукции контура. Согласно (33.13) магнитная энергия, связанная с электрическим током в контуре, равна $W_{(m)} = \frac{1}{2} LI^2$. Предположим, что контур содержит также и конденсатор. При прохождении тока по контуру на обкладках конденсатора будут возникать электрические заряды, величина которых зависит от времени. При наличии конденсатора цепь, состоящая из проводников, становится разомкнутой. Тем не менее прохождение переменного тока по этой цепи возможно. Разберемся в этом подробнее. Еще в § 1 мы видели, что электрический ток в общем случае состоит из двух слагаемых — тока проводимости (обусловленного движением свободных зарядов) и тока смещения $\partial D / \partial t$. В отношении проводящих участков цепи условие квазистационарности означает, по сути дела, возможность считать, что во всех точках цепи одновременно устанавливается одна и та же сила тока. Другими словами, скорость распростра-

*) Определение операции grad_{β} см. выше, на стр. 255.

**) Подробный анализ условий квазистационарности был проведен В. К. Фредериксом в книге «Электродинамика и введение в теорию света», ГТТИ, 1934.

нения электромагнитного возмущения считается практически бесконечной. Вывод волнового уравнения для электромагнитного поля показывает, что такое предположение можно делать, лишь пренебрегая членом $\partial \mathbf{D} / \partial t$. В конденсаторе же дело обстоит как раз наоборот. Ток проводимости в конденсаторе следует считать равным нулю, главную же роль играет именно ток смещения. Благодаря уравнению непрерывности сила тока смещения, проходящего через конденсатор, должна быть равна силе тока проводимости в прилегающих к конденсатору проводниках. Отсюда следует, что $dq/dt = I$, и, кроме того, если на одной обкладке конденсатора образуется заряд $+q(t)$, то на другой будет заряд $-q(t)$ (так как вся цепь в целом считается нейтральной).

Изменение энергии электрического поля в объеме конденсатора определяется, согласно (3.5), величиной $\int \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV$, непосредственно зависящей от тока смещения. Если среда, заполняющая конденсатор, линейна, то (как в § 3) получим $dW_{(e)}/dt$, где $W_{(e)} = = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \mathbf{D} dV$. Предположим, что в выражении поля \mathbf{E} через потенциалы можно отбросить член $\partial A/\partial t$ (это означает пренебрежение в объеме конденсатора «вихревым» электрическим полем, возникающим благодаря фарадеевой индукции) и внутри проводящих обкладок конденсатора нет объемного заряда (имеется лишь заряд на их поверхностях). Тогда в каждый момент времени для $W_{(e)}$ применимы вычисления, проведенные в § 30, результатом которых является формула (30.9).

В нашем случае (один конденсатор) имеется лишь один коэффициент емкости C и один потенциальный коэффициент, причем эти коэффициенты взаимно обратны. Поэтому электрическую энергию можно записать в виде $W_{(e)} = q^2/2C$. Закон сохранения полной энергии можно использовать в виде (33.18), где нужно лишь положить $\mathbf{u}_\beta = 0$, $W = W_{(m)} + W_{(e)}$ и рассматривать один контур:

$$\frac{dW}{dt} + I^2 R = IU. \quad (33.22)$$

Вообще говоря, коэффициенты L и C могли бы зависеть, например, от характера изменения токов и зарядов со временем. Однако в теории квазистационарных токов такой зависимостью обычно пренебрегают. Тогда

$$\frac{dW_{(m)}}{dt} = LI \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dW_{(e)}}{dt} = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} qI.$$

Таким образом, закон сохранения энергии (33.22) принимает вид $L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} q + IR = U$. В такой записи он называется *вторым законом Кирхгофа* для неразветвленной линейной цепи. Часто для такого линейного контура можно считать (как это фактически было

сделано выше), что на одних его участках преобладают тепловые потери (т. е. основную роль играет «активное» сопротивление R), на других — влияние индуктивности (катушки), на третьих — емкости (конденсаторы). Тогда второй закон Кирхгофа можно рассматривать как равенство полного напряжения U , создаваемого в цепи сторонними силами, сумме падения напряжений на участках активного сопротивления R и реактивных сопротивлений L и C (рис. 34). Первый закон Кирхгофа о разветвлении токов непосредственно следует из уравнения непрерывности. Совокупность первого и второго законов Кирхгофа представляет основу общей теории линейных цепей, в которой предполагается, как это и было неявно сделано выше, что индуктивность и емкость элементов цепи не зависят от силы тока I^* .

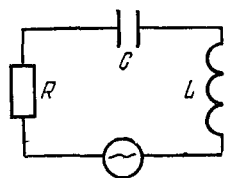


Рис. 34.

Так как $I = \dot{q}$, $I = \dot{q}$, второй закон Кирхгофа в нашем случае принимает вид

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U. \quad (33.23)$$

Решение этого уравнения при $U \neq 0$ записывается следующим образом:

$$q = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad (33.24)$$

Здесь постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями. При этом

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \lambda, \quad \lambda = \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right)^{1/2}. \quad (33.25)$$

Из последних двух формул следует, что при $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ величина ω вещественна и в контуре происходит аperiodический процесс. Если же $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\lambda = i\omega$, где $\omega \equiv \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{1/2}$ — вещественная величина и заряд q на конденсаторе (а следовательно, и ток $I = dq/dt$ в контуре) изменяется периодически с частотой ω . В частности, при $R \rightarrow 0$ получается формула Томсона $\omega = (LC)^{-1/2}$.

Выше, естественно, приходилось учитывать лишь самоиндукцию в контуре. Важным случаем, когда играют существенную роль коэффициенты взаимной индукции, является индуктивная связь между двумя контурами переменного тока. При этом, если в одном из них имеется ток I_1 , а в другом I_2 и можно пренебречь емкостями (рис. 35), то при записи закона сохранения энергии для каждого

*) См. учебники электро- и радиотехники, например А. П. Молчанов и П. Н. Занадворов, Курс электротехники и радиотехники, «Наука», 1976.

контура следует учитывать член взаимной индукции $L_{12}I_1I_2$ в выражении магнитной энергии $W_{(m)}$. Второй закон Кирхгофа для совокупности таких двух контуров записывается в виде системы двух связанных дифференциальных уравнений

$$L_{11} \frac{dI_1}{dt} \pm L_{12} \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = U,$$

$$L_{22} \frac{dI_2}{dt} \pm L_{12} \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0,$$

решая которую, можно определить токи I_1 и I_2 . Обратим внимание на то, что взаимная индукция вызывает в каждом из контуров

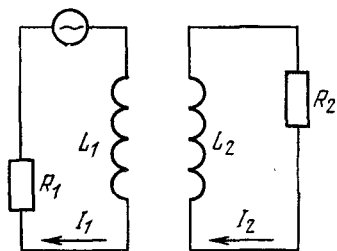


Рис. 35.

дополнительную «стороннюю» электродвижущую силу, пропорциональную скорости изменения тока в другом контуре. Здесь предположено, что сторонняя э. д. с. U действует лишь в одном из контуров.

Как известно, колебания в контуре, соответствующие, например, формуле Томсона, могут приводить к излучению электромагнитных волн в окружающее пространство. Так, контур может быть связан с антенной,

которую часто можно описывать как электрический или магнитный диполь, излучающий волны. Процесс излучения был уже описан в § 17. Происходящая при излучении утечка энергии должна компенсироваться включением источника энергии в контур с током.

§ 34. Вихревые токи. Термоэлектрические и термомагнитные явления. Эффект Холла

34.1. До сих пор мы изучали лишь свойства токов в линейных цепях. Рассмотрим теперь более общие проблемы, связанные с наличием электрического тока. Прежде всего займемся задачей об определении объемных распределений токов в сплошной среде. Такие токи возникают, например, в проводниках под действием переменного магнитного поля (вихревые токи или токи Фуко). Для их исследования нужно вернуться к общим уравнениям Максвелла. При этом, однако, предположим, что ток смещения отсутствует, т. е. $\partial D / \partial t = 0$. Это предположение фактически равносильно пренебрежению эффектами запаздывания *). Кроме того, по-прежнему будем считать, что выполняется закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, причем значение электропроводности σ то же, что и в стационарном случае. С микроскопической точки зрения это означает, что частота внешнего

*) Ср. предыдущий параграф.

поля должна быть значительно меньше, чем обратная величина времени свободного пробега электронов в проводнике. Соответствующие оценки приводят к выводу о том, что поле может изменяться, самое большое, с инфракрасными частотами.

С учетом сделанных предположений уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (34.1)$$

Из второго уравнения следует $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ *). Кроме того, будем считать $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Применяя ко второму уравнению (34.1) операцию rot и преобразуя в декартовых координатах $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ с помощью (Б.21), получим

$$\Delta \mathbf{B} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (34.2)$$

Это уравнение имеет вид уравнения теплопроводности (или диффузии). Его нужно решать при учете условий (4.10) и (4.12) на границе проводника, т. е. $B_{n1} = B_{n2}$, $H_{t1} = H_{t2}$. Если при этом распределение поля будет найдено, то распределение токов может быть вычислено по формуле $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Можно, однако, вывести и непосредственно уравнение для плотности тока. Действительно, применяя операцию rot к обеим сторонам (34.2), найдем

$$\Delta \mathbf{j} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Уравнение (34.2) чаще всего используется для решения следующих задач. Либо рассматривается случай, когда внешнее поле выключается и представляет интерес затухание поля в проводнике; либо предполагается, что внешнее поле изменяется периодически с частотой ω ; при этом исследуется проникновение магнитного поля и индуцированного им электрического поля в глубь проводника, а также распределение токов в его объеме. Рассмотрим эту вторую задачу. Пусть поверхность проводника совпадает с плоскостью $z = 0$. Магнитное поле запишем в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} e^{-i\omega t}$. Будем, кроме того, считать, что $\mathbf{B}^{(0)}$ зависит только от z (причем ось z направлена от поверхности в глубь проводника). Уравнение (34.2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}^{(0)}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{B}^{(0)} = 0,$$

где

$$k \equiv (i\mu\sigma\omega)^{1/2} = (1+i)\sqrt{\mu\sigma\omega/2}.$$

Если предположить, что $\mathbf{B} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{b} e^{ikhz}$, где \mathbf{b} — постоянный вектор, т. е. $\mathbf{B}(0) = \mathbf{b} e^{-i\omega t}$. Обозначим $d \equiv$

*) Среда предполагается однородной.

$\equiv \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$. Тогда решение записывается в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}e^{-z/d}e^{i(z/d - \omega t)}. \quad (34.3)$$

Таким образом, поле экспоненциально убывает внутри проводника. Величина d называется глубиной проникновения поля и определяет толщину того поверхностного слоя проводника, в котором следует учитывать наличие магнитного поля и токов. Существование магнитного поля и токов в этом поверхностном слое называется *скин-эффектом*. Благодаря возникновению токов при скин-эффекте происходит диссипация энергии (выделяется джоулево тепло), однако мы не будем заниматься ее вычислением. В дальнейшем будет рассмотрена также задача о распространении электромагнитных волн в проводящей среде, когда токи смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ учитываются (см. § 38).

34.2. Другое обобщение прежнего подхода к явлению электрического тока состоит в учете термодинамических соображений. Именно, будем считать, что в сплошной среде, где имеются токи проводимости, существует также градиент температуры, вызывающий поток тепла. Кроме того, присутствуют электрическое и магнитное поля. Сначала ограничимся одним лишь электрическим полем и предположим, что среда изотропна. Движение заряженных частиц в любом направлении вызывается теперь двумя факторами: и действием электрического поля, и теплопроводностью. Поэтому в выражении для тока проводимости нужно учесть дополнительный член, пропорциональный $\text{grad } T$, а в тепловом потоке — член, пропорциональный \mathbf{E} . Происходит как бы суперпозиция указанных двух факторов. Плотность тока проводимости \mathbf{j} и плотность теплового потока \mathbf{q} запишем в следующем виде:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \text{grad } T, \quad \mathbf{q} = \gamma \mathbf{E} + \zeta \text{grad } T. \quad (34.4)$$

Изучение процессов переноса — это одна из проблем неравновесной термодинамики. Часто можно считать, что выполняется принцип взаимности Онзагера, связывающий между собой процессы переноса различного типа. Мы сейчас сформулируем этот принцип, задача обоснования которого решается методами статистической физики *). Этот принцип позволяет установить соотношения между коэффициентами, входящими в формулы (34.4). Каждый ток J_i , существующий в среде (в нашем случае \mathbf{j} и \mathbf{q}), порождается некоторой соответствующей ему «обобщенной силой» X_i . Для определения этой обобщенной силы нужно принять во внимание, что благодаря сообщению количества тепла dQ рассматриваемому объему среды изменятся и энтропия S , а именно, согласно второму началу термодинамики, $dS = dQ/T$. Отсюда можно определить скорость измене-

*) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ч. I, «Наука», 1976, стр. 398.

ния энтропии $\dot{S} \equiv dS/dt$. Предположим, что \dot{S} выражается в виде линейной функции от токов J_i : $\dot{S} = - \sum_i J_i X_i$. Коэффициенты при J_i и называются *обобщенными силами*. Предположим теперь, что и сами токи можно выразить линейно через обобщенные силы, а именно

$$J_i = - \sum_k a_{ik} X_k. \quad (34.5)$$

Тогда принцип Онзагера состоит в утверждении, что (в отсутствие магнитного поля) матрица коэффициентов a_{ik} симметрична *):

$$a_{ik} = a_{ki}. \quad (34.6)$$

Рассмотрим изменение энтропии в нашем конкретном случае. В каждом элементе объема выделяется количество тепла, равное $-\text{div} \mathbf{q}$ (это есть просто определение теплового потока \mathbf{q}), и, кроме того, благодаря работе, совершаемой электрическим полем, происходит диссипация энергии \mathbf{jE} . Поэтому

$$\dot{S} = - \int \frac{\text{div} \mathbf{q}}{T} dV + \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV.$$

Первый интеграл можно преобразовать с помощью формулы (Б.14₂) и теоремы Остроградского — Гаусса. Тогда при очевидных предположениях предыдущая формула принимает вид

$$\dot{S} = \int \left(\mathbf{q}, \text{grad} \frac{1}{T} \right) dV + \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV.$$

Таким образом, роль обобщенных сил играют здесь $-\text{grad} \frac{1}{T}$ и $-\frac{\mathbf{E}}{T}$. Уравнения (34.4) преобразуются к виду (34.5) следующим образом:

$$\mathbf{j} = -\sigma T \left(-\frac{\mathbf{E}}{T} \right) - \beta T^2 \text{grad} \frac{1}{T}, \quad \mathbf{q} = -\gamma T \left(-\frac{\mathbf{E}}{T} \right) - \zeta T^2 \text{grad} \frac{1}{T}.$$

Тогда соотношение (34.6) выражается так:

$$\gamma = -\beta T, \quad \sigma = -\zeta T. \quad (34.7)$$

Удобно использовать уравнения (34.4) в виде, разрешенном относительно \mathbf{E} , а именно:

$$\mathbf{E} = r\mathbf{j} + \eta \text{grad} T, \quad \mathbf{q} = \Pi\mathbf{j} - \kappa \text{grad} T. \quad (34.8)$$

*) Линейные зависимости вида (34.4) и (34.5) выполняются, если ограничиться эффектами, в определенном смысле малыми, т. е. если считать, что токи достаточно мало изменяются при изменении обобщенных сил (см. обсуждение этого вопроса в цитируемой выше книге Ландау и Лифшица, а также в книге: И. П. Базаров, Термодинамика, «Высшая школа», 1976, гл. 12).

Здесь $r \equiv \sigma^{-1}$, $\eta = -\beta\sigma^{-1}$, $\Pi = \gamma\sigma^{-1}$, $\kappa = \gamma\beta\sigma^{-1} - \xi$. Из первого соотношения (34.7), следует

$$\Pi = \eta T, \quad \kappa = -\left(\frac{\beta^2 T}{\sigma} + \xi\right). \quad (34.9)$$

Первое из уравнений (34.8) показывает, что при $\mathbf{j} = 0$

$$\mathbf{E} = \eta \text{grad } T, \quad (34.10)$$

т. е. если в проводнике существует какое-либо распределение температур, то в нем возникает электрическое поле. Введя скалярный потенциал, можно преобразовать предыдущее равенство к виду $-\frac{d\varphi}{dT} = \eta$. Величина η называется *дифференциальной термодвижущей силой*; ее значение для разных проводников различно. Это обстоятельство приводит к возможности использовать термоэлектродвижущую силу в качестве одной из сторонних сил, т. е. к созданию термоэлемента.

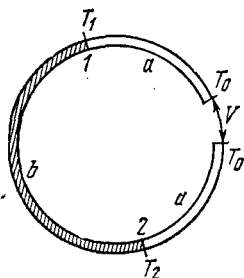


Рис. 36.

Рассмотрим цепь, составленную из двух разных металлов a и b , спаянных между собой в точках 1 и 2 (рис. 36). Обозначим через T_1 температуру в точке 1 и через

T_2 — в точке 2. Аналогично тому, как это делалось при выводе равенства (33.6), подсчитаем электродвижущую силу, возникающую в цепи. Для этого разомкнем цепь, например, где-либо на участке металла a , причем будем предполагать, что температура образовавшихся при этом свободных концов одинакова, как показано на рис. 36. Из (33.6) и (34.10) получаем

$$U = \oint \eta \frac{dT}{ds} ds = \int_{T_1}^{T_2} (\eta_b - \eta_a) dT.$$

Все остальные коэффициенты, входящие в уравнения (34.8) определяются, так же как и η , конкретными свойствами данного проводника. Это приводит к целому ряду дальнейших эффектов. Пусть ток \mathbf{j} проходит через точку спая двух различных металлов a и b . Во всех точках цепи температуру будем считать одинаковой. Согласно второму уравнению (34.8) по обе стороны спая возникнут потоки тепла q_a и q_b , обусловленные электрическим током (рис. 37); причем, вообще говоря, $q_a \neq q_b$. Поэтому будет существовать избыточное тепло W , которое выделяется или поглощается в спая, а именно

$$W = q_a - q_b = (\Pi_a - \Pi_b) j.$$

Этот эффект называется *эффектом Пельтье*, а коэффициент Π — коэффициентом Пельтье. Будет ли тепло выделяться или поглощаться (т. е. каков знак W), зависит от направления тока.

Пусть теперь существует градиент температуры. Вычислим более подробно количество тепла Q , которое при этом выделяется в проводнике. Как мы уже видели выше, при подсчете изменения энтропии, для единицы объема

$$Q = jE - \operatorname{div} q$$

в единицу времени. Подставим сюда (34.8):

$$Q = rj^2 + \eta(j, \operatorname{grad} T) - \frac{d\Pi}{dT}(j, \operatorname{grad} T) = rj^2 - \tau(j, \operatorname{grad} T).$$

При этом мы считаем, что $\operatorname{grad} \Pi = \frac{d\Pi}{dT} \operatorname{grad} T$ и член с коэффициентом теплопроводности в (34.8) вносит сравнительно малый вклад.

Первое слагаемое описывает просто джоулево тепло, второе же соответствует так называемому *эффекту Томсона* (дополнительное количество тепла, выделяющееся в результате неравномерной нагретости проводника). Коэффициент Томсона τ связан с коэффициентом Пельтье следующим соотношением:

$$\tau = -\eta + \frac{dT}{dT} = T \frac{d\eta}{dT}.$$

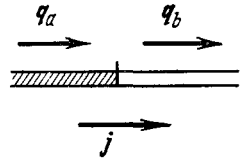


Рис. 37.

Здесь использована формула (34.9). Эффект Томсона легко отделить от джоулева тепла, так как последнее пропорционально j^2 и, в противоположность томсонову теплу, не зависит от направления тока. Коэффициент τ может быть и положительным, и отрицательным. В первом случае тепло выделяется, когда ток направлен вдоль градиента температуры и поглощается при его противоположном направлении. Во втором случае имеют место обратные соотношения.

34.3. Если проводник анизотропен, то нужно записывать обобщенные равенства (34.8) в виде

$$E_i = r_{ik} j^k + \eta_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad q_i = \Pi_{ik} j^k - \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (34.11)$$

Тогда принцип Онзагера выражается так:

$$r_{ik} = r_{ki}, \quad \kappa_{ik} = \kappa_{ki}, \quad \Pi_{ik} = T\eta_{ki}. \quad (34.12)$$

Предположим теперь, что проводящая среда находится во внешнем магнитном поле H . Как показывают опыт и микроскопическая теория, в этом случае все коэффициенты в уравнениях (34.11) становятся функциями от этого магнитного поля. Тогда принцип Онзагера следует записывать в обобщенной форме, а именно

$$r_{ik}(H) = r_{ki}(-H), \quad \kappa_{ik}(H) = \kappa_{ki}(-H), \quad \Pi_{ik}(H) = T\eta_{ki}(-H). \quad (34.13)$$

Даже если в отсутствие магнитного поля среда изотропна, включение его обычно вызывает анизотропию. Так, например, в случае, когда магнитное поле достаточно слабое, можно рассмотреть разложение функции $r(\mathbf{H})$ по степеням его компонент, т. е.

$$r(\mathbf{H}) = r(0) + r_i^{(1)} H^i + r_{ik}^{(2)} H^i H^k + \dots$$

Члены с коэффициентами $r_i^{(1)}$, $r_{ik}^{(2)}$, ... описывают появляющуюся в присутствии поля зависимость свойств среды от направления. Будем считать поле настолько слабым, чтобы можно было ограничиться линейными эффектами. В таком случае, например, общий вид добавочных членов в уравнениях (34.8) легко установить, непосредственно руководствуясь свойствами преобразования поля при вращениях и отражениях в пространстве. В начале § 2 было показано, что поле \mathbf{E} является полярным вектором; то же относится и к величинам \mathbf{j} , \mathbf{q} и $\text{grad } T$. Поле же \mathbf{H} — аксиальный вектор. Поэтому, например, поправка к вектору \mathbf{E} , обладающая нужным законом преобразования полярного вектора и линейная по отношению как к \mathbf{j} , так и к \mathbf{H} , должна быть пропорциональна векторному произведению $\mathbf{H} \times \mathbf{j}$. Итак, следует ожидать, что уравнения (34.8) должны быть заменены следующими:

$$\mathbf{E} = r\mathbf{j} + R(\mathbf{H} \times \mathbf{j}) + \eta \text{grad } T + N(\mathbf{H} \times \text{grad } T), \quad (34.14_1)$$

$$\mathbf{q} = \Pi\mathbf{j} + B(\mathbf{H} \times \mathbf{j}) - \kappa \text{grad } T + L(\mathbf{H} \times \text{grad } T). \quad (34.14_2)$$

Здесь R , N , B , L — постоянные коэффициенты. Принцип симметрии кинетических коэффициентов приводит к выводу, что $B = NT$.

Если положить $\text{grad } T = 0$, то первое из предыдущих уравнений показывает, что при прохождении тока по проводнику в присутствии магнитного поля возникает электрическое поле, равное $R(\mathbf{H} \times \mathbf{j})$. Разложению коэффициента r по степеням поля \mathbf{H} должно соответствовать аналогичное разложение электропроводности σ . При записи токов в виде (34.4) это приведет к появлению поправки в выражении для \mathbf{j} , причем из аналогичных соображений, относящихся к закону преобразования, видно, что эта поправка должна быть пропорциональна векторному произведению $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Таким образом, под действием магнитного поля появляется дополнительный ток в направлении, перпендикулярном электрическому полю, причем величина этого тока пропорциональна магнитному полю. Оба описанные здесь явления представляют собой различные аспекты так называемого *эффекта Холла*.

34.4. С помощью уравнений (34.14) можно рассмотреть и несколько других наблюдаемых эффектов. Предположим, что ось z декартовых координат совпадает с направлением поля \mathbf{H} и рассмотрим тот частный случай, когда ток направлен по оси x : $\mathbf{j} = j_x$.

Пусть, прежде всего, в направлении оси x отсутствует градиент температуры, т. е. $\partial T / \partial x = 0$, а вдоль оси y нет потока тепла,

$q_y = 0$. Спроектируем уравнение (34.14₂) на ось y . Тогда $\partial T / \partial y = = \text{ВН}j/\kappa$. Это означает, что ток, направленный вдоль x , при действии магнитного поля, направленного вдоль оси z , вызывает градиент температуры вдоль оси y . Это явление называется *эффектом Эттингсгаузена*.

Предположим теперь, что по-прежнему $q_y = 0$, но, в противоположность предыдущему случаю, $j = 0$, а $\partial T / \partial x \neq 0$. Снова проектируя уравнение (34.14₂) на ось y , получим градиент температуры, обусловленный магнитным полем и направленный по оси y : $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{L}{\kappa} H \frac{\partial T}{\partial x}$. Мы получили формулу для *эффекта Ледюка* —

Риги: магнитное поле оказывает влияние на теплопроводность

С помощью уравнения (34.14₁) покажем, что градиент температуры по оси x в присутствии магнитного поля может обуславливать возникновение термо-э. д. с. вдоль оси y . Действительно, если $j = 0$ и $\partial T / \partial y = 0$, то $E_y = \text{НН} \partial T / \partial x$. Такое влияние магнитного поля на термо-э. д. с. называется *эффектом Нернста*.

Мы ограничимся здесь приведенными элементарными сведениями о термоэлектрических и термомагнитных явлениях, которые все же дают некоторое представление о причинах их возникновения. Исследование процессов переноса в проводниках под действием электромагнитного поля составляет обширную и весьма важную часть современной неравновесной статистической термодинамики. Заметим также, что среди причин, вызывающих электрический ток, мы не рассматривали здесь превращения химической энергии в электрическую, которое обуславливает действие гальванических элементов.

§ 35. Элементы магнитной гидродинамики

35.1. Предмет магнитной гидродинамики состоит в исследовании свойств проводящих жидкостей или газов в присутствии электромагнитного поля. Благодаря деформируемости этих сред взаимодействие поля с имеющимися в них токами может оказывать существенное влияние на их гидродинамические свойства. Так же, как и в остальной части этой книги, мы ограничимся здесь феноменологическим подходом и не будем заниматься вопросами, касающимися микроскопической структуры среды. Однако следует представлять себе, что рассматриваемая в магнитной гидродинамике жидкость состоит из достаточно свободно перемещающихся друг относительно друга положительно и отрицательно заряженных частиц (например, ионов и электронов). В большинстве случаев можно считать, что эта среда в целом нейтральна, т. е. находящиеся в любом макроскопически малом объеме полные положительный и отрицательный заряды равны по абсолютной величине. Такими свойствами обладают металлы в расплавленном состоянии и, что особенно важно,

полностью ионизованные газы (это состояние вещества называется *плазмой*).

Исследование феноменологических свойств плазмopodobных сред методами магнитной гидродинамики, а их микроскопических свойств с помощью статистической физики в настоящее время интенсивно развивается и играет чрезвычайно большую роль в современной астрофизике и в теории управляемых термоядерных реакций *). В обоих этих случаях рассматриваются вполне ионизованные среды. Мы изложим здесь лишь самые элементарные сведения о магнитной гидродинамике, которые все же позволяют уяснить специфику этого предмета.

Приступая к изучению движущейся среды, необходимо различать две системы отсчета: лабораторную и сопутствующую (лагранжеву). Обозначим через \mathbf{E} и \mathbf{B} электромагнитное поле в лабораторной системе, а через \mathbf{E}' и \mathbf{B}' — в сопутствующей. Пусть (возможно, в течение некоторого достаточно малого промежутка времени) среда движется по отношению к лабораторной системе с постоянной скоростью \mathbf{v} . Тогда сопутствующая система является инерциальной, а поля \mathbf{E}' , \mathbf{B}' и \mathbf{E} , \mathbf{B} связаны преобразованием Лоренца, которое было рассмотрено в § 7. Если $v \ll c$, то нужно применять формулы (7.13'). Используя Международную систему единиц, необходимо учесть замечание, сделанное непосредственно вслед за уравнением (7.21). Тогда (7.13') записывается в виде

$$\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' \simeq \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \simeq \mathbf{B}. \quad (35.1)$$

Поучительно рассмотреть вывод первого из нерелятивистских соотношений (35.1) с помощью закона индукции Фарадея для движущегося контура. Если бы контур покоился по отношению к лабораторной системе отсчета, то закон индукции следовало бы записать в виде

$$\oint \mathbf{E} \, ds = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (35.2)$$

Так как в нашем приближении $\mathbf{B}' \simeq \mathbf{B}$, движение среды можно рассматривать как смещение ее относительно магнитного поля. Поэтому отличие \mathbf{E}' (т. е. напряженности, определяющей э. д. с. в движущемся контуре) от \mathbf{E} объясняется с точки зрения лабораторной системы необходимостью применять закон Фарадея для контура, движущегося вместе со средой, а именно

$$\oint \mathbf{E}' \, ds = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (35.3)$$

*) Последовательное изучение магнитной гидродинамики было начато работами Х. Альвена в 1942 г.

так как зависимость правой части от времени обусловлена и подынтегральным выражением, и перемещением контура, благодаря чему пределы интегрирования являются переменными (рис. 38). Вычислим изменение интеграла:

$$\begin{aligned} d \int \mathbf{B} n \, d\sigma &= \int_{t+dt} \mathbf{B} n \, d\sigma_2 - \int_t \mathbf{B} n \, d\sigma_1 \simeq \\ &\simeq \int_t \mathbf{B} n \, d\sigma_2 - \int_t \mathbf{B} n \, d\sigma_1 + \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} n \, d\sigma_1 \, dt. \end{aligned} \quad (35.4)$$

Здесь, как видно на рис. 38, σ_1 — поверхность, натянутая на контур в момент t , σ_2 — то же в момент $t + dt$, \mathbf{n} — единичный вектор нормали. Во втором равенстве использовано разложение в ряд Тейлора $\mathbf{B}(t + dt) \simeq \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_t dt$. Таким образом, подынтегральное выражение в первом слагаемом правой части определяется теми значениями, которые поле \mathbf{B} принимает в момент времени t в тех точках пространства, которые в момент $t + dt$ будут заняты поверхностью σ_2 . Рассмотрим поэтому цилиндрическую поверхность, изображенную на рис. 38, беря во всех ее точках значения вектора \mathbf{B} , принимаемые им в момент t . Тогда, согласно уравнению Максвелла (М'.2), $\oint \mathbf{B} n \, d\sigma = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} n \, d\sigma &= - \int \mathbf{B} n \, d\sigma_2 + \\ &+ \int \mathbf{B} n \, d\sigma_1 + \int \mathbf{v} n \, d\sigma, \end{aligned}$$

где последний интеграл вычисляется по боковой поверхности цилиндра, а \mathbf{v} — внешняя нормаль к этой поверхности. Разные знаки первых двух слагаемых объясняются, разумеется, тем, что у нас \mathbf{n} сохраняет свое направление при движении контура, в применениях же теоремы Остроградского — Гаусса считается положительной внешняя нормаль. Из рис. 38 видно, что для боковой поверхности можно записать $\mathbf{v} \, d\sigma = \mathbf{v} \, dt \times d\mathbf{s}$. Учитывая, что $\mathbf{B} [\mathbf{v} \times d\mathbf{s}] = -[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \, d\mathbf{s}$, из предыдущего равенства получаем

$$\int_t \mathbf{B} n \, d\sigma_2 - \int_t \mathbf{B} n \, d\sigma_1 = - \oint [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \, d\mathbf{s} \, dt.$$

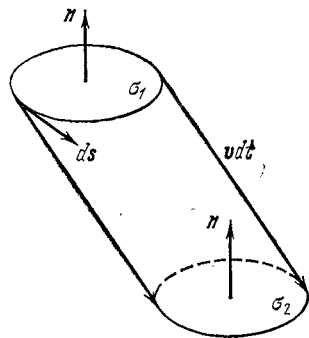


Рис. 38.

Подставим этот результат в (35.4) и учтем (35.2) и (35.3). Тогда

$$\oint (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \, d\mathbf{s} = \oint [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \, d\mathbf{s}. \quad (35.3')$$

Это равенство удовлетворяется соотношением (35.1). Член $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ в выражении для \mathbf{E}' представляет с точки зрения лабораторной системы отсчета не что иное, как силу Лоренца, действующую на заряды, движущиеся в магнитном поле. Наблюдатель же, неподвижно связанный со средой, измеряет вектор \mathbf{E}' «в целом», как э. д. с. в контуре.

35.2. Перейдем к вопросу о связи между токами проводимости в среде, измеряемыми в рассматриваемых двух системах отсчета. Она выражается первой из формул (7.18). В нашем нерелятивистском пределе, когда $\gamma \approx 1$, получим $\mathbf{j} = \mathbf{j}' + \rho' \mathbf{v}$ (второе слагаемое называется *конвекционным током*). Если среда, как мы предполагаем, нейтральна, т. е. $\rho' = 0$, то $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$. Будем считать, что в неподвижной среде выполняется закон Ома $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$. Тогда из предыдущих соображений и из формулы (35.1) следует, что в лабораторной системе (т. е. для движущейся среды) закон Ома принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]). \quad (35.5)$$

Такие явления, как эффект Холла, мы здесь учитывать не будем.

С помощью (35.5) можно сформулировать условие, при котором рассматриваемая жидкость является идеальным проводником. Оно состоит в требовании, чтобы $\sigma \rightarrow \infty$ при конечной плотности тока \mathbf{j} . Такое требование выполняется, если

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (35.6)$$

При $\mathbf{v} = 0$ это сводится просто к отсутствию электрического поля внутри идеального проводника. При $\mathbf{v} \neq 0$ условие (35.6) нетривиально. С точки зрения закона преобразования (35.1) оно означает $\mathbf{E}' = 0$, т. е. отсутствие электродвижущей силы в движущемся контуре. Другими словами, если Φ — магнитный поток сквозь движущийся контур, то, как видно из (35.3), $d\Phi/dt = 0$, если этот контур движется вместе с бесконечно проводящей средой. Это равенство называется *условием замороженности* магнитных силовых линий в среду. Как видно из рассмотренного вывода закона индукции, условие замороженности означает, что всякое движение среды увлекает за собой магнитные силовые линии. Другими словами, если магнитная силовая линия в некоторый момент времени проходит через определенный элемент среды, а он испытывает перемещение, то эта линия будет проходить через него и после перемещения. Ясно, что направление скорости перемещения элемента среды, вообще говоря, не должно совпадать с направлением магнитных силовых линий. Следует обратить внимание на то, что условие замороженности было получено для совершенно произвольного контура, проходящего через частицы среды и движущегося вместе с ними. Это необходимо упомянуть потому, что при заданной конфигурации магнитного поля могут существовать такие специально

подобранные движущиеся контуры, что магнитный поток, проходящий сквозь них, остается постоянным. Однако если условие вмороженности не выполняется, то всегда найдутся и такие контуры, что соответствующий магнитный поток будет изменяться.

Можно получить также и запись условия вмороженности в дифференциальной форме. Из (35.3') с помощью теоремы Стокса и уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, соответствующего формуле (35.2), следует, что закон индукции для движущегося контура может быть приведен к следующему виду:

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (35.3'')$$

Поэтому условие (35.6) равносильно равенству

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (35.6')$$

В зависимости от удобства можно использовать как это уравнение, так и исходное соотношение (35.6).

Обозначим через \mathbf{v}_∞ составляющую скорости \mathbf{v} , ортогональную полю \mathbf{B} , для случая $\sigma \rightarrow \infty$. Из (35.6) видно, что

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (35.7)$$

Такое движение жидкости со скоростью \mathbf{v}_∞ называется ее *электрическим дрейфом*. Формула (35.7) совпадает с выражением для электрического дрейфа \mathbf{v}_E (см. стр. 207), полученным при изучении движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

35.3. В общем случае, когда электропроводность произвольна, ясно, что движение проводящей жидкости должно определяться совместно с действующими в ней полями. Действительно, основные уравнения гидродинамики имеют в данном случае следующую форму:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \text{div } (\kappa \mathbf{v}) = 0, \quad (35.8)$$

$$\kappa \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}. \quad (35.9)$$

Здесь κ — плотность массы жидкости. Первое из этих соотношений — уравнение непрерывности. Второе же — уравнение движения, основная черта которого состоит в присутствии магнитной силы $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, действующей на токи, имеющиеся в жидкости. Член \mathbf{F} описывает все прочие внешние силы, под влиянием которых совершается движение, например,

$$\mathbf{F} = -\text{grad } p + \kappa \mathbf{g}, \quad (35.10)$$

где p — давление, а \mathbf{g} — ускорение силы тяжести. В правой части (35,10) при необходимости могут быть учтены также и силы вязкости.

Производная по времени в (35.9) — субстанциональная, т. е.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad}). \quad (35.11)$$

Именно наличие магнитного поля в правой части (35.9) связывает это уравнение с уравнениями Максвелла. Так как в хорошем проводнике ток смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ можно считать пренебрежимо малым, уравнения Максвелла следует применять в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad (35.12)$$

При этом мы еще предполагаем, что в рассматриваемой среде $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ и μ постоянна (во многих случаях $\mu \simeq \mu_0$). Таким образом, основными уравнениями магнитной гидродинамики следует считать (35.8), (35.9) и (35.12). В общем случае они подлежат совместному решению при определенных граничных и начальных условиях. Помимо этого, нужно иметь в виду закон Ома в форме (35.5).

Из системы уравнений магнитной гидродинамики немедленно вытекает наличие в жидком проводнике специфических эффектов, которые называются магнитной диффузией, магнитной вязкостью и магнитным давлением.

Явление *магнитной диффузии* характеризует поведение магнитного поля в движущемся проводнике. Для его рассмотрения следует воспользоваться уравнениями (35.12) и (35.5). С их помощью видно, что

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} (\sigma^{-1} \mathbf{j} - [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) = -\frac{1}{\mu \sigma} \text{rot rot } \mathbf{B} + \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

В декартовой системе координат $\text{rot rot } \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$, так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Поэтому предыдущее уравнение принимает такую форму:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{B} + \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (35.13)$$

В частности, для наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, т. е. при $\mathbf{v} = 0$, уравнение (35.13) имеет вид обычного уравнения диффузии (для каждой компоненты вектора \mathbf{B}). Таким образом, при конечных значениях электропроводности σ величина магнитного поля в каждой точке проводника убывает со временем. Этот эффект можно себе наглядно представить как убывание со временем плотности магнитных силовых линий. Конкретный характер такой диффузии может быть определен с помощью интегрирования указанного уравнения, если известна форма проводника, граничные и начальные условия. Коэффициент $(\mu \sigma)^{-1}$ играет роль, аналогичную коэффициенту диффузии. Если обозначить через l характерные размеры проводника, то величина $\tau \sim \mu \sigma l^2$ имеет размерность времени и характеризует время релаксации поля в данном проводнике,

При $\sigma \rightarrow \infty$, но конечном ΔB диффузия практически отсутствует, что соответствует рассмотренному выше условию вмороженности.

Обратимся теперь к уравнению движения жидкости (35.9). Если представить скорость движения в виде суммы составляющих $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, где \mathbf{v}_\parallel параллельна полю \mathbf{B} , а \mathbf{v}_\perp ортогональна ему, то магнитная сила приводится к виду

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - \sigma (\mathbf{B} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) = \sigma B^2 (\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_\perp),$$

где \mathbf{v}_∞ — скорость электрического дрейфа для случая бесконечной электропроводности, определяемая формулой (35.7). Таким образом, уравнение (35.9) может быть записано в виде системы

$$\kappa \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \mathbf{F}_\perp + \sigma B^2 (\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_\perp), \quad \kappa \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \mathbf{F}_\parallel.$$

Отсюда видно, что в направлении, ортогональном полю, действует сила трения, пропорциональная скорости движения и имеющая чисто электромагнитное происхождение. Это явление, приводящее к торможению течения, называется *магнитной вязкостью* жидкого проводника.

Магнитные силы могут быть представлены также и в несколько ином виде, если воспользоваться соотношениями (3.11) и (3.12) между ними и магнитной частью тензора натяжений Максвелла, а именно:

$$\frac{\partial T^{ab}}{\partial x^b} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_a, \quad T^{ab} = \frac{1}{\mu} \left(B^a B^b - \frac{\delta^{ab}}{2} B^2 \right). \quad (35.14)$$

Отсюда

$$\mu [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_a = B^a \frac{\partial B^b}{\partial x^b} - \frac{\delta^{ab}}{2} \frac{\partial (B^2)}{\partial x^b} + \frac{\partial B^a}{\partial x^b} B^b,$$

т. е., так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$,

$$\mu [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \text{ grad}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \text{grad} (B^2). \quad (35.15)$$

Если внешние силы неэлектромагнитного происхождения имеют вид (35.10), причем можно еще подставить $\mathbf{g} = -\text{grad } \chi$, где χ — гравитационный потенциал, то, считая $\kappa = \text{const}$, из (35.9) и (35.15) получим уравнение движения

$$\kappa \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad} (p + p_m + \kappa \chi) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \text{ grad}) \mathbf{B}. \quad (35.16)$$

Величина

$$p_m \equiv \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{BH}{2} \quad (35.17)$$

называется *магнитным давлением*. Смысл этого названия ясен из уравнения (35.16), где величина p_m входит в сумме с гидростатическим давлением p .

Значение двух слагаемых в выражении (35.16) для объемной магнитной силы можно уяснить из того факта, что поверхностные силы, действующие на границу объема, определяются, согласно § 3, с помощью тензора натяжений (35.14) следующим образом:

$$\varphi^i = T^{ij}n_j = \frac{1}{\mu} B^i (\mathbf{Bn}) - \frac{1}{2\mu} B^2 n^i. \quad (35.18)$$

Такая сила φ , действующая на единичную площадку, складывается из двух компонент: одна из них направлена по полю \mathbf{B} , а другая — по нормали \mathbf{n} . Этим компонентам и соответствуют слагаемые объемной силы. Первая из них описывает, таким образом, натяжения вдоль силовых линий, вторая же — силу, сжимающую объем по нормали к его поверхности (в предыдущей формуле \mathbf{n} — внешняя нормаль, а соответствующее слагаемое имеет знак минус), т. е. силу давления.

Во многих случаях силы натяжения в (35.16) можно считать достаточно малыми по сравнению с давлением и пренебрегать ими. Тогда условие статического равновесия жидкости записывается в виде

$$p + p_m + \kappa\chi = \text{const.}$$

Отсюда ясно, что гидростатическое давление p может быть скомпенсировано соответствующим выбором магнитного давления p_m . Другими словами, магнитное поле подходящей конфигурации может быть использовано для удержания жидкости в покое («магнитная бутылка»). Это явление называется *пинч-эффектом*. При этом, однако, достигаемое равновесие неустойчиво по отношению к случайным деформациям жидкости и легко разрушается ими *).

§ 36. Простейшие свойства ферромагнетиков

36.1. Макроскопическое описание магнитных свойств вещества основано на соотношении (1.17), которое устанавливает связь между тремя характеристиками поля и среды: магнитной индукцией \mathbf{B} , магнитной напряженностью \mathbf{H} и намагниченностью \mathbf{M} . В § 1 уже говорилось, что намагниченность является функцией поля $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ (при желании, аргументом этой функции можно считать \mathbf{B} , а не \mathbf{H}). Для линейных сред выполняется равенство (1.26); намагниченность в этих средах может поддерживаться лишь присутствием внешнего поля \mathbf{H} и обращается в нуль вместе с последним. В случае $\chi_m < 0$ намагниченность таких сред противоположна внешнему полю (диамагнетизм), а при $\chi_m > 0$ она направлена вдоль внешнего поля

*) Подробное изложение магнитной гидродинамики см., например, в книге: Дж. Шерклиф, Курс магнитной гидродинамики, «Мир», 1967; о ее применениях в астрофизике см. С. Б. Пикельнер, Основы космической электродинамики, «Наука», 1966.

(парамагнетизм). Диамагнитный эффект, в принципе, возникает в любом веществе; он связан с возникновением молекулярных токов, индуцируемых внешним полем, магнитные моменты которых направлены так, чтобы скомпенсировать это последнее (по правилу Ленца). Парамагнетизм имеет место в тех случаях, когда частицы вещества обладают собственными магнитными моментами, которые ориентируются вдоль внешнего поля. Разумеется, этот эффект может быть наблюдаем лишь тогда, когда он достаточно велик, чтобы «перекрыть» влияние диамагнетизма.

В теоретическом объяснении магнитных свойств особенно существенную роль играет применение квантовой механики. Так, например, в силу так называемой теоремы Ван-Леувена — Терлецкого, в термодинамически равновесном состоянии магнитный момент любой классической системы движущихся зарядов, помещенных в постоянное внешнее поле, равен нулю. В классической теории магнетизма ненулевой результат (например, для намагничивания диа- и парамагнетиков) получается поэтому лишь путем неявного учета квантотеоретических соображений *).

Что касается феноменологических соотношений для линейных магнитных сред, то они могут быть получены совершенно так же, как в теории диэлектриков, рассмотренной в §§ 31 и 32. Нужно лишь заменить в этих параграфах E — на H , D — на B и ϵ — на μ . Неоднородность или анизотропию линейных магнитных сред на практике приходится учитывать редко.

Природа нелинейных магнетиков также объясняется лишь на основе квантовой теории. В конечном итоге она сводится к собственным (спиновым) моментам элементарных частиц (электронов, ядер), которые упорядочиваются посредством специфически квантовых взаимодействий (обменных сил). Однако нужно изучать и те закономерности, которые проявляются на макроскопическом уровне при феноменологическом описании вещества.

Именно простейшие из этих закономерностей мы и рассмотрим в настоящем параграфе. Из многих разновидностей нелинейных магнетиков (ферромагнетики, антиферромагнетики, ферриты), мы будем для определенности иметь в виду лишь *ферромагнетики* (т. е. «постоянные магниты», у которых в упорядоченном состоянии спиновые моменты электронов взаимно параллельны) и будем рассматривать элементарные свойства порождаемого ими магнитного поля.

Пусть ферромагнетик помещен в магнитное поле, создаваемое, например, электрическими токами. Если вначале намагниченность ферромагнетика равна нулю, а поле медленно увеличивать (увеличивая силу электрического тока), то кривая $B(H)$ в любой

*) См. обсуждение этого вопроса в монографии: С. В. Вонсовский, Магнетизм, «Наука», 1971, § 4, гл. 5.

точке ферромагнетика имеет вид, показанный штриховой кривой на рис. 39. Для намагничивания среды при этом производится работа, численно равная части обозначенного на рис. 39 прямоугольника, расположенной над кривой. Начнем теперь уменьшать внешнее поле. Функция $B(H)$ не только нелинейна, но и неоднозначна, а именно, при уменьшении поля до нуля величина B

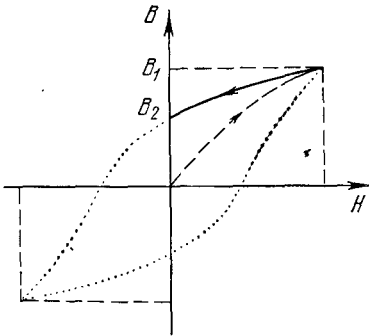


Рис. 39.

уменьшается не по прежней кривой, а по (сплошной) кривой, лежащей несколько выше. В результате при нулевом внешнем поле H вектор B отличен от нуля, т. е. вещество обладает остаточной намагниченностью $M(0)$. При дальнейшем изменении поля можно получить остальную часть кривой, показанную на рис. 39 пунктирной кривой. Изменение B отстает от изменения H ; это явление называется *гистерезисом*.

При гистерезисе происходит потеря энергии в виде тепла, которую можно подсчитать следующим образом. При изменении поля от B_1 до B над единицей объема ферромагнетика производится работа

$$W = \int_{B_1}^B H dB = HB \Big|_{B_1}^B - \int_{H_1}^H B dH.$$

Вычисление при изменении по гистерезисной петле с возвращением в точку B_1 дает

$$W = - \oint B dH.$$

Это и есть потеря энергии на гистерезис в единице объема *).

При устранении внешнего поля в ферромагнетиках устанавливается распределение «остаточной намагниченности» $M_0 \equiv M(0)$. Оно является источником магнитного поля в пространстве, окружающем ферромагнетик. Действительно, обратимся к уравнению Максвелла (М.4'). При $j = 0$, $E = 0$, $P = 0$ оно принимает

*) Подобная показанной на рисунке «предельная» замкнутая кривая гистерезиса получается, если при увеличении H каждый раз намагничивать ферромагнетик до насыщения. Если же намагнитить не до насыщения, то, уменьшая H , мы будем перемещаться по кривой, лежащей ниже предельной. В результате, выбрав подходящий путь намагничивания, можно попасть в любую точку (H, B) , лежащую внутри петли гистерезиса. Это значит, что зависимость $B(H)$ бесконечно многозначна, а получаемые значения B и M определяются предшествующей «историей» данного образца.

вид $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{M}_0$, если вся намагниченность сводится к \mathbf{M}_0 . Правая часть этого уравнения играет роль источника по отношению к полю \mathbf{B} . Отсюда видно, что можно положить $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_0 = -\mu_0 \text{grad } \psi$, где ψ — скалярная функция пространственных координат (знак и множитель выбраны из соображений удобства), а при сравнении с (1.17) видно, что $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$. Уравнение для функции ψ может быть получено с помощью уравнения (М.2), которое после подстановки соотношения (1.17) принимает вид

$$\text{div } \mathbf{H} = -\text{div } \mathbf{M}_0. \quad (36.1)$$

Таким образом, для функции ψ получаем уравнение Пуассона

$$\Delta \psi = \text{div } \mathbf{M}_0. \quad (36.2)$$

Ясно, что совершенно аналогичный результат следует из уравнения Максвелла (М.4) при $\mathbf{j} = 0$. Более того, мы уже рассматривали его в § 12, но пришли к выводу, что введение скалярного магнитного потенциала ψ для поля, порождаемого токами, некорректно. В данном случае, однако, возражения, рассмотренные в § 12, неприменимы, если все магнитное поле возникает за счет остаточной намагниченности \mathbf{M}_0 .

Уравнение (36.2) формально совпадает с основным уравнением (11.1) для электростатического потенциала, если ввести «плотность магнитного заряда» ρ_m , определив ее равенством

$$\rho_m = -\text{div } \mathbf{M}_0. \quad (36.3)$$

Мы сейчас увидим, что понятие магнитного заряда все же лишено физического смысла, как это и должно быть в соответствии с интерпретацией уравнений Максвелла, приведенной в § 1. Однако для ферромагнетиков оно иногда полезно с формальной точки зрения.

Рассмотрим решение уравнения (36.2), обращая особое внимание на возможность наличия поверхностей разрыва поля намагниченности. Например, внутри поверхности постоянного магнита, помещенного в немагнитную среду, намагниченность отлична от нуля, а вне ее — равна нулю. Пусть σ' — замкнутая поверхность, охватывающая объем V_1 . Введем вспомогательную поверхность Σ , окружающую снаружи поверхность σ' , и обозначим через V_2 объем, находящийся между этими двумя поверхностями (рис. 40). Предположим, что намагниченность изменяется скачкообразно при переходе поверхности σ' . Мы опустим в дальнейшем индекс 0 и обозначим через \mathbf{M}_1 намагниченность вещества в объеме V_1 и

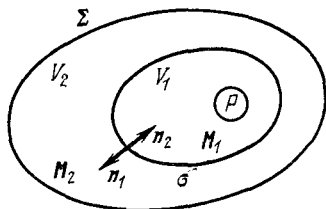


Рис. 40.

через M_2 — в объеме V_2 . Нас интересует магнитный потенциал в точке P (она может быть взята как в объеме V_1 , так и в объеме V_2). Для решения уравнения Пуассона с учетом поверхности разрыва σ' можно применить формулу Грина (Б.28). При этом точку наблюдения P , как это и было в свое время сделано в § 11, нужно вначале окружить малой сферой, радиус которой устремляется к нулю. Поверхностный интеграл в формуле Грина (в которой функцию ψ и ее градиент следует считать непрерывными) нужно при этом разбить на четыре части, а именно интеграл по только что упомянутой-малой сфере, интеграл по внешней поверхности Σ и интегралы по внешней и внутренней (относительно объема V_1) сторонам поверхности σ'^*). Считая интеграл по Σ , как обычно, равным нулю и оценивая интеграл по малой сфере точно так же, как это было сделано в § 11, получим результат:

$$4\pi\psi(P) = \int \frac{\rho_m}{R} dV + \oint_{\sigma^+} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\psi^+}{\partial n_1} - \psi^+ \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{1}{R} \right] d\sigma^+ + \oint_{\sigma^-} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\psi^-}{\partial n_2} - \psi^- \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{1}{R} \right] d\sigma^- \quad (36.4)$$

Здесь σ^+ — внутренняя сторона поверхности σ' , а σ^- — ее внешняя сторона и соответственно ψ^+ и ψ^- — значения магнитного потенциала на каждой из этих сторон. Учтем теперь, что $\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial n_2}$

и обозначим $\frac{\partial}{\partial n_1} \equiv \frac{\partial}{\partial n}$. Кроме того, предположим, что сам магнитный потенциал остается непрерывным при переходе через поверхность σ' . Тогда предыдущее уравнение принимает вид

$$4\pi\psi(P) = \int \frac{\rho_m}{R} dV + \oint \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_2 \right] \frac{d\sigma'}{R} \quad (36.5)$$

Величину в квадратных скобках естественно назвать *магнитным поверхностным зарядом*; обозначим его через λ_m . Смысл этой величины более ясен, если вспомнить граничное условие для магнитного поля, т. е.

$$(H_2 - H_1) n = (M_1 - M_2) n \quad (36.6)$$

Таким образом, λ_m оказывается равной $M_{1n} - M_{2n}$. Что же касается объемного интеграла, то, вспоминая определение (36.3), можно подынтегральную функцию привести к виду

$$-\frac{\operatorname{div}' M}{R} = -\operatorname{div}' \left(\frac{M}{R} \right) + \left(M, \operatorname{grad}' \frac{1}{R} \right).$$

*) Точнее, нужно ввести с внешней и внутренней стороны поверхности σ' близкие к ним вспомогательные поверхности и рассмотреть предельный переход, когда эти последние неограниченно сближаются с σ' . Наличие σ' заставляет в формуле Грина учитывать вначале влияние в точке P намагниченностей объемов V_1 и V_2 в отдельности.

Первый член в правой части позволяет использовать теорему Остроградского — Гаусса (причем вначале рассматривается весь объем внутри поверхности Σ , ибо роль поверхности разрыва уже учтена выше). Если, как это обычно бывает, намагниченность на Σ по тем или иным причинам равна нулю, то формула (36.5) получает следующий окончательный вид:

$$4\pi\psi(P) = \int \left(\mathbf{M}, \text{grad}' \frac{1}{R} \right) dV + \oint \frac{(M_{1n} - M_{2n})}{R} d\sigma'. \quad (36.7)$$

Отсюда вытекает, что понятие магнитного заряда действительно исключается. Первый член формулы (36.7) может быть истолкован как поле, создаваемое системой диполей, распределенной в пространстве с объемной плотностью \mathbf{M} дипольного момента. Именно этот магнитный момент и следует считать первичным понятием в теории постоянных магнитов. Второй член описывает влияние поверхностной намагниченности.

§ 36.2. Простой, но поучительный пример доставляет случай цилиндрического постоянного магнита (внутри которого намагниченность постоянна), помещенного в среду с нулевой намагниченностью (например, вакуум). Здесь удобнее для вычисления поля, создаваемого магнитом, использовать формулу (36.5), в которой объемный интеграл обращается в нуль (так как $\text{div}' \mathbf{M} = 0$). Будем считать также, что вектор \mathbf{M} внутри магнита направлен параллельно его оси, так что $M_{1n} = 0$ на его боковой поверхности, тогда остается лишь интеграл по основаниям цилиндра σ_1 и σ_2 , так что

$$4\pi\psi = \int \frac{M_{1n}}{R} d\sigma_1 - \int \frac{M_{2n}}{R} d\sigma_2.$$

В этом простом примере величины M_{1n} и M_{2n} играют роль, аналогичную поверхностным зарядам разного знака, нанесенным на основания цилиндра. Другими словами, возникают «магнитные полюсы». Феноменологически, таким образом, можно считать, что заряды этих полюсов создают внутри магнита некоторое поле \mathbf{H}_\circ , направленное противоположно внешнему полю $\mathbf{H}_{\text{внешн}}$ и намагниченности \mathbf{M} . Поэтому \mathbf{H}_\circ называется *размагничивающим полем*. Внутри магнита суммарное поле равно $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{внешн}} + \mathbf{H}_\circ$. Если, как часто бывает, имеет место пропорциональность $\mathbf{H}_\circ = -\nu \mathbf{M}$ (ν называется *коэффициентом размагничивания*), то $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{внешн}} - \nu \mathbf{M}$. Если, кроме того, $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, то $\mathbf{H} = (1 + \chi\nu)^{-1} \mathbf{H}_{\text{внешн}}$ и $\mathbf{M} = \chi (1 + \chi\nu)^{-1} \mathbf{H}_{\text{внешн}} = \chi_\circ \mathbf{H}_{\text{внешн}}$. Здесь χ определяется лишь структурой вещества магнита и называется поэтому *магнитной восприимчивостью* вещества, а χ_\circ (магнитная восприимчивость тела) зависит еще и от коэффициента ν , который в свою очередь связан с геометрической формой магнита. Указанная терминология обычно используется в теории магнетизма. Мы вернемся еще к цилиндрическому магниту с точки зрения теории Ампера (см. стр. 283).

Из (36.7) видно, что магнитное поле, создаваемое точечным магнитным диполем, определяется скалярным потенциалом:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{m}, \text{grad}' \frac{1}{R} \right) = - \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{m}, \text{grad} \frac{1}{R} \right), \quad (36.8)$$

где \mathbf{m} — магнитный момент этого диполя. Именно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \text{grad} \left(\mathbf{m}, \text{grad} \frac{1}{R} \right). \quad (36.9)$$

Эти равенства позволяют провести сравнение постоянных магнитов и электрических токов в качестве источников магнитного поля. Основой для этого сравнения служит *теорема Ампера*, утверждение которой состоит в том, что магнитное поле кругового тока на больших расстояниях от его контура совпадает с магнитным полем диполя, если магнитный момент последнего определить по формуле (12.13) (в используемой здесь системе единиц $\alpha = 1$).

Предположение о том, что измерение поля производится вдали от контура с током, можно заменить предельным переходом к бесконечно малому контуру, когда площадь, охватываемая им, устремляется к нулю, а $I \rightarrow \infty$, причем так, что вектор \mathbf{m} , определяемый формулой (12.13), остается конечным. В первом исчезающем приближении векторный потенциал магнитного поля тока имеет вид (12.16). Отсюда следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = - \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left[\mathbf{m} \times \text{grad} \frac{1}{R} \right]. \quad (36.10)$$

Теорема Ампера будет доказана, если правые части двух предыдущих формул равны, т. е. если

$$- \text{rot} \left[\mathbf{m} \times \text{grad} \frac{1}{R} \right] = \text{grad} \left(\mathbf{m}, \text{grad} \frac{1}{R} \right). \quad (36.11)$$

Преобразуем левую часть этого предполагаемого равенства по правилу (Б.20), а правую — по правилу (Б.18), полагая в этих последних $\mathbf{a} = \mathbf{m}$ и $\mathbf{b} = \text{grad} \frac{1}{R}$. Учитывая, что дифференциальные операции в применении к постоянному вектору \mathbf{m} дают нуль и, кроме того, $\text{rot} \mathbf{b} = \text{rot} \text{grad} \frac{1}{R} \equiv 0$, можно видеть, что в нашем случае соотношение (Б.18) имеет вид $\text{grad} (\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \text{grad}) \mathbf{b}$, а соотношение (Б.20): $\text{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -(\mathbf{a}, \text{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b}$. Но $\text{div} \mathbf{b} = \Delta \frac{1}{R} = 0$, так как поле рассматривается при условии $R \neq 0$ *). Таким образом, равенство (36.11) действительно выполняется, и теорема Ампера доказана.

*) Выше мы предположили, что расстояние от контура с током велико.

Теорема Ампера послужила поводом для введения гипотезы Ампера о природе поля постоянных магнитов. В этой гипотезе предполагается, что это поле представляет собой эффект «молекулярных токов», имеющих в микроструктуре этих сред. Она сыграла выдающуюся роль в развитии физики ферромагнетизма.

Благодаря теореме Ампера можно в случае необходимости заменять электрические токи, порождающие магнитоэстатическое поле, эквивалентным распределением магнитного момента, и наоборот. Так, например, если источником поля служит линейный ток I , то рассмотрим произвольную поверхность, опирающуюся на контур C этого тока и разобьем ее на элементарные достаточно малые площадки (рис. 41). Пусть теперь по контуру каждой из этих площадок проходит ток силы I в том же направлении, что и ток по основному контуру. Все такие токи в отрезках контуров элементарных площадок, лежащих внутри основного контура, взаимно уничтожаются и остается лишь первоначальный ток. Вместе с тем в пределе, когда элементарные площадки становятся бесконечно малыми, ток, протекающий вокруг каждой из них, создает магнитное поле, совпадающее с полем магнитного диполя, момент которого равен $dm = In d\sigma$. В пределе поле тока, протекающего по контуру C , будет совпадать с полем, которое создается распределением таких элементарных магнитных диполей на поверхности, а от формы этой поверхности оно не зависит. Плотность двойного слоя, состоящего из магнитных диполей, должна быть постоянной по абсолютной величине и равной $dm/d\sigma \equiv \tau$. Потенциал же, создаваемый таким двойным слоем, равен

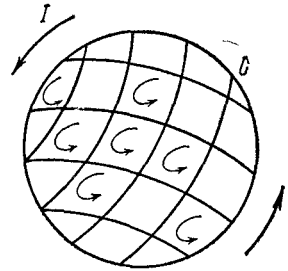


Рис. 41.

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\tau(\mathbf{r}'), \text{grad}' \frac{1}{R} \right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int \tau d\Omega = -I\Omega. \quad (36.12)$$

Здесь Ω — телесный угол, под которым видна поверхность из точки наблюдения с радиусом-вектором \mathbf{r} . Заметим, что $d\Omega$ положителен, если слой виден со стороны «отрицательных магнитных зарядов», где потенциал отрицателен.

Дополним поверхность σ каким-либо образом до замкнутой поверхности, предполагая, что на всей этой замкнутой поверхности плотность магнитных диполей равна по-прежнему τ . Тогда полный телесный угол Ω , под которым видна такая поверхность из точки наблюдения, равен 4π , если эта последняя находится внутри поверхности, и нулю, если она расположена вне поверх-

ности. Отсюда следует, что при переходе из внешней области во внутреннюю потенциал испытывает скачок, равный $\psi_+ - \psi_- = \tau$ (в отличие от рассмотренного выше случая постоянных магнитов). Если же возвратиться к незамкнутой поверхности, то при переходе через нее потенциал может быть представлен в виде суммы $\psi + \psi'$, где ψ' происходит от (воображаемого) распределения диполей, нанесенного на произвольное дополнение этой поверхности до замкнутой формы. По доказанному, вся сумма испытывает скачок, равный τ , но ψ' можно, в частности, положить равным нулю (если диполи на дополнительной поверхности отсутствуют). Итак, при переходе через любой двойной магнитный слой σ скалярный магнитный потенциал ψ испытывает скачок, равный

$$\psi_+ - \psi_- = \tau = I. \quad (36.13)$$

Мы возвращаемся к выводу о неоднозначности скалярного магнитного потенциала для магнитного поля токов, полученному иным способом в § 12 *).

Поле, создаваемое постоянным магнитом, можно на основании той же теоремы Ампера вычислить и с помощью векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M} \times \text{grad}' \frac{1}{R} \right] dV', \quad (36.14)$$

если намагниченность внутри этого магнита задается функцией $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$. С помощью формулы (Б.14_г) подынтегральное выражение преобразуется таким образом:

$$\mathbf{M} \times \text{grad}' \frac{1}{R} = \frac{\text{rot}' \mathbf{M}}{R} - \text{rot}' \frac{\mathbf{M}}{R}.$$

Воспользуемся теперь формулой **)

$$\int_V \text{rot} \mathbf{a} dV = \oint_{\sigma} [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] d\sigma. \quad (36.15)$$

Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\sigma} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{R} d\sigma'. \quad (36.16)$$

Второй из этих интегралов вычисляется по поверхности намагниченного тела. Объемный же интеграл можно интерпретировать по аналогии с выражением для векторного потенциала токов, рассмотренным в § 14. Именно, $\text{rot}' \mathbf{M}$ естественно назвать *плотностью тока намагничения* в объеме V (ср. конец § 34). Тогда и выраже-

*) Ясно, что предыдущее рассуждение о скачке потенциала относится и к двойному слою в электростатике.

***) О выводе этого соотношения см., например, Н. Е. Коцин, Векторное исчисление и начало тензорного исчисления, ГОНТИ, 1938, § 16.

ние $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ следует интерпретировать как плотность поверхностных токов намагничения. Таким образом, поле постоянного магнита моделируется полем распределения токов. Подчеркнем, что такое моделирование не имеет непосредственного отношения к микроскопической теории ферромагнетизма. Однако уравнение Максвелла (М.4'), записанное в виде $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j})$, можно истолковать как выражение того факта, что индукция \mathbf{B} магнитного поля вызывается только токами, а именно током проводимости \mathbf{j} и током намагничения $\mathbf{j}_n = \operatorname{rot} \mathbf{M}$, причем последний связан с микроструктурой ферромагнетика (по упомянутой выше гипотезе Ампера — с молекулярными токами *).

Если ферромагнетик намагничен однородно, то все внутренние токи взаимно компенсируются и магнитное поле вне такого ферромагнетика можно считать порожденным поверхностными токами. Пример: рассмотренный выше цилиндр, намагниченный по направлению его оси. Поле такого магнита совпадает с полем соленоида, витки которого лежат на поверхности цилиндра в плоскостях, перпендикулярных оси. Отсюда ясно, что поле, как мы это и видели выше, должно определяться концами цилиндрического магнита. Описывать это поле вне магнита можно и как порожденное «магнитными зарядами» (ср. выше),⁶ и с помощью векторного потенциала, а именно, второго слагаемого в уравнении (36.16). Намагниченность \mathbf{M} отлична от нуля только внутри магнита и на его поверхности. Поэтому вне магнита векторы ($1/\mu$) \mathbf{B} и \mathbf{H} совпадают. Внутри магнита векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} направлены взаимно противоположно, так как первый из них имеет нормальную составляющую к поверхности, непрерывную при переходе через границу ферромагнетика, второй же описывается силовыми линиями, направленными как вне, так и внутри магнита от положительных «магнитных зарядов» к отрицательным.

Отметим, что в линейных изотропных средах для магнитной индукции выполняется система уравнений

$$\oint \mathbf{H} ds = I, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Она формально аналогична уравнениям постоянного тока при наличии сторонней электродвижущей силы \mathcal{E} , рассмотренным в § 34:

$$\oint \mathbf{E} ds = \mathcal{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

В этом последнем случае проводник характеризуется сопротивлением $R = \int \frac{ds}{\sigma \cdot \Delta \Sigma}$, где интеграл вычисляется по контуру данного проводника. Указанная аналогия позволяет ввести понятие «магнитной цепи», где полному электрическому току $I = \int \mathbf{j}_n d\Sigma$ анало-

*) Поэтому $\mathbf{j}_n = \operatorname{rot} \mathbf{M}$ называют плотностью тока «связанных» зарядов, входящих в микроструктуру вещества.

гичен магнитный поток $\Phi = \int B_n d\sigma$. Так же, как в теории электрических токов было выведено равенство $I = \mathcal{E}/R$, выражающее закон Ома, для магнитного потока получается уравнение $\Phi = I/R_m$, причем «магнитное сопротивление» среды равно $R_m = \int \frac{ds}{\mu \cdot \Delta\Sigma}$, где интеграл вычисляется по участку среды с поперечным сечением $\Delta\Sigma$. Это уравнение для магнитного потока позволяет вычислять распределение магнитного поля в среде. Получаемое при этом решение может быть, однако, только приближенным, ибо граничные условия в задаче о распределении токов обычно отличаются от граничных условий задачи о магнитном поле. Тем не менее этот способ часто может быть использован при решении технических проблем.

36.3. Рассмотрим некоторые энергетические свойства сред в магнитном поле. Будем считать, что источниками этого последнего служат электрические токи. Пусть сначала некоторый объем V заполнен веществом, обладающим линейными магнитными свойствами, так что индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B_1 = \mu_1 H_1$. При этом магнитная проницаемость может быть функцией точки, другими словами, однородность вещества не предполагается. Энергия магнитного поля в рассматриваемом объеме равна, разумеется, $W_1 = \frac{1}{2} \int H_1 B_1 dV$. Пусть теперь источники поля выключаются *) и внутрь объема V вносится тело объемом $V_1 < V$, так что $V = V_1 + V_2$. Относительно вещества, из которого состоит это тело, уже не делается предположения о линейности, но можно считать, что в объеме V_1 известна функциональная зависимость $H(B)$, т. е. закон, по которому происходит намагничивание. Для определенности предположим, что первоначально намагниченность в объеме V_1 равна нулю. Теперь восстановим первоначальную силу источников магнитного поля (т. е. силу тока). При этом тело V_1 намагничивается. В результате магнитная индукция в объеме V будет иной, чем раньше. Обозначим ее через B . Подчеркнем, что часть V_2 объема V остается заполненной прежним веществом.

Для включения прежних источников нужно произвести работу, равную

$$W_2 = \int_{V_1+V_2} dV \int_0^B H dB = \frac{1}{2} \int_{V_2} HB dV + \int_{V_1} dV \int_0^B H dB. \quad (36.17)$$

В первом слагаемом (интеграле по объему V_2) использована, разумеется, линейность среды, заполняющей этот объем. Разность

*) Это обычно можно считать «мысленным экспериментом», позволяющим вычислить интересующую нас здесь физическую величину — энергию магнетика в заданном поле,

вычисленных энергий:

$$W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \int_{V_2} (HB - H_1 B_1) dV + \int_{V_1} \left(\int_0^B H dB - \frac{1}{2} H_1 B_1 \right) dV. \quad (36.18)$$

В объеме V_2 $B = \mu_1 H$. Поэтому первое слагаемое приводится к виду $\frac{1}{2} \int_{V_2} (H - H_1)(B + B_1) dV$. По предположению об одинаковости начального и конечного распределения токов $\text{rot}(H - H_1) = 0$. Кроме того, $\text{div}(B + B_1) = 0$.

Привлечем теперь граничные условия на границе объема V_1 :

$$(B + B_1)_n^{(2)} = (B + B_1)_n^{(1)}, \quad (H - H_1)_t^{(2)} = (H - H_1)_t^{(1)}. \quad (36.19)$$

Во втором из них предполагается, что поверхностные токи на этой границе отсутствуют. Из указанного равенства ротора нулю следует, что можно положить $H - H_1 = -\text{grad} \psi$. Обозначим, кроме того, $B + B_1 \equiv Q$. При интегрировании как по объему V_1 , так и по объему V_2 выполняется соотношение

$$\int_{V_1, V_2} (\text{grad} \psi, Q) dV = \int \text{div}(\psi Q) dV - \int \psi \text{div} Q dV = \oint \psi Q_n d\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{V_1 + V_2} (\text{grad} \psi, Q) dV = \int_{\sigma} \psi Q_n^{(2)} d\sigma - \int_{\sigma} \psi Q_n^{(1)} d\sigma = 0. \quad (36.20)$$

Равенство нулю вытекает из первого соотношения (36.19) *). Мы доказали, таким образом, что

$$\int_{V_1 + V_2} (H - H_1)(B + B_1) dV = \int_{V_1} \dots + \int_{V_2} \dots = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} \int_{V_2} (H - H_1)(B + B_1) dV = - \frac{1}{2} \int_{V_1} (H - H_1)(B + B_1) dV. \quad (36.21)$$

Значение полученной формулы состоит в том, что с ее помощью интегрирование в (36.18) сводится только к объему тела V_1 . Именно:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (H_1 B - H B_1 - H B + 2 \int_0^B H dB) dV. \quad (36.22)$$

Мы получили выражение для энергии намагничения тела в объеме V_1 .

*) При этом, разумеется, считаем поверхностный интеграл по внешней границе объема V равным нулю, например, удаляя ее на бесконечность.

В том частном случае, когда внесенное тело тоже линейно по своим магнитным свойствам, как и окружающая его среда, а именно, $\mathbf{B} = \mu_2 \mathbf{H}$, предыдущая формула приводится к виду

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{H}_1 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_1) dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{H} \mathbf{H}_1 dV.$$

Если ввести индуцированное внешним полем намагничение обычной формулой $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, то $\mathbf{M} = (\mu_2/\mu_0 - 1) \mathbf{H} = (1/\mu_0 - 1/\mu_2) \mathbf{B}$. Наконец, если окружающая среда — вакуум, так что $\mu_1 = \mu_0$, то

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \mathbf{B}_1 dV. \quad (36.23)$$

Эту формулу можно сравнить с выражением (31.23) в электростатике; отметим, однако, что знак здесь противоположный.

Если тело, занимающее объем V_1 , уже намагничено, то вычисление его энергии в магнитном поле становится затруднительным и мы заниматься им не будем *).

§ 37. Феноменологическое описание сверхпроводимости

37.1. Объяснение явления сверхпроводимости (открытого Каммерлинг — Оннесом в 1911 г. и наблюдаемого при температурах, близких к абсолютному нулю у целого ряда веществ) может быть достигнуто лишь с помощью современных методов квантовой теории поля. Однако некоторые существенные черты этого явления поддаются феноменологическому описанию с помощью дополнительных условий к уравнениям Максвелла. Более того, именно эти условия (уравнения Лондонов) послужили важной руководящей идеей при разработке современной теории **).

Как видно из самого названия, явление состоит в падении электрического сопротивления при достаточно низкой температуре (в пределах ошибок современных весьма точных измерений сопротивление становится равным нулю). Переход в сверхпроводящее состояние представляет собой фазовое превращение вещества. Весьма своеобразно поведение сверхпроводников в магнитном поле. По магнитным свойствам принято разделять их на два класса — сверхпроводники I рода (обычно это — химические элементы) и II рода (обычно — сплавы). Сверхпроводники первого рода обладают тем замечательным свойством, что они являются идеальными диамагнетиками: Именно, внутри такого сверхпроводника, находя-

*) См., например, Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.

**) Сведения об этой теории можно найти, например, в книгах: А. Роуз-Инс и Е. Родерик, Введение в физику сверхпроводимости, «Мир», 1972, а также В. Буккель, Сверхпроводимость, «Мир», 1975.

щегося во внешнем магнитном поле, магнитный песток полностью равен нулю (*эффект Мейсснера* — магнитное поле выталкивается из сверхпроводника). При этом, однако, внешнее поле не должно превышать определенного критического значения, так как в противном случае переход в сверхпроводящее состояние просто не осуществится (достаточно сильное магнитное поле как бы разрушает это состояние). Свойства сверхпроводников II рода несколько иные, и мы условимся в дальнейшем говорить только о сверхпроводниках I рода, причем будем иметь в виду образцы достаточно большого размера (для малых образцов приводимые ниже сведения, опять-таки нуждаются в существенных изменениях).

Упомянутое свойство идеального диамагнетизма отличает вещество, находящееся в сверхпроводящем состоянии, от «идеального проводника» (ср. § 35), когда электрическое сопротивление стремится к нулю, но магнитные силовые линии становятся «вмороженными». Следует рассмотреть этот вопрос подробнее.

Возьмем сначала идеальный проводник. Условие вмороженности (35.6') при $\mathbf{v} = 0$ принимает вид $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Другими словами, распределение магнитного поля внутри идеального проводника не может изменяться. Предположим, что изучаемое вещество становится идеальным проводником при температурах T , более низких, чем определенная критическая температура $T_{кр}$. При $T > T_{кр}$ электропроводность конечна. Сравним теперь две различные постановки эксперимента с внешним магнитным полем. Пусть сначала поле \mathbf{B} отсутствует при $T > T_{кр}$. Произведем охлаждение исследуемого образца до температуры $T < T_{кр}$ и затем включим магнитное поле. Из условия вмороженности следует, что при этом внутри идеального проводника должно по-прежнему выполняться равенство $\mathbf{B} = 0$. Представим себе теперь, напротив, что поле \mathbf{B} включено при $T > T_{кр}$. Исследуемое вещество выше температуры $T_{кр}$ является обычно линейным магнетиком; более того, часто можно считать, что $\mu \simeq \mu_0$. Поэтому в объеме вещества создается распределение магнитного поля, вполне определяемое внешними источниками. Охладим вещество ниже температуры фазового перехода. Если оно становится при этом идеальным проводником, то распределение магнитного поля внутри него не изменится. Более того, если внешнее магнитное поле теперь выключить, то и после этого в силу условия $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ внутри идеального проводника поле будет оставаться тем же самым. Такое поведение идеального проводника во внешнем магнитном поле объясняется возможностью возникновения в нем индуцированных токов, магнитное поле которых полностью компенсирует влияние изменений внешнего поля.

Сверхпроводники ведут себя как идеальные проводники в первом из рассмотренных выше случаев. Однако во втором эксперименте их поведение прямо противоположно; если до фазового

перехода поле в среде было отлично от нуля, то после перехода среды в сверхпроводящее состояние поле в ней исчезает. В этом и состоит упомянутый выше эффект Мейсснера. Можно считать, что на поверхности сверхпроводящего образца возникают поверхностные токи, экранирующие его внутреннюю область от внешнего магнитного поля. То же самое явление можно описать как возникновение внутри образца отрицательного намагничивания $M = -H_e$, если H_e — внешнее магнитное поле (ср. предыдущий параграф).

37.2. С феноменологической точки зрения для описания сверхпроводимости вводится представление о том, что в сверхпроводнике электроны разделяются на два типа — «нормальные» (которые ведут себя так же, как в обычном металле, рассеиваются и испытывают сопротивление) и «сверхпроводящие», которые проходят сквозь металл без сопротивления («двухжидкостная» модель). Ниже температуры сверхпроводящего фазового перехода в случае, когда приложенное напряжение постоянно, весь ток переносится «сверхпроводящими» электронами. Величина тока, разумеется, остается конечной, несмотря на нулевое сопротивление (она ограничена внутренним сопротивлением источника, например батареи). Однако если температура не равна в точности 0°K , то некоторая доля электронов остается в нормальном состоянии. Это сказывается в переменном поле: под действием его часть тока переносится и нормальными электронами. Выше температуры перехода все электроны переходят в нормальное состояние. Заметим, что при постоянном напряжении внутри сверхпроводника должно отсутствовать электрическое поле, так как иначе сверхпроводящие электроны ускорились бы и ток неограниченно возрастал. Но если электрического поля нет, то ток нормальных электронов, остающихся еще в сверхпроводнике, отсутствует, так как ничто не приводит их в движение.

Итак, для плотности тока запишем равенство

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s. \quad (37.1)$$

Здесь \mathbf{j}_n — плотность тока нормальных электронов, причем $\mathbf{j}_n = \sigma' \mathbf{E}$, где σ' — электропроводность, обусловленная такими электронами. Основным интерес для нас здесь представляет сверхпроводящая компонента плотности тока \mathbf{j}_s , а \mathbf{j}_n мы вообще рассматривать не будем. Так как сверхпроводящие электроны сопротивления не испытывают, то в присутствии электрического поля \mathbf{E} каждый из них равномерно ускоряется согласно уравнению движения

$$m\dot{\mathbf{v}}_s = e\mathbf{E}. \quad (37.2)$$

С другой стороны, $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$, где n_s — число сверхпроводящих электронов в единице объема. Из (37.2) видно, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_s = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (37.3)$$

Будем считать, что сверхпроводник не обладает ферромагнитными свойствами и что поле достаточно медленно изменяется, чтобы можно было пренебречь током смещения. Тогда уравнения Максвелла можно использовать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s. \quad (37.4)$$

С помощью (37.3) получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{m}{n_s e^2} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} \quad (37.5)$$

и, далее,

$$\partial \dot{\mathbf{B}} / \partial t = -\alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}},$$

где $\alpha \equiv m / (\mu_0 n_s e^2)$. Наконец, преобразуя, как обычно, $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ в декартовых координатах и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, приходим к уравнению

$$\Delta \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{B}}. \quad (37.6)$$

Оно показывает, что при углублении в сверхпроводник $\dot{\mathbf{B}}$ экспоненциально убывает.

Как было упомянуто выше, отличительное свойство сверхпроводника состоит в его диамагнитности, т. е. в отсутствии внутри него магнитного потока. Но из (37.6) следует лишь, что достаточно далеко от поверхности сверхпроводника внутри него имеет место равенство $\dot{\mathbf{B}} = 0$ (для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть конфигурацию, изображенную на рис. 42, причем решение уравнения (37.6) имеет вид $\dot{\mathbf{B}}(x) = \dot{\mathbf{B}}_e e^{-x/\sqrt{\alpha}}$). Нужно, однако, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{B} = 0$.

Основное предположение теории Ф. и Г. Лондонов (1935 г.) состоит в том, что поле в сверхпроводнике удовлетворяет не только уравнению (37.6), но и уравнению

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{B}. \quad (37.7)$$

Из этого уравнения в ситуации, изображенной на рис. 42, следует

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_e e^{-x/\sqrt{\alpha}}. \quad (37.8)$$

Формулу (37.7) можно получить совершенно так же, как была получена формула (37.6), если заменить всюду в выводе $\dot{\mathbf{B}}$ на \mathbf{B} . В частности, вместо (37.5) нужно использовать соотношение

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \alpha \operatorname{rot} \mathbf{j}_s. \quad (37.9)$$

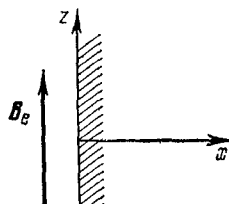


Рис. 42.

Уравнения (37.9) и (37.3) называются *уравнениями Лондонов*. Они могут быть использованы для вычисления распределения магнитного поля в сверхпроводящем образце, причем именно (37.9) описывает свойство идеального диамагнетика.

На глубине $x = \sqrt{\alpha}$ внутри сверхпроводника поле убывает в e раз. Эта величина называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля λ_L , т. е.

$$\lambda_L = \sqrt{\alpha} = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2}. \quad (37.10)$$

Из второго уравнения (37.4) можно получить распределение тока в сверхпроводнике. Для случая, представленного на рис. 42, получим $-\partial V/\partial x = \mu_0 j_y$ и из (37.8)

$$j_y = j_e e^{-x/\lambda_L}, \quad j_e \equiv \frac{B_e}{\mu_0 \lambda_L}. \quad (37.11)$$

Таким образом, ток присутствует лишь в поверхностном слое, ограниченном глубиной проникновения.

Предсказания, полученные на основе уравнений Лондонов, качественно справедливы. Из самого их вывода ясно, что эти уравнения необходимо рассматривать как дополнительные условия, добавляемые к уравнениям Максвелла для описания сверхпроводящих токов. Сами же уравнения Максвелла остаются по-прежнему справедливыми и в этом случае.

37.3. Одно из замечательных следствий теории сверхпроводимости, подтвержденное экспериментально, — это квантование магнитного потока, проходящего в несверхпроводящей среде, окруженной кольцом сверхпроводника. Как видно из самого названия этого эффекта, его объяснение требует применения квантовой теории. Однако для элементарного описания достаточно будет лишь применить условие квантования Бора — Зоммерфельда, известное читателю из курса атомной физики. Как мы видели выше, сверхпроводящие токи имеются в поверхностном слое глубины λ_L сверхпроводящего кольца; на эту же глубину проникает внутрь кольца и внешнее магнитное поле. Рассмотрим замкнутый контур, проведенный в этом слое кольца и охватывающий его отверстие. Движение зарядов, образующих ток, происходит под действием внешнего магнитного поля. Его можно описать с помощью нерелятивистской функции Гамильтона, введенной в конце § 8. Условие квантования применим к импульсу заряда, проинтегрированному по упомянутому контуру (аналогично тому, как оно используется в теории атома для электрона, движущегося по замкнутой орбите). Именно

$$\oint \pi ds = nh, \quad (37.12)$$

где n — произвольное целое число, а h — постоянная Планка. В § 8 показано, что $\pi = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ (здесь используется Международная система единиц). Подставим это равенство в (37.12) и учтем определение сверхпроводящего тока, следующее непосредственно из уравнения (37.2) (при этом $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$ и обозначение e мы заменим на q по причине, которая будет объяснена ниже). Кроме того, воспользуемся равенством

$$\oint \mathbf{A} ds = \int \mathbf{B} n d\sigma,$$

полученным в § 33. Тогда условие квантования (37.12) примет вид

$$\frac{m}{n_s q^2} \oint \mathbf{j} ds + \Phi = \frac{nh}{q}. \quad (37.13)$$

Величина Φ в левой части этого уравнения — обычный магнитный поток, проходящий сквозь рассматриваемый контур. В целом же левая часть (37.13) определяет величину, квантованную условием Бора — Зоммерфельда; эта величина называется *флюксоидом*. Если теперь переместить контур интегрирования достаточно глубоко внутрь кольца, то часть флюксоида, определяемая током \mathbf{j} , обратится в нуль и уравнение (37.13) будет условием квантования магнитного потока Φ , проходящего сквозь отверстие в кольце: $\Phi = n\Phi_0$. Квант магнитного потока $\Phi_0 = h/q$ называется *флюксоном*. Еще в 1950 г. квантование магнитного потока в рассматриваемых условиях предсказано Ф. Лондоном. В 1961 г. было получено экспериментальное подтверждение (см. книги, цитируемые выше). Измерения флюксона показывают, что его значение соответствует $q = 2e$ (здесь e — заряд электрона), т. е. $\Phi_0 = h/2e = 2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб. Таким образом, сверхпроводящий ток связан с движением частиц, обладающих удвоенным зарядом электрона.

К тому времени, как был измерен флюксон, уже существовала несравненно более глубокая, чем у Лондона, квантовая теория сверхпроводимости, основные идеи которой были развиты почти одновременно (в конце 50-х годов) Бардином, Купером и Шриффером в США и Н. Н. Боголюбовым с сотрудниками в СССР *). Эта теория связывает явление сверхпроводимости со свойствами коллектива электронных пар, образующегося в сверхпроводнике. Силы взаимодействия, связывающие между собой электроны, составляющие каждую такую пару, не могут быть объяснены классической физикой.

Возвратимся к элементарной теории сверхпроводимости, а именно, к выводу уравнения $\Phi = n\Phi_0$. Смысл этого уравнения

*) Элементарные сведения об этой теории см. в цитируемых на стр. 286 книгах. Подробное изложение — в книге: Дж. Шриффер, Теория сверхпроводимости, «Наука», 1970. Выдающуюся роль в ее создании сыграла работа: Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев и Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, 1958,

может показаться не совсем понятным, так как оно получено при использовании контура, проведенного в такой области сверхпроводника, где и токи, и магнитное поле обращаются в нуль. Магнитный же поток был получен, как мы видели, с помощью преобразования интеграла $\oint \mathbf{A} \, ds$, взятого по этому контуру. Таким образом, следует считать, что функция $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в точках контура не равна тождественно нулю, в то время как поле \mathbf{B} на самом этом контуре равно нулю. Из связи $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ между полем и потенциалом видно, что это может быть, если потенциал выражается как градиент: $\mathbf{A} = \text{grad } \zeta$, где ζ , вообще говоря, — произвольная скалярная функция. Обозначим $\chi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \zeta$. Тогда уравнение $\Phi = n\Phi_0$ выражает условие, чтобы полное изменение функции χ при обходе замкнутого контура в сверхпроводнике было равно $2\pi n$. Функция χ называется фазой электронной пары, являющейся носителем тока сверхпроводимости. На самом деле она непосредственно связана с фазой волновой функции, описывающей эту пару с точки зрения квантовой теории. Мы возвращаемся, таким образом, к условию квантования Бора — Зоммерфельда, которое, как доказывается в волновой механике, применимо как раз тогда, когда на замкнутой орбите «укладывается» целое число волн вероятности, описывающих частицу.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

§ 38. Электромагнитные волны в проводниках.
Волновод и резонатор

38.1. Распространение электромагнитного поля в однородной проводящей среде рассмотрим, предполагая линейность среды, т. е. выполнение соотношений $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, так что уравнения Максвелла примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (38.1)$$

Отсюда обычным путем можно получить, например, для поля \mathbf{E}

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (38.2)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, так что производную по времени в (38.2) можно заменить умножением на $-i\omega$. Тогда (38.2) записывается в виде уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \hat{k}^2) \mathbf{E} = 0, \quad (38.3)$$

где

$$\hat{k}^2 \equiv \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right). \quad (38.4)$$

Если ввести «комплексную диэлектрическую проницаемость»

$$\hat{\epsilon} \equiv \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}, \quad (38.5)$$

то тем самым достигается формальная аналогия с задачей о распространении электромагнитного поля в диэлектрике. Естественно поэтому ввести комплексные величины:

$$\hat{v} \equiv \frac{c}{\sqrt{\mu \hat{\epsilon}}}, \quad \hat{n} \equiv \frac{c}{\hat{v}} = \sqrt{\mu \hat{\epsilon}} = \frac{c}{\omega} \hat{k}, \quad (38.6)$$

где \hat{n} — комплексный показатель преломления. Запишем:

$$\hat{n} = n(1 + i\kappa). \quad (38.7)$$

Величина κ называется коэффициентом экстинкции (затухания). Тогда, с одной стороны, $\hat{n}^2 = n^2(1 + 2i\kappa - \kappa^2)$, а с другой, из

(38.6): $\hat{n}^2 = \mu \hat{\epsilon} = \mu (\epsilon + i\sigma/\omega)$. Отсюда $n^2 (1 - \kappa^2) = \mu \epsilon$ и $n^2 \kappa = \mu \sigma / 2\omega$. Исключая κ , получим

$$n^2 = \frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} + \epsilon \right). \quad (38.8)$$

Важно иметь в виду, что величины ϵ , σ , μ , входящие в предыдущие формулы, различны для различных частот ω и отличаются от соответствующих статических величин, характеризующих свойства вещества в постоянных полях. Изучение их функциональной зависимости от ω и ее физических проявлений относится к теории дисперсии, на которой мы остановимся в следующем параграфе.

В соответствии с полученными результатами уравнение (38.3) имеет решение в виде плоской волны

$$\mathbf{E} = E_0 \exp \{ i [\hat{k}(\mathbf{rs}) - \omega t] \}, \quad (38.9)$$

т. е., согласно (38.6) и (38.7):

$$\mathbf{E} = E_0 \exp \left[-\frac{\omega}{c} n \kappa (\mathbf{rs}) \right] \cdot \exp \left\{ i \omega \left[\frac{n}{c} (\mathbf{rs}) - t \right] \right\}. \quad (38.10)$$

Таким образом, коэффициент κ действительно определяет экспоненциальное затухание электромагнитной волны в проводнике.

Представляет интерес изучить плотность W энергии волны, для вычисления которой следует усреднить по времени E^2 . Результат имеет вид

$$W = W_0 \exp [-\chi (\mathbf{rs})]. \quad (38.11)$$

Здесь χ — постоянный коэффициент поглощения:

$$\chi = \frac{2\omega}{c} n \kappa = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa, \quad (38.12)$$

причем λ — длина волны в среде. Поэтому плотность энергии уменьшается в e раз на глубине $d = \chi^{-1} = \lambda / 4\pi \kappa$. Мы получаем явление, аналогичное описанному в начале § 34 (и названное там *скин-эффектом*).

Вспоминая сказанное выше о зависимости характеристик вещества от частоты проходящего через него излучения, легко понять, что одно и то же вещество может считаться хорошим проводником в одном диапазоне частот и плохим — в другом. Запишем формулу (38.4) в виде

$$\hat{k} = \alpha + i\beta. \quad (38.13)$$

Тогда

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \left(\frac{\mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \omega \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \pm 1 \right]^{1/2}. \quad (38.14)$$

Плохой проводник естественно охарактеризовать неравенством $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$. Тогда с точностью до членов первого порядка по этому

малому параметру:

$$\hat{k} \simeq \sqrt{\mu\epsilon} \omega + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma. \quad (38.15)$$

В этих вычислениях σ считается вещественной величиной. Если она не зависит от ω , то и затухание волны не зависит от ω (разумеется, в том диапазоне частот, где достаточно хорошо выполняется указанное выше неравенство). С другой стороны, для хорошего проводника нужно считать, что $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$, так что малым параметром служит $\omega\epsilon/\sigma$. При этом

$$\hat{k} \simeq (1+i)(\sigma\omega\mu/2)^{1/2}. \quad (38.16)$$

Для поперечных полей в проводящей среде из второго роторного уравнения (38.1) получим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \hat{k} \times \mathbf{E}, \quad (38.17)$$

если оба поля изменяются так, как это указано в формуле (38.9). Обозначая H_0 амплитуду магнитного поля, имеем соотношение

$$H_0 = \frac{1}{\mu\omega} (\alpha + i\beta) [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0].$$

Поэтому фазы полей \mathbf{H} и \mathbf{E} в проводящей среде различны. Если, как обычно, определить модуль $|\hat{k}| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ и фазу $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$, то отсюда непосредственно вытекает, что

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\varphi} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0].$$

Если среда — хороший проводник, то энергия в основном сосредоточена в магнитном поле, причем магнитное поле отстает от электрического по фазе почти на 45° . Предоставляем в качестве упражнения читателю подробную проверку этих последних утверждений.

38.2. Обратимся теперь к свойствам излучения, которое заключено в объем, ограниченный хорошо проводящими стенками. Мы ограничимся здесь простейшими сведениями об этих свойствах*), причем будем считать, что вещество стенок является идеальным проводником, т. е. что $\sigma \rightarrow \infty$. Из (38.5) видно, что формально это значит $\epsilon \rightarrow i\infty$. Для монохроматического излучения уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ike\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}. \quad (38.18)$$

*) См. книги, указанные на стр. 127, в особенности книгу Л. А. Вайнштейна, которой мы близко следуем в дальнейшем изложении.

Поэтому предельный переход $\varepsilon \rightarrow i\infty$ возможен лишь в предположении $\mathbf{E} \equiv 0$. Но тогда из второго уравнения (38.18) следует, что и $\mathbf{H} \equiv 0$. Итак, внутри идеального проводника электромагнитное поле тождественно обращается в нуль. Заметим, что токи на поверхности такого проводника могут существовать; более того, поверхностные токи вообще возможны, лишь если проводник идеальный. Это легко видеть из закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$: плотность тока, отнесенная к единице длины, может быть не равна нулю лишь при $\sigma \rightarrow \infty$. Таким образом, непосредственно под поверхностью идеального проводника (внутри него) $E_t = 0$, $H_t = 0$, а из граничных условий (4.14) видно, что непосредственно над его поверхностью

$$E_t = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{i}. \quad (38.19)$$

Здесь в виде $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ записана тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} , \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности проводника, а \mathbf{i} — поверхностная плотность тока.

Разумеется, реальные проводящие стенки всегда отличаются по своим свойствам от этого идеального случая, причем это отличие обусловлено тем, что в реальных средах происходят потери энергии на джоулево тепло в скин-слое. Эти потери тем больше, чем меньше толщина последнего.

Полость, ограниченная стенками со всех сторон, называется *резонатором* (или *эндовибратором*). Если же полость имеет форму цилиндра произвольного сечения, бесконечного или же с открытыми основаниями, то в этом случае она называется *волноводом*. Рассмотрим прежде всего именно волноводы.

Характерным свойством волноводов является то, что в них могут существовать бегущие волны, обладающие продольными составляющими векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Если магнитное поле волны полностью поперечно, а вектор \mathbf{E} имеет продольную составляющую, то такая волна называется электрической или *E-волной* (часто вместо этого говорят о волне типа *TM*). Если же, напротив, полностью поперечно электрическое поле, а продольная составляющая имеется у вектора \mathbf{H} , то волна называется магнитной или *H-волной* (или же волной типа *TE*).

Покажем, что волны этих двух типов действительно могут существовать (т. е., в частности, удовлетворять указанным выше граничным условиям).

Пусть ось декартовых координат z направлена вдоль оси волновода. Тогда для *E-волн* должно быть $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$, а для *H-волн*, напротив, $E_z = 0$ и $H_z \neq 0$.

Волну электрического типа можно определить с помощью электрического вектора Герца $\mathbf{\Pi}$ (см. конец § 2), который в области, где отсутствуют источники, позволяет записать (для монохромати-

ческого поля) $\mathbf{A} = -ik\mathbf{\Pi}$, $\varphi = -\text{div } \mathbf{\Pi}$, так что

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H} = -ik \text{rot } \mathbf{\Pi} \quad (38.20)$$

и

$$(\Delta + k^2)\mathbf{\Pi} = 0. \quad (38.21)$$

Возьмем вектор Герца в виде

$$\Pi_x = 0, \quad \Pi_y = 0, \quad \Pi_z = \Pi(x, y) e^{ik_{\parallel}z}, \quad (38.22)$$

где $\Pi(x, y)$ — пока неопределенная функция. Тогда z -компонента уравнения (38.21) имеет форму двумерного уравнения Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) \Pi = 0, \quad k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2. \quad (38.23)$$

Из формул (38.20) получим

$$E_x = ik_{\parallel} \frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{ik_{\parallel}z}, \quad E_y = ik_{\parallel} \frac{\partial \Pi}{\partial y} e^{ik_{\parallel}z}, \quad E_z = k_{\perp}^2 \Pi e^{ik_{\parallel}z}, \quad (38.24)$$

$$H_x = -ik \frac{\partial \Pi}{\partial y} e^{ik_{\parallel}z}, \quad H_y = ik \frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{ik_{\parallel}z}, \quad H_z = 0. \quad (38.24')$$

Таким образом, мы действительно получили волну электрического типа. Покажем теперь, что можно удовлетворить также и граничное условие $E_t = 0$ на стенке волновода. Обозначим через C контур, образованный пересечением плоскости, ортогональной к оси волновода с его стенками. Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\Pi = 0$ на контуре C . Из третьей формулы (38.24) сразу видно, что тогда $E_z = 0$ на стенке волновода. Если же \mathbf{s} — направление касательной к этому контуру, то из $E_s = E_x \frac{\partial x}{\partial s} + E_y \frac{\partial y}{\partial s} = ik_{\parallel} \frac{\partial \Pi}{\partial s} e^{ik_{\parallel}z}$ следует $E_s = 0$.

Ввиду того, что $H_z = 0$, магнитные силовые линии в этом случае являются плоскими кривыми. Математическое исследование уравнения (38.23) показывает, что оно имеет решение лишь при определенных значениях параметра k_{\perp}^2 , которое можно упорядочить по их величине: $k_{\perp 1}^2 \leq k_{\perp 2}^2 \leq \dots$ (имеется дискретный спектр собственных значений). Каждому такому $k_{\perp i}^2$ соответствуют два возможных значения k_{\parallel} и своя функция $\Pi(x, y)$ (собственная функция)*. Значения k_{\parallel}^2 могут быть и положительными, и отрицательными. В первом случае $k_{\parallel} = \pm \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}$ — вещественное число; при этом волна распространяется вдоль волновода без затухания. Во втором $k_{\parallel} = \pm i \sqrt{k_{\perp}^2 - k^2}$ и волна затухает. При этом

*) Спектр величин $k_{\perp i}^2$ зависит от геометрии волновода, точнее, от формы сечения волновода плоскостями $z = \text{const}$.

свойства таких волн напоминают квазистационарные поля в ближней зоне излучателя (ср. § 17) и затухание их не связано с потерями энергии.

Для определения волн магнитного типа можно воспользоваться формулами § 2, с помощью которых был введен магнитный вектор Герца Π^* . С его помощью электромагнитное поле определенной частоты вычисляется по формулам

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot} \Pi^*, \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi^* + k^2 \Pi^*. \quad (38.25)$$

При этом

$$(\Delta + k^2) \Pi^* = 0. \quad (38.26)$$

Если выбрать вектор Герца следующего вида:

$$\Pi_x^* = 0, \quad \Pi_y^* = 0, \quad \Pi_z^* = \Pi^*(x, y) e^{ik_{||}z}, \quad (38.27)$$

то из (38.25) следует

$$E_x = ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial y} e^{ik_{||}z}, \quad E_y = -ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} e^{ik_{||}z}, \quad E_z = 0, \quad (38.28)$$

$$H_x = ik_{||} \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} e^{ik_{||}z}, \quad H_y = ik_{||} \frac{\partial \Pi^*}{\partial y} e^{ik_{||}z}, \quad H_z = k_{\perp}^2 \Pi^* e^{ik_{||}z}. \quad (38.28')$$

Уравнение же (38.26) вновь приводится к двумерному виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) \Pi^* = 0. \quad (38.29)$$

Можно показать, что граничное условие $E_t = 0$ будет обеспечено, если $\partial \Pi^* / \partial n = 0$ на определенном выше контуре S .

В строгой теории волноводов доказывается, что совокупность волн типа E и волн типа H образует для волновода полную систему, т. е. что всякую волну можно представить в виде линейной комбинации (возможно, бесконечного числа) волн этих типов.

38.3. Перейдем теперь к случаю резонатора с идеально проводящими стенками и перечислим простейшие результаты. Граничным условием для всех граничных поверхностей резонатора служит, как и раньше, равенство $E_t = 0$.

Пусть сначала резонатор имеет вид куба с ребром длины L . Оси декартовых координат выберем так, чтобы куб определялся неравенствами $0 < x < L$, $0 < y < L$, $0 < z < L$. Тогда граничные условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} E_y = E_z = 0 & \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L, \\ E_z = E_x = 0 & \text{ при } y = 0 \text{ и } y = L, \\ E_x = E_y = 0 & \text{ при } z = 0 \text{ и } z = L. \end{aligned} \quad (38.30)$$

Поле E внутри куба должно удовлетворять уравнению

$$(\Delta + k^2) E = 0, \quad (38.31)$$

Это волновое уравнение решается методом разделения переменных с учетом граничных условий и необходимости удовлетворить также условию $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ при отсутствии источников внутри куба. Можно проверить, что всем этим требованиям удовлетворяет вектор \mathbf{E} с компонентами

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L}, \\ E_y &= B \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \cos \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L}, \\ E_z &= C \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \cos \frac{n_3 \pi z}{L}. \end{aligned} \quad (38.32)$$

Здесь A, B, C — постоянные, а n_1, n_2, n_3 — целые неотрицательные числа. Условие $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ удовлетворяется при этом, если имеет место соотношение

$$n_1 A + n_2 B + n_3 C = 0. \quad (38.33)$$

С помощью (38.32) и (38.31) волновое число и частота выражаются следующим образом:

$$k = \frac{\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \quad \nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (38.34)$$

Отсюда видно, что подсчет числа колебаний с частотой, заключенной в интервале от ν до $\nu + d\nu$, можно произвести таким же способом, как это было сделано в конце § 22.

Магнитное поле определяется с помощью первого из уравнений (38.18) при подстановке в него решения (38.32).

Более общий случай цилиндрического резонатора получится, если перегородить рассмотренный ранее волновод проводящими плоскими стенками (например, в точках $z = 0$ и $z = L$). На этих стенках граничное условие принимает вид $E_x = E_y = 0$ при $z = 0$ и $z = L$. Задача о волнах в таком резонаторе решается аналогично задаче о волноводе, с тем различием, что граничные условия приводят теперь к необходимости рассматривать не бегущие, а стоячие волны. Волны электрического типа определяются с помощью электрического вектора Герца вида $\Pi_x = 0, \Pi_y = 0, \Pi_z = -\Pi(x, y) \cos k_{||} z$. Отсюда легко вычислить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} . В частности, компоненты E_x и E_y пропорциональны $\sin k_{||} z$; поэтому граничное условие при $z = 0$ выполняется автоматически. Граничное же условие при $z = L$ будет выполнено, если $\sin k_{||} L = 0$, т. е. $k_{||} = p\pi/L$, где p — произвольное целое число. Таким образом, $k = \sqrt{k_{\perp}^2 + (p\pi/L)^2}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). Аналогично стоячие волны магнитного типа определяются магнитным вектором Герца: $\Pi_x^* = 0, \Pi_y^* = 0, \Pi_z^* = \Pi^*(x, y) \sin k_{||} z$.

§ 39. Дисперсия электромагнитного поля в веществе. Волны в анизотропных средах

39.1. Переменное электромагнитное поле, проникая в вещество, взаимодействует с его частицами (электронами, ядрами) и вызывает их колебания. Заряженные частицы при этом создают вторичное излучение. Совокупность таких микроскопических процессов приводит к поглощению поля в веществе — различному при разных частотах. С точки зрения классической физики можно представлять себе, что вещество состоит из осцилляторов, каждый из которых взаимодействует с электромагнитным полем так, как это было описано в § 25. Разумеется, такая картина является грубо приближенной (не говоря уже о том, что правильное описание эффектов, о которых идет здесь речь, может быть получено лишь с помощью квантовой теории). Однако она достаточна для понимания качественной стороны процессов.

Пусть, для простоты, все упомянутые осцилляторы одинаковы и имеют одну и ту же собственную частоту ω_0 . Вынужденные электромагнитной волной колебания осциллятора при учете затухания описываются уравнением (25.21). Можно считать, например, для определенности, что осцилляторами являются электроны вещества, связанные с положениями равновесия квазиупругой силой. Отклонение от положения равновесия приводит к возникновению дипольного момента $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{r}(t)$. При усреднении по времени затраты энергии на создание этого дипольного момента определяются, как обычно, квадратом модуля амплитуды \mathbf{p}_0 , если записать $\mathbf{p}(t) = -\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$. Из (25.21) видно, что $\mathbf{p}_0 = \alpha \mathbf{E}$, где

$$\alpha \equiv \frac{q^2}{m} [(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\tilde{\Gamma}]^{-1}$$

есть комплексный коэффициент поляризуемости. Макроскопическую поляризацию некоторого объема вещества под действием электромагнитного поля можно связать с коэффициентом α . Так, в простейшем случае достаточно разреженного газа может быть получена формула

$$\hat{n}^2 = 1 + 4\pi N\alpha,$$

где \hat{n} — комплексный показатель преломления, аналогичный по своему феноменологическому смыслу величине, введенной в формуле (38.7) для металлов. Из сопоставления приведенных формул, во всяком случае, достаточно очевидно, что комплексность показателя преломления (а значит, как в предыдущем параграфе, и величин ϵ , μ) связана с эффектом затухания колебаний каждого элементарного осциллятора.

Разумеется, реальное вещество обладает, вообще говоря, чрезвычайно большим количеством различных резонансных частот ω_0 . В зависимости от того, какие это частоты, наблюдаются те или

иные свойства вещества в проходящем сквозь него электромагнитном излучении.

Феноменологическое исследование взаимодействия вещества с электромагнитным полем должно быть основано на уравнении типа (4.2), связывающем поле и индукцию (аналогичное уравнение может быть записано, разумеется, и для магнитных величин). В это уравнение уже включено предположение о линейности упомянутой связи. Во многих случаях, в частности при достаточно сильных полях, такое предположение оказывается недостаточным (см. § 41). Однако в его рамках учитываются: а) возможная анизотропия вещества (тензорный характер ϵ_{ik}); б) то обстоятельство, что «отклик» частиц вещества на действие внешнего поля не является мгновенным (*частотная дисперсия*, соответствующая зависимости ϵ_{ik} от $t - t'$) и в) то, что взаимодействие поля с веществом, вообще говоря, не бывает строго локальным (*пространственная дисперсия*, выражаемая зависимостью ϵ_{ik} от $r - r'$). Другими словами, поляризация вещества в данной точке определяется значениями поля не только в самой этой точке, но и в некоторой области, окружающей ее. Разумеется, для разных веществ (как и для одного и того же вещества при разных частотах проходящего излучения) перечисленные три эффекта могут играть разную роль (например, один из них может быть выражен гораздо более резко, чем другие *). Так, в оптике основную роль обычно играет частотная дисперсия. Учет пространственной дисперсии приобрел большое физическое значение, в основном в связи со сравнительно новыми проблемами физики, а именно изучением свойств плазмы и феноменологическим описанием возбуждений, возникающих в кристаллах. При этом достигается также последовательное описание явлений, известных уже давно, как, например, гиротропии (оптической активности), т. е. вращения плоскости поляризации линейно поляризованной волны при ее прохождении сквозь вещество (см. цитированную книгу Аграновича и Гинзбурга).

39.2. Описание дисперсии удобно производить не с помощью соотношения (4.2), а с помощью его преобразования Фурье, которое, как мы видели в § 4, приводит к формуле

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (39.1)$$

При этом можно считать, что

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_0 \delta_{ij} + \chi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \quad (39.2)$$

*) Теория дисперсии подробно излагается в книгах: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред (§§ 58—64 и 76—80), а также В. М. Агранович и В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, «Наука», 1965, которые мы и рекомендуем читателю, интересующемуся этим вопросом. В данной книге представлялось, однако, необходимым хотя бы схематическое введение в него, которое, возможно, облегчит дальнейшую ориентировку.

в соответствии с обычной записью $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Здесь χ_{ij} — диэлектрическая восприимчивость.

Формула, аналогичная (39.1), таким же образом выводится и для магнитных величин. Однако (за исключением некоторых вопросов, возникающих в оптике ферромагнетиков) можно считать, что $\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$, если не интересоваться областью очень малых частот поля (значительно меньших, чем оптические). Соответствующие оценки см. в цитированной выше книге Ландау и Лифшица (§ 60). Поэтому в дальнейшем речь идет лишь о тензоре $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Этот тензор позволяет все же учесть связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{B} . Действительно, фурье-преобразование уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ дает $\omega \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$, поэтому если известна связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} , то упомянутое влияние \mathbf{B} на \mathbf{D} также можно считать известным. Фактически поле \mathbf{B} влияет на поляризационные токи $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E})$.

В пренебрежении пространственной дисперсией будем полагать

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega). \quad (39.3)$$

Именно этот случай (практически наиболее часто встречающийся) мы и рассмотрим несколько подробнее. При этом для простоты будем сначала считать, что среда изотропна, и интересоваться свойствами функции $\epsilon(\omega)$. Это значит, что в формуле (4.2) ядро подинтегрального выражения $\epsilon(t - t')$ зависит только от разности времен и интегрирование по пространственной переменной отсутствует*).

Непосредственный физический смысл имеют, разумеется, вещественные значения аргумента ω . Вместе с тем функция $\epsilon(\omega)$, как мы видели выше, принимает, вообще говоря, комплексные значения. Поэтому можно записать

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega), \quad (39.4)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — вещественные функции. Формула (39.2) принимает вид

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \chi(\omega),$$

где

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad \tau = t - t'. \quad (39.5)$$

Отсюда сразу видно, что

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega). \quad (39.6)$$

*) Действительно, как мы видели выше, зависимость ϵ от \mathbf{k} возникает лишь в результате фурье-преобразования по переменной \mathbf{r} .

Из (39.4) и (39.6) следует

$$\epsilon_1(-\omega) = \epsilon_1(\omega), \quad \epsilon_2(-\omega) = -\epsilon_2(\omega). \quad (39.7)$$

При достаточно малых частотах можно рассматривать первые члены разложения этих функций в ряд Тейлора. При этом естественно считать, что в диэлектриках $\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon_1(\omega) = \epsilon_1(0)$, где $\epsilon_1(0)$ — диэлектрическая проницаемость в статическом поле. Ряд, представляющий функцию ϵ_2 , ввиду ее нечетности начинается, вообще говоря, с члена, пропорционального частоте ω .

При применении к металлам функцию $\epsilon(\omega)$ можно определить, исходя из того условия, чтобы при $\omega \rightarrow 0$ ток смещения $\partial D/\partial t$ формально равнялся току проводимости σE . В монохроматическом поле достаточно малой частоты получим равенство $-i\omega\epsilon E = \sigma E$; поэтому при $\omega \rightarrow 0$ должно быть $\epsilon = i\sigma/\omega$, т. е. $\epsilon(\omega)$ имеет простой полюс при $\omega = 0$. Полученное сейчас равенство можно сравнить с формулой (38.5) предыдущего параграфа, справедливой как для хороших, так и для плохих проводников.

При достаточно больших частотах ω поляризация в среде вообще не успевает установиться, поэтому можно считать, что $\epsilon(\omega)$ стремится к электрической постоянной ϵ_0 при $\omega \rightarrow \infty$ *).

Покажем, что мнимая часть ϵ_2 диэлектрической проницаемости определяет поглощение энергии поля в среде, причем будем руководствоваться чисто макроскопическими соображениями. Изменение электрической энергии равно $E \partial D/\partial t$, где E и D , разумеется, вещественны. В комплексной записи следует вместо E подставить $1/2 (E + E^*)$ и вместо D подставить $1/2 (\epsilon E + \epsilon^* E^*)$. В применении к монохроматическому полю (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) вычисление $\partial D/\partial t$ дает $1/2 (-i\omega\epsilon E + i\omega\epsilon^* E^*)$. Нас может здесь интересовать лишь среднее изменение энергии за достаточно продолжительный промежуток времени и, так же как и в § 16, $\langle E^2 \rangle_t \simeq 0$, $\langle E^{*2} \rangle_t \simeq 0$. Поэтому окончательно

$$\left\langle E \frac{\partial D}{\partial t} \right\rangle_t \simeq \frac{1}{4} i\omega (\epsilon^* - \epsilon) |E|^2 = \frac{\omega}{2} \epsilon_2 |E|^2. \quad (39.8)$$

Вычисление магнитной энергии приводит, разумеется, к аналогичному результату, но, как было сказано выше, мы считаем, что $\mu_2 = 0$. Вычисленная потеря энергии проявляется фактически как выделение эквивалентного количества тепла ΔQ в среде. То, что $\Delta Q > 0$, следует из необратимости происходящего процесса диссипации ($\Delta S' = \frac{\Delta Q}{T} > 0$). Отсюда видно, что $\epsilon_2 > 0$. Если величина ϵ_2 очень мала, при некоторой частоте ω , то поглощение резко убывает, т. е. вещество является прозрачным для поля этой частоты.

*) Ясно, что это условие соответствует тому, что в рассматриваемом пределе $\rho = 0$.

39.3. Важные свойства функции $\varepsilon(\omega)$ выясняются, если рассмотреть ее на комплексной плоскости $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ (выше мы указали, как она ведет себя на вещественной оси). Прежде всего, из (39.5) видно, что, так как $\tau > 0$, на верхней полуплоскости (т. е. при $\omega_2 > 0$) подынтегральное выражение содержит множитель $e^{-\omega_2\tau}$. Функцию же $\chi(\tau)$ следует практически считать отличной от нуля только в конечном интервале значений τ . Действительно, процессы установления поляризации под действием внешнего электромагнитного поля характеризуются некоторым временем релаксации, которым и определяется упомянутый интервал. Поэтому функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет особых точек в верхней полуплоскости. Очень важно подчеркнуть, что это ее свойство следует из требования

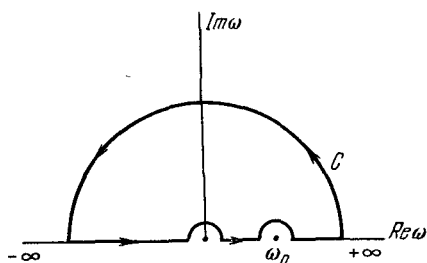


Рис. 43.

причинности (которое выражается просто интегрированием по значениям $\tau \geq 0$, т. е. $t \geq t'$). Кроме того, как мы только что видели, $\varepsilon(\omega)$ для случая диэлектриков не имеет особенностей на вещественной оси и может иметь простой полюс $\sim 1/\omega$ для металлов. На мнимой оси функция $\varepsilon(\omega)$ вещественна.

Это следует из (39.5). Дей-

ствительно, при любых комплексных ω , $\varepsilon(-\omega)^* = \varepsilon^*(\omega)$, и поэтому $\varepsilon_2(\omega) = 0$ при $\omega = i\omega_2$. Важно отметить, что из (39.5) следует также, что $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, когда ω стремится к бесконечности по любому пути в верхней полуплоскости (а не только вдоль вещественной оси, о чем упоминалось выше). Подынтегральный множитель $e^{i\omega\tau} = e^{i\omega_1\tau}e^{-\omega_2\tau}$ обеспечивает выполнение этого свойства.

Аналитичность функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости комплексного переменного ω , вытекающая из требования причинности, позволяет вывести важное соотношение между ее вещественной и мнимой частями. Пусть ω_0 — произвольная точка на вещественной оси. Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру C , изображенному на рис. 43:

$$I = \int_C \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega. \quad (39.9)$$

Полюс в точке $\omega = \omega_0$ (и для металлов) полюс в точке $\omega = 0$ вырезаны полуокружностями бесконечно малого радиуса $\rho \rightarrow 0$. Радиус полуокружности, замыкающей контур, стремится к бесконечности. Как мы видели, на бесконечности $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon_0$, и поэтому интеграл по замыкающей полуокружности стремится к нулю. Так как внутри выбранного контура подынтегральная функция особенностей не имеет, выполняется равенство $I = 0$. Результат обхода точки ω_0

в пределе $\rho \rightarrow 0$ имеет вид $-i\pi [\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0]$. Таким образом, для диэлектрика, когда полюс при $\omega = 0$ отсутствует,

$$V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi [\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0] = 0. \quad (39.10)$$

Интеграл взят здесь по всей вещественной оси в смысле главного значения, т. е. по определению

$$V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\rho + i\omega_0} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\rho + i\omega_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega \right].$$

Отделяя вещественную и мнимую части в формуле (39.10) получим

$$\varepsilon_1(\omega_0) - \varepsilon_0 = \frac{1}{\pi} V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_2(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad (39.11)$$

$$\varepsilon_2(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega. \quad (39.12)$$

Эти формулы называются *дисперсионными соотношениями Крамера — Кронига*. Учет полюса в точке $\omega = 0$ для металлов приводит к дополнительному слагаемому, равному σ/ω , в правой части равенства (39.12).

Нечетность функции $\varepsilon_2(\omega)$ позволяет переписать соотношение (39.11) в виде

$$\varepsilon_1(\omega_0) - \varepsilon_0 = -\frac{4\pi q^2}{m} V. P. \int_0^{\infty} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Здесь введено часто используемое обозначение

$$f(\omega) \equiv \frac{m}{2\pi^2 q^2} \omega \varepsilon_2(\omega), \quad (39.13)$$

причем $f(\omega) d\omega$ называется *силой осцилляторов* в интервале $d\omega$. Происхождение этого названия станет понятно, если сравнить последние две формулы с выражением для коэффициента поляризуемости α , которое мы привели в начале этого параграфа (полагая $\tilde{\Gamma} = 0$). Действительно, $f(\omega)$ можно интерпретировать как плотность распределения осциллирующих дипольных моментов, дающих излучение в рассматриваемом интервале частот.

39.4. Вернемся теперь к общему случаю (39.1) с учетом анизотропии и пространственной дисперсии. Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при вещественных значениях ω и \mathbf{k} , вообще говоря, принимает комплексные значения. Кроме того, он не обязательно симметричен (при $\varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{ji}$ среда гиротропна). Из приведенных выше для

случая частотной дисперсии соображений ясно, что большой интерес представляет поведение этого тензора в комплексной области аргументов ω , \mathbf{k} . При этом $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, где \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' — вещественные векторы. Волны, для которых эти векторы параллельны, называются однородными. Тогда $\mathbf{k} = (\mathbf{k}' + i\mathbf{k}'') \mathbf{s}$, где \mathbf{s} — единичный вещественный вектор, и продолжение вектора \mathbf{k} в комплексную область сводится к рассмотрению одной комплексной переменной $\mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ (а не трех, как это было бы в общем случае). Важно рассмотреть теперь вопрос о том, в какой мере независимы переменные ω и \mathbf{k} . Предположим, что в среде задано независимое от проходящей волны распределение источников поля, т. е. токи $\mathbf{j}_{\text{вн}}$ и заряды $\rho_{\text{вн}}$. Уравнения Максвелла позволяют выразить поле $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ через $\mathbf{j}_{\text{вн}}(\omega, \mathbf{k})$ и $\rho_{\text{вн}}(\omega, \mathbf{k})$. Поэтому в общем случае всегда можно подобрать такие источники, чтобы определить поле \mathbf{E} при любых значениях параметров ω и \mathbf{k} , не зависящих друг от друга. Напротив, предположим, что независимые источники поля в среде отсутствуют и сквозь среду проходит электромагнитная волна. Характер ее распространения, как мы это уже видели выше, например в § 38, определяется ее частотой и, вообще говоря, направлением, в котором она распространяется. Показатель преломления зависит от частоты. При этом $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n} \mathbf{s}$ и $\hat{n} = \hat{n}(\omega, \mathbf{s})$, так что в конечном счете $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$.

При рассмотрении свойств функции $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в комплексной плоскости переменной ω (причем \mathbf{k} играет роль параметра) учет свойств причинности позволяет прийти к дисперсионным соотношениям вида (39.11) и (39.12). В них следует лишь подставить вместо $\epsilon_1(\omega_0)$ и $\epsilon_2(\omega_0)$ соответственно вещественную $\epsilon_{(1)ij}(\omega, \mathbf{k})$ и мнимую $\epsilon_{(2)ij}(\omega, \mathbf{k})$ части тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и заменить ϵ_0 на $\epsilon_0 \delta_{ij}$. Вывод этих соотношений совершенно аналогичен *) проведенному для $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$.

Распространение поля в среде при условиях $\mathbf{j}_{\text{вн}} = 0$, $\rho_{\text{вн}} = 0$ и $\mu = \mu_0$ определяется уравнениями Максвелла в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (39.14)$$

При этом здесь, в порядке исключения, мы используем гауссовы единицы, в которых дальнейшие соотношения принимают несколько более простую форму. Подставляя

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (39.15)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{D}_0 и \mathbf{H}_0 — постоянные амплитуды, получим

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{k}\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{H} = 0. \quad (39.16)$$

*) См. цитируемую книгу Аграновича и Гинзбурга.

Здесь H , D и E можно считать зависящими от ω и \mathbf{k} . Исключим H из первых двух уравнений (39.16):

$$c^{-2} D = -\omega^{-2} [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times E]] = \omega^{-2} \{k^2 E - \mathbf{k}(\mathbf{k}E)\}. \quad (39.17)$$

Отсюда с помощью (39.1) получим

$$\{k^2 \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j\} E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (39.18)$$

Мы получили однородную систему алгебраических уравнений. Условие существования решения $E_j(\omega, \mathbf{k})$ этой системы, не равного тождественно нулю, записывается так:

$$\det \{k^2 \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j\} = 0. \quad (39.19)$$

Уравнение (39.19), если функция ϵ_{ij} известна, позволяет выразить, в принципе, ω через \mathbf{k} (или наоборот); его решения вида

$$\omega_m = \omega_m(\mathbf{k}) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (39.20)$$

определяют все возможные в среде типы электромагнитных волн.

39.5. Будем теперь считать, что компоненты ϵ_{ij} не зависят ни от ω , ни от \mathbf{k} . В этом частном случае нас интересует только лишь влияние анизотропии среды на распространение волн. Такая проблема возникает в оптике кристаллов (причем, разумеется, кристалл считается с макроскопической точки зрения не дискретной, а сплошной средой). Подставим $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ в уравнение (39.19).

Если, кроме того, принять в качестве декартовых осей координат x, y, z главные оси тензора ϵ_{ij} и обозначить через $\epsilon_{(x)}$, $\epsilon_{(y)}$, $\epsilon_{(z)}$ его соответствующие главные значения, то уравнение (39.19) принимает вид

$$\begin{aligned} n^2 (\epsilon_{(x)} n_x^2 + \epsilon_{(y)} n_y^2 + \epsilon_{(z)} n_z^2) - \\ - \{n_x^2 \epsilon_{(x)} (\epsilon_{(y)} + \epsilon_{(z)}) + n_y^2 \epsilon_{(y)} (\epsilon_{(x)} + \epsilon_{(z)}) + n_z^2 \epsilon_{(z)} (\epsilon_{(x)} + \epsilon_{(y)})\} + \\ + \epsilon_{(x)} \epsilon_{(y)} \epsilon_{(z)} = 0. \end{aligned} \quad (39.21)$$

Оно называется *уравнением Френеля*.

В данном случае, когда $\epsilon_{(x)}$, $\epsilon_{(y)}$, $\epsilon_{(z)}$ предполагаются постоянными, уравнение Френеля при заданном направлении волнового вектора определяет его абсолютную величину. Если углы, образуемые вектором \mathbf{n} с осями координат, заданы, то (39.21) представляет собой квадратное уравнение для n^2 . Отсюда следует, что каждому направлению вектора \mathbf{n} соответствуют, вообще говоря, две возможные его абсолютные величины. В пространстве же с координатами n_x, n_y, n_z уравнение Френеля в общем случае определяет поверхность четвертого порядка (поверхность волновых векторов или оптическая индикатриса).

Конкретная форма оптической индикатрисы целиком зависит от свойства диэлектрического тензора ϵ_{ij} , характеризующего данный кристалл. В этом отношении следует различать кубические,

одноосные и двухосные кристаллы *). Для кристаллов с кубической симметрией все главные значения тензора ϵ_{ij} равны между собой и они в оптическом отношении ведут себя так же, как изотропные среды. Одноосными называются такие кристаллы, в которых можно выбрать оси координат так, чтобы $\epsilon_{(x)} = \epsilon_{(y)} \equiv \epsilon_{\perp}$, а значение $\epsilon_z \equiv \epsilon_{\parallel}$ отличалось от этих двух. В этом случае уравнение (39.21) распадается на два следующих квадратичных уравнения:

$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad \frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\epsilon_{\parallel}} = 1. \quad (39.21')$$

Таким образом, поверхность волновых векторов распадается на две поверхности — сферу и эллипсоид вращения. При

$\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$ сфера касается эллипсоида извне, а при $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$ — изнутри (рис. 44). Сферической поверхности соответствует независимость волнового вектора от направления. Она описывает так называемые *обыкновенные* волны, по отношению к которым кристалл не отличается от изотропного тела. Для волн же, соответствующих эллипсоидальной индикатрисе и называемых *необыкновенными*, напротив, абсолютная величина волнового вектора зависит от угла наклона этого последнего к оптической оси кристалла z .

Двухосные кристаллы характеризуются тем, что для них все три главные значения тензора ϵ_{ij} различны. Для исследования их оптических свойств необходимо рассматривать общее уравнение Френеля (39.21), чем мы здесь заниматься не можем.

Вернемся к первым двум уравнениям (39.16). Из них видно, что векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} ортогональны друг к другу и к вектору \mathbf{k} . Кроме того, вектор \mathbf{H} ортогонален к \mathbf{E} , т. е. одновременно к трем векторам \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{k} , а потому эти последние лежат в одной плоскости. Важно обратить внимание на то, что анизотропия проявляется в несовпадении направлений векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} , а так как поток энергии \mathbf{S} определяется векторным произведением $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, то волновой вектор \mathbf{k} (или \mathbf{n}) не совпадает с направлением потока энергии (рис. 45). Это последнее называется направлением распространения лучей света в кристалле.

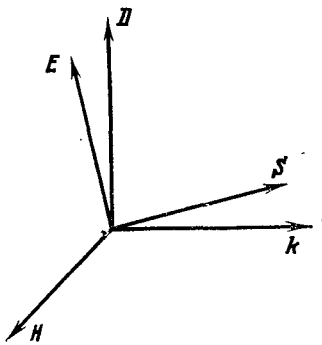


Рис. 45.

Рис. 44.

*) См. Ландау и Лифшиц, цитируемая книга, §§ 78 и 79.

Итак, если, как мы видели, например, в § 18, в изотропной среде направление луча совпадает с направлением нормали к фронту световой волны, то в среде анизотропной они различны. Волновой вектор определяется характером распространения поверхностей равной фазы (какими, по определению, и являются фронты световых волн), поэтому связанная с ним скорость распространения называется *фазовой* скоростью. Поток энергии, вообще говоря, распространяется с другой (по величине и направлению) скоростью, которая называется *групповой*. Для иллюстрации этого явления можно представить себе, что поток электромагнитных волн проходит через узкую диафрагму, как показано на рис. 46 (при этом явлении дифракции пренебрегаем). Эта диафрагма и вырезает световой луч. Причина несовпадения векторов \mathbf{k} и \mathbf{S} очевидна из этого рисунка.

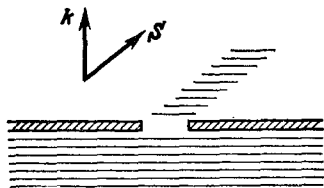


Рис. 46.

39.6. Остановимся на описании световых лучей в анизотропной среде несколько более подробно. Введем «лучевой вектор» \mathbf{s} , направление которого совпадает с направлением вектора Пойнтинга \mathbf{S} , а абсолютную величину удобно определить условием

$$n\mathbf{s} = 1. \quad (39.22)$$

Можно было бы, в принципе, считать вектор \mathbf{s} и единичным. Так же, как \mathbf{S} , вектор \mathbf{s} удовлетворяет соотношениям ортогональности:

$$\mathbf{s}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{s}\mathbf{E} = 0. \quad (39.23)$$

Формулы (39.16) при замене \mathbf{k} на \mathbf{n} имеют вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad D_i = \epsilon_{ij} E_j. \quad (39.24)$$

Здесь выписана также еще раз связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} при посредстве тензора ϵ_{ij} . Из (39.24) и (39.23) с учетом (39.22) получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{s} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{s} \times \mathbf{H}, \quad E_i = \epsilon_i^j D_j. \quad (39.25)$$

Здесь добавлено выражение компонент \mathbf{E} через компоненты \mathbf{D} , причем матрица, составленная из компонент тензора ϵ_i^j , обратна по отношению к матрице $\|\epsilon_{ij}\|$. Сравнение формул (39.24) и (39.25) показывает, что выполняется принцип двойственности, а именно: если существует какое-либо соотношение для волн, то из него можно получить соотношение для лучей с помощью замены \mathbf{E} на \mathbf{D} , \mathbf{n} на \mathbf{s} , ϵ_{ij} на ϵ_i^j и обратно. В частности, уравнение Френеля (39.21)

для оптической индикатрисы переходит в уравнение лучевой поверхности вида

$$s^2 (\epsilon_{(y)} \epsilon_{(z)} s_x^2 + \epsilon_{(x)} \epsilon_{(z)} s_y^2 + \epsilon_{(x)} \epsilon_{(y)} s_z^2) - \\ - [s_x^2 (\epsilon_{(y)} + \epsilon_{(z)}) + s_y^2 (\epsilon_{(x)} + \epsilon_{(z)}) + s_z^2 (\epsilon_{(x)} + \epsilon_{(y)})] + 1 = 0. \quad (39.26)$$

Это уравнение для одноосных кристаллов приводит к результатам, совершенно аналогичным полученным выше с помощью индикатрисы. При этом нужно иметь в виду, что, согласно принципу двойственности, при замене \mathbf{n} на \mathbf{s} в уравнении (39.21') нужно одновременно заменить ϵ_{\perp} на $1/\epsilon_{\perp}$ и ϵ_{\parallel} на $1/\epsilon_{\parallel}$.

При преломлении световой волны, падающей на поверхность одноосного кристалла, возникают, как мы видели выше, две волны — обыкновенная и необыкновенная. Это явление называется *двойным преломлением* в кристаллах. При этом экспериментально наблюдаемы не волны, а соответствующие им лучи. Заметим, что взаимность между волнами и лучами, указанная выше, имеет место лишь внутри кристалла. На поверхности же его отражение и преломление световых лучей отличается от отражения и преломления световых волн. Это обусловлено различием граничных условий для векторных полей \mathbf{D} и \mathbf{E} . В результате, например, необыкновенный луч не лежит в плоскости падения, в то время как волновой вектор находится в ней.

39.7. Различие между фазовой и групповой скоростями, рассмотренное выше в случае анизотропных сред, имеет место и для изотропных сред, обладающих дисперсией, когда $\omega = \omega(k)$ (при этом $\omega(k) = \omega(-k)$, так как от направления проходящего излучения дисперсия не должна зависеть). Разумеется, для монохроматического излучения эти скорости совпадают. Влияние дисперсии сказывается на прохождении сквозь среду «волновых пакетов», т. е. излучения, представляющего собой суперпозицию монохроматических волн, обладающих различными частотами. При этом в изотропной среде направления фазовой и групповой скоростей совпадают, но их абсолютные величины различны. Изучение того, как распространяются волновые пакеты через среду, позволяет выяснить те свойства диспергирующей среды, которыми она обладает, если в ней отсутствуют независимые от проходящего излучения источники электромагнитного поля (см. выше, стр. 306). Часто термин «дисперсия» относят к излучению, проникающему в среду, имея в виду при этом именно то обстоятельство, что разным частотам соответствуют разные фазовые скорости («дисперсия волнового пакета»).

Рассмотрим поэтому определение групповой скорости излучения в изотропной диспергирующей среде. Общим решением однородного волнового уравнения, описывающим произвольную волну в среде, распространяющуюся в направлении оси x , является

суперпозиция монохроматических волн:

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (39.27)$$

Одной монохроматической волне с волновым вектором k_0 соответствует $A(k) = \delta(k - k_0) A_0$. Волновым пакетом обычно называется такая суперпозиция, в которой функция $A(k)$ быстро убывает по обе стороны от некоторого выделенного значения k_0 . Из (39.27) легко видеть, что такое свойство соответствует тому, что «основная часть» волнового пакета сосредоточена в достаточно малой области пространства. С помощью разложения

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) + \dots, \quad \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 \equiv \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

формула (39.27) преобразуется к виду

$$f(x, t) \simeq \exp \left\{ i \left[k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0 \right] t \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp \left\{ i \left[x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t \right] k \right\} dk. \quad (39.28)$$

Но из обращения преобразования Фурье (39.27) при $t = 0$ видно, что

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0) e^{-ikx} dx.$$

Поэтому интеграл в (39.28) равен $f \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t, 0 \right)$.

Таким образом,

$$f(x, t) \simeq f \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t, 0 \right) \exp \left\{ i \left[k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0 \right] t \right\}.$$

Отсюда видно, что амплитуда волнового пакета движется со скоростью

$$v_{\text{гp}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0. \quad (39.29)$$

Плотность энергии определяется квадратом модуля амплитуды. Поэтому скорость распространения энергии волны является именно групповой скоростью (39.29). Фазовая скорость, равная $v_{\text{ф}} = \omega(k)/k = c/n(k)$ может быть, в частности, больше c (при $n(k) < 1$). Следует подчеркнуть, что соображения теории относительности по поводу максимального характера скорости света в вакууме *) относятся к распространению световых сигналов, т. е.

*) По отношению к скоростям распространения света в любом веществе.

именно к групповой скорости. Так как $n = ck/\omega$, то можно записать также $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$, если считать показатель преломления функцией частоты. Отсюда

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n(\omega) + \omega dn/d\omega}. \quad (39.30)$$

Обычно выполняется условие $dn/d\omega > 1$ (нормальная дисперсия). Так как $n > 1$, то $v_{\text{гр}} < c$. Однако существуют и области аномальной дисперсии, в которых $dn/d\omega < 0$. В таких диапазонах частот, если $dn/d\omega$ достаточно велико по абсолютной величине, то формальное применение определения (39.30) может приводить к значениям $v_{\text{гр}} > c$. Однако само это определение неприменимо в этих условиях с самого начала, ибо его вывод основывался на предположении о достаточно медленном изменении функции $\omega(k)$ или, что то же самое, $n(\omega)$, в то время как в рассматриваемом случае это изменение должно быть, напротив, быстрым (велика производная $dn/d\omega$!).

В анизотропных средах, где мы не учитывали частотной дисперсии, различие поведения лучей и волн все же можно связать с понятиями групповой и фазовой скоростей, если считать, что первая характеризует распространение величин, квадратичных по отношению к амплитуде волны.

§ 40. Волны в магнитной гидродинамике

40.1. Свообразные явления волнового характера возникают при взаимодействии магнитного поля с проводящей сплошной средой. Основные уравнения для таких процессов были рассмотрены в § 35. В частности, формулы (35.8) и (35.9) имеют вид

$$\partial \kappa / \partial t + \operatorname{div} (\kappa \mathbf{v}) = 0, \quad (40.1)$$

$$\kappa (\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) \mathbf{v}) = -\mu_0 [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}] - \operatorname{grad} p. \quad (40.2)$$

Здесь κ — плотность массы проводящей жидкости и в уравнении (40.2) использовано определение (35.11) производной по времени.

Для магнитного поля выполняется уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (40.3)$$

если $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Вспомним, наконец, условие (35.6), вытекающее из предположения о бесконечной электропроводности. Применяя к (35.6) операцию rot и используя закон индукции $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t$, можно привести это условие к виду

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (40.4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполнено.

Рассмотрим прежде всего следующую частную постановку задачи. Пусть плотность κ постоянна, а $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$. При этом \mathbf{H}_0

постоянно, а \mathbf{h} — некоторая функция координат и времени. Поле \mathbf{h} играет роль флуктуации, накладывающейся на первоначальное поле \mathbf{H}_0 . Выберем ось x декартовой системы координат вдоль \mathbf{H}_0 , так что $\mathbf{H}_0 = (H_0, 0, 0)$. В конце § 35 с помощью преобразования уравнения (35.9), т. е. (40.2), была получена следующая его форма (см. (35.16)):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}, \text{grad}) \mathbf{v} - \frac{1}{\kappa} \text{grad} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) + \frac{1}{\kappa} \mu_0 (\mathbf{H} \text{grad}) \mathbf{H}. \quad (40.5)$$

При наших предположениях $\mathbf{H}^2 = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2$, а последнее слагаемое в правой части преобразуется к виду $\frac{\mu_0}{\kappa} \left[\mathbf{H}_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} + (\mathbf{h} \text{grad}) \mathbf{h} \right]$. Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости имеет вид $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Кроме того, разумеется, $\text{div } \mathbf{h} = 0$.

Покажем, что возможным решением уравнения (40.5) является

$$\mathbf{v} = \pm \mathbf{h} (\mu_0/\kappa)^{1/2}. \quad (40.6)$$

Если подставить (40.6) в (40.5), то в последнем слагаемые $-(\mathbf{v}, \text{grad}) \mathbf{v}$ и $\frac{\mu_0}{\kappa} (\mathbf{h}, \text{grad}) \mathbf{h}$ взаимно сокращаются. Таким образом, получается равенство

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \text{grad} \left(p + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 \right) + \frac{\mu_0}{\kappa} H_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}. \quad (40.7)$$

Применим операцию div к обеим сторонам последней формулы. С учетом сказанного выше при этом получится необходимое условие того, чтобы решение имело предполагаемый вид (40.6), а именно:

$$\Delta \left[p + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 \right] = 0.$$

Считая, что область флуктуации ограничена в пространстве и вне этой области $\mathbf{h} = 0$, давление же $p = p_0$, получаем

$$p + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 = p_0 + \frac{\mu_0 H_0^2}{2} = \text{const}. \quad (40.8)$$

Другими словами, всюду в области флуктуации гидростатическое давление уравновешивается магнитным давлением (см. § 35) и

$$\text{grad} \left(p + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 \right) = 0. \quad (40.9)$$

Уравнение (40.7) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\kappa} H_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}. \quad (40.10)$$

Обратимся теперь к формуле (40.4), в которой следует заменить \mathbf{H} на $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$. Согласно (Б.20), с учетом того, что $\text{div } \mathbf{v} = 0$

и $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] &= (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) \mathbf{H} = \\ &= H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + (\mathbf{h}, \operatorname{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Но из (40.6) следует, что последние два слагаемых взаимно сокращаются. Поэтому уравнение (40.4) в нашем случае имеет форму

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}. \quad (40.11)$$

Уравнения (40.10) и (40.11) нужно решать совместно. Из них видно, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0}{\kappa} H_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}. \quad (40.12)$$

Совершенно такое же уравнение получается для \mathbf{h} . Таким образом, векторы \mathbf{v} и \mathbf{h} подчиняются одномерным волновым уравнениям. Если задано произвольное начальное распределение скоростей \mathbf{v} , для которого выполняется (40.6), то из (40.12) следует, что оно распространяется вдоль оси x (т. е. вдоль первоначального постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0) со скоростью

$$V = \pm H_0 \sqrt{\mu_0 / \kappa}. \quad (40.13)$$

Такие волны в проводящей жидкости называются магнитогидродинамическими (МГД) волнами. Решение вида (40.6) уравнений магнитной гидродинамики впервые было найдено Альвеном в 1942 г.

Подкоренное выражение в (40.13) имеет вид $2p_0^m / \kappa$, где $p_0^{(m)}$ — магнитное давление. Поэтому (40.13) можно сравнить с выражением для скорости звука $v = (\gamma p_0 / \kappa)^{1/2}$, получающимся, когда выполняется адиабатическое соотношение $p = k \kappa^\gamma$, где γ — отношение удельных теплоемкостей. Более подробное рассмотрение могло бы показать, что МГД-волны можно представить в виде поперечных колебаний магнитных силовых линий, во многом аналогичных колебаниям струны. Свойство поперечности отличает их от звуковых волн, однако, подобно последним, они связаны со своеобразным, магнитным, давлением, возникающим в проводящей жидкости под действием магнитного поля.

40.2. Выше не предполагалось, что флуктуации, т. е. \mathbf{v} и \mathbf{h} , малы по сравнению с какими-либо характерными величинами. Можно рассмотреть гораздо более общую постановку задачи, если такое предположение сделать. По-прежнему основными уравнениями магнитной гидродинамики можно считать формулы (40.1) — (40.4) (в случае бесконечной электропроводности). Если движение среды предполагать адиабатическим, то для энтропии S единицы объема должно выполняться уравнение непрерывности (закон

сохранения энтропии)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad}) S = 0, \quad (40.14)$$

которое нужно присоединить к перечисленным основным формулам. Пусть первоначальное состояние жидкости характеризуется некоторой постоянной плотностью κ , причем течение происходит с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 в присутствии постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 . Пусть по каким-либо причинам все эти характеристики получают малые флуктуации: $\kappa \rightarrow \kappa + \kappa_1$, $\mathbf{H}_0 \rightarrow \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$, $\mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$. При этом также $S \rightarrow S + S_1$. Подставим все эти возмущенные значения в уравнения (40.1) — (40.4) и (40.14) и учтем малость флуктуаций, пренебрегая их произведениями. Введя, аналогично (40.13), обозначения $V_0 = \mathbf{H}_0 (\mu_0/\kappa)^{1/2}$ и $V' = \mathbf{H}_1 (\mu_0/\kappa)^{1/2}$, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \text{grad}) V' &= (V_0, \text{grad}) V' - V_0 \text{div} V', \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \text{grad}) \mathbf{v}_1 &= -\frac{1}{\kappa} \text{grad} (p' + \kappa V_0, V') + (V, \text{grad}) V', \\ \frac{\partial \kappa_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \text{grad}) \kappa_1 &= -\kappa \text{div} \mathbf{v}_1, \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \text{grad}) S_1 &= 0, \quad \text{div} V' = 0. \end{aligned} \quad (40.15)$$

Если уравнение состояния жидкости имеет вид $p = p(\kappa, S)$, то давление в возмущенном состоянии будет выражаться формулой

$$p' = p + dp = p + \left(\frac{\partial p}{\partial \kappa} \right)_S d\kappa + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\kappa dS. \quad (40.16)$$

Здесь $d\kappa = \kappa_1$, $dS = S_1$, и если еще обозначить $dp \equiv p_1$, $b \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\kappa$ и учесть, что в общем случае, как доказывается в термодинамике, скорость звука $\omega = \sqrt{(\partial p / \partial \kappa)_S}$, то

$$p_1 = \omega^2 \kappa_1 + b S_1, \quad (40.17)$$

Будем искать решение системы (40.15) в виде плоских волн $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ с постоянными амплитудами. Обозначим еще $\omega_0 = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0$. Тогда система (40.15) приводится к соотношениям

$$\begin{aligned} \omega_0 V' + (\mathbf{k}V) \mathbf{v}_1 - V(\mathbf{k}\mathbf{v}_1) &= 0, \\ \omega_0 \mathbf{v}_1 + (\mathbf{k}V) V_1 - \kappa^{-1} (p' + \kappa(VV')) \mathbf{k} &= 0, \\ \omega_0 \kappa_1 - \kappa(\mathbf{k}\mathbf{v}_1) &= 0, \quad \mathbf{k}V_1 = 0, \quad \omega_0 S_1 = 0. \end{aligned} \quad (40.18)$$

При этом следует также помнить уравнение состояния (40.17).

Для того чтобы система (40.18) имела решение, отличное от нулевого, нужно, чтобы определитель ее равнялся нулю. Это

условие после громоздкого вычисления приводится к виду

$$\omega_0^3 [\omega_0^2 - (\mathbf{kV})^2] [\omega_0^4 - k^2 (\omega^2 + V^2) \omega_0^2 + k^2 \omega^2 (\mathbf{kV})^2] = 0. \quad (40.19)$$

Перечислим возможные типы волн в соответствии с этим уравнением*). При этом ясно, что связь между ω и ω_0 представляет собой просто учет эффекта Доплера при переходе к системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью со скоростью v_0 .

Прежде всего, имеется решение

$$\omega_0 = \pm \mathbf{kV}. \quad (40.20)$$

Волны такого типа называются МКД-волнами (или волнами Альвена) и соответствуют явлению, рассмотренному в начале этого параграфа. Из (40.20) и (40.18) следует $p_1 = 0$, $\kappa = 0$, $S_1 = 0$, а также

$$\mathbf{v}_1 = \pm \mathbf{V}', \quad \mathbf{kV}' = 0, \quad \mathbf{V}\mathbf{V}' = 0. \quad (40.21)$$

Вектор \mathbf{v}_1 , характеризующий направление колебаний, таким образом, ортогонален вектору \mathbf{V} , т. е. вектору \mathbf{H}_0 . Вместе с тем из (40.20) видно, что скорость распространения равна $\pm (\mu_0/\kappa)^{1/2} \times \times H_0 \cos \vartheta$, где ϑ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 .

Другому решению соответствует равенство

$$\omega_0 = 0. \quad (40.22)$$

Возмущение, раз возникнув, переносится вместе со средой. Будучи использовано в уравнениях (40.18), это решение приводит к результату:

$$\kappa_1 = -\frac{b}{\omega^2} S_1, \quad \mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{V}' = 0, \quad p_1 = 0.$$

Таким образом, оно описывает связанные между собой флуктуации плотности и энтропии (энтропийные волны).

Наконец, из (40.19) вытекает также возможность равенства

$$\omega_0^4 - k^2 (V^2 + \omega^2) \omega_0^2 + k^2 \omega^2 (\mathbf{kV})^2 = 0. \quad (40.23)$$

Ему соответствуют две волны, распространяющиеся со скоростями

$$V_{\pm}^2 = \omega_0^2/k^2 = 1/2 (\omega^2 + V^2 \pm \sqrt{(\omega^2 + V^2)^2 - 4\omega^2 V^2 \cos^2 \vartheta}).$$

Угол ϑ определяется так же, как это было сделано выше. Такие волны называются *магнитозвуковыми* **).

Частотная дисперсия, как видно из приведенных формул, в нашем случае отсутствует, так как скорость распространения волн

*) Наше изложение теории волн в магнитной гидродинамике основано на статье: С. И. Сыроватский, Магнитная гидродинамика, УФН 52, 247—303 (1957). См. также книгу: Г. Альвен, К.-Г. Фельдхаммер, Космическая электродинамика, «Наука», 1967.

**) Исследование таких волн см., например, в цитируемой выше статье С. И. Сыроватского.

не зависит от ω . Если проводимость среды, в отличие от наших предположений, не бесконечна, то необходимо учитывать магнитную вязкость (см. § 35), если же среда обладает заметной гидродинамической вязкостью, то нужно учесть и ее. Введение таких членов в исходные уравнения приводит к диссипативным явлениям, т. е. к поглощению энергии и затуханию колебаний. Тогда возникает и частотная дисперсия.

Нужно еще обратить внимание на то, что формулы вида (40.20) определяют дисперсию фазовой скорости волны в зависимости от направления ее распространения. Групповая же скорость, в соответствии с (39.29), равна $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = \mathbf{V}$ и одинакова по всем направлениям.

§ 41. Понятие о нелинейной оптике

41.1. Нелинейность зависимости \mathbf{D} от \mathbf{E} или, что то же самое, поляризации \mathbf{P} от \mathbf{E} (и \mathbf{B} или \mathbf{M} от \mathbf{H}) сказывается во многих случаях. Так, мы уже упоминали, что ферромагнетики и сегнетоэлектрики обладают нелинейными свойствами. Другой пример отклонения от линейной зависимости — это эффекты насыщения. Так, например, магнитный момент единицы объема парамагнитного вещества в определенных пределах изменения внешнего магнитного поля нарастает приблизительно линейно, но при достаточно сильном поле дальнейшее нарастание момента становится невозможным и намагниченность приближается к постоянному значению. В данном параграфе нас интересуют те нелинейные свойства сред, которые проявляются в основном под действием переменного электромагнитного поля, если это поле обладает очень большой плотностью энергии, и экспериментально наблюдаются в виде различных оптических эффектов. Изучение этих свойств стало актуальным за последние 15 лет в связи с разработкой источников мощного когерентного излучения (лазеры и т. п.).

Аналогично тому, как мы поступили в начале изложения теории дисперсии (§ 39), приведем и здесь грубую, но наглядную модель микроскопических свойств среды, приводящих к нелинейным эффектам. Эта модель состоит просто в том, что при достаточно сильных внешних воздействиях на среду ее «элементарные осцилляторы» уже нельзя считать гармоническими. Достаточно большие отклонения от положения равновесия не позволяют считать силу \mathbf{F} , действующую на осциллятор, квазиупругой. Вместо этого можно записать $F = kx + k'x^2 + \dots$ (достаточно здесь рассматривать одномерный случай). Уравнение движения осциллятора под действием этой силы и внешнего электрического поля $E(t)$ принимает вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) + qE(t) - \tilde{\Gamma} \frac{dx}{dt}, \quad (41.1)$$

Последнее слагаемое в правой части, как обычно, служит для учета эффектов затухания (см. § 25). Отклонению x от положения равновесия соответствует дипольный момент $p = qx$. Макроскопическая же поляризация среды может быть записана в виде $P = \gamma qx$, где коэффициент γ зависит от плотности распределения дипольных моментов. Поэтому уравнение (41.1) служит также для нахождения $P(t)$. Мы не будем рассматривать решение уравнения (41.1). Для нас существенно здесь лишь то, что во многих случаях можно решать его методом последовательных приближений, представляя поляризацию в виде

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(t), \quad (41.2)$$

где n -й член зависит от n -кратного произведения напряженностей поля *).

Более подробно каждый отдельный член, входящий в формулу (41.2), может быть записан в виде

$$P_i^{(n)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau_1 \dots \int_0^{\infty} d\tau_n \chi_{i_1}^{(n)} \dots i_n(\tau_1, \dots, \tau_n) E_{i_1}(t - \tau_1) \dots E_{i_n}(t - \tau_n). \quad (41.3)$$

Здесь, аналогично § 39, учитывается возможность частотной дисперсии в среде. Интегрирование от нуля (а не от $-\infty$) соответствует условию причинности, т. е. тому, что значение поляризации в данный момент времени определяется только более ранними значениями электрического поля. Практически следует учитывать в выражении поляризации члены вплоть до третьего порядка включительно.

41.2. Мы получим достаточное представление об интересующих нас нелинейных оптических эффектах, если ограничимся рассмотрением случая, когда

$$E = E_0 + E^{\omega} \cos \omega t. \quad (41.4)$$

(см. цитируемую выше книгу Пекары). При этом пусть

$$P_i = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l. \quad (41.5)$$

Коэффициенты $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ должны быть симметричными по всем своим значкам, кроме первого. Подставляя (41.4) в (41.5) и учитывая эту симметричность, а также элементарные формулы $\cos^2 \omega t =$

*) См. *М. Шуберт* и *Б. Вильгельми*, Введение в нелинейную оптику, «Мир», 1973. Рекомендуем также в качестве введения в современные проблемы книгу *А. Пекара* Новый облик оптики, «Советское радио», 1973. Нелинейной оптике посвящена ч. III этой книги. Наше изложение имеет лишь цель показать, каким образом простейшее описание нелинейных эффектов получается расширением материальных соотношений, добавляемых к уравнениям Максвелла.

$= 1/2 (\cos 2\omega t + 1)$ и $\cos^3 \omega t = 1/4 (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t)$, можно выражение (41.5) представить в виде

$$P = P^0 + P^\omega \cos \omega t + P^{2\omega} \cos 2\omega t + P^{3\omega} \cos 3\omega t. \quad (41.6)$$

Здесь P_0 — постоянная составляющая поляризации. Мы сейчас выпишем эти слагаемые и кратко обсудим их смысл. Заметим, что в (41.5) не учитывается дисперсия. Если же принять ее во внимание, т. е. использовать выражения вида (41.3), то можно видеть, что при подстановке (41.4) коэффициенты представляются с помощью преобразования Фурье и зависят от ω . В дальнейшем, однако, мы не будем обращать внимание на эту зависимость, хотя и следует помнить, что фактически она существует.

Итак, обсудим последовательно члены поляризации, указанные в (41.6). При этом удобнее всего начать с $P^{2\omega}$. Соответствующая составляющая поляризации колеблется с частотой, удвоенной по сравнению с частотой возбуждающего эти колебания поля. Такие колебания приводят к излучению, обладающему их частотой, которое наблюдается при прохождении света через вещество (порождение второй гармоники). При этом

$$P_i^{2\omega} = 1/2 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^\omega E_k^\omega + 3 \chi_{ijk}^{(3)} E_j^0 E_k^\omega E_l^\omega. \quad (41.7)$$

Отсюда видно, что эффект возникновения второй гармоники состоит из двух частей: квадратичной, которая определяется только переменной составляющей поля (41.4), и кубической, присутствующей лишь тогда, когда у поля есть постоянная составляющая.

Аналогичное явление — порождение третьей гармоники, т. е. излучение с утроенной частотой, соответствующее члену с коэффициентом

$$P_i^{3\omega} = \frac{1}{4} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j^\omega E_k^\omega E_l^\omega.$$

Перейдем к остальным двум слагаемым в (41.6). Постоянная составляющая равна

$$P_i^0 = \chi_{ij}^{(1)} E_j^0 + \chi_{ijk}^{(2)} E_j^0 E_k^0 + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j^0 E_k^0 E_l^0 + 1/2 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^\omega E_k^\omega + 3/2 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j^\omega E_k^\omega E_l^\omega. \quad (41.8)$$

Первые три члена описывают влияние статического электрического поля. Квадратичный и кубический члены при определенных условиях наблюдаются у сегнетоэлектриков. Четвертое слагаемое описывает возникновение постоянной поляризации при возбуждении второй гармоники, описанном выше. Последнее же слагаемое показывает, что если при возбуждении второй гармоники присутствует и постоянное электрическое поле, то статическая поляризация испытывает дополнительное изменение,

Наконец, составляющая поляризации, колеблющаяся с той же частотой, что и возбуждающая волна, равняется

$$P_i^{\omega} = \chi_{ij}^{(1)} E_j^{\omega} + 2\chi_{ijk}^{(2)} E_j^{\omega} E_k^{\omega} + 3\chi_{ijkl}^{(3)} E_j^{\omega} E_k^{\omega} E_l^{\omega} + \frac{3}{4}\chi_{ijkl}^{(3)} E_j^{\omega} E_k^{\omega} E_l^{\omega}. \quad (41.9)$$

Свойства этой составляющей могут быть выражены через посредство показателя преломления. Первый член здесь хорошо нам знаком. Следующие два слагаемых описывают явления, известные уже давно, задолго до того, как стали известны остальные нелинейные оптические эффекты. В самом деле, ясно, что для их наблюдения достаточно создать сильное постоянное электрическое поле. Первое из них соответствует *эффекту Погкельса* (1893 г.): присутствие достаточно сильного постоянного электрического поля влияет на распространение световых колебаний (изменяет показатель преломления среды). Соображения симметрии, в которые мы здесь, к сожалению, не можем входить, показывают, что, будучи эффектом второго порядка, эффект Погкельса может проявляться лишь в тех кристаллах, которые не имеют центра инверсии. Если же центр инверсии существует, то соответствующий эффект может иметь лишь третий порядок. Он описывается тогда третьим слагаемым в (41.9) и называется *эффектом Керра*. Экспериментально он наблюдается как двойное преломление световых волн под действием постоянного электрического поля, если среда и была изотропна при отсутствии такового. Наконец, последнее слагаемое описывает изменение коэффициента преломления среды под действием самой проходящей сквозь среду световой волны.

Все перечисленные здесь физические явления экспериментально подтвердились. Для их теоретического описания необходимы более полные сведения о структуре сред, в которых они становятся возможными. Приведенное выше описание этих явлений элементарно и схематично. При этом существуют многие другие интереснейшие проблемы нелинейной оптики (такие, как самофокусировка светового пучка в нелинейной среде), о которых мы лишены возможности говорить здесь. Однако уже из приведенных сведений должно быть очевидно, как расширяются возможности описания электромагнитных явлений при обобщении предположений о свойствах среды *). Это может служить иллюстрацией широты метода, основы которого были заложены Максвеллом.

*) Еще раз рекомендуем читателю цитируемые на стр. 318 книги.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Основные формулы тензорного анализа

Аксиомы векторного пространства мы предполагаем известными. В частности, будем считать, что в пространстве V_N существует N линейно независимых векторов, но любые $N+1$ векторов линейно зависимы между собой (аксиома размерности). Если e_i ($1 \leq i \leq N$) — какая-либо система линейно независимых векторов, то любой вектор x может быть представлен в виде

$$x = x^i e_i. \quad (\text{A.1})$$

Здесь, как и всюду в нашем изложении, используется условие суммирования Эйнштейна: если в формуле один и тот же индекс встречается дважды, то подразумевается суммирование по всем значениям этого индекса (т. е. от 1 до N). Совокупность векторов e_i называется *базисом* векторного пространства.

Пусть $\|A_{i'}^i\| \equiv A$ — квадратная матрица такая, что $\det(A_{i'}^i) \neq 0$ (здесь верхний индекс нумерует столбцы, а нижний — строки матрицы A). С ее помощью мы можем перейти к новому базису, состоящему из векторов $e_{i'}$, по формулам

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i. \quad (\text{A.2})$$

При этом

$$x = x^{i'} e_{i'} = (A_{i'}^i x^{i'}) e_i = x^i e_i, \quad (\text{A.3})$$

т. е.

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'}. \quad (\text{A.4})$$

Заметим, что преобразование (A.4) совершается с помощью матрицы A^T , транспонированной по отношению к матрице A , так как суммирование производится здесь по нижнему значку i' . Разрешая уравнения (A.4) относительно величин $x^{i'}$ (это возможно, так как $\det A^T = \det A \neq 0$), получим выражение новых компонент вектора x через старые:

$$x^{i'} = A_{i'}^i x^i. \quad (\text{A.5})$$

Элементы $A_{i'}^i$ составляют матрицу, обратную матрице A^T . Отметим формулы, следующие из самого определения обратной матрицы:

$$A_{i'}^i A_k^{i'} = \delta_k^i, \quad A_{i'}^i A_k^{i'} = \delta_k^i. \quad (\text{A.6})$$

Множество линейных преобразований A с ненулевыми определителями образует группу с обычным законом умножения матриц (этот закон ассоциативен; каждой матрице соответствует обратная; существует единичный элемент — матрица тождественного преобразования). Это — группа аффинных преобразований векторного пространства.

При любой физической интерпретации векторного пространства необходимо иметь в виду тот фундаментальный факт, что, как можно видеть из формулы (А.3), понятие вектора является инвариантным. В противоположность этому численная характеристика вектора с помощью компонент x^i имеет смысл лишь относительно данного базиса, и закон (А.5) изменения компонент при данном изменении базиса выражает неизменность самого вектора \mathbf{x} . Однако вектор представляет собой лишь один из примеров геометрических объектов векторного пространства, не зависящих от того или иного выбора базиса. Другим таким примером является линейная численная (скалярная) функция $\varphi(\mathbf{x})$, определенная на пространстве V_N^* . В этом случае обозначим $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$ и $\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'})$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \varphi_i = x^{i'} \varphi_{i'} = x^{i'} (A_{i'}^i \varphi_i),$$

т. е.

$$\varphi_{i'} = A_{i'}^i \varphi_i. \quad (\text{А.7})$$

Здесь матрица $\|A_{i'}^i\|$ та же, что и в соотношении (А.1). Числа φ_i рассматриваются как компоненты геометрического объекта, который называется ковариантным тензором первого ранга (или *ковариантным вектором*). Рассмотренные ранее компоненты x^i определяют контравариантный тензор первого ранга (*контравариантный вектор*).

В более общем случае геометрический объект может быть определен с помощью задания в каждом базисе таблицы компонент $T_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1' i_2' \dots i_k'}$, причем компоненты, относящиеся к разным базисам, связаны между собой следующим законом преобразования:

$$T_{i_1' i_2' \dots i_l'}^{i_1' i_2' \dots i_k'} = A_{i_1}^{i_1'} A_{i_2}^{i_2'} \dots A_{i_k}^{i_k'} A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \dots A_{i_l'}^{i_l} T_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}. \quad (\text{А.8})$$

Такой геометрический объект называется тензором ранга $k + l$, k раз контравариантным и l раз ковариантным. Ясно, что при перестановке индексов такая таблица может, вообще говоря, изменяться. Поэтому следовало бы еще обозначить то место, на котором находятся ковариантные индексы по отношению к контравариантным (например, $T_{k,m}^l$, так как, вообще говоря, $T_{k,m}^l \neq T_{k,m}^l$). Для сокращения записи в формуле (А.8) это не сделано.

*) Условие линейности означает, что $\varphi(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) + \beta \varphi(\mathbf{y})$, где α, β — скалярные постоянные.

Простейший пример тензора второго ранга — прямое произведение двух векторов, компоненты которого определяются таблицей произведений вида $x^k y^l$, $x_k y_l$ или $x^k y_l$ (это — три разных тензора, так как закон преобразования их компонент различен).

Перечислим алгебраические операции, которые можно производить над тензорами. В качестве иллюстрации достаточно привести формулы, относящиеся к тензорам какого-либо небольшого ранга.

1. *Сложение*. Если сложить одинаковые компоненты двух тензоров, обладающих одним и тем же законом преобразования, то в результате получится тензор с таким же законом преобразования. Например, $T_1^{ij} + T_2^{ij} = T_3^{ij}$.

2. *Умножение на скаляр*. Умножение всех компонент любого тензора на одно и то же число (например, $\alpha T^{i..j}$) не изменяет закона преобразования этого тензора.

3. *Прямое произведение тензоров*. Если имеется любой тензор T_1 ранга n_1 , который k_1 раз контравариантен и l_1 раз ковариантен (так что $k_1 + l_1 = n_1$), и любой другой тензор T_2 ранга n_2 , который k_2 раз контравариантен и l_2 раз ковариантен (так что $k_2 + l_2 = n_2$), то таблица всевозможных произведений компонент тензора T_1 на компоненты тензора T_2 подчиняется закону преобразования тензора ранга $n_1 + n_2$, причем этот новый тензор $k_1 + k_2$ раз контравариантен и $l_1 + l_2$ раз ковариантен.

Например, с помощью компонент тензоров u_k^l и v_{mn} можно образовать компоненты $u_k^l v_{mn}$ нового тензора.

4. *Операция свертывания*. Если тензор имеет k контравариантных и l ковариантных индексов, то с помощью его компонент можно образовать таблицу новых величин следующим образом. Выберем те его компоненты, у которых значения какого-либо определенного контравариантного индекса равны значениям какого-либо определенного ковариантного индекса, и образуем суммы таких компонент по этим равным индексам. Совокупность этих сумм образует новый тензор, который будет $k - 1$ раз контравариантным и $l - 1$ раз ковариантным.

Например, если $T^{k..l..m}$ — тензор, то $T^{k..m}$ и $T^{m..l}$ также будут тензорами (в данном случае у каждого из них остается лишь по одному индексу и они преобразуются по векторному закону).

Часто встречается объединение операций прямого умножения и свертывания, например: $u^m v_l \equiv \omega^m$.

Тензор ранга n в N -мерном пространстве имеет, вообще говоря, N^n компонент. Если таблица его компонент обладает теми или иными свойствами симметрии, то между ними возникают алгебраические соотношения, наличие которых уменьшает число линейно независимых компонент. В частности, симметричным тензором называется такой, компоненты которого остаются неизменными при любой перестановке индексов. Вполне антисимметричный тензор определяется тем, что его компоненты изменяют знак на обрат-

ный при перестановке любой пары индексов (а значит, и при любой нечетной перестановке его индексов). Формула (А.8) показывает, что свойства симметрии тензора одинаковы во всех базисах.

В N -мерном пространстве не может существовать ненулевой антисимметричный тензор ранга, большего N . У антисимметричного тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_N}$ наибольшего возможного ранга (такой тензор называется также псевдоскаляром) отлична от нуля компонента $A_{1\ 2\dots N}$; все остальные его компоненты, не равные нулю, отличаются от этой какой-либо перестановкой индексов $1, 2, \dots, N$. При четной перестановке индексов значение соответствующей компоненты равно $A_{1\ 2\dots N}$, при нечетной же — отличается от $A_{1\ 2\dots N}$ только знаком. Если $A_{1\ 2\dots N} = 1$, то обозначим такой тензор символом $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$. Применение формулы (А.8) приводит для него к результату

$$\varepsilon_{1'2'\dots N'} = \det(A_{i'}^i) \cdot \varepsilon_{1\ 2\dots N}. \quad (\text{А.9})$$

Для простейшего случая тензора T_{ik} второго ранга, не обладающего определенной симметрией, отметим способ построения на его основе симметричного и антисимметричного тензоров. Действительно, выражения

$$T_{ik}^{(s)} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}), \quad T_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}), \quad T_{ik} = T_{ik}^{(s)} + T_{ik}^{(a)} \quad (\text{А.10})$$

определяют тензоры, причем $T_{ik}^{(s)} = T_{ki}^{(s)}$ и $T_{ik}^{(a)} = -T_{ki}^{(a)}$. Следует помнить, что формулы (А.10) применимы только к тензору второго ранга. В более общих случаях следует использовать общее определение операций симметризации и альтернирования, которые в нашем изложении не встретятся. В частности, с помощью прямого произведения $T_{ik} \equiv x_i y_k$ двух векторов может быть построено симметризованное произведение $T_{ik}^{(s)}$ и так называемый бивектор $T_{ik}^{(a)}$:

$$T_{ik}^{(s)} = \frac{1}{2} (x_i y_k + x_k y_i), \quad T_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} (x_i y_k - x_k y_i). \quad (\text{А.10}')$$

Евклидово N -мерное пространство E_N определяется введением в векторном пространстве V_N билинейной скалярной функции, принимающей вещественные значения и обозначаемой $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Эта функция называется скалярным произведением векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} или метрикой пространства E_N . При этом предполагается, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Квадрат длины вектора определяется как $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}^2$, а ортогональность двух векторов — как соотношение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Функция (\mathbf{x}, \mathbf{y}) не должна быть обязательно знакоопределенной, так что для различных векторов \mathbf{x} может иметь место как неравенство $\mathbf{x}^2 > 0$, так и $\mathbf{x}^2 < 0$, а также равенство $\mathbf{x}^2 = 0$. В случае, когда $\mathbf{x}^2 \geq 0$ для всех \mathbf{x} , простран-

ство называется *собственно евклидовым*, в общем же случае — *псевдоевклидовым*.

Обозначим $(e_i, e_j) \equiv g_{ij}$, если e_i — некоторый базис в V_N . Тогда формулу (А.2) можно применить для вывода соотношений:

$$g_{i'j'} = (e_{i'}, e_{j'}) = A_{i'}^i A_{j'}^j (e_i, e_j) = A_{i'}^i A_{j'}^j g_{ij}. \quad (\text{А.11})$$

Таким образом, совокупность величин g_{ij} является таблицей компонент тензора, который называется *метрическим*. При этом метрический тензор симметричен и полностью определяет метрику пространства. В дальнейшем предполагается, что метрика не вырождена, т. е. что выполняется условие

$$\det (g_{ij}) \neq 0. \quad (\text{А.12})$$

Это означает, что в E_N не существует таких ненулевых векторов, которые были бы ортогональны ко всем векторам пространства.

Исследование вещественных квадратичных форм (см., например, книгу: П. К. Ращевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, 1953, § 42) показывает, что среди всевозможных базисов пространства E_N можно выделить класс таких базисов, в которых квадратичная форма x^2 приводится к сумме квадратов. Эти базисы называются *ортонормированными*, причем составляющие их векторы (орты) e_i удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} e_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq k), \quad e_i^2 = -1 \quad (k+1 \leq i \leq N), \\ (e_i, e_j) = 0 \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (\text{А.13})$$

Орты, нормированные на $(+1)$ или (-1) , называются *единичными* и соответственно *мнимоединичными*, причем число тех и других в любом ортонормированном базисе сохраняется (закон инерции квадратичных форм). Таким образом, в ортонормированном базисе выполняются формулы

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \dots - (x^N)^2, \\ (x, y) &= x^1 y^1 + \dots + x^k y^k - x^{k+1} y^{k+1} - \dots - x^N y^N. \end{aligned} \quad (\text{А.14})$$

Компоненты x^i любого вектора x , определенные по аксиоме размерности формулой (А.1), называются, в соответствии с введенной для тензоров терминологией, *контравариантными*. По отношению к любому базису вектор может быть также определен заданием N чисел

$$x_i = (x, e_i) = x^j (e_j, e_i) = g_{ij} x^j, \quad (\text{А.15})$$

которые преобразуются при изменении базиса по формулам (А.7) и называются *ковариантными компонентами* вектора x . В ортонормированных базисах формула (А.15) принимает вид

$$x_i = g_{ii} x^i \quad (\text{без суммирования!}). \quad (\text{А.16})$$

Можно доказать, что если разрешить уравнения (A.15) относительно x^j и записать это решение в виде

$$x^i = g^{ij}x_j, \quad (\text{A.17})$$

то g^{ij} являются компонентами дважды контравариантного тензора. Этот тензор столь же хорошо определяет метрику, как и ранее введенный:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x^i y^j = g^{ij}x_i y_j. \quad (\text{A.18})$$

При этом в ортонормированных базисах $g^{ij} = g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}$.

Формулы (A.15) и (A.17) можно назвать правилами поднимания и опускания тензорных индексов, которые можно распространить на тензоры произвольного ранга, записывая, например,

$$T^i{}_k = g^{ij}T_{jk}, \quad T_{jk} = g_{il}T^l{}_k \quad (\text{A.19})$$

и т. п. В ортонормированных базисах соответствующие формулы упрощаются в согласии с (A.16).

Для того чтобы описать переходы от одного ортонормированного базиса к другому, нужно среди аффинных преобразований выделить все такие, с помощью которых соотношения (A.13) для компонент g_{ij} в старом базисе переходят в аналогичные соотношения в новом базисе; другими словами, $(e_{i'}, e_{j'}) = 0$ ($i' \neq j'$) и нормировка векторов $e_{i'}$ сохраняется. С целью определить эти преобразования, сравним формулы $x_{i'} = A_{i'}^i x_i$ и $x^{i'} = A_i^{i'} x^i$ с соотношением (A.16). С его помощью закон преобразования, например, контравариантных компонент может быть переписан в виде $g^{i'i'} x_{i'} = g^{ii} A_i^{i'} x_i$, т. е. $x_{i'} = g_{i'i} g^{ii} A_i^{i'} x_i$, и поэтому

$$A_{i'}^i = g_{i'i} g^{ii} A_i^{i'} \quad (\text{без суммирования!}). \quad (\text{A.20})$$

Преобразования, удовлетворяющие условию (A.20), называются псевдоортогональными. Легко проверить, что они составляют группу. В случае собственно евклидова пространства получим условие $A_{i'}^i = A_i^{i'}$, т. е., если вспомнить то, что было сказано на стр. 320: $A^{-1} = A^T$. Такие преобразования носят название *ортогональных*.

При переходе от одного ортонормированного базиса к другому с помощью псевдоортогональных преобразований компоненты g_{ij} сохраняют свои значения, матрица $\|g_{ij}\|$ остается диагональной и ее определитель $\det(g_{ij})$ всегда равен $+1$ или -1 (что зависит только от количества мнимоединичных векторов, характеризующего данное пространство). Поэтому из формулы (A.11) для таких преобразований получаем $[\det(A_{i'}^i)]^2 = 1$, т. е.

$$\det(A_{i'}^i) = \det(A_i^{i'}) = \pm 1. \quad (\text{A.21})$$

Первое из равенств (A.21) легко может быть доказано с помощью (A.20). Псевдоортогональные преобразования с определителем, рав-

ным ± 1 , называются собственными преобразованиями, или вращениями, преобразования же с определителем, равным -1 , называются несобственными или содержащими отражения.

В физике очень важно понятие *тензорного поля*, т. е. тензора, компоненты которого являются функциями точки некоторого пространства, например $F^{kl}(\mathbf{x})$. Предполагается обычно, что эти функции непрерывны и непрерывно-дифференцируемы достаточное число раз в определенной области изменения своих аргументов. Области непрерывности могут быть, вообще говоря, отделены одна от другой поверхностями, на которых компоненты тензорного поля могут испытывать конечный разрыв. В простейшем случае это скалярная функция $\varphi(\mathbf{x})$, определенная в некоторой области векторного пространства. По отношению к любому базису этого пространства можно определить производные $\partial\varphi/\partial x^i$. При изменении базиса эти производные изменяются по закону

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = A_{i'}^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \quad (\text{A.22})$$

Таким образом, операторы дифференцирования $\partial/\partial x^i$ образуют совместно ковариантные компоненты векторного оператора ∇ (*оператора градиента*, который мы чаще будем обозначать символом grad). При этом $(\nabla, e_i) = \partial/\partial x^i$. Ясно, что операторы дифференцирования $\partial/\partial x_i$ по ковариантным компонентам аргумента составляют контравариантные компоненты вектора ∇ . Если в пространстве взять единичный вектор \mathbf{s} , то производная по направлению \mathbf{s} определяется формулой

$$(\nabla, \mathbf{s})\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial s}. \quad (\text{A.23})$$

С помощью оператора ∇ можно составить целый ряд других операторов, обладающих определенными свойствами преобразования, например

$$\nabla^2 \equiv \Delta = g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (\text{A.24})$$

который называется *оператором Лапласа*. Скалярная операция *дивергенции* векторного поля определяется формулой

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv (\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}. \quad (\text{A.25})$$

Применение операции градиента к тензорному полю произвольного ранга приводит к новому тензорному полю, ранг которого будет на единицу выше, чем ранг исходного поля, например: $\partial F^{kl}/\partial x^m$. Аналогом операции дивергенции в общем случае является свертывание тензорного поля с оператором градиента, понижающее на две единицы ранг производной от тензора, например: $\partial F^{km}/\partial x^m$.

Естественно, скалярная операция второго порядка (A.24) приводит к тензору того же ранга, что и дифференцируемый.

Б. Векторный анализ в трехмерном евклидовом пространстве

Формулы тензорного исчисления, приведенные в Приложении А, могут быть легко применены к случаю трехмерного собственно евклидова пространства E_3 . Тензорные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3, будем здесь, как и в основном тексте, обозначать греческими буквами.

Рассмотрим полностью антисимметричный тензор наивысшего ранга $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, который преобразуется по формуле (А.9). Ввиду свойства (А.21) ортогональных преобразований этот тензор вполне характеризуется заданием единственной компоненты, например ε_{123} , не изменяющейся, т. е. обладающей свойством скаляра, при вращениях и изменяющей свой знак при отражениях. Поэтому естественно называть тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ *псевдоскаляром*. Будем считать, что $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный псевдоскаляр, т. е. что $\varepsilon_{123} = 1$.

Легко проверить выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\kappa\lambda} &= \delta_{\kappa}^{\beta}\delta_{\lambda}^{\gamma} - \delta_{\kappa}^{\gamma}\delta_{\lambda}^{\beta}, & (Б.1) \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda} &= 2\delta_{\lambda}^{\gamma}, & \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3!\end{aligned}$$

Если A^{α} — трехмерный вектор, а $T^{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор, то с помощью свертывания можно построить величины:

$$A^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \overset{*}{T}_{\beta\gamma}, \quad \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \overset{*}{A}_{\gamma}. \quad (Б.2)$$

Заметим, что в пространстве E_3 , согласно (А.16), нет различия между ковариантными и контравариантными индексами, поэтому любой из них можно поставить как наверху, так и внизу, не изменяя смысла формул. Принимая во внимание (А.8) и (А.9), можно сделать вывод, что $\overset{*}{A}_{\gamma}$ и $\overset{*}{T}_{\beta\gamma}$ изменяются при вращениях соответственно как компоненты вектора и антисимметричного тензора второго ранга, а при отражениях изменяют знак на обратный. Поэтому $\overset{*}{A}_{\gamma}$ называется псевдовектором, а $\overset{*}{T}_{\beta\gamma}$ — псевдотензором. В трехмерном векторном анализе псевдовекторы часто называются также *аксиальными* векторами; тогда «обычные» векторы в некоторых случаях называются *полярными*.

Простые геометрические соображения показывают, что удвоенный бивектор (А.10'), построенный из компонент векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , имеет компоненты $2T_{\alpha\beta}^{(a)}$, численно равные проекции на координатные плоскости (α, β) площади параллелограмма, построенного на этих векторах. С помощью формулы (Б.2) этому бивектору можно сопоставить псевдовектор:

$$\overset{*}{A}^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}T_{\beta\gamma}^{(a)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(x_{\beta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\beta}) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}x_{\beta}y_{\gamma}. \quad (Б.3)$$

В этом случае вводится обозначение $\dot{A}^{\alpha} = [\mathbf{x} \times \mathbf{y}]^{\alpha}$, служащее определением компонент векторного произведения $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} .

С помощью определения (Б.3) легко получить известные свойства произведений трех векторов. Так, например,

$$\mathbf{a} [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = a_{\alpha} [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma}. \quad (\text{Б.4})$$

Так как $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} a_{\beta} b_{\alpha} c_{\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} b_{\alpha} a_{\beta} c_{\gamma}$ (здесь первое равенство получено переменной обозначений индексов суммирования, а второе — с помощью свойства антисимметрии тензора $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$) и, аналогично этому, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} = \varepsilon^{\gamma\beta\alpha} a_{\gamma} b_{\beta} c_{\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha} b_{\beta} a_{\gamma}$, получаем

$$\mathbf{a} [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] = \mathbf{c} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (\text{Б.5})$$

Аналогичным методом можно вывести формулу

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} (\mathbf{a}c) - \mathbf{c} (\mathbf{a}b). \quad (\text{Б.6})$$

Обозначим квадратными скобками при тензорных индексах операцию антисимметризации по этим индексам. Именно

$$x_{[i_1 \dots i_m]}^m = \frac{1}{m!} \sum_{(P)} \pm P x_{i_1}^1 \dots x_{i_m}^m.$$

Здесь суммирование производится по всевозможным $m!$ перестановкам P индексов i_1, \dots, i_m ; при этом в члене суммы, получившемся с помощью четной перестановки из некоторого определенного порядка индексов, принятого за исходный, берется знак плюс, в случае же нечетной перестановки — знак минус. Если $\mathbf{a} = d\mathbf{x}$ и $\mathbf{b} = d\mathbf{y}$ — бесконечно малые смещения, исходящие из некоторой точки двумерной поверхности σ и лежащие в касательной плоскости к этой поверхности, то формула (Б.3) дает определение площади ориентированного бесконечно малого участка этой поверхности:

$$d\sigma^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} dx_{[\beta} dy_{\gamma]}. \quad (\text{Б.7})$$

Соответственно для некопланарных $\mathbf{a} = d\mathbf{x}$, $\mathbf{b} = d\mathbf{y}$, $\mathbf{c} = d\mathbf{z}$ формула (Б.4) выражает ориентированный трехмерный объем:

$$dV^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} dx_{[\alpha} dy_{\beta} dz_{\gamma]}. \quad (\text{Б.8})$$

Для определенности всюду в нашем изложении положительной ориентацией считается правовинтовая. Ясно, что абсолютные величины площади $\left(\sum_{\alpha} |d\sigma^{\alpha}|^2 \right)^{1/2}$ и объема $|dV^*|$ от выбора ориентации не зависят.

Перейдем к рассмотрению векторных полей в пространстве E_3 и дифференциальных операций, применяемых к этим полям.

Все сведения относительно операций grad, div и div grad, приведенные в формулах (А.22) — (А.25), непосредственно переносятся на частный случай E_3 . Лапласиан в декартовых координатах принимает вид

$$\Delta \equiv \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (\text{Б.9})$$

Специфической особенностью трехмерного пространства является возможность определения псевдовекторной операции rot параллельно осуществленному выше введению векторного произведения двух векторов. С помощью компонент $\partial/\partial x^\alpha$ оператора grad и компонент b^β произвольного дифференцируемого векторного поля \mathbf{b} в декартовых координатах можно составить величины $\frac{\partial b^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^\beta}$, представляющие собой компоненты антисимметричного тензора второго ранга. По общему правилу (Б.2) определим поле

$$\overset{*}{A}^\nu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta} \left(\frac{\partial b^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = \varepsilon^{\nu\alpha\beta} \frac{\partial b^\beta}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{Б.10})$$

Это поле $\overset{*}{A}^\nu$, обладающее псевдовекторным характером преобразования, и называется *ротором* (или вихрем) векторного поля \mathbf{b} . При этом вводится обозначение:

$$\overset{*}{A}^\nu = (\text{rot } \mathbf{b})^\nu. \quad (\text{Б.11})$$

Тензорная запись дифференциальных операций, применяемая нами, позволяет легко и однозначно получить все обычные формулы векторного анализа, причем на любом этапе остается очевидным характер преобразования вводимых величин.

Так, например, если $\mathbf{b} = \text{grad } \varphi$, то $\overset{*}{A}^\nu = \varepsilon^{\nu\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \equiv 0$ (ввиду симметричности $\partial^2/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ по индексам α и β и антисимметричности $\varepsilon^{\nu\alpha\beta}$), т. е.

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0. \quad (\text{Б.12})$$

Далее,

$$\frac{\partial \overset{*}{A}^\nu}{\partial x^\nu} = \varepsilon^{\nu\alpha\beta} \frac{\partial^2 b^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \equiv 0,$$

т. е.

$$\text{div rot } \mathbf{b} = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Если φ и ψ — скалярные функции, то элементарным применением формулы дифференцирования произведения и выписанных выше основных определений получим

$$\text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi, \quad (\text{Б.14}_1)$$

$$\text{div } (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{ div } \mathbf{a} + (\text{grad } \varphi, \mathbf{a}), \quad (\text{Б.14}_2)$$

$$\text{rot } (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{a} + (\text{grad } \varphi \times \mathbf{a}). \quad (\text{Б.14}_3)$$

Заметим, что из формул (Б.1), (Б.10) и (Б.11) следует, что

$$\varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (\operatorname{rot} \mathbf{b})^\gamma = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial b^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial b^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (\text{Б.15})$$

С помощью этого равенства мы выведем выражение для $\operatorname{grad} (\mathbf{ab})$. Вычислим прежде всего $\operatorname{grad} (\mathbf{a}^2) = \operatorname{grad} (a^\alpha a_\alpha)$. В компонентах запишем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (a^\alpha a_\alpha)}{\partial x^\beta} = a_\alpha \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\beta} = a_\alpha \left(\frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} \right) + a_\alpha \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} = a^\alpha \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} (\operatorname{rot} \mathbf{a})^\gamma + a_\alpha \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha},$$

т. е., если ввести часто используемое обозначение

$$a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \quad (\text{Б.16})$$

и вспомнить формулу (Б.3), получаем результат:

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{a}^2) = [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{a}. \quad (\text{Б.17})$$

Применяя формулу (Б.17) к выражению $\operatorname{grad} ((\mathbf{a} + \mathbf{b})^2)$ и используя свойство линейности операции grad , можно легко прийти к выводу, что

$$\operatorname{grad} (\mathbf{ab}) = [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b}, \operatorname{grad}) \mathbf{a}. \quad (\text{Б.18})$$

Часто используются следующие формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (\text{Б.19})$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (\text{Б.20})$$

Вывод последнего равенства получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_\nu [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \varepsilon_{\nu\lambda\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^\kappa = \varepsilon_{\nu\lambda\kappa} \varepsilon^{\lambda\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (a_\mu b_\rho) = \\ &= a_\nu \frac{\partial b_\rho}{\partial x^\rho} + b_\rho \frac{\partial a_\nu}{\partial x^\rho} - b_\nu \frac{\partial a_\rho}{\partial x^\mu} - a_\mu \frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.20'})$$

Здесь использована первая из формул (Б.1).

Формула (Б.19) доказывается аналогично. Можно доказать также справедливое только в декартовых координатах равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{a}. \quad (\text{Б.21})$$

Из формулы (Б.20') можно видеть, что псевдовекторная операция rot , примененная к псевдовектору $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, дает в результате полярный вектор, записанный в правой части этого равенства. Аналогичный результат, разумеется, будет получен в отношении ротора любого псевдовектора, а также для «векторного произведения» вектора на псевдовектор. Действительно, если $\tilde{B}_\lambda =$

$= 1/2 \varepsilon_{\lambda\mu\nu} b_{\lambda\mu}$, где $b_{\lambda\mu} = -b_{\mu\lambda}$, то с помощью первой из формул (Б.1) легко найти, например: $\text{rot}_\mu \mathbf{B} = \partial b_{\lambda\mu} / \partial x^\lambda$. Во всех таких случаях достаточно определить, изменяется ли знак соответствующего выражения на обратный при пространственном отражении. Так, например, если известно, что в равенстве $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{b}$ правая часть представляет собой полярный вектор, то отсюда можно сделать вывод, что величина \mathbf{a} является псевдовектором.

Основную роль в теории векторных полей играют интегральные теоремы, формулировки которых приводятся ниже.

Рассмотрим прежде всего трехмерную область V , ограниченную замкнутой двумерной поверхностью σ . Для определенности выберем положительное направление единичного вектора нормали \mathbf{n} в каждой точке этой поверхности в сторону области пространства, внешней по отношению к рассматриваемому объему.

Поток векторного поля \mathbf{a} через поверхность σ называется выражение

$$\oint (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma \equiv \oint a_n d\sigma.$$

С помощью потока векторного поля можно сформулировать определение дивергенции $\text{div } \mathbf{a}$, не зависящее от предварительного выбора тех или иных координат в пространстве E_3 . Окружим произвольную точку x пространства некоторой замкнутой поверхностью σ ; обозначим через V объем внутри этой поверхности. Если совершить стягивание поверхности σ к точке x так, что $V \rightarrow 0$, то упомянутое определение имеет вид

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint a_n d\sigma = \text{div } \mathbf{a}(x). \quad (\text{Б.22})$$

В курсах векторного анализа доказывается, что в декартовых координатах определение (Б.22) приводит к ранее использованной формуле (А.25), т. е. $\text{div } \mathbf{a} = \partial a^\alpha / \partial x^\alpha$ (для этого нужно, чтобы поле \mathbf{a} обладало непрерывными частными производными по всем координатам в области, где рассматривается его дивергенция).

Теорема Остроградского — Гаусса. Если поле $\mathbf{a}(x)$ имеет непрерывную (или кусочно-непрерывную) дивергенцию $\text{div } \mathbf{a}(x)$, то для всякой области V с границей σ

$$\oint (\mathbf{a}\mathbf{n}) d\sigma = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV. \quad (\text{Б.23})$$

Совершенно аналогично обычному доказательству этой теоремы можно получить формулу для тензорного поля $T^{\alpha\beta}(x)$:

$$\oint T^{\alpha\beta} n_\beta d\sigma = \int_V \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} dV. \quad (\text{Б.23}')$$

Возьмем теперь замкнутый линейный контур s в пространстве E_3 с заданным на нем направлением обхода, т. е. положительным направлением касательных векторов, и произвольную двумерную поверхность σ , границей которой является этот контур. Одно из двух возможных направлений нормали к поверхности σ в любой ее точке можно принять в качестве положительного. Мы будем считать нормаль положительной, если ее направление связано с направлением положительного обхода контура по правилу правого винта. Это значит, что если из точки на σ , где нужно определить нормаль, провести вектор \mathbf{s} , единичный и параллельный какому-либо из положительных касательных векторов контура s , то вектор $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$ направлен внутрь этого контура. Правило левого винта имеет место при противоположном направлении вектора \mathbf{b} .

Циркуляцией векторного поля \mathbf{a} вдоль замкнутого контура s называется выражение

$$\oint_s (\mathbf{a}, \mathbf{s}) ds \equiv \oint a_s ds. \quad (\text{Б.24})$$

Понятие циркуляции позволяет определить операцию $\text{rot } \mathbf{a}$, не прибегая к декартовым координатам. Именно, если стягивать контур s в точку \mathbf{x} , лежащую на рассмотренной выше поверхности σ , то, по определению,

$$\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint (\mathbf{a}, \mathbf{s}) ds. \quad (\text{Б.25})$$

В левой части указана проекция $\text{rot } \mathbf{a}$ на нормаль \mathbf{n} к поверхности σ в точке \mathbf{x} . Поверхность σ , проходящая через точку \mathbf{x} , может быть выбрана произвольно, так что формула (Б.25) определяет вместе с тем проекцию $\text{rot } \mathbf{a}$ на любое направление в точке \mathbf{x} , т. е. определяет вектор $\text{rot } \mathbf{a}$ полностью. Так как мы заранее задали положительную ориентацию в E_3 , то тем самым величина $\text{rot } \mathbf{a}$ определена и в качестве псевдовектора. Можно показать, что в декартовых координатах выражение (Б.25) приводит к ранее использованному определению ротора, как оно указано в формулах (Б.10) и (Б.11).

Теорема Стокса. Если область S на поверхности σ ограничена контуром s , то

$$\oint_s (\mathbf{a}, \mathbf{s}) ds = \int_S (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma, \quad (\text{Б.26})$$

где единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности направлен в положительную сторону относительно единичного вектора касательной к контуру s .

Формула Грина. Пусть вектор \mathbf{a} в формуле (Б.23) имеет вид $\mathbf{a} = \psi \text{ grad } \varphi$. Раскрывая $\text{div } \mathbf{a}$ согласно (Б.14₂), придем к

равенству

$$\int \{\psi \Delta\varphi + (\text{grad } \psi, \text{grad } \varphi)\} dV = \oint \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma, \quad (\text{Б.27})$$

где производная $\partial\varphi/\partial n$ определена по правилу (А.23). Переставим в формуле (Б.27) местами символы φ и ψ и вычтем полученное таким образом равенство из (Б.27) почленно. В результате получим формулу

$$\int (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) dV = \oint \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (\text{Б.28})$$

которая называется формулой Грина и имеет важные применения в теории интегрирования уравнений в частных производных.

В. Основные формулы с дельта-функцией и ее производными

Изложение свойств дельта-функции, проводимое здесь, ни в коей мере не претендует на математическую строгость. Читатель, интересующийся обоснованием этих свойств, должен обратиться к специальной литературе *).

Будем сначала считать аргумент x одномерным. Дельта-функция $\delta(x - \xi)$ формально может быть определена с помощью следующего уравнения:

$$\int \delta(x - \xi) f(x) dx = f(\xi), \quad (\text{В.1})$$

хотя можно показать, что такой функции точки $\delta(x - \xi)$, которая бы удовлетворяла соотношению (В.1), не существует. Существуют, однако, бесконечные последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ функций такие, что равенство (В.1) выполняется в следующем смысле:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n(x - \xi) f(x) dx = f(\xi). \quad (\text{В.2})$$

Свойство (В.1) тем не менее формулируют часто с помощью представления о «несобственной» функции $\delta(x - \xi)$, равной нулю при $x \neq \xi$ и обращающейся в бесконечность при $x = \xi$, так что

$$\int \delta(x - \xi) dx = 1.$$

Несмотря на математическую несостоятельность выражения (В.1), оно может быть использовано для символического получения дальнейших свойств дельта-функции, которые могут быть строго обоснованы (см. цитируемые выше книги).

*) Можно указать, например, книги: *И. М. Гельфанд* и *Г. Е. Шиллов*, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, 1959, или *В. С. Владимиров*, *Уравнения математической физики*, «Наука», 1971, гл. 2.

Применяя к (В.2) формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial \delta(x-\xi)}{\partial x} dx = f(x) \delta(x-\xi) \Big|_a^b - \int_a^b \delta(x-\xi) \frac{\partial f}{\partial x} dx =$$

$$= - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\xi}. \quad (\text{В.3})$$

Здесь считается, что $a < \xi < b$. Фактически (В.3) нужно рассматривать как определение производной от дельта-функции $\partial \delta(x-\xi)/\partial x$.

Аналогично

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x-\xi) dx = (-1)^n f^{(n)}(\xi) \quad (a < \xi < b). \quad (\text{В.4})$$

Из обычных правил замены переменной интегрирования имеем

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta'(-x) = -\delta'(x). \quad (\text{В.5})$$

Кроме того,

$$x \delta(x) = 0. \quad (\text{В.6})$$

Далее,

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}. \quad (\text{В.7})$$

Пусть в интервале $a < x < b$ находятся простые корни x_s уравнения $\varphi(x) = 0$. Тогда

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|} = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|}. \quad (\text{В.8})$$

В частности,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|x|}. \quad (\text{В.9})$$

В случае кратных корней соотношение (В.8) неприменимо.

Для символического вывода формулы (В.8) рассмотрим тот случай, когда в рассматриваемом интервале лежит один лишь корень $x = \xi$ уравнения $\varphi(x) = 0$. Тогда, вводя вместо x новую переменную φ , получим

$$\int_a^b f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \int \frac{\tilde{f}(\varphi)}{|\varphi'(x)|} \delta[\varphi] d\varphi = \frac{\tilde{f}(\varphi)}{|\varphi'(x)|} \Big|_{\varphi=0} = \frac{f(x)}{|\varphi'(x)|} \Big|_{x=\xi}.$$

В n -мерном случае формула (В.1) имеет вид

$$\int dx_1 \dots \int dx_n \delta(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n) f(x_1, \dots, x_n) = f(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Можно положить

$$\delta(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n) = \prod_{k=1}^n \delta(x_k - \xi_k). \quad (\text{B.10})$$

Обозначим теперь через $(\mathcal{F}f)(\lambda)$ преобразование Фурье функции f (здесь λ — аргумент функции $\mathcal{F}f$). Определение преобразования Фурье $(\mathcal{F}\delta)(x)$ дельта-функции вводится с помощью следующего формального равенства:

$$\int \delta(\lambda - \xi) (\mathcal{F}f)(\lambda) d^n \lambda = \int f(x) (\mathcal{F}\delta)(x) d^n x. \quad (\text{B.11})$$

Обозначим через (λ, x) скалярное произведение в пространстве аргумента. Так как

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \int e^{i(\lambda, x)} f(x) d^n x,$$

предыдущее равенство переписывается в виде

$$\iint e^{i(\lambda, x)} \delta(\lambda - \xi) f(x) d^n x d^n \lambda = \int d^n x f(x) \left[\int d^n \lambda e^{i(\lambda, x)} \delta(\lambda - \xi) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Сравнивая (B.11) и (B.12), получим

$$(\mathcal{F}\delta_\xi)(x) = e^{i(\xi, x)}. \quad (\text{B.13})$$

В частности, $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. Таким образом, в n -мерном пространстве

$$\delta(\xi - \lambda) = \delta_\xi(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(\xi - \lambda, x)} d^n x. \quad (\text{B.14})$$

Отметим, что представление о дельта-функции связано с описанием точечного заряда, производные же дельта-функции — с описанием точечных мультиполей (ср. § 11).

Г. Интегрирование по гиперповерхностям в пространстве Минковского

1. Пусть функция $\rho(\vec{x})$ определена так, как это сделано в § 23. Рассмотрим какую-либо гиперповерхность Σ из семейства времениподобных гиперповерхностей в пространстве Минковского, определенных уравнениями вида $\rho(\vec{x}) = \text{const}$ (так что градиент $\partial\rho/\partial x^i$, имеющий направление нормали к гиперповерхности, является пространственноподобным вектором). Обозначим через $-\vec{p}$ единичный вектор нормали к гиперповерхности Σ , а $\vec{v} = \vec{u}/c$ — единичную времениподобную касательную к этой гиперповерхности в некоторой точке (рис. 47).

Будем считать, что бесконечно малый элемент $d\Sigma_i$ гиперповерхности Σ в точке \vec{x} ориентирован в направлении $-\vec{p}$ (такое условие оказывается в дальнейшем удобным). Тогда можно записать

$d\Sigma_r = -\vec{p}_r d\Sigma$. Пусть $d\vec{x}$ — бесконечно малое смещение в направлении \vec{p} , так что $d\vec{x} = p^i dl$. Рассмотрим четырехмерный объем $d\Omega$ цилиндра с образующей $d\vec{x}$, опирающегося на трехмерный элемент гиперповерхности $d\Sigma_r$. Ясно, что

$$d\Omega = d\Sigma dl. \quad (\Gamma.1)$$

Однако тот же объем $d\Omega$ может быть вычислен несколько иначе (рис. 48). Введем пространственноподобную гиперплоскость Π , проходящую через точку \vec{x} и определяемую уравнением $(d\vec{x}, \vec{v}) = 0$.

Вектор \vec{p} принадлежит гиперплоскости Π . Объем $d\Omega$ может теперь быть расложен

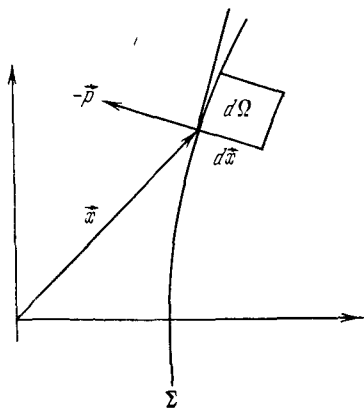


Рис. 47.

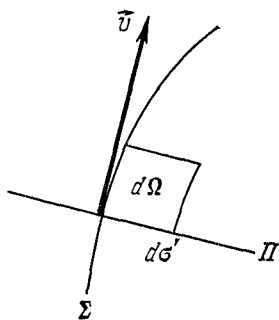


Рис. 48.

на гиперплоскости, параллельные Π , общей времениподобной нормалью к которым является вектор \vec{v} . Элемент $d\sigma'$ гиперплоскости Π может быть вычислен следующим образом. Так как $\vec{R} = \rho(\vec{v} + \vec{p})$, в гиперплоскости Π лежит проекция $\vec{R}_\Pi = \rho\vec{p}$ этого вектора. Перейдем к системе покоя в точке \vec{x} . В этой системе $d\sigma'$ выражается просто как элемент трехмерного объема в гиперплоскости Π . Введя в этой гиперплоскости трехмерные декартовы координаты, можно перейти затем к сферическим координатам, причем радиус-вектор будет совпадать с \vec{R}_Π , а углы ϑ и φ вводятся обычным образом. В такой сферической системе координат $d\sigma' = \rho^2 d\rho d\omega$, где $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, а элемент четырехмерного объема принимает вид

$$d\Omega = \rho^2 d\rho d\omega ds, \quad (\Gamma.2)$$

где ds — бесконечно малое смещение в направлении вектора \vec{v} , ортогонального по отношению к Π . Так как четырехмерный объем инвариантен относительно преобразований Лоренца, он будет численно равен правой части (Г.2) в любой системе отсчета. Кроме

того, ясно, что выражения (Г.1) и (Г.2) должны совпадать одно с другим с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка. Первое из них получено с помощью расслоения объема семейством трехмерных времениподобных гиперповерхностей, определяемых уравнениями $\rho = \text{const}$, второе же — с помощью расслоения того же самого объема на семейство трехмерных пространственноподобных гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости Π .

С другой стороны, возвращаясь к формуле (Г.1), можно записать:

$$d\rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^r} dx^r \right| = dl \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^r} p^r \right|,$$

т. е.

$$d\Omega = \frac{d\Sigma d\rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial x^r} p^r \right|}. \quad (\text{Г.3})$$

Приравнивая правые части равенств (Г.2) и (Г.3), получим определение трехмерного элемента $d\Sigma$ времениподобной поверхности Σ :

$$d\Sigma = \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^r} p^r \right| \rho^2 d\omega ds. \quad (\text{Г.4})$$

Эта формула и была использована в § 23.

2. В мгновенно сопутствующей системе отсчета величины p_α представляют собой косинусы углов, образуемых единичным трехмерным вектором \mathbf{p} с осями α трехмерной декартовой системы координат. Учитывая, что в нашем случае $\mathbf{p}^2 = -1$, получим, интегрируя по единичной сфере:

$$\int p_\alpha p_\beta d\omega = -\frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{Г.5})$$

Обычная формула, относящаяся к евклидову пространству, соответствует замене здесь всех p_α на ip_α . При этом

$$\int d\omega = 4\pi. \quad (\text{Г.6})$$

Интегралы же по единичной сфере от произведений нечетного числа компонент p_α равны нулю.

Удобно использовать формулу (Г.4) в четырехмерном виде. Действительно, из соотношения $\vec{u}\vec{p} = 0$ следует $p_0 = \frac{1}{c}(\mathbf{v}\mathbf{p})$, а потому в мгновенно сопутствующей системе, где $\mathbf{v} = 0$, имеет место равенство $p_0 = 0$. Поэтому в такой системе отсчета интегралы по единичной сфере от произведений $p_0 p_\alpha$ и p_0^2 равны нулю тождественно. Легко проверить, что это обстоятельство может быть выражено в виде формулы

$$\int p_i p_k d\omega = -\frac{4\pi}{3} \left(\delta_{ik} - \frac{u_i u_k}{c^2} \right). \quad (\text{Г.7})$$

При этом по-прежнему интегралы по единичной сфере от произведений нечетного числа компонент четырехмерного вектора p_i обращаются в нуль.

Ясно, что так как $d\omega$ не является релятивистским инвариантом, данная формула применима только в мгновенно сопутствующей системе отсчета. Однако выражения, получаемые с ее помощью в § 23, тем не менее релятивистски-инвариантны, так как она используется там как составная часть инвариантного в целом интегрирования по четырехмерному объему.

3. Элемент объема светового конуса определяется следующим образом. Рассмотрим сначала гиперсферу с пространственноподобным радиусом, определяемую уравнением $\bar{R}^2 = -\lambda^2$. Элемент объема такой гиперсферы равен $d\bar{\Sigma}^m = r^m d\bar{\Sigma} = \frac{R^m}{\lambda} d\bar{\Sigma}$. Рассмотрим теперь произвольную гиперплоскость с пространственноподобной единичной нормалью \vec{n} . Элемент объема этой гиперплоскости $d\Sigma^m = n^m d\Sigma$. Используем соотношение $d\Sigma = (\vec{n}\vec{r}) d\Sigma = \frac{1}{\lambda} (\vec{n}\vec{R}) d\bar{\Sigma}$, означающее, что $d\Sigma$ определяется как проекция элемента $d\Sigma^m$ на гиперплоскость (рис. 49). Обозначим $d\Gamma \equiv d\bar{\Sigma}/\lambda$. Тогда из предыдущего соотношения следует

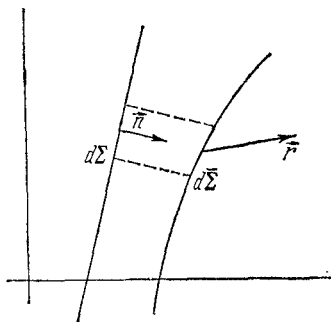


Рис. 49.

Левая часть в (Г.8) не зависит от направления вектора \vec{n} , поэтому и правая часть не зависит от выбора этого вектора. Далее,

$$d\Gamma = \frac{d\bar{\Sigma}}{\lambda} = \frac{d\Sigma}{|\vec{n}\vec{R}|}. \quad (\text{Г.8})$$

Левая часть в (Г.8) не зависит от направления вектора \vec{n} , поэтому и правая часть не зависит от выбора этого вектора. Далее,

$$d\bar{\Sigma}^m = R^m d\Gamma = \frac{R^m d\Sigma}{|\vec{n}\vec{R}|}. \quad (\text{Г.9})$$

Но эта последняя формула не содержит зависимости от λ , а потому остается справедливой и при $\lambda \rightarrow 0$, т. е. при $\vec{R}^2 = 0$. В этом случае она применяется для вычисления интегралов по световому конусу.

Заметим еще, что формула (Г.9) может быть совершенно аналогичным образом получена с использованием гиперсфер, имеющих времениподобный радиус и соответственно гиперплоскостей с времениподобными нормальными. Поэтому вектор \vec{n} в правой части этой формулы фактически совершенно произволен (он не может быть только световым).

4. Всюду в тексте книги используется метрика пространства Минковского, определяемая значениями $g_{00} = 1$, $g_{\alpha\alpha} = -1$, $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Многие авторы применяют обратную метрику $g'_{ik} = -g_{ik}$, так что $ds'^2 = -ds^2 = dr^2 - c^2 dt^2$. Полезно провести сравнение записи величин электромагнитного поля в этих двух метриках. Будем считать заданными физические величины φ и \mathbf{A} как функции координат и времени. Четырехмерные тензоры, соответствующие выбору метрики g'_{ik} , отмечаются далее штрихом. Связь четырехмерных величин с функциями φ и \mathbf{A} в метрике g_{ik} определяется формулами (7.3). При использовании метрики g'_{ik} обычно полагают $\Phi'_m = \Phi_m$ и $s'^m = s^m$. Тогда

$$\Phi'^m = g'^{mn} \Phi'_n = -g^{mn} \Phi_n = -\Phi^m,$$

т. е. $\Phi'^0 = \varphi$ и $\Phi'^\alpha = A^\alpha$.

Далее,

$$F'_{mn} = \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x^m} - \frac{\partial \Phi'_m}{\partial x^n} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x^m} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial x^n} = F_{mn},$$

$$F'^{mn} = g'^{ma} g'^{nb} F'_{ab} = g^{ma} g^{nb} F_{ab} = F^{mn}$$

и

$$F'^m{}_{\cdot n} = g'^{ma} F'_{an} = -g^{ma} F_{an} = -F^m{}_{\cdot n}.$$

В метрике g_{ik}

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv -\square,$$

а в метрике g'_{ik}

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \square.$$

Вместе с тем волновые уравнения для потенциалов имеют одинаковый вид в обеих метриках, т. е.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \Phi^i = -\frac{1}{c} s^i.$$

В качестве тензора энергии-импульса электромагнитного поля в метрике g'_{ik} часто используется величина

$$\begin{aligned} \Theta'^{mn} &= F'^{ma} F'^n{}_{\cdot a} + \frac{1}{4} g'^{mn} (F'_{ab} F'^{ab}) = \\ &= - \left\{ F^{ma} F_a{}^n + \frac{1}{4} g^{mn} (F_{ab} F^{ab}) \right\} = -T^{mn}, \end{aligned}$$

где T^{mn} совпадает с выражением (10.19). Различие в знаке не имеет значения при рассмотрении закона сохранения энергии-импульса, так как он имеет вид

$$\frac{\partial \Theta'^{mn}}{\partial x^n} = -\frac{\partial T^{mn}}{\partial x^n} = 0.$$

Д. Применение преобразования Фурье для решения волнового уравнения

В дополнение к § 13 мы рассмотрим здесь решение волнового уравнения, используя теорию функций комплексного переменного. При этом будут нужны формулы разложения функций в интегралы Фурье. С помощью этих формул проводится ряд вычислений и в основном тексте книги.

Волновое уравнение мы будем здесь записывать в несколько более общей форме, чем в § 13, т. е. не для случая вакуума, а для произвольной однородной изотропной среды, причем систему единиц не будем заранее фиксировать:

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = -g(\mathbf{r}, t). \quad (\text{Д.1})$$

Здесь

$$v = \alpha / \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (\text{Д.2})$$

Так же как и в § 13, функция ψ может представлять (при соответствующем выборе правой части g) любую декартову компоненту потенциалов или же напряженностей электромагнитного поля.

Рассмотрим однородное уравнение, когда $g \equiv 0$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция

$$\Psi_{\mathbf{k}, \omega}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (\text{Д.3})$$

где амплитуда A не зависит от координат и времени *), является решением такого однородного уравнения, если только выполнено условие

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2/v^2. \quad (\text{Д.4})$$

Решение (Д.3) называется плоской волной с волновым вектором \mathbf{k} . Для очень широкого класса функций $\psi(\mathbf{r}, t)$ можно считать, что выполняется формула разложения в интеграл Фурье:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (\text{Д.5})$$

Если при этом выполнено и соотношение (Д.4), которое можно тогда учесть, введя под знак интеграла в правой части дельта-функцию $\delta(\mathbf{k}^2 - \omega^2/v^2)$, то (Д.5) также будет решением однородного волнового уравнения. Это видно из формулы для дельта-функции (В.6). В дальнейшем формула (Д.5) будет применяться и для решения других уравнений, когда условие (Д.4) не имеет места.

*) В этой формуле частоту ω можно считать как положительной, так и отрицательной.

Если функция ψ вещественна, т. е. $\psi = \psi^*$ (звездочкой здесь и в дальнейшем обозначается комплексное сопряжение), то из (Д.5) видно, что должно выполняться условие

$$A^*(-\mathbf{k}, -\omega) = A(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{Д.6})$$

Решение неоднородного волнового уравнения для бесконечного пространства попытаемся представить в форме (13.13). При этом основную роль играет свойство функции Грина G , выражаемое уравнением (13.12). Учитывая, что разложение Фурье вида (Д.5) применимо для функций, удовлетворяющих весьма широкому условию, запишем функцию Грина в виде

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int d^3k \int d\omega g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}. \quad (\text{Д.7})$$

Дельта-функция в правой части уравнения, определяющего фундаментальное решение, также может быть представлена по формуле (В.14) в виде интеграла Фурье. Подставляя эти разложения, получим с помощью (13.12)

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \omega^2/v^2}. \quad (\text{Д.8})$$

Функция $g(\mathbf{k}, \omega)$ сингулярна, когда \mathbf{k} удовлетворяет условию (Д.4). Интеграл по переменной ω в формуле (Д.7) имеет вид

$$I(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{k^2 - \omega^2/v^2}. \quad (\text{Д.9})$$

Потребуем, чтобы функция G удовлетворяла условию причинности в следующей форме:

$$G = 0 \quad \text{при} \quad t < t'. \quad (\text{Д.10})$$

Напомним, что t — время наблюдения, а t' — время испускания электромагнитного импульса источником. Требование (Д.10) может быть использовано при вычислении интеграла (Д.9) с помощью теории вычетов. Подынтегральное выражение в этом интеграле регулярно при любых комплексных значениях ω , за исключением двух полюсов при $\omega = \pm v k$. Если $t > t'$ и $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, где ω_1 и ω_2 вещественны, то $e^{-i\omega(t-t')} = e^{-i\omega_1|t-t'|} e^{\omega_2|t-t'|}$, причем $\omega_2 |t - t'| < 0$ в нижней полуплоскости комплексного переменного ω (т. е. при $\omega_2 < 0$). Поэтому, если выбрать контур интегрирования в виде отрезка вещественной оси, замыкающего полуокружность в нижней полуплоскости, то интеграл по этой полуокружности будет содержать экспоненциально убывающий при $|\omega_2| \rightarrow \infty$ множитель и, значит, в пределе обратится в нуль. Аналогичное условие будет выполняться при $t < t'$ для контура с замыкающей полуокружностью, проведенной в верхней полуплоскости. Для того чтобы выполнялось условие (Д.10), нужно, чтобы внутри такого верхнего контура особенностей подынтегральной функции не было.

Поэтому сместим упомянутые выше полюсы на бесконечно малое расстояние вниз от вещественной оси, полагая $\omega = \pm vk - i\epsilon$, и вычислим интеграл при $\epsilon \rightarrow 0$ и неограниченном расширении замыкающей контур снизу полуокружности (рис. 50). Теорема Коши приводит к результату:

$$I(k) = 2\pi v \frac{\sin vkT}{k}, \tag{Д.11}$$

где $T = t - t'$. С помощью (Д.7), (Д.8) и (Д.11), производя интегрирование по углам, получим

$$G = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{ikR} I(k) = \frac{v}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk \sin kR \sin vkT.$$

Здесь, как обычно, $R \equiv r - r'$. Теперь используем четность подынтегральной функции по аргументу k и будем интегрировать от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначая $vk \equiv \xi$,

$$G = \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi [e^{i\xi(T-R/v)} - e^{i\xi(T+R/v)}] = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(T - \frac{R}{v}\right).$$

Здесь использованы формула (В.14) и то обстоятельство, что $\delta(T + R/v) \equiv 0$.

Мы получили выражение для функции Грина, полностью совпадающее с выведенной в § 13 формулой (13.12') в частном случае $v = c$. Вторичный вывод, приведенный здесь, интересен благодаря применению методов теории функций комплексной переменной для выражения условия причинности (Д.10).

Разложения в интеграл Фурье (Д.5) для решения ψ и источника g неоднородного волнового уравнения неоднократно используются в тексте книги. В ряде случаев, однако, достаточно применять лишь разложения по временному аргументу. Это означает, что формула (Д.5) записывается в виде

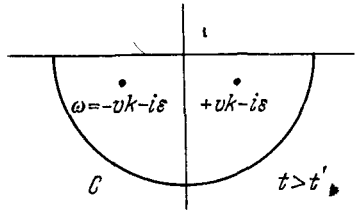


Рис. 50.

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\omega(r) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{Д.12}$$

С учетом нормировочного множителя можно записать также и обратное преобразование Фурье:

$$\psi_\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, t) e^{i\omega t} dt, \tag{Д.13}$$

При помощи (Д.12) полезно еще раз рассмотреть решение неоднородного волнового уравнения в бесконечном пространстве, которое при этом получается, собственно, методом разделения переменных. Подставляя в (Д.1) разложение (Д.12) и аналогичное разложение для функции g , получим для амплитуд Фурье $\psi_\omega(\mathbf{r})$ и $g_\omega(\mathbf{r})$ связывающее их дифференциальное уравнение:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{v^2}\right)\psi_\omega = -g_\omega, \quad (\text{Д.14})$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*. Решение этого уравнения можно опять-таки искать с помощью соответствующей функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая в данном случае должна удовлетворять условию

$$\psi_\omega(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g_\omega(\mathbf{r}') dV', \quad (\text{Д.15})$$

причем

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{Д.16})$$

Можно показать, что

$$G = \frac{1}{4\pi R} e^{\pm ikR}. \quad (\text{Д.17})$$

Таким образом,

$$\psi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g_\omega(\mathbf{r}')}{R} e^{\pm ikR} dV' \quad (\text{Д.18})$$

и, согласно (Д.12),

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g_\omega(\mathbf{r}')}{R} e^{-i(\omega t \pm kR)} dV' d\omega. \quad (\text{Д.19})$$

Если сдвинуть начало отсчета времени на величину R/v , то, возвращаясь к функции $g(\mathbf{r}, t)$, легко привести предыдущую формулу к виду

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\mathbf{r}', t \pm R/v)}{R} dV'.$$

Значения $t + R/v$ являются более поздними, чем время наблюдения t , поэтому физическому условию причинности соответствует лишь выбор нижнего знака. Таким образом, мы вновь получили запаздывающие решения того типа, который был рассмотрен в § 13.

Приведенный выше вывод полезно сравнить с использованным ранее в настоящем параграфе разложением Фурье по всем переменным (т. е. по t и по \mathbf{r}). В частности, таким способом можно получить обоснование формулы (Д.17). Предоставляем это читателю в качестве упражнения.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Индексы. В главах 1—6 латинские индексы i, j, \dots пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие α, β, \dots — 1, 2, 3. В главах 7—9 латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3. В § 33 греческие индексы α, β, \dots нумеруют линейные контуры. В § 34 латинские индексы нумеруют обобщенные силы и обобщенные токи.

Латинский шрифт.

A — векторный потенциал; $A_i^{i'}$ — коэффициенты линейных преобразований.
 a — трехмерное ускорение; a_{ij} — тензор деформаций (§ 32), коэффициенты Онзагера (§ 34).

B — магнитная индукция.

$$\vec{b} \equiv d\vec{\omega}/d\tau.$$

C — емкость конденсатора, эйконал (§ 21).

c — скорость света в вакууме; c_{ik} — коэффициенты емкости (§ 30); c_{ijkl} — модули упругости (§ 32).

D — электрическая индукция.

$d_{i,kl}$ — пьезоэлектрические коэффициенты (§ 32).

E — электрическая напряженность; \mathcal{E} — энергия материальной точки (§ 6), полная энергия излучения (§ 16).

e — заряд электрона; e_i — базисные векторы в линейном пространстве; \bar{e}_i — базисные векторы в пространстве Минковского.

F — механическая сила; $F_{\text{изл}}$ — сила реакции излучения; $F_{\text{вн}}$ — внешняя сила, действующая на заряд; \bar{F}, F^i — четырехмерная сила Минковского; F^{ik} — тензор напряженностей электромагнитного поля; F — плотность свободной энергии (§§ 22, 31); \bar{F} — термодинамический потенциал (§ 31); \mathcal{F} — полная свободная энергия.

f — объемная плотность сил; f^{ik} — тензор индукций электромагнитного поля (§ 7).

G — функция Грина (§ 11); \mathcal{G} — потенциал Гиббса (§ 32).

g — плотность импульса электромагнитного поля; g_{ij} — метрический тензор.

H — магнитная напряженность; \mathcal{H} — функция Гамильтона (§§ 8, 28).

h — постоянная Планка (§ 22); $\hat{h} \equiv da/dt$ (§ 23).

I — полная сила тока (§ 12); I_1, I_2 — инварианты электромагнитного поля (§ 7); $I(\omega)$ — энергия излучения частоты ω .

i — поверхностная плотность тока.

\mathcal{I} — обобщенные токи (§ 34).

j — плотность тока; $j^{\text{ст}}$ — плотность стороннего тока; j_n, j_s — нормальный и сверхпроводящий токи (§ 37).

K — инерциальная система отсчета, яркость излучения (§ 22), кинетическая энергия; $\mathcal{K}, \mathcal{K}^i$ — четырехмерная сила Ньютона.

k — волновое число, постоянная Больцмана; \hat{k} — комплексное волновое число; \bar{k}, \bar{k} — волновой вектор.

L — коэффициент самоиндукции катушки; $L_{\alpha\beta}$ — коэффициенты индукции; \mathcal{L} — функция Лагранжа.

M — намагниченность; M_0 — остаточная намагниченность; M^{ik} — полный четырехмерный момент импульса.

m — магнитный момент; \tilde{m} — плотность момента импульса (§ 3); \tilde{m}_{kmj} — плотность четырехмерного момента импульса (§ 10); m_0 — масса покоя частицы.

N — механический момент сил; \tilde{N} — коэффициент Нернста (§ 34), число частиц (§ 39).

n — единичный вектор внешней нормали; n — показатель преломления (§§ 19, 39); \tilde{n} — комплексный показатель преломления (§ 39).

P — электрическая поляризация; \vec{P} , P^i — вектор энергии-импульса; P_λ — канонический импульс осциллятора поля (§ 22).

p — плотность механического импульса, импульс материальной точки, электрический дипольный момент (§ 11); p — давление (§ 22); p_m — магнитное давление (§ 35); p_λ — канонический импульс осциллятора поля (§ 22).

Q — количество тепла; $Q_{\alpha\beta}$ — квадрупольный момент (§§ 11, 16); Q_λ — каноническая координата осциллятора поля (§ 22).

q — электрический заряд; q — плотность потока тепла (§ 34); q_λ — каноническая координата осциллятора поля (§ 22).

R — активное сопротивление линейного контура (§ 33); R — радиус-вектор, $R \equiv r - r'$.

r — радиус-вектор, r' — радиус-вектор источника; r_L — ларморовский радиус; r_{ik} — тензор сопротивления анизотропной среды (§ 34).

S — вектор Умова — Пойнтинга; S — плотность энтропии; \mathcal{S} — интеграл действия (§ 9), полная энтропия (§ 22).

s — лучевой вектор (§ 39), s_{ik} — потенциальные коэффициенты (§ 30); s_{ijkl} — коэффициенты упругости (§ 32).

T — температура, время; T^{ik} — четырехмерный тензор энергии-импульса поля; $T_{\alpha\gamma}$ — полный тензор натяжений.

t — время, t' — время источника.

U — потенциальная энергия (§ 28), плотность внутренней энергии (§§ 22, 31).

u — трехмерная скорость; \vec{u} , u^i — четырехмерная скорость.

V — трехмерный объем, электродвижущая сила в контуре (§ 33).

v — трехмерная скорость; v_∞ — скорость электрического дрейфа для среды с бесконечной электропроводностью (§ 35); $v_{св}$ — скорость сверхпроводящих электронов (§ 37); $v_{гр}$ — групповая скорость (§ 39).

\mathcal{W} — энергия излучения.

w — плотность полной энергии; w_ν — спектральная плотность энергии; \vec{w} , w^i — четырехмерное ускорение.

X_i — обобщенные силы (§ 34).

\vec{x} , x^i — четырехмерный радиус-вектор в пространстве Минковского.

З а м е ч а н и е. В § 15 и Приложении Г используются вспомогательные обозначения \vec{p} , \vec{W} , B , V , имеющие иной смысл.

Греческий шрифт.

α — коэффициент размерности в уравнениях Максвелла, постоянная Лондона (§ 37).

$\beta \equiv v/c$, $\beta \equiv v/c$.

$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Γ — естественная ширина спектральной линии; $\tilde{\Gamma}$ — полная ширина спектральной линии.

δ_i^k — символ Кронекера; $\delta(x - \xi)$ — дельта-функция.

ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, бесконечно малый параметр (§ 27); ϵ_0 — электрическая постоянная; ϵ' — относительная диэлектрическая проницаемость (§ 29); ϵ — вектор поляризации плоской волны; $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный псевдоскаляр (символ Леви-Чивита);

ζ — химический потенциал (§ 31), азимутальный угол сферической системы координат.

η — дифференциальная термо-э. д. с. (§ 34).

θ — полярный угол в сферической системе координат.

κ — плотность масс (§§ 35 и 40); $\kappa \equiv dT/dt'$ (§ 14); κ_0 — инвариантная плотность массы покоя (§ 8).

λ — поверхностная плотность заряда, длина волны; λ_L — лондоновская глубина проникания (§ 37).

μ — магнитная проницаемость среды; μ' — относительная магнитная проницаемость (§ 29); μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитный момент, связанный с орбитальным движением (§ 26).

ν — частота; \mathbf{v} — нормаль к границе раздела двух сред (§ 18).

\mathbf{H} — вектор Герца (§§ 2, 38); Π — коэффициент Пельтье (§ 34).

$\bar{\pi}$, π^k — четырехмерный импульс заряда.

ρ — объемная плотность заряда, четырехмерное расстояние между источником и наблюдателем (§ 15); ρ_0 — инвариантная плотность заряда.

σ — двумерная поверхность, электропроводность, постоянная Стефана — Больцмана (22.13), сечение рассеяния (§ 25); $\sigma_{\text{погл}}$ — сечение поглощения (§ 25); σ_{kmj} — тензор спина электромагнитного поля (§ 10).

Σ — трехмерная гиперповерхность; $\Delta\Sigma$ — площадь поперечного сечения контура (§ 33).

τ — собственное время, время релаксации (§ 35), τ — коэффициент Томсона (§ 34); τ_{ij} — тензор натяжений анизотропной среды (§ 32); τ — плотность двойного слоя (§ 36).

Φ — магнитный поток; $\bar{\Phi}$, Φ^k — четырехмерный потенциал.

ϕ — скалярный потенциал; ϕ — поверхностная плотность сил.

$\chi_{\text{эл}}$ — диэлектрическая восприимчивость; $\chi_{\text{м}}$ — магнитная восприимчивость.

ψ — магнитный скалярный потенциал, функция, определяющая калибровочное преобразование (§ 2), любая из декартовых компонент вектора (§ 20).

Ω — четырехмерный объем в пространстве Минковского; $d\Omega$ — элемент телесного угла (то же $d\omega$ — в § 15 и Приложении Г).

ω — циклическая частота; ω_L — ларморова частота (§ 26);

ω_{ij} — коэффициенты бесконечно малого преобразования Лоренца.

Готический шрифт.

\mathfrak{M}_{ik} — тензор поляризацій (§ 7).

Другие обозначения.

Трехмерные векторы — полужирный шрифт: \mathbf{A} .

Четырехмерные векторы — стрелка: \vec{b} .

Комплексное сопряжение — звездочка: A^* .

Псевдотензор — звездочка над символом: $\overset{*}{T}^{ik}$.

\det — определитель.

$\langle \dots \rangle$ — операция усреднения по некоторому промежутку времени.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрагама вектор 175
Абсолютно черное тело 166
Адиабатические инварианты движения 208—210
Альвена магнитогиродинамические волны 314, 316
Ампера теорема об эквивалентности 280
Анизотропные среды 21, 246, 306
Астрономическая аберрация 144
- Бабине принцип 153
Био — Савара — Лапласа закон 95
- Вариационный принцип для движения заряженной частицы 67
— — для электромагнитного поля 73, 84
Ведущий центр 193
Вектор энергии-импульса релятивистской частицы 52
— — электромагнитного поля 82
Векторный потенциал 23
Вина закон 166, 168
Волновод 296
Волновое уравнение в однородной изотропной среде 34
— — для напряженностей в вакууме 18
— — для потенциалов 24, 25
Времениподобная кривая 47
- Гельмгольца уравнение 344
Герца вектор 27, 28, 134
Гиперболическое движение 179
Гиромангнитное отношение 192, 220
Гистерезис 22, 276
Градиентное преобразование 24
Граничные условия для электромагнитного поля 39
Грина соотношение взаимности 226
— формула 333
— функция для уравнения Пуассона 88
Гюйгенса принцип 150
- Давление излучения 161—163
Дарвина лагранжиан 215
Двойное преломление в кристаллах 310
- Джоулево тепло 30
Диамангнитная восприимчивость 220
Диамангнитные среды 21
Дипольный момент распределения зарядов 90, 91
Дисперсия волнового пакета 310
— пространственная 35, 301
— частотная 35, 301
Дифференциальное сечение рассеяния электромагнитной волны 184
Дифференциальные законы сохранения 78, 83
Диэлектрическая восприимчивость 21, 247
Доплера эффект 143
— — поперечный 144
Дрейф частиц в электромагнитном поле 203—207
- Единственность решения уравнений Максвелла 36
- Закон взаимосвязи массы и энергии 53
— изменения импульса электромагнитного поля 31
— — момента импульса поля 34
— — энергии поля 29
— интенсивности в геометрической оптике 158
— сохранения заряда 13
— — импульса при столкновениях 54
Законы отражения и преломления 139
Запаздывающие потенциалы 102
Зеемана нормальный эффект 195
Зона излучения 129
- Излучение магнитного диполя 133
— электрического диполя 130
— — квадруполья 130
Изотропные среды 20
Импульс материальной точки четырехмерный 52
— электромагнитного поля 32
Инвариантная плотность заряда 60
Инварианты электромагнитного поля 56
Инерциальные системы отсчета 40

- Интегральные законы сохранения 79, 80
 Интервал пространственно-временной 42, 47
 Интерференция электромагнитных волн 140—142
 Ирншоу теорема 230
- Калибровочное преобразование 24
 Квантование магнитного потока 290
 Кеплера задача 210—212
 Кирхгофа второй закон для линейного контура 258
 — закон теплового излучения 164
 — интеграл 102
 — приближение в теории дифракции 152
 Классический радиус частицы 165
 Количество заряда 9
 Конвекционный ток 61
 Коэффициент размагничивания 279
 — экстинкции 293
 Коэффициенты емкости 227
 — индукции 254
 Крамерса — Кронига дисперсионные соотношения 305
 Кулона закон 11
 Кулоновская калибровка 25
- Лагранжа интегральный инвариант 159
 Лармора радиус 191
 — теорема о системе частиц в магнитном поле 217—220
 — формула для энергии излучения 120
 — частота 191, 194, 218
 Лондонов уравнения для сверхпроводников 289
 Лоренца — Дирака уравнение 175
 Лоренца сила 32, 65, 190
 Льенара — Вихерта потенциалы 105
- Магнитная восприимчивость 21
 — вязкость 273
 — диффузия 272
 — индукция 15
 — напряженность 15
 — постоянная 15, 223
 Магнитное давление 273
 Магнитный момент 14
 — — контура с током 97
 — поток 16
 — скалярный потенциал 98, 277
 Максвелла уравнения в дифференциальной форме (M.1—M.4) 19
 — — в интегральной форме (M'.1—M'.4) 19
- Максвелла уравнения для материальных сред (M.1', M.4') 20
 МГД-волны 316
 Мейсснера эффект 287
 Метод перенормировки 175
 Мировая линия 48
 Момент импульса электромагнитного поля 33, 78, 80
- Намагниченность 16
 Напряженности поля движущегося заряда 107
 Напряженность электрического поля 10
- Объемные силы в диэлектрике 243
 Однородные среды 21
 Ома закон 22
 Онзагера принцип 263
 — — в присутствии магнитного поля 265
 Оптическая индикатриса 307
 Оптический путь 157
 Остроградского — Гаусса теорема 332
 Относительные проницаемости 21
 Отражения в пространстве-времени 49
- Парамагнитные среды 21
 Пельтье эффект 265
 Пинч-эффект 274
 Пирозлектрические среды 246
 Плоская электромагнитная волна 136
 Плотность заряда 10,
 — — поверхностная 38
 — тока 13
 — — поверхностная 38
 Поверхностные силы 32
 Поглощение излучения осциллятором 188
 Поле излучения ускоренного заряда 108
 — равномерно движущегося заряда 110
 Поляризация плоской волны 137
 Постоянный ток 14
 Потенциал двойного слоя 281
 — простого слоя 89
 — четырехмерный 55
 Потенциалы в кулоновской калибровке 106
 Потенциальные коэффициенты 226
 Преобразование Лоренца 42, 45
 — — бесконечно малые 50
 — — частного вида 43
 Принцип относительности 8, 40
 — суперпозиции 12
 — — в электростатике 228
 Пробный источник 7

- Пространственноподобная гиперповерхность 47
 Пространство-время 42
 Пуассона уравнение в электростатике 86
 — — для векторного потенциала 94
 Пылевидная среда 65
 Пьезоэлектрический эффект 248
- Разложение по мультиполям векторного потенциала** 97
 — — электростатического потенциала 89
 Размерности электрических и магнитных величин 17
 Рассеяние излучения осциллятором 187
 Реакция излучения 173
 Резонансная флуоресценция 188
 Резонатор 296, 298
 Релея — Джинса формула 171
 Релея рассеяние электромагнитных волн 188
 Релятивистские преобразования напряженностей 57
 — — четырехмерного тока 61
 Релятивистский эффект замедления времени 44
 — — сокращения масштаба 44
- Сверхпроводник I рода** 286—288
 Световой луч 157
 Свободная энергия диэлектрика 237
 Сечение поглощения 188
 Сила тока 14
 Система единиц измерения абсолютная 18
 — — — магнитная (СГСМ) 18
 — — — международная (СИ) 19
 — — — электрическая (СГСЭ) 18
 Скалярный потенциал 24
 Скин-эффект 262, 294
 Собственная группа Лоренца 49
 Собственное время 48
 Сопrotивление контура 252
 Спектральная плотность энергии осциллятора 182
 Статическое магнитное поле 14
 — — электрическое поле 9
 Стефана — Больцмана закон 165
 — — постоянная 166
 Стокса теорема 333
- Тензор индукций** 62
 — — напряженностей 56
 — — поля точечного заряда 116
 — — натяжений Максвелла 31
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля 78, 81, 336
 Теорема вириала 217
 Термоэлектродвижущая сила 264
 Томсона теорема в электростатике 228
 — — тепловой эффект 265
 — — формула рассеяния 185
 — — частота 259
 Тормозное излучение 124
- Угловое распределение энергии излучения** 122—124
 Умова — Пойнтинга вектор 30
 Уравнение лучевой поверхности 310
 Уравнения Максвелла см. Максвелла уравнения
 Условие вмороженности магнитных силовых линий 270
 — — излучения 151
 — — калибровки Лоренца 25
 — — периодичности для поля 169
- Фарадея закон электромагнитной индукции** 17, 268—270
 Феноменологическое описание 8
 Ферма вариационный принцип 160
 Ферромагнитные среды 21, 22, 275
 Физо опыт 145
 Флюксонид 290
 Формула сложения скоростей релятивистская 46
 Фраунгофера и Френеля дифракция 156
 Френеля уравнение для волн в кристалле 307
 Функция Гамильтона заряженной частицы 68, 70
 — — Лагранжа заряженной частицы 68, 70
 — — электромагнитного поля 80, 84
- Циклотронный резонанс** 194
- Четырехмерная сила** 51
 — — скорость 48
 Четырехмерное ускорение 48, 178
 Четырехмерный объем 71
- Ширина уровня осциллятора** 180, 181
 Шотта вектор 175
- Эйконал** 157
 Электрическая индукция 12, 233
 — — поляризация 13, 233, 235
 — — постоянная 11, 223
 Электрический дрейф 193
 — — квадрупольный момент 93

- Электрический потенциал 24
— ток вихревой 260
— — квазистационарный 257
— — смещения 16
— — сторонний 251
Электродвижущая сила в квазилинейном контуре 253
Электромагнитная масса 176
Электромагнитное поле 7, 56
Электромагнитные волны магнитного типа 296, 298
— — электрического типа 296, 297
Электропроводность 22
- Электрострикция диэлектриков 245
— проводников 231
Энергия в электростатике 227, 228
— излучения ускоренного заряда 119, 120, 122
— — электрического диполя 132
— — — квадруполь 133
— среды в магнитном поле 284—286
— электромагнитного поля 29
- Яркость излучения 164

Юрий Викторович Новожилов, Юрий Андреевич Яппа

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

М., 1978 г., 352 стр. с илл.

Редакторы *С. В. Измайлов, Л. П. Русакова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сигал, Е. Я. Строева*

ИБ № 11465.

Сдано в набор 03.01.78. Подписано к печати 18.05.78. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 22,47. Тираж 15500 экз. Заказ № 1722. Цена книги 1 руб.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.