

И.Ф.Образцов
Б.В.Нерубайло
И.В.Андрианов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
в строительной
механике
тонкостенных
конструкций

И.Ф.Образцов
Б.В.Нерубайло
И.В.Андрианов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
в строительной
механике
тонкостенных
конструкций



МОСКВА
·МАШИНОСТРОЕНИЕ·
1991

Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов. — М.: Машиностроение, 1991. — 416 с. — ISBN 5-217-010066-5.

Применительно к тонкостенным конструкциям изложены асимптотические методы регулярных и сингулярных возмущений, осреднения. Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна, возмущения формы границы и размера области; развиты методы возмущения вида граничных условий, составных уравнений, аппроксимаций Паде, синтеза напряженного состояния. Большое внимание уделено применению асимптотических методов к расчету элементов конструкций типа пластин и оболочек, новому классу решений краевых задач для термоупругих изотропных и анизотропных оболочек при действии локальных нагрузок и локализованных температурных полей, а также построению простых замкнутых решений и асимптотических формул.

Для научных работников: будет полезна инженерам, специализирующимся в области расчетов на прочность тонкостенных конструкций.

Библиогр.: 90 назв. Ил. 54. Табл. 12.

Рецензенты чл.-корр. АН СССР *А.Ф. Селихов*, канд. техн. наук *И.А. Ляховенко*

○ $\frac{2702000000-423}{038(01)-91}$ 35-90

ISBN 5-217-010066-5

© И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов, 1991

Предисловие

В предлагаемой книге изложены методы асимптотического интегрирования применительно к важной области науки — строительной механике тонкостенных конструкций. В других областях науки и техники асимптотические методы также получили достаточно широкое применение, что подтверждают уже имеющиеся книги по асимптотическим методам решения задач в теории нелинейных колебаний [25, 42], нелинейной механике [42], небесной механике [81], гидромеханике [29], а также книги, посвященные общим вопросам методов возмущений [80]. Асимптотические методы нашли эффективное применение в теории оболочек [36, 37]. Однако их направленность часто далека от специфики тонкостенных конструкций. В то же время физическая сторона дела для решения не менее важна, чем математическая. В случаях, когда строгие математические решения отсутствуют, именно неформальное использование приближенных методов обеспечивает успех. Этой стороне вопроса уделяется в предлагаемой книге наибольшее внимание.

Необходимость в применении асимптотических методов к решению задач тонкостенных конструкций обусловлена прежде всего тем, что сам подход исследователя к решению стоящих перед ним задач имеет, по существу, асимптотический характер. Достаточно вспомнить, например, полубезмоментную теорию и простой краевой эффект (сингулярная асимптотика), замену ребристой оболочки конструктивно-ортотропной (осреднение), "замораживание" радиусов кривизны полюгой оболочки (метод ВКБ¹) и т.д.

Явное осознание асимптотической природы упрощений позволяет определить область их применимости, а в случае необходимости — уточнять приближенные решения. Особенно велика роль асимптотических методов в построении приближенных аналитических решений, которые позволяют наиболее просто проанализировать влияние различных параметров на поведение тонкостенной конструкции [64].

Трудно переоценить значение аналитических решений для рационального проектирования. Даже если используется численный метод, предварительное асимптотическое упрощение системы позволяет отбросить несущественные слагаемые, выбрать правильный метод, сэкономить машинное время. Поэтому асимптотические и численные методы

¹Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна.

являются не конкурирующими, а в определенном смысле взаимодополняющими. Асимптотические методы формируют мышление ученого-механика и инженера-расчетчика.

Все это позволяет авторам предлагаемой книги считать асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций одними из важнейших.

Основные понятия, используемые в асимптотической математике, – асимптотические ряды и последовательности, действия над асимптотическими выражениями, асимптотика интегралов и рядов – прекрасно изложены в книгах [25, 31, 51, 61], куда мы рекомендуем обратиться читателю, желающему углубить свои знания в этой области. В важности асимптотических методов как средства изучения физических и механических явлений можно убедиться по работам [8, 19, 20, 22, 31, 42, 57, 64, 78, 85].

Авторы благодарят рецензентов члена-корреспондента АН СССР Селихова А.Ф. и канд. техн. наук Ляховенко И.А. за ценные замечания и пожелания.

ГЛАВА I

РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИИ

Отклонения реальной системы от расчетной схемы часто сводятся к небольшому возмущению исходных параметров. Например:

толщина пластины или оболочки

$$h = h_0 + \epsilon h(x, y), \text{ где } h_0 = \text{const}, \epsilon \ll 1;$$

граница круглой пластинки слабо отличается от круговой

$$r(\theta) = r_0 + \epsilon \cos n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

система не подчиняется закону Гука, но отклонения невелики;

в системе присутствует нелинейность, но она мала (квазилинейная система); исходный материал слабо анизотропен и т.д.

Во всех этих случаях учесть влияние указанных малых отклонений можно при помощи метода регулярных возмущений, для чего представим решение в виде разложения

$$f(x, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\epsilon) f_n(x),$$

где $\delta_n(x)$ — асимптотическая последовательность по малому параметру ϵ .

1.1. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В качестве простейшей модельной задачи рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$(A_0 + \epsilon A_1) \bar{x} = \bar{b}, \quad (1.1.1)$$

где A_0, A_1 — матрицы $n \times n$; \bar{x}, \bar{b} — n -мерные векторы.

Пусть задача (1.1.1) разрешима. Решение уравнения (1.1.1) ищем в виде

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2 + \dots \quad (1.1.2)$$

Подставляя асимптотическое разложение (1.1.2) в исходное уравнение (1.1.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ϵ , имеем

$$\text{для } \epsilon^0 \quad A_0 \bar{x}_0 = \bar{b}; \quad (1.1.3)$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad A_0 \bar{x}_1 = -A_1 \bar{x}_0;$$

$$\text{для } \epsilon^2 \quad A_0 \bar{x}_2 = -A_1 \bar{x}_1;$$

.....

Уравнение (1.1.3) называется невозмущенным (порождающим, предельным, уравнением нулевого приближения). Дальнейшее построение существенно зависит от того, разрешима ли эта задача. Если да, то существует обратная матрица A_0^{-1} и итерационный процесс имеет вид

$$\bar{x}_0 = A_0^{-1} \bar{b}; \quad \bar{x}_1 = -A_0^{-1} A_1 \bar{x}_0; \quad \bar{x}_2 = -A_0^{-1} A_1 \bar{x}_1; \quad \dots$$

Если же $\det A_0 = 0$, то предельное уравнение (1.1.3) разрешимо не для всякого x . Тогда $x_0 = 0$ является точкой спектра оператора A_0 (вырожденная задача лежит на спектре) и построение асимптотики существенно усложняется. Подробное описание этого случая приведено в работах [33...35].

Теперь рассмотрим продольную деформацию стержня переменной жесткости EF (рис. 1.1), описываемую уравнением

$$\frac{d}{dx} \left[EF \frac{du}{dx} \right] = q \quad (1.1.4)$$

и краевыми условиями

$$u = 0 \text{ при } x = 0, L. \quad (1.1.5)$$

Пусть $EF = E_0 F_0 + \epsilon E_1 F_1$, где $E_0 F_0 = \text{const}$; $\epsilon < 1$.

Представим решение краевой задачи (1.1.4), (1.1.5) в виде ряда

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$$

Собирая члены при одинаковых степенях ϵ , получаем следующую рекуррентную систему уравнений и краевых условий:

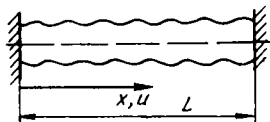


Рис. 1.1. Стержень переменной жесткости

$$\text{для } \epsilon^0 \quad E_0 F_0 \quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} = q;$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad E_0 F_0 \quad \frac{d^2 u_1}{dx^2} = - \frac{d}{dx} \left[E_1 F_1 \frac{du_0}{dx} \right];$$

.....

При $x = 0, L$ имеем для $\epsilon^0 u_0 = 0$; для $\epsilon^1 u_1 = 0$;

Отсюда легко находим

$$u_0 = \frac{qx}{E_0 F_0} (x - L);$$

$$u_1 = \frac{q}{(E_0 F_0)^2} \left[\int_0^x E_1 F_1 (2x_1 - L) dx - \frac{x}{L} \int_0^L E_1 F_1 (2x - L) dx \right]; \dots$$

Обобщение на дифференциальные уравнения в частных производных не представляет труда. Отметим лишь, что в этом случае существенно, лежит ли задача на спектре. Если да, то построение сильно усложняется (соответствующая процедура подробно описана в работах [33...35]).

Обсудим связь между асимптотическим построением решений и методом последовательных приближений. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, что можно иногда использовать для создания некоторой их комбинации. Наиболее важные их особенности состоят в следующем [29]:

а) итерации могут начинаться в том случае, когда известно соответствующее начальное приближенное решение. Решения в виде ряда обладают большим автоматизмом, поскольку они могут давать основное приближение при подстановке в уравнения задачи ряда с неопределенной заранее асимптотической последовательностью;

б) при использовании итераций не нужно угадывать вида асимптотической последовательности, и поэтому результат будет надежнее, чем при подстановке ряда, если не оставлять асимптотическую последовательность неопределенной;

в) разложение в ряд обеспечивает более систематические сведения о третьем и последующих членах, поскольку оно дает только существенные результаты, в то время как итерации в нелинейных проблемах дают некоторые члены высшего порядка, учет которых не

имеет смысла, так как не учтены другие члены того же порядка;

г) итерации дают на каждом шаге группу членов приблизительно одного порядка, на что требуется несколько шагов при применении ряда.

Какой бы метод ни применялся, существуют общие для всех возмущенных решений черты. Основное решение может быть линейным или нелинейным, но все приближения высшего порядка определяются линейными уравнениями с линейными граничными условиями.

Перейдем теперь к задачам на собственные значения. Нам потребуются некоторые факты из линейной алгебры и теории дифференциальных уравнений, которые мы напомним читателю.

Матрица A называется самосопряженной, если она равна своей сопряженной A^* . Сопряженная матрица получается из исходной транспонированием с последующим комплексным сопряжением. Самосопряженные матрицы играют среди всех матриц роль, аналогичную роли действительных чисел среди всех комплексных, так как всякую матрицу можно представить в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 – самосопряженные матрицы.

Если A – самосопряженная матрица, то для любых векторов \bar{x}, \bar{y} порядка n справедливо равенство

$$(A \bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A \bar{y}), \quad (1.1.6)$$

где (\dots, \dots) означает скалярное произведение.

Самосопряженные матрицы имеют только действительные собственные значения. Равенство (1.1.6) служит основой при определении самосопряженности оператора. Пусть, например, задано обыкновенное дифференциальное уравнение (для дифференциальных уравнений в частных производных определение аналогично)

$$L(y) - \lambda M(y) = 0, \quad (1.1.7)$$

где

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0;$$
$$M = b_m \frac{d^m}{dx^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + b_0,$$

и однородные краевые условия

$$Q_1(x)|_{x=a} = 0; \quad Q_2(x)|_{x=b} = 0. \quad (1.1.8)$$

Введем еще понятие пробной функции $u(x)$ – функции, удовлетворяющей заданным краевым условиям (1.1.8).

Уравнение (1.1.7) называется самосопряженным, если

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = 0; \quad (1.1.9)$$

$$\int_a^b [uM(v) - vM(u)]dx = 0$$

для любых пробных функций u, v .

Самосопряженность линейного дифференциального оператора легко проверить интегрированием по частям. Например, проверим самосопряженность краевой задачи, описывающей потерю устойчивости сжатого шарнирно опертого стержня:

$$EI\omega_{xxxx} + T\omega_{xx} = 0$$

$$\text{при } x = 0, l \quad \omega = \omega_{xx} = 0, \quad (1.1.10)$$

где EI – изгибная жесткость стержня; T – сжимающее усилие.

Покажем, что для данного случая верны соотношения (1.1.9):

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[u \frac{d^4 v}{dx^4} - v \frac{d^4 u}{dx^4} \right] dx &= \left[u \frac{d^3 v}{dx^3} - v \frac{d^3 u}{dx^3} \right] \Big|_0^l - \\ &- \int_0^l \left[\frac{du}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{dv}{dx} \frac{d^3 u}{dx^3} \right] dx = - \left[\frac{du}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} - \right. \\ &\left. - \frac{dv}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать самосопряженность оператора d^2/dx^2 .

Перейдем теперь к задаче на собственные значения для системы линейных алгебраических уравнений, содержащей малый параметр

$$(A_0 + \epsilon A_1 - \lambda E)\bar{x} = 0, \quad (1.1.11)$$

где E – единичная матрица.

Будем считать, что A_0 – самосопряженная матрица; самосопряженность матрицы $(A_0 + \epsilon A_1)$ не обязательна.

При решении задач на собственные значения наряду с разложением искомого собственного вектора в ряд по ϵ раскладывается по ϵ и собственное число λ :

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \dots; \quad \lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots \quad (1.1.12)$$

Пусть собственная задача не лежит на спектре; подставив разложение (1.1.12) в исходную систему (1.1.11), имеем

$$\text{для } \epsilon^0 \quad (A_0 - \lambda_0 E)\bar{x}_0 = 0; \quad (1.1.13)$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad (A_0 - \lambda_0 E)\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_0 - A_1 \bar{x}_0; \quad (1.1.14)$$

.....

Невозмущенная задача имеет n собственных чисел λ_{0i} и столько же собственных векторов \bar{x}_{0i} . Пусть сначала все собственные числа различны.

Попробуем найти поправку к собственному значению λ_{0i} . Поскольку $\det(A_0 - \lambda_0 E) = 0$, для того, чтобы неоднородное уравнение (1.1.14) имело решение, нужно, чтобы его правая часть была ортогональна собственным векторам левой.

Умножив все члены уравнения (1.1.14) скалярно на вектор \bar{x}_0 , получим

$$(\bar{x}_0, (A_0 - \lambda_0 E)\bar{x}_1) = \lambda_1 |\bar{x}_0|^2 - (A_1 \bar{x}_0, \bar{x}_0).$$

В силу самосопряженности матрицы $(A_0 - \lambda_0 E)$ имеем

$$(\bar{x}_0, (A_0 - \lambda_0 E)\bar{x}_1) = (\bar{x}_1, (A_0 - \lambda_0 E)\bar{x}_0) = 0.$$

Тогда поправка к собственному значению выражается следующим образом:

$$\lambda_1 = (A_1 \bar{x}_0, \bar{x}_0) / |\bar{x}_0|^2.$$

Вместо λ_0, \bar{x}_0 можно последовательно подставить $\lambda_{0l}, \bar{x}_{0l}$ и получить поправки по всем собственным значениям.

Обратимся теперь к дифференциальным уравнениям. Пусть имеется краевая задача для дифференциального уравнения

$$M_0(y) + \epsilon M_1(y) = \lambda[N_0(y) + \epsilon N_1(y)]; \quad (1.1.15)$$

$$\bar{Q}_1(y) = 0 \quad \text{при } y = a; \quad (1.1.16)$$

$$\bar{Q}_2(y) = 0 \quad \text{при } y = b.$$

Здесь M_0, M_1, N_0, N_1 — дифференциальные операторы, причем порядок операторов M_1, N_1 не выше порядка операторов M_0, N_0 . Кроме того, предполагаем, что невозмущенная краевая задача $M_0(y) = \lambda N_0(y)$ при граничных условиях (1.1.16) самосопряжена (для возмущенной задачи самосопряженность не требуется).

Разложение n -го собственного значения λ_n и соответствующего собственного вектора y_n разыскиваем в виде

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \epsilon \lambda_{n1} + \dots, \quad y_n = y_{n0} + \epsilon y_{n1} + \dots$$

Пусть сначала λ_{n0} — простое собственное число вырожденной задачи. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получаем

$$\text{для } \epsilon^0 \quad M_0(y_{n0}) = \lambda_{n0} N_0(y_{n0});$$

$$\bar{Q}_1(y_{n0}) = 0 \quad \text{при } y = a; \quad (1.1.17)$$

$$\bar{Q}_2(y_{n0}) = 0 \quad \text{при } y = b,$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad M_0(y_{n1}) - \lambda_{n0} N_0(y_{n1}) = -M_1(y_{n0}) + \lambda_{n0} N_1(y_{n0}) + \lambda_{n1} N_0(y_{n0});$$

$$\bar{Q}_1(y_{n1}) = 0 \quad \text{при } y = a; \quad (1.1.18)$$

$$\bar{Q}_2(y_{n1}) = 0 \quad \text{при } y = b,$$

.....

Как и для системы линейных алгебраических уравнений, используем самосопряженность невозмущенной задачи. Умножая уравнение из (1.1.18) на y_{n0} и интегрируя по всей области (т.е. осуществляя скалярное произведение на y_{n0}), получаем

$$\int_a^b [M_0(y_{n1}) - \lambda_{n0} N_0(y_{n1})] y_{n0} dx =$$

$$= \int_a^b [M_0(y_{n0}) - \lambda_{n0} N_0(y_{n0})] y_{n1} dx = 0.$$

Отсюда можно определить первую поправку к собственному числу λ_n :

$$\lambda_1 = \frac{(M_1(y_{n0}), y_{n0}) - \lambda_{n0} (N_1(y_{n0}), y_{n0})}{(N_0(y_{n0}), y_{n0})}.$$

Далее легко найти первую поправку к собственной форме, затем, в случае необходимости, λ_{n2} , y_{n2} и т.д.

В качестве еще одного примера рассмотрим влияние собственной массы вертикально расположенного стержня на критические усилия осевого сжатия (рис.1.2).

Исходное уравнение:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho g F \frac{d}{dx} \left[x \frac{dw}{dx} \right] + T \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Пусть стержень шарнирно оперт (условия (1.1.10)).

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{\pi x}{l}; \quad \bar{T} = \frac{T l^3}{EJ \pi^2}; \quad \epsilon = \frac{\rho g F l^3}{EJ \pi^3}$$

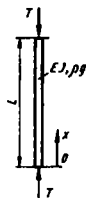
и перепишем исходное уравнение и краевые условия в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \epsilon \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{dw}{d\xi} \right] + \bar{T} \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0;$$

(1.1.19)

$$w = d^2 w / d\xi^2 = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \pi.$$

Рис. 1.2. Вертикально расположенный сжатый стержень



Поскольку для реальных стержней $\epsilon \ll 1$, разыскиваем решение задачи (1.1.19) в виде

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots;$$

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \epsilon \bar{T}_1 + \dots$$

В первом приближении получаем задачу об эйлеровой устойчивости продольно сжатого шарнирно опертого стержня:

$$\frac{d^4 \omega_0}{d\xi^4} + \bar{T}_0 \frac{d^2 \omega_0}{d\xi^2} = 0; \quad \omega_0 = \frac{d^2 \omega_0}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \pi.$$

Первая критическая сила $\bar{T}_0 = 1$, соответствующая форма потери устойчивости $\omega_0 = A \sin \xi_0$.

Из уравнения первого приближения

$$\frac{d^4 \omega_1}{dx^4} + \bar{T}_0 \frac{d^2 \omega_1}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d\omega_0}{d\xi} \right] + \bar{T}_1 \frac{d^2 \omega_0}{d\xi^2}$$

определяем к критической силе первую поправку

$$\bar{T}_1 = -1/2.$$

Окончательно имеем

$$\bar{T} = 1 - \frac{1}{2} \epsilon.$$

С этой задачей связана любопытная ошибка: в книге Коллатца [48] в исходном уравнении перед подчеркнутым членом (учитывающим влияние собственной массы) поставлен знак "-" вместо знака "+". В результате получилось $\bar{T} = 1 + 1/2\epsilon$, т.е. учет собственной массы повышает расчетное критическое усилие! Это подтверждает общее правило: часто простейшие физические соображения позволяют избежать ошибки.

Перейдем теперь к более сложным случаям кратных собственных значений. Сначала рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений. Пусть невозмущенная задача

$$(A_0 - \lambda_0 E) \bar{x} = 0$$

имеет k -кратное собственное значение и построены попарно ортогональные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$, отвечающие этому собственному значению.

Для возмущенной задачи, вообще говоря, произойдет "расщепление" k -кратного собственного значения. Действительно, пусть, например, $A_0 = E$, а A_1 — некоторая самосопряженная матрица с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда невозмущенная задача имеет n -кратное собственное значение, равное 1, а возмущенная — n различных собственных значений $1 + \lambda_1 \epsilon, 1 + \lambda_2 \epsilon, \dots, 1 + \lambda_n \epsilon$.

Представим теперь возмущенные значения собственного числа и собственного вектора в виде

$$\lambda_i = \lambda_0 + \epsilon \lambda_i^{(1)} + \epsilon^2 \lambda_i^{(2)} + \dots;$$

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i^{(0)} + \epsilon \bar{x}_i^{(1)} + \epsilon^2 \bar{x}_i^{(2)} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Здесь сразу же видно отличие от случая некратных собственных значений: совершенно неясно, что же представляет собой $\bar{x}_i^{(0)}$. Конечно, он должен быть линейной комбинацией векторов, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$, однако эта комбинация заранее неизвестна. Значит, в отличие от случая некратных собственных значений, сами $\bar{x}_i^{(0)}$ подлежат определению.

Сравнивая, как и раньше, коэффициенты при ϵ , получаем в первом приближении

$$A_1 \bar{x}_i^{(0)} + A_0 \bar{x}_i^{(1)} = \lambda_1 \bar{x}_i^{(1)} - \lambda_i^{(1)} \bar{x}_i^{(0)}. \quad (1.1.20)$$

Здесь $\bar{x}_i^{(0)}$ — линейная комбинация собственных векторов \bar{e}_k , т.е.

$$\bar{x}_i^{(0)} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_k \bar{e}_k. \quad (1.1.21)$$

Наша цель — найти число $\lambda_i^{(1)}$ и вектор $\bar{x}_i^{(0)}$. Умножая обе части выражения (1.1.21) скалярно на \bar{e}_r , найдем

$$(A_1 \bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r) + (A_0 \bar{x}_i^{(1)}, \bar{e}_r) = \lambda_0 (\bar{x}_i^{(1)}, \bar{e}_r) + \lambda_i^{(1)} (\bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r). \quad (1.1.22)$$

Поскольку

$$(A_0 \bar{x}_i^{(1)}, \bar{e}_r) = (\bar{x}_i^{(1)}, A_0 \bar{e}_r) = \lambda_0 (\bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r),$$

уравнение (1.1.22) можно записать так:

$$(A_1 \bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r) = \lambda_i^{(1)} (\bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r). \quad (1.1.23)$$

Подставляя в левую часть этого равенства вместо $\bar{x}_i^{(0)}$ его выражение (1.1.21) и замечая, что $(\bar{x}_i^{(0)}, \bar{e}_r) = a_r$, получаем

$$\sum_{p=1}^k (A_1 \bar{e}_p, \bar{e}_r) a_p = \lambda_i^{(1)} a_r \quad \text{или}$$

$$\sum_{p=1}^k b_{rp} a_p = \lambda_i^{(1)} a_r, \quad (1.1.24)$$

где

$$b_{rp} = (A_1 \bar{e}_p, \bar{e}_r).$$

Итак, числа λ_i являются собственными значениями матрицы $\|b_{rp}\|$, ($r, p = 1, 2, \dots, k$) и определяются из уравнения

$$\det \|b_{ir} - \lambda_i^{(1)} \delta_{ik}\| = 0,$$

а вектор $\bar{x}_i^{(0)}$ определяется формулой (1.1.21), где a_i находятся из уравнений (1.1.24).

Аналогично можно было бы найти поправки к собственным векторам $\bar{x}_i^{(0)}$ и следующие поправки к частотам $\lambda_i^{(2)}$.

Для дифференциальных уравнений случай кратных собственных значений рассмотрим аналогично. Пусть невозмущенная самосопряженная краевая задача

$$M_0(y_0) + \lambda_0 N_0(y_0) = 0;$$

$$\bar{Q}_1(y_0)|_{x=a} = 0; \quad \bar{Q}_2(y_0)|_{x=b} = 0$$

имеет k -кратное собственное значение λ_0 и k относящихся к нему собственных функций $\varphi_{i0,1}; \varphi_{i0,2}; \dots; \varphi_{i0,k}$. Предполагаем, что собственные функции ортонормированы, т.е.

$$\int_a^b \varphi_{i0,r} N_0(\varphi_{i0,p}) dx = 0;$$

$$\int_a^b \varphi_{i0,r} N(\varphi_{i0,r}) dx = 1; \quad p \neq r. \quad (1.1.25)$$

Как и для системы линейных алгебраических уравнений, при внесении малого возмущения кратное собственное число расщепляется. Снова появляется задача определения собственных векторов нулевого приближения, которые будем искать в виде

$$y_{i0,p} = \sum_{i=1}^k c_r \varphi_{i0,r}, \quad p = 1, 2, \dots, k. \quad (1.1.26)$$

Выпишем уравнение первого приближения

$$\begin{aligned} M_0(y_{i1,r}) - \lambda_{i0} N_0(y_{i0,r}) &= \\ &= -M_1(y_{i0,r}) + \lambda_{i1} N_0(y_{i0,r}) + \lambda_{i0} N_1(y_{i0,r}); \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

$$\bar{Q}_1(y_{i1,r})|_{x=a} = 0; \quad \bar{Q}_2(y_{i1,r})|_{x=b} = 0.$$

Умножая уравнение (1.1.27) последовательно на $\varphi_{i0,p}$ ($p = 1, 2, \dots, k$), используя самосопряженность невозмущенного оператора и свойство обобщенной ортонормированности (1.1.25), получаем систему линейных алгебраических уравнений, позволяющую определить $\lambda_{i1,r}$ и c_r (а значит, и $y_{i0,r}$):

$$\int_a^b \left\{ M_1 \left[\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{i0,p} \right] \varphi_{i0,r} - \lambda_{i0} N_1 \left[\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{i0,p} \right] \varphi_{i0,r} - \lambda_{i1} N_0 \left[\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{i0,p} \right] \varphi_{i0,r} \right\} dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Рассмотрим пример устойчивости шарнирно опертого стержня на упругом основании специального вида:

$$\omega^{IV} + (4 + \epsilon)\omega + \lambda\omega'' = 0;$$

$$\omega(0) = \omega''(0) = \omega(\pi) = \omega''(\pi) = 0.$$

Наименьшее собственное значение $\lambda_0 = 5$ невозмущенной задачи двукратно вырождено – ему соответствуют функции $\sin x$ и $\sin 2x$.

В первом приближении получаем

$$\omega_1^{IV} + 4\omega_1 + \lambda_0 \omega_1'' + \omega_0 + \lambda_1 \omega_0'' = 0.$$

Подставляя теперь собственную функцию нулевого приближения в виде

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x,$$

получаем для определения a_1, a_2, λ_1 систему

$$a_1 - a_1 \lambda_1 = 0; \quad a_2 - 4a_2 \lambda_1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_1 = 1/4$, а соответствующие собственные функции сохраняются в виде $\sin x$ и $\sin 2x$.

В изложенном подходе на каждом этапе сначала определяются собственные числа, а затем – собственные векторы. Возможен и другой подход, когда из уравнения для собственного вектора исключается собственное значение [80]. Рассмотрим для иллюстрации уравнение продольных колебаний стержня переменной жесткости

$$\frac{d}{dx} \left[\left(E_0 F_0 + \epsilon E_1 F_1(x) \frac{du}{dx} \right) \right] + \rho F \lambda u = 0$$

при граничных условиях (1.1.5).

В нулевом приближении имеем

$$E_0 F_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \rho F \lambda_0 u_0 = 0$$

при $x = 0, L$ $u_0 = 0$.

Теперь преобразуем исходное уравнение, добавив и отняв член $\rho F \lambda_0 u$:

$$E_0 F_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - \rho F \lambda_0 u + \epsilon \frac{d}{dx} \left[E_1 F_1(x) \frac{du}{dx} \right] = -\rho F (\lambda - \lambda_0) u. \quad (1.1.28)$$

Умножив теперь, как и ранее, обе части уравнения (1.1.28) на u_0 , интегрируя по x от нуля до L и учитывая самосопряженность оператора $(d^2/dx^2) - \lambda_0 \rho F$, получаем

$$-\rho F (\lambda - \lambda_0) = \epsilon \int_0^L \frac{d}{dx} \left[E_1 F_1(x) \frac{du}{dx} \right] u_0 dx \left[\int_0^L u u_0 dx \right]^{-1}. \quad (1.1.29)$$

Дальше будем считать собственную функцию u нормированной таким образом, что

$$\int_0^L u u_0 dx = 1.$$

Затем из уравнения (1.1.28) исключаем собственное число λ при помощи выражения (1.1.29):

$$\begin{aligned} E_0 F_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - \rho F \lambda_0 u + \epsilon \frac{d}{dx} \left[E_1 F_1(x) \frac{du}{dx} \right] = \\ = \epsilon u \int_0^L \frac{d}{dx} \left[E_1 F_1(x) \frac{du}{dx} \right] u dx. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Это нелинейное уравнение с краевыми условиями (1.1.30) можно решать методом возмущений или последовательных приближений. Далее, зная собственный вектор, можно по формуле (1.1.29) найти собственное число.

В то же время, имея собственный вектор, можно далее определять собственное число при помощи какого-либо вариационного подхода, например метода Бубнова-Галеркина. Это существенно повышает точность, с которой найдено собственное число.

Отметим, что в настоящее время разработаны приемы, позволяющие определять собственное число с точностью до ϵ^{2N} , если собственный вектор найден с точностью до ϵ^N [56].

1.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ОВАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Указанная задача может быть сведена к интегрированию дифференциального уравнения [4]

$$D \frac{\partial^8 \omega}{\partial y^8} - \frac{q}{R(y)} \frac{\partial^6 \omega}{\partial y^6} + \frac{Eh}{R^2(y)} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = 0.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; q — внешнее нормальное давление;

$$R(y) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1}},$$

где L_1 — периметр поперечного сечения; μ — параметр эксцентricности ($0 < \mu < 1$).

Граничные условия при шарнирном опирании торцов таковы:

$$\omega = \partial^2 \omega / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0, L.$$

Выбирая для ω удовлетворяющее крайевым условиям выражение $\omega = f(y) \sin \pi x / L$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка с переменными коэффициентами относительно $f(y)$

$$\frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d^8 f}{dy^8} - \frac{q}{E} \frac{R_0}{h} \frac{1}{\left(1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1}\right)} \frac{d^6 f}{dy^6} +$$

$$+ \frac{1}{R_0^2} \left[1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1} \right] \left[\frac{\pi}{L} \right]^4 f = 0. \quad (1.2.1)$$

При значениях $\mu < 1$ коэффициенты уравнения (1.2.1) мало отличаются от коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего потерю устойчивости кругового цилиндра. Решение задачи на собственные значения для такого уравнения хорошо известно. Это дает возможность использовать для решения нашей задачи метод возмущений.

Предельная задача, которая получается при $\mu = 0$, имеет вид

$$\frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d^8 f_0}{dy^8} - \frac{q_0}{E} \frac{R_0}{h} \frac{d^8 f_0}{dy^8} + \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\pi}{L} \right]^4 f_0 = 0. \quad (1.2.2)$$

При $\nu = 0,3$ получаем

$$q_0 = 0,92 \frac{ER_0}{L} \left[\frac{h}{R_0} \right]^2, \quad f_0 = \cos n \frac{y}{R_0},$$

$$n^2 = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{h} \frac{R_0}{L}}.$$

Нетрудно проверить, что невозмущенная задача самосопряжена.

Представляя теперь решение исходной задачи в виде разложения по параметру μ , получаем для высших приближений рекуррентную систему уравнений

$$M^*(f_0) = q_0 N^*(f_0);$$

$$M^*(f_1) + \bar{M}(f_0) = q_1 N^*(f_0) + q_0 [N^*(f_1) + \bar{N}(f_0)];$$

$$M^*(f_k) + \bar{M}(f_{k-1}) = q_k N^*(f_0) + \sum_{p=1}^k q_{k-p} [N^*(f_p) + \bar{N}(f_{p-1})];$$

где

$$M^*(f) = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d^8 f}{dy^8} + \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\pi \pi}{L} \right]^4 f;$$

$$N^*(f) = \frac{1}{E} \frac{R_0}{h} \frac{d^6 f}{dy^6};$$

$$M(f) = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d^8 f}{dy^8} + \frac{1}{R_0^2} \left[1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1} \right]^2 \left[\frac{\pi}{L} \right] f;$$

$$N(f) = \frac{1}{E} \frac{R_0}{h} \frac{1}{\left[1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1} \right]} \frac{d^6 f}{dy^6};$$

$$\bar{M}(f) = M(f) - M^*(f); \quad \bar{N}(f) = N(f) - N^*(f).$$

Вследствие самосопряженности невозмущенной краевой задачи неизвестные собственные значения q_i можно определять по следующей формуле:

$$q_i = \frac{\int_0^{2\pi} f_{i-1} [\bar{M}(f_{i-1}) - q_{i-1} \bar{N}(f_{i-1})] dy}{\int_0^{2\pi} f_{i-1} N^*(f_{i-1}) dy}.$$

Находим первое приближение:

$$q_1 = -0.31 \mu^2 q_0.$$

Поправку к собственной форме получим, решая краевую задачу для функции

$$M^*(f_1) - q_0 N^*(f_1) = -\bar{M}(f_0) + q_0 N(f_0) + q_1 N^*(f_0); \quad (1.2.3)$$

$$f_1(y) = f_1(y + L_1). \quad (1.2.4)$$

Решение уравнения (1.2.3) при граничных условиях (1.2.4) имеет вид

$$f_1 = A \cos(n-2)y + B \cos(n+2)y + C \cos(n-4)y + D \cos(n+4)y, \quad (1.2.5)$$

где

$$A, B = \frac{3\mu h}{\frac{(n \mp 2)^8 h^2}{12(1 - \nu^2)R_0^2} - q_0 (n \mp 2)^6 \frac{R_0}{Eh} + \left[\frac{\pi}{l}\right]^4},$$

$$C, D = \frac{\frac{3}{4} \mu^2 h}{\frac{(n \mp 4)^8 h^2}{12(1 - \nu^2)R_0^2} - q_0 (n \mp 4)^6 \frac{R_0}{Eh} + \left[\frac{\pi}{l}\right]^4}.$$

Используя решение (1.2.5), находим значение $q_{кр}$ с точностью до μ^6 :

$$q_{кр} = 0,92(1 - 0,31\mu^2 + 0,15\mu^4) E \frac{R_0}{L} \left[\frac{h}{R_0}\right]^{\frac{5}{2}}. \quad (1.2.6)$$

Решение уравнения (1.2.1) можно также найти, используя с самого начала метод Бубнова-Галеркина. Так, если представить форму потери устойчивости в виде

$$\omega = A \cos \left[\frac{2\pi y}{L_1} \right] \sin \frac{\pi x}{L},$$

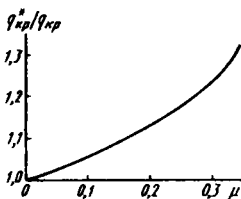
то для $q_{кр}$ имеем с точностью до членов μ^4 :

$$q_{кр} = 0,92(1 - 0,375\mu^2) E \frac{R_0}{L} \left[\frac{h}{R_0}\right]^{\frac{5}{2}}. \quad (1.2.7)$$

Выражения (1.2.6) и (1.2.7) весьма близки. Это служит гарантией достоверности полученных результатов.

Оценим теперь пределы применимости полученной зависимости (1.2.6). Для этого сравним результаты расчета по ней с решением, найденным численно (с помощью двойных тригонометрических рядов) в работе [84], где рассматривались эллиптические (а не овальные) оболочки, однако при относительно малых эксцентриситетах эта особенность не имеет существенного значения. Сравнения производились

Рис. 1.3. Оценка точности метода возмущений при расчете на устойчивость под действием внешнего влияния овалной цилиндрической оболочки



для следующих значений параметров: $h = 0,00124$ м; $L = 0,254$ м; $\nu = 0,31$; $L_1 = 0,494$ м.

Результаты сравнения представлены на рис.1.3, где по оси ординат отложены отношения значений $q_{кр}$, найденных в [84], к значениям $q_{кр}$, вычисленным по предложенной в настоящей работе методике.

Достаточно хорошее совпадение результатов наблюдается при $0 < \mu < 0,25$. Так, если для значения $\mu = 0,25$ критическое давление, определенное по формуле (1.2.6), оказывалось на 12,5 % выше, чем найденное в работе [84], то для $\mu = 0,15$ эта погрешность составляет уже 2,5 %.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

В теории устойчивости получил широкое распространение метод Лейбензона – Ишлинского исследования конструкций со свободными краями. Суть его состоит в том, что в уравнениях равновесия отбрасываются параметрические члены при сохранении их только в краевых условиях.

Вопрос о физической стороне подобных упрощений до сих пор обсуждается в литературе. Пока эта сторона не совсем ясна, можно строить соответствующие упрощения формально, вводя в исходные уравнения при параметрических членах параметр ϵ и считая его малым, а в окончательном решении полагая $\epsilon = 1$.

Рассмотрим устойчивость консольного стержня (рис.1.4). Представим исходное уравнение устойчивости и краевые условия в виде

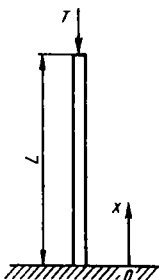


Рис. 1.4. Сжатый консольный стержень

$$EJ\omega_{xxxx} + \epsilon T\omega_{xx} = 0;$$

$$\omega(0) = \omega'(0) = 0; \quad \omega''(L) = 0;$$

$$EJ\omega'''(L) + T\omega'(L) = 0.$$

Представим далее ω и T так:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \dots;$$

$$T = T_0 + T_1\epsilon + T_2\epsilon^2 + \dots$$

Производя расщепление по ϵ , имеем:

$$\text{для } \epsilon^0 \quad EJ\omega_{0xxxx} = 0;$$

$$\omega_0(0) = \omega_0'(0) = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\omega_0''(L) = 0;$$

$$EJ\omega_0'''(L) + T_0\omega_0'(L) = 0 \quad \text{при } x = L;$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad EJ\omega_{1xxxx} + T_0\omega_{0xx} = 0;$$

$$\omega_1(0) = \omega_1'(0) = 0; \quad \omega_1''(L) = 0;$$

$$EJ\omega_1'''(L) + T_0\omega_1'(L) + T_1\omega_0'(L) = 0;$$

$$\text{для } \epsilon^2 \quad EJ\omega_{2xxxx} + T_0\omega_{1xx} + T_1\omega_{0xx} = 0;$$

$$\omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0; \quad \text{при } x = 0;$$

$$\omega_2''(L) = 0;$$

$$EJ\omega_2'''(L) + T_0\omega_2'(L) + T_1\omega_1'(L) + T_2\omega_0'(L) = 0.$$

В нулевом приближении имеем

$$EJ\omega_{0xxxx} = 0, \quad \omega_0(0) = \omega_0'(0) = 0;$$

$$\omega_0''(L) = 0, \quad EJ\omega_0'''(L) + T_0\omega_0'(L) = 0.$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{2EJ}{L^2}; \quad \omega_0 = Ax^2(x - 3L).$$

Для первого приближения

$$EJ\omega_{1xxxx} + T_0\omega_{00xx} = 0;$$

$$\omega_1(0) = \omega_1'(0) = 0, \quad \omega_1'(L) = 0;$$

$$EJ\omega_1'''(L) + T_0\omega_1'(L) + T_1\omega_1'(L) = 0.$$

Теперь получаем

$$T_1 = EJ/(3L^2);$$

$$\omega_1 = -3(BL + 2AL)x^2 + Bx^2 + \frac{A}{2L}x^4 - \frac{A}{10L^2}x^5.$$

Наконец, из уравнения и краевых условий второго приближения

$$EJ\omega_{2xxxx} + T_0\omega_{10xx} + T_1\omega_{00xx} = 0;$$

$$\omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0;$$

$$\omega_2'(L) = 0, \quad EJ\omega_2''(L) + T_0\omega_2'(L) + T_1\omega_1'(L) + T_2\omega_0'(L) = 0$$

находим

$$T_2 = 4EJ/(45L^2).$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{EJ}{L^2} \left[2 + \frac{1}{3} \epsilon + \frac{4}{45} \epsilon^2 + \dots \right].$$

При $\epsilon = 1$ получим $T = 2,4020 EJ/L^2$. Точное решение $T = 2,4674 EJ/L^2$ отличается от найденного на 1,83 %.

1.4. УСТРАНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТЕЙ

Одним из недостатков асимптотических разложений является их неравномерность. Распространенные источники неравномерностей — бесконечность (или большая протяженность) рассматриваемой области и наличие особенностей.

Рассмотрим колебания массы, соединенной с нелинейной пружиной, которые описываются уравнением Дюффинга

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0; \quad u(0) = a; \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (1.4.1)$$

Пусть нелинейность невелика ($\epsilon < 1$). Будем искать приближенное решение в виде асимптотического разложения

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m(t). \quad (1.4.2)$$

Подставив его в уравнение (1.4.1), выполнив разложение по степеням ϵ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим следующие задачи:

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0; \quad u_0(0) = a; \quad \dot{u}_0(0) = 0; \quad (1.4.3)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3; \quad u_1(0) = 0; \quad \dot{u}_1(0) = 0. \quad (1.4.4)$$

.....

Решение задачи (1.4.3) имеет вид

$$u_0 = a \cos t. \quad (1.4.5)$$

Подставляя значение u_0 в уравнение (1.4.4) и используя тождество $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, получим

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}. \quad (1.4.6)$$

Решение уравнения (1.4.6) с начальными условиями (1.4.4) таково:

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8} + \sin t + \frac{a^3}{32} (\cos 3t - \cos t). \quad (1.4.7)$$

Итак,

$$u = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + o(\epsilon^2). \quad (1.4.8)$$

Из-за слагаемого $t \sin t$ имеем $u_1/u_2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому приведенное разложение не является приближением к решению для всех значений t . Слагаемое $t \sin t$ называется вековым (секулярным) членом, оно стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Регулярность

(1.4.8) нарушается не только при бесконечном значении t ; если $t = O(\epsilon^{-1})$, то второй член сравнивается по порядку с первым в противоречие с нашим предположением о том, что u_1 — малая поправка к u_0 . При дальнейшем вычислении членов ряда будут появляться вековые члены типа $t^n \cos t$, $t^n \sin t$. Хотя результирующий ряд и сходится, но сходимость эта медленная и представить решение конечным числом слагаемых для всех значений t не удастся. Появление вековых членов естественно для задач о нелинейных колебаниях, следовательно, в этих случаях нельзя ожидать, что прямое разложение окажется равномерно пригодным.

Для того чтобы свести приближенное решение (1.4.8) к равномерно пригодному, можно применить метод Линдштедта–Пуанкаре. Идея его основана на следующем положении. При $\epsilon \rightarrow 0$ решение является периодическим с периодом 2π . Однако из-за нелинейного члена ϵu^3 в уравнении (1.4.1) решение для $\epsilon \neq 0$ не может быть периодическим с тем же периодом. Так как период порождающего решения (1.4.5) постоянен и равен 2π , последующие члены должны привести к изменению периода, в результате чего и появляются вековые члены. Следующий простой пример делает это утверждение убедительным: для функции $\sin(\omega + \epsilon)t$ имеет место разложение

$$\sin(\omega + \epsilon)t = \sin\omega t + \epsilon t \cos\omega t - \frac{\epsilon^2 t^2}{2!} \sin\omega t - \dots$$

Сущность метода Линдштедта–Пуанкаре заключается в том, чтобы предотвратить появление вековых членов введением новой переменной

$$t = s(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots) \quad (1.4.9)$$

и соответствующим подбором значений $\omega_1, \omega_2, \dots$.

Применив это преобразование для уравнения Дюффинга, получим

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^2 (u + \epsilon u^3) = 0. \quad (1.4.10)$$

Подставив переменную (1.4.9) в уравнение (1.4.10) и приравняв коэффициенты при равных степенях ϵ , имеем

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} + u_0 = 0; \quad (1.4.11)$$

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 \omega_0; \quad (1.4.12)$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = -3u_0^2 u_1 - 2\omega_1 (u_1 + u_0^2) - (\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0; \quad (1.4.13)$$

Общее решение (1.4.11) имеет вид

$$u_0 = a \cos(s + \varphi), \quad (1.4.14)$$

где a и φ — постоянные интегрирования.

Тогда уравнение (1.4.12) примет вид

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -\frac{1}{4} a^3 \cos 3(s + \varphi) - \left[\frac{3}{4} a^2 + 2\omega_1 \right] a \cos(s + \varphi). \quad (1.4.15)$$

Если использовать прямое возмущенное разложение, то $\omega_n = 0$ и уравнение (1.4.15) перейдет в уравнение (1.4.6), частное решение которого содержит вековые члены.

Чтобы "уничтожить" вековые члены, значение ω_1 выбирается так, чтобы коэффициент при $\cos(s + \varphi)$ в правой части уравнения (1.4.15) исчез. Из этого условия определяем

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} a^2.$$

Тогда решение уравнения (1.4.15) таково:

$$u_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos 3(s + \varphi).$$

Подставляя выражения для u_0 , u_1 , ω_1 в уравнение для u_2 , получаем

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = \left[\frac{51}{128} a^4 - 2\omega_2 \right] a \cos(s + \varphi) + \psi,$$

где через ψ обозначены слагаемые, не порождающие вековых членов. Вековые члены уничтожаются, если

$$\omega_2 = \frac{51}{256} a^4.$$

Поэтому

$$u = a \cos(\omega t + \theta) + \frac{\epsilon}{32} a^3 \cos 3(\omega t + \epsilon) + o(\epsilon^2), \quad (1.4.16)$$

где a, θ – постоянные интегрирования и

$$\begin{aligned} \omega &= \left[1 - \frac{3}{8} a^2 \epsilon + \frac{51}{256} a^4 \epsilon^2 + \dots \right]^{-1} = \\ &= 1 + \frac{3}{8} a^2 \epsilon - \frac{51}{256} a^4 \epsilon^2 + o(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Различные формы этого метода используются для получения приближенных решений задач. Идея заключается в том, чтобы найти параметр, изменяющийся при возмущении (например, это могут быть частота, волновое число, волновая скорость, собственное значение), и разложить этот параметр, скажем, по степеням интенсивности возмущений. Возмущения параметра выбирают так, чтобы получить равномерно пригодное разложение. Этот метод называется методом растянутых параметров.

Координаты вида $\xi = \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right] t$, которые приводят к равномерным разложениям, называются оптимальными координатами.

Отметим, что в некоторых случаях можно устранить сингулярные члены, используя "прием Тиссерана" [81]. А именно: пусть в результате применения метода возмущений получено решение вида

$$x(t) = \cos \omega_0 t + \epsilon a t \sin \omega_0 t.$$

Тогда можно приближенно положить

$$x(t) \approx \cos(\omega_0 + \epsilon a)t.$$

Перейдем теперь к случаям, когда разложения в рассматриваемой области имеют особенности, которых нет в точном решении. Тогда, как правило, в членах высшего порядка особенности не только сохраняются, но и усиливаются.

В качестве примера рассмотрим задачу, изучавшуюся Лайтхиллом:

$$\begin{aligned} (x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y &= 0; \\ y(1) &= e^{-1}. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Это уравнение имеет особенность на прямой $x = -\epsilon y$. Граничное условие, однако, обеспечивает положительность точного решения $y(x)$

для $x \geq 0$; следовательно, $y(x)$ не имеет особенностей при $0 \leq x < \infty$. Для отыскания прямого разложения положим

$$y = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots \quad (1.4.19)$$

Подставив выражение (1.4.19) в задачу (1.4.18), выполнив разложения по степеням ϵ и приравняв коэффициенты при $\epsilon^0, \epsilon^1, \dots$, получим

$$x \frac{dy_0}{dx} + (2+x)y_0 = 0; \quad y_0(1) = e^{-1}; \quad (1.4.20)$$

$$x \frac{dy_1}{dx} + (2+x)y_1 = -y_0 \frac{dy_0}{dx}; \quad y_1(1) = 0; \quad (1.4.21)$$

.....

Решение задачи нулевого приближения таково:

$$y_0 = x^{-2} e^{-x}.$$

Подставив y_0 в уравнение (1.4.21) и решив полученное уравнение, имеем

$$y_1 = x^{-2} e^{-x} \int_1^x e^{-t} t^{-3} (1 + 2t^{-1}) dt.$$

При $x \rightarrow 0$ $y_0 = O(x^{-2})$, в то время как

$$y_1 = O(x^{-5}).$$

Таким образом, хотя точное решение не имеет особенности при $x = 0$, решение нулевого порядка имеет особенность при $x = 0$, и порядок этой особенности даже повышается в первом приближении. Для борьбы с неоднородностью здесь можно использовать метод Лайтхилла. Сущность его заключается в разложении не только зависимой переменной $y(x, \epsilon)$ по степеням ϵ , но также и в разложении одной из независимых переменных, скажем x , по степеням ϵ . Лайтхилл ввел новую независимую переменную, затем разложил y, x по степеням ϵ с коэффициентами, зависящими от s . Для первого приближения он предположил, что x и s совпадают. Таким образом, Лайтхилл предложил следующие разложения:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m y_m(s); \quad (1.4.22)$$

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m x_m(s). \quad (1.4.23)$$

Ясно, что прямое разложение состоит только из (1.4.22), в котором s заменено на x . Поскольку это прямое разложение не является равномерно пригодным, Лайтхилл ввел (1.4.23) и выбрал x_m (называемые растягивающими функциями) так, чтобы эти разложения стали равномерно пригодными, т.е. он выбрал значение x_m такое, чтобы результирующее разложение стало равномерно пригодным. Это достигается, если потребовать, чтобы y_m/y_{m-1} и x_m/x_{m-1} были ограниченными. Другими словами, высшие приближения не должны быть более сингулярными, чем первое.

Сравнивая разложения (1.4.22) и (1.4.23) с уравнением (1.4.9), видим, что метод Лайтхилла является обобщением метода растянутых параметров. Этот метод носит название метода ПЛГ (Пуанкаре-Лайтхилла-Го). Итак, следуя Лайтхиллу, примем разложения (1.4.22) и (1.4.23) для задачи (1.4.18). Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} / \frac{dx}{ds} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m y'_m(s)}{1 + \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m x'_m(s)}.$$

Чтобы учесть граничное условие, необходимо определить значения s , соответствующее значению $x = 1$. Обозначим его \bar{s} . Таким образом, мы пришли к уравнению

$$\bar{s} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x_m(s). \quad (1.4.24)$$

Разложим \bar{s} по степеням ϵ , получим

$$\bar{s} = 1 + \epsilon \bar{s}_1 + \epsilon^2 \bar{s}_2 + \dots \quad (1.4.25)$$

Подставив разложение (1.4.25) в задачу (1.4.18), разложив и приравняв коэффициенты при равных степенях ϵ , придем к равенству

$$\bar{s} = 1 - \epsilon x_1(1) - \epsilon^2 [x_2(1) - x_1(1)x'_1(1)] + \dots \quad (1.4.26)$$

Граничное условие может быть теперь записано в виде

$$Ae^{-1} = y_0(1) + \epsilon [y_1(1) - y'_0(1)x_1(1)] + \dots$$

или

$$y_0(1) = Ae^{-1}; \quad y_1(1) = y'_0(1)x_1(1).$$

Подставляя x , y , dy/dx в задачу (1.4.18), получим, приравняв коэффициенты при ϵ^0 и ϵ ,

$$sy'_0 + (2 + s)y_0 = 0;$$

$$sy'_1 + (2 + s)y_1 = - (2 + s)y_0x'_0 - (y_0 + y'_0)x_1 - y_0y'_0. \quad (1.4.27)$$

Решение для y_0 имеет вид $y_0 = Ae^{-s} s^{-2}$.

Поэтому второе уравнение (1.4.27) преобразуется к виду

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{y_1}{y_0} \right] = \frac{1}{s} \left[- (2 + s)x'_1 + \frac{2}{s} x_1 + Ae^{-s} s^{-2} \left[\frac{2}{s} + 1 \right] \right]. \quad (1.4.28)$$

Если $x_1 = 0$, то (1.4.28) приводится к уравнению для членов первого порядка в прямом разложении, где y_1 более сингулярно при $x = 0$, чем y_0 . Действительно, $y_0 = O(x^{-2})$, в то время как $y_1 = O(x^{-5})$ при $x \rightarrow 0$. Чтобы сделать это разложение равномерно пригодным, значение x_1 можно выбрать так, чтобы значение y_1 было не более сингулярно, чем y_0 , обратив для этого в нуль правую часть уравнения (1.4.28). Однако Лайтхилл нашел, что равномерно пригодное разложение можно получить, выбрав значение x_1 так, чтобы устранить главную особенность. Поэтому положим

$$x_1 - \frac{x_1}{s} = \frac{A}{s^3} \quad \text{или} \quad x_1 = - \frac{A}{3s^2}.$$

Тогда уравнение (1.4.28) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y_1}{y_0} \right] = -\frac{2A}{3s^3} - \frac{2A}{s^4} + Ae^{-s} \left[\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} \right].$$

Следовательно,

$$y_1 = A^2 e^{-s} s^{-2} \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_3^1 e^{-\xi} \left[\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right] d\xi \right].$$

Растягивающая функция x_2 может быть найдена из условия устранения главной особенности в y_2 и имеет вид

$$x_2 = 3A_2 / (10s^4).$$

Поэтому

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \left\{ 1 + Ae \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_3^1 e^{-\xi} \left[\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right] d\xi \right] \right\} + o \left(\frac{\epsilon^2}{s^6} \right). \quad (1.4.29)$$

где

$$x = s - \frac{\epsilon A}{3s^2} - \frac{3\epsilon^2 A^2}{10s^4} + o \left(\frac{\epsilon^3}{s^6} \right). \quad (1.4.30)$$

Самое грубое приближение, равномерно пригодное вблизи нуля, имеет вид

$$y = Ae^{-s} s^{-2}; \quad x = s - \frac{\epsilon A}{3s^2}, \quad (1.4.31)$$

где s — корень второго уравнения (1.4.31), который приближенно равен x , когда $x \gg 0$ и $\epsilon \ll 1$.

Форма применения метода ПЛГ может быть различной. Так, При-туло М.Ф. применил метод, носящий сейчас название метода перенормировки. Он показал, что для определения равномерно пригодного возмущенного разложения для данной задачи нет необходимости вводить в дифференциальные уравнения преобразования (1.4.22), (1.4.23) и затем определять величину ξ_m . Вместо этого можно выпи-

дать прямое разложение, выраженное через исходные переменные, и лишь затем ввести преобразование (1.4.23) в полученное разложение. Чтобы сделать это разложение равномерно пригодным, можно наложить условие, требующее, чтобы особенность не увеличивалась с ростом порядка приближения. Таким образом, для определения x_m мы получим не дифференциальные, а алгебраические уравнения, что упрощает всю процедуру.

Рассмотрим, например, прямое разложение решения уравнения Дюффинга (1.4.1):

$$u = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + o(\epsilon^2). \quad (1.4.32)$$

Чтобы сделать разложение (1.4.32) равномерно пригодным, введем преобразование (1.4.21) в этот ряд. Разложив и собрав коэффициенты при равных степенях ϵ , получим

$$u = a \cos s - \epsilon \left[a \left[\omega_1 + \frac{3}{8} a^2 \right] s \sin s - \frac{1}{32} a^2 (\cos 3s - \cos s) \right] + o(\epsilon^2).$$

Вековые члены исчезнут, если $\omega_1 = -\frac{3}{8} a^2$.

При этом равномерно пригодное разложение имеет вид (1.4.16), (1.4.17), где t задано выражением (1.4.9).

В качестве второго примера рассмотрим уравнение Лайтхилла (1.4.18). Прямое разложение его решения, полученное выше, имеет вид

$$y = x^{-2} e^{-x} \left[1 + \epsilon \int_1^x e^{-t} t^{-3} (1 + 2t^{-1}) dt \right] + o(\epsilon^2).$$

Чтобы сделать его равномерно пригодным, положим

$$x = s + \epsilon x_1(s) + \dots$$

Собрав коэффициенты при равных степенях ϵ , получим

$$y = s^{-2} \left[1 - \frac{2\epsilon}{s} \left[x + \frac{1}{3} s^{-2} \right] \right] + o(\epsilon^2) \text{ при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Это разложение будет равномерно пригодным, если выбрать $x_1 = - (1/3) s^{-2}$ и удалить таким образом главную особенность. Поэтому равномерно пригодное разложение будет в конце концов иметь вид (1.4.29), в котором значение x задано выражением (1.4.30).

1.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРИНГЕРНОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях стрингерной оболочки при учете геометрической нелинейности системы, т.е. нелинейности, обусловленной большими (порядка толщин оболочки) перемещениями. Оболочка рассматривается как конструктивно-ортоотропная (рис.1.5).

Если исследуется нижняя часть спектра, обычно представляющая наибольший интерес для практики, то можно использовать соотношения нелинейной полубезмоментной теории

$$\nabla_1^4 \omega - R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = L(\omega, \Phi); \quad (1.5.1)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{1}{2R^2} L(\omega, \Phi). \quad (1.5.2)$$

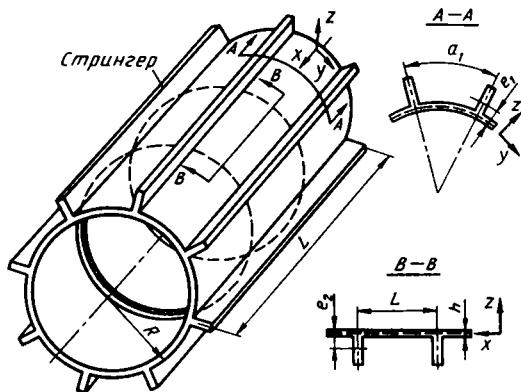


Рис. 1.5. Схематическое изображение подкрепленной цилиндрической оболочки

где

$$\nabla_1^4 = \frac{1}{R^2} \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right];$$

$$L(\omega, \Phi) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}.$$

Пусть оболочка шарнирно оперта. Прогиб оболочки аппроксимируем выражением

$$\omega(x, y, t) = f_1(t) \sin m_1 x \cos n_1 y + f_2(t) \sin^2 m_1 x. \quad (1.5.3)$$

Здесь f_1, f_2 – временные функции; $m_1 = \pi mL^{-1}$; $n_1 = n/Rm$, n – параметры, характеризующие волнообразование вдоль образующей и направляющей соответственно.

Временные функции f_1 и f_2 не являются независимыми. Связь между ними определяется из условия непрерывности тангенциального перемещения v по кольцу

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0,$$

откуда получаем

$$f_2 = - \frac{f_1^2}{4R} n^2.$$

Функцию напряжений в срединной поверхности находим из соотношения совместности деформаций (1.5.2):

$$\begin{aligned} B_1^{-1} \Phi &= \left[\frac{m_1}{n} \right]^2 \frac{f_1}{Rn^2} \sin m_1 x \cos n_1 y - \frac{5}{16} \left[\frac{m_1}{n} \right]^2 \times \\ &\times \left[\frac{f_1}{R} \right]^2 \cos 2n_1 y + \frac{1}{2} m_1^2 \left[\frac{f_1}{R} \right]^3 \sin m_1 x \cos(2m_1 x) \cos n_1 y. \end{aligned}$$

Зная Φ , применим к уравнению (1.5.1) метод Бубнова–Галеркина:

$$\int_0^{2\pi R^{-1}l} \int_0^l L_1(\omega) \sin m_1 x \cos n_1 y dx dy = 0,$$

где

$$L_1(\omega) = \nabla_1^4 \omega - R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(\omega, \Phi) + \rho R^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Выполнив соответствующие подстановки, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для временной функции $\xi(t)$:

$$\frac{d^2 \xi}{dt_1^2} + a \xi \left[\left(\frac{d\xi}{dt_1} \right)^2 + \xi \frac{d^2 \xi}{dt_1^2} \right] + A_1 \xi + A_2 \xi^3 + A_3 \xi^5 = 0. \quad (1.5.4)$$

Здесь

$$t_1 = \sqrt{B_1 (\rho R^2)^{-1}} t;$$

$$A_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \rho^{-2} + \epsilon_2 \rho^{-4} + n^{-4};$$

$$A_2 = 0,0625 + 0,5n^4 \epsilon_1 - 0,75;$$

$$A_3 = 0,25n^4; \quad a = 0,09375n^4; \quad \rho = m_1 n^{-1}; \quad \xi = R^{-1} f_1;$$

$$\epsilon_1 = D_{11}/(B_1 R^2); \quad \epsilon_2 = D_{22}/(B_1 R^2); \quad \epsilon_3 = D_{33}/(B_1 R^2).$$

Ограничимся практически важным случаем установившихся периодических колебаний и применим для решения уравнений (1.5.4) метод возмущений. А именно: независимую переменную t_1 заменим новой переменной $\tau = \omega t_1$, где ω — неизвестная частота периодического решения. Уравнение (1.5.4) примет вид

$$\omega^2 \ddot{\xi} + a \omega^2 \xi (\dot{\xi}^2 + \xi \ddot{\xi}) + A_1 \xi + A_2 \xi^3 + A_3 \xi^5 = 0;$$

$$(\dots) = d(\dots)/d\tau.$$

$$(1.5.5)$$

Так как разыскиваются периодические решения, то начало отсчета времени может быть выбрано произвольно. Без ограничения общности примем такие начальные условия:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \xi = f, \quad \dot{\xi} = 0. \quad (1.5.6)$$

Введем формальный малый параметр ϵ и представим $\xi(\tau)$ степенным рядом по ϵ , коэффициенты которого $\xi_i(\tau)$ являются периодическими функциями τ :

$$\xi(\tau) = \epsilon \xi_1(\tau) + \epsilon^2 \xi_2(\tau) + \epsilon^3 \xi_3(\tau) + \dots \quad (1.5.7)$$

Кроме того, следует разложить в степенной ряд по ϵ и неизвестную частоту ω :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (1.5.8)$$

Подставляя выражения (1.5.7)...(1.5.8) в уравнение (1.5.5) и расщепляя по ϵ , получим следующую последовательность дифференциальных уравнений для определения $\xi_i(\tau)$:

$$\text{для } \epsilon^1 \quad \omega_0^2 \ddot{\xi}_1 + A_1 \xi_1 = 0; \quad (1.5.9)$$

$$\text{для } \epsilon^2 \quad \omega_0^2 \ddot{\xi}_2 + A_1 \xi_2 = -2\omega_0 \omega_1 \dot{\xi}_1; \quad (1.5.10)$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^3 \quad \omega_0^2 \ddot{\xi}_3 + A_1 \xi_3 = & -(\omega_3^2 + 2\omega_0 \omega_2) \ddot{\xi}_1 - \\ & - 2\omega_0 \omega_1 \ddot{\xi}_2 - a\omega_0^2 (\xi_1 \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_1 \xi_1^2) - A_2 \xi_1^3. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Из начальных условий (1.5.6) имеем

$$\xi_1(0) = f; \quad \dot{\xi}_1(0) = 0; \quad (1.5.12)$$

$$\xi_i(0) = 0; \quad \dot{\xi}_i(0) = 0; \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.5.13)$$

Решение уравнения (1.5.9) при начальных условиях (1.5.12) (порождающее решение) имеет вид

$$\xi_1 = f \cos \tau; \quad \omega_0 = A_1^{1/2}. \quad (1.5.14)$$

Используя соотношения (1.5.14), преобразуем уравнение (1.5.10):

$$\ddot{\xi}_2 + \xi = 2A_1^{1/2} f \omega_1 \cos t. \quad (1.5.15)$$

Следует положить $\omega_1 = 0$, так как в противном случае ξ_2 будет содержать секулярный член вида $t \cos t$, тем самым нарушится периодичность.

При начальных условиях (1.5.13) уравнение (1.5.15) имеет решение $\xi_2 = 0$.

Преобразуем далее уравнение (1.5.11):

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_3 + \xi_3 = & 2fA_1^{1/2} [\omega_2 - 0,125A_1^{1/2} (3c_1 - 2af^2) \cos t - \\ & - 0,25A_1 (c_1 - 2a)f^3 \cos 3t]; \quad c_1 = A_2 A_1^{-1}. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Решая уравнение (1.5.16) при начальных условиях (1.5.13) и удовлетворяя при этом условию периодичности, находим

$$\omega_2 = 0,125A_1^{1/2} (3c_1 - 2a)f^2;$$

$$\xi_3 = -0,03125c_1 (\cos t - \cos 3t)f^3 + 0,0625a (\cos t + \cos 3t)f^3.$$

Аналогично получаем, что $\omega_3 = 0$,

$$\omega_4 = 0,039062A_1^{1/2} [\gamma_1 (\gamma_2 - 6c_1) - 2\gamma_2 (\gamma_2 + 8a) + 80c_2] f^4;$$

$$c_2 = A_3 A_1^{-1}; \quad \gamma_1 = c_1 - 2a; \quad \gamma_2 = 3c_1 - 2a.$$

Запишем окончательное выражение для частоты периодических нелинейных колебаний с точностью до членов четвертого порядка по ϵ :

$$\begin{aligned} \omega = & A_1^{1/2} \{ 1 + 0,125[\gamma_2 + 0,03125[\gamma_2 (\gamma_1 - \\ & - 2\gamma_2 - 16a) - 6c_1 \gamma_1 + 80c_2] f^2 \epsilon^2] f^2 \epsilon^2 \}. \end{aligned}$$

1.6. НЕКВАЗИЛИНЕЙНАЯ АСИМПТОТИКА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Выше, как и во многих книгах по асимптотическим методам, разобрана асимптотика уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.6.1)$$

если $f(x) = c_1 x + c_2 x^n$, $n = 3$. В этом случае достаточно просто строится квазилинейная асимптотика. Но при $n \rightarrow \infty$ ситуация резко осложняется, поскольку для описания получающегося виброударного режима требуется, строго говоря, бесконечно большое число квазигармонических приближений. С этой точки зрения интересен подход, описанный в работе [73].

Примем для уравнения (1.6.1) начальные условия в виде

$$x = 0, \quad \dot{x} = v \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.6.2)$$

Пусть $P(\varphi)$ – пилообразная периодическая кусочно-гладкая функция с единичной амплитудой

$$P(\varphi) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\sin \frac{\pi\varphi}{2} \right], \quad P(\varphi + 4) = P(\varphi). \quad (1.6.3)$$

График такой функции состоит из склеенных отрезков прямых, поэтому подсчет ее значений сводится к простым арифметическим операциям.

В рамках теории обобщенных функций справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P'^2(\varphi) &= 1; \quad \infty \\ P''(\varphi) &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\varphi + 1 - 4k) - \delta(\varphi - 1 - 4k)]; \\ -\infty &< \varphi < +\infty. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Решение задачи Коши (1.6.1), (1.6.2) будем искать в виде

$$x = \psi + X(\psi); \quad \psi = AP(\varphi); \quad \varphi = ut/A. \quad (1.6.5)$$

По переменной t период решения T дается выражением $T = 4A/v$, а параметр A и функция X подлежат определению.

Дифференцируя решение (1.6.5) дважды по времени t , с учетом соотношений (1.6.4) получим

$$\ddot{x} = v^2 X'' + \left[\frac{v^2}{A} \right] (1 + X') P''. \quad (1.6.6)$$

Ускорение в рассматриваемой системе должно быть ограниченным, поэтому уничтожим второе слагаемое справа в (1.6.6), положив

$$X' \Big|_{\psi=A} = -1. \quad (1.6.7)$$

В силу периодичности функции $\psi = AP(\varphi)$ и четности $X'(\varphi)$ равенство (1.6.7) выполняется во всех точках $\varphi = \pm 1 + 4k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уравнение (1.6.7) служит для определения параметра A .

Подставив (1.6.5) в исходное уравнение (1.6.1), принимая во внимание (1.6.6), (1.6.7), получим относительно $X(\psi)$ уравнение

$$\sigma^2 X'' = -f(\psi + X) = -f(\psi) - f'(\psi)X - \frac{1}{2} f''(\psi)X^2 - \dots \quad (1.6.8)$$

Из соотношений (1.6.2) следуют соответствующие начальные условия

$$\psi = 0; \quad X = 0; \quad X' = 0. \quad (1.6.9)$$

Решение задачи (1.6.8), (1.6.9) будем искать в виде рядов последовательных приближений

$$\begin{aligned} X &= X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + \dots; \\ A &= A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Подставив первый ряд (1.6.10) в (1.6.8), получим последовательность уравнений

$$\begin{aligned} X^{(1)''} &= -\sigma^{-2} f(\psi); \quad X^{(2)''} = -\sigma^{-2} f'(\psi) X^{(1)}; \\ X^{(3)''} &= -\sigma^{-2} \left[f'(\psi) X^{(2)} + \frac{1}{2} f''(\psi) X^{(1)2} \right], \dots \end{aligned}$$

Отсюда с учетом начальных условий (1.6.9) придем к соотношениям, позволяющим путем вычисления квадратур определить члены первого разложения (1.6.10). Интегрируя по частям слагаемые, содержащие производные функции $f(x)$, получим

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= -\sigma^{-2} \int_0^\psi \int_0^\psi f(\psi) d\psi d\psi; \quad \dots \\ X^{(2)} &= -\sigma^{-2} \left[\int_0^\psi \int_0^\psi f(\psi) X^{(1)} d\psi - \int_0^\psi \int_0^\psi f(\psi) X^{(1)'} d\psi d\psi \right]; \end{aligned}$$

$$X^{(3)} = -v^{-2} \left\{ \frac{1}{2} f(\psi) X^{(1)2} + \int_0^\psi f(\psi) (X^{(2)} - 2X^{(1)} X^{(1)'}) d\psi + \right. \\ \left. + \int_0^\psi \int_0^\psi f(\psi) [(X^{(1)} X^{(1)'})' - X^{(2)'}] d\psi d\psi \right\} \dots \quad (1.6.11)$$

Подставив разложения (1.6.11) в (1.6.7) и разложив производные X^i ($i = 1, 2, \dots$) в степенные ряды в окрестности точки $\psi = A^{(1)}$, будем иметь цепочку уравнений для определения величин A^j ($j = 1, 2, \dots$):

$$X^{(1)'} \Big|_{\psi=A^{(1)}} = -1; \quad A^{(2)} = - \frac{X^{(2)'}}{X^{(1)''}} \Big|_{\psi=A^{(1)}}; \\ A^{(3)} = - \frac{1}{X^{(1)''}} \left[\frac{1}{2} X^{(1)'''} A^{(2)2} + X^{(2)''} A^{(2)} + \right. \\ \left. + X^{(3)'} \right] \Big|_{\psi=A^{(1)}} \dots \quad (1.6.12)$$

Принимая во внимание равенства (1.6.12), первое из уравнений (1.6.11) приведем к виду

$$A^{(1)} \int_0^{\psi} f(\psi) d\psi = v^2. \quad (1.6.13)$$

Таким образом, первый член второго разложения (1.6.12) равен амплитуде колебаний, которая будет иметь место, если заданную начальную энергию удвоить.

Отметим, что выписанные в (1.6.11) соотношения не содержат производных функций $f(\psi)$, а построение итерационной процедуры по более простой схеме позволяет вообще избежать дифференцирования этой функции и, тем самым, снять предъявленное к ней выше требование аналитичности.

Положим, например,

$$X^{(0)} \equiv 0, \quad X^i = -v^{-2} \int_0^\psi \int_0^\psi f(\psi + X^{i-1}) d\psi d\psi, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда приближенным решением уравнения (1.6.1) будет функция $X^{(N)}$ с достаточно большим номером N . Относительно $X^{(1)}$ имеем прежнее выражение (1.6.11), однако в высших приближениях вычисление квадратур оказывается гораздо более сложным, чем в (1.6.11), а результат — менее наглядным.

Для иллюстрации особенностей описанного подхода рассмотрим пример.

Пусть $f(x) \equiv x^n$, n — нечетное число.

Принципиально сложны с точки зрения квазилинейной асимптотики оказывается предельный случай $n \rightarrow \infty$.

В то же время этот случай весьма прост, поскольку в промежутках между ударами имеет место равномерное движение по инерции, и в более широком классе функций решение задачи будет таким:

$$x = P(\varphi); \quad \varphi = \omega t. \quad (1.6.14)$$

Отметим также, что если соотношения (1.6.14) рассмотреть как замену переменной в (1.6.1), то в уравнении относительно новой переменной φ пропадут сингулярные функции, соответствующие ударным взаимодействиям, и оно приобретет вид $\ddot{\varphi} = 0$.

Приведенные выше соотношения позволяют получить приближенное решение при больших конечных значениях n . Выполнив интегрирование в (1.6.11), найдем решение исходной задачи в виде степенного ряда

$$x = \psi - \frac{\psi^{n+2}}{v^2(n+1)(n+2)} + \frac{n\psi^{2n+3}}{2v^4(n+1)^2(n+2)(n+3)} - \\ - \frac{n}{6v^6(n+1)^3(n+2)(3n+4)} \left[\frac{n-1}{n+2} + \frac{n}{2n+3} \right] \psi^{3n+4} + \dots; \quad (1.6.15)$$

$$\psi = AP(\omega t/A).$$

Относительно параметра A из (1.6.7) имеем

$$A = A^{(1)} + \frac{n}{2v^2(n+1)^2(n+2)} A^{(1)^{n+2}} + \left[1 - \frac{n-1}{3n} - \frac{n+2}{6n+9} - \frac{n}{4n+4} \right] \frac{n^2 A^{(1)^{2n+3}}}{2v^4(n+1)^3(n+2)^2} + \dots, \quad (1.6.16)$$

$$A^{(1)} = [(n+1)v^2]^{1/(n+1)}.$$

Ряды (1.6.15), (1.6.16) – асимптотические: при $n \rightarrow \infty$ получаем, как и должно быть, соотношения

$$A \rightarrow 1; \quad X = x - \psi \rightarrow 0; \quad x \rightarrow P \text{ (} \mathcal{O} \text{)}.$$

С целью установления сходимости проанализируем самый неблагоприятный случай $n = 1$ (гармонический осциллятор). Выражения (1.6.15), (1.6.16) при $n = 1$ приобретают вид

$$x = v \left[\frac{\psi}{v} - \frac{1}{31} \frac{\psi^3}{v^3} + \frac{1}{51} \frac{\psi^5}{v^5} - \frac{1}{71} \frac{\psi^7}{v^7} + \dots \right] = v \sin \frac{\psi}{v};$$

$$A = \sqrt{2} v \left[1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{360} + \dots \right] = \frac{\pi}{2} v$$

и восстанавливают таким образом решение линейного уравнения, представленное в форме

$$x = v \sin \tau, \quad \tau = \frac{1}{2} \pi P(2t/\pi).$$

В отличие от обычной формы записи решения ($x = v \sin t$) аппроксимация функции $\sin \tau$ отрезком степенного ряда не лишает ее свойства периодичности, перенесенного на "осциллирующее время" τ , $|\tau| \leq \leq \pi/2$, зато любой конечный отрезок ряда лишает аппроксимируемую функцию свойства гладкости. Изломы соответствующей кривой сглаживаются при добавлении новых членов ряда и исчезают только при бесконечно большом числе слагаемых. В точках изломов функция скорости имеет разрывы первого рода, соответствующие некоторым фиктивным ударам в системе. Однако при больших значениях n аппроксимация быстрых скачков скорости разрывами, а импульсов силы – мгновенными импульсами представляется естественной. Что касается линейной системы, то разложение синуса по "пиле" в степенной ряд, по-видимому, неадекватно в такой же мере, как разложение "пилы" по синусам (в ряд Фурье) в случае виброударной системы ($n \rightarrow \infty$).

ГЛАВА 2 СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Теперь будем рассматривать задачи, в которых малый параметр стоит при старших производных. В этом случае при $\epsilon = 0$ происходит принципиальное изменение системы, так как понижается порядок исходного дифференциального уравнения. Подобная асимптотика называется сингулярной.

2.1. МЕТОД ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕРА – ВИШКА – ЛЮСТЕРНИКА [33...37]

Исследуем сначала простейшую задачу

$$\epsilon z' + z = 1; \quad z(0) = 0, \quad (2.1.1)$$

точное решение которой имеет вид

$$z = 1 - \exp(-\epsilon^{-1}x).$$

Решение вырожденного ($\epsilon = 0$) уравнения ($z_0 = 1$) не удовлетворяет заданному граничному условию. Ситуация, характерная для задач сингулярного возмущения, наглядно проиллюстрирована на рис.2.1, где приведены графики точного и вырожденного решения уравнения (2.1.1) (сплошная и штриховая линии соответственно). Существенная погрешность наблюдается лишь в окрестности точки $x = 0$. Причем область, называемая пограничным слоем², будет тем уже, чем меньше ϵ . Ясно, что получить равномерно пригодное решение сингулярно возмущенной задачи, используя лишь разложение

$$\tilde{z} = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots, \quad (2.1.2)$$

невозможно. В этом случае необходимо дорабатывать решение типа погранслоя, которое, как следует из приведенного примера, должно быть быстро переменным по соответствующей координате.

Особенности асимптотического исследования в сингулярном случае изучим на примере уравнения

$$\epsilon z'' + z' + z = 0 \quad (2.1.3)$$

² Далее используется термин "погранслоя".

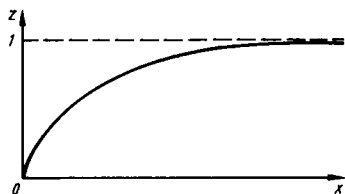


Рис. 2.1. Типичное поведение решения при наличии пограничного слоя

с начальными условиями

$$z(0) = 1; \quad z'(0) = 0.$$

(2.1.4)

Решение для области, удаленной от точки $t = 0$, ищем в виде ряда (2.1.2). Подставляя это решение в уравнение (2.1.3) и производя расщепление по ϵ , получаем

$$z'_0 + z_0 = 0; \quad z'_1 + z_1 = -z'_0; \quad \dots \quad (2.1.5)$$

Очевидно, что за счет каждого из уравнений (2.1.5) можно удовлетворить лишь одному из начальных условий (2.1.4), поэтому для компенсации невязки в начальных условиях необходимо достраивать дополнительное решение типа погранслоя \bar{z} . Это решение быстро изменяется по x , однако скорость изменения пока неизвестна.

Введем параметр асимптотического интегрирования α при помощи следующего соотношения: $\bar{z}' = \epsilon^\alpha x$. В зависимости от величины α возникают три случая с различными уравнениями, которым должны удовлетворять члены соответствующих разложений: $\alpha > 1$, $\epsilon/\epsilon^\alpha \rightarrow \infty$ – предельное уравнение $z'' = 0$ пригодно только для очень малых x ; $\alpha = 1$; $\epsilon/\epsilon^\alpha = 1$ – предельное уравнение $\bar{z}'' + \bar{z}' = 0$ позволяет удовлетворить начальным условиям; $\alpha < 1$, $\epsilon/\epsilon^\alpha \rightarrow 0$ – предельное уравнение $z' = 0$.

Поскольку второй случай объединяет и первый, и третий, можно в дальнейшем ограничиться им, полагая $\alpha = 1$. Решение типа погранслоя представляем в виде

$$\bar{z}(x, \epsilon) = \epsilon^\rho [z_0(x) + \epsilon z_1(x) + \dots].$$

Параметр ρ остается пока неопределенным, поскольку порядок малости решения типа погранслоя еще не известен. Он зависит от порядка малости вырожденного решения, причем связь между z и \bar{z} осуществляется через граничные условия.

Подставляя разложение \bar{z} в исходное уравнение (2.1.3) и производя расщепление по ϵ , получаем

$$\text{для } \epsilon^p \bar{z}'_0 + \bar{z}'_0 = 0; \quad (2.1.6)$$

$$\text{для } \epsilon^{p+1} \bar{z}'_1 + \bar{z}'_1 = -\bar{z}'_0;$$

.....

Формально каждое из уравнений (2.1.6) имеет второй порядок.

Однако, поскольку мы ищем быстро изменяющееся решение ($\bar{z}' \sim \epsilon^{-1} \bar{z}$), эти уравнения нужно заменить следующими:

$$\bar{z}'_0 + \bar{z}'_0 = 0; \quad (2.1.7)$$

$$\bar{z}'_1 + \bar{z}'_1 = - \int_0^x \bar{z}'_0 dx; \dots$$

Уравнения (2.1.7) будем называть уравнениями погранслоя.

Сформулируем теперь граничные условия для уравнений (2.1.5), (2.1.7). Представим решение исходной задачи (2.1.3) в виде

$$z = \bar{z} + \tilde{z} = (z_0 + \epsilon z_1 + \dots) + \epsilon^p (z_0 + \epsilon z_1 + \dots).$$

Подставляя это выражение в начальные условия (2.1.4), получаем

$$(z_0 + \epsilon z_1 + \dots) + \epsilon^p (\bar{z}_0 + \epsilon \bar{z}_1 + \dots) = 1;$$

$$(z'_0 + \epsilon z'_1 + \dots) + \epsilon^p (\bar{z}'_0 + \epsilon \bar{z}'_1 + \dots) = 0 \text{ при } x = 0. \quad (2.1.8)$$

Поскольку $\bar{z}' \sim \epsilon^{-1} \bar{z}$, второй член в граничном условии для \bar{z} имеет порядок ϵ^{p-1} . Подберем теперь непротиворечивое значение p , т.е. такое, при котором краевые задачи для уравнений (2.1.5), (2.1.7) имеют решение. Это означает, что для каждого уравнения из указанных рекуррентных последовательностей должно быть поставлено только одно граничное условие. Если $p > 1$, то оба граничных условия отходят к уравнениям (2.1.5), если $p < 1$, — к уравнениям (2.1.7). Отсюда единственное непротиворечивое значение $p = 1$. Таким образом оценивается порядок решения типа погранслоя через граничные условия и решение вырожденного уравнения. Принимая $p = 1$, группируя в условиях (2.1.8) члены при одинаковых степенях ϵ и приравнявая их нулю, а также учитывая, что из уравнений (2.1.7) следует $\bar{z}'_0 = -\bar{z}'_0$, получаем

$$z_0 = 1; \quad z_1 = -\bar{z}_0; \quad \dots; \quad (2.1.9)$$

$$\bar{z}'_0 = z_0; \quad \bar{z}'_1 = z'_1; \quad \dots \quad \text{при } x = 0. \quad (2.1.10)$$

Граничные условия (2.1.9), (2.1.10) задаются для уравнений (2.1.5), (2.1.7) соответственно.

Пограничный слой часто, даже в сложных задачах, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Причина этого заключается, в частности, в возможности "замораживать" переменные коэффициенты в уравнениях погранслоя. Суть метода "замораживания" поясним на примере маятника с малой переменной массой:

$$\epsilon \varphi(t) \ddot{x} + \dot{x} + x = 0; \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.1.11)$$

где

$$0 < \varphi(t) < 1; \quad \varphi(t) \sim \dot{\varphi}(t).$$

Уравнение основного состояния имеет вид

$$\dot{x} + x = 0. \quad (2.1.12)$$

Уравнение погранслоя должно быть записано в виде

$$\epsilon \varphi(t) \ddot{x}_n + \dot{x}_n = 0, \quad (2.1.13)$$

причем медленные решения уравнения (2.1.13) следует отбросить. Уравнение (2.1.13) содержит переменный по t коэффициент. Однако на быстро затухающем решении типа погранслоя его можно считать постоянным (рис.2.2), т.е. положить в первом приближении $\varphi(t) = \varphi(0)$. Тогда для определения погранслоя приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\epsilon \varphi(0) \ddot{x}_n + \dot{x}_n = 0. \quad (2.1.14)$$

Отметим также следующий момент. Составляющие типа погранслоя имеют в данном случае, как видно из приведенного решения, порядок ϵ по сравнению с основным решением. Поэтому возникает вопрос о правомерности и целесообразности их удержания в нулевом приближении, когда не учитываются имеющие такой же порядок по сравнению с ним составляющие первого приближения основного состояния. Однако, хотя в нулевом приближении погранслоя действительно можно не учитывать при определении перемещения, так как $x = x_0 + o(\epsilon)$, его

Рис. 2.2. Сравнение решения типа пограничного слоя и основного состояния



нужно обязательно учесть при определении скорости x , поскольку составляющая пограничного слоя увеличивается в ϵ^{-1} раз при дифференцировании и, следовательно,

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{x}_n + o(\epsilon).$$

Поскольку в теории оболочек и пластин производные определяют напряжения, без учета составляющих типа погранслоя невозможно правильное определение полной картины напряженно-деформированного состояния.

Важным условием применимости метода погранслоя является требование регулярности вырождения, которое означает, что число затухающих внутри области решений равно числу граничных условий, выпадающих при вырождении. Если погранслоем описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то условие регулярности вырождения означает, что корни его характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части [35].

Продемонстрируем теперь применение метода погранслоя к решению нелинейной задачи с малым параметром при старшей производной. Возьмем в качестве модельного приведенное уравнение колебаний маятника Ван дер Поля с малой массой:

$$\epsilon \ddot{x} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0; \quad (2.1.15)$$

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad a = \text{const}. \quad (2.1.16)$$

При этом считается, что $a \sim 1$, но $a < 1$, так что коэффициент при втором члене уравнения (2.1.15) не мал. При $\epsilon = 0$

$$\left[1 - x_0^2\right] \dot{x}_0 = -x_0; \quad \ln|x_0| = 0,5x_0^2 + t + c.$$

Построение погранслоя теперь существенно усложняется и неотделимо от анализа граничных условий. Кроме того, в нелинейных задачах нужно с осторожностью подходить к самому понятию изменяемости, введенному ранее. Дело в том, что это понятие существенно ориентируется на экспоненциальный погранслой, характерный для линейных задач.

В нелинейных задачах, вобщем говоря, возможны погранслои другого типа, например степенной, поэтому каждая нелинейная задача требует внимательного анализа. В данном случае, ориентируясь на решение линеаризованной задачи, естественно принять следующую изменчивость решения типа погранслоя:

$$\frac{dx_n}{dt} - \epsilon^{-1} x_n. \quad (2.1.17)$$

Тогда $x_n = \epsilon x_0$, расчлененные начальные условия будут

$$x_0(0) = a; \quad \dot{x}_n(0) = -x_0(0). \quad (2.1.18)$$

Записав теперь решение исходной задачи в виде $x = x_0 + x_n$, подставим это выражение в исходное уравнение (2.1.15) и учтем соотношение (2.1.17), а также малость x_n по сравнению с x_0 ($x_n \sim \epsilon \ddot{x}_0$). Тогда относительно x_n имеем линейное уравнение

$$\epsilon x_n + (1 - x_0^2) \dot{x}_n = 0. \quad (2.1.19)$$

Медленнопеременный коэффициент x_0^2 должен быть "заморожен" на границе, и окончательно приходим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\dot{\epsilon x_n} + (1 - a^2) x_n = 0.$$

Общее решение его

$$x_n = C_1 \exp[- (1 - a^2) \epsilon^{-1}].$$

Из расчлененных граничных условий определяем постоянные C и C_1 :

$$C = \ln |a| + \frac{a^2}{2}; \quad C_1 = - \frac{\epsilon a}{(1 - a^2)^2}.$$

Понижение порядка исходного уравнения может привести не только к невозможности удовлетворить заданным краевым (начальным) условиям, но и к появлению разрывов решений (или их производных) внутри области. В этом случае появляются решения, локализованные в окрестностях точек или (в случае уравнений в частных производных) линий, носящие название внутренних пограничных слоев.

Отметим, что выделение состояния типа пограничного слоя существ-

венно облегчает численное решение. Возможно, например, создание комбинированного численно-аналитического алгоритма, когда краевые эффекты строятся аналитически, а медленная часть решения – при помощи того или иного численного подхода. Даже если оба состояния будут определяться численно, становится ясно, в каких промежутках следует брать меньший шаг.

2.2. МЕТОД ДВУХ МАСШТАБОВ

Еще один подход к исследованию сингулярно возмущенных краевых задач – метод двух (или нескольких) масштабов. Он нашел широкое применение в теории осреднения, о чем будет сказано далее.

Идея метода двух масштабов физически очень проста и наглядна. Поясним ее на примере колебаний маятника с малой массой:

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0; \quad (2.2.1)$$

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad a \equiv \text{const.} \quad (2.2.2)$$

Вместо одной исходной независимой переменной t введем две – “медленную”, совпадающую с исходной ($t_1 = t$), и “быструю” $\tau = \epsilon^{-1}t$. Первая используется при описании основного состояния, вторая – состояния типа погранслоя.

Исходную производную (по правилу полной производной) запишем теперь так:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.2.3)$$

Зависимая переменная x теперь функция двух аргументов: t_1 и τ .

Подставляя выражение (2.2.3) в уравнение (2.2.1) и краевые условия (2.2.2), имеем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x}{\partial \tau} + \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + 1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t_1} \right] x + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} = 0; \quad (2.2.4)$$

$$x(0, 0) = a; \quad \left[\frac{\partial x}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial x}{\partial t_1} \right] \Big|_{\substack{\tau=0, \\ t_1=0}} = 0. \quad (2.2.5)$$

Вместо сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения мы формально приходим к дифференциальному уравнению в

частных производных, но уже не содержащему малого параметра при старших производных. Теперь решение можно разыскивать в виде одного асимптотического ряда

$$x = x_0(t_1, \tau) + \epsilon x_1(t_1, \tau) + \dots \quad (2.2.6)$$

Подставляя выражение (2.2.6) в уравнение (2.2.4) и начальные условия (2.2.5), получаем

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau} = 0; \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = - \frac{\partial x_0}{\partial t_1} - x_0 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t_1}; \quad (2.2.8)$$

$$\dots \dots \dots \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial x_0(0, 0)}{\partial \tau} = 0; \quad (2.2.10)$$

$$x_1(0, 0) = 0; \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial x_1(0, 0)}{\partial \tau} = \frac{\partial x_0(0, 0)}{\partial t_1} \quad (2.2.12)$$

.....

Общее решение уравнения (2.2.7) имеет вид

$$x_0 = C(t_1) + C_1(t_1)e^{-\tau} \quad (2.2.13)$$

Из начальных условий (2.2.9), (2.2.10) имеем

$$C_1 = 0; \quad C(0) = a. \quad (2.2.14)$$

Функция $C(t)$ пока остается неопределенной. Для ее нахождения рассмотрим уравнение (2.2.8):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t_1} = \varphi(t_1) = - \frac{\partial C}{\partial t_1} - C. \quad (2.2.15)$$

Если правая часть $\varphi(t_1)$ не обращается в нуль, x_1 содержит секу-

лярный член $\varphi(t_1)\tau$. Ставя, как и в методе Пуанкаре – Лайтхилла, условие отсутствия секулярностей, приходим к уравнению основного состояния

$$\partial C / \partial t_1 + C = 0.$$

Отсюда с учетом условия (2.2.14) имеем $C = a e^{-t_1}$. Общее решение уравнения (2.2.8) теперь

$$x_1 = C'(t_1) + C_1'(t_1)e^{-t_1}.$$

Из начальных условий (2.2.11) получаем

$$C_1' = -C'(0).$$

Функция $C'(t_1)$ должна определяться из условия отсутствия секулярностей в уравнениях второго приближения. Функцию же $C_1'(t_1)$ можно "заморозить" при $t_1 = 0$.

Существенным преимуществом метода двух масштабов является возможность применения его в случаях нерегулярного вырождения. Рассмотрим, например, уравнение

$$\epsilon^2 y'' + y' + y = 0. \quad (2.2.16)$$

с начальными условиями

$$y(0) = a; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 0; \quad a = \text{const}. \quad (2.2.17)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае дополнительное состояние не удовлетворяет условию регулярности вырождения. Поэтому решение уравнения (2.2.16) нельзя разделить на основное состояние и пограничный слой. В то же время метод двух масштабов работает и в этом случае. Действительно, выбрав медленную и быструю переменные в виде $x_1 = x$ и $\xi = \epsilon^{-1}x$ и представляя исходную функцию рядом $y = y_0(x_1, \xi) + \epsilon y_1(x_1, \xi) + \dots$, получаем следующие рекуррентные последовательности уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^3} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0; \quad (2.2.18)$$

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = - \frac{\partial y_0}{\partial x_1} - y_0 - 3 \frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^2 \partial x_1}; \quad (2.2.19)$$

$$y_0(0, 0) = a; \quad \frac{\partial y_0(0, 0)}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial^2 y_0(0, 0)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (2.2.20)$$

$$y_1(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial y_1(0, 0)}{\partial \xi} = \frac{\partial y_0(0, 0)}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial^2 y_1(0, 0)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.2.21)$$

Как и ранее, из первого уравнения (2.2.18) с учетом начальных условий (2.2.20) имеем

$$y = C(x_1); \quad C(0) = a.$$

Из условий отсутствия секулярных членов уравнения (2.2.19) находим

$$C(x_1) = a^0 e^{-x_1}.$$

Наконец, быстрая часть решения уравнения (2.2.19) с учетом начальных условий (2.2.21) примет вид

$$y_1 = -a \sin \tau.$$

Таким образом, если метод погранслоя хорошо работает в случаях, когда некоторая часть решения локализуется в окрестностях точек или линий, то метод двух масштабов позволяет разделять решения с существенно различной изменчивостью и в тех случаях, когда локализации нет. Естественным обобщением метода двух масштабов является метод нескольких масштабов. Кроме того, "быструю" переменную выгодно брать в более общем виде, а именно в виде функции от старой переменной и малого параметра (например, $\tau = \varphi(t, \epsilon)$). Примеры выбора таких функций (называемых регуляризирующими), содержащих в себе всю нерегулярную зависимость от ϵ , имеются в [51].

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В разобранных ранее примерах было легко подобрать преобразование растяжения независимой переменной, приводящее к уравнению погранислюя. В общем же случае это не просто даже для одномерной задачи. Для выяснения характера асимптотики решения может оказаться полезным метод диаграммы Ньютона. Напомним его суть, следуя [77].

Пусть

$$f(y, \epsilon) = \sum_{s=0}^n f_s(\epsilon) \epsilon^s y, \quad (2.3.1)$$

причем коэффициенты $f_s(\epsilon)$ представим в окрестности точки $\epsilon = 0$ в виде сходящихся рядов

$$f_s(\epsilon) = \epsilon \rho^s \sum_{r=0}^{\infty} f_{rs} \epsilon^{r/\rho}, \quad (2.3.2)$$

где ρ_s — рациональные числа, а ρ — общее для всех значений f_s натуральное число.

Считаем, что $f_{00} \neq 0$, т.е. $f(0, \epsilon) \neq 0$. Будем разыскивать решения $y = y(\epsilon)$ уравнения

$$f(y, \epsilon) = 0, \quad (2.3.3)$$

представленные в виде

$$y = y_k \epsilon^k + o(\epsilon^k); \quad y_k \neq 0. \quad (2.3.4)$$

Чтобы найти возможные значения показателя k и коэффициента y_k , нужно подставить (2.3.4) в уравнение (2.3.3) и приравнять нулю главный член, т.е. коэффициент при низшей степени ϵ . Однако пока показатель остается неизвестным, нельзя сказать, какие из членов этой подстановки будут наименьшими. Ясно только, что члены наименьшего порядка содержатся среди следующих:

$$f_{00} \epsilon^{\rho_0}, \dots, f_{0k} y_k^l \epsilon^{\rho_l \cdot l \cdot k}, \dots, f_{0n} y_n^k \epsilon^n, \quad (2.3.5)$$

где k пробегает те из значений $1, 2, \dots$, для которых $f_{0l}(\epsilon) \neq 0$. Так как $f_{00} \neq 0$ и $f_{0n} \neq 0$, то отличны от нуля, по меньшей мере, два члена в последовательности (2.3.5). Для уничтожения членов наименьшего порядка необходимо подобрать показатель k так, чтобы хотя бы два из показателей $\rho_0, \rho_l + l_k, \rho_n + n_k$ совпали, а остальные были не меньше их. Это соображение позволяет отыскать все возможные значения k и соответствующие им значения коэффициента y_k . Для нахождения значений k используется диаграмма Ньютона (рис. 2.3). Нанесем в декартовой прямоугольной системе координат точки $(0, \rho_0), (l, \rho_l), (n, \rho_n)$, где l пробегает те же значения, что и в последовательности (2.3.5). Проведем из точки $(0, \rho_0)$ прямую так, чтобы она совпала с осью ординат, и станем ее вращать вокруг точки $(0, \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока на нее впервые не попадет другая из нанесенных точек, например (m, ρ_m) . Тангенс угла между этим положением прямой L и отрицательным направлением оси абсцисс равен одному из возможных значений k , т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = (\rho_0 - \rho_m) / m = k.$$

Если под таким углом провести прямые через точки (s, ρ_s) , отличные от попавших на L , то эти прямые будут лежать выше L , а потому $\rho_s + s_k > \rho_m + m_k$.

На прямой L , соединяющей точки $(0, \rho_0)$ и (m, ρ_m) , могут оказаться и другие точки (l, ρ_l) . Будем теперь вращать прямую L в том же направлении вокруг той оказавшейся на прямой L точки (m, ρ_m) , у

которой абсцисса наибольшая, пока на L не попадет другая из нанесенных точек, например (p, ρ_p) . Тангенс угла между новым направлением прямой и отрицательным направлением оси абсцисс определит другое возможное значение k :

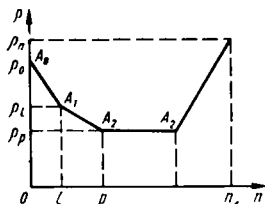


Рис. 2.3. Диаграмма Ньютона

$$\operatorname{tg} \alpha = (\rho_m - \rho_l) / (\rho_p - m) = \epsilon,$$

так как прямые, проходящие через другие точки (s, ρ_s) параллельно этому новому направлению L , будут лежать выше, а значит,

$$\rho_s + k_s > \rho_m + k_m = \rho_p + k_p.$$

Продолжая этот процесс, получим все возможные значения k . Ломаная, соединяющая точки поворота прямой L , называется диаграммой Ньютона (см. рис.2.3).

Диаграмма, построенная для определения первого показателя k , имеет общую длину звеньев, равную n . Она разбивается в общем случае на три участка: убывающий, постоянный и возрастающий. Убывающий участок определяет положительные значения показателей k и, значит, приводит к определению решений уравнения (2.2.3) таких, что $y(0) = 0$.

Постоянный участок диаграммы соответствует значению $k = 0$ и определяет согласно (2.3.3) $y = y(\epsilon)$ вида $y(\epsilon) = y_0 + O(\epsilon)$ при $\epsilon = 0$, где $y_0 = 0$. Наконец, возрастающий участок диаграммы Ньютона приводит к определению "больших решений" уравнения (2.3.3), стремящихся к бесконечности при $\epsilon \rightarrow 0$, так как в этом случае значения показателя k отрицательны.

При определении растягивающих и сжимающих преобразований для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений по абсциссе в диаграмме Ньютона откладываются порядки производных n , по оси ординат — порядок соответствующего члена по отношению к $\epsilon(\rho)$.

Постоянные участки диаграммы Ньютона соответствуют основному состоянию, возрастающие — пограничному слою, убывающие — малым корням (наличие их свидетельствует о том, что вырожденная задача лежит на спектре). Например, для уравнения (2.1.3) диаграмма Ньютона позволяет сразу определить, что в погранслое нужно выполнить растяжку в ϵ^{-1} раз (рис.2.4).

Перейдем к уравнениям в частных производных. Методику определения параметров асимптотического интегрирования, позволяющую проводить полную классификацию всех возможных вариантов предельных уравнений, проиллюстрируем на следующем модельном уравнении с малым параметром при старшей производной:

$$\epsilon(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + \omega = 0. \quad (2.3.6)$$

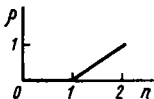


Рис. 2.4. Диаграмма Ньютона для уравнения (2.1.3)

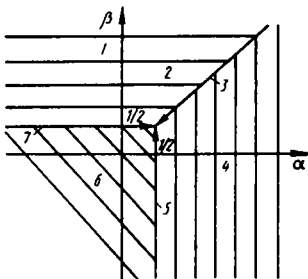


Рис. 2.5. Разбиение плоскости параметров изменчивости α , β для модельной задачи (2.3.6) (мембрана на упругом основании большой жесткости)

Решение w может иметь различные изменчивости по координатам x и y . Чтобы учесть этот факт, введем параметры асимптотического интегрирования α и β при помощи следующих соотношений:

$$w_x \sim \epsilon^{-\alpha} w; \quad w_y \sim \epsilon^{-\beta} w; \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty. \quad (2.3.7)$$

Рассмотрим все возможные значения α и β . Это позволит выявить различные упрощенные уравнения, которые, взаимно дополняя одно другое, позволяют в своей совокупности приближенно исследовать круг задач, описываемый исходным уравнением (2.3.6).

Выпишем показатели степеней ϵ всех членов уравнения (2.3.6): $1 - 2\alpha$; $1 - 2\beta$; 0 . Рассмотрим плоскость $\alpha\beta$ (рис.2.5) и построим на ней зоны, соответствующие наименьшим значениям показателей.

Показатель $1 - 2\alpha$ будет наименьшим при выборе значений α и β в зоне 4. Показатель $1 - 2\beta$ — наименьший в зоне 1 и показатель $1 - 2\alpha$ — в зоне 6 (области 1, 4, 6 рассматриваются как открытые, т.е. граничные прямые в них не включаются). При выборе параметров $\alpha\beta$ в зонах 1, 4, 6 предельные уравнения принимают соответственно вид

$$w_{yy} = 0; \quad w_{xx} = 0; \quad w = 0. \quad (2.3.8)$$

Это максимально простые в данном случае уравнения, содержащие всего по одному члену. На граничных прямых (точка $(1/2, 1/2)$ исключается из рассмотрения) лежат те значения α и β , при которых предельные уравнения содержат уже по два члена. Нетрудно убедиться, что для областей 3, 5, 7 они таковы:

$$w_{xx} + w_{yy} = 0; \quad \epsilon w_{xx} + w = 0; \quad \epsilon w_{yy} + w = 0. \quad (2.3.9)$$

Наконец, точка пересечения граничных прямых (зона 2) дает значения α и β , при которых в уравнении (2.3.6) остаются все члены ($\alpha = \beta = 1/2$). Поскольку теперь на плоскости $\alpha\beta$ не осталось "белых пятен", других вариантов предельных систем, кроме (2.3.5), (2.3.8), (2.3.9), нет.

Описанный графический способ позволяет достаточно просто решить задачу подбора двух параметров асимптотического интегрирования. Процедура поиска большего числа параметров асимптотического интегрирования может быть автоматизирована при помощи ЭВМ [83].

2.4. ИЗГИБ РАСТЯНУТОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее напряженное состояние предварительно растянутой пластинки:

$$\epsilon \nabla^4 w + \nabla^2 w = q(x, y), \quad (2.4.1)$$

где

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Граничные условия:

$$\text{при } x = 0, a \quad w = \partial w / \partial y = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b \quad w = \partial w / \partial x = 0.$$

Для поиска различных предельных систем введем параметры α и β , характеризующие изменимость искомой функции w по x и y соответственно, при помощи формул $w_x = \epsilon^\alpha w$, $w_y = \epsilon^\beta w$.

Рассмотрим сначала уравнение (2.4.1) при $q = 0$ и оценим порядки всех входящих в него членов:

$$\epsilon^{1+4\alpha}, \quad \epsilon^{1+2\alpha+2\beta}, \quad \epsilon^{1+\beta}, \quad \epsilon^{2\alpha}, \quad \epsilon^{2\beta}. \quad (2.4.2)$$

Алгоритм поиска предельных систем и соответствующих показателей изменчивости описан ранее. Его можно упростить следующим образом: оставляя в уравнении (2.4.2) соответственно по одному члену, затем по два и т.д., подбирать значения показателей α и β . Если таковых не существует, предельная система невозможна. При этом некоторые случаи сразу можно отбрасывать (например, в последовательности (2.4.2) не может оказаться самым большим второй член; невозможно,

чтобы остались первый и третий член без второго и т.д.). В результате вся плоскость параметров a, β должна разбиться на некоторые классы эквивалентности (пары значений параметров (a_1, β_1) и (a_2, β_2) будем называть эквивалентными, если они приводят к одинаковым предельным системам). Этот алгоритм можно записать в виде систем неравенств. Так, условия существования предельной системы, содержащей только первый член $\epsilon \omega_{xxxx}$, таковы:

$$1 + 4a > 1 + 2a + 2\beta, \quad 1 + 4a > 1 + 4\beta,$$

$$1 + 4a > 2a, \quad 1 + 4a > 2\beta.$$

Условия существования предельной системы

$$\epsilon \omega_{xxxx} + \omega_{yy} = 0$$

имеют вид

$$1 + 4\beta = 2a, \quad 2a > 2\beta, \quad 2a > 1 + 2a + 2\beta$$

и так далее.

В данном случае можно воспользоваться симметрией системы относительно замены x на y , что существенно упростит выкладки. Итак, выпишем возможные предельные системы:

$$1) \epsilon \omega_{xxxx} = 0; \quad 2) \epsilon \omega_{yyyy} = 0;$$

$$3) \omega_{xx} = 0; \quad 4) \omega_{yy} = 0; \quad 5) \epsilon \nabla^4 \omega = 0;$$

$$6) \nabla^2 \omega = 0; \quad 7) \epsilon \omega_{xxxx} + \omega_{xx} = 0;$$

$$8) \epsilon \omega_{yyyy} + \omega_{yy} = 0; \quad 9) \epsilon \nabla^4 \omega + \nabla^2 \omega = 0.$$

При этом плоскость a, β разбивается на классы эквивалентности (рис.2.6), среди которых одна точка $(-1/2, -1/2)$, четыре луча и четыре четвертьплоскости. Других предельных систем быть не может.

Найденные предельные системы можно расположить в иерархической последовательности в соответствии со степенью упрощения:

$$\epsilon \nabla^4 \omega + \nabla^2 \omega = 0; \tag{2.4.3}$$

$$\nabla^2 \omega = 0; \quad \epsilon \nabla^4 \omega = 0; \tag{2.4.4}$$

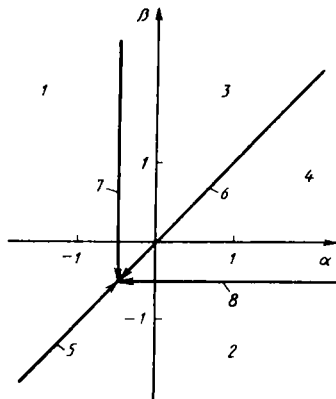
Рис. 2.6. Разбиение области параметров изменчивости α , β для задачи об изгибе растянутой пластинки

$$\epsilon \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad (2.4.5)$$

$$\epsilon \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad \epsilon \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = 0; \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0; \quad \epsilon \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0.$$



Опишем схему применения найденных приближенных соотношений. Пусть изменчивость правой части неоднородного уравнения мала:

$$\frac{\partial q}{\partial x} \sim \epsilon^0 q; \quad \frac{\partial q}{\partial y} \sim \epsilon^0 q.$$

Тогда в первом приближении следует использовать предельную систему

$$\nabla^2 \omega_0 = q. \quad (2.4.7)$$

Как и ранее, нужно произвести расчленение граничных условий. Нетрудно показать (предоставляем это читателю), что для уравнения (2.4.7) должны быть поставлены граничные условия

$$\text{при } x = 0, \quad a \quad \omega_0 = 0;$$

$$\text{при } y = 0, \quad b \quad \omega_0 = 0.$$

Невязки в остальных граничных условиях снимаются решениями типа пограничных слоев. На краях $y = 0$, b погранслоем описывается уравнением

$$\epsilon \frac{\partial^2 \omega_{n1}}{\partial x^2} + \omega_{n1} = 0 \quad (2.4.8)$$

с граничными условиями $\omega_{n1x} = -\omega_{0x}$ при $x = 0$, a .

На краях $y = 0, b$ погранслои описывается уравнением

$$\epsilon \frac{\partial^2 \omega_{n2}}{\partial y^2} + \omega_{n2} = 0, \quad (2.4.9)$$

а граничные условия при $y = 0, b$ таковы:

$$\omega_{n2y} = -\omega_{0y}$$

Построенные погранслои снимают невязки всюду, за исключением узких (протяженностью около ϵ) зон в углах области. Здесь возникают так называемые угловые погранслои.

2.5. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Для дифференциальных уравнений теории оболочек характерно наличие малого параметра при старшей производной. Этим и объясняется, в частности, свойство оболочки локализовать изгиб в малой окрестности зоны действия возмущения.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки (рис.2.7).

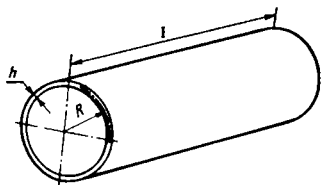
Исходное разрешающее уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla^8 \Phi + \epsilon^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (8 - 2\nu^2) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + 8 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \\ + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + 4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = q; \quad \epsilon^2 = \frac{h^2}{12R^2}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Выражения перемещений u, v и w через Φ таковы:

$$\begin{aligned} u = \epsilon^2 (1 - \nu^2) (1 + \nu)^2 l^{-3} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + \\ + \epsilon^2 (1 + \nu)^2 l^{-1} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^4} + \nu l^{-3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \\ + [2\nu(1 - \nu) - 1] l^{-1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2}; \end{aligned}$$

Рис. 2.7. Цилиндрическая оболочка



$$\begin{aligned}
 v = - \left\{ 2(1 + \nu)\epsilon^2 l^{-4} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + [2(1 + \nu) - (1 - \nu^2)^2] \epsilon^2 l^{-2} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + (1 - \nu^2) \xi^2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} - \right. \\
 \left. - (\nu + 2) l^{-2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \right\}; \quad (2.5.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega = l^{-4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + 2[\epsilon^2(1 - \nu^2)(1 + \nu) + 1] l^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\
 + [\epsilon^2(1 - \nu^2) + 1] l^{-4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4};
 \end{aligned}$$

$$\epsilon = x/L; \quad \eta = y/R.$$

Пусть при $\xi = 0$, l ($l = L/R$) заданы граничные условия

$$\omega = \omega_0; \quad T_1 = T_{10}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \xi}; \quad v = v_0, \quad (2.5.3)$$

где

$$T_1 = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \omega \right) \right]. \quad (2.5.4)$$

В переменных $\xi = x/L$, $\eta = y/R$ исходное уравнение (2.5.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \nabla_1^8 \Phi + \epsilon^{-2} l^{-4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + (8 - 2\nu^2) l^{-4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + \\
 + 8 l^{-2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + 4 l^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = \tilde{q}. \quad (2.5.5)
 \end{aligned}$$

где

$$\nabla_1^8 = \nabla_1^4 \nabla_1^4; \nabla_1^4 = l^{-4} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2l^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}; l = \frac{L}{R}.$$

Параметр l характеризует относительную длину оболочки. Следовательно, в уравнение (2.5.1) входят два параметра: ϵ^2 и l . Для построения асимптотики нужно установить соотношение между ними. Для примера рассмотрим случай, когда $l \sim \epsilon^0$.

Введем параметры α и β , характеризующие изменчивость искомой функции Φ по ξ и η :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sim \epsilon^\alpha \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sim \epsilon^\beta \Phi.$$

Будем считать, что частное решение уравнения (2.5.5) уже найдено, и опишем всевозможные предельные системы для однородного уравнения (2.5.5):

а) предельные системы, содержащие по одному члену уравнения (2.5.5):

$$1) \partial^8 \Phi / \partial \eta^8 = 0; \quad (2.5.6)$$

$$2) l^{-8} \partial^8 \Phi / \partial \xi^8 = 0; \quad (2.5.7)$$

$$3) \epsilon^2 l^{-4} \partial^4 \Phi / \partial \xi^4 = 0; \quad (2.5.8)$$

$$4) \partial^4 \Phi / \partial \eta^4 = 0; \quad (2.5.9)$$

б) предельные системы, содержащие по два члена уравнения (2.5.5):

$$5) l^{-2} \partial^8 \Phi / \partial \xi^8 + \epsilon^{-2} l^{-4} \partial^4 \Phi / \partial \xi^4 = 0; \quad (2.5.10)$$

$$6) \partial^8 \Phi / \partial \eta^8 + \epsilon^{-2} l^{-4} \partial^4 \Phi / \partial \eta^4 = 0; \quad (2.5.11)$$

в) предельные системы с большим числом членов:

$$7) \nabla_1^8 \Phi = 0; \quad (2.5.12)$$

$$8) \nabla_1^8 \Phi + \epsilon^{-2} l^{-4} \partial^4 \Phi / \partial \xi^4 = 0; \quad (2.5.13)$$

$$9) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right]^2 \Phi + \epsilon^{-2} l^{-4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (2.5.14)$$

$$10) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right]^2 \Phi = 0. \quad (2.5.15)$$

Все полученные выше предельные уравнения имеют физический смысл: уравнение (2.5.9) описывает безмоментную теорию, (2.5.11) и (2.5.14) – полубезмоментную теорию (соответственно с большой и малой изменяемостью по η). По терминологии А.Л. Гольденвейзера [36], это уравнения основного состояния. Уравнение (2.5.10) соответствует краевому эффекту, (2.5.13) – теории пологих оболочек (называемому иногда состоянием с большим показателем изменяемости или уравнением технической теории оболочек). Уравнение (2.5.12) описывает изгибную деформацию пластины и плоское напряженное состояние, (2.5.15) – изгибную деформацию кольца; (2.5.6) и (2.5.7) – изгибные и продольные деформации стержня в направлении осей η и ξ соответственно; (2.5.8) – продольные деформации стержня в направлении оси η .

Нетрудно также определить значения параметров α и β , соответствующих каждому из предельных случаев:

$$1) \alpha < -\frac{1}{2}, \quad \beta > \alpha; \quad 2) \beta < -\frac{1}{2}, \quad \alpha < \beta \text{ и}$$

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad \alpha < \frac{1}{2} + 2\beta;$$

$$3) \beta > \frac{1}{2}, \quad \alpha - \frac{1}{4}, \quad \alpha > -\frac{1}{2};$$

$$4) 0 < \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \quad \alpha > \frac{1}{2};$$

$$5) \beta > \alpha, \quad \alpha = -\frac{1}{2}; \quad 6) \beta > -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} + 2\beta;$$

$$7) \beta < -\frac{1}{2}, \quad \alpha < \beta; \quad 8) \beta = \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$9) \beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad 10) \beta = 0, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вся плоскость параметров α и β разбивается на ряд достаточно сложных областей (рис.2.8). Среди них есть две точки, три луча, четыре "куска плоскости" и одна область, состоящая из отрезка без крайних точек и луча. Интересно, что ни при каких

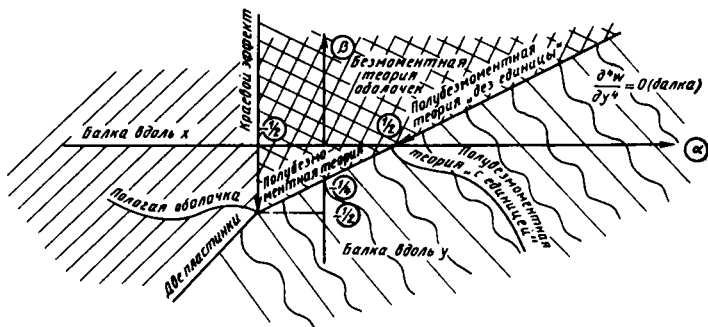


Рис. 2.8. Разбиение плоскости параметров изменяемости по координатам x , y для цилиндрической оболочки

значениях изменяемостей не получается исходное уравнение, т.е. полное уравнение (2.5.1) не нужно использовать ни при каких значениях изменяемости внешней нагрузки.

Самое общее из полученных предельных уравнений – (2.5.13), оно включает в себя почти все предельные состояния, за исключением принципиально пологих состояний (2.5.14) и (2.5.15). Уравнение безмоментной теории – это вырожденное уравнение, лежащее на спектре. Уравнения полубезмоментной теории (2.5.11) и (2.5.14) – дополнительные для нее. Краевой эффект (2.5.10) позволяет удовлетворить граничным условиям.

Отметим, что для решения красных задач наряду с асимптотическим расщеплением уравнений нужно выполнить расщепление граничных условий. Это наиболее трудная и нетривиальная часть метода погранслоя. Один из возможных методов, основанный на явном построении решения уравнений погранслоя и исключении его составляющих из граничных условий, описан ранее. Однако этот метод не проходит, если нельзя получить явное выражение для указанных решений.

2.6. ИЗГИБ УЗКОЙ ПЛАСТИНКИ

Часто для получения асимптотического решения можно использовать малые размеры рассматриваемой конструкции в одном направлении. Рассмотрим изгиб защемленной узкой пластинки, т.е. пластинки, у которой один размер (l) существенно меньше другого (L). Исходное уравнение и краевые условия таковы:

$$D\nabla^4 \omega = q; \quad (2.6.1)$$

$$\text{при } x = 0, L \quad \omega = \omega_x = 0;$$

$$\text{при } y = 0, l \quad \omega = \omega_y = 0. \quad (2.6.2)$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi = x/L, \quad \eta = y/l.$$

Тогда уравнение (2.6.1) приводится к виду

$$\epsilon^4 \omega_{\xi\xi\xi\xi} + 2\epsilon^2 \omega_{\eta\eta\eta\eta} + \omega_{\eta\eta\eta\eta} = \bar{q}, \quad (2.6.3)$$

где

$$\bar{q} = ql^4/D, \quad \epsilon = l/L \ll 1.$$

Граничные условия (2.6.2) запишутся так:

$$\text{при } \xi = 0, 1 \quad \omega = \omega_\xi = 0, \quad (2.6.4)$$

$$\text{при } \eta = 0, 1 \quad \omega = \omega_\eta = 0. \quad (2.6.5)$$

Представляя решение в виде

$$\omega = \omega_0 + \epsilon^2 \omega_1 + \epsilon^4 \omega_2 + \dots, \quad (2.6.6)$$

получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\omega_{0\eta\eta\eta\eta} = q; \quad (2.6.7)$$

$$\omega_{1\eta\eta\eta\eta} = -2\omega_{0\eta\eta\xi\xi}; \quad (2.6.8)$$

$$\omega_{i\eta\eta\eta\eta} = -2\omega_{i-1\eta\eta\xi\xi} - \omega_{i-2\eta\eta\eta\eta}; \quad i = 2, 3, \dots; \quad (2.6.9)$$

$$\text{при } \eta = 0, 1 \quad \omega_j = \omega_{j\eta} = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Построенное решение не удовлетворяет краевым условиям при $\xi = 0, 1$. Возникающее из-за соответствующей невязки решение носит, в силу "узости" пластины, характер погранслоя. Для его построения нужно выполнить в однородном уравнении, соответствующем исходному, замену переменных

$$\varphi = x/l, \quad \eta = y/l$$

и представить ω в виде

$$\omega_n = \epsilon^{\alpha_0} \omega_{n0} + \epsilon^{\alpha_1} \omega_{n1} + \epsilon^{\alpha_2} \omega_{n2} + \dots$$

Уравнения для построения погранслоя будут иметь один и тот же вид

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \omega_{ni} = 0. \quad (2.6.10)$$

Параметры α_i определяются из процедуры асимптотического расщепления по описанной методике.

$$\text{При } \varphi = 0, \epsilon \text{ имеем: } \omega_{n0} = 0; \quad \omega_{n0\varphi} = -\omega_{0\xi} \Big|_{\xi=0};$$

$$\omega_{n1} = -\omega_0; \quad \omega_{n1\varphi} = -\omega_{1\xi} \Big|_{\xi=0};$$

$$\omega_{ni} = -\omega_{i-1}; \quad \omega_{ni\varphi} = -\omega_{i\xi} \Big|_{\xi=0};$$

$$\text{при } \eta = 0, 1 \quad \omega_{nj} = \omega_{nj\eta}, \quad j = 0, 1, 2; \dots \quad (2.6.11)$$

Поскольку расстояние между сторонами $\varphi = 0$ и $\varphi = \epsilon^{-1}$ большое, можно строить соответствующие решения отдельно у каждого края, т.е. рассматривать изгиб полуполос.

Краевые задачи (2.6.10), (2.6.11) существенно двумерны. Для их решения можно применять методы Канторовича [45] или Папковича [72]. Поскольку метод Канторовича для изгиба полуполосы подробно описан далее, остановимся на методе Папковича [72].

В соответствии с ним решение уравнений (2.6.10) при граничных условиях (2.6.11) представляется в виде (рассматривается край $\varphi = 0$, для края $\varphi = \epsilon$ представление аналогично)

$$\omega_{nj} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[Y_k(\eta_1) a_k e^{-\lambda_k \varphi} + \bar{Y}_k(\eta_1) \bar{a}_k e^{-\bar{\lambda}_k \varphi} \right]. \quad (2.6.12)$$

где $\eta_1 = \eta - 0,5$.

Для четных относительно линии $\eta_1 = 0$ составляющих

$$Y_k = \frac{\text{ch}(s_k \eta_1)}{\text{ch} 0,5 s_k} - \frac{2\eta_1 \text{sh}(s_k \eta_1)}{\text{sh} 0,5 s_k};$$

для нечетных

$$Y_k = \frac{\text{sh}(s_k \eta_1)}{\text{sh} 0.5 s_k} - \frac{2\eta_1 \text{ch}(s_k \eta_1)}{\text{ch} 0.5 s_k}.$$

Постоянные s_k являются корнями трансцендентного уравнения:

в первом случае

$$\text{sh}(s_k) = -s_k; \quad (2.6.13)$$

во втором

$$\text{sh}(s_k) = s_k.$$

Показатели экспонент в выражении (2.6.12) таковы:

$$\lambda_k = i s_k, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Черта в (2.6.12) означает комплексное сопряжение. Корни трансцендентных уравнений нетрудно получить численно.

Для определения постоянных a_k, \bar{a}_k в решении (2.6.12) нужно спроектировать граничные условия (2.6.7) на функции Y_k, \bar{Y}_k . Иными словами, после представления решения в виде (2.6.12) нужно домножить условия (2.6.4) последовательно на Y_k, \bar{Y}_k ($k = 1, 2, \dots$) и выполнять интегрирование их по η от нуля до единицы.

Для компенсации невязок в окрестности угловой точки нужно решать полное уравнение

$$\epsilon \nabla^4 \tilde{\omega} + \nabla^2 \tilde{\omega} = 0 \quad (2.6.14)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= -\omega_{n1} - \omega_{n2}; \quad \tilde{\omega}_x = -\omega_{n2x} \quad \text{при } x = 0, a; \\ \tilde{\omega} &= -\omega_{n1} - \omega_{n2}; \quad \tilde{\omega}_y = -\omega_{n1y} \quad \text{при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Краевая задача (2.6.14), (2.6.15) существенно двумерна, ее решение представляет определенные трудности, поэтому остановимся на нем подробнее. Сначала перейдем к полярным координатам, тогда операторы Лапласа в уравнении (2.6.14) примут вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Граничные условия можно записать в виде

$$\omega = \omega_i(r); \quad \omega_0 = \omega_{1i}(r) \quad \text{при} \quad \theta = 0, \pi/2, \quad i = 1, 2,$$

где ω_i, ω_{1i} — пересчитанные значения краевых невязок.

От краевой задачи (2.6.14), (2.6.15) с неоднородными граничными условиями легко перейти к задаче с неоднородным уравнением и однородными граничными условиями, положив, например,

$$\begin{aligned} \omega = \omega^*(r, \theta) - \frac{2}{\pi} \left[\theta - \frac{\pi}{2} \right] & \left[\omega_1(r) + \theta(\omega_{11}(r) - \frac{\pi}{2} \omega_1(r)) \right] + \\ + \frac{2}{\pi} \theta & \left[\omega_2(r) + \left[\theta - \frac{\pi}{2} \right] \left[\frac{2}{\pi} \omega_2(r) - \omega_{12}(r) \right] \right]. \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения

$$\epsilon \nabla^4 \omega^* + \nabla^2 \omega^* = f(r, \theta) \quad (2.6.16)$$

с однородными граничными условиями

$$\omega = \omega_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \pi/2$$

можно искать различными методами.

Если применить преобразование Меллина, то решение можно найти в виде интеграла (обратное преобразование Меллина). Решение в таком виде позволяет выделить все особенности, но не очень удобно для расчетов.

Можно применить метод Папковича. Наконец, можно использовать метод Канторовича, представив решение уравнения (2.6.16) в виде [45]

$$\omega^* = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(r) \theta^2 \left[\theta - \frac{\pi}{2} \right]^2 \left[\psi - \frac{\pi}{4} \right]^{2i-2}.$$

Применяя стандартную процедуру метода Канторовича [45], приходим к неоднородному обыкновенному уравнению относительно $\varphi_i(r)$.

Решение его распадается на частное и общее, причем общее будет

иметь вид $\sum_{j=0}^4 C_{ij} r^{\lambda_{ij}}$. Поставим условия для определения постоянных C_{ij} .

Во-первых, поскольку мы ищем решение типа погранслоя, нужно поставить условия затухания при $r \rightarrow \infty$. Этим определится половина постоянных. Кстати, уже отсюда видно, что затухание в угловом погранслое будет не экспоненциальным (что характерно для

обычных погранслоев), а степенным. Несколько сложнее с другими условиями. Ясно, что их нельзя поставить при $r = 0$, так как при этом условию затухающее при $r \rightarrow \infty$ решение (т.е. содержащее r в отрицательных степенях) стремится к бесконечности. С другой стороны, решение в угловой точке может иметь особенности [60, 49]. Иногда этими особенностями можно пренебречь, но в общем случае их нужно учитывать.

Решение в окрестности угловой точки может быть представлено в виде [49]

$$\omega^{(\alpha)}(y) = Cr^{\alpha} \Psi(\theta) + \dots \quad (2.6.17)$$

Для рассматриваемого случая $\alpha = 1.5$. Решение (2.6.17) нужно сравнить с решением углового погранслоя. Рассмотрим, например, первое приближение метода Канторовича:

$$\omega^* = \left[\varphi(r) + C_{11} r^{\lambda_{11}} + C_{12} r^{\lambda_{12}} \theta^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right], \quad (2.6.18)$$

где $\varphi(r)$ — частное решение.

Спроектируем функцию $\psi(\theta)$ на $\theta^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2$:

$$\Psi(\theta) = C_1 \theta^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots$$

где

$$C_1 = \int_0^{\pi/2} \Psi(\theta) \theta^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 d\theta.$$

Теперь поставим условие гладкого срашивания решений (2.6.18) и решения

$$\omega^{(y)} = C C_1 r^{1.5} \theta^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

вплоть до третьей производной в некоторой, неизвестной пока, точке r_0 :

$$(C C_1 r^{1.5})^{(k)} = (\varphi(r) + C_{11} r^{\lambda_{11}} + C_{12} r^{\lambda_{12}})^{(k)} \quad (2.6.19)$$

при $r = r_0$; $k = 0 \dots 3$.

Из системы уравнений (2.6.19) определяются постоянные C , C_{11} , C_{12} и точки срашивания.

ГЛАВА 3

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИИ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В этой главе приведем основные упрощенные уравнения для конструктивно-ортоотропных цилиндрических оболочек. Это, с одной стороны, позволяет проиллюстрировать изложенные в гл. 2 подходы, с другой – привести полезные для практики соотношения.

Полученные в результате осреднения модели пластин и оболочек обладают, как правило, свойством сильной анизотропии. Так, для стрингерных или шпангоутных оболочек, оболочек с однонаправленными гофрами или шарнирами резко отличаются изгибные жесткости в разных направлениях, для вафельных, решетчатых, перфорированных конструкций мала относительная сдвиговая жесткость. Получаются задачи с отличными от параметра относительной тонкостенности малыми параметрами. Это затрудняет решение, но приводит к новым возможностям дальнейшего асимптотического расщепления. Впервые внимание на это обстоятельство было обращено в работе [54], в которой получены приближенные уравнения для статики конструктивно-ортоотропных цилиндрических оболочек.

3.1. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения и выражения входящих в них параметров для конструктивно-ортоотропной оболочки приведены в [1, 53]. Задача операторным методом [36] может быть сведена к одному разрешающему уравнению относительно потенциальной функции Φ , которое не приводится ввиду громоздкости. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести следующие безразмерные геометрико-жесткостные характеристики:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^2 &= D_1 (B_2 R^2)^{-1}; \quad \epsilon_2 = D_2 D_1^{-1}; \quad \epsilon_3 = D_3 D_1^{-1}; \quad \epsilon_4 = B_2 B_1^{-1}; \\ \epsilon_5 &= B_3 B_1^{-1}; \quad \epsilon_6 = e_1 R^{-1}; \quad \epsilon_7 = e_2 R^{-1}; \quad D_i = D_{ii} - K_{ii}^2 B_i^{-1}, \\ D_3 &= D_{12} + 2D_{33} + e_1 e_2 B_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \quad B_i = B_{ii} (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \\ 2B_3^{-1} &= B_{33}^{-1} - 2B_{12} B_{22} (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \quad e_i = K_{ii} B_i^{-1}; \\ i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь D_1, D_2, D_3 - изгибные и крутильная жесткости; B_1, B_2, B_3 - жесткости на растяжение-сжатие и сдвиг; B_{12}, D_{12} - коэффициенты Пуассона; параметры K_{11}, K_{22} характеризуют эксцентриситеты подкреплений относительно срединной поверхности обшивки ($K_{ii} > 0$ для внутренних ребер).

Выделяются три наиболее важных для практики класса оболочек:

стриггерные, для которых $\epsilon_2 \sim \epsilon_1, \epsilon_6 \sim \epsilon_1^2, \epsilon_3 \sim \epsilon_1$ (или $\epsilon_3 \sim 1$);

шпангоутные ($\epsilon_2 \sim \epsilon_1^{-1}, \epsilon_3 \sim \epsilon_1^{-1}$ или $\epsilon_3 \sim 1$), $\epsilon_7 \sim \epsilon_1^{1/2}$);

вафельные ($\epsilon_2 \sim \epsilon_4 \sim 1, \epsilon_3 \sim 1$ или $\epsilon_3 \sim \epsilon_1, \epsilon_6 \sim \epsilon_7 \sim 1, \epsilon_5 < 1$).

Введем параметры α, β , характеризующие изменяемость искомых функций по ξ и η :

$$\Phi_{\xi} \sim \epsilon_1^{-\alpha} \Phi; \quad \Phi_{\eta} \sim \epsilon_1^{-\beta} \Phi.$$

Асимптотический анализ по ϵ_1 приводит к следующим результатам:

$\alpha = -0,5; \beta = 0$ - основное напряженное состояние, его можно записать в виде

$$(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 + \nu_{12} \epsilon_7^{-1}) \nabla_{0\eta}^2 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \Phi_{\xi\xi\xi\xi} - 2\nu_{21} \epsilon_7 \nabla_{0\eta} \Phi_{\xi\xi\eta\eta} = 0;$$

$$\nabla_{0\eta} = 1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad (3.1.1)$$

$$u = -\Phi_{\xi\xi\eta}; \quad v = \Phi_{\eta\eta\eta}; \quad w = \Phi_{\eta\eta\eta};$$

$$T_1 = B_1 R^{-1} (\nu_{21} \epsilon_7 \nabla_{0\eta} \Phi_{\eta\eta} - \Phi_{\xi\xi\eta\eta}); \quad (3.1.2)$$

$$S = -B_2 R^{-1} \left[(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \nu_{21}^2 \epsilon_4 \epsilon_7) \nabla_{0\eta} \Phi_{\eta\eta} - \nu_{21} \epsilon_4^{-1} \Phi_{\xi\xi} \right]_{\eta\eta};$$

$\alpha = -0,5; \beta = 0$ - краевой эффект, его можно записать в виде

$$(\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_6^2) \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \Phi - 2\nu_{12} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi} = 0; \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned}
u &= \left[(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi} + \nu_{12} \Phi \right]_{\xi\xi\xi}; \\
v &= - \left[2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + (1 + \nu_{12} \nu_{21}) \epsilon_4^{-1} \right] \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \left[2\epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \right] \Phi_{\xi\xi\xi}; \\
w &= \Phi_{\xi\xi\xi\xi}; \\
T_1 &= B_1 R^{-1} (-\Phi + \nu_{12} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi\xi}); \\
S &= B_1 R^{-1} (\Phi - \nu_{12} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi}).
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Соотношения (3.1.1)...(3.1.4) имеют аналоги в теории изотропных оболочек [36]. Интересно, однако, что и уравнения для состояний с большим показателем изменчивости (теория пологих оболочек) допускают дальнейшие расчленения. Так, для стрингерных оболочек при $\epsilon_3 \sim \epsilon_1$ получаем

$\alpha = 0$, $\beta = 0,5$ — напряженное состояние с большим показателем изменчивости вдоль направляющей

$$\nabla_{2\eta}^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0, \tag{3.1.5}$$

где

$$\nabla_1^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}; \quad \nabla_{2\eta} = 1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \tag{3.1.6}$$

$$u = -\Phi_{\xi\xi\xi}; \quad v = \Phi_{\eta\eta\eta}; \quad w = \Phi_{\eta\eta\eta\eta};$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ — состояние пограничья, позволяющее удовлетворить всем краевым условиям:

$$\begin{aligned}
A_2 \Phi &\equiv \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_1^{-2} \left[1 - \nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi + \\
&+ \epsilon_6 \left[2 - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\eta\eta} = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

где

$$\nabla_2^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4};$$

$$u = \left[(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2 \left(\epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \right) \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \nu \Phi_{\xi\xi} - \Phi_{\eta\eta} \right]_{\xi}; \quad (3.1.8)$$

$$v = - \left\{ \left[2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + (1 + \nu_{21} \nu_{12}) \epsilon_4^{-1} \right] \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \left[2\epsilon_5^{-1} - \nu_{12} \right] \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} \right\}_{\eta} \quad w = \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi.$$

Для шпангоутной оболочки соответствующие уравнения имеют следующий вид:

$\alpha = \beta = 1/4$ – напряженное состояние с большой изменчивостью в обоих направлениях:

$$(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \nabla_2^4 + \epsilon_7^2 \nabla_{3\eta}^2) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \epsilon_7 \nabla_{3\eta} \Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.1.9)$$

где

$$\nabla_{3\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

$\alpha = 1/2, \beta = 1/4$ – напряженное состояние с преимущественной изменчивостью в продольном направлении:

$$A_4 \Phi \equiv \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \epsilon_2 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \epsilon_1^{-2} \nabla_{4\eta}^2 \Phi = 0, \quad (3.1.10)$$

где

$$\nabla_{4\eta} = 1 + \epsilon_7 \partial^2 / \partial \eta^2.$$

При дальнейшем увеличении изменчивости приходим к уравнениям преимущественно изгибной и тангенциальной деформаций пластин. Для стрингерных оболочек при $\alpha = k; \beta = 1/2 + k$ ($k > 0$) преимущественно изгибная деформация пластины)

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi + \epsilon_6^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0; \quad (3.1.11)$$

при $\alpha = \beta > 1/2$ (преимущественно тангенциальная деформация пластины)

$$\epsilon_1^2 \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_6^2 \left[\nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi = 0. \quad (3.1.12)$$

Для шпангоутных оболочек при $\alpha = k$; $\beta = 1/4 + k$; $k > 0$ (преимущественно изгиб)

$$\epsilon_1^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0; \quad (3.1.13)$$

при $\alpha = \beta > 1/4$ (преимущественно плоская деформация)

$$\epsilon_1^2 \epsilon_2 \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_7^2 \nabla_{3\eta}^2 \Phi = 0. \quad (3.1.14)$$

Для вафельной оболочки расщепление состояния с большим показателем изменямости ($\alpha = \beta = 0,5$) при анализе по ϵ_1 не происходит, однако может быть использована малость параметра ϵ_5 . Введем параметры γ и δ , характеризующие изменямость по ξ и η относительно параметра ϵ_5 :

$$\Phi_{\xi} \sim \epsilon_5^{-\gamma} \Phi; \quad \Phi_{\eta} \sim \epsilon_5^{-\delta} \Phi.$$

После расщепления по ϵ_5 имеем три предельные системы, описывающие в совокупности искомое напряженное состояние. Из них только первая система, описываемая соотношением

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_{1\eta}^4 \Phi + 0,5 \epsilon_5 \nabla_{1\eta} \Phi_{\xi\xi} = 0, \quad (3.1.15)$$

где $\nabla_{1\eta} = 1 + (\epsilon_6 + \epsilon_7) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$; $u = [2\epsilon_5^{-1} \epsilon_6 \Phi_{\xi\eta} - \Phi]_{\xi\xi\eta}$;

$v = 2\epsilon_5^{-1} (\epsilon_7 \Phi_{\eta\eta} + 2\Phi)_{\xi\xi\eta}$; $T_1 = -B_1 R^{-1} \nabla_{1\eta} \Phi_{\xi\xi\eta}$; $S = B_1 R^{-1} \nabla_{1\eta} \Phi_{\xi\xi\xi\eta}$, является оболочечной. Две другие определяют расщепленное плоское напряженное состояние пластины:

при $\gamma = \delta + 1/2$ (преимущественная деформация в направлении оси ξ)

$$\Phi_{\xi\xi} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \Phi_{\eta\eta} = 0; \quad (3.1.16)$$

$$v = 2\epsilon_5^{-1} \Phi_{\xi\xi\eta};$$

$$S = B_1 R^{-1} \Phi_{\xi\xi\xi\eta}; \quad (3.1.17)$$

при $\gamma = \delta - 1/2$ (преимущественная деформация по η)

$$\Phi_{\xi\xi} + 0,5\epsilon_5 \Phi_{\eta\eta} = 0; \quad (3.1.18)$$

$$u = -\Phi_{\xi\eta}; \quad T_1 = -B_1 R^{-1} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}; \quad S = -0,5B_1 R^{-1} \epsilon_5 \Phi_{\xi\xi\eta\eta}. \quad (3.1.19)$$

При увеличении изменяемости уравнения (3.1.16), (3.1.18) остаются такими же, а в уравнении (3.1.15) нужно опустить подчеркнутый член. Тогда соотношения (3.1.15), (3.1.16), (3.1.18) позволяют описать изгибную и плоскую деформации вафельной пластины.

3.2. РАСЧЛЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть осцилляция внешней нагрузки невелика, так что возможно разделение напряженного состояния на основное (3.1.1) и краевой эффект (3.1.3). Считаем, что оболочка достаточно длинная, так что взаимным влиянием краевых эффектов можно пренебречь. Рассматриваются варианты граничных условий, приведенные в табл. 3.1, где

принято $Q = Q_1 + M_{1\eta}$; $\{\tilde{u}; \tilde{\omega}; \tilde{T}; \tilde{\omega}_\xi; \tilde{M}; \tilde{Q}\} = \{u_m; \omega_m; T_m; \omega_{\xi m}; M_m; Q_m\} \cos m\eta$; $\{\tilde{v}; \tilde{S}\} = \{v_m; S_m\} \sin m\eta$; величины с индексом m — постоянные.

Таблица 3.1

Вариант условий	Краевые условия при $\xi = 0, l$			
A_1	$v = \tilde{v}$	$u = \tilde{u}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$\omega_\xi = \tilde{\omega}_\xi$
A_2	$v = \tilde{v}$	$T_1 = \tilde{T}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$\omega_\xi = \tilde{\omega}_\xi$
A_3	$v = \tilde{v}$	$u = \tilde{u}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$M_1 = \tilde{M}$
A_4	$v = \tilde{v}$	$T_1 = \tilde{T}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$M_1 = \tilde{M}$
A_5	$S = \tilde{S}$	$u = \tilde{u}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$\omega_\xi = \tilde{\omega}_\xi$
A_6	$S = \tilde{S}$	$T_1 = \tilde{T}$	$\omega = \tilde{\omega}$	$\omega_\xi = \tilde{\omega}_\xi$

Вариант условий	Кривые условия при $\xi = 0, l$			
A_7	$S - \bar{S}$	$u - \bar{u}$	$\omega - \bar{\omega}$	$M_1 - \bar{M}$
A_8	$S - \bar{S}$	$T_1 - \bar{T}$	$\omega - \bar{\omega}$	$M_1 - \bar{M}$
A_9	$v - \bar{v}$	$u - \bar{u}$	$Q - \bar{Q}$	$\omega_\xi - \bar{\omega}_\xi$
A_{10}	$v - \bar{v}$	$T_1 - \bar{T}$	$Q - \bar{Q}$	$\omega_\xi - \bar{\omega}_\xi$
A_{11}	$v - \bar{v}$	$u - \bar{u}$	$Q - \bar{Q}$	$M_1 - \bar{M}$
A_{12}	$v - \bar{v}$	$T_1 - \bar{T}$	$Q - \bar{Q}$	$M_1 - \bar{M}$
A_{13}	$S - \bar{S}$	$u - \bar{u}$	$Q - \bar{Q}$	$\omega_\xi - \bar{\omega}_\xi$
A_{14}	$S - \bar{S}$	$T_1 - \bar{T}$	$Q - \bar{Q}$	$\omega_\xi - \bar{\omega}_\xi$
A_{15}	$S - \bar{S}$	$u - \bar{u}$	$Q - \bar{Q}$	$M_1 - \bar{M}$
A_{16}	$S - \bar{S}$	$T_1 - \bar{T}$	$Q - \bar{Q}$	$M_1 - \bar{M}$

В качестве примера рассмотрим расчленение граничных условий для варианта A_6 . Используя формулы (3.1.2), (3.1.4) и учитывая изменчивость каждого из состояний по обшим координатам, оценим порядки входящих в граничные условия величин

$$S^{(1)} \sim \epsilon_1^{1,5-7\beta} \Phi^{(1)}; \quad S^{(2)} \sim \epsilon_1^{-1,5-\beta} \Phi^{(2)};$$

$$T_1^{(1)} \sim \epsilon_1^{1-6\beta} \Phi^{(1)}; \quad T_1^{(2)} \sim \epsilon_1^{-1-2\beta} \Phi^{(2)};$$

$$\omega^{(1)} \sim \epsilon_1^{-4\beta} \Phi^{(1)}; \quad \omega^{(2)} \sim \epsilon_1^{-2} \Phi^{(2)};$$

$$\omega_\xi^{(1)} \sim \epsilon_1^{0,5-6\beta} \Phi^{(1)}; \quad \omega_\xi^{(2)} \sim \epsilon_1^{-2,5} \Phi^{(2)}.$$

Назовем характеристическим показателем усилия или перемещения P величину $\mu(P)$, определяемую соотношением

$$\epsilon_1^{\mu(P)} = P^{(2)} \Phi^{(1)} / (P^{(1)} \Phi^{(2)}).$$

Тогда $\mu(S) = -3 + 6\beta$; $\mu(T_1) = -2 + 4\beta$; $\mu(\omega) = -2 + 4\beta$; $\mu(\omega_\xi) = -3 + 6\beta$.

Расположим граничные условия A_6 в порядке убывания характеристического показателя:

$$T_1, \omega; S, \omega_\xi.$$

Отсюда следует, что в случае $\bar{S} = 0$, $\bar{\omega}_\xi = 0$, $\bar{\omega} \neq 0$ (или $\bar{T} \neq 0$) искомое расчленение при $\xi = 0$, l имеет вид

$$T_1^{(1)} = \bar{T}; \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega};$$

$$S^{(2)} = -S^{(1)}; \quad \omega_\xi^{(2)} = -\omega_\xi^{(1)}.$$

В случае же $\bar{\omega} = \bar{T} = 0$, $\bar{S} \neq 0$ (или $\bar{\omega}_\xi \neq 0$) при $\xi = 0$, l получаем

$$S^{(2)} = \bar{S}; \quad \omega_\xi^{(2)} = \bar{\omega}_\xi; \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}.$$

Таким образом, в зависимости от заданной нагрузки исследование оболочки можно начинать либо с расчета основного напряженного состояния, либо краевого эффекта.

Для вариантов $A_5 \dots A_{12}$ расчленения, следующие непосредственно из канонического вида, позволяют рассчитывать напряженные состояния, описываемые уравнениями (3.1.1), (3.1.3), последовательно. Для остальных вариантов проведем дополнительный анализ. Рассмотрим вариант A_1 . Если хотя бы одна из величин \bar{v} , $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_\xi$ отлична от нуля, то из канонического вида получаем следующее "неудобное" (т.е. не позволяющее рассчитать одно из состояний независимо от другого) расчленение:

при $\xi = 0$, l

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \bar{\omega}; \quad \omega_\xi^{(2)} = \bar{\omega}_\xi; \tag{3.2.1}$$

$$v^{(1)} = \bar{v}; \quad u^{(1)} = -u^{(2)} + \bar{u}. \tag{3.2.2}$$

Однако, учитывая соотношения нерастяжимости в кольцевом направлении и отсутствия сдвигов, условие (3.2.1) можно привести к виду при $\xi = 0, l$

$$\omega^{(2)} = (\omega_m - \pi \nu_m) \cos \pi \eta. \quad (3.2.3)$$

Расчленение (3.2.2), (3.2.3) дает возможность рассчитывать основное напряженное состояние и краевой эффект независимо друг от друга.

Пусть теперь только $\bar{u} \neq 0$. Тогда канонический вид приводит к следующему расчленению:

при $\xi = 0, l$

$$v^{(1)} = 0; \quad \omega^{(1)} = 0; \quad u^{(1)} = \bar{u}; \quad \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)}, \quad (3.2.4)$$

в котором первые два условия линейно зависимы. Для получения недостающего краевого условия учтем члены первого приближения в выражениях перемещений v и ω через потенциальные функции $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$:

$$v = \Phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + (2\epsilon_5^{-1} + \nu_{12}) \Phi_{\xi\xi\eta}^{(1)};$$

$$\omega = \Phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + 2\epsilon_5^{-1} \Phi_{\xi\xi\eta}^{(1)} + \epsilon_4^{-1} \Phi_{\xi\xi\xi}^{(2)}.$$

Используя эти соотношения, расчленение (3.2.4) можно заменить следующим:

$$\text{при } \xi = 0, l \quad u^{(1)} = \bar{u}; \quad v^{(1)} = 0; \quad \omega^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{\xi\xi\eta}^{(2)};$$

$$\omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)}.$$

Аналогичная процедура применяется для расчленения граничных условий $A_2, \dots, A_4, A_{13}, \dots, A_{16}$, причем для вариантов A_{13}, \dots, A_{16} приходится комбинировать условия для S и Q . Окончательные результаты приведены в табл. 3.2. Отметим, что полученные расчленения справедливы также для изотропной оболочки.

Перейдем теперь к не имеющим аналога в изотропном случае вариантам изменяемости. Рассмотрим стрингерные оболочки, которым соответствуют уравнения (3.1.5), (3.1.7).

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_1 \quad \begin{aligned} \omega^{(2)} &= (\bar{\omega} - m\bar{v}), \quad \omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, \quad v^{(1)} = \bar{v}, \quad u^{(1)} = -u^{(2)} \\ v^{(1)} &= 0, \quad u^{(1)} = \bar{u}, \quad \omega^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}^{(1)}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \end{aligned}$$

$$A_2 \quad \begin{aligned} \omega^{(2)} &= (\bar{\omega} - m\bar{v}), \quad \omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, \quad v^{(1)} = \bar{v}, \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)} \\ v^{(1)} &= 0, \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, \quad \omega^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}^{(1)}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \end{aligned}$$

$$A_3 \quad \begin{aligned} \omega^{(2)} &= (\bar{\omega} - m\bar{v}), \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} (M_1^{(2)} = \bar{M}), \quad v^{(1)} = \bar{v}, \quad u^{(1)} = -u^{(2)} \\ v^{(1)} &= 0, \quad u_1^{(1)} = \bar{u}, \quad \omega^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}^{(1)}, \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$A_4 \quad \begin{aligned} \omega^{(2)} &= (\bar{\omega} - m\bar{v}), \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} (M_1^{(2)} = \bar{M}), \quad v^{(1)} = \bar{v}, \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)} \\ v^{(1)} &= 0, \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, \quad \omega^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}^{(1)}, \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$A_5 \quad \begin{aligned} S^{(2)} &= \bar{S}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, \quad u^{(1)} = -u^{(2)}, \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)} \\ u^{(1)} &= \bar{u}, \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, \quad S^{(2)} = -S^{(1)}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \end{aligned}$$

$$A_6 \quad \begin{aligned} T_1^{(1)} &= \bar{T}, \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, \quad S^{(2)} = -S^{(1)}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \\ S^{(2)} &= \bar{S}, \quad \omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)} \end{aligned}$$

Вариант
условийРасчиленные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_7 \quad \frac{u^{(1)} - \bar{u}, \varpi^{(1)} - \bar{\varpi}, S^{(2)} - -S^{(1)}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)} (M_1^{(2)} = 0)}{S^{(2)} - \bar{S}, M_1^{(2)} - \bar{M}, u^{(1)} - -u^{(2)}, \varpi^{(1)} - -\varpi^{(2)}}$$

$$A_8 \quad \frac{T_1^{(1)} - \bar{T}, \varpi^{(1)} - \bar{\varpi}, S^{(2)} - -S^{(1)}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)} (M_1^{(2)} = 0)}{S^{(2)} - \bar{S}, M_1^{(2)} - \bar{M}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}, \varpi^{(1)} - -\varpi^{(2)}}$$

$$A_9 \quad \frac{v^{(1)} = \bar{v}, u^{(1)} = \bar{u}, \varpi_\xi^{(2)} = -\varpi_\xi^{(1)}, Q^{(2)} = 0}{\varpi_\xi^{(2)} = \bar{\varpi}_\xi, Q^{(2)} = \bar{Q}, u^{(1)} = u^{(2)}, v^{(1)} = 0}$$

$$A_{10} \quad \frac{v^{(1)} = \bar{v}, T_1^{(1)} - \bar{T}, \varpi_\xi^{(2)} = -\varpi_\xi^{(1)}, Q^{(2)} = 0}{\varpi_\xi^{(2)} = \bar{\varpi}_\xi, Q^{(2)} = \bar{Q}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0}$$

$$A_{11} \quad \frac{v^{(1)} = \bar{v}, u^{(1)} = \bar{u}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0}{M_1^{(2)} - \bar{M}, Q^{(2)} = \bar{Q}, u^{(1)} - -u^{(2)}, v^{(1)} = 0}$$

$$A_{12} \quad \frac{v^{(1)} = \bar{v}, T_1^{(1)} - \bar{T}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0}{M_1^{(2)} - \bar{M}, Q^{(2)} = \bar{Q}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0}$$

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_{13}	$u^{(1)} = \bar{u}, S^{(1)} = (\bar{S} + m\bar{Q}), \omega_{\xi}^{(2)} = -\bar{\omega}_{\xi}^{(1)}, Q^{(2)} = \bar{Q}$
	$\omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = 0$
A_{14}	$T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} = (\bar{S} + m\bar{Q}), \omega_{\xi}^{(2)} = -\bar{\omega}_{\xi}^{(1)}, Q^{(2)} = \bar{Q}$
	$\omega_{\xi}^{(2)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, S^{(1)} = 0$
A_{15}	$u^{(1)} = \bar{u}, S^{(1)} = (\bar{S} + m\bar{Q}), M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = \bar{Q}$
	$M_1^{(2)} = \bar{M}, Q^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = 0$
A_{16}	$T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} = (\bar{S} + m\bar{Q}), M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = \bar{Q}$
	$M_1^{(2)} = \bar{M}, Q^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, S^{(1)} = 0$

Для вариантов граничных условий A_6, A_7, A_8 (при $\bar{\omega} \neq 0$) $A_{10}, \dots, A_{12}, A_{14}, \dots, A_{16}$ расчленения получаются непосредственно из канонического вида. Для остальных вариантов следующие из канонического вида расчленения некорректны, так как из соотношений неразстяжимости в кольцевом направлении и отсутствии сдвигов имеем

$$\omega^{(1)} = \nu_{\eta}^{(1)}$$

Правильные расчленения для вариантов A_2, A_3, A_5, A_8 ($\bar{\omega} \neq 0$) находятся путем линейной комбинации некоторых условий из канони-

ческого вида, при этом в случаях A_2, A_3, A_5 ($\bar{\omega} \neq 0$), A_8 ($\bar{v} \neq 0$) приходится использовать выражения для v, u, ω с учетом членов первого приближения. Приемлемые комбинации для вариантов A_1, A_4, A_{13} находятся без использования канонического вида. Окончательные результаты приведены в табл. 3.3, где приняты следующие обозначения:

$$L_1 = v_{\eta}^{(2)} - \omega^{(2)}; \quad L_2 = u_{\eta\eta}^{(2)} + \omega_{\xi}^{(2)}.$$

Расчленения граничных условий для шпангоутных оболочек (уравнения (3.1.9), (3.1.10)) следуют непосредственно из канонического вида и приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.3

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_1	$L_1 = (m\bar{v} - \bar{\omega}); \quad L_2 = (\bar{\omega}_{\xi} - m^{(2)}\bar{u});$ $v^{(1)} = \bar{v} - v^{(2)}; \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi} - \omega_{\xi}^{(2)}$
A_2	$T_1^{(2)} = \bar{T}, \quad L_1 = m\bar{v} - \bar{\omega}; \quad v^{(1)} = \bar{v}, \quad \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(2)}$ $v^{(1)} = 0, \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, \quad T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, \quad L_1 = 0$
A_3	$M_1^{(2)} = \bar{M}, \quad L_1 = m\bar{v}, \quad u^{(1)} = -u^{(2)}, \quad v^{(1)} = \bar{v}$ $v^{(1)} = 0, \quad u^{(1)} = \bar{u}, \quad L_1 = 0, \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $\omega^{(1)} = \bar{\omega}, \quad M_1^{(1)} = 0, \quad L_1 = -\bar{\omega}, \quad u^{(2)} = -u^{(1)}$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$\begin{aligned}
 & L_1 = m\bar{v} - \bar{\omega}; R^{-1}\nabla_{2\eta} M_1^{(2)} + (\epsilon_6 + \epsilon_7)T_{1\eta\eta}^{(2)} + \epsilon_6 T_1^{(2)} - \\
 & - B_1 R^{-1}(\epsilon_6 + \epsilon_7)\nu_{12}\nabla_{2\eta} v_{\eta\eta\eta}^{(2)} = R^{-1}\nabla_{2\eta} \bar{M} - \nu_{21}B_1(\epsilon_6 + \\
 & + \epsilon_7)\bar{v}_{\eta\eta\eta} + \epsilon_6 \bar{T} + (\epsilon_6 + \epsilon_7)\bar{T}_{\eta\eta}; \\
 & v^{(1)} = \bar{v} - v^{(2)}; T_1^{(1)} = \bar{T} - T_1^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S^{(2)} = \bar{S}, L_2 = \omega_{\xi} - m^2 \bar{u}, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi} - \omega_{\xi}^{(2)}, \omega^{(1)} = 0 \\
 & \omega^{(1)} = \bar{\omega}, u^{(1)} = 0, L_2 = 0, S^{(2)} = -S^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \omega^{(1)} = \bar{\omega}, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(2)} = 0 \\
 & T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(2)} = \bar{S}, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(2)}, \omega^{(1)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\omega^{(1)} = 0, u^{(1)} = \bar{u}, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}, S^{(2)} = 0$$

$$M_1^{(2)} = \bar{M}, S^{(2)} = \bar{S}, u^{(1)} = -u^{(2)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$\omega^{(1)} = \bar{\omega}, M_1^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(2)} = 0$$

Вариант
условийРасчиленные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$S^{(2)} = \bar{S}; R^{-1} \nabla_{0\eta} M_1^{(2)} \cdot (\epsilon_6 \cdot \epsilon_7) T_{1\eta\eta}^{(2)} + \epsilon_6 T_1^{(2)} -$$

$$A_8 - B_1 R^{-1} \nabla_{0\eta} (\epsilon_6 \cdot \epsilon_7) \nu_{21} \omega_{\eta\eta}^{(2)} = R^{-1} \nabla_{0\eta} \bar{M} \cdot \epsilon_6 \bar{T} \cdot (\epsilon_6 \cdot \epsilon_7) \bar{T}_{\eta}$$

$$T_1^{(1)} = \bar{T} - T_1^{(2)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$L_2 = \bar{\omega}_{\xi} - m^2 \bar{u}, Q^{(2)} = \bar{Q}, v^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi} - \omega_{\xi}^{(2)}$$

A₉

$$v^{(1)} = \bar{v}, u^{(1)} = 0, L_2 = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}$$

$$v^{(1)} = \bar{v}, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

A₁₀

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, Q^{(2)} = \bar{Q}, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(2)}, v^{(1)} = 0$$

$$v^{(1)} = \bar{v}, M_1^{(1)} = \bar{M}, u^{(2)} = -u^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

A₁₁

$$u^{(2)} = \bar{u}, Q^{(2)} = \bar{Q}, v^{(1)} = -v^{(2)}, M_1^{(1)} = -M_1^{(2)}$$

$$v^{(1)} = \bar{v}, M_1^{(1)} = \bar{M}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

A₁₂

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, Q^{(2)} = \bar{Q}, v^{(1)} = -v^{(2)}, M_1^{(1)} = -M_1^{(2)}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$L_2 = \bar{\omega}_\xi - m^2 \bar{u}, \nabla_{0\eta} Q^{(2)} = (\epsilon_6 + \epsilon_7) S_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \epsilon_6 S_\eta^{(2)}.$$

$$A_{13} = B_1 R^{-1} \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 \nabla_{0\eta} u_{\eta\eta\eta\eta}^{(2)} = \nabla_{0\eta} \bar{Q} + B_1 R^{-1} \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 \bar{u}_{\eta\eta\eta\eta} -$$

$$- (\epsilon_6 + \epsilon_7) \bar{S}_{\eta\eta\eta} + \epsilon_6 \bar{S}_\eta;$$

$$u^{(1)} = \bar{u} - u^{(2)}; S^{(1)} = \bar{S} - S^{(2)}$$

$$A_{14} \frac{\omega_\xi^{(1)} = \bar{\omega}_\xi, T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(2)} = -S^{(1)}, Q^{(2)} = -Q^{(1)}}{S^{(2)} = \bar{S}; Q^{(2)} = \bar{Q}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, \omega_\xi^{(1)} = 0}$$

$$A_{15} \frac{M_1^{(1)} = \bar{M}, u^{(1)} = \bar{u}, S^{(2)} = -S^{(1)}, Q^{(2)} = -Q^{(1)}}{S^{(2)} = \bar{S}; Q^{(2)} = \bar{Q}, u^{(1)} = -u^{(2)}, M_1^{(1)} = 0}$$

$$A_{16} \frac{M_1^{(1)} = \bar{M}, T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(2)} = -S^{(1)}, Q^{(2)} = -Q^{(1)}}{S^{(2)} = \bar{S}; Q^{(2)} = \bar{Q}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, M_1^{(1)} = 0}$$

Вариант
условий

Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_1 \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = \tilde{v}, u^{(1)} = \tilde{u}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, \omega_{\xi}^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; \omega_{\xi}^{(2)} = \tilde{\omega}_{\xi}, u^{(1)} = -u^{(2)}, v^{(1)} = 0 \end{array}$$

$$A_2 \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = \tilde{v}, T_1^{(1)} = \tilde{T}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, \omega_{\xi}^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; \omega_{\xi}^{(2)} = \tilde{\omega}_{\xi}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0 \end{array}$$

$$A_3 \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = \tilde{v}, u^{(1)} = \tilde{u}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, M_1^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; M_1^{(2)} = \tilde{M}, u^{(1)} = -u^{(2)}, v^{(1)} = 0 \end{array}$$

$$A_4 \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = \tilde{v}, T_1^{(1)} = \tilde{T}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, M_1^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; M_1^{(2)} = \tilde{M}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0 \end{array}$$

$$A_5 \quad \begin{array}{l} S^{(1)} = \tilde{S}, u^{(1)} = \tilde{u}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, \omega_{\xi}^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; \omega_{\xi}^{(2)} = \tilde{\omega}_{\xi}, S^{(1)} = -S^{(2)}, u^{(1)} = -u^{(2)} \end{array}$$

$$A_6 \quad \begin{array}{l} S^{(1)} = \tilde{S}, T_1^{(1)} = \tilde{T}, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}, \omega_{\xi}^{(2)} = 0 \\ \omega^{(2)} = \tilde{\omega}; \omega_{\xi}^{(2)} = \tilde{\omega}_{\xi}, S^{(1)} = -S^{(2)}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)} \end{array}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$S^{(1)} - \tilde{S}, u^{(1)} - \tilde{u}, \omega^{(2)} - -\omega^{(1)}, M_1^{(2)} = 0$$

 A_7

$$\omega^{(2)} - \tilde{\omega}; M_1^{(2)} - \tilde{M}, S^{(1)} - -S^{(2)}, u^{(1)} - -u^{(2)}$$

$$S^{(1)} - \tilde{S}, T_1^{(1)} - \tilde{T}, \omega^{(2)} - -\omega^{(1)}, M_1^{(2)} = 0$$

 A_8

$$\omega^{(2)} - \tilde{\omega}; M_1^{(2)} - \tilde{M}, S^{(1)} - -S^{(2)}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}$$

$$v^{(1)} - \tilde{v}, u^{(1)} - \tilde{u}, \omega_\xi^{(2)} - -\omega_\xi^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

 A_9

$$\omega_\xi^{(2)} - \tilde{\omega}_\xi, Q^{(2)} - \tilde{Q}, u^{(1)} - -u^{(2)}, v^{(1)} = 0$$

$$v^{(1)} - \tilde{v}, T_1^{(1)} - \tilde{T}, \omega_\xi^{(2)} - -\omega_\xi^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

 A_{10}

$$\omega_\xi^{(2)} - \tilde{\omega}_\xi, Q^{(2)} - \tilde{Q}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0$$

$$v^{(1)} - \tilde{v}, u^{(1)} - \tilde{u}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

 A_{11}

$$M_1^{(2)} - \tilde{M}, Q^{(2)} - \tilde{Q}, u^{(1)} - -u^{(2)}, v^{(1)} = 0$$

$$v^{(1)} - \tilde{v}, T_1^{(1)} - \tilde{T}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} = 0$$

 A_{12}

$$M_1^{(2)} - \tilde{M}, Q^{(2)} - \tilde{Q}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}, v^{(1)} = 0$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_{13} \frac{S^{(1)} - \bar{S}, u^{(1)} - \bar{u}, \omega_{\xi}^{(2)} - -\omega_{\xi}^{(1)}, Q^{(2)} - 0}{\omega_{\xi}^{(2)} - \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(2)} - \bar{Q}, S^{(1)} - -S^{(2)}, u^{(1)} - -u^{(2)}}$$

$$A_{14} \frac{S^{(1)} - \bar{S}, T_1^{(1)} - \bar{T}, \omega_{\xi}^{(2)} - -\omega_{\xi}^{(1)}, Q^{(2)} - 0}{\omega_{\xi}^{(2)} - \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(2)} - \bar{Q}, S^{(1)} - -S^{(2)}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}}$$

$$A_{15} \frac{S^{(1)} - \bar{S}, u^{(1)} - \bar{u}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} - 0}{M_1^{(2)} - \bar{M}, Q^{(2)} - \bar{Q}, S^{(1)} - -S^{(2)}, u^{(1)} - -u^{(2)}}$$

$$A_{16} \frac{S^{(1)} - \bar{S}, T_1^{(1)} - \bar{T}, M_1^{(2)} - -M_1^{(1)}, Q^{(2)} - 0}{M_1^{(2)} - \bar{M}, Q^{(2)} - \bar{Q}, S^{(1)} - -S^{(2)}, T_1^{(1)} - -T_1^{(2)}}$$

Анализ граничных условий для вафельной оболочки (уравнения (3.1.15), (3.1.16), (3.1.18)) имеет некоторые особенности по сравнению с рассмотренными ранее случаями и проводится в два этапа. Рассмотрим для иллюстрации вариант A_2 . Введем характеристические показатели $\mu_1(P)$ и $\mu_2(P)$ при помощи следующих соотношений:

$$\epsilon_1^{\mu_1(P)} = P^{(1)} \Phi^{(2)} / P^{(2)} \Phi^{(1)};$$

$$\epsilon_1^{\mu_2(P)} = P^{(3)} \Phi^{(1)} / P^{(1)} \Phi^{(3)}.$$

Оценивая порядки входящих в граничные условия A_2 величин, получаем

$$\mu_1(v) = -\mu_1(\omega) = -3; \quad \mu_1(T_1) = -1; \quad \mu_1(\omega_\xi) = -3, 5;$$

$$\mu_2(v) = -1; \quad \mu_2(\omega) = 1; \quad \mu_2(T_1) = -1; \quad \mu_2(\omega_\xi) = 0,5.$$

Сформируем две последовательности

$$T_1, v - \omega, \omega_\xi; \quad (3.2.5)$$

$$\omega_1, \omega_\xi, v - T_1. \quad (3.2.6)$$

Размещение компонент в первой из них определяется убыванием параметра μ_1 , а во второй – параметра μ_2 . Последовательность (3.2.5) позволяет отделить состояние (3.1.16), а последовательность (3.2.6) – произвести окончательное расчленение.

Пусть, например, $T = 0$, $\omega = \omega_\xi = v = 0$. Тогда из первого канонического представления имеем при $\xi = 0, l$

$$T_1^{(2)} = \tilde{T}; \quad v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} = 0;$$

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \omega^{(3)} = 0; \quad \omega_\xi^{(1)} = -\omega_\xi^{(3)}.$$

Используя последовательность (3.2.6), получаем окончательно расчленение при $\xi = 0, l$

$$T_1^{(2)} = \tilde{T}; \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}; \quad \omega_\xi^{(1)} = 0;$$

$$v^{(3)} = -v^{(1)} - v^{(2)}.$$

Анализ показывает, что возможны два варианта расчленения:

1) при $\xi = 0, l$

$$\omega^{(1)} = \tilde{\omega}; \quad \omega_\xi^{(1)} = \tilde{\omega}_\xi; \quad v^{(3)} = -v^{(1)}; \quad T_1^{(2)} = -T_1^{(1)} - T_1^{(3)};$$

2) при $\xi = 0, l$

$$v^{(3)} = \tilde{v}; \quad T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}; \quad \omega^{(1)} = 0; \quad \omega_\xi^{(1)} = -\omega_\xi^{(3)}.$$

Первый вариант нужно использовать для случая $\bar{\omega} \neq 0$ (или $\bar{\omega}_\xi \neq 0$), $\bar{v} = \bar{T} = 0$, второй – если $\bar{v} \neq 0$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\xi = \bar{T} = 0$. Расчленения для всех вариантов приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_1	$u^{(2)} = \bar{u}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, \omega_\xi^{(1)} = 0, v^{(3)} = -(v^{(1)} + v^{(2)})$
	$\omega^{(1)} = \bar{\omega}, \omega_\xi^{(1)} = \bar{\omega}_\xi, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$
	$v^{(3)} = \bar{v}, u^{(2)} = -u^{(3)}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, \omega_\xi^{(1)} = 0$
A_2	$T_1^{(2)} = \bar{T}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, \omega_\xi^{(1)} = 0, v^{(3)} = -(v^{(1)} + v^{(2)})$
	$\omega^{(1)} = \bar{\omega}, \omega_\xi^{(1)} = \bar{\omega}_\xi, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$
	$v^{(3)} = \bar{v}, T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}, \omega^{(1)} = 0, \omega_\xi^{(1)} = -\omega_\xi^{(3)}$
A_3	$u^{(2)} = \bar{u}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, M_1^{(1)} = 0, v^{(3)} = -(v^{(1)} + v^{(2)})$
	$v^{(1)} = \bar{v}, M_1^{(1)} = \bar{M}, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$
	$v^{(3)} = \bar{v}, u^{(2)} = -u^{(3)}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, M_1^{(1)} = 0$
A_4	$T_1^{(2)} = \bar{T}, \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}, M_1^{(1)} = 0, v^{(3)} = -(v^{(1)} + v^{(2)})$
	$\omega^{(1)} = \bar{\omega}, M_1^{(1)} = \bar{M}, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$
	$v^{(3)} = \bar{v}, T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}, \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$u^{(2)} = \bar{u}, S^{(3)} = -S^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(3)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$A_5 \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(3)}, u^{(2)} = -u^{(3)}$$

$$T^{(2)} = \bar{T}, S^{(3)} = -S^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(3)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$A_6 \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = -\omega_{\xi}^{(3)}, T_1^{(2)} = T_1^{(3)}$$

$$u^{(2)} = \bar{u}, S^{(3)} = -S^{(2)}, M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$A_7 \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, M_1^{(1)} = \bar{M}, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}, u^{(3)} = -u^{(1)}$$

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, S^{(3)} = -S^{(2)}, M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}, \omega^{(1)} = 0$$

$$A_8 \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}, M_1^{(1)} = \bar{M}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}, T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$u^{(2)} = \bar{u}, v^{(3)} = -v^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_9 \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(1)} = \bar{Q}, v^{(3)} = -v^{(1)}, u^{(2)} = -u^{(1)}$$

$$v^{(3)} = \bar{v}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, u^{(2)} = -(u^{(1)} + u^{(3)})$$

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, v^{(3)} = -v^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_{10} \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(1)} = \bar{Q}, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

$$v^{(3)} = \bar{v}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}$$

$$u^{(2)} = \bar{u}, v^{(3)} = -v^{(2)}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, M_1^{(1)} = 0$$

$$A_{11} \quad Q^{(1)} = \bar{Q}, M_1^{(1)} = \bar{M}, v^{(3)} = -v^{(1)}, u^{(2)} = -u^{(1)}$$

$$v^{(3)} = \bar{v}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, M_1^{(1)} = 0, u^{(2)} = -(u^{(1)} + u^{(3)})$$

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, v^{(3)} = -v^{(2)}, M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_{12} \quad M_1^{(1)} = \bar{M}, Q^{(1)} = \bar{Q}, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

$$v^{(3)} = \bar{v}, M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$u^{(2)} = \bar{u}, S^{(3)} = -S^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(2)}$$

$$A_{13} \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(1)} = \bar{Q}, S^{(3)} = -S^{(1)}, u^{(2)} = -u^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, u^{(2)} = -(u^{(1)} + u^{(3)})$$

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, S^{(3)} = -S^{(2)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_{14} \quad \omega_{\xi}^{(1)} = \bar{\omega}_{\xi}, Q^{(1)} = \bar{Q}, S^{(3)} = -S^{(1)}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

$$u^{(2)} = \bar{u}, S^{(3)} = -S^{(2)}, M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_{15} \quad M_1^{(1)} = \bar{M}, Q^{(1)} = \bar{Q}, S^{(3)} = -S^{(1)}, u^{(2)} = -u^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, M_1^{(1)} = 0, u^{(2)} = -(u^{(1)} + u^{(3)})$$

$$T_1^{(2)} = \bar{T}, S^{(3)} = -S^{(2)}, M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = -Q^{(3)}$$

$$A_{16} \quad M_1^{(1)} = \bar{M}, Q^{(1)} = \bar{Q}, S^{(3)} = -S^{(1)}, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$$

$$S^{(3)} = \bar{S}, Q^{(1)} = -Q^{(3)}, M_1^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

Отметим, что расчленение краевых условий может вносить существенную погрешность при решении краевых задач. Для повышения точности асимптотического решения можно рекомендовать методику Корнева-Вахромеева — исключение составляющих краевого эффекта (или основного состояния — это не имеет принципиального значения) из нерасчлененных выражений граничных условий [32].

3.3. УПРОЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Нелинейные уравнения движения имеют вид [87]³

$$T_{1\xi} + S_{\eta} + H_{\eta}/(2R) - [\psi(T_1 + T_2)]_{\eta}/2 - \rho R u_{tt} = 0;$$

$$S_{\xi} + T_{2\eta} - Q_2 - H_{\xi}/(2R) + (\psi_1 S + \psi_2 T_2) - [\psi(T_1 + T_2)]_{\xi}/2 - \rho R v_{tt} = 0; \quad (3.3.1)$$

$$Q_{1\xi} + Q_{2\eta} T_2 - (\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{\xi} - (\psi_1 S + \psi_2 T_2)_{\eta} - \rho R \omega_{tt} = 0;$$

$$\psi_1 = -\omega_{\xi}/R; \quad \psi_2 = -(\omega_{\eta} + v)/R;$$

$$\psi = (v_{\xi} - u_{\eta})/(2R).$$

Связи между усилиями (моментами) и деформациями (кривизнами и кручением), а также выражения для перерезывающих сил имеют тот же вид, что и в линейном случае. Геометрические соотношения запишем следующим образом [53]:

$$\epsilon_{11} = u_{\xi}/R + (\psi_1^2 + \psi^2)/2;$$

$$\epsilon_{22} = (v_{\eta} - \omega)/R + (\psi_1^2 + \psi^2)/2;$$

$$\epsilon_{12} = (v_{\xi} + u_{\eta})/(2R) + \psi_1 \psi_2/2; \quad \kappa_1 = \psi_{1\xi}/R;$$

$$\kappa_2 = \psi_{2\eta}/R; \quad \kappa_{12} = (\psi_{2\xi} + \psi_{1\eta} - \psi)/(2R).$$

На торцах оболочки могут быть заданы такие граничные условия

³ По сравнению с работой [87] в уравнения (3.3.1) добавлены динамические члены.

На торцах оболочки могут быть заданы такие граничные условия [53]:

$$v = 0 \text{ или } S - 1,5R^{-1}H + 0,5(T_1 + T_2)\psi = 0;$$

$$u = 0 \text{ или } T_1 = 0;$$

$$\omega = 0 \text{ или } Q_1 + R^{-1}H_\eta - \psi_1 T_1 - \psi_2 S = 0;$$

$$\psi_1 = 0 \text{ или } M_1 = 0.$$

В дополнение к параметрам α и β , характеризующим изменчивость напряженного состояния по пространственным координатам, введем дополнительные параметры θ , δ_1 , δ_2 и δ_3 , характеризующие изменчивость по времени, степень нелинейности и величину тангенциальных перемещений относительно прогиба:

$$\omega_t - \epsilon_1^\theta \omega; \quad \omega - \epsilon_1^{\delta_1} R;$$

$$u - \epsilon_1^{\delta_2} \omega; \quad v - \epsilon_1^{\delta_3} \omega.$$

Ниже выписаны полученные в соответствии с процедурой асимптотического расщепления предельные системы. Поскольку все они имеют аналоги в линейном случае [36, 37], не приводятся соотношения между усилиями (моментами) и деформациями (кривизнами).

Нелинейные безмоментные уравнения движения можно представить следующим образом ($\beta < 1/2$, $\alpha = \beta$, $\theta = 0$, $\delta_1 = 2\beta$, $\delta_2 = \delta_3 = \beta$):

$$T_{1\xi} + S_\eta - 0,5\{\psi(T_1 + T_2)\}_\eta = 0;$$

$$S_\xi + T_{2,\eta} + 0,5\{\psi(T_1 + T_2)\}_\xi + \{\psi_1 S + \psi_2 T_2\} = 0;$$

$$RT_2 - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_\xi - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_\eta - \rho R^2 \omega_{tt} = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u_\xi / R + 0,5\psi_1^2; \quad \epsilon_{22} = (v_\eta - \omega) / R + 0,5\psi_2^2; \quad (3.3.2)$$

$$\epsilon_{12} = 0,5R^{-1}(u_\eta + v_\xi) + 0,5\psi_1\psi_2;$$

$$\psi_1 = -R^{-1}\omega_\eta - R^{-1}\{v\}; \quad \psi_2 = R^{-1}\omega_\eta - R^{-1}\{v\}; \quad \psi = 0,5R^{-1}(v_\xi - u_\eta).$$

Члены, заключенные в фигурные скобки, следует учитывать лишь при $\beta = 0$.

Система уравнений нелинейной полубезмоментной теории имеет вид ($\beta < 1/2$; $\alpha = -1/2 + 2\beta$; $\theta = -1 + 2\beta$; $\delta_1 = 2\beta$; $\delta_2 = 1/2$; $\delta_3 = \beta$):

$$T_{1\xi} + S_{\eta} - 0,5\{\psi_1 T_1\}_{,\eta} = 0;$$

$$S_{\xi} + T_{2\eta} - \{M_{2\eta}/R + 0,5(\psi T_1)_{,\xi} + \psi S + \psi_2 T_2\} = 0;$$

$$M_{2\eta\eta} + RT_2 - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{,\xi} - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_{,\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u_{\xi}/R + 0,5\psi_1^2; \quad 0 = (v_{\eta} - \omega)/R + 0,5\psi_2^2; \quad (3.3.3)$$

$$0 = 0,5R^{-1}(u_{\eta} + v_{\xi}) + 0,5\psi_1\psi_2;$$

$$\psi_1 = -R^{-1}\omega_{\xi}; \quad \psi_2 = R^{-1}\omega_{\eta} - \{v/R\};$$

$$\psi = 0,5R^{-1}(v_{\xi} - u_{\eta}).$$

В этом случае выполняются нелинейные условия нерастяжимости и отсутствия сдвигов в срединной поверхности обшивки: $\epsilon_{22} = \epsilon_{12} = 0$.

Члены в фигурных скобках в формулах (3.3.3) должны приниматься во внимание только при $\beta = 0$. При $\delta_1 > 2\beta$ соотношения (3.3.3) линеаризуются.

Перейдем к построению погранслоя, позволяющего компенсировать невязки в граничных условиях. Начнем с дополнительного состояния для уравнений полубезмоментной теории. Оно быстро изменяется по ξ , а его изменяемость по окружной координате и по времени должна быть такой же, как и у основного состояния. Далее представим любую компоненту P напряженно-деформированного состояния в виде

$$P = P^{(o)} + P^{(k)}, \quad (3.3.4)$$

где индексами (o) и (k) обозначены величины, относящиеся соответственно к основному состоянию и краевому эффекту. Связь между порядками величин основного и дополнительного состояний определяется граничными условиями.

Расчленение краевых условий для нелинейного случая производится

аналогично линейному. Здесь для всех вариантов граничных условий справедлива оценка

$$\omega^{(k)} - \epsilon_1^{(1-2\beta)} \omega^{(0)}. \quad (3.3.5)$$

Отсюда автоматически следует оценка степени нелинейности дополнительного состояния, поскольку для основного она уже установлена.

Подставляя представление (3.3.4) в исходные уравнения и производя асимптотическое расщепление с учетом изменяемостей основного и дополнительного состояний (изменяемость по ξ дополнительного состояния подбирается, как обычно, из условия корректности соответствующей краевой задачи) и оценки (3.3.5), получаем $\alpha = 1/2$, $\beta < 1/2$, $\delta_2 = 1/2$, $\delta_3 = 1 - \beta$ и следующую предельную систему для определения краевого эффекта:

$$\begin{aligned} T_{1\xi}^{(\kappa)} + S_{\eta}^{\kappa} &= 0; \quad S_{\xi}^{(\kappa)} + T_{2\eta}^{(\kappa)} = 0; \\ M_{1\xi\xi}^{(\kappa)} + RT_2^{(\kappa)} + T_1^{(0)} \omega_{\xi\xi}^{(\kappa)} &= 0; \\ \epsilon_{11}^{(\kappa)} &= u_{\xi}^{(\kappa)}/R + (\omega_{\xi}^{(\kappa)})^2/(2R^2) + \omega_{\xi}^{(0)} \omega_{\xi}^{(\kappa)}/R^2; \\ \epsilon_{22}^{(\kappa)} &= -\omega_{\eta}^{(\kappa)}/R + \omega_{\eta}^{(0)} \omega_{\eta}^{(\kappa)}/R^2; \\ \epsilon_{12}^{(\kappa)} &= (\omega_{\xi}^{(\kappa)} + u_{\eta}^{(\kappa)})/(2R) + (\omega_{\xi}^{(\kappa)} \omega_{\eta}^{(\kappa)} + \\ &+ \omega_{\xi}^{(0)} \omega_{\eta}^{(\kappa)} + \omega_{\eta}^{(0)} \omega_{\xi}^{(\kappa)})/(2R^2). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

В соотношениях (3.3.6) переменные коэффициенты должны быть "заморожены" [34]. Например, если рассматривается край оболочки $\xi = 0$, следует вместо $\omega_{\xi}^{(0)}$ (или $\omega_{\eta}^{(0)}$) принимать $\omega_{\xi}^{(0)}|_{\xi=0}$ (или $\omega_{\eta}^{(0)}|_{\xi=0}$). Такое "замораживание" оправдано тем, что функция $\omega^{(0)}$ изменяется по координате ξ медленнее, чем $\omega^{(1)}$. Следовательно, коэффициенты уравнений (3.3.6) переменны только по координате η .

Соотношения краевого эффекта для безмоментных уравнений отличаются от уравнений (3.3.6) лишь наличием динамического члена $\rho R^2 \omega_{tt}^{(\kappa)}$.

Уравнения теории полых оболочек ($\alpha = \beta = 1/2$, $\theta = 0$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$) имеют вид

$$T_{1\xi} + S_{\eta} = 0; \quad S_{\xi} + T_{2\eta} = 0;$$

$$M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\eta} + M_{2\eta\eta} + \frac{RT_2}{2} + (\omega_{\xi}T_1 - \omega_{\eta}S)_{\xi} + \quad (3.3.7)$$

$$+ (\omega_{\xi}S + \omega_{\eta}T_2)_{\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u_{\xi}/R + (\omega_{\xi})^2/(2R^2);$$

$$\epsilon_{22} = (v_{\eta} - \omega)/R + (\omega_{\eta})^2/(2R^2);$$

$$\epsilon_{12} = (u_{\eta} + v_{\xi})/(2R) + (\omega_{\xi}\omega_{\eta})/(2R^2); \quad (3.3.8)$$

$$\kappa_1 = \psi_{1\xi}/R; \quad \kappa_2 = \psi_{2\eta}/R;$$

$$\kappa_{12} = (\psi_{2\xi} + \psi_{1\eta})/(2R).$$

Уравнения (3.3.7) линеаризуются при $\delta_1 > 2\beta$. Первые два уравнения движения здесь и далее, кроме специально оговоренных случаев, записываем в виде (3.3.7).

Соотношения, описывающие движение подкрепленной пластины, совпадают с уравнениями (3.3.7), (3.3.8) при отбрасывании подчеркнутого слагаемого.

Полученные выше предельные системы имеют второй порядок по координате t , в то время как исходная система — шестой. Это приводит к тому, что при собственных колебаниях оболочек описывается лишь низшая часть спектра, а при свободных и вынужденных — только установившийся процесс. Для исследования высокочастотных колебаний ($\beta < 1$, $\alpha = \beta$, $\theta = \beta$, $\delta_1 = 2\beta$, $\delta_2 = \delta_3 = -\beta$) или для построения переходного процесса служит следующая предельная система:

$$T_{1\xi} + S_{\eta} - \rho R u_{tt} = 0;$$

$$S_{\xi} + T_{2\eta} - \rho R v_{tt} = 0; \quad (3.3.9)$$

$$RT_2 + (\omega_{\xi}T_1 + \omega_{\eta}S)_{\xi} + (\omega_{\xi}S + \omega_{\eta}T_2)_{\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} = 0. \quad (3.3.10)$$

Геометрические соотношения здесь линейны. Уравнения (3.3.9) описывают движение конструктивно-ортоотропной пластины в своей плоскости ($u, v \gg w$). Линейное уравнение с переменными коэффициентами (3.3.10) служит для определения перемещения w .

Дополнительное состояние, необходимое для выполнения граничных условий по пространственным переменным, описывается соотношениями (3.3.7) и уравнением

$$M_{1\xi\xi} + RT_2 - \rho R^2 \omega_{tt} = 0. \quad (3.3.11)$$

Дальнейший асимптотический анализ проводим отдельно для каждого класса подкрепленных оболочек.

Для стрингерных оболочек динамическому состоянию с большим показателем изменчивости вдоль направляющей соответствует следующая система ($\alpha = 0; \beta = 1/2; \theta = -1; \delta_1 = \delta_2 = 1; \delta_3 = 0.5$):

$$M_{1\xi\xi}^{(1)} + 2H_{\xi\eta}^{(1)} + M_{2\eta\eta}^{(1)} + RT_2^{(1)} - R(\psi_1^{(1)} T_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} S^{(1)})_{\xi} - R(\psi_1^{(1)} S^{(1)} + \psi_2^{(1)} T_2^{(1)})_{\eta} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(1)} = 0; \quad (3.3.12)$$

$$\epsilon_{11}^{(1)} = u_{\xi}^{(1)}/R + (\omega_{\xi}^{(1)})^2/(2R^2);$$

$$0 = (v_{\eta}^{(1)} - \omega_{\eta}^{(1)})/R + (\omega_{\eta}^{(1)})^2/(2R^2);$$

$$0 = (u_{\eta}^{(1)} + v_{\xi}^{(1)})/(2R) + \omega_{\xi}^{(1)} \omega_{\eta}^{(1)}/(2R^2); \quad (3.3.13)$$

$$\kappa_{11}^{(1)} = -\omega_{\xi\xi}^{(1)}/R^2; \quad \kappa_{22}^{(1)} = -\omega_{\eta\eta}^{(1)}/R^2;$$

$$\kappa_{12}^{(1)} = -\omega_{\xi\eta}^{(1)}/R^2.$$

Дополнительным к состоянию (3.3.12), (3.3.13) является быстро изменяющееся как по направляющей, так и по образующей состояние, локализованное в окрестности торцов оболочки ($\alpha = \beta = 1/2; \theta = -1; \delta_1 = 1$ либо $\delta_1 = 3/2, \delta_2 = \delta_3 = 1/2$), т.е.

$$M_{1\xi\xi}^{(2)} + RT_2^{(2)} - R\psi_{2\eta}^{(1)} T_2^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{\xi}^{(2)}/R; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = (v_{\eta}^{(2)} - \omega^{(2)})/R + \psi_2^{(1)} \psi_2^{(2)}; \quad (3.3.14)$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{\xi}^{(2)} + u_{\eta}^{(2)})/(2R) + \psi_2^{(1)} \psi_1^{(2)}/2.$$

Предельные уравнения, описывающие преимущественно изгибные колебания стрингерной пластины, имеют вид (при $\beta = 1/2 + k$; $\alpha = k$; $\theta = -1 + 2k$; $\delta_1 = 1 + 2k$; $\delta_2 = 1 + k$; $\delta_3 = 1/2 + k$; $k > 0$)

$$M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\eta} + M_{2\eta\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} = 0. \quad (3.3.15)$$

Геометрические соотношения описываются соотношениями (3.3.13).

Колебания стрингерной пластины в направлении, перпендикулярном подкрепляющим ребрам, но с более высокими частотами, чем в предыдущем случае, описываются (при $\beta > 1/2$; $\alpha = \beta$; $\theta = -1 + 2\beta$; $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = \delta_3 = 1 - \beta$) следующими уравнениями:

$$M_{1\xi\xi} - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_\xi - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_\eta - \rho R^2 \omega_{tt} = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u_\xi / R + \psi_1^2 / 2; \quad \epsilon_{22} = v_\eta / R + \psi_2^2 / 2;$$

$$\epsilon_{12} = (v_\xi + u_\eta) / (2R) + \psi_1 \psi_2 / 2.$$

Для оболочек с преимущественно кольцевым подкреплением выделяются состояния с большим показателем изменчивости как в кольцевом, так и в продольном направлениях и состояние с большой изменчивостью вдоль образующей. Оба эти состояния динамические, поэтому решение задачи можно начинать с расчета одного или другого из них, в зависимости от того, какая часть спектра изучается.

Если расчет начинается с основного напряженного состояния, то получаем такие предельные системы:

$$а) \alpha = \beta = 1/4; \theta = 0; \delta_1 = 1/2; \delta_2 = \delta_3 = 1/4;$$

$$M_{2\eta\eta}^{(1)} + RT_2^{(1)} - R(\psi_1^{(1)} T_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} S^{(1)})_\xi - \\ - R(\psi_1^{(1)} S^{(1)} + \psi_2^{(1)} T_2^{(1)})_\eta - \rho R^2 \omega_{tt}^{(1)} = 0. \quad (3.3.16)$$

Для дополнительного состояния в этом случае имеем (при $\beta = 1/4$; $\alpha = 1/2$; $\theta = 0$; $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = 1/2$; $\delta_3 = 3/4$)

$$M_{1\xi\xi}^{(2)} + M_{2\eta\eta}^{(2)} + RT_2^{(2)} - R\psi_{2\eta}^{(1)} T_2^{(2)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_\xi^{(2)} / R + (\psi_1^{(2)})^2 / 2 + \psi_1^{(1)} \psi_1^{(2)};$$

$$\epsilon_{22}^{(2)} = -\omega^{(2)}/R + \psi_2^{(1)}\psi_2^{(2)}; \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^{(2)} &= (v_{\xi}^{(2)} + u_{\eta}^{(2)})/(2R) + \psi_1^{(2)}\psi_2^{(2)}/2 + \\ &+ (\psi_1^{(2)}\psi_2^{(2)} + \psi_2^{(1)}\psi_1^{(2)})/2; \end{aligned}$$

$$\delta) \alpha = \beta = 1/4; \theta = 0;$$

$$\delta_1 = 3/4; \delta_2 = \delta_3 = 1/4; \quad (3.3.18)$$

$$M_{1\xi\xi}^{(1)} + RT_2^{(1)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(1)} = 0.$$

Геометрические соотношения здесь линейны. Дополнительное состояние при этом описывается соотношениями ($\beta = 1/4; \alpha = 1/2; \theta = 0; \delta_1 = 1; \delta_2 = 1/2; \delta_3 = 3/4$)

$$\begin{aligned} M_{1\xi\xi}^{(2)} + M_{2\eta\eta}^{(2)} + RT_2^{(2)} - RT_1^{(1)}\psi_{1\xi}^{(2)} - RS^{(1)}(\psi_{2\xi}^{(2)} + \psi_{1\eta}^{(2)}) - \\ - RT_1^{(1)}\psi_{1\xi}^{(1)} - RS^{(1)}(\psi_{2\xi}^{(1)} + \psi_{1\eta}^{(1)}) - RT_2^{(1)}\psi_{2\eta}^{(1)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(2)} = 0; \end{aligned}$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{\xi}^{(2)}/R + (\psi_1^{(2)})^2/2 + \psi_1^{(1)}\psi_1^{(2)} + (\psi_1^{(1)})^2/2;$$

$$\epsilon_{22}^{(2)} = -\omega^{(2)}/R + (\psi_2^{(1)})^2/2;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{\xi}^{(2)} + u_{\eta}^{(2)})/(2R) + \psi_1^{(2)}\psi_2^{(2)}/2 +$$

$$+ (\psi_1^{(1)}\psi_2^{(2)} + \psi_2^{(1)}\psi_1^{(2)})/2 + \psi_1^{(1)}\psi_2^{(1)}/2;$$

$$\text{в) } \alpha = \beta = 1/4; \theta = 0; \delta_1 = 1; \delta_2 = \delta_3 = 1/4.$$

Здесь уравнения для основного состояния совпадают с (3.3.16), а для определения дополнительного состояния служат соотношения ($\beta = 1/4; \alpha = 1/2; \theta = 0; \delta_1 = 1; \delta_2 = 1/2; \delta_3 = 3/4$)

$$M_{1\xi\xi}^{(2)} + M_{2\eta\eta}^{(2)} + RT_2^{(2)} - RT_1^{(1)}\psi_{1\xi}^{(2)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{\xi}^{(2)}/R + (\psi_1^{(2)})^2/2; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = -\omega^{(2)}/R;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{\xi}^{(2)} + u_{\eta}^{(2)})/(2R) + \psi_1^{(2)}\psi_2^{(2)}/2 + \psi_2^{(1)}\psi_1^{(2)}/2.$$

Если же рассчитывать вначале состояние с преимущественной изменяемостью по ξ , то получаются такие предельные системы:

$$а) \beta = 1/4; \alpha = 1/2; \theta = 0; \delta_1 = 1; \delta_2 = 1/2; \delta_3 = 3/4;$$

$$M_{1\xi\xi}^{(2)} + M_{2\eta\eta}^{(2)} + RT_2^{(2)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{\xi}^{(2)}/R + (\psi_1^{(2)})^2/R; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = -\omega^{(2)}/R;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{\xi}^{(2)} + u_{\eta}^{(2)})/(2R) + \psi_1^{(2)}\psi_2^{(2)}/2;$$

$$\alpha = \beta = 1/4; \theta = 0; \delta_1 = 3/4; \delta_2 = 1/4; \delta_3 = 1/4;$$

$$M_{2\eta\eta}^{(1)} + RT_2^{(1)} - R\psi_{1\xi}^{(2)}T_1^{(1)} - \rho R^2 \omega_{tt}^{(1)} = 0.$$

Геометрические соотношения в этом случае линейризуются;

$$б) \beta = 1/4 + k; \alpha = 1/2 + k; \theta = 2k; \delta_1 = 1 + 2k; \delta_2 = 1/2 + k;$$

$$\delta_3 = 3/4 - k; \quad k > 0; \quad M_{1\xi\xi} + M_{2\eta\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} \quad (3.3.19)$$

$$\epsilon_{11} = u_{\xi}/R_1 + \psi_1^2/2; \quad \epsilon_{22} = -\omega/R; \quad \epsilon_{12} = v_{\xi}/(2R).$$

Уравнения (3.3.19) описывают преимущественно изгибные колебания пластины, подкрепленной в направлении η ребрами жесткости;

$$в) \beta > 1/2; \alpha = \beta; \theta = -1/2 + 2\beta; \delta_1 = 1/2;$$

$$\delta_2 = \delta_3 = 1/2 - \beta;$$

$$M_{2\eta\eta} - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{\xi} - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_{\eta} - \rho R^2 \omega_{tt} = 0. \quad (3.3.20)$$

Предельное уравнение (3.3.20) описывает колебания конструктивно-ортогройной пластины с более высокими частотами, чем в предыдущем случае.

Для вафельных оболочек проводим расщепление по параметру ϵ_5 . Введем новые параметры: γ , δ , а также γ_0 , δ_4 , δ_5 , δ_6 по формулам

$$\frac{\partial}{\partial \xi} - \epsilon_5^{-\gamma}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} - \epsilon_5^{-\delta}; \quad \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon_5^{-\gamma_0};$$

$$R^{-1} \omega - \epsilon_5^{\delta_4}; \quad u - \epsilon_5^{\delta_5} \omega; \quad v - \epsilon_5^{\delta_6} \omega.$$

В результате асимптотического расщепления по ϵ_5 уравнений (3.3.7), (3.3.8) получим такую предельную систему ($\gamma = \delta; \gamma_0 = \delta_4 = 2\delta; \delta_5 = \delta_6 = \delta$):

$$M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\eta} + M_{2\eta\eta} + RT_2 - \rho R^2 \omega_{tt} = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u_{\xi}/R + \omega_{\xi}^2/(2R^2);$$

$$\epsilon_{22} = (v_{\eta} - \omega)/R + \omega_{\eta}^2/(2R^2);$$

$$\epsilon_{12} = (u_{\eta} + v_{\xi})/(2R) + \omega_{\xi}\omega_{\eta}/(2R^2).$$
(3.3.21)

Уравнения (3.3.21) можно получить из исходной системы, используя гипотезы нерастяжимости для нейтральных слоев совокупных сечений:

$$u_{\xi} + \omega_{\xi}^2/(2R^2) - \epsilon_6 \omega_{\xi\xi} = 0 \quad \text{и} \quad v_{\eta} - \omega + (\omega_{\eta})^2/(2R)^2 - \epsilon_7 \omega_{\eta\eta}.$$

Дополнительное состояние описывается соотношениями (3.1.16), (3.1.18).

Методика расчленения граничных условий не отличается от изложенной ранее. Расчлененные граничные условия для уравнений нелинейной полубезмоментной теории (3.3.3) и краевого эффекта (3.3.6) (которыми можно пользоваться и в изотропном случае) приведены в табл. 3.6. Если основное состояние описывается безмоментными соотношениями (3.3.2), то табл. 3.6 можно пользоваться в случаях, когда применима безмоментная динамическая теория. При исследовании нелинейных краевых динамических задач для пологих стрингерных (уравнения (3.3.12), (3.3.14)), шпангоутных (уравнения (3.3.16), (3.3.17)) и вафельных (уравнения (3.3.21), (3.3.16), (3.3.18)) оболочек следует использовать расчленения, приведенные соответственно в табл. 3.7, 3.8, 3.9. Линеаризуя приведенные выше соотношения, получим уравнения, описывающие линейную динамику конструктивно-ортотропных оболочек.

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_1 \quad \omega^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = 0, L^{(\kappa)} = \nu_{\eta}^{(\kappa)} - \omega^{(\kappa)} + \\ + 0,5R^{-1}(\omega_{\eta}^{(\kappa)})^2 = 0$$

$$A_2 \quad \omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, L^{(\kappa)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = -\omega_{\xi}^{(0)}$$

$$A_3 \quad \omega^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(0)} = 0, L^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$$

$$A_4 \quad \omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, L^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$$

$$A_5 \quad \omega^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = 0, S^{(\kappa)} = -S^{(0)}$$

$$A_6 \quad \omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = -\omega_{\xi}^{(0)}, S^{(\kappa)} = -S^{(0)}$$

$$A_7 \quad \omega^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(0)} = 0, S^{(\kappa)} = -S^{(0)}, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$$

$$A_8 \quad \omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, S^{(\kappa)} = -S^{(0)}, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$$

$$A_9 \quad \omega^{(0)} = 0, \mu^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = -\omega_{\xi}^{(0)}$$

$$A_{10} \quad \omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, \omega_{\xi}^{(\kappa)} = -\omega_{\xi}^{(0)}$$

$$A_{11} \quad \omega^{(0)} = 0, \omega_{\xi}^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$$

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_{12}	$\omega^{(0)} = 0, T_1^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$
A_{13}	$u^{(0)} = 0, S^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, \omega_\xi^{(\kappa)} = -\omega_\xi^{(0)}$
A_{14}	$T_1^{(0)} = 0, S^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, \omega_\xi^{(\kappa)} = -\omega_\xi^{(0)}$
A_{15}	$u^{(0)} = 0, S^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$
A_{16}	$T_1^{(0)} = 0, S^{(0)} = 0, Q^{(\kappa)} = 0, M_1^{(\kappa)} = -M_1^{(0)}$

Таблица 3.7

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_1	$\omega^{(1)} = 0, \omega_\xi^{(1)} = 0, v_\eta^{(2)} - \omega^{(2)} = 0, u_{\eta\eta}^{(2)} + \omega_\xi^{(2)} = 0$
A_2	$\omega^{(1)} = 0, \omega_\xi^{(1)} = 0, v_\eta^{(2)} - \omega^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$
A_3	$\omega^{(1)} = 0, \omega_\xi^{(1)} = 0, v_\eta^{(2)} - \omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A_4	$\omega^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, v_\eta^{(2)} - \omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A_5	$\omega^{(1)} = 0, \omega_\xi^{(1)} = 0, u_{\eta\eta}^{(2)} + \omega_\xi^{(2)} = 0, S^{(2)} = -S^{(1)}$

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_6	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$
A_7	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A_8	$\omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$
A_9	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, u_{\eta\eta}^{(2)} + \omega_{\xi}^{(2)} = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}$
A_{10}	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$
A_{11}	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A_{12}	$\omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}$
A_{13}	$\omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}, S^{(2)} = -S^{(1)}$
A_{14}	$\omega_{\xi}^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}, S^{(2)} = -S^{(1)}$
A_{15}	$\omega_{\xi}^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}, S^{(2)} = -S^{(1)}$
A_{16}	$T_1^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = -Q^{(1)}, S^{(2)} = -S^{(1)}$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$ A_1

$$u^{(1)} = 0, v^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, v^{(1)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}$$

 A_2

$$v^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, v^{(1)} = -v^{(2)}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$$

 A_3

$$u^{(1)} = 0, v^{(1)} = 0, M_1^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = 0, v^{(1)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}$$

 A_4

$$v^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, M_1^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = 0, v^{(1)} = -v^{(2)}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$$

 A_5

$$u^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = -S^{(2)}$$

 A_6

$$T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)}$$

$$\omega^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = -S^{(2)}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_7 \quad \begin{array}{l} u^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, M_1^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

$$A_8 \quad \begin{array}{l} T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, M_1^{(2)} = 0, \omega^{(2)} = -\omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

$$A_9 \quad \begin{array}{l} u^{(1)} = 0, v^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, \omega_\xi^{(2)} = -\omega_\xi^{(1)} \\ \omega_\xi^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, v^{(1)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)} \end{array}$$

$$A_{10} \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, \omega_\xi^{(2)} = -\omega_\xi^{(1)} \\ \omega_\xi^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, v^{(1)} = -v^{(2)}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)} \end{array}$$

$$A_{11} \quad \begin{array}{l} u^{(1)} = 0, v^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \\ M_1^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, v^{(1)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)} \end{array}$$

$$A_{12} \quad \begin{array}{l} v^{(1)} = 0, T_1^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \\ M_1^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, v^{(1)} = -v^{(2)}, T_1^{(1)} = -T_1^{(2)} \end{array}$$

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_{13} \quad \begin{array}{l} u^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \\ \omega_{\xi}^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

$$A_{14} \quad \begin{array}{l} T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, \omega_{\xi}^{(2)} = -\omega_{\xi}^{(1)} \\ \omega_{\xi}^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

$$A_{15} \quad \begin{array}{l} u^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \\ M_1^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, u^{(1)} = -u^{(2)}, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

$$A_{16} \quad \begin{array}{l} T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = 0, Q^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \\ M_1^{(2)} = 0, Q^{(2)} = 0, T_1^{(1)} = 0, S^{(1)} = -S^{(2)} \end{array}$$

Перейдем к устойчивости. Докритическое состояние принимается однородным и безмоментным. Это предположение можно считать оправданным, поскольку влияние моментности докритического состояния на устойчивость подкрепленных оболочек значительно меньше, чем в изотропном случае (если внешняя нагрузка приложена без эксцентриситета). Уравнения устойчивости, геометрические соотношения и граничные условия получаются путем линеаризации полной системы нелинейных уравнений равновесия (3.3.1). Операторным методом система уравнений устойчивости сводится к одному уравнению восьмого порядка относительно потенциальной функции Φ , которое не приводится из-за своей громоздкости. В дополнение к определенным раньше параметрам α, β , характеризующим волнообразование по образующей и направ-

Вариант
условийРасчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$

$$A_1 \quad \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$$

$$A_2 \quad \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

$$A_3 \quad \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$$

$$A_4 \quad \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

$$A_5 \quad \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -(S^{(1)} + S^{(2)})$$

$$A_6 \quad \omega^{(1)} = 0, \omega_{\xi}^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -(S^{(1)} + S^{(2)})$$

$$A_7 \quad \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -(S^{(1)} + S^{(2)})$$

$$A_8 \quad \omega^{(1)} = 0, M_1^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$$

$$A_9 \quad \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$$

$$A_{10} \quad \omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)}), v^{(3)} = -v^{(1)}$$

$$A_{11} \quad M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, v^{(3)} = -v^{(1)}$$

$$A_{12} \quad M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, v^{(3)} = -v^{(1)}, T_1^{(2)} = -(T_1^{(1)} + T_1^{(3)})$$

Вариант условий	Расчлененные краевые условия при $\xi = 0, l$
A_{13}	$\omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -(S^{(1)} + S^{(2)})$
A_{14}	$\omega_{\xi}^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$
A_{15}	$M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, u^{(2)} = -u^{(1)}, S^{(3)} = -(S^{(1)} + S^{(2)})$
A_{16}	$M_1^{(1)} = 0, Q^{(1)} = 0, T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}, S^{(3)} = -S^{(1)}$

ляющей соответственно, введем параметры λ, t_1, t_2, t_3 при помощи соотношений $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^{4\lambda}; \bar{T}_{10} \sim \epsilon_1^{t_1}; \bar{T}_{20} \sim \epsilon_1^{t_2}; \bar{S}_0 \sim \epsilon_1^{t_3}$.

Здесь $\{\bar{T}_{10}, \bar{T}_{20}, \bar{S}_0\} = \{T_{10}, T_{20}, S_0\}/B_2, T_{10}, T_{20}, S_0$ — осевое, кольцевое и сдвиговое усилия в докритическом состоянии; $\lambda = 0$ для вафельных, $\lambda = 1/2$ для стрингерных и $\lambda = 1/4$ для шпангоутных оболочек.

В соответствии с описанной ранее процедурой асимптотического интегрирования получены следующие предельные системы:

$$a) \alpha = 2\beta - 1/2 - \lambda; \beta < \min\{1/2, 1/2 + \lambda\};$$

$$t_1 = 1 + 2\lambda; t_2 = 1 + 2\lambda + 2\beta; t_3 = 1 + 2\lambda + \beta.$$

Характер волнообразования соответствует основному напряженному состоянию. Приближенное уравнение устойчивости имеет вид

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \nu_{21}^2 \epsilon_4^{-1} \epsilon_7^2) \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right]^2 \Phi_{\eta\eta\eta\eta}^{(0)} + \epsilon_4^{-1} \Phi_{\xi\xi\xi\xi}^{(0)} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right] \left[(-2\nu_{12} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 + \bar{T}_{10}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

$$+ 2S_0 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Big] \Phi^{(0)} = 0; \quad (3.3.22)$$

$$б) \alpha = 1/2; \beta < \min\{1/2, 1/2 + \lambda\};$$

$$t_1 = 1 + 2\lambda; \quad t_2 = 1 + 2\alpha + 2\beta; \quad t_3 = 1 + 2\lambda + 2\beta.$$

Здесь имеет место волнообразование типа краевого эффекта. В этом случае

$$(\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_6^2) \Phi_{\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \Phi^{(1)} + (-2\nu_{12} \epsilon_6 + \bar{T}_{10}) \Phi_{\xi\xi}^{(1)} = 0. \quad (3.3.23)$$

Анализ полученных соотношений показывает, что знак эксцентриситета шпангоутов влияет лишь на формы волнообразования, соответствующие основному напряженному состоянию, а стрингеров – краевому эффекту.

Уравнение (3.3.22) является аналогом соотношений полубезмоментной теории и применимо при слабо выраженном волнообразовании по образующей, что характерно для случая превалирующего внешнего давления, а также для потери устойчивости длинных оболочек. Уравнение (3.3.23) может быть использовано для описания осесимметричной потери устойчивости, а также неосесимметричного выпучивания в краевой зоне сжатой оболочки при некоторых граничных условиях. Использование расчлененных уравнений и граничных условий позволяет во многих практически важных случаях определять собственные числа на основе одного уравнения четвертого порядка по продольной координате ξ . Для построения же форм потери устойчивости необходимо привлекать оба уравнения (3.3.22), (3.3.23), так как определяемые ими состояния взаимно дополняют друг друга:

$$в) \alpha = 1/2; \beta = \min\{1/2, 1/2 + \lambda\};$$

$$t_1 = 1 + 2\lambda; \quad t_2 = 1 + 2\lambda + 2\beta; \quad t_3 = 1 - 2\lambda + \beta.$$

Характер волнообразования соответствует напряженно-деформированному состоянию с большим показателем изменчивости (теория полых оболочек). Разрешающее уравнение принимает вид

$$\nabla_2^4 \left[\nabla_1^4 + \epsilon_1^2 \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \right] \Phi +$$

$$+ \epsilon_1^{-2} \left[\nabla_3^4 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right]^2 \Phi = 0. \quad (3.3.24)$$

Уравнение (3.3.24) является аналогом уравнения Власова–Доннелла в изотропном случае, применимо в широком диапазоне нагрузок и для реальных подкрепленных оболочек дает хорошие результаты. Однако оно имеет восьмой порядок по координатам. Дальнейшие упрощения возможны, если учесть характерные для основных типов подкрепленных оболочек соотношения между геометрико-жесткостными параметрами.

Стрингерные оболочки:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 2 + 2\beta; \quad t_3 = 2 + \beta.$$

Формам потери устойчивости с большим показателем изменчивости в кольцевом направлении соответствует уравнение

$$\begin{aligned} \epsilon_4^{-1} \left[1 + 2\epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \left[\epsilon_1^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \right. \\ \left. \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2S_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Уравнение (3.3.25) можно получить вариационным методом, приняв гипотезы отсутствия сдвигов и нерастяжимости срединной поверхности обшивки в кольцевом направлении.

Случай $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ – волнообразование с большим показателем изменчивости как по направляющей, так и по образующей. Соответствующее разрешающее уравнение будет таким:

$$\begin{aligned} \Phi + 2\epsilon_6 \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi + (\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_6^2) \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \\ + 2(\epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} - \nu_{12} \epsilon_6^2) \Phi_{\xi\xi\eta\eta} + (\epsilon_1^2 \epsilon_4 + \epsilon_6^2) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Уравнение (3.3.26) описывает состояние, имеющее характер краевого эффекта. Оно может быть получено вариационным методом, если в качестве основных деформаций принять $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ и κ_{11} . Опреде-

ление собственных чисел существенно облегчается за счет того, что параметрические слагаемые входят лишь в уравнение (3.3.25). Для построения же формы потери устойчивости нужно использовать решения уравнений (3.3.25), (3.3.26), причем связь между ними осуществляется через граничные условия. Как следует из соотношений (3.3.25), (3.3.26), критические усилия и формы потери устойчивости существенно зависят от величины и знака эксцентриситета стрингеров.

При $\beta > 1/2$ уравнение (3.3.25) переходит в уравнение устойчивости, а (3.3.26) является уравнением преимущественно тангенциальной деформации пластины, эксцентрично подкрепленной ребрами в одном направлении и нагруженной сжимающими ($\bar{T}_{10}, \bar{T}_{20}$) и сдвигающим (\bar{S}_0) усилиями. В этом случае следует в уравнении (3.3.25) опустить первые два, а в уравнении (3.3.26) – первые три слагаемых.

Шпангоутные оболочки:

$$\alpha = 1/4, \beta = 1/4, t_1 = 1, t_2 = 1/2, t_3 = 3/4.$$

Формы волнообразования с большим показателем изменчивости описываются уравнением четвертого порядка по ξ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{-2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\epsilon_7 \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \nu_{21} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \right] \Phi_{\xi\xi} + \epsilon_7^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \right. \\ \left. - \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi + \nabla_2^4 \left[\epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \epsilon_1^{-2} \bar{T}_{20} \right] \Phi_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

С энергетической точки зрения основными деформациями являются $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ и κ_{22} (при $\alpha = 1/2; \beta = 1/4; t_1 = 1; t_2 = 1/2; t_3 = 3/4$).

Если происходит потеря устойчивости по коротким продольным волнам, то соответствующее приближенное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi + 2\epsilon_7 \Phi_{\eta\eta} + \epsilon_1^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \\ + \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Здесь основные деформации $\epsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}$.

Уравнение (3.3.27) является исходным для определения собственных чисел в случае превалирующего внешнего давления, а (3.3.28) – осевого сжатия или кручения. Форма потери устойчивости, как и для стрингерной оболочки, представляется в виде суммы решений уравнений (3.3.27) и (3.3.28). Коэффициенты уравнений (3.3.27), (3.3.28) существенно зависят как от величины, так и от знака эксцентриситета. При $\beta > 1/4$ соотношение (3.3.28) переходит в уравнение устойчивости эксцентрично подкрепленной пластины (если опустить в нем первые два члена), а уравнение (3.3.27) принимает вид

$$\nabla_2^4 \left[\epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \epsilon_1^{-2} \bar{T}_{20} \right] \Phi_{\eta\eta} + \epsilon_7^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0. \quad (3.3.29)$$

При $\bar{T}_{20} = 0$ уравнение (3.3.29) описывает преимущественно тангенциальную деформацию пластины, а при $\epsilon_7 = 0$ распадается на уравнения тангенциальной деформации пластины и устойчивости стержня под действием сжимающей нагрузки \bar{T}_{20} . В общем случае такое расщепление невозможно.

Вафельные оболочки. Волнообразование с большим показателем изменчивости ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$) описывается уравнением (3.3.24). Дальнейшие упрощения здесь достигаются в результате асимптотического анализа по малому параметру ϵ_5 . В результате имеем

$$\begin{aligned} \gamma = \delta = 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = 2; \quad t_3 = 3/2; \\ \epsilon_1^2 \nabla_1^4 \Phi_{\eta\eta} + 1/2 \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 \left[1 + (\epsilon_6 + \epsilon_7) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi_{\xi\xi} + \\ + \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

К уравнению (3.3.30) можно прийти, используя вариационный метод и приняв гипотезы нерастяжимости нейтральных слоев совокупных сечений обшивки и ребер. Уравнение (3.3.30) справедливо при больших

крутильных жесткостях ребер ($\epsilon_3 - 1$). Если же эти жесткости малы ($\epsilon_3 - \epsilon_1$), то в операторе ∇_1^4 должен быть опущен второй член. Дополнительные состояния описываются уравнениями (3.3.16), (3.3.18). Как и для стрингерной оболочки, параметрические члены входят в одно уравнение четвертого порядка по ξ (3.3.30). Поскольку коэффициенты последнего существенно зависят от параметров ϵ_6, ϵ_7 , влияние эксцентриситета ребер на критические усилия и формы потери устойчивости значительно. Дополнительные же состояния, определяемые уравнениями (3.3.16), (3.3.18), не зависят от эксцентриситета подкреплений, т.е.

$$a - \beta; \quad \beta > 1/2;$$

$$\nabla_2^4 \left[\nabla_1^4 + \bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi + \nabla_3^4 \Phi = 0. \quad (3.3.31)$$

Для центрально подкрепленной оболочки уравнение (3.3.31) распадается на уравнения устойчивости и тангенциальной деформации подкрепленной перекрестной системы ребер пластины. В общем случае такое распадение, вообще говоря, невозможно, так как между указанными уравнениями имеется связь, определяемая абсолютной величиной эксцентриситетов. Дальнейший анализ по ϵ_5 приводит к соотношениям, аналогичным (3.3.30), (3.3.16), (3.3.18), только во втором слагаемом уравнения (3.3.20) должна быть опущена единица.

Для решения соответствующих задач на собственные значения нужно использовать расчленения граничных условий, приведенные в табл. 3.6...3.9.

Рассмотрим некоторые примеры применения предложенных приближенных систем.

Пусть круговая цилиндрическая конструктивно-ортотропная оболочка находится под действием равномерного осевого сжатия. Рассмотрим сначала случай классического шарнирного опирания торцов:

$$\text{при } \xi = 0, \quad l \omega = v = T_1 = M_1^* \equiv M_1 - e_1 T_1 = 0. \quad (3.3.32)$$

Зададим функцию Φ так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (3.3.32):

$$\Phi = A \sin \left[\frac{m\pi\xi}{l} \right] \cos(m\eta).$$

Для различных типов подкрепленных оболочек получаем следующие результаты.

Стрингерные оболочки. В этом случае $m = 1$, и для центрально подкрепленной оболочки после минимизации по n получаем

$$\begin{aligned} T_{10} &= 2\epsilon_1 \epsilon_2^{1/2} \epsilon_4^{-1/2} + \epsilon_1^2 \pi^2 l^{-2}; \\ n^2 &= k_0 = \pi l^{-1} \epsilon_1^{-1} \epsilon_2^{-1/2} \epsilon_4^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

При $\epsilon_6 \neq 0$ точно произвести минимизацию по n не удастся, но можно применить метод возмущения по ϵ_6 , полагая $n^2 = k_0 + \epsilon_6 k_1 + \dots$.

Ограничиваясь двумя членами разложения, имеем

$$\begin{aligned} n^2 &= k_0 (1 + 0,25k_0 \epsilon_6); \\ \bar{T}_{10} &= \epsilon_4^{-1} \left[\frac{\pi}{n^2 l} \right]^2 (1 - \epsilon_6^2 n^4) + \epsilon_1^2 \left[\left[\frac{\pi}{l} \right]^2 + \epsilon_2 \left[\frac{n^2 l}{\pi} \right]^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Для случая жесткой заделки краев стрингерной оболочки при $\epsilon_6 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{T}_{10} &= 2\sqrt{3} \epsilon_1 \epsilon_2^{1/2} \epsilon_4^{-1/2} + 4\epsilon_1^2 \pi^2 l^{-2}; \\ n^2 &= k_1 = 2\pi \epsilon_1^{-1} l^{-1} (3\epsilon_2 \epsilon_4)^{-1/2}. \end{aligned}$$

При $\epsilon_6 \neq 0$ можно, применяя метод возмущения по ϵ_6 , получить

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_4^{-1} \left[\frac{2\pi}{n^2 l} \right]^2 (1 - \epsilon_6^2 n^4) + \epsilon_1^2 \left[\left[\frac{2\pi}{l} \right]^2 + 3\epsilon_2 \left[\frac{n^2 l}{\pi} \right]^2 \right]. \quad (3.3.34')$$

Здесь n^2 определяется выражением (3.3.34) ($k_0 \rightarrow k_1$).

Для оценки применимости приближенных уравнений на рис.3.1 представлены результаты расчета критических усилий осевого сжатия на основе полного уравнения восьмого порядка (3.3.31), взятые из работы [53] и по формуле (3.3.34'). Принимались следующие значения

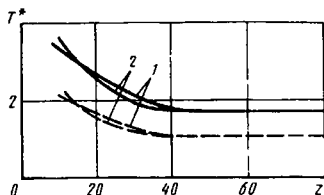


Рис. 3.1. Сравнение критических усилий осевого сжатия стрингерной цилиндрической оболочки, определенных по точным и асимптотическим формулам

геометрико-жесткостных параметров: $\epsilon_2 = 0,008$; $\epsilon_3 = 0,024$; $\epsilon_4 = 0,7$; $\epsilon_5 = 0,7$; $|\epsilon_6 \epsilon_1^{-2}| = 0,4$. Сплошные кривые соответствуют наружному, пунктирные – внутреннему подкреплению; 1 – точное, 2 –

приближенное решение; $z = l^2 R \sqrt{B_2 / (12 D_1)}$; $\bar{T}^* = 0,5 \bar{T}_{10} R / \sqrt{B_1 D_2}$.

Сопоставление построенных кривых показывает их хорошее соответствие во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметра z . При этом необходимо учесть, что принятые геометрико-жесткостные параметры соответствуют ребрам относительно малой жесткости, а этот случай является наименее благоприятным при асимптотическом анализе.

Шпангоутные оболочки. В этом случае для шарнирного опирания

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_1^2 \left[\left(\frac{\pi \pi}{l} \right)^2 + \left[\epsilon_1^2 \epsilon_2 \pi^4 + (1 - \epsilon_7 \pi^2)^2 \right] \left(\frac{\pi \pi}{l} \right)^{-2} \right]. \quad (3.3.35)$$

Минимум выражения (3.3.35) достигается при $\pi^2 = \epsilon_7 (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2)^{-1/2}$. Отсюда видно, что несимметричная форма потери устойчивости возможна лишь при сравнительно большой абсолютной величине эксцентриситета внутренних шпангоутов. В остальных случаях реализуется осесимметричная форма потери устойчивости ($\pi = 0$), описываемая уравнением (3.3.26). При этом

$$\bar{T}_{10} = (2/R) \sqrt{B_2 D_1} (1 + \epsilon_1^{-2} \epsilon_2^{-1} \epsilon_7^2)^{-1/2}.$$

Вафельные оболочки. Рассмотрим случай малой крутильной жесткости ребер ($\epsilon_3 - \epsilon_1$). Критическое усилие осевого сжатия при шарнирном опирании торцов можно тогда записать так:

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_1^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{m\pi}{n^2 l} \right)^{-2} \right] + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 n^{-2} [1 - (\epsilon_6 + \epsilon_7) n^2]^2. \quad (3.3.36)$$

Минимизируя выражение (3.3.36) по l и m , находим

$$m = (l/\pi) \epsilon_2^{1/4} n; \quad (3.3.37)$$

$$n^2 = 4[\epsilon_1^2 \epsilon_2^{1/2} \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + (\epsilon_6 + \epsilon_7)^2 \epsilon_2^{-1/2}]^{-1/2}$$

Для оболочки, регулярно подкрепленной ребрами без эксцентриситета ($\epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$; $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$), выражение (3.3.36) имеет вид

$$\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1 \epsilon_5^{1/2}.$$

Точное же решение может быть записано следующим образом [53]:

$$\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1 \epsilon_5^{1/2} (1 + \epsilon_5)^{1/2}.$$

Как и следовало ожидать, приближенное решение соответствует первому члену разложения точного решения в ряд по малому параметру ϵ_5 .

Предварительное расщепление уравнений и граничных условий позволяет эффективно использовать для поиска собственных значений вариационные методы. Этому способствует понижение порядка уравнения, а также то, что вариационный метод используется для построения "гладкой" части решения.

3.4. РАСЧЕТ ОТКРЫТЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим открытую конструктивно-ортотропную оболочку средней относительной длины. Для дальнейших выкладок удобно ввести параметры α_1 , α_2 и β_1 , β_2 , характеризующие изменяемость напряженных состояний вдоль образующей и направляющей:

$$\Phi_{\xi}^{(j)} = \epsilon_1^{-\alpha_j} \Phi^{(j)}, \quad \Phi_{\eta}^{(j)} = \epsilon_1^{-\beta_j} \Phi^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Индексами (1), (2) обозначаются величины, относящиеся к обобщенному и простому краевым эффектам соответственно. Необходимость введения двух параметров β_1 и β_2 связана с тем, что для открытой оболочки, в отличие от замкнутой, величина β не определяется соотношением $\epsilon_1^{-\beta} = m$, а зависит от изменяемости напряженного состояния по продольной координате.

Пусть частный интеграл, соответствующий поверхностной нагрузке, найден. При этом в общем случае граничные условия на контуре оболочки не удовлетворяются. Соответствующие невязки на продольных кромках могут быть компенсированы решением типа обобщенного краевого эффекта, уравнение которого при $\beta_1 < 1/2$, $\alpha_1 = -1/2 + 2\beta_1$ имеет вид

$$\epsilon_2 \epsilon_4 \frac{\partial^8 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^8} + \epsilon_1^{-2} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (3.4.1)$$

Уравнение (3.4.1) позволяет удовлетворить лишь двум граничным условиям на каждой из криволинейных кромок оболочки. Поэтому вблизи торцов возникает напряженное состояние типа простого краевого эффекта ($\beta_2 < 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$):

$$\frac{\partial^4 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^4} + \epsilon_1^{-2} \Phi^{(2)} = 0. \quad (3.4.2)$$

Решение уравнения (3.4.2) не может, вообще говоря, удовлетворить краевым условиям на продольных кромках оболочки. Возникающие при этом невязки быстро переменны по η ($\partial/\partial \eta - \epsilon_1^{-1/2}$) и затухают на расстоянии $\xi \sim \sqrt{\epsilon_1}$ от торцов. Поэтому вблизи углов панели имеем напряженное состояние типа двумерного пограничного слоя, зоны влияния которого весьма малы, и в дальнейшем угловые двумерные погранслои рассматривать не будем, хотя и они могут быть построены по методике, описанной в [60].

Найдем расчленение граничных условий на торцах оболочки, соответствующее упрощенным уравнениям (3.4.1), (3.4.2). Рассмотрим для иллюстрации вариант граничных условий A_6 . Учитывая изменяемость каждого из элементарных состояний (3.4.1), (3.4.2) и формулы

(3.1.2), (3.1.4), определим характеристические показатели входящих в граничные условия величин:

$$\mu(S) = -3 + 7\beta_1 - \beta_2; \quad \mu(T_1) = -2 + 6\beta_1 - 2\beta_2;$$

$$\mu(\omega) = -2 + 4\beta_1; \quad \mu(\omega_\xi) = -3 + 6\beta_1.$$

Вид канонических последовательностей зависит от соотношения β_1 и β_2 :

$$\begin{array}{lll} \beta_1 < \beta_2 & \beta_1 = \beta_2 & \beta_1 > \beta_2. \\ \omega, T_1, \omega_\xi, S & \omega - T_1, S - \omega_\xi & T_1, \omega, S, \omega_\xi. \end{array}$$

Получающиеся на основе выписанных канонических последовательностей расчленения различны. Однако результаты расчетов с использованием этих расчленений практически совпадают, поэтому в дальнейшем выбираем одно из них (при $\beta_1 = \beta_2$) для всех случаев. Если

$\tilde{S} = \tilde{\omega}_\xi = 0$, то это расчленение имеет вид

$$\text{при } \xi = 0, \quad T_1^{(1)} = \tilde{T}; \quad \omega^{(1)} = \tilde{\omega}; \quad (3.4.3)$$

$$S^{(2)} = -S^{(1)}; \quad \omega_\xi^{(2)} = -\omega_\xi^{(1)}. \quad (3.4.4)$$

В случае $\tilde{T}_1 = \tilde{\omega} = 0$ получаем

$$\text{при } \xi = 0, \quad S^{(2)} = \tilde{S}; \quad \omega_\xi^{(2)} = \tilde{\omega}_\xi; \quad (3.4.5)$$

$$T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}. \quad (3.4.6)$$

Расчленения (3.4.3), (3.4.4) и (3.4.5), (3.4.6) совпадают с приведенными в табл. 3.2.

Из полученных результатов видно, что расчет открытой оболочки можно производить следующим образом: если \tilde{S} и $\tilde{\omega}_\xi$ отличны от нуля, сначала рассчитывается простой краевой эффект, затем решается уравнение (3.4.1) при граничных условиях (3.4.6) и исходных условиях на прямолинейных кромках, а в случае $\tilde{T} \neq 0$, $\tilde{\omega} \neq 0$ процедура начинается с расчета обобщенного краевого эффекта. Таким образом,

благодаря применению асимптотического метода исследование краевой задачи можно производить в два этапа, решая на каждом уравнение четвертого порядка по ξ . Расчет простого краевого эффекта не представляет труда, а для решения уравнения (3.4.1) можно применять метод разложения по тригонометрическим функциям. Анализ граничных условий для остальных вариантов табл. 3.1 проводится аналогично, а расчленения совпадают с приведенными в табл. 3.2. При этом граничные условия $A_2, A_4, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{15}$ и $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}, A_{14}, A_{16}$ сводятся для уравнения (3.4.1) к условиям шарнирного опирания ($\Phi^{(1)} = \Phi_{\xi\xi}^{(1)} = 0$ при $\xi = 0, l$) и заземления ($\Phi^{(1)} = \Phi_{\xi}^{(1)} = 0$ при $\xi = 0, l$) соответственно. В первом случае функцию

$\Phi^{(1)}$ можно представить в продольном направлении тригонометрическими функциями, во втором для расчета обобщенного краевого эффекта целесообразно применять либо полиномы Хорви, либо балочные функции.

Для оценки точности предложенного подхода проведем расчет открытой изотропной круговой цилиндрической оболочки, прямолинейные кромки которой ($\eta = 0, \eta = 1$) заземлены, а на торцах $\xi = 0, l$ заданы следующие граничные условия:

$$v = w = M_1 = 0; \quad T_1 = T_m \sin(m\pi\eta).$$

Расчлененные граничные условия для этого случая (см. табл. 3.2) таковы:

$$\text{при } \xi = 0, l \quad v^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} = T_m \sin(m\pi\eta);$$

$$w^{(2)} = -\nu \Phi_{\xi\xi\eta\eta}^{(1)}; \quad M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}.$$

Для потенциальной функции обобщенного краевого эффекта получаем следующее выражение:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\eta) \sin(\lambda_k \xi) + P\xi(\xi - l) \sin(m\pi\eta). \quad (3.4.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_k = & \exp(-\alpha_k \eta) (A_{1k} \cos(\beta_k \eta) + A_{2k} \sin(\beta_k \eta)) + \\ & + \exp(-\beta_k \eta) (A_{3k} \cos(\alpha_k \eta) + A_{4k} \sin(\alpha_k \eta)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^m \{ \exp[a_k(\eta - 1)] [A_k \cos(\beta_k(1 - \eta)) + \\
& + A_{2k} \sin(\beta_k(1 - \eta))] + \exp[\beta_k(\eta - 1)] \times \\
& \times [A_{3k} \cos(a_k(1 - \eta)) + A_{4k} \sin(a_k(1 - \eta))] \} - \psi_k; \\
\psi_k & = m^8 \pi^8 P a_k^2 [a^2 m^8 \pi^8 + \lambda_k^4 (1 - \nu^2)]^{-1} \sin(m\pi\eta); \quad (3.4.8)
\end{aligned}$$

$$\lambda_k = \pi k / l; \quad P = T_m R / (2Bm^2 \pi^2);$$

$$a_k = \sqrt{\sqrt{2} + 1} R_k; \quad \beta_k = \sqrt{\sqrt{2} - 1} R_k; \quad R_k = \sqrt{8\lambda_k \sqrt{a}}.$$

Постоянные A_{ik} определяются из граничных условий на прямолинейных кромках. Ряд, частная сумма которого дается выражением (3.4.8), сходится как $\exp(-\sqrt{k} \eta) / k^3$, поэтому при вычислениях достаточно удерживать лишь его несколько первых членов.

Решение типа простого краевого эффекта у торца $\xi = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)} & = -0,25 P \pi^4 m^4 a^{-6} \exp(-b\xi) (\sin(b\xi) - \\
& - \nu m^2 \pi^2 b^{-2} \cos(b\xi)) \sin(m\pi\eta). \quad (3.4.9)
\end{aligned}$$

Результаты расчета при $\nu = 0,3$; $\epsilon_1 = 0,25 \cdot 10^{-2}$; $m = 1$; $l = 3$; $P = 1$ представлены на рис.3.2 и 3.3, где принято $\bar{\omega} = \omega/R$; $\bar{M} = M_1 / (2B\epsilon_1^2)$. Кривая 1 соответствует точному решению в одиных тригонометрических рядах, кривые 2 и 3 — приближенным решениям, построенным без учета и с учетом простого краевого эффекта соответственно. Из приведенных результатов видно, что расчет открытой оболочки по теории обобщенного краевого эффекта дает хорошие результаты только вдали от торцов. Вблизи же криволинейных кромок необходим учет простого краевого эффекта.

Рассмотрим еще пример расчета открытой стрингерной цилиндрической оболочки, нагруженной неравномерным внешним давлением $q = P \sin(m\pi\eta) \sin(\lambda \xi)$. На каждой из кромок заданы граничные условия, отличные от шарнирного опирания:

$$\text{при } \xi = 0, \quad l \quad S = T_1 = \omega = \dot{M}_1 = 0;$$

$$\text{при } \eta = 0, \quad l \quad u = v = \omega = \omega_\eta = 0.$$

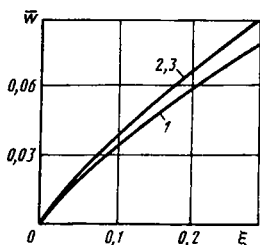


Рис. 3.2. Расчет нормального прогиба открытой оболочки различными методами

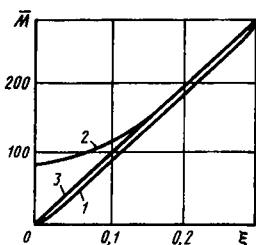


Рис. 3.3. Расчет изгибающего момента в открытой оболочке различными методами (демонстрирует необходимость учета простого краевого эффекта у криволинейного края)

Частное решение уравнений равновесия имеет вид

$$\Phi^{(0)} = Q_{mn} \sin(m\pi\eta) \sin(\lambda \xi), \quad (3.4.10)$$

где

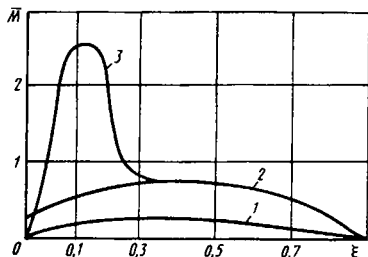
$$Q_{mn} = P/[\lambda_n^8 + 2(\epsilon_3 + \epsilon_4 \epsilon_5^{-1}) \lambda_n^6 (m\pi)^2 + (\epsilon_2 + 4\epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_4) \lambda_n^4 (m\pi)^4 + 2\epsilon_4 (\epsilon_2 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_3) \lambda_n^2 (m\pi)^6 + \epsilon_2 \epsilon_4 (m\pi)^8 - 2\epsilon_4 (2\epsilon_3 \epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \epsilon_2 + \epsilon_3) \lambda_n^2 (m\pi)^4 - 2\epsilon_2 \epsilon_4 (m\pi)^6] + \epsilon_1^{-2} \lambda_n^4 + 2\epsilon_4 (\epsilon_2 \epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \epsilon_2) \lambda_n^2 (m\pi)^2 + \epsilon_2 \epsilon_4 (m\pi)^4 - 4\epsilon_3^{-1} \epsilon_4^{-1} (\epsilon_5 + \nu_{12} \epsilon_3 \epsilon_4) \lambda_n^4 (m\pi)^2]. \quad (3.4.11)$$

Расчлененные граничные условия на криволинейных краях имеют следующий вид (см. табл. 3.2):

$$\text{при } \xi = 0, l \quad S^{(2)} = \bar{S}; M_1^{(2)} = 0; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}. \quad (3.4.12)$$

Здесь \bar{S} – невязка в краевых условиях за счет частного решения (3.4.10). Построение общего решения необходимо начинать с расчета состояния типа простого краевого эффекта (3.4.2) при граничных условиях (3.4.12). В итоге имеем

Рис. 3.4. Продольный изгибающий момент в открытой оболочке



$$\Phi^{(2)} = 2Q_{mn} \lambda^3 b^{-3} \{ \exp(-b_1 \xi) \cos(b_1 \xi) + (-1)^n \exp[b_1(\xi - l)] \cos b_1(\xi - l) \} \sin(mn\eta), \quad b_1 = (2\epsilon_1)^{-1/2}.$$

Для обобщенного краевого эффекта также получаем решение в замкнутом виде:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\eta) \sin(\lambda_k \xi) + 2\{1 + [(-1)^n - 1]\xi/l\} \times \\ \times (Q_{mn} b \lambda^3 / (\epsilon_4 \pi m)) \sin(mn\eta).$$

Здесь значения $\varphi_n(\eta)$ определяются формулой (3.4.8), в которой нужно положить

$$\psi_k = 4\epsilon_2 m^4 \pi^3 Q_{mn} b \lambda^3 [1 - (-1)^{n+k}] / [k(\epsilon_2 \epsilon_4 \pi^8 m^8 + \epsilon_1^{-2} \lambda_k^4)]; \\ R_k = \sqrt{\lambda_k} / \left[2 \sqrt{2}^8 \sqrt{\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4} \right].$$

Результаты численного расчета осевого изгибающего момента при следующих значениях параметров: $\nu = 0,3$, $m = 1$, $n = 3$, $l = 3$, $\eta = 0,3$, $E_c F / (BR) = 0,3$, $E_c J / BR^3 = 0,3 \cdot 10^{-6}$ приведены на рис.3.4. Кривая 1 соответствует частному решению, кривая 2 – решению с учетом обобщенного краевого эффекта, кривая 3 – полному решению по изложенной методике.

Видно, что учет краевого эффекта имеет определяющее значение при нахождении характеристик напряженного состояния вблизи торцов открытой оболочки.

3.5. ОБОЛОЧКИ С РЕДКО РАСПОЛОЖЕННЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Для расчета оболочек с редко расположенными стрингерами часто применяют подход, основанный на независимом расчете отсеков между ребрами с последующим удовлетворением условий сопряжения. Однако эффективность этого метода зависит от возможности аналитически рассчитывать открытую оболочку (панель) при произвольных граничных условиях. Ниже для этой цели использованы результаты подразд. 3.4.

Рассмотрим изотропную стрингерную оболочку как набор панелей, сопряженных через упругие ребра. Если частное решение, отвечающее поверхностной нагрузке, уже найдено, то напряженно-деформированное состояние каждой панели описывается уравнениями равновесия, условиями сопряжения и некоторыми граничными условиями при $\xi = 0, l$. В соответствии с полученными ранее результатами имеем для расчета каждого отсека две краевые задачи. Первая описывается уравнениями обобщенного краевого эффекта (3.4.1), условиями сопряжения и расчлененными граничными условиями на торцах. Вторая – уравнениями простого краевого эффекта с соответствующими граничными условиями. Для расчета обобщенного краевого эффекта можно применять метод разложения по тригонометрическим или балочным функциям или по полиномам Хорви в продольном направлении. Решение же уравнения простого краевого эффекта элементарно.

В качестве примера рассмотрим расчет замкнутой цилиндрической оболочки, подкрепленной по линии $\eta = 0$ стрингером с граничными условиями A_8 при $\bar{T} = \bar{S} = \bar{\omega} = 0$. Расчлененные граничные условия в этом случае (см. табл. 3.2) таковы:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0, l \quad S^{(2)} = 0; \quad M_1^{(2)} = \bar{M}; \\ T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Решение уравнения простого краевого эффекта (3.4.2) при граничных условиях (3.5.1) таково:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} = C[\exp(-\lambda\xi)(\sin(\lambda\xi) - \cos(\lambda\xi))] + \exp(\lambda(\xi - \\ - l))[\sin(\lambda(\xi - l)) - \cos(\lambda(\xi - l))]\cos(m\eta), \end{aligned}$$

где

$$C = 0,5aM_m B^{-1}; \quad \lambda = (2a)^{-1/2}.$$

Рис. 3.5. Кольцевой изгибающий момент в стрингерной цилиндрической оболочке

Краевая задача для расчета обобщенного краевого эффекта описывается уравнением (3.4.1), а также условиями сопряжения и граничными условиями при $\xi = 0, l$:

$$\Phi^{(1)} = -a^2 m^{-4} \cos(m\eta); \quad \Phi_{\xi\xi}^{(1)} = a^{-1} \cos(m\eta). \quad (3.5.2)$$

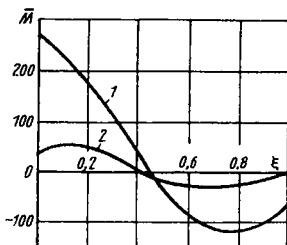
Представим функцию $\Phi^{(1)}$ в виде, удовлетворяющем граничным условиям (3.5.2):

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\eta) \sin \left[\frac{n\pi\xi}{l} \right] + C\lambda^2 [(\xi - l)^2 - a^{-2} m^{-4}] \cos(m\eta).$$

Функции $\varphi_n(\eta)$ без труда определяются в замкнутом виде (здесь они не приведены из-за довольно громоздкого вида).

Численный расчет производился при $\nu = 0,3$; $l = 2$; $hR^{-1} = 0,003$; $F(Rh)^{-1} = 0,166$; $Jh^{-1}R^{-3} = 1,4 \cdot 10^{-4}$; $m = 3$; $M_m(Eh)^{-1} = 0,001$.

Относительные значения кольцевого изгибающего момента $\bar{M} = 0,5(1 - \nu^2)a^{-2}(Eh)^{-1}M_2$ приведены на рис.3.5. Кривой 1 соответствует значение $\eta = 0,5$, кривой 2 - $\eta = 1$.



ГЛАВА 4 СОСТАВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Метод асимптотического анализа позволяет свести исходную задачу к решению целого ряда предельных уравнений. Эти уравнения дают возможность аналитически решать широкий класс практически важных задач, однако имеют и существенные недостатки. Так, при различных изменчивостях напряженно-деформированного состояния (НДС) придется использовать различные приближенные соотношения (в дальнейшем в таких случаях будем говорить о неоднородности разложения по параметру изменчивости).

В гидромеханике [29] получил развитие метод составных уравнений. Он применяется для построения равномерно пригодных решений при однородных состояниях. Основная идея метода составных уравнений может быть сформулирована следующим образом:

а) определяются члены дифференциальных уравнений, пренебрежение которыми в прямом приближении порождает неоднородности;

б) возможно проще аппроксимируются эти члены, при этом сохраняются их существенные черты в области неоднородности.

Далее предложено использовать объединение в составном уравнении предельных соотношений асимптотического расщепления, справедливых при малых и больших значениях параметра изменчивости напряженно-деформированного состояния. Уравнения, включаемые в составные предельные уравнения, будем называть порождающими. Для задач теории оболочек составное уравнение основного состояния получено в результате объединения соотношений безмоментной, полубезмоментной теорий и тангенциальной деформации пластины, а в составное уравнение краевого эффекта включены соотношения простого краевого эффекта и изгиба пластины. При этом выражения для перемещений, деформаций, усилий и моментов получаются также в результате указанной процедуры.

Построенные в результате объединения предельных соотношений составные уравнения имеют четвертый порядок по продольной координате и применимы во всем диапазоне изменения НДС [13, 14].

4.1. СОСТАВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В составное уравнение, которое будем условно называть составным уравнением основного состояния, включаем предельные соотношения полубезмоментной теории и обобщенного плоского напряженного состояния

$$\mathcal{L}_0 \Phi = \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (4.1.1)$$

Уравнение (4.1.1) не может быть получено в результате предельного перехода ни при какой изменчивости НДС. В то же время это

уравнение справедливо при любой изменяемости НДС, поскольку при малых изменяемостях основную роль в нем играют члены полубезмоментной теории, а при больших – плоского напряженного состояния. Уравнение (4.1.1) отличается от уравнения полубезмоментной теории подчеркнутыми членами.

Для получения выражений перемещений, деформаций, усилий и моментов необходимо включить в них все члены, входящие в соответствующие выражения для порождающих соотношений.

Выполнив указанную процедуру для определения перемещений, деформаций, усилий и моментов, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 u &= -\Phi_{\xi\eta} + \nu\Phi_{\xi\xi\xi}; & v &= \Phi_{\eta\eta} + (2 + \nu)\Phi_{\xi\xi\eta}; & w &= \nabla^4\Phi; \\
 \epsilon_{11} &= \frac{1}{R}(\nu\Phi_{\xi\xi\xi\xi} - \Phi_{\xi\xi\eta\eta}); & \epsilon_{22} &= \frac{1}{R}(\nu\Phi_{\xi\xi\eta\eta} - \Phi_{\xi\xi\xi\xi}); \\
 \epsilon_{12} &= 2\frac{1 + \nu}{R}\Phi_{\xi\xi\xi\eta}; & \kappa_{11} &= \frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\xi\xi}; & \kappa_{22} &= \frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\eta\eta}; \\
 \kappa_{12} &= \frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\xi\eta}; & T_1 &= -\frac{B_1}{R}\Phi_{\xi\xi\eta\eta}; & & (4.1.2) \\
 T_2 &= -\frac{B_1}{R}\left[\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{\epsilon^2}{1 - \nu^2}\nabla_{0\eta}\Phi_{\eta\eta\eta\eta}\right]; \\
 S &= \frac{B_1}{R}\Phi_{\xi\xi\xi\eta}; & M_1 &= -\nu\frac{D}{R^2}\nabla_{0\eta}\Phi_{\eta\eta\eta\eta}; \\
 M_2 &= -\frac{D}{R^2}\nabla_{0\eta}\Phi_{\eta\eta\eta\eta}; & H &= (1 - \nu)\frac{D}{R^2}\nabla_{0\eta}\Phi_{\xi\eta\eta\eta\eta}; \\
 N_1 &= -\frac{D}{R^3}\frac{\partial^5}{\partial\xi\partial\eta^4}\nabla_{0\eta}\Phi; & N_2 &= -\frac{D}{R^3}\frac{\partial^5}{\partial\eta^5}\nabla_{0\eta}\Phi.
 \end{aligned}$$

Составное уравнение основного состояния имеет четвертый порядок по продольной координате и, следовательно, при его интегрировании могут быть удовлетворены лишь по два граничных условия на каждом краю оболочки. В связи с этим необходимо построить дополнительное состояние, компенсирующее невязки в граничных условиях.

Рассмотрим построение дополнительного состояния, которое будем называть составным уравнением краевого эффекта. В составное урав-

нение краевого эффекта включаем предельные соотношения простого краевого эффекта и изгиба пластины:

$$\mathcal{L}_k \Phi = \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \frac{1-\nu^2}{\epsilon^2} \Phi = 0. \quad (4.1.3)$$

Уравнение (4.1.3) отличается от уравнения простого краевого эффекта подчеркнутыми членами. При малой изменчивости НДС основное значение в нем играют члены уравнения простого краевого эффекта, а при большой — изгиба пластины.

Объединяя соответствующие выражения для порождающих соотношений, получаем следующие выражения для перемещений, деформаций, усилий и моментов:

$$\begin{aligned} u &= \nu\Phi_{\xi\xi\xi}; & v &= (2+\nu)\Phi_{\xi\xi\eta}; & \omega &= \nabla^4\Phi; & \epsilon_{11} &= \frac{\nu}{R} \Phi_{\xi\xi\xi\xi}; \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{R}(\nu\Phi_{\xi\xi\eta\eta} - \Phi_{\xi\xi\xi\xi}); & \epsilon_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{R} \Phi_{\xi\xi\xi\eta}; \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\xi\xi}; & \kappa_{22} &= -\frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\eta\eta}; & \kappa_{12} &= -\frac{1}{R^2}\nabla^4\Phi_{\xi\eta}; \\ T_1 &= -\frac{B_1}{R} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}; & T_2 &= -\frac{B_1}{R} \Phi_{\xi\xi\xi\xi}; \\ S &= \frac{B_1}{R} \Phi_{\xi\xi\xi\eta}; & M_1 &= -\frac{D}{R^2}\nabla^4(\Phi_{\xi\xi} + \nu\Phi_{\eta\eta}); \\ M_2 &= -\frac{D}{R^2}\nabla^4(\nu\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}); & H &= (1-\nu)\frac{D}{R^2}\nabla^4\Phi_{\xi\eta}; \\ N_1 &= -\frac{D}{R^3}\nabla^6\Phi_{\xi}; & N_2 &= -\frac{D}{R^3}\nabla^6\Phi_{\eta}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Рассмотрим физико-геометрические гипотезы, соответствующие построенным составным уравнениям.

Составное уравнение основного состояния (4.1.1) можно получить на основе следующих гипотез:

1) в геометрических соотношениях кривизна в окружном направлении значительно больше кривизны в продольном направлении и кручения, т.е.

$$\kappa_{11} \ll \kappa_{22}; \quad \kappa_{12} \ll \kappa_{22}; \quad (4.1.5)$$

2) в третьем уравнении равновесия можно пренебречь изгибающим моментом M_1 .

Принятые гипотезы эквивалентны утверждению, что при построении составного основного напряженного состояния, справедливого при любых изменениях, взамен исходной системы соотношений необходимо исходить из следующей системы уравнений.

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{R} u_{\xi}; & \epsilon_{22} &= -\frac{1}{R} (v_{\eta} - \omega); & \epsilon_{12} &= \frac{1}{R} (v_{\xi} + u_{\eta}); \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{R^2} (\omega_{\eta\eta} + v_{\eta}); & 0 &= \omega_{\xi\eta} + v_{\xi}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Соотношения упругости:

$$T_1 = B(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}); \quad T_2 = B(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}); \quad (4.1.7)$$

$$S = \frac{1-\nu}{2} B\epsilon_{12}; \quad M_1 = \nu D\kappa_{22};$$

$$M_2 = D\kappa_{22}; \quad H = (1-\nu)D\kappa_{12}.$$

Уравнения равновесия:

$$T_{1\xi} + S_{\eta} + RP_1 = 0;$$

$$S_{\xi} + T_{2\eta} + N_2 + RP_2 = 0;$$

$$N_{2\eta} - T_2 - RP_3 = 0; \quad (4.1.8)$$

$$M_{1\xi} + H_{\eta} - RN_1 = 0;$$

$$M_{2\eta} - RN_2 = 0.$$

Выражения (4.1.6)...(4.1.8) являются составными уравнениями равновесия для основного напряженного состояния. Эти соотношения позволяют записать составные уравнения равновесия в перемещениях:

$$u_{\xi\xi} + \frac{1-\nu}{2} u_{\eta\eta} + \frac{1+\nu}{2} v_{\xi\eta} - \nu\omega_{\xi} + R^2 p_1 = 0;$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} v_{\xi\eta} + (1+\epsilon^2)v_{\eta\eta} - \quad (4.1.9)$$

$$-\left[1 - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] \omega_\eta + R^2 p_2 = 0; \quad (4.1.9)$$

$$-\nu u_\xi - \left[1 - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] v_\eta + \left[1 + \epsilon^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}\right] \omega - R^2 p_3 = 0.$$

Составное уравнение основного состояния может быть получено вариационным методом на основе приведенных гипотез.

Операторным методом для однородной системы уравнений (4.1.9) получаем следующее составное разрешающее уравнение основного состояния:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2(1 - \nu) \Phi_{\xi\xi\eta\eta} + 2(2 + \nu) \Phi_{\xi\xi\eta\eta\eta\eta} = 0. \quad (4.1.10)$$

В уравнение (4.1.10) по сравнению с уравнением (4.1.1) дополнительно входят два последних члена. Однако, как показывают результаты численных расчетов, их влияние незначительно. Поэтому составное уравнение основного состояния в форме (4.1.1) предпочтительнее.

Следует отметить, что составное уравнение основного состояния можно также получить, используя гипотезы отсутствия сдвигов и нерастяжимости срединной поверхности оболочки в кольцевом направлении

$$v_\eta - \omega = 0; \quad u_\eta + v_\xi = 0. \quad (4.1.11)$$

При этом в отличие от классической полубезмоментной теории величины κ_{11} и κ_{12} в выражениях для моментов необходимо сохранить. Гипотезы (4.1.11) приводят к следующей упрощенной системе уравнений.

Геометрические соотношения:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{R} u_\xi; \quad 0 = v_\eta - \omega; \quad 0 = v_\xi + u_\eta; \quad \kappa_{11} = -\frac{1}{R^2} \omega_{\xi\xi};$$

$$\kappa_{22} = -\frac{1}{R^2} (\omega_{\eta\eta} + v_\eta); \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{R^2} (\omega_{\xi\eta} + v_\xi). \quad (4.1.12)$$

Соотношения упругости:

$$T_1 = B(1 - \nu^2)\epsilon_{11}; \quad 0 = \epsilon_{22} - \nu\epsilon_{11}; \quad S = \frac{1 - \nu}{2} B\epsilon_{12};$$

$$M_1 = D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}); \quad M_2 = D(\nu\kappa_{11} + \kappa_{12}). \quad (4.1.13)$$

Уравнения равновесия:

$$T_{1\xi} + S_{\eta} + RP_1 = 0;$$

$$S_{\xi} + T_{2\eta} + N_2 + RP_2 = 0;$$

$$N_{1\xi} + N_{2\eta} - T_2 - RP_3 = 0; \quad (4.1.14)$$

$$M_{1\xi} + H_{\eta} - RN_1 = 0;$$

$$H_{\xi} + M_{2\eta} - RN_2 = 0.$$

Составные уравнения равновесия в перемещениях, соответствующие гипотезам $\epsilon_{12} = \epsilon_{22} = 0$, можно представить следующим образом:

$$u_{\eta} + v_{\xi} + R^2 p_1 = 0;$$

$$v_{\eta} - w + R^2 p_2 = 0;$$

$$\omega_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{\epsilon^2}{1 - \nu} \left\{ \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \omega_{\eta\eta\eta\eta} + \right.$$

$$\left. + (1 - \nu)\omega_{\xi\xi\eta\eta} + (3 - 2\nu)\omega_{\xi\xi\eta\eta\eta\eta} \right\} - R^2 p_3 = 0. \quad (4.1.15)$$

Операторным методом для однородной системы (4.1.15) получаем следующее разрешающее уравнение:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} +$$

$$+ \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + (1 - \nu)\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + (3 - 2\nu)\Phi_{\xi\xi\eta\eta\eta\eta} = 0. \quad (4.1.16)$$

Уравнение (4.1.16) отличается от уравнения (4.1.1) двумя последними членами, влияние которых незначительно.

Составное уравнение краевого эффекта можно получить, принимая следующие физико-геометрические гипотезы для исходных уравнений:

1) в геометрических соотношениях главную роль играет нормальный прогиб

$$\omega \gg u; \quad \omega \gg v; \quad (4.1.17)$$

2) в соотношениях упругости можно положить

$$\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22} = 0; \quad (4.1.18)$$

3) во втором уравнении равновесия можно положить

$$N_2 = 0. \quad (4.1.19)$$

Принятые гипотезы позволяют для построения составного дополнительного состояния использовать следующую систему упрощенных уравнений.

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{R} u_{\xi}; \quad \epsilon_{22} = -\frac{\omega}{R}; \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{R} (v_{\xi} + u_{\eta}); \quad \kappa_{11} = -\frac{1}{R^2} \omega_{\xi\xi}; \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{R^2} \omega_{\eta\eta}; \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{R^2} \omega_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}); \quad T_2 = B(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}); \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B\epsilon_{12}; \quad M_1 = D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}); \\ M_2 &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}); \quad H = (1-\nu)D\kappa_{12}. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_{\eta} &= 0; \quad S_{\xi} + T_{2\eta} = 0; \quad M_{1\xi} + H_{\eta} - RN_1 = 0; \\ N_{1\xi} + N_{2\eta} - T_2 - RP_3 &= 0; \quad H_{\xi} + M_{2\eta} - RN_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Здесь нормальная составляющая поверхностной нагрузки $P_3 = 0$ и оставлена для перехода к динамическому случаю.

Выражения (4.1.22) являются составными уравнениями равновесия напряженного состояния типа краевого эффекта. Используя соотношения (4.1.20)...(4.1.22), получаем следующие составные уравнения краевого эффекта в перемещениях:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} - \nu \omega_{\xi} &= 0; \\ \frac{1 + \nu}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1 - \nu}{2} v_{\xi\eta} - \omega_{\eta} &= 0; \\ -\nu u_{\xi} + (1 + \epsilon^2 \nabla^4) \omega - R^2 p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Операторным методом для однородной системы уравнений (4.1.23) получаем составное уравнение краевого эффекта (4.1.3). Его можно получить также вариационным методом, используя гипотезы (4.1.17)...(4.1.19) и сохраняя в выражении энергии величины κ_{22} и κ_{12} .

Для построения корректных краевых задач, соответствующих полученным составным уравнениям, необходимо выполнить расчленение исходных граничных условий. Канонический вид величин, входящих в граничные условия, для составных уравнений получим в результате объединения канонического вида соответствующих величин для порождающих уравнений.

Рассмотрим для примера объединение канонического вида граничных условий варианта A_8 :

полубезмоментная теория и простой краевой эффект

$$(T_1, \omega, S, M_1);$$

плоское напряженное состояние и изгиб пластины

$$(T_1, S, \omega, M_1).$$

Из канонической записи следует, что T_1 относится к основному состоянию, M_1 — к дополнительному, а ω и S — к обоим состояниям. Следовательно, для рассматриваемых граничных условий канонический вид запишется так:

$$T_1, S - \omega, M_1.$$

Аналогично получаем канонический вид всех вариантов граничных условий для составных уравнений (4.1.1), (4.1.3). Окончательные результаты приведены в табл. 4.1. Полученные канонические соотношения позволяют записать расчленения граничных условий, приведенные в табл. 4.2.

Таблица 4.1

Вариант граничных условий	Граничные условия в каноническом виде
A_1	$v, u - \omega, \omega_\xi$
A_2	$v, T_1 - \omega, \omega_\xi$
A_3	$v, u - \omega, M_1$
A_4	$v, T_1 - \omega, M_1$
A_5	$u, S - \omega, \omega_\xi$
A_6	$T_1, S - \omega, \omega_\xi$
A_7	$u, S - \omega, M_1$
A_8	$T_1, S - \omega, M_1$
A_9	$v, u, \omega_\xi, \bar{N}_1$
A_{10}	$v, T_1, \omega_\xi, \bar{N}_1$
A_{11}	v, u, M_1, \bar{N}_1

Вариант
границных
условий

Граничные условия в каноническом виде

 A_{12}

$$v, T_1, M_1, \tilde{N}_1$$

 A_{13}

$$u, S \sim \omega_\xi, \tilde{N}_1$$

 A_{14}

$$T_1, S \sim \omega_\xi, \tilde{N}_1$$

 A_{15}

$$u, S \sim M_1, \tilde{N}_1$$

 A_{16}

$$T_1, S \sim M_1, \tilde{N}_1$$

Таблица 4.2

Вариант
границных
условий

Расчлененные граничные условия при $\xi = 0, l$

 A_1

$$v^{(1)} = \tilde{V}, u^{(1)} + u^{(2)} = \tilde{U}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \tilde{W}, \omega_\xi^{(2)} = \tilde{W}_\xi$$

 A_2

$$v^{(1)} = \tilde{V}, T^{(1)} + T^{(2)} = \tilde{T}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \tilde{W}, \omega_\xi^{(2)} = \tilde{W}_\xi$$

 A_3

$$v^{(1)} = \tilde{V}, u^{(1)} + u^{(2)} = \tilde{U}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \tilde{W}, M_1^{(2)} = \tilde{M}$$

 A_4

$$v^{(1)} = \tilde{V}, T^{(1)} + T^{(2)} = \tilde{T}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \tilde{W}, M_1^{(2)} = \tilde{M}$$

 A_5

$$u^{(1)} = \tilde{U}, S^{(1)} + S^{(2)} = \tilde{S}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \tilde{W}, \omega_\xi^{(2)} = \tilde{W}_\xi$$

Вариант
граничных
условий

Расчлененные граничные условия при $\xi = 0, l$

$$A_6 \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \bar{W}, \omega_\xi^{(2)} = \bar{W}_\xi$$

$$A_7 \quad u^{(1)} = \bar{U}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \bar{W}, M_1^{(2)} = \bar{M}$$

$$A_8 \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \bar{W}, M_1^{(2)} = \bar{M}$$

$$A_9 \quad v^{(1)} = \bar{V}, u^{(1)} = \bar{U}, \omega_\xi^{(2)} = \bar{W}_\xi, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{10} \quad v^{(1)} = \bar{V}, T_1^{(1)} = \bar{T}, \omega_\xi^{(2)} = \bar{W}_\xi, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{11} \quad v^{(1)} = \bar{V}, u^{(1)} = \bar{U}, M_1^{(2)} = \bar{M}, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{12} \quad v^{(1)} = \bar{V}, T_1^{(1)} = \bar{T}, M_1^{(2)} = \bar{M}, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{13} \quad u^{(1)} = \bar{U}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, \omega_\xi^{(1)} + \omega_\xi^{(2)} = \bar{W}_\xi, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{14} \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, \omega_\xi^{(1)} + \omega_\xi^{(2)} = \bar{W}_\xi, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{15} \quad u^{(1)} = \bar{U}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = \bar{M}, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

$$A_{16} \quad T_1^{(1)} = \bar{T}, S^{(1)} + S^{(2)} = \bar{S}, M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = \bar{M}, \bar{N}_1^{(2)} = \bar{N}$$

Для вариантов граничных условий $A_1 \dots A_8$ и $A_{13} \dots A_{16}$, содержащих величины основного и дополнительного состояний, можно построить решение составного уравнения краевого эффекта (4.1.3) и исключить составляющие этого типа из граничных условий, а затем решать краевую задачу для составного уравнения основного состояния.

4.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА СОСТАВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для оценки точности и области применимости составных уравнений проведем сначала сравнение квадратов корней характеристических уравнений, соответствующих исходному разрешающему уравнению и составным уравнениям (4.1.1), (4.1.3).

Потенциальную функцию представим в виде

$$\Phi = C e^{\lambda \xi} \cos m \eta. \quad (4.2.1)$$

Подставляя выражение (4.2.1) в исходное разрешающее уравнение, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & (1 + 4\epsilon^2)\lambda^8 - 4(1 + \epsilon^2)n^2\lambda^6 + \left\{ [6 + \epsilon^2(1 - \nu^2)]n^4 - \right. \\ & \left. - (8 - 2\nu^2)n^2 + (1 - \nu^2) \left[\frac{1}{\epsilon^2} + 4 \right] \right\} \lambda^2 - 4n^2(n^2 - 1)^2\lambda^2 + \\ & + n^4(n^2 - 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Для составного уравнения основного состояния получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\left[n^4 + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \right] \lambda^4 - 2n^6\lambda^2 + (n^2 - 1)n^4 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^2 = n^6 \pm n^2 \left[(2n^2 - 1) \left[n^4 + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \right] - n^2 \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \right]^{1/2} / \\ \left[n^4 + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

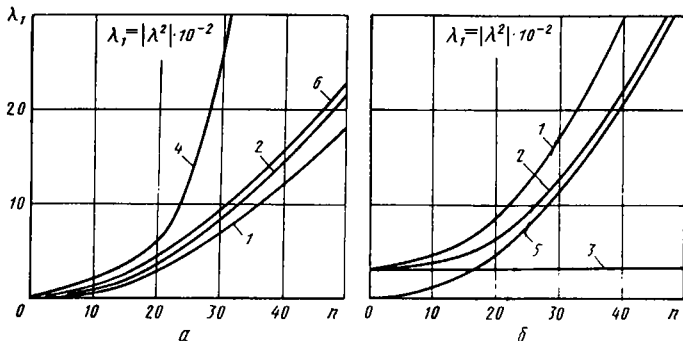


Рис. 4.1. Сравнение решений точного уравнения (4.2.2), приближенных уравнений и составных уравнений (4.2.3), (4.2.4):

a — составное уравнение основного состояния (2); полубезмоментная теория (4); плоское напряженное состояние (6); *б* — составное уравнение краевого эффекта (2); краевой эффект (3); уравнения изгиба пластины (5)

Характеристическое уравнение для составного уравнения краевого эффекта и его решение будут записаны так:

$$\lambda^4 - 2\pi^2 \lambda^2 + \pi^4 + \frac{1 - \nu^2}{\epsilon^2} = 0;$$

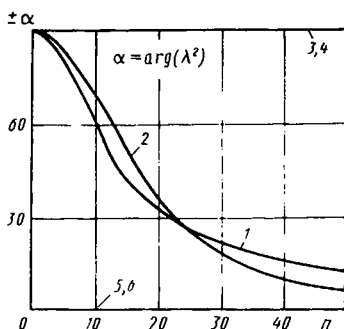
$$\lambda_{3,4}^2 = \pi^2 \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\epsilon}. \quad (4.2.4)$$

Решение уравнения (4.2.2) выполнялось численно для следующих значений параметров: $\epsilon^2 = 10^{-5}$, $\nu = 0.3$. Сравнение полученных результатов с решениями составных уравнений (4.2.3), (4.2.4) приведено на рис.4.1, 4.2. На рис.4.1, *a*, *б* приведены значения модуля λ^2 , а на рис.4.2 — аргумента λ^2 . Кривыми 1 на обоих рисунках обозначены точные решения, кривыми 2 — решения по методу составных уравнений, кривыми 3 — решения по методу простого краевого эффекта, кривыми 4 — решения полубезмоментной теории, кривыми 5 — изгиба пластины, кривыми 6 — плоского напряженного состояния. Как видно из рисунков, составные уравнения действительно пригодны для всех π и осуществляют гладкое сращивание решений, справедливых при

Рис. 4.2. Сравнение значений аргумента λ^2 на основе точного уравнения (4.2.2), приближенных уравнений и составных уравнений

больших и малых изменяемости напряженно-деформированного состояния.

Сравнения с результатами других авторов для ряда задач подтверждают удовлетворительную точность метода составных уравнений.



4.3. СОСТАВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим линейные колебания гладких упругих цилиндрических оболочек. Представим динамические члены в виде

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{R^2} u_{\tau\tau}; \\ p_2 &= -\frac{1}{R^2} v_{\tau\tau}; \\ p_3 &= -\frac{1}{R^2} \omega_{\tau\tau}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Здесь $\tau = (E/\rho)^{1/2} t$; t — время; ρ — плотность материала оболочки.

Подставляя выражения (4.3.1) в уравнения (4.1.15), получаем динамические составные уравнения основного состояния в перемещениях:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} + \frac{1-\nu}{2} u_{\eta\eta} - u_{\tau\tau} + \frac{1+\nu}{2} v_{\xi\eta} - \nu\omega_{\xi} &= 0; \\ \frac{1+\nu}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} v_{\xi\xi} + (1+\epsilon^2)v_{\eta\eta} - v_{\tau\tau} - \\ - \left[1 - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \omega_{\eta} &= 0; \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$-\nu u_{\xi} - \left[1 - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] v_{\eta} + \left[1 + \epsilon^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] w + \omega_{\tau\tau} = 0, \quad (4.3.2)$$

Применяя операторный метод, из системы уравнений (4.3.2) получаем следующее динамическое разрешающее уравнение теории изотропных цилиндрических оболочек:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{2} \Delta^2 \Phi + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \tau^6} + \frac{1}{\epsilon^2} \left[1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \right. \\ & \left. - \frac{3-\nu+2\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \Phi_{\tau\tau\tau\tau} - \left\{ \frac{3-\nu}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} - \left[\left(\frac{1-\nu}{2\epsilon^2} - \frac{3-\nu}{2} \right) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[1 + \frac{3+\nu^2}{2\epsilon^2} \right] \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2\epsilon^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right] + \right. \\ & \left. + \left[1 + \frac{1-\nu}{2\epsilon^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{3-\nu-2\nu^2}{2\epsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \Phi_{\tau\tau} = 0. \quad (4.3.3) \end{aligned}$$

Полученное уравнение имеет шестой порядок по времени и может быть использовано для исследования всего спектра частот собственных колебаний, а также для изучения переходных процессов при свободных или вынужденных колебаниях.

Выражения для перемещений, определяемых уравнением (4.3.3), запишутся так:

$$\begin{aligned} u &= -\Phi_{\xi\eta\eta} + \nu\Phi_{\xi\xi\xi} + \frac{2\nu}{1-\nu} \Phi_{\xi\tau\tau}; \\ v &= \Phi_{\eta\eta\eta} + (2+\nu)\Phi_{\xi\xi\eta} + \frac{2}{1-\nu} \Phi_{\eta\tau\tau}; \\ \omega &= \nabla^4 \Phi + \frac{2}{1-\nu} \Phi_{\tau\tau\tau\tau} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta^2 \Phi_{\tau\tau}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Усилия и моменты в этом случае определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\frac{B_1}{R} \left[\Phi_{\xi\xi\eta\eta} - \frac{2\nu}{1-\nu} \Phi_{\tau\tau\tau\tau} + \frac{\nu(5-\nu)}{1-\nu} \Delta^2 \Phi_{\tau\tau} \right]; \\
 T_2 &= -\frac{B_1}{R} \left[\Phi_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{2}{1-\nu} \Phi_{\tau\tau\tau\tau} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{3-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{5-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\tau\tau} \right]; \\
 S &= \frac{B_1}{R} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \Phi_{\xi\eta};
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$M_1 = -\nu \frac{D}{R^2} \left[\nabla^4 + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta^2 \right] \Phi_{\eta\eta};$$

$$M_2 = -\frac{D}{R^2} \left[\nabla^4 + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta^2 \right] \Phi_{\eta\eta};$$

$$H = \frac{D}{R^2} \left[(1-\nu)\nabla^4 + 2 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - (3-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta^2 \right] \Phi_{\xi\eta}.$$

Подставляя выражение для p_3 из (4.3.1) в уравнения (4.1.23), получаем следующие динамические составные уравнения краевого эффекта в перемещениях:

$$u_{\xi\xi} - \nu \omega_{\xi} = 0;$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} v_{\xi\eta} - \omega_{\eta} = 0; \tag{4.3.6}$$

$$-\nu u_{\xi} + (1 + \epsilon^2 \nabla^4) \omega + \omega_{\tau\tau} = 0.$$

Операторным методом из уравнений (4.3.6) получаем следующее динамическое составное разрешающее уравнение краевого эффекта:

$$\mathcal{L}_k \Phi + \frac{1}{\epsilon^2} \Phi_{\tau\tau} = 0. \tag{4.3.7}$$

Перемещения, деформации, усилия и моменты в этом случае определяются выражениями (4.1.4).

Для формулировки корректных краевых задач для составных динамических уравнений (4.3.3), (4.3.7) должны быть заданы граничные условия, представленные в табл. 4.2, и начальные условия при $\tau = \tau_0$

в виде

$$\begin{aligned} u &= U_0(\xi, \eta); \quad v = V_0(\xi, \eta); \\ \omega &= W_0(\xi, \eta); \quad u_\tau = \dot{U}_0(\xi, \eta); \\ v_\tau &= \dot{V}_0(\xi, \eta); \quad \omega_\tau = \dot{W}_0(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Отметим, что составные уравнения могут быть построены и для нелинейной динамики цилиндрических оболочек.

4.4. СОСТАВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В соответствии с предложенным алгоритмом построения составных уравнений для каждого типа подкрепления оболочки объединим в одном уравнении члены, играющие главную роль при малых и больших показателях изменчивости НДС.

В составное уравнение основного состояния для оболочек вафельного типа включаем соотношения полубезмоментной теории и преимущественно тангенциальной деформации пластины

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Phi \equiv & \epsilon_1^2 \epsilon_2 \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \right. \\ & \left. + \epsilon_4 \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \left[\nu_{21} \epsilon_7 \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right]^2 \Phi + \epsilon_e \left[2 + \epsilon_e \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \Phi_{\tau\tau} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

В уравнении (4.4.1) по сравнению с уравнением основного состояния добавлены подчеркнутые члены.

Выражения для перемещений получаем в результате объединения соответствующих выражений для порождающих уравнений:

$$u = \left[\nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\nu_{10} \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \right. \\ \left. - (2\nu_{21} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11}) \epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\xi}; \quad (4.4.2)$$

$$v = \left[- (2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \right. \\ \left. + 2\nu_{10} \epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (2\epsilon_5^{-1} + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu_0 \epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \Phi_{\eta};$$

$$\omega = \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi.$$

Аналогично для определения усилий и моментов получаем следующие выражения:

$$T_1 = \frac{B_1}{R} \left[\nu_{21} \epsilon_4 \nabla_{0\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\eta\eta}; \\ T_2 = \frac{B_1}{R} \left[\nu_{21} \epsilon_7 \nabla_{0\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\xi\xi} - \\ - \frac{B_2}{R} \left[(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \nu_{21}^2 \epsilon_4 \epsilon_7) \nabla_{0\eta} \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - \nu_{21} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 \Phi_{\xi\xi\eta\eta} \right]; \\ S = \frac{B_1}{R} \left[\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \nu_{21} \epsilon_7 \nabla_{0\eta} \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right] \Phi_{\eta}; \quad (4.4.3)$$

$$B_1 = \nu_{21} B \epsilon_7 \nabla_{0\eta} \Phi_{\eta\eta\eta\eta};$$

$$M_2 = B_2 \left[\nabla_{0\eta} + (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \nu_{21}^2 \epsilon_4^{-1} \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} - \nu_{21} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\eta};$$

$$H = B_1 (\epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 - \nu_{21} \epsilon_8) \nabla_{0\eta} \Phi_{\xi\eta\eta\eta} \quad (4.4.3)$$

Уравнение (4.4.2) имеет четвертый порядок по продольной координате ξ и для удовлетворения граничных условий необходимо использовать составное уравнение краевого эффекта

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^2 \Phi \equiv & \epsilon_1^2 \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \Phi + \\ & + \left[\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_e \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right]^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

В уравнении (4.4.4) по сравнению с уравнением краевого эффекта добавлены подчеркнутые члены. Уравнение (4.4.4) включает соотношение простого краевого эффекта и уравнение преимущественно изгибной деформации пластины.

Выражения для перемещений, усилий и моментов, определяемых уравнением (4.4.4), получим, объединяя соответствующие выражения для уравнений простого краевого эффекта и изгиба пластины:

$$\begin{aligned} u &= \nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \nu_{21} \Phi_{\xi\xi\xi}; \\ v &= - (2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11} \epsilon_4^{-1}) \Phi_{\xi\xi\xi\xi\eta} + (2\epsilon_5^{-1} + \nu_{10}) \Phi_{\xi\xi\eta}; \\ w &= \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi; \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$T_1 = \frac{B_1}{R} \left[\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right] \Phi_{\xi\xi\eta\eta}; \quad T_2 = - \frac{B_1}{R} \Phi_{\xi\xi\xi\xi};$$

$$S = \frac{B_1}{R} \left[1 - \nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\xi\xi\xi\eta};$$

$$M_1 = - B_1 \left[\epsilon_4^{-1} (\epsilon_1^2 + \epsilon_6) \nabla_2^4 (\Phi_{\xi\xi} + \nu_{21} \Phi_{\eta\eta}) - \right.$$

$$- \epsilon_6 \left[\nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{12} \right] \Phi_{\xi\xi\xi\xi} \Big]; \quad (4.4.5)$$

$$M_2 = - B_1 \left\{ (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4^{-1} + \epsilon_7^2) \nabla_2^4 (\nu_{12} \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}) + \epsilon_4 \epsilon_7 \left[(2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \epsilon_4^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi_{\xi\xi} \right\};$$

$$H = - \frac{B_1}{2\epsilon_4} [\epsilon_1^2 \epsilon_3 - \nu_{21} (\epsilon_1^2 + \epsilon_6^2) - \nu_{21} \epsilon_6 \epsilon_7] \nabla_2^4 \Phi_{\xi\eta}.$$

Физико-геометрические гипотезы, соответствующие составным уравнениям (4.4.1), (4.4.4), аналогичны гипотезам для гладких оболочек.

Составные уравнения основного состояния и краевого эффекта в перемещениях можно записать так:

$$\begin{aligned} B_{11} u_{\xi\xi} + B_{33} u_{\eta\eta} + (B_{12} + B_{33}) v_{\xi\eta} - B_{12} \omega_{\xi} &= - R^2 p_1; \\ (B_{21} + B_{33}) u_{\xi\eta} + \left[B_{22} - \frac{2K_{22}}{R} + \frac{D_{33}}{R^2} \right] v_{\eta\eta} + B_{33} v_{\xi\xi} + \\ + \left[\frac{D_{22}}{R^2} - \frac{K_{22}}{R} \right] \omega_{\eta\eta\eta} + \left[B_{22} - \frac{K_{22}}{R} \right] \omega_{\eta} &= - R^2 p_2; \\ - B_{21} u_{\xi} + \left[\frac{D_{22}}{R^2} - \frac{K_{22}}{R} \right] v_{\eta\eta\eta} + \left[B_{22} - \frac{K_{22}}{R} \right] v_{\eta} + \\ + \frac{D_{22}}{R^2} \omega_{\eta\eta\eta\eta} + 2 \frac{K_{22}}{R} \omega_{\eta\eta} + B_{22} \omega &= R^2 p_3; \\ B_{11} u_{\xi\xi} - B_{12} \omega_{\xi} - \frac{K_{11}}{2} \omega_{\xi\xi\xi} &= 0; \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{21} + B_{33})u_{\xi\eta} + \left[B_{33} + \frac{D_{33}}{R^2} \right] v_{\xi\xi} + \left[B_{22} - \frac{K_{22}}{R} \right] \omega_{\eta} = 0; \\
 & - B_{21}u_{\xi} - \frac{K_{11}}{R} u_{\xi\xi\xi} + \frac{D_{11}}{R^2} \omega_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{R^2} (D_{12} + \\
 & + 2D_{33})\omega_{\xi\xi\eta\eta} + \frac{D_{22}}{R^2} \omega_{\eta\eta\eta\eta} + 2 \frac{K_{22}}{R} \omega_{\eta\eta} + B_{22} \omega = 0.
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Расчленения граничных условий для уравнений (4.4.1), (4.4.4) совпадают с приведенным в табл. 4.2.

Для оболочек с подкреплением стрингерного типа уравнения теории полых оболочек, полученные в результате асимптотического анализа (см. гл. 3), имеют четвертый порядок по продольной координате и справедливы во всем диапазоне изменяемости, за исключением случая малой изменяемости НДС (двух-трех волн) в окружном направлении. Поэтому для построения составного уравнения основного состояния в уравнение (3.1.5) включаем оператор $(1 + \partial^2/\partial\eta^2)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_3 \Phi \equiv \epsilon_1^2 \epsilon_4 \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \\
 + \left[1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Дополнительное состояние типа краевого эффекта определяется уравнением

$$\mathcal{L}_4 \Phi \equiv \epsilon_1^2 \nabla_2^4 \Phi + \left[\epsilon_6 \left(\nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - 1 \right]^2 \Phi = 0. \tag{4.4.9}$$

Уравнение (4.4.8) отличается от уравнения (3.1.5) подчеркнутым членом, а уравнение (4.4.9) совпадает с уравнением (3.1.7). Первое из приведенных соотношений включает уравнения основного напряженного состояния с большим показателем изменяемости в кольцевом направлении и изгиба пластины. Уравнение (4.4.9) включает соотношения простого краевого эффекта, напряженного состояния с большим показателем изменяемости по обеим координатам и преимущественно тангенциальной деформации пластины. Уравнение (4.4.9) применимо во

всем диапазоне изменямости НДС и следует непосредственно из асимптотического анализа разрешающего уравнения теории конструктивно-ортоотропных цилиндрических оболочек. Перемещения для этого состояния определяются соотношениями (3.1.8), а усилия и моменты определяются так:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{B_1}{R} \left[\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right] \Phi_{\xi\xi\eta\eta}; \\
 T_2 &= \frac{B_1}{R} \left[\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right] \Phi_{\xi\xi\xi\xi}; \\
 S &= -\frac{B_1}{R} \left[\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right] \Phi_{\xi\xi\xi\eta}; \\
 M_1 &= -B_1 \left\{ \left[(\epsilon_1^2 + \nu_{12} \epsilon_6^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{12} \epsilon_1^2 \epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \nabla_2^4 + \right. \\
 &+ \left[(1 + 2\nu_{12} \epsilon_4 \epsilon_5^{-1}) \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \nu_{12} \epsilon_4 \epsilon_6^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \right. \\
 &+ \left. \left. \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \right\} \Phi; \\
 M_2 &= -B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \nabla_2^4 \Phi; \\
 H &= -\nu_{12} B_1 \epsilon_1^{-1} \epsilon_8 \nabla_2^4 \Phi_{\xi\eta}.
 \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Перемещения, усилия и моменты для уравнения (4.4.8) определяются следующими выражениями:

$$T_1 = -\frac{B_1}{R} \nabla_{2\eta} \Phi_{\xi\xi\eta\eta}; \quad u = -\Phi_{\xi\eta\eta}; \quad v = \Phi_{\eta\eta\eta}; \tag{4.4.11}$$

$$T_2 = - \frac{B_1}{R} \nabla_{2\eta} \Phi_{\xi\xi\xi\xi}; \quad \omega = \Phi_{\eta\eta\eta\eta}; \quad S = \frac{B_1}{R} \nabla_{2\eta} \Phi_{\xi\xi\xi\eta};$$

$$M_1 = - B_1 \epsilon_8 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta}; \quad (4.4.11)$$

$$M_2 = - B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \Phi_{\eta\eta\eta\eta\eta\eta}; \quad H = - B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_3 \Phi_{\xi\eta\eta\eta\eta\eta}.$$

Составное уравнение (4.4.8) можно получить вариационным методом, используя гипотезы отсутствия сдвигов и нерастяжимости в кольцевом направлении срединной поверхности обшивки. Соответствующие усилия S , T_2 являются статическими реакциями и определяются из уравнений равновесия. Для уравнения (4.4.9) основную (с энергетической точки зрения) роль играют деформации ϵ_{22} , κ_{11} , κ_{22} .

Для формулировки краевых задач для уравнений (4.4.8), (4.4.9) необходимо выполнить расчленение граничных условий. Применяя описанную ранее методику, получаем канонический вид граничных условий, представленный в табл. 4.3. Окончательное расчленение граничных условий приведено в табл. 4.4.

Таблица 4.3

Вариант граничных условий	Канонический вид граничных условий
A_1	$\omega, \omega_\xi - \nu, u$
A_2	$\omega, \omega_\xi - \nu, T_1$
A_3	$\omega - M_1 - \nu, u$
A_4	$\omega - M_1 - \nu, T_1$
A_5	$\omega, \omega_\xi - u, S$

Вариант граничных условий	Канонический вид граничных условий
A_6	$\omega - \omega_{\xi} \cdot T_1 \cdot S$
A_7	$\omega - M_1 \cdot u \cdot S$
A_8	$\omega - M_1 \cdot T_1 \cdot S$
A_9	$\omega_{\xi} \cdot v - \bar{N}_1 \cdot S$
A_{10}	$\omega_{\xi} \cdot v - \bar{N}_1 \cdot T_1$
A_{11}	$M_1 \cdot v - \bar{N}_1 \cdot u$
A_{12}	$M_1 \cdot v - \bar{N}_1 \cdot T_1$
A_{13}	$\omega_{\xi} \cdot u - \bar{N}_1 \cdot S$
A_{14}	$\omega_{\xi} \cdot T_1 - \bar{N}_1 \cdot S$
A_{15}	$M_1 \cdot u - \bar{N}_1 \cdot S$
A_{16}	$M_1 \cdot T_1 - \bar{N}_1 \cdot S$

Вариант
границ-
ных
усло-
вий

Расчлененные граничные условия при $\xi = 0, l$

$$A_1 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, \omega_{\xi}^{(1)} + \omega_{\xi}^{(2)} - \bar{W}_{\xi}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, u^{(2)} - \bar{U}$$

$$A_2 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, \omega_{\xi}^{(1)} + \omega_{\xi}^{(2)} - \bar{W}_{\xi}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, T_1^{(2)} - \bar{T}$$

$$A_3 \quad \omega^{(1)} + \omega^{(2)} - \bar{W}, M^{(1)} + M^{(2)} - \bar{M}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, u^{(2)} - \bar{U}$$

$$A_4 \quad \omega^{(1)} + \omega^{(2)} - \bar{W}, M^{(1)} + M^{(2)} - \bar{M}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, T_1^{(2)} - \bar{T}$$

$$A_5 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, \omega_{\xi}^{(1)} + \omega_{\xi}^{(2)} - \bar{W}_{\xi}, u^{(1)} + u^{(2)} - \bar{U}, S^{(2)} - \bar{S}$$

$$A_6 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, \omega_{\xi}^{(1)} - \bar{W}_{\xi}, T_1^{(2)} - \bar{T}, S^{(2)} - \bar{S}$$

$$A_7 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, M_1^{(1)} - \bar{M}, u^{(2)} - \bar{U}, S^{(2)} - \bar{S}$$

$$A_8 \quad \omega^{(1)} - \bar{W}, M_1^{(1)} - \bar{M}, T_1^{(2)} - \bar{T}, S^{(2)} - \bar{S}$$

$$A_9 \quad \omega_{\xi}^{(1)} + \omega_{\xi}^{(2)} - \bar{W}_{\xi}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, N_1^{(1)} + N_1^{(2)} - \bar{N}, u^{(2)} - \bar{U}$$

$$A_{10} \quad \omega_{\xi}^{(1)} - \bar{W}_{\xi}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, N_1^{(1)} + N_1^{(2)} - \bar{N}, T_1^{(2)} - \bar{T}$$

$$A_{11} \quad M_1^{(1)} - \bar{M}, v^{(1)} + v^{(2)} - \bar{V}, N_1^{(1)} + N_1^{(2)} - \bar{N}, u^{(2)} - \bar{U}$$

Вариант
границ-
ных
усло-
вий

Расчлененные граничные условия при $\xi = 0, l$

$$A_{12} \quad M_1^{(1)} = \tilde{M}, \quad v^{(1)} \cdot v^{(2)} = \tilde{V}, \quad N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \tilde{N}, \quad T_1^{(2)} = \tilde{T}$$

$$A_{13} \quad \omega_\xi^{(1)} = \tilde{W}_\xi, \quad u^{(1)} \cdot u^{(2)} = \tilde{U}, \quad N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \tilde{N}, \quad S^{(2)} = \tilde{S}$$

$$A_{14} \quad \omega_\xi^{(1)} = \tilde{W}_\xi, \quad T_1^{(1)} \cdot T_1^{(2)} = \tilde{T}, \quad N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \tilde{N}, \quad S^{(2)} = \tilde{S}$$

$$A_{15} \quad M_1^{(1)} = \tilde{M}, \quad u^{(1)} \cdot u^{(2)} = \tilde{U}, \quad N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \tilde{N}, \quad S^{(2)} = \tilde{S}$$

$$A_{16} \quad M_1^{(1)} = \tilde{M}, \quad T_1^{(1)} \cdot T_1^{(2)} = \tilde{T}, \quad N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \tilde{N}, \quad S^{(2)} = \tilde{S}$$

Для конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек шпангоутного типа составное уравнение основного состояния получаем, включая в уравнение (3.1.9) оператор $(1 + \partial^2/\partial\eta^2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 \Phi \equiv & \left[(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} - \right. \\ & \left. - \nu_{12} \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 + \nu_{21}^2 \epsilon_7^2) \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \right] \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \\ & + 2\epsilon_7 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{21} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right] \right] \Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (4.4.12) \end{aligned}$$

Дополнительное состояние типа краевого эффекта определяется уравнением

$$\mathcal{L}_6 \Phi \equiv \epsilon_1^2 \nabla_1^4 \Phi + \left[1 + \epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \Phi = 0. \quad (4.4.13)$$

Уравнение (4.4.12) отличается от уравнений (3.1.9) подчеркнутыми членами, а уравнение (4.4.13) совпадает с уравнением (3.1.10). Уравнение (4.4.12) включает соотношения основного состояния, НДС с большим показателем изменчивости и преимущественно тангенциальной деформации пластин, а соотношение (4.4.13) – соотношения простого краевого эффекта, НДС с большим показателем изменчивости в продольном направлении и преимущественно изгибной деформации пластины.

Канонический вид граничных условий для составных уравнений (4.4.12), (4.4.13) совпадает с приведенным в табл. 4.1, а расчленения граничных условий – в табл. 4.2.

Составные уравнения (4.4.10), (4.4.13) можно получить вариационным методом, принимая в качестве основных деформаций ϵ_{11} , ϵ_{22} ,

ϵ_{12} , κ_{11} и ϵ_{22} , κ_{11} , κ_{22} соответственно.

Таким образом, для исследования НДС цилиндрических оболочек с подкреплением вафельного, стрингерного и шпангоутного типов построены составные краевые задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка по продольной координате.

Для оценки точности и области применимости составных уравнений проведем сравнение квадратов корней характеристических уравнений, соответствующих исходному и предложенным составным уравнениям для оболочек вафельного и стрингерного типов.

Возьмем следующие значения параметров:

для оболочек с подкреплением вафельного типа

$$\epsilon_1^2 = 2,2 \cdot 10^{-6}; \quad \epsilon_2 = 1; \quad \epsilon_3 = 10^{-2};$$

$$\epsilon_4 = 1; \quad \epsilon_5 = 0,3; \quad \epsilon_6 = \epsilon_7 = 0; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0,2;$$

для оболочек с подкреплением стрингерного типа

$$\epsilon_1^2 = 2,2 \cdot 10^6; \quad \epsilon_2 = 10^{-4}; \quad \epsilon_3 = 10^{-2};$$

$$\epsilon_4 = 0,6; \quad \epsilon_6 = \epsilon_7 = 0; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0,2.$$

Сравнение результатов численного решения с решениями составных уравнений для оболочек вафельного типа приведено на рис.4.3, 4.5 для оболочек стрингерного типа – на рис.4.4, 4.6.

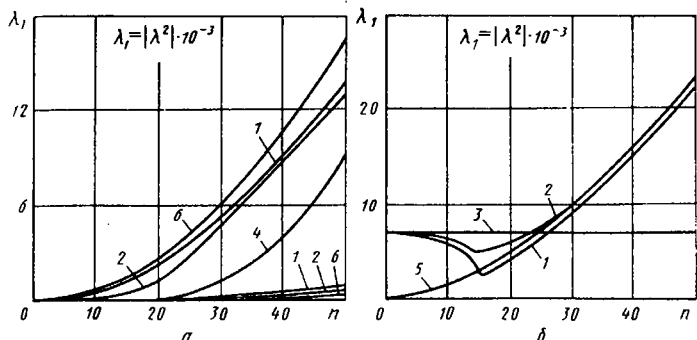


Рис. 4.3. Сравнение решений точного уравнения (кривая 1), приближенных уравнений и составных уравнений для оболочек вафельного типа:

а — составное уравнение основного состояния (2); полубезмоментная теория (4); плоское напряженное состояние (6); **б** — составное уравнение краевого эффекта (2); краевой эффект (3); уравнения изгиба пластины (5)

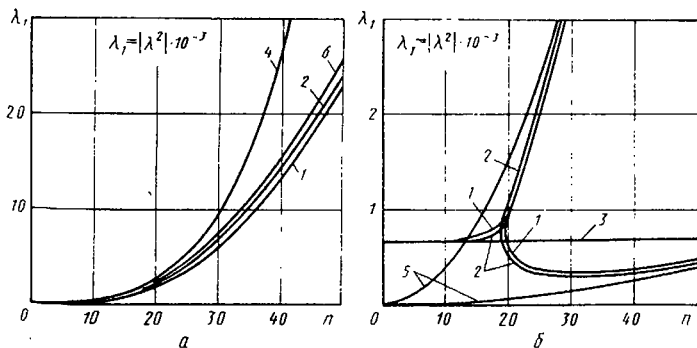


Рис. 4.4. Сравнение решений точного уравнения (кривая 1), приближенных уравнений и составных уравнений для оболочек стрингерного типа:

а — составное уравнение основного состояния (2); полубезмоментная теория (4); плоское напряженное состояние (6); **б** — составное уравнение краевого эффекта (2); краевой эффект (3); уравнения изгиба пластины (5)

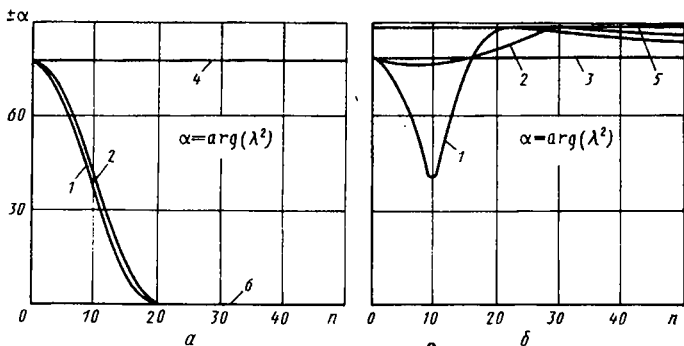


Рис. 4.5. Сравнение значений аргумента λ^2 на основе точного уравнения (кривая 1), приближенных уравнений и составных уравнений для оболочек вафельного типа:

а — составное уравнение основного состояния (2); полубезмоментная теория (4); плоское напряженное состояние (6); **б** — составное уравнение краевого эффекта (2); краевой эффект (3); уравнение изгиба пластины (5)

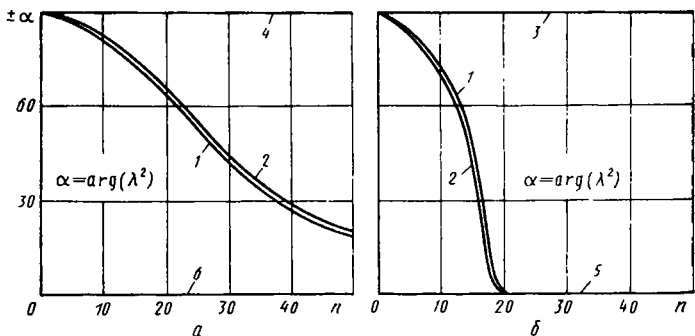


Рис. 4.6. Сравнение значений аргумента λ^2 на основе точного уравнения (кривая 1), приближенных уравнений и составных уравнений для оболочек стрингерного типа:

а — составное уравнение основного состояния (2); полубезмоментная теория (4); плоское напряженное состояние (6); **б** — составное уравнение краевого эффекта (2); краевой эффект (3); уравнение изгиба пластины (5)

На рис.4.3, 4.4, а представлено сравнение модулей квадратов корней характеристических уравнений, а на рис.4.5, 4.6, — соответствующих аргументов. Кривыми 1 на всех рисунках обозначены точные решения, кривыми 2 — решения по методу составных уравнений, кривыми 3 — по теории краевого эффекта, кривыми 4 — по полубезмоментной теории, кривыми 5, 6 — по теориям пластин. Как видно из рисунков, составные уравнения действительно пригодны для всех значений μ и обеспечивают достаточную точность аппроксимации, осуществляя гладкое сращивание решений, справедливых при малых и больших изменчивостях НДС.

4.5. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим линейные колебания подкрепленных цилиндрических оболочек, представив динамические члены в виде (4.3.1).

Подставляя выражения (4.3.1) в уравнения (4.4.6) и применяя операторный метод, для исследования колебаний цилиндрических оболочек вафельного типа получаем следующее составное уравнение основного состояния, справедливое при любых частотах и изменчивостях напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Phi - \mathcal{L}_{11} \Phi_{\tau\tau} \equiv \mathcal{L}_1 \Phi - \left\{ \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \right. \right. \\ + \epsilon_4 \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left. \right] + \epsilon_1^2 \epsilon_4 \left[\left[1 + \frac{2(\epsilon_5^{-1} + \nu_{12})}{\nu_0} \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ + \left. \left[\epsilon_4 + \frac{2(\epsilon_5^{-1} + \nu_{12})}{\nu_0} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \\ \left. + \epsilon_4 \frac{2(\epsilon_5^{-1} + \nu_{12})}{\nu_0} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right\} \Phi_{\tau\tau} = 0. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Перемещения для уравнения (4.5.1) определяются так:

$$u = \nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\nu_{10} \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\eta} - (2\nu_{21} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11}) \epsilon_7 \Phi_{\xi\eta\eta\eta\eta} + \quad (4.5.2)$$

$$\begin{aligned}
& + \nu_{12} \Phi_{\xi\xi\xi} - \Phi_{\xi\eta\eta} + 2\epsilon_4^{-1} \epsilon_5^{-1} \left[\nu_0 \epsilon_6 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + \nu_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \Phi_{\tau\tau}; \\
v = & - (2\nu_{12} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6 \Phi_{\xi\xi\xi\xi\eta} + 2\nu_{10} \epsilon_7 \Phi_{\xi\eta\eta\eta\eta} + (2\epsilon_5^{-1} + \\
& + \nu_{12}) \Phi_{\xi\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta} + \nu_0 \epsilon_7 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \\
& + 2\epsilon_5^{-1} \left[\nu_0 \epsilon_7 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \Phi_{\tau\tau}; \tag{4.5.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi - \epsilon_4^{-1} \left[(\nu_0 + 2\epsilon_5^{-1}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\
& \left. + (\nu_0 + 2\epsilon_4 \epsilon_5) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\tau\tau} + 2\nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_5^{-1} \Phi_{\tau\tau\tau\tau}.
\end{aligned}$$

Аналогично из уравнений (4.4.7) получаем следующее динамическое составное уравнение краевого эффекта:

$$\mathcal{L}_2 \Phi - \Phi_{\tau\tau} = 0. \tag{4.5.3}$$

Перемещения, усилия и моменты для уравнений (4.5.3) определяются выражениями (4.4.5).

Для уравнений (4.5.1), (4.5.3) должны быть заданы расчлененные граничные условия табл. 4.2 и начальные условия (4.3.8).

Составные динамические уравнения для цилиндрических оболочек струнгерного типа можно представить так:

$$\mathcal{L}_3 \Phi - \mathcal{L}_{11} \Phi_{\tau\tau} = 0; \tag{4.5.4}$$

$$\mathcal{L}_4 \Phi - \epsilon_1^{-2} \Phi_{\tau\tau} = 0. \tag{4.5.5}$$

Перемещения для уравнения (4.5.4) определяются соотношениями (4.5.2), в которых необходимо положить $\epsilon_7 = 0$. Расчлененные граничные условия для уравнений (4.5.4), (4.5.5) представлены в табл. 4.4.

Для шпангоутных оболочек получаем следующие составные динамические уравнения:

$$\mathcal{L}_5 \Phi - \mathcal{L}_{11} \Phi_{\tau\tau} = 0; \quad (4.5.6)$$

$$\mathcal{L}_6 \Phi - \Phi_{\tau\tau} = 0. \quad (4.5.7)$$

Перемещения для уравнения (4.5.6) определяются соотношениями (4.5.2), в которых необходимо положить $\epsilon_6 = 0$. Для уравнений (4.5.6), (4.5.7) должны быть заданы расчлененные граничные условия, приведенные в табл. 4.2.

4.6. СОСТАВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Объединяя предельные уравнения, справедливые при малых и больших изменчивостях НДС, для оболочек вафельного типа получаем следующие составные уравнения устойчивости:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_1 \Phi + \bar{T}_{20} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi_{\eta\eta} + \\ & + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi = 0; \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

$$\mathcal{L}_2 \Phi + \bar{T}_{10} \Phi = 0. \quad (4.6.2)$$

Перемещения, усилия и моменты для уравнений (4.6.1), (4.6.2) определяются соотношениями (4.4.2), (4.4.5) соответственно. Краевые задачи для уравнений (4.6.1), (4.6.2) задаются одним из вариантов расчлененных граничных условий табл. 4.2.

В результате предельного перехода уравнения (4.6.1), (4.6.2) позволяют получить составные уравнения устойчивости для изотропных цилиндрических оболочек. Для этого в уравнениях (4.6.1), (4.6.2) нужно положить

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 1;$$

$$\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0; \quad \epsilon_1^2 = \epsilon^2.$$

Составные уравнения устойчивости для стрингерных оболочек имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \Phi + \epsilon_4 \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi_{\eta\eta} = 0; \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

$$\mathcal{L}_4 \Phi + \bar{T}_{10} \Phi = 0. \quad (4.6.4)$$

Перемещения, усилия и моменты для уравнений (4.6.3), (4.6.4) определяются выражениями (4.4.11), (4.4.10) соответственно. Краевые задачи для уравнений (4.6.3), (4.6.4) задаются одним из вариантов расчлененных граничных условий табл. 4.4.

Для шпангоутных оболочек получаем следующие составные уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 \Phi + \bar{T}_{20} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \right] \Phi_{\eta\eta} + \\ + \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \left[2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Phi = 0; \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

$$\mathcal{L}_6 \Phi + \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi = 0. \quad (4.6.6)$$

Краевые задачи для уравнений (4.6.5), (4.6.6) задаются одним из вариантов граничных условий табл. 4.2. Уравнения (4.6.1), (4.6.2) отличаются от приведенных в гл. 3 подчеркнутыми членами.

При $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 1$, $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$ из соотношений (4.6.1), (4.6.2) получаем составные уравнения устойчивости для изотропного случая.

ГЛАВА 5 МЕТОДЫ СИНТЕЗА НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Известно, что при действии на оболочки нагрузок общего характера задача определения напряженно-деформированного состояния может быть приведена к решению системы уравнений восьмого порядка в частных производных. Высокий порядок уравнений служит естественным тормозом на пути решения многих краевых задач. Для устранения возникающих трудностей представляется плодотворным развитие и обобщение на случай произвольного деформирования оболочек методов синтеза напряженного состояния, которые позволяют получить напряженно-деформированное состояние на основе приближенных уравнений более простой структуры и низкого порядка [67, 64]. (Под синтезом понимается сведение в единое целое решений различных приближенных уравнений, каждое из которых хорошо описывает то или иное напряженное состояние.) Так, еще в 1920–1930-е годы были разработаны приближенные методы расчета осесимметричной деформации куполов и днищ, в которых полное напряженное состояние получено путем сложения двух напряженных состояний: безмоментного и краевого эффекта. Построенный позже метод асимптотического интегрирования уравнений общей теории оболочек позволил расчленить напряженное состояние оболочки на ряд так называемых элементарных напряженных состояний, каждое из которых описывается известными приближенными уравнениями, полученными в разные времена. Это уравнения безмоментной и полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, напряженного состояния с большой изменчивостью и, наконец, уравнения изгибного и тангенциального состояний (последние два являются аналогом уравнений плоской задачи и изгиба пластины) [36]. Что же касается синтеза напряженного состояния с помощью перечисленных приближенных уравнений, то здесь вопрос оставался значительное время открытым из-за отсутствия достаточно четких критериев при определении границ "склеивания" (сращивания) приближенных решений. Наибольшие трудности при этом возникают, когда напряженное состояние оболочки описывается функциями, изменчивость которых колеблется в широких диапазонах, как, например, при локализованных и сосредоточенных воздействиях на оболочки. В этих случаях вклад того или иного элементарного напряженного состояния существенно зависит от изменчивости поверхностной или краевой нагрузки, и при определенной степени ее локализации наиболее мощным может оказаться тангенциальное

или изгибное состояние [64], вопреки представлению о том, что "...возможность расчета оболочки как плоского упругого тела практической ценности, по-видимому, не представляет", высказанному в книге [36].

Остановимся кратко на анализе асимптотической погрешности приближенных уравнений [36], методах синтеза напряженных состояний, сформулированных в работах [67, 64], и на их применении к решению задач о локализованных воздействиях на оболочки.

5.1. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК. РЕШЕНИЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Будем обозначать показатель изменяемости напряженного состояния через ρ и заметим, что он связан с относительной толщиной оболочки h/R и номером гармоники n при разложении нагрузки в ряд по окружной координате следующим соотношением:

$$n = h_*^{-\rho},$$

где

$$h_*^2 = h^2 / (12R^2).$$

Величина n характеризует изменяемость n -й гармоники.

В зависимости от величины ρ можно прийти к приближенным уравнениям теории оболочек, описывающим различные элементарные напряженные состояния.

Характер поведения асимптотической погрешности уравнений, описывающих различные элементарные состояния, в зависимости от показателя изменяемости ρ показан на рис.5.1. Наименьшую асимптотическую погрешность при $\rho \rightarrow 0$ дают уравнения основного состояния и простого краевого эффекта (кривая 2). При увеличении ρ погрешность этих уравнений растет, а при $\rho = 1/2$ равна единице. Это означает, что при переходе от полных уравнений к обсуждаемым здесь в характеристическом уравнении отбрасываются члены, порядок которых один и тот же по сравнению с остающимися. Для уравнений напряженного состояния с большой изменяемостью (кривая 1) наибольшая асимптотическая погрешность имеет место при $\rho \rightarrow 0$. При росте ρ погрешность резко падает и монотонно стремится к нулю, практически исчезая при $\rho = 1/2$. Асимптотическая погрешность уравнений изгибного и танген-

Рис. 5.1. Характер изменения асимптотической погрешности приближенных уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния, в зависимости от величины показателя изменчивости

циального состояний при $\rho \ll 1/2$ значительная, при $\rho = 1/2$ равна единице, и при $\rho \gg 1/2$ стремится к нулю (кривая 3).

Рассмотрим подробнее круговые цилиндрические оболочки: полные и приближенные уравнения и решение для бесконечно длинной оболочки, находящейся под действием самоуравновешенной системы радиальных нагрузок.

В случае действия радиальной нагрузки $p(a, \beta)$, произвольно распределенной по поверхности, уравнения общей теории могут быть сведены к одному разрешающему уравнению относительно функции $\Phi(a, \beta)$:

$$\left[\nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^4}{\partial a^4} - \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} \right] \nabla^2 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial a^4} \right] \Phi(a, \beta) = \frac{R^4}{D} p(a, \beta). \quad (5.1.1)$$

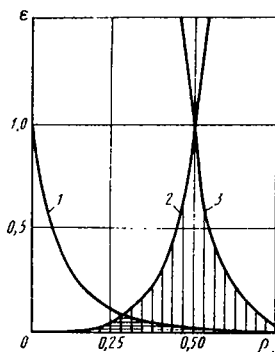
Перемещения, усилия и изгибающие моменты с разрешающей функцией связаны посредством соотношений

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial a \partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^3} - c^2 \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^5} - \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a \partial \beta^4} \right];$$

$$v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} - 2c^2 \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} \right];$$

$$\omega = \nabla^2 \nabla^2 \Phi;$$

$$T_1 = -\frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^2} - \frac{2c^2}{1 + \nu} \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} \nabla^2 \Phi \right];$$



$$\begin{aligned}
T_2 &= -\frac{Eh}{R} \left\{ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\nabla^6 \Phi + \right. \right. \\
&+ (1-\nu) \left. \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^4} - \frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^6} \right] + \nabla^4 \Phi \right. \left. \right\}; \\
S_1 &= \frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta} - \frac{c^2}{1+\nu} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^5 \partial \beta} - \frac{\partial^6 \Phi}{\partial a \partial \beta^5} \right] \right]; \quad (5.1.2) \\
S_2 &= \frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta} - \frac{2c^2}{1+\nu} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^5 \partial \beta} + \frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta^3} \right] \right]; \\
G_1 &= -\frac{D}{R^2} \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \right] \nabla^4 \Phi - (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^2} \right]; \\
G_2 &= -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 1 \right] \nabla^4 \Phi; \\
Q_1 &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial}{\partial a} (\nabla^2 + \nu) \nabla^4 \Phi + (1-\nu) \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a \partial \beta^4} - \nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta^2} \right] \right]; \\
Q_2 &= -\frac{D}{R^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (\nabla^2 + 1) \nabla^4 \Phi + \right. \\
&+ (1-\nu) \left. \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Уравнения для напряженного состояния с большой изменчивостью могут быть получены из уравнений общей теории (5.1.1), (5.1.2), если принять, что справедливо следующее условие:

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} \right| = \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right| \gg |\Phi|. \quad (5.1.3)$$

Применяя условие (5.1.3) к уравнениям (5.1.1), (5.1.2), получаем

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{R^4}{D} p(\alpha, \beta); \quad (5.1.4)$$

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}; \quad v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta};$$

$$\omega = \nabla^4 \Phi; \quad T_1 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2};$$

$$T_2 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}; \quad S = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta}; \quad (5.1.5)$$

$$G_1 = -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \nabla^4 \Phi;$$

$$G_2 = -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \nabla^4 \Phi.$$

При показателе изменяемости $\rho > 1/2$ вместо (5.1.4) получаем два независимых уравнения

$$\nabla^4 \varphi = 0; \quad \nabla^4 \omega = D^{-1} p(\alpha, \beta), \quad (5.1.6)$$

первое из которых описывает тангенциальное, а второе – изгибное состояние.

Уравнения полубезмоментной теории получим из уравнений общей теории, приняв, что выполняется условие

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \right|. \quad (5.1.7)$$

Разрешающее уравнение и соотношения, связывающие перемещения и силовые факторы с разрешающей функцией, принимают вид

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1 - \nu^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \Phi = \frac{R^2}{Eh} p(\alpha, \beta); \quad (5.1.8)$$

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial a \partial \beta^2}; \quad v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3}; \quad w = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4}; \quad T_1 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^2};$$

$$T_2 = -\frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right) \right];$$

$$S = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta}; \quad (5.1.9)$$

$$G_1 = -\nu \frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right]; \quad G_2 = -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right]$$

К наиболее простому варианту полубезмоментной теории приводит принятие следующего допущения:

$$|\partial^2 \Phi / \partial \beta^2| \gg |\Phi|. \quad (5.1.10)$$

При этом получаем вместо (5.1.8) (5.1.9)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} = \frac{R^2}{Eh} p(a, \beta);$$

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial a \partial \beta^2}; \quad v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3}; \quad w = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4}; \quad T_1 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^2};$$

$$T_2 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4}; \quad S = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta}; \quad (5.1.11)$$

$$G_1 = -\nu \frac{D}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6}; \quad G_2 = -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6}.$$

Уравнения теории краевого эффекта получим из уравнений (5.1.3), (5.1.4), приняв, что имеет место условие

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right|. \quad (5.1.12)$$

Разрешающее уравнение запишем относительно радиального перемещения $w(a, \beta)$:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial a^4} + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \omega = \frac{R^4}{D} p(a, \beta). \quad (5.1.13)$$

Основные силовые факторы выражаются через радиальное перемещение с помощью зависимостей

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{Eh}{R} \omega; & G_1 &= -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2}; \\ G_2 &= -\nu \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2}; & Q_1 &= -\frac{D}{R^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial a^3}. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Рассмотрим в качестве примера бесконечно длинную цилиндрическую оболочку при воздействии на нее самоуравновешенной системы локальных нагрузок, приложенных в одном поперечном сечении оболочки.

Нагрузки представим вдоль контура оболочки в виде ряда Фурье, а вдоль образующей – в виде интеграла Фурье, т.е.

$$p(a, \beta) = \frac{2}{\pi} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k_n \beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin a_0 \lambda \cos a \lambda d\lambda, \quad (5.1.15)$$

где

$$\theta_n = \frac{k\beta_0}{\pi} \quad (n=0); \quad \theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin k_n \beta_0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Решение разрешающего уравнения (5.1.1) ищем в виде, аналогичном разложению нагрузки:

$$\Phi(a, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k_n \beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \cos a \lambda d\lambda. \quad (5.1.16)$$

В результате очевидных подстановок получаем выражение для разрешающей функции:

$$\begin{aligned} \Phi(a, \beta) &= \frac{6(1 - \nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ &\times \frac{P}{ER} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k_n \beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

где

$$\mathcal{L}(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2 - 1)^2 (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 + 2(1 - \nu)\lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + \frac{(1 - \nu^2)}{c^2} \lambda^4. \quad (5.1.18)$$

Подстановка выражения (5.1.18) в зависимости (5.1.2) позволяет найти перемещения и силовые факторы. Но здесь мы ограничимся записью радиального перемещения и кольцевого изгибающего момента, предварительно положив $a_0 \rightarrow 0$, т.е. для частного случая нагружения оболочки по отрезкам ее контура:

$$\frac{ER}{P} \omega(a, \beta) = \frac{6(1 - \nu^2)}{\pi\beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\omega(\lambda, n)}{\mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda; \\ \frac{1}{P} G_2(a, \beta) = \frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{g_2(\lambda, n)}{\mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda;$$

$$\omega(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^2; \quad (5.1.19)$$

$$g_2(\lambda, n) = (k^2 n^2 + \nu \lambda^2 - 1)\omega(\lambda, n).$$

5.2. ПРИНЦИПЫ СИНТЕЗА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение на основе уравнений общей теории оболочек позволяет найти напряженно-деформированное состояние оболочки с высокой степенью точности, но в общем случае локализованных воздействий требует проведения трудоемкой вычислительной работы. При решении многих задач для оболочек с различными граничными условиями получение числовой информации наталкивается на значительные трудности. В этом отношении исключение составляют лишь оболочки с шарнирным закреплением. Одним из наиболее привлекательных путей получения достаточно точного и в то же время легко поддающегося численной реализации решения является синтез напряженно-деформированного

состояния оболочки на основе решений приближенных уравнений. Под синтезом будем понимать сведение в единое целое результатов решения различных приближенных уравнений, каждое из которых хорошо описывает то или иное элементарное напряженное состояние. При синтезе напряженно-деформированного состояния оболочек на основе приближенных уравнений, естественно, вопросом первостепенной важности является установление границы использования каждого из них в соответствии с вносимой ими погрешностью и вкладом в полное напряженно-деформированное состояние оболочки. Причем метод синтеза должен сочетать достаточную точность и существенно меньшую трудоемкость по сравнению с возможным решением на основе полных уравнений.

Рассмотрим методы синтеза напряженно-деформированного состояния оболочек, вытекающие естественным образом из асимптотического анализа уравнений общей теории (в основу классификации положим тип приближенных уравнений, применяемых при построении напряженного состояния):

основанный на условии обеспечения минимума асимптотической погрешности и применении уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта при "низких" номерах гармоник, а уравнений Власова – Доннелла – при "высоких" номерах гармоник;

закрывающийся в использовании при "низких" и "высоких" номерах гармоник уравнений четвертого порядка (полубезмоментной теории, краевого эффекта, типа изгиба пластинки и плоской задачи теории упругости), а при "средних" номерах – уравнений Власова – Доннелла.

Рассмотрим также возможность осуществления синтеза напряженно-деформированного состояния на основе уравнений только четвертого порядка по продольной координате, к которым относятся уравнения полубезмоментной теории, краевого эффекта, типа изгиба пластинки и плоской задачи теории упругости.

В первом методе синтеза напряженного состояния границу применения приближенных уравнений установим исходя из условия обеспечения минимума асимптотической погрешности, которое приводит к зависимости

$$k^4 n^4 = 2 \sqrt{3} R/h. \quad (5.2.1)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n будем обозначать через \bar{n} .

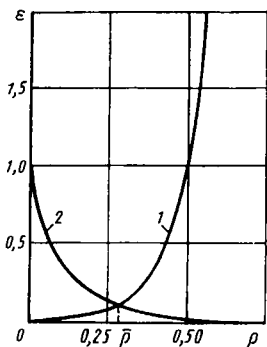


Рис. 5.2. К определению границы "скленвания" напряженных состояний из условия минимума асимптотической погрешности

При малой изменяемости напряженно-деформированного состояния оболочки ($n < \bar{n}$) минимальную погрешность обеспечивает применение уравнений полубезмоментной теории оболочек и краевого эффекта (кривая 1), а при более высокой изменяемости — уравнений Власова — Донелла (кривая 2) (рис.5.2).

Для сравнения рассмотрим, к каким границам применения приближенных уравнений приводит выполнение сильного неравенства (5.1.7) для полубезмоментной теории и сильного неравенства (5.1.12) для теории краевого эффекта.

Если обратиться к характеристическим уравнениям полубезмоментной теории (5.1.8) и теории краевого эффекта (5.1.13)

$$\lambda^4 + 4\mu_n^4 = 0; \quad (5.2.2)$$

$$4\mu_n^4 = c^2(1 - \nu^2)^{-1}k^4 n^4 (k^2 n^2 - 1)^2;$$

$$\lambda^4 + 4\eta^4 = 0; \quad (5.2.3)$$

$$4\eta^4 = (1 - \nu^2)c^{-2};$$

$$c^2 = h^2/(12R^2),$$

можно записать функции, входящие в решения, соответствующие этим теориям, в виде

$$\psi^0(a, \beta) = e^{-\mu_n a} \begin{bmatrix} \sin \mu_n a \\ \cos \mu_n a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin kn\beta \\ \cos kn\beta \end{bmatrix}; \quad (5.2.4)$$

$$\psi^K(a, \beta) = e^{-\eta a} \begin{bmatrix} \sin \eta a \\ \cos \eta a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin kn\beta \\ \cos kn\beta \end{bmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Вычислим вторую производную функции $\psi^0(a, \beta)$ по a и по β и подставим ее в неравенство (5.1.7), тогда получим

$$k^2 n^2 > \mu_n^2. \quad (5.2.6)$$

Если принять во внимание выражение для μ_n^2 , определяемое на основании (5.2.2), получим

$$k^2 n^2 > \frac{1}{4 \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{h}{R} k^2 n^2 (k^2 n^2 - 1). \quad (5.2.7)$$

Известно, что уравнения общей теории оболочек по условиям своего вывода содержат в себе погрешность порядка h/R по сравнению с единицей. Естественно, при их решении также нет смысла сохранять члены порядка, меньшего, чем h/R . Но приближенные уравнения теории оболочек, описывающие элементарные напряженные состояния (например, уравнения краевого эффекта), являются источником погрешности порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей.

Поэтому при синтезе напряженного состояния на основе приближенных уравнений будем пренебрегать также величинами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей. Тогда неравенство (5.2.7) может быть преобразовано к виду

$$k^2 n^2 = 4 \sqrt{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R/h}. \quad (5.2.8)$$

На основании (5.2.8) для определения значения n получаем формулу

$$n^2 = \frac{4}{k^2} \sqrt{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R/h}. \quad (5.2.9)$$

Рассмотрим сильное неравенство (5.1.12), играющее важную роль при переходе от уравнений общей теории к уравнениям теории краевого эффекта. На основании этого неравенства, принимая во внимание вид функции $\psi^k(a, \beta)$ в (5.2.5), найдем

$$\eta^2 > k^2 n^2. \quad (5.2.10)$$

Если здесь также принять, что можно пренебречь величинами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей, то для определения значения n получим формулу

$$k^2 n^2 = \sqrt{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R/h}, \quad (5.2.11)$$

которая дает значение n , в два раза меньшее, чем по формуле (5.2.9), и в то же время практически совпадающее со значением, соответствующим минимуму асимптотической погрешности (5.2.1).

Теперь на основе приближенных уравнений полубезмоментной теории, теории краевого эффекта и напряженного состояния с большой изменчивостью, принимая во внимание полученное значение $n = \bar{n}$, можно построить выражения для всех искомых силовых и деформационных факторов. Сделаем это для радиального перемещения и кольцевого изгибающего момента в случае нагружения бесконечно длинной оболочки по отрезкам контура:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(a, \beta) = & \frac{6(1 - \nu^2)}{\pi\beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ & \times \left[\int_0^\infty \frac{\cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta + \right. \\ & + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\omega_n^0 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\omega(\lambda, n) \cos a\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2 + 4\eta^4 \lambda^4} d\lambda \right]; \quad (5.2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(a, \beta) = & \frac{1}{2\pi\beta_0} \left[\nu \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{g_{2n}^0 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \int_0^{\infty} \frac{g_2(\lambda, n) \cos \alpha \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4 \eta^4 \lambda^4} d\lambda \right],$$

где

$$\omega_n^0 = k^4 n^4; \quad g_{2n}^0 = k^4 n^4 (k^2 n^2 - 1);$$

$$\omega(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^2; \quad g_2(\lambda, n) = (k^2 n^2 + \nu \lambda^2) \omega(\lambda, n).$$

Построенное таким методом решение не обладает существенными преимуществами по сравнению с точным решением, поскольку третье напряженное состояние описывается уравнениями такого же порядка, как и исходные точные уравнения. К коренному упрощению решения может привести лишь их замена уравнениями четвертого порядка для изгибного и тангенциального состояний.

Для установления значения номера ряда, при котором такая замена возможна, рассмотрим знаменатель подынтегральных выражений (5.2.12), соответствующих решению на основе уравнений Власова - Доннелла. Преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \lambda^4 = \lambda^8 + 4\lambda^6 k^2 n^2 + \\ &+ \left[6k^4 n^4 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \right] \lambda^4 + 4\lambda^2 k^6 n^6 + k^8 n^8. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Значение номера ряда n , при котором можно перейти к уравнениям изгибного и тангенциального состояний, получим из сравнения членов с множителем λ^4 , входящих в выражение (5.2.13):

$$k^4 n^4 > 2(1 - \nu^2)(R/h)^2. \quad (5.2.14)$$

Припимая, как и раньше, что при использовании приближенных уравнений теории оболочек можно пренебрегать величинами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей, на основании (5.2.14) для определения значения n получаем зависимость

$$n^4 \approx \frac{2}{k^4} (1 - \nu^2) \left[\frac{R}{h} \right]^{5/2}. \quad (5.2.15)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , определяемое на основании зависимости (5.2.15), будем обозначать через \bar{n} .

Таким образом, имеем два характерных значения n . Это $n = \bar{n}$, $n = n^*$. При $n \leq \bar{n}$ с точностью до величин порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей выполняется сильное неравенство (5.2.6), позволяющее осуществлять переход от уравнений общей теории к полубезмоментной теории, а при $n > n^*$ ценой внесения некоторой дополнительной погрешности можно заменить уравнения восьмого порядка для напряженного состояния с большой изменяемостью уравнениями четвертого порядка для тангенциального и изгибного состояний. Принимая это во внимание, преобразуем последние слагаемые в выражениях (5.2.12) при $n > n^*$, тогда получим решение на основе второго метода синтеза напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(a, \beta) = & \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ & \times \left[\sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \right. \\ & + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\omega_n^0 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \\ & + \sum_{n=1}^{n^*} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\omega(\lambda, n) \cos a\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2 + 4\eta^4 \lambda^4} d\lambda + \\ & \left. + \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos a\lambda}{(\lambda^2 + kn^2)^2} d\lambda \right]; \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(a, \beta) = & \frac{1}{2\pi\beta_0} \left[\nu \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n g_{2n}^0 \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{g_{2n}(\lambda, n) \cos \lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k^2 n^2)^4 + 4\eta^4 \lambda^4} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{(k^2 n^2 + \nu \lambda^2) \cos \lambda}{(\lambda^2 - k^2 n^2)^2} d\lambda \Big].
 \end{aligned}$$

Записанные здесь решения для оболочек бесконечной длины используются с целью определения действительной погрешности, вносимой n -ой гармоникой при вычислении того или иного фактора на основе приближенных уравнений. Проверим также при помощи численного эксперимента – путем вычисления на основе приближенных уравнений и по общей теории оболочек (для бесконечно длинных оболочек и для оболочек конечной длины с шарнирным закреплением краев) – найденную зависимость (5.2.15) для n .

В построенных решениях каждый член ряда характеризуется вполне определенной изменчивостью. Напряженное состояние, таким образом, состоит из членов ряда, изменчивость которых варьируется в весьма широком диапазоне. Если в зависимости от ее величины применять приближенные уравнения, соответствующие рассмотренным элементарным состояниям, то погрешность полного напряженного состояния будет зависеть от того, на основе каких уравнений строится напряженное состояние при различных значениях n . Оценим величину действительной погрешности при различных значениях n с тем, чтобы более четко ограничить область применимости различных приближенных уравнений и проверить зависимость (5.2.15) для определения n . Для этого воспользуемся расчетами для перемещений и силовых факторов при каждом члене ряда n в отдельности. Погрешность радиального перемещения для n -ой гармоники, построенного на основе уравнений общей теории и Власова – Доннелла при различных значениях параметров R/h , l/R , α_0 , β_0 , иллюстрируется кривыми на рис.5.3...5.5. Именно значительная погрешность при вычислении низких гармоник на основе этих уравнений приводит к накоплению полной погрешности, достигающей при некоторых параметрах значительной величины. Это в первую очередь относится к радиальному перемещению (см. рис.5.3). Для него вклад каждой гармоники показан на рис.5.4. Наиболее весомый вклад вносят первые члены ряда в случае более толстых и длинных оболочек (см. рис.5.5).

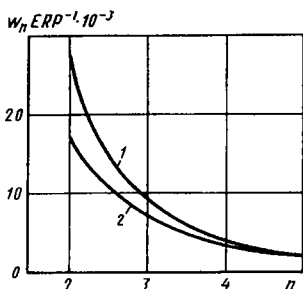


Рис. 5.3. Сравнение n -ой гармоники радиального перемещения, определенного на основе уравнений общей теории оболочек (1) и уравнений Власова — Доннелла (2) ($R/h = 100$; $\alpha_1 = 20$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0.25$; $\alpha = \xi = 10$; $\beta = 0$)

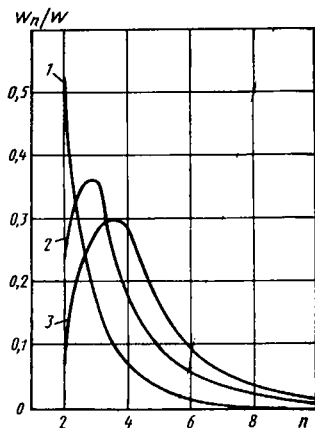


Рис. 5.4. Вклад n -ой гармоники в полное радиальное перемещение оболочки при различных значениях параметра R/h ($\alpha_1 = 8$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0.25$; $\beta = 0$; $\alpha = \xi = 0.5 \alpha_1$):
 1 — $R/h = 15$; 2 — $R/h = 100$; 3 — $R/h = 300$

Величина погрешности для силовых факторов существенно меньше. Это можно объяснить тем, что их выражения содержат более высокие производные разрешающей функции и, как следствие, имеют большую изменчивость. Остановимся на погрешности при вычислении изгибающих моментов для оболочек с шарнирным закреплением, имеющей следующие параметры: $l/R = 8$; $R/h = 100$. Относительные размеры нагруженной области следующие: $\delta_0 = 1/4$; $1/32$. Кривые изменения значений кольцевого момента G_2 для n -ой гармоники даны на рис.5.6, 5.7 для приближенных уравнений всех упомянутых ранее элементарных напряженных состояний. Нетрудно заметить, что с увеличением номера n погрешность полубезмоментной теории (основного состояния) растет, а погрешность моментной технической теории падает. При больших размерах нагруженных областей ($\delta_0 = 1/4$) достаточно хорошее приближение к точному решению дают уравнения полубезмоментной

Рис. 5.5. Сравнение n -ой гармоники радиального перемещения, определенного по общей теории оболочек при различных длинах оболочки ($R/h = 100$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0,25$; $\beta = 0$; $\alpha = \xi = 0,5\alpha_1$):

1 - $\alpha_1 = 12$; 2 - $\alpha_1 = 8$; 3 - $\alpha_1 = 4$

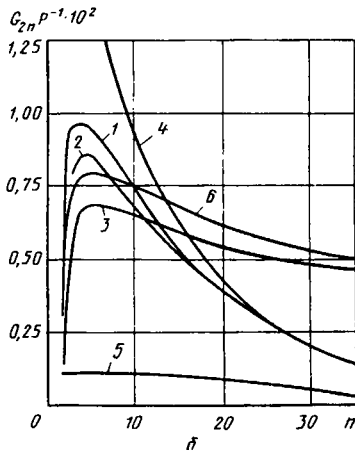
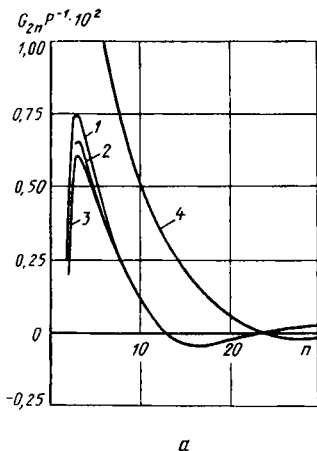
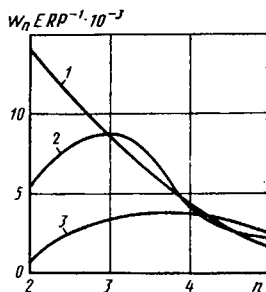


Рис. 5.6. Сравнение n -ой гармоники кольцевого изгибающего момента на основе различных уравнений теории оболочек при $\alpha_1 = 8$; $R/h = 100$; $\alpha = \xi = 0,5\alpha_1$:

$\alpha - \alpha_0 = \beta_0 = 0,25$; $\beta - \alpha_0 = \beta_0 = 0,03125$; 1 - общая теория оболочек; 2 - уравнения Власова - Доннелла; 3 - полубезмоментная теория; 4 - изгибное состояние; 5 - теория краевого эффекта; 6 - полубезмоментная теория плюс краевой эффект

теории (основного состояния) (см. рис.5.6, а). При областях $\delta_0 \approx 1/32$ основное состояние и краевой эффект для малых номеров n дают числовые результаты меньшие, а при $n - n^*$ — большие, чем по общей теории оболочек (см. рис.5.6, б). Результаты для изгибного состояния при малых значениях n существенно отличаются от точных, особенно при больших δ_0 , а при $n > n^*$ изгибное состояние дает лучшее приближение к точному решению, чем основное состояние в сумме с краевым эффектом.

Таким образом, анализ числовой информации, полученной для оболочек конечной длины на основе уравнений общей теории оболочек и уравнений, описывающих изгибное состояние, показывает, что последние достаточно хорошо описывают напряженное состояние оболочек при номерах гармоник, определяемых зависимостью (5.2.15).

На основе решения (5.2.16) рассмотрим действительную погрешность различных приближенных уравнений для бесконечно длинной оболочки при действии радиальной нагрузки по отрезкам контура и по квадратным областям. В качестве примера возьмем оболочку с относительной толщиной $h/R = 0,01$, нагруженную двумя силами ($k = 2$), приложенными на одном диаметре. Ограничимся обсуждением только результатов для кольцевого изгибающего момента. Они представлены в виде кривых на рис.5.7, а и б. Данные на рис.5.7, а относятся к случаю нагружения бесконечно длинной оболочки двумя радиальными нагрузками, действующими по отрезкам контура с параметром $\beta_0 = 0,125$. На рис.5.7, б отражены результаты для случая действия двух локальных радиальных нагрузок с параметрами нагруженных областей $\alpha_0 = \beta_0 = 0,03125$.

В обоих случаях в качестве исходных принимались уравнения общей теории оболочек в форме В.З. Власова, уравнения Доннелла — Власова, уравнения полубезмоментной теории, теории краевого эффекта и изгибного состояния. Погрешность решений на основе уравнений Доннелла — Власова появляется за счет нескольких первых членов ряда. При номерах $n = 1; 2$ основное состояние в сумме с краевым эффектом дает результаты, близкие к точным. Для первых членов ряда краевой эффект существенно корректирует основное состояние, приближая результат к точному. При значениях $n \approx 5...6$ решение на основе уравнений изгибного состояния незначительно отличается от решения уравнений Власова — Доннелла; последнее же практически совпадает с

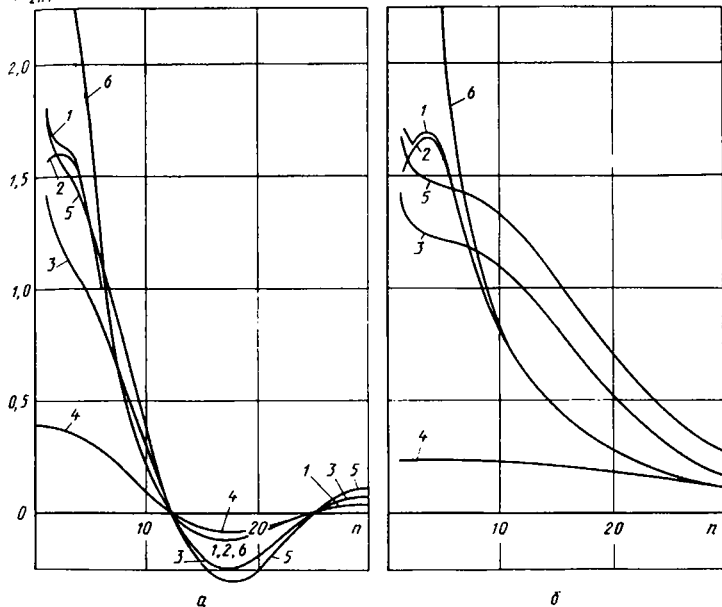
$(G_{2n}/P) \cdot 10^2$ 

Рис. 5.7. Сравнение n -ой гармоники кольцевого изгибающего момента на основе различных уравнений теории оболочек для оболочки n нагруженной области с параметрами $\alpha_1 = \infty$; $R/h = 100$; $k = 2$; $\alpha =$

$\beta = 0$:

$a - a_0 \rightarrow 0$; $\beta_0 = 0.125$; $b - a_0 = \beta_0 = 0.03125$; 1 - общая теории

оболочек; 2 - уравнения Власова - Доннелла; 3 - полубезмоментная теория; 4 - теория краевого эффекта; 5 - полубезмоментная теория плюс краевой эффект; 6 - изгибное состояние

точным. Это свидетельствует о возможности перехода в рассмотренных случаях при $n = 5 \dots 6$ от уравнений Власова - Доннелла к уравнениям изгибного состояния, что хорошо согласуется со значением n^* , определяемым на основе выражения (5.2.15).

Анализ действительной погрешности для искомых факторов показы-

вает, что при локализованных воздействиях на цилиндрические оболочки можно избежать интегрирования уравнений Власова – Доннелла для напряженного состояния с большой изменчивостью и свести задачу к решению хорошо изученных уравнений четвертого порядка для основного, изгибного, тангенциального состояний и краевого эффекта путем расширения области использования уравнений полубезмоментной теории (основного состояния) и краевого эффекта до номеров гармоник $n = n^*$. Это означает исключение из рассмотрения уравнений восьмого порядка для напряженного состояния с большой изменчивостью (уравнений Власова – Доннелла). Таким образом, решение, построенное на основе второго метода синтеза напряженного состояния (5.2.16), существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(a, \beta) = & \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ & \times \left[\sum_{n=0}^{n^*} \theta_n^* \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\cos a\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} + \right. \\ & + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=1}^{n^*} \theta_n^* \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\omega_n^0 \cos a\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} + \\ & \left. + \sum_{n^*+1}^\infty \theta_n^* \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\cos a\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} \right]; \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(a, \beta) = & \frac{1}{2\pi\beta_0} \left[\nu \sum_{n=0}^{n^*} \theta_n^* \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos a\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \right. \\ & + \frac{1}{4\eta^4} \sum_{n=1}^{n^*} g_{2n}^0 \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\cos a\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} + \\ & \left. + \sum_{n^*+1}^\infty \theta_n^* \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{k^2 n^2 + \nu\lambda^2}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} \cos a\lambda d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Записанное решение иллюстрирует применение третьего метода синтеза – метода синтеза напряженного состояния на основе уравнений только четвертого порядка – к решению задач о действии на оболочки локальных радиальных нагрузок.

Исключение из рассмотрения уравнений восьмого порядка – уравнений Власова – Доннелла – вместе с возможностью получения численного значения по формуле (5.2.15) открывает перспективы получения достаточно точных и в то же время "прозрачных" и легко реализуемых решений многочисленных задач по локализованному силовому и температурному воздействиям на оболочки.

5.3. ЛОКАЛЬНЫЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ, ОСНОВНОЕ И ИЗГИБНОЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ОБОЛОЧКИ ПО ОТРЕЗКАМ КОНТУРА

Напряженно-деформированное состояние оболочки (рис.5.8) будем строить на основе метода синтеза, изложенного в подразд. 5.2. Элементарные напряженные состояния описываются уравнениями только четвертого порядка. Это уравнения полубезмоментной теории оболочек (основное состояние), теории краевого эффекта и изгибного состояния. Решение этих уравнений получаем, применяя, как и при решении уравнений общей теории, разложение в ряды Фурье по окружной координате. В продольном направлении оно представляется в виде интеграла Фурье.

В соответствии с идеей метода синтеза напряженного состояния разрешающая функция записывается приближенно так:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \underbrace{\Phi^0(\alpha, \beta) + \Phi^K(\alpha, \beta)}_{\rho < \rho^*} + \underbrace{\Phi^H(\alpha, \beta)}_{\rho > \rho^*}. \quad (5.3.1)$$

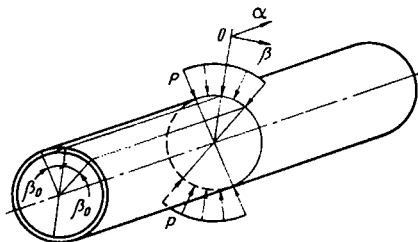


Рис. 5.8. Цилиндрическая оболочка, нагруженная по отрезкам контура

Здесь индексы "о", "к", "и" обозначают принадлежность разрешающей функции (а в дальнейшем и других факторов) к основному состоянию, краевому эффекту и изгибному состоянию соответственно. Показатель изменчивости напряженного состояния ρ^* соответствует значению n^* , определяемому на основании зависимости (5.2.15).

По аналогии с (5.3.1) представляются и все силовые и деформационные факторы оболочки (усилия, изгибающие моменты, перемещения). Для радиального перемещения и кольцевого изгибающего момента выражения записаны в подразд. 5.2 в виде (5.2.17). Здесь их представим в форме, которая получается после вычисления интегралов. Запишем и другие силовые факторы, причем условимся, что $a \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} \omega(a, \beta) &= \frac{k^4}{8\pi\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n \frac{n^3}{\mu_n^3} [\chi_n(a) + \\
 &+ \zeta_n(a)] \operatorname{sinkn}\beta_0 \operatorname{coskn}\beta + \frac{\eta}{4\beta_0} \frac{R}{h} [\chi(a) + \zeta(a)] \theta^*(\beta) + \\
 &+ \frac{3(1-\nu^2)}{\pi k^3 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^4} (1 + kna) e^{-kna} \operatorname{coskn}\beta; \\
 \frac{R}{P} T_1(a, \beta) &= - \frac{k^2}{4\pi\beta_0} \sum_n \frac{n}{\mu_n} [\chi_n(a) - \zeta_n(a)] \operatorname{sinkn}\beta_0 \operatorname{coskn}\beta; \\
 \frac{R}{P} T_2(a, \beta) &= - \frac{\eta}{4\beta_0} [\chi(a) + \zeta(a)] \theta^*(\beta); \\
 \frac{1}{P} G_1(a, \beta) &= \frac{\nu}{2\pi\beta_0} \sum_n \frac{\mu_n \operatorname{sinkn}\beta_0}{n(k^2 n^2 - 1)} [\chi_n(a) + \\
 &+ \zeta_n(a)] \operatorname{coskn}\beta + \frac{\eta}{8\beta_0} [\chi(a) - \zeta(a)] \theta^*(\beta) + \\
 &+ \frac{1}{4\pi k \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2} [1 + \nu - (1-\nu)kna] e^{-kna} \operatorname{coskn}\beta;
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(a, \beta) &= \frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_n \frac{\mu_n \operatorname{sinkn}\beta_0}{n(k^2 n^2 - 1)} [\chi_n(a) + \\ &+ \zeta_n(a)] \operatorname{coskn}\beta + \frac{\nu\eta}{8\beta_0} [\chi(a) - \zeta(a)] \theta^*(\beta) + \\ &+ \frac{1}{4\pi k\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2} [1 + \nu + (1 - \nu)kna] e^{-kna} \operatorname{coskn}\beta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\chi_n(a) = e^{-\frac{\mu}{n}a} \operatorname{cos}\mu_n a; \quad \zeta_n(a) = e^{-\frac{\mu}{n}a} \operatorname{sin}\mu_n a; \quad (5.3.3)$$

$$\chi(a) = e^{-\eta a} \operatorname{cos}\eta a; \quad \zeta(a) = e^{-\eta a} \operatorname{sin}\eta a;$$

$$\theta^*(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \operatorname{coskn}\beta. \quad (5.3.4)$$

Наиболее просто выражения (5.3.2) записываются в точке $a = \beta = 0$, где искомые величины принимают максимальные значения:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(0, 0) &= \frac{k^4}{8\pi\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n \frac{n^3}{\mu_n^3} \operatorname{sinkn}\beta_0 + \\ &+ \frac{\eta}{4\beta_0} \frac{R}{h} \theta^*(0) + \frac{3(1 - \nu^2)}{\pi k^3 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sinkn}\beta_0; \end{aligned}$$

$$\frac{R}{P} T_1(0, 0) = -\frac{k^2}{4\pi\beta_0} \sum_n \frac{n}{\mu_n} \operatorname{sinkn}\beta_0;$$

$$\frac{R}{P} T_2(0, 0) = -\frac{1}{4\beta_0} \eta \theta^*(0);$$

(5.3.5)

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{\nu}{2\pi\beta_0} \sum_n \frac{\mu_n \operatorname{sinkn}\beta_0}{n(k^2 n^2 - 1)} +$$

$$+ \frac{1}{8\beta_0} \eta \theta^*(0) + \frac{1 - \nu}{4\pi k\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2};$$

$$\frac{1}{P} G_2(0, 0) = \frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \operatorname{sinkn}\beta_0}{n(k^2 n^2 - 1)} +$$

$$+ \frac{\nu}{8\beta_0} \pi\theta^*(0) + \frac{1+\nu}{4\pi k\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2}.$$

Отметим, что в слагаемых, являющихся решением для основного состояния, суммирование начинается с $n = 1$, если $k \geq 2$, и с $n = 2$ при $k = 1$. Случай $k = 1$ исключать из рассмотрения не следует, так как даже для бесконечно длинной оболочки он не лишен физического смысла. Полученное для значения $k = 1$ самоуравновешенное напряженно-деформированное состояние может быть наложено на балочное решение, учитывающее длину и условия закрепления оболочки.

Теперь заметим, что слагаемые, являющиеся решением изгибного состояния, могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{1}{P} G_2(0, 0) =$$

$$= \frac{1+\nu}{4\pi k\beta_0} \left[\gamma(k\beta_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2} \right], \quad (5.3.6)$$

где

$$\gamma(k\beta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2}.$$

Обращает на себя внимание равенство максимальных значений изгибающих моментов в изгибном состоянии:

$$\frac{1}{P} G_1^M(0, \beta) = \frac{1}{P} G_2^M(0, \beta) = \frac{1+\nu}{4\pi k\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{n^2} \operatorname{coskn}\beta. \quad (5.3.7)$$

Эта формула дает изгибное состояние при действии кусочно-постоянной нагрузки на линии $[-\beta_0; +\beta_0]$. Роль изгибного состояния весьма различна в зависимости от величины параметров β_0 и k . При $k\beta_0 \rightarrow \pi$ имеем $G_1^M(0, \beta) = G_2^M(0, \beta) \rightarrow 0$, а при $\beta_0 \rightarrow 0$ роль

изгибного состояния становится определяющей, и тогда имеет место приближенное равенство

$$\frac{1}{P} G_i(0, \beta) = \frac{1}{P} G_i^M(0, \beta) = \frac{1 + \nu}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos kn\beta}{n}. \quad (5.3.8)$$

Принимая во внимание, что входящая в выражение (5.3.8) сумма может быть записана в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos kn\beta}{n} = -\ln \left[2 \sin \frac{k\beta}{2} \right] \quad (0 < \beta < 2\pi),$$

получаем асимптотическую формулу для моментов

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{1}{P} G_2(0, 0) = \frac{1 + \nu}{4\pi} \ln \beta. \quad (5.3.9)$$

5.4. ЗАПИСЬ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ

Выражения (5.3.2) для максимальных значений искомых силовых факторов преобразуем к виду

$$\frac{R}{P} T_1(0, 0) = -\frac{k \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\pi\beta_0} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^* \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}};$$

$$\frac{R}{P} T_2(0, 0) = -\frac{1}{4\beta_0} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta^*(0);$$

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{\nu k}{4\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^* \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} +$$

$$+ \frac{1}{8\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \theta^*(0) +$$

$$+ \frac{1 + \nu}{4\pi k \beta_0} \left[\gamma(k\beta_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2} \right];$$

(5.4.1)

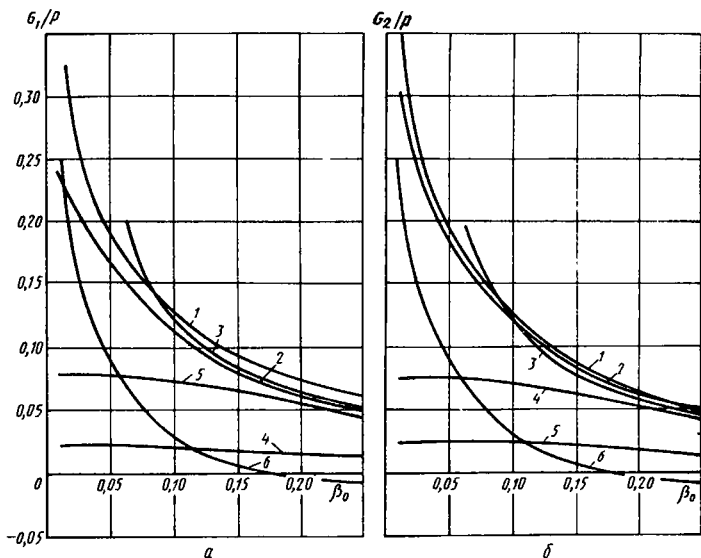


Рис. 5.9. Синтез продольного (а) и кольцевого (б) изгибающих моментов при нагружении бесконечно длинной оболочки по отрезкам контура ($R/h = 100$; $k = 2$; $\alpha = \beta = 0$):

1 — основное состояние плюс локальный краевой эффект плюс изгибное состояние (формула (5.3.5)); 2 — точное решение по общей теории оболочек; 3 — формула (5.4.5); 4 — основное состояние; 5 — локальный краевой эффект; 6 — изгибное состояние

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(0, 0) &= \frac{k}{4\pi\beta_0} \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} + \\ &+ \frac{\nu}{8\beta_0} \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \theta^*(0) + \\ &+ \frac{1+\nu}{4\pi k\beta_0} \left[\gamma(k\beta_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

Числовая информация, найденная на основе выражений (5.4.1), сравнивалась с точным решением. При этом хорошее совпадение наблюдалось во всем диапазоне изменения длины нагруженных отрезков вплоть до сосредоточенной силы (рис.5.9, а, б).

Оценки сходимости рядов, входящих в решение для основного состояния, краевого эффекта и изгибного состояния (5.4.1), и роли указанных состояний при различных значениях параметров k , β_0 показывают, что для достаточно широкого диапазона изменения этих параметров значения силовых факторов определяются первыми двумя слагаемыми. На примере кольцевого момента это означает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(0, 0) &= \frac{k}{4\pi\eta\beta_0} \sum_n \frac{n^* \operatorname{sinkn}\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} + \\ &+ \frac{\nu}{8\pi\beta_0} \theta^*(0) = \frac{k}{4\pi\eta\beta_0} \sum_n \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} + \frac{\nu}{8\pi\beta_0} \theta^*(0). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

К этому же заключению приводит и сопоставление расчетных данных для n -го члена, что объясняется чрезвычайно малой ролью изгибного состояния при больших длинах нагруженных отрезков.

По аналогии с (5.4.2) можно записать для остальных силовых факторов следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} T_1(0, 0) &= -\frac{k}{2\pi\beta_0} \eta \sum_n \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}}; \\ \frac{R}{P} T_2(0, 0) &= -\frac{1}{4\beta_0} \eta\theta(0); \\ \frac{1}{P} G_1(0, 0) &= \frac{\nu k}{4\pi\eta\beta_0} \sum_n \frac{\operatorname{sinkn}\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} + \frac{1}{8\pi\beta_0} \theta(0). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Введем еще одно допущение: примем

$$k^2 n^2 - 1 = k^2 n^2. \quad (5.4.4)$$

Очевидно, что для числа нагрузок $k \geq 4$ принятое допущение не вносит практически никакой погрешности при определении силовых

факторов. Она незначительна и резко уменьшается с увеличением n и числа приложенных нагрузок. С принципиальной точки зрения переход от выражения $(k^2 n^2 - 1)$ к $k^2 n^2$ означает замену разрешающего уравнения полубезмоментной теории еще более простым уравнением, которое получается, если принять, что

$$|\partial^2 \Phi / \partial \beta^2| \gg |\Phi|.$$

Принимая допущение (5.4.4), получаем возможность записать выражения (5.4.2), (5.4.3) в замкнутой форме.

Для случая действия $k \geq 2$ нагрузок имеем

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} T_1(0, 0) &= - \frac{(\pi - k\beta_0) \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{4\pi\beta_0} \sqrt{\frac{R}{h}}; \\ \frac{R}{P} T_2(0, 0) &= - \frac{1}{4\beta_0} \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}; \\ \frac{1}{P} G_1(0, 0) &= \frac{\pi + \nu(\pi - k\beta_0)}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}; \\ \frac{1}{P} G_2(0, 0) &= \frac{\pi + \nu\pi - k\beta_0}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Проведенное сравнение силовых факторов, вычисленных по формулам, с их точными значениями показывает (см. рис.5.9), что хорошее совпадение с точным решением (по общей теории оболочек) наблюдается при нагружении по отрезкам контура, для которых параметр β_0 удовлетворяет условию $\beta_0 \geq \sqrt{h/R}$, что соответствует длинам нагруженных отрезков

$$s_0 \geq 2 \sqrt{Rh}. \tag{5.4.6}$$

Интересно отметить совпадение полученной оценки с шириной зоны затухания краевого эффекта.

Представляет интерес для сравнения получить формулы в замкнутом виде только на основе полубезмоментной теории и осесимметричной составляющей (нулевого члена) краевого эффекта. Для изгибающих моментов находим

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{\nu\pi + (1 - \nu)k\beta_0}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}; \quad (5.4.7)$$

$$\frac{1}{P} G_2(0, 0) = \frac{\pi - (1 - \nu)k\beta_0}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}.$$

При увеличении $k\beta_0$ роль краевого эффекта в формулах (5.4.7) возрастает, а при $k\beta_0 = \pi$ (этот случай соответствует осесимметричному нагружению) формулы переходят в известные зависимости. Формулы (5.4.7) дают заниженные значения по сравнению с (5.4.5). Особенно это относится к продольному моменту, который приближается к точному значению лишь при весьма больших значениях $k\beta_0$. Для кольцевого момента получаются приемлемые результаты в диапазоне изменения β_0 , соответствующем соотношению (5.4.6).

Записаны формулы для максимальных значений силовых факторов. Не составляет труда их получение при любых значениях β , относящихся к нагруженному сечению оболочки.

Получим формулы для наибольших напряжений на основе найденных силовых факторов (5.4.5):

$$\begin{aligned} \frac{Rh}{P} \sigma_1(0, 0) &= \\ &= - \frac{3[\pi + \nu(\pi - k\beta_0)] + (\pi - k\beta_0) \sqrt{3(1 - \nu^2)}}{4\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}}; \\ \frac{Rh}{P} \sigma_2(0, 0) &= - \frac{3(\nu\pi + \pi - k\beta_0) + \pi \sqrt{3(1 - \nu^2)}}{4\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}}. \end{aligned}$$

5.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как было показано в подразд. 5.4, примененный метод синтеза оказывается весьма плодотворным при определении напряженного состояния для рассматриваемого класса задач. Перейдем к деформированному состоянию оболочек. Если иметь в виду действие радиальной нагрузки, основным при решении практических задач является радиальное перемещение. Преобразуем выражение для радиального перемещения, входящее в выражение (5.3.2):

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} \omega(a, \beta) &= \frac{3(1-\nu^2)k}{\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \times \\
 &\times \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^* \frac{\sin kn\beta_0}{(k^2 n^2 - 1) \sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\chi_n(a) + \\
 &+ \zeta_n(a) [\cos kn\beta + \frac{\eta}{4\beta_0} \frac{R}{h} [\chi(a) + \zeta(a)] \theta^*(\beta) + \\
 &+ \frac{3(1-\nu^2)}{\pi k^3 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^4} (1 + \\
 &+ kna) e^{-kna} \cos kn\beta.
 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

В точке $a = \beta = 0$ перемещение принимает максимальное значение

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} \omega(0, 0) &= \frac{3(1-\nu^2)k}{\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \times \\
 &\times \sum_n^* \frac{\sin kn\beta_0}{(k^2 n^2 - 1)^{3/2}} + \frac{1}{4\beta_0} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta^*(0) + \\
 &+ \frac{3(1-\nu^2)}{\pi k^3 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^4} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(1-\nu^2)k}{\pi\beta_0^4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{(k^2 n^2 - 1)^{3/2}} + \\
 &+ \frac{1}{4\beta_0^4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta^*(0). \quad (5.5.2)
 \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что основной вклад вносит первое слагаемое, являющееся решением уравнений полубезмоментной теории оболочек. Оно примерно в R/h раз больше второго слагаемого. В то же время присутствие второго слагаемого носит принципиальный характер, так как в предельном случае $k\beta_0 = \pi$ первое слагаемое исчезает. Но и в предельном случае в слагаемом краевого эффекта достаточно ограничиться только нулевым членом, отражающим лишь осесимметричную деформацию:

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} \omega(0, 0) &= \frac{k \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\pi} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} + \\
 &+ \frac{3(1-\nu^2)k}{\pi\beta_0^4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{(k^2 n^2 - 1)^{3/2}}. \quad (5.5.3)
 \end{aligned}$$

Кроме того, здесь, как и в (5.4.2), (5.4.3), принято $n^* \rightarrow \infty$. Справедливость этой операции нетрудно проверить, если сравнить частичные суммы ряда, входящего в (5.5.3).

Представим выражение (5.5.3) в более удобном для вычисления виде

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} \omega(0, 0) &= \left[\frac{k \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\pi} + \right. \\
 &+ \frac{3(1-\nu^2)}{\pi \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{R}{h} \left[\frac{\pi^2}{6k} - \frac{\pi\beta_0}{4} + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{k\beta_0^2}{12} + \epsilon_k \right] \right] \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (k \geq 2), \quad (5.5.4)
 \end{aligned}$$

где

$$\epsilon_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k}{(k^2 n^2 - 1) \sqrt{k^2 n^2 - 1}} - \frac{1}{k^2 n^3} \right] \frac{\sin k n \beta_0}{\beta_0} \quad (k \beta_0 < \pi)$$

При действии сосредоточенных сил решение получается на основании (5.5.4) путем предельного перехода $\beta_0 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(0, 0) = & \left[\frac{k^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{4\pi} + \right. \\ & \left. + \frac{3(1-\nu^2)}{\pi^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\frac{\pi^2}{6k} + \epsilon_k \right] \frac{R}{h} \right] \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}}; \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

$$\epsilon_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^2 n^2}{(k^2 n^2 - 1) \sqrt{k^2 n^2 - 1}} - \frac{1}{k n^2} \right] \quad (k > 2).$$

Приведем значения ϵ_k по формуле (5.5.5) при разных значениях k :

k	2	3	4	6	8	12
ϵ_k	0,286	0,069	0,027	0,008	0,003	0,001
$\pi^2/(6k)$	0,822	0,548	0,411	0,270	0,206	0,137

Для большого числа сил формулы (5.5.4), (5.5.5) можно упростить за счет пренебрежения величиной ϵ_k по сравнению с другими членами.

Отметим, что уже при $k \geq 4$ погрешность за счет пренебрежения величиной ϵ_k менее 5%. Итак, для большого числа сил взамен формулы (5.5.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \omega(0, 0) = & \left[\frac{k^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{4\pi} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi(1-\nu^2)}{2k^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{R}{h} \right] \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Учитывая незначительную трудоемкость вычисления по формулам (5.5.4)...(5.5.6), следует признать, что переход от формулы (5.5.5) к (5.5.6) носит принципиальный характер, так как позволяет полностью избавиться от рядов.

Наибольшее внимание в литературе уделяется случаю действия на оболочку двух противоположно направленных сосредоточенных сил. Для этого случая ($k = 2$) при $\nu = 0,3$ на основании формулы (5.5.5) находим

$$\omega(0, 0) = 0,75 \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{P}{ER} .$$

Вычисленное по этой формуле радиальное перемещение практически совпадает с полученным значением для прецизионно поставленного эксперимента.

Отметим, что применение метода синтеза напряженного состояния к решению задачи о действии на полубесконечную оболочку со свободным краем радиальной нагрузки, приложенной по отрезкам контура, и сосредоточенных сил привело к установлению ряда интересных зависимостей для силовых и деформационных факторов [64]. Их простота позволила увидеть, в частности, соотношение между радиальным перемещением в бесконечно длинной и в полубесконечной оболочке, нагруженной той же системой радиальных сил на свободном крае — оно равно 1:4. Проведенное экспериментальное прецизионное исследование подтвердило найденное теоретическим путем соотношение [64].

ГЛАВА 6 РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

Метод возмущений играет в механике деформируемого твердого тела важную роль. Представление искомой функции в виде ряда по степеням реально присутствующего в уравнениях или вводимого искусственно параметра часто приводит к успеху. К сожалению, ценность метода снижает то обстоятельство, что получаемое решение существенно локально (справедливо только в окрестности порождающего решения). Положение усложняется еще и тем, что указать границы применимости решений на основе метода возмущений (т.е. расшифровать смысл термина "малый параметр" или выражения $\epsilon \ll 1$) в реальных задачах, как правило, не удается.

Локальность разложения обычно пытаются преодолеть, увеличивая число членов асимптотического ряда. Однако "можно вычислить только несколько членов возмущенного решения, обычно не больше, чем два или три ... Получающиеся ряды часто медленно сходятся или даже расходятся. Тем не менее эти несколько членов содержат значительную информацию, из которой исследователь должен извлечь все, что возможно" [29].

В настоящее время известен ряд подходов к решению указанной проблемы. Это, во-первых, метод аналитического продолжения. Примером может служить преобразование Эйлера $\bar{\epsilon} = \epsilon/(1 - \epsilon)$, переносящее особенность из точки $\epsilon = -1$ в бесконечно удаленную точку. Такой подход впервые применил Р. Беллман в нелинейных задачах механики. Суть его поясним на простом примере. Пусть рассматривается разложение в ряд функции $f(\epsilon) = \sqrt{1 + \epsilon}$. Точка $\epsilon = -1$ является точкой ветвления, и соответствующий ряд сходится при всех значениях $|\epsilon| < 1$ и расходится при значениях $|\epsilon| > 1$. Если выполнить преобразование Эйлера, то разложение функции $f(\bar{\epsilon})$ будет сходиться для любых значений $\bar{\epsilon} \geq 0$, т.е. функция аналитически продолжится в область положительных значений ϵ . Дальнейшее развитие данный метод получил в работе [46]. Здесь предложены различные методы замены параметра применительно к решению краевых задач, а также указана общая схема построения типов замен. На основе метода аналитического продолжения решены нелинейные задачи теории стержней, пластин и оболочек.

Другой прием улучшения сходимости приближенных решений носит название метода обобщенного суммирования [46]. Основой его служит переразложение исходных рядов по системе некоторых функций, называемых обобщенно-суммирующими. Предложены различные варианты обобщенного суммирования и выполнено их математическое обоснование. Указанный подход был успешно применен к решению ряда актуальных задач механики сплошной среды [46].

Эффективность описанного метода будет наибольшей, если исходный ряд условно сходится и имеется достаточно большое число приближений. Если удастся построить сравнительно много членов асимптотического разложения, то информации бывает достаточно для устранения особенностей исследуемой функции и получения улучшенных и равномерно пригодных решений.

К сожалению, получение высших приближений, особенно в нелинейных задачах, — весьма трудоемкий процесс.

Процедуру асимптотического разложения иногда удается формализовать при помощи ЭВМ. Однако точные формулы для построения асимптотических разложений до любого заданного порядка, являющиеся основой автоматического проведения вычислений на ЭВМ, приведены только для отдельных видов уравнений [47]. Поэтому для практически важных задач характерна возможность получения только начальных приближений. Указанное обстоятельство стимулирует поиск подходов, позволяющих извлечь максимум информации, содержащейся в малом отрезке асимптотического ряда [12, 15].

6.1. МЕТОД АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ (АП)

Современные методы приближения функций базируются, наряду с широким использованием полиномов и степенных рядов, на рациональных приближениях, являющихся отношением двух многочленов:

$$R_{k,l}(X) = \frac{\sum_{i=0}^k a_i X^i}{\sum_{i=0}^l b_i X^i} \quad (6.1.1)$$

Существуют различные виды рациональных приближений [21]. Одним из наиболее естественных подходов представляется метод преобразования рядов, получивший название метода аппроксимации Паде (АП). Способ преобразования Паде позволяет перейти от исходного степенного ряда к дробно-рациональной функции. Процедура перестройки связана с решением систем линейных алгебраических уравнений и состоит в следующем.

Пусть $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ — формальный степенной ряд, $F_{mn}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{km} X^k / \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn} X^k$ — бесконечный массив рациональных функций.

Если представление в виде степенного ряда для функции F_{mn} совпадает с таким представлением F (может быть, более высокой степени), то F_{mn} называется аппроксимантой Паде функции F . Коэффициенты a_{km} и b_{kn} находятся из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k - \frac{\sum_{k=0}^m a_{km} X^k}{\sum_{k=0}^n b_{kn} X^k} = O(X^{m \cdot n - 1}). \quad (6.1.2)$$

Очевидно, что F_{m0} — частичные суммы ряда $F(X)$, а F_{0n} — частичные суммы ряда $F^{-1}(X)$.

Обозначив через $[m/n]$ отношение полиномов соответствующих степеней, можно выписать так называемую таблицу Паде, содержащую все возможные аппроксиманты:

$$\begin{array}{cccc} [0/0] & [0/1] & \dots & [0/n] & : \\ & & & & \vdots \\ [1/0] & [1/1] & \dots & [1/n] & : \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ [n/0] & [n/1] & \dots & [n/n] & : \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Элементы таблицы вида $[k/k]$, $k = 0, 1, \dots$ называют диагональными аппроксимантами Паде.

Преобразование Паде позволяет осуществить мероморфное продолжение функции [21]. Важно, что процедура перестройки неизмеримо менее трудоемка, чем получение высших приближений.

Рассмотрим для примера уравнения движения пластины, учитывающие геометрическую нелинейность:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 W = L(W, \Phi) - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (6.1.3)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(W, W). \quad (6.1.4)$$

Здесь

$$L(W, \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Пусть граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{array}{l} \text{при } x = 0, \quad a \quad W = 0; \quad W_{xx} - \nu W_{yy} = 0; \\ \text{при } y = 0, \quad b \quad W = 0; \quad W_{yy} + \nu W_{xx} = 0; \end{array} \quad (6.1.5)$$

$$\text{при } x = 0, \quad a \quad y = 0, \quad b \quad U = V = 0,$$

где U, V – перемещения в направлении осей x, y соответственно.

Прогиб представим в виде, удовлетворяющем граничным условиям (6.1.5):

$$W = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (6.1.6)$$

Функцию Эри Φ определяем из уравнения (6.1.4) с учетом граничных условий (6.1.5). Имеем

$$\begin{aligned} \Phi = E \frac{f^2}{32} & \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + \frac{P_x y^2}{2} + \frac{P_y x^2}{2}, \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

где

$$P_y = \frac{1}{8} \frac{1 + \nu \lambda}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2 E f^2}{a^2};$$

$$P_x = \frac{1}{8} \frac{\lambda^2 + \nu}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2 E f^2}{a^2}; \quad \lambda = \frac{a}{b}.$$

Учитывая соотношение (6.1.7) и воспользовавшись методом Бубнова–Галеркина, можно перейти от частных производных (6.1.3) к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\bar{u}} + \omega_0^2 (1 + K \bar{u}^{-2}) \bar{u} = 0, \quad (6.1.8)$$

где

$$\begin{aligned} K = & \frac{1.5}{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2} \left\{ \left[\frac{\nu}{\lambda^2} + 1 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \nu \right) \frac{1}{\lambda^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{0.75(1 - \nu^2)}{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{\lambda^4} \right] \right\} \frac{h^2}{b^2}; \\ \bar{u} = & \frac{f}{h}; \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 E h^2 \rho}{12 b^4 (1 - \nu^2)} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Это уравнение называется уравнением Дюффинга. Его решение может быть получено несколькими способами, что позволяет сравнивать

эффективность различных методик. Применим к этой задаче метод возмущений в сочетании с методом АП.

Вернемся к уравнению (6.1.8) и сделаем замену переменных

$$\bar{u} = u/\sqrt{K}; \quad t = \tau/\omega_0.$$

Тогда получаем

$$\ddot{u} + u + u^3 = 0, \quad (6.1.9)$$

где

$$\ddot{u} \equiv u_{\tau\tau}.$$

Точное выражение для частоты колебаний ω таково [25]:

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + A^2}}{K(\theta)}, \quad (6.1.10)$$

где $\theta = \text{arctg} \sqrt{\frac{A^2}{(2 + A^2)}}$; $K(\theta)$ – эллиптический интеграл 1-го рода.

Разложение частоты ω по квадрату амплитуды A^2 имеет вид [47]

$$\omega = 1 + \frac{3}{8} A^2 - \frac{21}{256} A^4 + \frac{81}{2048} A^6 - \frac{6549}{262144} A^8 + \frac{37737}{2094152} A^{10} - \frac{9636183}{67108864} A^{12} + \dots \quad (6.1.11)$$

Ограничимся вначале первыми тремя членами ряда (6.1.11) и построим аппроксиманту Паде второго порядка

$$\omega_2 = \frac{32 + 19A^2 + \dots}{32 + 7A^2 + \dots}. \quad (6.1.12)$$

Учитывая в разложении частоты составляющие до порядка A^6 , будем иметь

$$\omega_4 = \frac{1 + 1.13A^2 + 0.261A^4 + \dots}{1 + 0.756A^2 + 0.0599A^4 + \dots}. \quad (6.1.13)$$

Продолжив этот процесс, получим последовательность диагональных аппроксимант Паде следующего вида:

$$\omega_{2n} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i A^{2i}}{\sum_{i=0}^{2n} \beta_i A^{2i}}, \quad (6.1.14)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Коэффициенты α_i, β_i определялись численно путем решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Результаты расчетов частоты по формулам (6.1.10)...(6.1.14) в графическом виде представлены на рис.6.1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют сумме первых трех, семи, одиннадцати членов ряда (6.1.11). Точное решение обозначено пунктирной линией, Паде-перестройки $[2/2]$, $[4/4]$ и $[6/6]$ – кривыми 4...6.

Нетрудно увидеть, что метод АП существенно расширяет область применимости приближенного решения. Наиболее эффективными при этом оказываются диагональные аппроксиманты. Как и следовало ожидать, с ростом порядка дроби Паде эффективность ее увеличивается.

Модель осциллятора Ван дер Поля часто применяется для изучения реакции при вихревом возбуждении колебаний. Уравнение, описывающее возникающие релаксационные режимы, имеет вид

$$\ddot{u} + \epsilon(1 - u^2)\dot{u} + u = 0. \quad (6.1.15)$$

Большой интерес представляет исследование амплитудно-частотных характеристик собственных колебаний осциллятора. Оказывается, что метод АП позволяет эффективно решать и эту задачу.

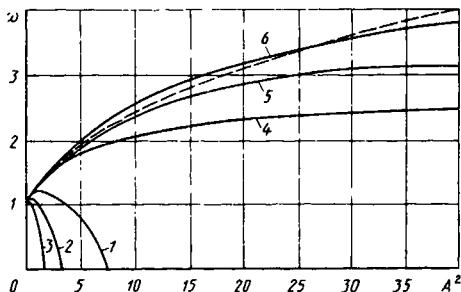


Рис. 6.1. Сравнение эффективности методов рядов и аппроксимант Паде на примере уравнения Дюффинга

Приближенное выражение для частоты колебаний ω можно получить по методу возмущений. Первые три члена разложения в ряд по ϵ таковы [46]:

$$\omega = 1 - \frac{1}{16} \epsilon^2 + \frac{51}{9216} \epsilon^4 + \dots \quad (6.1.16)$$

Перестройка Паде дает выражение

$$\omega = \frac{1 + 0,02604\epsilon^2 + \dots}{1 + 0,08854\epsilon^2 + \dots} \quad (6.1.17)$$

Сравнение результатов расчета по формулам (6.1.16) и (6.1.17) и численного решения [46] приведены ниже.

ϵ	0	1	2	3	4
Расчеты по формуле (6.1.16)	1,0	0,943	0,838	0,885	1,416
Расчеты по формуле (6.1.17)	1,0	0,942	0,815	0,687	0,586
Численное решение [46]	1,0	0,940	0,820	0,710	0,620

И в этом случае перестройка Паде существенно улучшает сходимость ряда теории возмущений.

Приведенные примеры позволяют сделать вывод о перспективности использования метода АП для оценки области применимости метода малого параметра. Пользуясь описанной методикой, можно избежать дополнительных исследований, связанных с получением явных оценок. Такие исследования, как правило, настолько трудоемки, что в реальных ситуациях опускаются, и "строгая доказанная сходимость ряда при достаточно малом значении параметра принимается как основание для использования этого ряда при конкретных конечных значениях параметра" [23]. Преобразование же исходного асимптотического разложения по методу АП не приводит к принципиальным трудностям и позволяет получать эмпирические оценки, вполне удовлетворительные для практических расчетов.

6.2. УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Эффективность применения метода АП в значительной мере зависит от наличия высших приближений асимптотического разложения. Эту принципиальную трудность иногда удается преодолеть при помощи ЭВМ

[47], однако в целом вопрос остается открытым. Существенно более простыми для реализации средствами современной вычислительной техники являются итерационные методы.

Пусть имеется итерационный процесс

$$T(u_0) = 0; \quad u_n = T(u_{n-1}); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Решение u представим в виде ряда по формальному параметру ϵ :

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)\epsilon + (u_2 - u_1)\epsilon^2 + \dots + (u_n - u_{n-1})\epsilon^n + \dots \quad (6.2.1)$$

При $\epsilon = 0$ имеем $u = u_0$, при $\epsilon = 1$ получаем $u = u_n$. Ряд (6.2.1) может быть перестроен в рациональную функцию по схеме Паде

$$\frac{u_0 + \sum_{i=1}^m a_i \epsilon^i}{1 + \sum_{j=1}^p \beta_j \epsilon^j} - [u_0 + (u_1 - u_0)\epsilon + \dots + (u_k - u_{k-1})\epsilon^k + \dots] = o(\epsilon^{k+1}). \quad (6.2.2)$$

Тогда при $\epsilon = 1$

$$u \approx \frac{u_0 + \sum_{i=1}^m a_i}{1 + \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

В качестве примера рассмотрим задачу о больших прогибах круглой изотропной пластинки радиуса R со свободным отверстием радиуса R_0 и внешним жестко защемленным контуром, на которую действует поверхностное давление постоянной интенсивности. Решение этой задачи найдено в работе [46] методом конечных центральных разностей для значений $E = 62,4 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,335$, $R_0/R = 0,1$.

При больших нагрузках q метод последовательных приближений ре-

шения системы нелинейных алгебраических уравнений сходится при числе итераций порядка 150...200, причем характер сходимости приближений к решению – осциллирующий.

Во второй таблице приведены результаты расчета безразмерного радиального усилия $T = N_f R^2 / D$ при $\rho = 1$, где $\rho = r/R$; r – полярная координата; $q^* = qR^4 / (2Dh) = 35$.

Номер приближения	1	2	3	4	5
T	2,6955	3,1917	3,0140	3,0941	3,0656
Номер приближения	6	7	8	9	10
T	3,0801	3,0760	3,0791	3,0789	3,0789

Применение метода обобщенного суммирования [46] позволяет исправить положение (первая таблица).

Номер приближения	0	1	2	3	4
T	5,27286	1,09640	4,81246	1,45039	4,55120
Номер приближения	5	6	7	8	9
T	1,67086	4,37191	1,82867	4,23735	1,94992
Номер приближения	10	145	146	147	148
T	4,13072	3,02320	3,11416	3,02603	3,11236
Номер приближения	149	150	151	152	
T	3,02680	3,11063	3,02849	3,10890	

Перейдем к предлагаемому методу. Ряд (6.2.1) для радиального усилия при учете четырех приближений имеет вид

$$T = 5,319 - 4,243\epsilon + 3,794\epsilon^2 - 3,451\epsilon^3 + \dots \quad (6.2.3)$$

Перестройка по схеме Паде дает

$$T = \frac{5,319 - 284,883\epsilon - 27,606\epsilon^2 + \dots}{1 - 52,762\epsilon - 47,992\epsilon^2 + \dots} \quad (6.2.4)$$

При $\epsilon = 1$ из выражения (6.2.4) имеем $T = 3,079$.

6.3. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА АП

При использовании методов возмущений для решения конкретных задач возникает принципиальный вопрос: как оценить величину параметра разложения, до которой его можно считать "малым"?

Формализовать процедуру получения оценки области применимости асимптотического параметра для ряда случаев можно при помощи метода АП. Практика его применения показывает, что область сходимости получаемой последовательности, как правило, не меньше, чем область сходимости ряда Тейлора [21].

Вернемся к уравнению Дюффинга (6.1.9). На рис.6.1 приведены в графической форме результаты расчета частоты собственных колебаний по точной формуле (6.1.10), приближенное решение (6.1.11) и на основе метода АП. Нетрудно видеть, что при помощи этого метода можно оценить область применимости малого параметра A^2 на прикладном уровне строгости. В той области, где перестроенное решение, например [6/6], дает удовлетворительное совпадение с разложением в ряд, оба эти решения близки к точному. Задавшись принятой при технических расчетах 5 %-ной точностью, получаем следующую оценку: $0 \leq A^2 \leq 1,51$.

Для уравнения Ван дер Поля (6.1.15) результаты вычислений по формулам (6.1.16), (6.1.17) и численное решение приведены на с. 202. И в этом случае метод АП позволяет получить оценку параметра разложения $0 \leq \epsilon \leq 3,45$.

Но как действовать в случае, если точное (или численное) решение задачи отсутствует? В подобной ситуации, характерной для практики, целесообразно получить приближенное решение двумя различными методами, а затем выделить область, где эти решения дают удовлетворительное совпадение. Например, возмущенное решение можно оценить, сделав аналитическое продолжение (или воспользовавшись другим методом расширения области применимости) и сравнивая его с выражением, полученным по методу АП.

Аппроксиманты Паде могут применяться и для построения решения при малых значениях ϵ , если при больших оно построено численно. Пусть решается задача с быстро осциллирующими коэффициентами [20]. При достаточно больших значениях ϵ (например 0,5 и т.д.) решение часто может быть найдено численно, в то время как для малых значе-

ний ϵ в силу быстрой осцилляции решений это затруднительно. В то же время мы знаем, что подобное решение может быть представлено в виде асимптотического разложения

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (6.3.1)$$

Если известно численное решение при $\epsilon = \alpha$, $\epsilon = \gamma$, $\epsilon = \beta$, то, ограничиваясь в каждой точке тремя членами разложения по ϵ (6.3.1), можно определить значения u_0 , u_1 , u_2 , затем, перестраивая это разложение по Паде, получить решение при любом значении ϵ .

6.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АП ДЛЯ СРАЩИВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В задачах механики асимптотические разложения часто получаются для различных предельных значений одного и того же параметра. Построение составных, пригодных во всей области изменения параметра решений – сложная задача. Для этой цели можно эффективно использовать рациональные приближения, в частности двухточечные АП. Например, для описанной выше расчетной модели осциллятора Ван дер Поля важно иметь формулу, позволяющую приближенно определить амплитудно-частотную характеристику при любой величине амплитуды.

В этой связи перспективно использование аппарата двухточечных АП как средства построения решений, пригодных для любых значений параметра, на основе двух или нескольких предельных асимптотических решений.

Дадим определение двухточечных АП [21].

Пусть

$$f_0(\epsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \epsilon^k \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0, \quad (6.4.1)$$

$$f_{\infty}(\epsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon^{-k} \quad \text{при } \epsilon \rightarrow \infty. \quad (6.4.2)$$

Тогда двухточечная АП имеет вид

$$f(\epsilon) \sim \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon^k}{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \epsilon^j}, \quad (6.4.3)$$

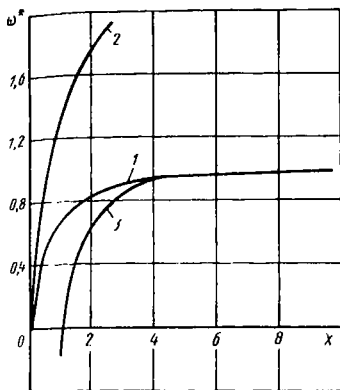


Рис. 6.2. Сращивание предельных решений при помощи двухточечных аппроксимант Паде

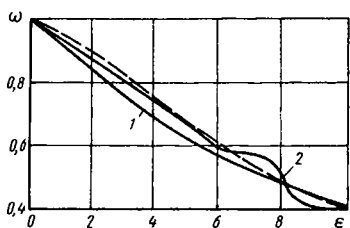


Рис. 6.3. Сращивание предельных разложений для уравнения Ван дер Поля

где постоянные α_k и β_j подбираются из условия: разложения выражения (6.4.3) при $\epsilon \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow \infty$ должны совпадать с рядами (6.4.1) и (6.4.2) соответственно.

Вернемся к уравнению (6.1.15). Разложение частоты колебаний ω для $\epsilon \gg 1$ можно записать так [46]:

$$\omega = [2\pi(1,614\epsilon + 7,014\epsilon^{-1/3} - 2,444\epsilon^{-1}\ln\epsilon + 0,0087\epsilon^{-1} + \dots)]^{-1} \quad (6.4.4)$$

Перестройка разложения (6.4.4) затрудняется тем, что в него входят логарифмы. Подобная ситуация типична для разложений при больших значениях параметра. Приблизительно можно перестроить ряд, работая с логарифмическими членами как с постоянными коэффициентами. Тогда после перестройки разложения (6.4.4) имеем

$$\omega = \frac{3,89}{\epsilon} \times \left[\frac{1 - (0,02 - 0,56\ln\epsilon)\epsilon^{-2/3} + (0,02 - 0,56\ln\epsilon)\epsilon^{-4/3} + \dots}{1 - (0,02 - 0,56\ln\epsilon)\epsilon^{-2/3} + (4,35 + (0,02 - 0,56\ln\epsilon)^2)\epsilon^{-4/3} + \dots} \right] \quad (6.4.5)$$

Решения (6.4.4), (6.4.5) приведены на рис.6.2 (кривые 2, 3; кривая 1 – численное решение). В практически важных задачах возможность построения высших приближений является скорее исключением, чем правилом. Более реальна ситуация, когда можно найти два-три члена разложения при малых и больших значениях параметра ϵ (разложения (6.1.15) и (6.4.4) в нашем случае) и затем попытаться построить составное разложение. Если известно численное решение в нескольких точках полуинтервала $0 < \epsilon < \infty$, то дробно-рациональное приближение можно искать в виде

$$\omega = \frac{1 + 0,026\epsilon^2 + 3,9a\epsilon^n + \dots}{1 + 0,089\epsilon^2 + a\epsilon^{n+1} + \dots} \quad (6.4.6)$$

Здесь параметры a и n подбираются таким образом, чтобы приближенное решение совпадало с численным для малых и больших значений ϵ .

На рис.6.3 в графическом виде приведено решение (6.4.5) при $a = 2 \cdot 10^{-13}$, $n = 12$ (кривая 2). Сравнение с численным решением (кривая 1) показывает, что описанный подход позволяет срастить разложение при предельных значениях параметра.

Применим далее аппарат двухточечных АП. Перестроив разложения (6.1.15) и (6.4.4) по формуле (6.4.7), имеем

$$\omega = \frac{1 + 0,257\epsilon + \dots}{1 + 0,257\epsilon + 0,063\epsilon^2 + \dots} \quad (6.4.7)$$

На рис.6.3 в виде пунктирной кривой изображены также результаты расчетов по формуле (6.4.3). Из сравнения видно, что метод АП может применяться для сращивания разложений при различных предельных значениях параметра.

6.5. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОМОЩИ ДВУХТОЧЕЧНЫХ АП

Преобразование Лапласа является эффективным средством решения вязкоупругих задач. Основная проблема при этом состоит в нахождении оригинала по известному изображению. В ряде работ предложено для обращения преобразования Лапласа использовать аппроксимации Паде. Тауберовы (абелевы) теоремы позволяют связать асимптотическое поведение функции на бесконечности (в окрестности нуля) с по-

ведением ее изображения по Лапласу в окрестности нуля (на бесконечности). Благодаря им удается исследовать поведение оригинала при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ по заданному изображению. Проблема заключается в описании оригинала при $0 < t < \infty$. Для этой цели предлагается метод асимптотических эквивалентных функций: в подынтегральном выражении интеграла Меллина оставляются лишь члены, дающие асимптотику при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$, а также основные особенности этого выражения. Если интеграл после этого удастся вычислить, то получается приближенное аналитическое решение. Несмотря на несомненную полезность метода асимптотически эквивалентных функций, вопрос в целом остается открытым.

Здесь для построения оригинала при $0 < t < \infty$ по известным асимптотическим значениям используется метод двухточечных АП. Следует отметить, что он применялся для обращения преобразования Лапласа, но лишь с целью расширения области применимости степенного разложения.

Один из способов применения этого метода для решения проблемы обращения — разложение изображения $F(p)$ в ряды Тейлора в окрестности точек $p = 0$ и $p \rightarrow \infty$ с последующей заменой $F(p)$ рациональной функцией при помощи АП. Далее переход к оригиналу осуществляется по известным правилам. Однако, на наш взгляд, быстрее ведет к цели применение двухточечных АП непосредственно к асимптотикам оригинала.

Проиллюстрируем эту возможность на следующих примерах.

Пусть изображение таково:

$$F(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} [H_0(p) - Y_0(p)],$$

где H_0 , Y_0 — функции Бесселя.

Асимптотика оригинала

$$f(t) \sim 1 - 0.5t^2 + \dots \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

$$f(t) \sim t^{-1} + \dots \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

позволяет построить при помощи двухточечных АП приближенное выражение для $f(t)$:

$$f(t) \approx \frac{1 + 0.5t}{1 + 0.5t + 0.5t^2} \quad (6.5.1)$$

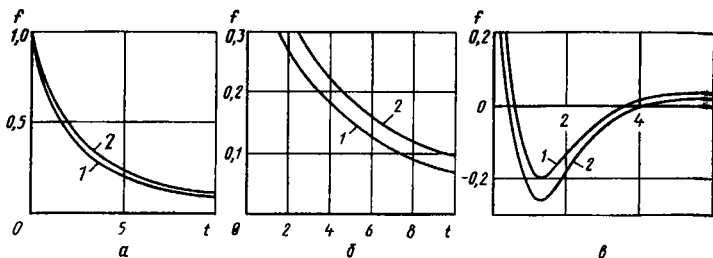


Рис. 6.4. К применению двухточечных аппроксимант Паде к асимптотикам оригинала

Точное значение оригинала

$$f(t) = (1 + t^2)^{-1/2}. \quad (6.5.2)$$

На рис.6.4, а приведены данные расчетов по формулам (6.5.1) (кривая 1) и (6.5.2) (кривая 2).

Рассмотрим еще один пример. Пусть

$$F(p) = K_0(p)e^{-p},$$

где K_0 — функция Макдональда.

Асимптотики оригинала

$$f(t) \sim \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{2}} - \frac{t^{1/2}}{\pi \sqrt{2}} \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (6.5.3)$$

$$f(t) \sim t^{-1} - t^{-2} \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (6.5.4)$$

Двухточечная АП, построенная по первым членам разложения (6.5.3), (6.5.4), приводит к виду

$$f(t) = 1/(t + 2\sqrt{t}). \quad (6.5.5)$$

Точное значение оригинала

$$f(t) = H(t) / \sqrt{t(t+2)}. \quad (6.5.6)$$

На рис.6.4, б приведены точное (формула (6.5.6), кривая 1) и приближенное (формула (6.5.5), кривая 2) значения.

Оба рассмотренных примера интересны тем, что и в первом и во

втором случаях асимптотики при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ степенные. Однако такая ситуация — скорее исключение, чем правило.

Перейдем к случаю, когда в оригинале есть экспоненты.

Пусть имеется изображение

$$F(p) = p^2 / (1 + p)^3.$$

Точное значение оригинала

$$f(t) = \left[\frac{1}{2} t^2 - 2t + 1 \right] e^{-t}. \quad (6.5.7)$$

Двухточечная АП в этом случае дает

$$f(t) = \frac{1 + 0.5t - 4.5t^2 + 1.25t^3}{1 + 2.5t} e^{-t}.$$

При построении выражения (6.5.8) принималась такая последовательность действий: в окрестности точки $t = 0$ строилось степенное разложение, при $t \rightarrow \infty$ учитывалась экспонента.

На рис. 6.4, в приведены точное (формула (6.5.7), кривая 1) и приближенное (формула (6.5.8), кривая 2) значения.

Преимуществом предлагаемого подхода являются возможность уточнения и регулярность процедуры. Возможно применение его к другим интегральным преобразованиям (Фурье, Бесселя, Меллина и т.д.).

ГЛАВА 7 МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ

Методу осреднения посвящена обширная литература [10, 20, 25, 42, 44, 58, 76, 85, 88]. Теория осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений берет свое начало с работ А. Пуанкаре и Б. Ван дер Поля, но наиболее последовательно ее идеи были сформулированы Н.М. Крыловым, Н.Н. Боголюбовым, Ю.А. Митропольским. Кратко можно сказать, что метод осреднения основан на разделении быстрых и медленных составляющих решения. Пусть, например, решение некоторой задачи имеет вид, изображенный на рис. 7.1. Можно выделить некоторую медленную составляющую решения (эволюцию) $x_0(t)$ и накладывающиеся на нее быстрые вибрации. При нахождении каждой из этих составляющих применяются свои упрощения.

Принцип осреднения является одним из глобальных философских принципов, на котором зиждется наше знание. В то же время метод

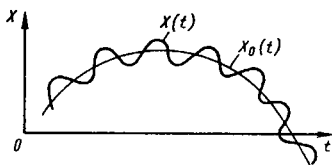


Рис. 7.1. Разложение исходного решения на сумму медленной (осредненной) и быстроизменяющихся частей

осреднения является и мощным аналитическим аппаратом решения разнообразных задач нелинейной механики, задач механики сплошных сред, описываемых уравнениями с быстропеременными коэффициентами, и т.д. [9, 74].

7.1. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

Конкретная реализация метода осреднения может быть различной, и в различных задачах выгодно применять разные подходы.

В последнее время широкое распространение получила процедура метода двух масштабов. Мы также будем использовать эту процедуру, так как она является общей в приложении к целому кругу задач осреднения, в том числе и для уравнений с быстропеременными коэффициентами. Начнем с уравнения Дюффинга с малой нелинейностью

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \epsilon x^3 = 0, \quad (7.1.1)$$

где $\omega^2 \equiv \text{const}$; $\omega^2 \sim 1$; $\epsilon \ll 1$.

Линейное уравнение ($\epsilon = 0$) имеет такое общее решение:

$$x_0 = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (7.1.2)$$

где $A, B = \text{const}$.

Естественно предположить, что при значениях $0 < \epsilon \ll 1$ решение исходного уравнения (7.1.1) можно записать приближенно в виде (7.1.2), где A и B будут функциями от t , медленно меняющимися.

В соответствии с методом двух масштабов введем "медленное время" $\tau = \epsilon t$, сохранив для "быстрого времени" обозначение t . Тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon.$$

Представляя искомое решение x в виде

$$x = x_0(t, \tau) + \epsilon x_1(t, \tau) + \dots,$$

получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \epsilon \left[\frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] + \dots;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + \epsilon \left[2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \right] + \dots$$

После расщепления по ϵ приходим к следующей рекуррентной последовательности:

$$\text{для } \epsilon^0 \quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + \omega^2 x_0 = 0; \quad (7.1.3)$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_1 = 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \tau} - x_0^3; \quad (7.1.4)$$

Решение уравнения (7.1.3) можно записать так:

$$x_0 = A(\tau) \cos \omega t + B(\tau) \sin \omega t.$$

Уравнение (7.1.4) тогда примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_1 = P(t, \tau) = 2 \frac{dA}{d\tau} \omega \sin \omega t - \\ - 2 \frac{dB}{d\tau} \omega \cos \omega t - (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^3. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Регулярность решения (7.1.5) обеспечена, если

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t, \tau) \cos \omega t dt = 0; \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t, \tau) \sin \omega t dt = 0. \quad (7.1.6)$$

Условия (7.1.6) образуют систему дифференциальных уравнений относительно функций $A(\tau)$, $B(\tau)$:

$$- \frac{dA}{d\tau} = \frac{3}{8} (A^2 + B^2) \frac{B}{\omega} \epsilon;$$

$$\frac{dB}{d\tau} = - \frac{3}{8} (A^2 + B^2) \frac{A}{\omega} \epsilon.$$

Аналогично можно выписать систему усредненных уравнений, если решение порождающего уравнения (7.1.1) записать в виде

$$x = A(t)\cos(\omega t + \theta(t)) \quad (7.1.7)$$

при условии

$$\frac{dx}{dt} = -A(t)\omega\sin(\omega t + \theta(t)).$$

Функции $A(t)$ и $\theta(t)$ имеют смысл амплитуды и фазы колебаний. Дифференцирование выражения (7.1.7) по t дает

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\omega\sin(\omega t + \theta) + \frac{dA}{dt}\cos(\omega t + \theta) - \\ &- \frac{d\theta}{dt}A\sin(\omega t + \theta). \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Подставив это соотношение в (7.1.1) и используя (7.1.8), получим

$$\begin{aligned} \omega \frac{dA}{dt} \sin(\omega t + \theta) + A\omega \frac{d\theta}{dt} \cos(\omega t + \theta) &= \\ = \epsilon A^3 \cos^3(\omega t + \theta). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Разрешая (7.1.8) и (7.1.9) относительно dA/dt и $d\theta/dt$, будем иметь

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon A^3}{\omega} \cos^3(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta); \quad (7.1.10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon A^2}{\omega} \cos^4(\omega t + \theta). \quad (7.1.11)$$

Так как A и θ — слабо меняющиеся функции времени (поскольку значение ϵ мало), то их изменение за время $T = 2\pi/\omega$, равное периоду правых частей, очень мало. Осредняя (7.1.10) и (7.1.11) по интервалу $[t, t + T]$, в течение которого величины A и θ в правых частях этих уравнений могут считаться постоянными, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^3(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta) dt &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \theta) \cos^3(\omega t + \theta) d(\omega t + \theta) &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4(\omega t + \theta) d(\omega t + \theta) = \frac{3}{8}.$$

Следовательно,

$$dA/dt = 0; \quad (7.1.12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{8} \frac{\epsilon A^2}{\omega}. \quad (7.1.13)$$

Тогда из выражения (7.1.12) следует, что A – постоянная, а из соотношения (7.1.13) – что $\theta = \frac{3}{8} \epsilon \frac{A_0^2}{\omega} t + \theta_0$. Поэтому в первом приближении имеем

$$u = A_0 \cos \omega \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon \frac{A_0^2}{\omega^2} \right] t + o(\epsilon).$$

Поправка к частоте колебаний совпадает с полученными ранее другими методами (например, методом Пуанкаре–Линдстедта [61]). Один из возможных путей применения метода осреднения к динамическим нелинейным задачам теории пластин и оболочек заключается в предварительном точном или приближенном (например, при помощи метода Бубнова–Галеркина) разделении переменных. Далее для системы дифференциальных уравнений по времени применяется метод осреднения. Большое число решенных задач приведено в книге [58].

7.2. ВЯЗКОУПРУГИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОД ЗАМОРАЖИВАНИЯ

При расчете вязкоупругих пластин и оболочек приходится иметь дело с интегродифференциальными уравнениями. Так, для описания колебаний вязкоупругой прямоугольной пластинки при учете геометрической нелинейности можно использовать уравнение [3]

$$\Gamma \nabla^4 \omega - 12\Gamma h^{-2} \bar{J}_1 \nabla^2 \omega + \rho h D^{-1} \omega_{tt} = 0,$$

где

$$\Gamma\varphi = \varphi + \int_0^t R(t-t_1)\varphi(t_1)dt_1$$

(здесь R – ядро релаксации);

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{2ab} \int_0^a \int_0^b (\omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy.$$

Если пластина шарнирно оперта, то можно разделить переменные

$$\omega(x, y, t) = A(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

и получить для определения амплитуды $A(t)$ нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$D\pi^4 \left[\left[\frac{m}{a} \right]^2 + \left[\frac{n}{b} \right]^2 \right]^2 \Gamma(A + 3h^{-2}A^3) + \rho h A_{tt} = 0. \quad (7.2.1)$$

Точное решение уравнения (7.2.1) весьма затруднительно. Однако можно существенно упростить его, если рассматривать низкочастотные колебания.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t A(t_1)R(t-t_1)dt_1. \quad (7.2.2)$$

Если переменная $A(t_1)$ меняется медленно по сравнению с изменением ядра релаксации $A(t-t_1)$, то можно "заморозить" ее при $t_1 = t$. Тогда вместо (7.2.2) имеем

$$I_1 = A(t) \int_0^t R(t-t_1)dt_1.$$

Такой прием называется методом замораживания [79]. Применяя его к уравнению (7.2.1), имеем

$$D\pi^4 \left[\left[\frac{m}{a} \right]^2 + \left[\frac{n}{b} \right]^2 \right]^2 I_1 (A + 3h^{-2}A^3) + \rho h A_{tt} = 0. \quad (7.2.3)$$

Уравнение (7.2.3) – уже обыкновенное дифференциальное уравнение. Для его решения, в свою очередь, может быть применен метод осреднения.

Возможен и другой прием, когда осреднение выполняется сразу в выражении для I_1 . После перехода от I к I_1 к интегралу в (7.2.2) применяется оператор осреднения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (\dots) dt.$$

Тогда вместо I_1 имеем

$$I_2 = A(t) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left[\int_0^T R(t - t_1) dt_1 \right] dt. \quad (7.2.4)$$

Уравнение (7.2.1) теперь становится обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$D\pi^4 \left[\left[\frac{m}{a} \right]^2 + \left[\frac{n}{b} \right]^2 \right]^2 I_2 (A + 3ht^{-2}A^3) + \rho h \omega_{tt} = 0.$$

Это – известное уравнение Дюффинга, о точных и приближенных решениях которого нами уже говорилось неоднократно.

7.3. ОСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРОПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Продемонстрируем метод на простой одномерной задаче, следуя работе [8]:

$$\frac{d}{dx} \left[a \left[\frac{x}{\epsilon} \right] \frac{du}{dx} \right] = q(x); \quad (7.3.1)$$

$$u = 0 \text{ при } x = 0, l. \quad (7.3.2)$$

Здесь $a(x/\epsilon)$ – периодическая по x с периодом ϵ функция.

Сформулированная задача описывает, например, продольную деформацию стержня быстропеременной толщины. Изменяемость правой части уравнения (7.3.1) (внешней нагрузки) мала, изменяемость коэффициента $a(x/\epsilon)$ – велика. Поэтому можно ввести вместо одной исходной

переменной x две: "быструю" $\eta = x/\epsilon$ и "медленную" $y = x$. Тогда производную можно переписать так:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7.3.3)$$

и вместо исходного обыкновенного дифференциального уравнения получаем уравнение в частных производных. Его решение будем искать в виде асимптотического разложения

$$u = u_0(\eta, y) + \epsilon u_1(\eta, y) + \dots \quad (7.3.4)$$

где u_0, u_1 — периодические по η функции с периодом единица.

Подставляя выражения (7.3.3), (7.3.4) в исходное уравнение (7.3.1) и крайевые условия (7.3.2) и приравнявая члены при одинаковых степенях ϵ , приходим к следующей рекуррентной системе:

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^{-2} \quad & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right] = 0; \\ \text{для } \epsilon^{-1} \quad & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] + a(\eta) \frac{\partial u_0^2}{\partial y \partial \eta} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] + a(\eta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + a(\eta) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \eta} = q(y); \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

$$u_0 = 0 \text{ при } y = 0, l; \quad \eta = 0, l/\epsilon;$$

Из первого уравнения в силу периодичности функции u_0 по η имеем $u_0 = u_0(y)$, т.е. u_0 представляет собой некоторую среднюю, не зависящую от быстрой переменной, часть функции u . В ряде физических задач существование средней части ясно из их постановки, тогда в разложении (7.3.4) сразу можно считать первый член не зависящим

от быстрой переменной. Второе уравнение рекуррентной системы (7.3.5) можно теперь записать так:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial u_0}{\partial y}. \quad (7.3.6)$$

Это уравнение рассматривается на периоде ($0 \leq \eta \leq 1$), поэтому его называют "задачей на ячейке" или "локальной задачей". Решение такой задачи, хотя оно и существенно проще, чем решение исходного уравнения, представляет основную трудность при построении осредненных соотношений. На практике его часто приходится находить численно. В данном случае, учитывая, что переменная y входит в уравнение (7.3.6) как параметр, можно сразу найти

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = - \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{C(y)}{a}. \quad (7.3.7)$$

Постоянная $C(y)$ определяется из условия периодичности функции u_1 ($u_1|_0^1 = 0$):

$$C = \hat{a} \frac{du_0}{dy}; \quad \hat{a} = \left[\int_0^1 a^{-1} d\eta \right]^{-1}.$$

Исключая функцию $\partial u_1 / \partial \eta$ из третьего уравнения системы (7.3.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} = q(y). \quad (7.3.8)$$

Теперь для выделения из уравнения (7.3.8) медленных составляющих естественно применить процедуру осреднения, подействовав на

каждый член уравнения оператором $\int_0^1 (\dots) d\eta$. Первые два слагаемые

тогда обращаются в нуль в силу периодичности функций $(\partial^2 u_2 / \partial \eta^2)$, $(\partial / \partial \eta)(a \partial u_1 / \partial y)$, и окончательно имеем

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} = q(y). \quad (7.3.9)$$

Для уравнения (7.3.9) должно быть поставлено граничное условие $u_0 = 0$ при $y = 0, l$. (7.3.10)

Определим теперь функцию u_1 из соотношения (7.3.7):

$$u_1 = \frac{du_0}{dy} \left[a \int_0^\eta a^{-1} d\eta - \eta \right], \quad 0 < \eta < 1.$$

Далее функция u_1 периодически продолжается по координате η с периодом единица.

Найденное значение u_1 не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям (7.3.2), при этом соответствующие невязки имеют порядок ϵ . Для их компенсации приходим к задаче, которая в исходных переменных имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] = 0;$$

$$u|_{x=0} = A = u|_{y=\eta=0}; \quad u|_{x=l} = B = u_1|_{y=l, \eta=l/\epsilon}.$$

Снова применяя к этой задаче метод осреднения, получим в первом приближении

$$a \frac{d^2 u_{10}(y)}{dy^2} = 0; \quad u_{10}|_{y=0} = A; \quad u_{10}|_{y=l} = B.$$

Это естественно приводит к мысли искать в дальнейшем решение задач рассматриваемого типа в виде разложения

$$u = u_0(y) + [\epsilon u_{10}(y) + \dots] + \epsilon [u_1(\eta, y) + \dots]. \quad (7.3.11)$$

Рассмотрим еще один модельный пример, относящийся уже к нелинейному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] + b \left(\frac{x}{\epsilon} \right) u^3 = q; \quad (7.3.12)$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l. \quad (7.3.13)$$

Вводя, как и ранее, быструю и медленную переменные η и y представляя функцию u в виде (7.3.4), получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\text{для } \epsilon^{-1} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] + \frac{da}{d\eta} \frac{du_0}{dy} = 0; \quad (7.3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^0 \quad & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + \\ & + a(\eta) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \eta} + a(\eta) \frac{d^2 u_0}{dy^2} + b(\eta) u_0^3 = q(y); \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, l; \quad (7.3.16)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, l; \quad \eta = 0, l/\epsilon;$$

Уравнение (7.3.14) совпадает с соответствующим уравнением системы (7.3.5) — "локальная задача" не меняется при добавлении в уравнении новых членов без изменения старших производных. Используя решение (7.3.7), находим осредненное уравнение

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \hat{b} u_0^3 = q(y), \quad \hat{b} = \int_0^1 b(\eta) dy. \quad (7.3.17)$$

Граничные условия для уравнения (7.3.17) имеют вид (7.3.16). Обратим внимание на важный факт:

$$u = u_0 + o(\epsilon), \quad \text{но} \quad \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dy} + \frac{du_1}{d\eta} + o(\epsilon).$$

Иными словами, хотя решение осредненного уравнения u_0 и аппроксимирует функцию u с точностью до членов порядка ϵ , в выражении для производной нужно удерживать члены с u_1 , так как последние сильно возрастают при дифференцировании. Именно их наличие и осложняет процесс непосредственного численного решения.

Перейдем к физической трактовке коэффициентов осредненного уравнения (7.3.17). Видно, что осредняется жесткость b и податливость $1/a$. Это соответствует принятому в физике правилу, в соответствии с которым осреднению подлежат аддитивные (линейные) функции.

Полезно провести еще одну аналогию. Электрическое сопротивление системы n параллельно соединенных проводников вычисляется по правилу $R^{-1} = \sum_{i=1}^n R_i^{-1}$, а последовательно соединенных — $R = \sum_{i=1}^n R_i$. Поэтому

"впрямую" осредняются "последовательно", а через обратные величины — "параллельно" соединенные элементы.

Осреднение "впрямую" называется осреднением по Фойгту, осреднение с использованием обратных величин — осреднением по Рейссу. Для широкого класса задач известно, что истинные значения коэффициентов осредненных уравнений (7.3.17) находятся между значениями коэффициентов, осредненных по Фойгту (\bar{a}_{ij}) и Рейссу (\hat{a}_{ij}):

$$\hat{a}_{ij} < \bar{a}_{ij} < \bar{a}_{ij}. \quad (7.3.18)$$

Оценка (7.3.18) называется "вилкой Хилла". К сожалению, ширина ее часто слишком велика, чтобы ее можно было использовать на практике.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] + \lambda u = 0; \\ u = 0 \text{ при } x = 0, l. \quad (7.3.19)$$

Искомую собственную форму представим в виде (7.3.11), а собственное число λ таким образом:

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots \quad (7.3.20)$$

После подстановки разложений (7.3.11), (7.3.20) в исходное уравнение и граничные условия (7.3.2) и учета выражения для производной (7.3.3) получаем следующую рекуррентную систему:

$$\text{для } \epsilon^{-1} \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_0}{dy} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = 0; \quad (7.3.21)$$

$$\text{для } \epsilon^0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] + a \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_{10}}{dy} + a \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \lambda_0 u_0 = 0; \quad (7.3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^1 \quad & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_{20}}{dy} + a \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta \partial y} + a \frac{d^2 u_{10}}{dy^2} + \\ & + a \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \lambda_1 u_0 + \lambda_0 (u_{10} + u_1) = 0; \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

$$u_0 = 0 \text{ при } y = 0, l; \quad (7.3.24)$$

$$u_1 + u_{10} = 0 \text{ при } \eta = 0, l/\epsilon; \quad (7.3.25)$$

Определяя из уравнения (7.3.21) значение u_1 , подставляя его в (7.3.22), (7.3.24) и производя осреднение, приходим к краевой задаче для u_0, λ_0 :

$$a \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \lambda_0 u_0 = 0; \quad u_0 = 0 \text{ при } y = 0, l.$$

Теперь из уравнения (7.3.22) находим $\partial u_2 / \partial \eta$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} = - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{du_{10}}{dy} + C_1(y).$$

Из условия периодичности функций u_2 по переменной η определяем

$$C_1 = \hat{a} \frac{du_{10}}{du} + \hat{\hat{a}} u_1; \quad \hat{u}_1(y) = \int_0^1 u_1 d\eta.$$

Подставляя найденные значения u_1 , u_2 в уравнение (7.3.23) и производя осреднение, имеем

$$a \frac{d^2 u_{10}}{dy^2} + \lambda_0 u_{10} + \left[a \frac{d^2}{dy^2} + \lambda_0 \right] \hat{u}_1 + \lambda_1 u_0 = 0. \quad (7.3.26)$$

Отсюда, как обычно в методе возмущений (гл. 1), находим поправку к собственному значению.

Граничные условия для уравнения (7.3.26) запишем в виде (7.3.24). Медленная поправка к осредненному решению u_{10} может быть определена из решения краевой задачи (7.3.26), (7.3.25). Изложенный выше подход позволяет определить решение в любом приближении по ϵ . Еще одна его привлекательная черта — общность. Действительно, если найдено решение локальной задачи, то без труда определяется решение как исходной задачи, так и задачи на собственные значения. Если добавить в уравнения нелинейные члены (так, чтобы высшие производные не изменялись), то построение осредненных соотношений снова не усложняется. Локальная задача остается точно такой же, как и в линейном случае, линейными будут и высшие приближения. Вся нелинейность содержится в осредненных краевых задачах с гладкими коэффициентами, которые удобно решать численно или вариационными методами. Для теории оболочек это означает, что, решив одну локальную задачу, мы тем самым решаем целый класс задач — линейных и нелинейных, статических и динамических. При этом локальные задачи можно, как правило, рассматривать в рамках теории пластин.

Отметим, что, к сожалению, для собственных значений известно лишь, что осреднение коэффициентов уравнения по Фойгту (впрямую) приводит к их увеличению [8].

Изложенный метод может применяться для осреднения не только систем с непрерывно меняющимися параметрами, но и дискретных структур. В этом случае исходную дискретную среду можно заменить непрерывной, введя так называемый квазиконтинуум [22]. Основная идея здесь состоит в установлении взаимно однозначного соответствия между функциями дискретного аргумента и некоторыми аналитическими функциями.

Пусть $u(n)$ — значения дискретной функции, $n = 1, 2, \dots, k$.

Тогда искомая интерполирующая функция $u(x)$, принимающая в узлах значение $x = na$ (a — расстояние между узлами), имеет вид

$$u(x) = \sum_{n=1}^k u(n) \frac{\sin \pi x/a}{\pi x/a}.$$

После перехода к квазиконтинууму можно применять метод осреднения дифференциальных уравнений с быстропеременными коэффициентами. Отметим также метод осреднения слоистых структур, основанный на использовании матриц [59].

7.4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ГОФРИРОВАННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Типичными представителями конструкций со сложной периодически повторяющейся геометрией являются гофрированные пластины и оболочки. Для иллюстрации остановимся на относительно простой и хорошо изученной задаче об осесимметричной деформации под действием нормальной нагрузки q круглой гофрированной в радиальном направлении пластины. Одной из особенностей применения методов осреднения к гофрированным и складчатым оболочкам является необходимость предварительно перепроектировать все соотношения, принимая в качестве основной не срединную, а среднюю (равноотстоящую от вершин гофра) поверхность. В данном случае уравнения равновесия в проекциях на оси координат средней плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (rN_1) - N_2 &= rq_1; \\ \frac{d}{dr} (rQ_1) &= rq_2; \\ \frac{d}{dr} (rM_1) - M_2 - rQ_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Здесь r — полярная координата; M_i — изгибающие моменты; N_i , Q_i , q_i — проекции мембранных усилий, перерезывающей силы и нормальной нагрузки на оси координат "средней" поверхности.

Перепроектированные физические и геометрические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{N_1 + \beta Q_1}{A} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2); \\ N_2 &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} A(\epsilon_2 + \nu \epsilon_1); \end{aligned}$$

$$M_1 - zN_1 = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2); \quad M_2 - zN_2 = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1);$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A^2} \left[\frac{du}{dr} + \beta \frac{d\omega}{dr} \right]; \quad \epsilon_1 = \frac{u}{r}; \quad (7.4.2)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{A^2} \left[\frac{d\omega}{dr} - \beta \frac{du}{dr} \right] \right];$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{rA^2} \left[\frac{d\omega}{dr} - \beta \frac{du}{dr} \right]; \quad \beta = \frac{dz}{dr}; \quad A = (1 + \beta^2)^{1/2},$$

где $z(r)$ характеризует геометрию гофра; u , ω – радиальное и нормальное относительно средней поверхности перемещения; ϵ_1 , ϵ_2 , κ_1 , κ_2 – соответствующие деформации и изменения кривизн срединной поверхности.

Если пластина жестко закреплена по контуру, то

$$u = \omega = d\omega/dr = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (7.4.3)$$

Пусть n – число волн гофра – достаточно велико. Тогда применима процедура осреднения, причем в качестве малого параметра выступает величина $\epsilon = n^{-1}$. Вводим быструю переменную $\xi = \epsilon^{-1}r$, а для медленной оставим обозначение r . Тогда

$$\frac{d}{dr} = \frac{\partial}{\partial r} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (7.4.4)$$

Решение краевой задачи (7.4.1)...(7.4.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} N_i &= N_i^{(0)}(r, \xi) + \epsilon N_i^{(1)}(r, \xi) + \dots; \\ M_i &= M_i^{(0)}(r, \xi) + \epsilon M_i^{(1)}(r, \xi) + \dots; \\ Q_1 &= Q_1^{(0)}(r, \xi) + \epsilon Q_1^{(1)}(r, \xi) + \dots; \\ u &= u^{(0)}(r, \xi) + \epsilon u^{(1)}(r, \xi) + \dots; \\ \omega &= \omega^{(0)}(r, \xi) + \epsilon \omega^{(1)}(r, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Все члены разложений – периодические по ξ функции с периодом $l = r_0$. После подстановки выражений (7.4.4) и (7.4.5) в исходные

уравнения и краевые условия (7.4.1)...(7.4.3) приходим к следующим рекуррентным системам (при выводе их величины $\nu^2/(k_1 A) \ll 1$, $\nu^2/(k_2 A) \ll 1$ отбрасывались по сравнению с единицей):

$$\frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial Q_1^{(0)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial \xi} = 0; \quad (7.4.6)$$

$$\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = 0;$$

$$r \frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial r} (r N_1^{(0)}) - N_2^{(0)} = r q_1; \quad (7.4.7)$$

$$r \frac{\partial Q_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial r} (r Q_1^{(0)}) = r q_2;$$

$$r \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial r} (r M_1^{(0)}) - M_2^{(0)} - Q_1^{(0)} = 0;$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} = k_1(\xi) \frac{N_1^{(0)}}{Eh}; \quad k_1(\xi) = A^{-1} + \frac{12z^2}{h^2}; \quad (7.4.8)$$

$$\frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial r^2} = A(\xi) \frac{M_1^{(0)}}{D_1}; \quad D_1 = \frac{Eh^3}{12};$$

$$N_2^{(0)} = Eh \frac{A(\xi)}{r} u^{(0)}; \quad M_2^{(0)} = D_1 k_1(\xi) \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial r}; \quad (7.4.9)$$

$$N_2^{(1)} = Eh \frac{A}{r} u^{(1)}; \quad M_2^{(1)} = D_1 k_1 \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \xi};$$

$$u^{(0)} = \omega^{(0)} = \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = r_0; \quad (7.4.10)$$

$$u^{(1)} = \omega^{(1)} = \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \epsilon^{-1} r_0; \quad (7.4.11)$$

Из соотношений (7.4.6) следует, что

$$N_1^{(0)} \equiv N_1^{(0)}(r); \quad Q_1^{(0)} \equiv Q_1^{(0)}(r); \quad M_1^{(0)} \equiv M_1^{(0)}(r); \quad (7.4.12)$$

$$u^{(0)} \equiv u^{(0)}(r); \quad \varpi^{(0)} \equiv \varpi^{(0)}(r).$$

Условия разрешимости уравнений (7.4.7)...(7.4.8) относительно периодических неизвестных $N_1^{(1)}, Q_1^{(1)}, M_1^{(1)}, u^{(1)}, \varpi^{(1)}$ дают с учетом (7.4.9) осредненную систему уравнений

$$\frac{d}{dr} (rN_1^{(0)}) - m(N_2^{(0)}) = rm(q_1); \quad \frac{d}{dr} (rQ_1^{(0)}) = rm(q_2);$$

$$\frac{d}{dr} (rM_1^{(0)}) - m(M_2^{(0)}) - Q_1^{(0)} = 0; \quad N_1^{(0)} = \frac{Eh}{m(k_1)} \frac{du^{(0)}}{dr};$$

$$M_1^{(0)} = \frac{D_1}{m(A)} \frac{d^2 \varpi^{(0)}}{dr^2}; \quad N_2^{(0)} = Eh \frac{m(A)}{r} u^{(0)}; \quad (7.4.13)$$

$$M_2^{(0)} = D_1 m(k_1) \frac{d\varpi^{(0)}}{dr};$$

$$u^{(0)} = \varpi^{(0)} = \frac{d\varpi^{(0)}}{dr} \text{ при } r = r_0, \text{ где } m(\dots) = \frac{1}{l} \int_0^l (\dots) d\xi.$$

Эти уравнения совпадают с известными уравнениями, полученными ранее на основе физических соображений. В то же время уравнения (7.4.7)...(7.4.9) позволяют определить и быстроосциллирующие поправки. Из соотношений (7.4.7), (7.4.8) с учетом (7.4.9) получаем

$$r \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial \xi} = r[q_1 - m(q_1)] + N_2^{(0)} - m[N_2^{(0)}];$$

$$\frac{\partial Q_1^{(1)}}{\partial \xi} = q_2 - m(q_2); \quad \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{1}{r} [M_2^{(0)} - m[M_2^{(0)}]]; \quad \dots$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = [k_1 - m(k_1)] \frac{N_1^{(0)}}{Eh}; \quad \frac{\partial^2 \varpi^{(1)}}{\partial \xi^2} = [A - m(A)] \frac{M_1^{(0)}}{D}$$

$$N_2^{(1)} = EhA \frac{u}{r}; \quad M_2^{(1)} = D_1 [k_1 - m(k_1)] \frac{\partial \varpi^{(1)}}{\partial \xi} \quad \dots \quad (7.4.14)$$

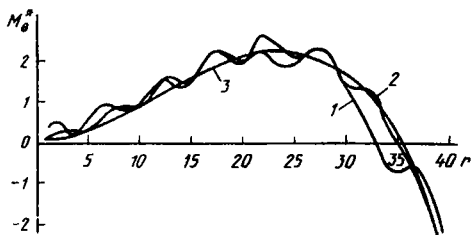


Рис. 7.2. Изгибающий момент в круглой гофрированной пластине

Найденные из уравнений (7.4.14) быстропеременные поправки не удовлетворяют, вообще говоря, краевым условиям (7.4.3). Полученные малые (порядка ϵ) невязки компенсируются решением осредненных уравнений вида (7.4.13), в результате чего получаются медленные малые добавки к осредненному решению.

После того как проекции найдены, перемещения u_r , w_n , усилия N_r , N_θ и моменты M_r , M_θ в исходной гофрированной пластине можно определить по формулам

$$u_r = \frac{u + \beta w}{A} ; \quad w_n = \frac{w - \beta u}{A} ; \quad N_r = \frac{N_1 + \beta Q_1}{A} ;$$

$$N_\theta = \frac{N_2}{A} ; \quad M_r = M_1 - z N_1 ; \quad M_\theta = M_2 - z N_2.$$

Достоверно описать полное напряженное состояние на основе только осредненных соотношений нельзя, так как быстроосциллирующие поправки вносят решающий вклад при расчете окружных тангенциальных и изгибных напряжений. В то же время учет быстроосциллирующих поправок позволяет определять напряженно-деформированное состояние пластины с высокой точностью даже при малых n . Так, на рис.7.2 приведено сравнение результатов расчета изгибающих моментов по различным методикам при $n = 4$. Рассматривалась круглая защемленная по внешнему контуру гофрированная ($z = H \sin[n(r - r_{00})]$) пластинка с жесткой шайбой радиуса r_{00} в центре. Принимались следующие значения параметров: $r_0 = 28,3$ мм, $r_{00} = 1,9$ мм, $h = 0,22$ мм, $H = 0,75$ мм, $E = 10^5$ Н/мм², $q = 0,01$ Н/мм², $\nu = 0,33$. Кривой 1 соответствует решение, полученное численным методом В.Л. Бидерманом,

кривой 2 – решение на основе осредненных (конструктивно-ортотропных) соотношений, кривой 3 – решение с учетом первых быстросциллирующих поправок, которое уже в первом приближении хорошо совпадает с численным.

7.5. ДЕФОРМАЦИЯ МЕМБРАНЫ, АРМИРОВАННОЙ ВОЛОКНАМИ

Рассмотрим применение метода осреднения для построения решения дифференциальных уравнений с периодически разрывными коэффициентами. В качестве модельного примера изучим деформацию мембраны, армированной нитями.

Уравнения равновесия в промежутках $kl < y < (k + 1)l$ можно записать так:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} = q(x, y). \quad (7.5.1)$$

Условия стыковки соседних участков:

$$\lim_{y_1 \rightarrow kl-0} u \equiv u^+ \equiv \lim_{y_1 \rightarrow kl+0} u \equiv u^-; \quad (7.5.2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y_1} \right]^+ - \left[\frac{\partial u}{\partial y_1} \right]^- = g_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},$$

где g_1 – параметр, характеризующий относительную жесткость нити.

Граничные условия при $x = 0, l$

$$u = 0 \quad (x = 0); \quad u = 0 \quad (x = l). \quad (7.5.3)$$

Пусть внешняя нагрузка периодична по y_1 , причем ее период L существенно больше расстояния между нитями. Тогда естественно использовать осредненное описание, принимая в качестве малого параметра величину $\epsilon = l/L$. Вместо переменной y введем "быструю" ($\eta = y_1/l$) и "медленную" ($y = y_1/L$) переменные, тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{L} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right].$$

Функцию u представим разложением:

$$u = u_0(x, y) + \epsilon^{a_1} [u_{10}(x, y) + u_1(x, y, \eta)] + \epsilon^{a_2} [u_{20}(x, y) + u_2(x, y, \eta)] + \dots; \quad (7.5.4)$$

$$0 < a_1 < a_2 < \dots, \quad x = x_1/L.$$

Подставляя (7.5.4) в уравнение (7.5.1), в условия стыковки (7.5.2) и в граничные условия (7.5.3) и учитывая новое выражение для производной, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \epsilon^{a_1-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + 2\epsilon^{a_1-1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \eta} + \\ + \epsilon^{a_2-2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + 2\epsilon^{a_2-1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial \eta} + o(\epsilon^{a_1}) = q(x, y); \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

$$[u_0 + \epsilon^{a_1}(u_{10} + u_1) + \dots]^+ = [u_0 + \epsilon^{a_1}(u_{10} + u_1) + \dots]^-;$$

$$\epsilon^{a_1-1} \left[\left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^+ - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^- \right] + o(\epsilon^{a_1}) = g \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + o(\epsilon^{a_1}) \right].$$

Здесь $q = L^2 q_1$; $g = g_1/L$.

Характер построения асимптотики существенно зависит от порядка относительной жесткости q нити по сравнению с ϵ . Введем параметр β , характеризующий этот порядок ($g = \epsilon^\beta$), и проанализируем возможный вид предельных систем в зависимости от a_1 , β .

Судя по уравнению (7.5.5), соответствующие предельные системы будут получаться при $0 < a_1 < 2$, $a_1 = 2$ и $a_1 > 2$:

$$\text{при } 0 < a_1 < 2 \quad \partial^2 u_1 / \partial \eta^2 = 0; \quad (7.5.6)$$

$$\text{при } a_1 = 2 \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = q; \quad (7.5.7)$$

$$\text{при } a_1 > 2 \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = -q. \quad (7.5.8)$$

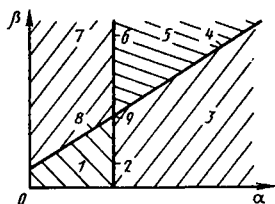


Рис. 7.3. Разбиение области изменения параметров α , β , определяющее зоны различных асимптотик для задачи о деформировании армированной волокнами мембраны

Предельные соотношения, получающиеся из (7.5.5) при $\epsilon \rightarrow 0$, имеют вид

$$\text{при } \beta < \alpha_1 - 1 \quad \partial^2 u_0 / \partial x^2 = 0; \quad (7.5.9)$$

$$\text{при } \beta = \alpha_1 - 1 \quad \left[\left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^* - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^- \right] = g \epsilon^{1-\alpha_1} \frac{\partial u_0}{\partial x^2}; \quad (7.5.10)$$

$$\text{при } \beta > \alpha_1 - 1 \quad \left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^* = \left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^-. \quad (7.5.10')$$

"Четвертьплоскость" $\beta > 0$, $\alpha_1 > 0$ разбивается на девять областей (рис. 7.3).

Перейдем к их детальному исследованию. Пусть $\beta < \alpha_1 - 1$. Физически это означает, что нити жесткие. Из уравнения (7.5.9) тогда имеем $u_0 = 0$, следовательно, осредненное описание здесь не проходит. Соответствующее предельное уравнение для зон 1...3 имеет вид

$$\partial^2 u_1 / \partial \eta^2 = q. \quad (7.5.11)$$

Случаю $\beta > \alpha_1 - 1$ отвечают зоны 4...6. Физически это случай слабых нитей. Нетрудно убедиться, что здесь влияние неоднородности, внесенной нитями, весьма мало, и предельное уравнение имеет вид (7.5.8). Для зон 7 и 9 получаются притворочивые системы. Особый интерес представляет случай $\alpha_1 = 2$, $\beta = 1$ (зона 8) — "средние" по жесткости нити. Тогда предельная система содержит уравнения (7.5.7), (7.5.10), а условия перехода принимают вид

$$u^+ = u^-, \quad (7.5.12)$$

$$\left[\left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^+ - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right]^- \right] = g \epsilon^{-1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (7.5.13)$$

Из уравнения (7.5.7) легко определить u_1 :

$$u_1 = (q - \nabla^2 u_0) \frac{\eta^2}{2} + C(x, y)\eta + C_1(x, y).$$

где $\nabla^2 u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$.

Постоянную $C_1(x, y)$ следует отнести к составляющей u_{10} , которая определяется из осредненных уравнений последующих приближений. Из условий (7.5.12) определяем $C(x, y)$:

$$C(x, y) = - (q - \nabla^2 u_0) \frac{L}{2}. \quad (7.5.14)$$

На первый взгляд, несколько странно, что нужно еще удовлетворить условию (7.5.13), а произвольных постоянных уже нет. Однако нетрудно видеть, что условие (7.5.13) как раз дает осредненное уравнение. Действительно, подставляя в (7.5.13) найденное значение u_1 , получаем

$$\nabla^2 u_0 + \frac{g_1}{l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = q. \quad (7.5.15)$$

Уравнение (7.5.15) следует интегрировать при граничных условиях

$$u_0 = 0 \quad \text{при } x = 0, l/L. \quad (7.5.16)$$

Физически переход к уравнению (7.5.15) соответствует "размазыванию" жесткостей нитей (переход к конструктивно-ортотропной теории). Функцию u_1 можно окончательно представить в виде

$$u_1 = \frac{g_1}{2l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \eta(\eta - l). \quad (7.5.17)$$

Граничные условия на торцах полосы при этом, вообще говоря, не удовлетворятся. Краевая невязка быстропеременна и приводит к по-

явлению пограничного слоя u_{11} . Для построения его введем быструю переменную $\xi = x_1/l$ и разложение

$$u_{11} = \epsilon^{\gamma_1} u_{11}(x, y, \xi, \eta) + \epsilon^{\gamma_2} u_{22}(x, y, \xi, \eta) + \dots \quad (7.5.18)$$

где $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$

Уравнения для определения u_{11} примут вид

$$\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \eta^2} = 0;$$

$$u_{11} \Big|_{\eta=kl} = 0; \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Граничные условия (рассмотрим край $x = \xi = 0$, для второго края все получается аналогично) при $x = \xi = 0$ таковы: $u_{11} = -u_1$.

Для фактического построения пограничного слоя можно применить метод Канторовича, представив u_{11} в виде, удовлетворяющем граничным условиям при $\eta = 0, l$:

$$u_{11} = \Phi(\xi)\eta(\eta - l).$$

Далее применяется стандартная процедура метода Канторовича (см. подразд. 2.6).

7.6. ИЗГИБ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОГО ХАРАКТЕРА РАЗМЕЩЕНИЯ РЕБЕР

Рассмотрим изгиб подкрепленной полосы. Принимается схема контакта по линии. Ребро — одномерный элемент, обладающий сосредоточенной изгибной жесткостью EJ и расположенный симметрично относительно срединной поверхности пластинки. Силовой набор регулярен — ребра одинаковы по своим геометрико-жесткостным характеристикам и расположены на равных расстояниях друг от друга. Уравнение равновесия в пролете между ребрами имеет вид

$$D\nabla^4 \omega = q. \quad (7.6.1)$$

Условия перехода через ребро

$$\lim_{y \rightarrow bk+0} \omega \equiv \omega^+ = \omega^- \equiv \lim_{y \rightarrow bk-0} \omega; \quad (7.6.2)$$

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]^+ = \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]^-; \quad \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^+ = \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^-;$$

$$\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right]^+ - \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right]^- = \frac{E_c J}{D} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}.$$

Первые три условия означают физически неразрывность перемещений, углов поворота и моментов, последнее — скачок в перерезывающих усилиях. Примем для определенности, что полоса зашкреплена по торцам:

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, H. \quad (7.6.3)$$

Пусть характерный период L внешней нагрузки существенно превышает расстояние между ребрами ($L \gg l$). Тогда можно ввести естественный малый параметр $\epsilon = l/L$ и быструю переменную $\eta = y/\epsilon$ (для медленной оставим обозначение y) и записать

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (7.6.4)$$

Перемещение ω представим в виде

$$\begin{aligned} \omega = & \omega_0(x, y) + \epsilon^{\alpha_1} \omega_{10}(x, y) + \epsilon^{\alpha_2} \omega_{20}(x, y) + \\ & + \dots + \epsilon^{\beta_1} \omega_1(x, y, \eta) + \epsilon^{\beta_2} \omega_2(x, y, \eta) + \dots \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

Здесь ω_{i0} — медленные поправки к осредненному решению; ω_i — периодические по η с периодом L функции; $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$; $\beta_1 < \beta_2 < \dots$; α_i, β_i — параметры, определяемые в процессе построения рекуррентной последовательности (методика такого подбора описана в гл. 2). В данном случае $\alpha_1 = \beta_1 = 4$. Учитывая это, а также

подставляя соотношения (7.6.4) и (7.6.5) в исходное уравнение (7.6.1) и краевые условия (7.6.3), имеем

$$\frac{\partial^4 \omega_1}{\partial \eta^4} + \nabla^4 \omega_0 = q_1; \quad q_1 = \frac{q}{D}; \quad (7.6.6)$$

$$\omega_0 = 0; \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, H; \quad (7.6.7)$$

$$\omega_1 + \omega_{10} = 0; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{10}}{\partial x} = 0; \quad (7.6.8)$$

Из уравнения (7.6.6) находим ω_1 :

$$\omega_1 = (q_1 \nabla^4 \omega_0) \frac{\eta^4}{24} + C_1 \eta^3 + C_2 \eta^2 + C_3 \eta + C_4.$$

Постоянные C_i (x, y) определяются из условий (7.6.2), которые можно переписать в виде

$$\left[\omega_1; \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta}; \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \eta^2} \right] \Big|_{\eta=0} = \left[\omega_1; \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta}; \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \eta^2} \right] \Big|_{\eta=L};$$

$$\frac{\partial^3 \omega_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=L} - \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=0} = L\rho \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4}; \quad \rho = \frac{E J}{Dl}. \quad (7.6.9)$$

Дальнейшее построение асимптотики зависит от того, какой порядок имеет относительная жесткость ребер ρ . Ограничимся ребрами средней жесткости ($\rho \sim 1$). Тогда из условий (7.6.9) получаем уравнение

$$\nabla^4 \omega_0 + \rho \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} = q. \quad (7.6.10)$$

Это уравнение конструктивно-ортотропной теории. Краевые условия для него имеют вид (7.6.7). Выражение для обусловленной дискретностью ребер поправки ω_1 таково:

$$\omega_1 = -L\rho \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} \eta^2 (\eta - L)^2. \quad (7.6.11)$$

Найденное перемещение ω_1 не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям на краях $x = 0$; $x = H$, поэтому необходимо построить состояние типа пограничного слоя. Для этого введем еще одну быструю переменную $\xi = x/\epsilon$, оставив за медленной обозначение x . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (7.6.12)$$

Функцию $\omega_n(x, y, \xi, \eta)$ ищем в виде разложения:

$$\omega_n = \epsilon^{\gamma_1} \omega_{n1} + \epsilon^{\gamma_2} \omega_{n2} + \dots, \quad (7.6.13)$$

где $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots$; γ_i подбираются в соответствии с заданными граничными условиями (см. гл. 2). Для рассматриваемого случая $\gamma_1 = 4$. Подставляя выражения (7.6.12), (7.6.13) в исходное уравнение и условия перехода через ребро (7.6.2), имеем

$$\frac{\partial^4 \omega_{n1}}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_{n1}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \omega_{n1}}{\partial \eta^4} = 0; \quad (7.6.14)$$

.....

$$\omega_{n1} = \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, L; \quad (7.6.15)$$

.....

Граничные условия по ξ можно при $H > 2l$ записать так:

$$\omega_1 + \omega_{n1} = 0; \quad \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \epsilon^{-1}H; \quad (7.6.16)$$

$$\omega_{n1} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial \xi} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Для решения краевой задачи (7.6.14)...(7.6.16) можно использовать метод Канторовича, представляя ω_{n1} в виде функции, удовлетворяющей граничным условиям при $\eta = 0, L$:

$$\omega_{n1} = \bar{\omega}(\xi)\eta^2(\eta - L)^2. \quad (7.6.17)$$

Входящие в разложение (7.6.5) медленные составляющие ω_{j0} должны компенсировать медленные невязки в граничных условиях и уравнениях следующих приближений. Полученное решение (7.6.11), (7.6.17), учитывающее дискретность размещения ребер, позволяет оценить погрешность конструктивно-ортотропной теории. Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \omega_1 - m^4 \epsilon^4 \omega_0; \quad M_1^{(1)} - m^4 \epsilon^4 M_1^{(0)}; \\ M_{12}^{(1)} - m^4 \epsilon^3 M_{12}^{(0)}; \quad M_2^{(1)} - m^4 \epsilon^2 M_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (7.6.18)$$

где M_1 , M_2 , M_{12} — соответственно изгибающие моменты в направлении осей x , y и крутящий момент; m — параметр, характеризующий изменчивость конструктивно-ортотропного решения по оси x . Из оценок (7.6.18) видно, что перемещение, изгибающий момент в направлении оси x и крутящий момент достаточно точно определяются по конструктивно-ортотропной схеме, при расчете же M_2 поправка за счет дискретности может оказаться существенной.

Сравнение с известными численными решениями [2] показывает удовлетворительную точность первого приближения, описываемого в данном случае соотношениями (7.6.11), (7.6.17). Еще один способ проверки заключается в разложении точных решений (в тех случаях, когда они могут быть построены) в асимптотические ряды по малым параметрам. Точные решения в задачах теории ребристых оболочек могут быть получены для регулярного однонаправленного силового набора при шарнирном опирании торцов [2]. Разложения их по малому параметру, характеризующему отношение расстояния между ребрами к периоду внешней нагрузки, действительно совпадают с формулами, полученными на основе описанного выше подхода [8].

Основное преимущество изложенной методики учета дискретности ребер состоит в том, что построенные на ее основе уточненные решения не сложнее, чем получаемые по конструктивно-ортотропной теории. При этом последние могут определяться аналитически или численно, а учет дискретности производится по простым аналитическим формулам.

7.7. ДРУГОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основные идеи этого подхода проиллюстрируем на примере задачи об изгибных колебаниях прямоугольной пластины ($0 < x < L_1$, $-L_2 < y < L_2$), подкрепленной регулярным силовым набором из $N = 2k + 1$ симметрично расположенных относительно ее срединной поверхности ребер. Исходное уравнение можно в этом случае записать так:

$$D\nabla^4 \omega + E_c J \Phi(y) \omega_{xxxx} + c_1 \omega + [\rho_0 h + \rho_c F \Phi(y)] \omega_{tt} = 0. \quad (7.7.1)$$

$$\text{Здесь } \Phi(y) = \sum_{i=-0,5(N-1)}^{0,5(N-1)} \delta(y - ib); \quad b = 2L_2 / (N + 1).$$

Без ограничения общности будем считать

$$\omega = \omega_y = 0 \quad \text{при } y = \pm L_2; \quad (7.7.2)$$

$$\omega = \omega_{xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, L_1; \quad (7.7.3)$$

$$\omega = \omega_x = 0 \quad \text{при } x = 0, L_1. \quad (7.7.4)$$

Условия сопряжения соседних участков пластин через ребро имеют вид

$$\omega^+ = \omega^-; \quad \omega_y^+ = \omega_y^-; \quad \omega_{yy}^+ = \omega_{yy}^-; \quad (7.7.5)$$

$$-D(\omega_{yy}^+ - \omega_{yy}^-) = E_c J \omega_{xxxx}^+ + \rho_c F \omega_{tt}^+$$

Здесь $(...)^{\pm} = \lim_{y \rightarrow ib \pm 0} (...)$.

Рассмотрим сначала собственные колебания, полагая

$$\omega = \omega(x, y) \exp(i\omega t). \quad (7.7.6)$$

Подставим выражение (7.7.6) в исходное уравнение (7.7.1) и приведем последнее к следующему безразмерному виду:

$$\nabla^4 \omega + c \omega + a \Phi(\varphi) \omega_{\xi\xi\xi\xi} - \lambda [1 - \rho \Phi(\varphi)] \omega = 0. \quad (7.7.7)$$

$$\text{Здесь } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta_1^4}; \quad \xi = \frac{x}{2L_2};$$

$$\eta_1 = \frac{y}{2L_2}; \quad c = \frac{16c_1 L_2^4}{D}; \quad a = \frac{E_c J}{Db}; \quad \varphi = \frac{y}{b};$$

$$\lambda = \frac{16\omega^2 \rho_0 h L_2^4}{D}; \quad \rho = \frac{\rho_c F}{\rho_0 h b}; \quad \Phi(\varphi) = \sum_{l=0,5(N-1)}^{0,5(N-1)} \delta(\varphi - l).$$

Условия сопряжения (7.7.5) в новых переменных можно записать так:

$$\{\omega^+; \omega^+_{\eta_1}; \omega^+_{\eta_1 \eta_1}\} = \{\omega^-; \omega^-_{\eta_1}; \omega^-_{\eta_1 \eta_1}\}; \quad (7.7.8)$$

$$-\omega^+_{\eta_1 \eta_1 \eta_1} + \omega^-_{\eta_1 \eta_1 \eta_1} = \epsilon(a\omega^+_{\xi\xi\xi\xi} - \lambda\rho\omega^+),$$

где $(\dots)^+ = \lim_{k \rightarrow 0} (\dots)$; $\epsilon = b/(2L_2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Параметр ϵ характеризует частоту расположения ребер. Будем считать его малым ($\epsilon \ll 1$) и перейдем к асимптотическому анализу уравнения (7.7.7). Перед этим нужно еще установить соотношения между входящими в него величинами. Параметр ρ не оказывает существенного влияния на построение асимптотики, в дальнейшем полагаем $\rho \sim 1$. Для относительной жесткости ребер примем оценку $a \sim \epsilon^{-1}$. Физически это означает, что приведенная жесткость одного ребра имеет порядок жесткости обшивки.

Используя метод двух масштабов, вводим вместо одной переменной η_1 две: медленную $\eta = y_1$ и быструю $y/b = \eta_1/\epsilon = \varphi$. Тогда выражение для производной по η_1 принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (7.7.9)$$

Нормальное перемещение w и квадрат частоты λ представим в виде разложений по ϵ :

$$\omega = \omega_0(\xi, \eta, \varphi) + \epsilon \omega_1(\xi, \eta, \varphi) + \dots, \quad (7.7.10)$$

$$\lambda = \epsilon^{-1} \lambda_0 + \lambda_1 + \dots \quad (7.7.11)$$

Подставляя выражения (7.7.10), (7.7.11) в уравнение (7.7.7) и учитывая новое выражение для производной (7.7.9), получаем после расщепления по ϵ рекуррентную систему уравнений. Анализ ее показывает, что $\omega_0 = \omega_{00}(\xi, \eta)$, а разложение (7.7.10) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega = & \omega_{00}(\xi, \eta) + \epsilon \omega_{01}(\xi, \eta) + \epsilon^2 \omega_{02}(\xi, \eta) + \\ & + \dots \epsilon^3 [\omega_1(\xi, \eta, \varphi) + \epsilon \omega_2(\xi, \eta, \varphi) + \dots]. \end{aligned} \quad (7.7.12)$$

Здесь ω_i - периодические по φ с периодом 1 функции. Окончательно рекуррентную последовательность расщепленных по ϵ уравнений можно записать так:

$$\text{для } \epsilon^{-1} \omega_{1, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{00} = 0;$$

$$\text{для } \epsilon^0 \omega_{2, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{01} - \lambda_1(1 + \rho\Phi)\omega_{00} = \Pi_1 \omega_1 - \nabla^4 \omega_{00};$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^1 \omega_{3, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{02} - (1 + \rho\Phi)(\lambda_1 \omega_{01} + \lambda_2 \omega_{00}) = \\ = \Pi_1 \omega_2 + \Pi_2 \omega_1 - \nabla^4 \omega_{01}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^2 \omega_{4, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{03} - (1 + \rho\Phi)(\lambda_1 \omega_{02} + \lambda_2 \omega_{01} + \\ + \lambda_3 \omega_{00} + \lambda_0 \omega_1) = \Pi_1 \omega_3 + \Pi_2 \omega_2 + \Pi_3 \omega_1 - \nabla^4 \omega_{02}; \end{aligned} \quad (7.7.13)$$

$$\text{для } \epsilon^3 \omega_{5, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{04} - (1 + \rho\Phi) \left[\sum_{i=1}^4 \lambda_i \omega_{04-i} + \lambda_0 \omega_2 + \lambda_1 \omega_1 \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \Pi_i \omega_{5-i} - \nabla^4 (\omega_{03} + \omega_1);$$

$$\dots \dots \dots \text{для } \epsilon^{k-2} \omega_{k, \varphi \varphi \varphi \varphi} + \Pi_0 \omega_{0k-1} - (1 + \rho\Phi) \left[\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \omega_{0k-1-i} + \right.$$

$$+ \left. \sum_{i=0}^{k-4} \lambda_i \omega_{k-3-i} \right) = \sum_{i=1}^3 \Pi_i \omega_{k-i} - \nabla^4 (\omega_{0k-2} + \omega_{k-4});$$

.....

$$\text{Здесь } \Pi_0 = c + \alpha \Phi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \lambda_0 (1 + \rho \Phi);$$

$$\Pi_1 = -4 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^3 \partial \eta}; \quad \Pi_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial \xi^2};$$

$$\Pi_3 = \Pi_{31} + \Pi_{30} = \left[-4 \frac{\partial^4}{\partial \varphi \partial \eta \partial \xi^2} - \frac{4 \partial^4}{\partial \xi \partial \eta^3} \right] + \left[-c - \alpha \Phi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right].$$

Граничные условия (7.7.2) – (7.7.4) примут вид:

$$\text{при } \xi = 0, l \quad \omega_{0l} = -\omega_{i-2}, \quad \omega_{0l, \xi \xi} = -\omega_{i-2, \xi \xi};$$

$$\text{или } \omega_{0i} = -\omega_{i-2}, \quad \omega_{0i, 2} = -\omega_{i-2, \xi}; \quad (7.7.14)$$

$$\text{при } \eta = \pm 0,5 \quad \omega_{0i} = -\omega_{i-2}, \quad \omega_{0i, \eta} = -\omega_{i-1, \varphi} - \omega_{i-2}, \quad (7.7.15)$$

где $i = 0, 1, 2 \dots$; $\omega_i = 0$ при $i < 0$; $l = L_1 / (2L_2)$.

Выполним теперь в соотношениях (7.7.13)...(7.7.15) осреднение по φ , т.е. применим к каждому члену их оператор

$$\bar{(\dots)} = \frac{1}{N+1} \int_{-0.5(N+1)}^{0.5(N+1)} (\dots) d\varphi.$$

Отметим, что $\bar{\omega}_{0i} = \omega_{0i}$; $\bar{\Phi} = 1$, а в силу периодичности функций ω_i получим $\bar{\Pi}_1 \omega_i = \bar{\Pi}_2 \omega_i = \bar{\Pi}_{31} \omega_i = 0$.

Учитывая это обстоятельство, после осреднения приходим к следующим краевым задачам:

$$\Pi_{00} \omega_{00} = \left[\alpha \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + c - (1 + \rho) \lambda_0 \right] \omega_{00} = 0; \quad (7.7.16)$$

$$\Pi_{00} \omega_{01} - \lambda_1 (1 + \rho) \omega_{00} = -\nabla^4 \omega_{00}; \quad (7.7.17)$$

$$\Pi_{00} \omega_{02} - (1 + \rho)(\lambda_1 \omega_{01} + \lambda_2 \omega_{00}) = -\nabla^4 \omega_{01}; \quad (7.7.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{00} \omega_{03} - (1 + \rho)(\lambda_1 \omega_{02} + \lambda_2 \omega_{01} + \lambda_3 \omega_{00}) - \\ - \lambda_0 (1 + \rho \Phi) \omega_{01} = \Pi_{30} \omega_{01} - \nabla^4 \omega_{02}; \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

$$\text{при } \xi = 0, \quad \omega_{0i} = -\overline{\omega}_{i-2}; \quad \omega_{0i, \xi \xi} = -\overline{\omega}_{i-2, \xi \xi}; \quad (7.7.20)$$

$$\text{или } \omega_{0i} = -\overline{\omega}_{i-2}; \quad \omega_{0i, \xi} = -\overline{\omega}_{i-2, \xi}; \quad (7.7.21)$$

$$\text{при } \eta = \pm 0,5 \quad \omega_{0i} = -\overline{\omega}_{i-2}; \quad \omega_{0i, \eta} = -\overline{\omega}_{i-2, \eta}, \quad (7.7.22)$$

где $\overline{\omega}_i = 0$ при $i < 0$.

Соотношения для определения быстрых периодических функций ω_i можно записать так:

$$\omega_{1, \varphi \rho \rho \rho} = \Pi_{01} \omega_{00} \equiv \left[a \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \lambda_0 \rho \right] \omega_{00}; \quad (7.7.23)$$

$$\omega_{2, \varphi \rho \rho \rho} = \Pi_1 \omega_{01} + \Pi_{01} \omega_{01} - \lambda_1 \rho \omega_{00}; \quad (7.7.24)$$

$$\begin{aligned} \omega_{k, \varphi \rho \rho \rho} = \sum_{i=1}^3 \overline{\Pi_i \omega_{k-i}} - \nabla^4 \overline{\omega_{k-4}} + \Pi_{01} \omega_{0k-1} - \\ - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \overline{\omega_{0k-1-i}} + \sum_{i=0}^{k-4} \lambda_i \overline{\omega_{k-3-i}} (1 + \rho \Phi), \end{aligned} \quad (7.7.25)$$

$$\text{при } \varphi = \pm k; \quad k = 0, 1, \dots, 0,5(N+1) \quad \omega_i = \overline{\omega}_{i, \varphi} = 0. \quad (7.7.26)$$

Здесь $(\overline{\dots}) = (\dots) - (\dots)$.

Условия сопряжения (7.7.8) при таком построении функций ω_i , $\overline{\omega}_{0i}$ автоматически выполняются в каждом приближении. Поясним условия (7.7.26). Формально следовало бы писать их в следующем виде:

$$\text{при } \varphi = \pm k \quad \omega_i = C_i^0(\xi, \eta); \quad \omega_{i,\varphi} = C_i^1(\xi, \eta).$$

однако функции C_i^0, C_i^1 можно отнести к медленным составляющим решения ω_{0i} .

Если при $y = \pm L_2$ будут заданы условия, отличные от условий заземления, то граничные условия (7.7.26) при $\varphi = \pm 0,5(N + 1)$ должны быть заменены. Например, если при $y = \pm L_2$ имеем $\omega = \omega_{yy}$, то при $\varphi = \pm 0,5(N + 1)$ должно быть $\omega_i = \omega_{i,\varphi\varphi} = 0$.

Функции ω_i не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям при $\xi = 0, l$, а решения ω_{0i} позволяют компенсировать только медленную часть невязки. Поэтому необходимо построение быстрозатухающего состояния типа пограничного слоя. Для этой цели введем новую быструю переменную $\psi = \xi/\epsilon$ (для медленной оставим обозначение ξ). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (7.7.27)$$

Решение типа пограничного слоя ω_n можно в силу периодичности невязки разыскивать на одном периоде $0 \leq \varphi \leq 1$. Представим его в виде разложения:

$$\omega_n = \epsilon^3 [\omega_{n1}(\xi, \eta, \psi, \varphi) + \epsilon \omega_{n2}(\xi, \eta, \psi, \varphi) + \dots]. \quad (7.7.28)$$

После подстановки выражений (7.7.27), (7.7.28) в исходные соотношения и расчленения по ϵ приходим к следующей рекуррентной системе краевых задач:

$$\nabla_1 \omega_{n1} \equiv \left[\frac{\partial^4}{\partial \psi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right] \omega_{n1} = 0; \quad (7.7.29)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\nabla_1 \omega_{nk} = \sum_{i=1}^3 A_{i, nk-i} \omega_{nk-i} - C \omega_{nk-3} - \nabla^4 \omega_{nk-4} + \sum_{i=0}^{k-4} \lambda_{i, nk-3-i} \omega_{nk-3-i}$$

$$k = 2, 3, \dots \quad (7.7.30)$$

$$\text{при } \varphi = \pm k \quad \omega_{n1} = 0; \quad \omega_{n1, \varphi} = 0; \quad (7.7.31)$$

$$\frac{\partial^4 \omega_{n\rho}}{\partial \psi^4} = -A_0 \omega_{n\rho-1} + \sum_{l=1}^4 A_{1l} \omega_{n\rho-l} + \rho \sum_{l=0}^{k-5} \lambda_l \omega_{n\rho-3-l};$$

$$\rho = 2, 3, \dots; \quad \omega_{n\rho, \varphi} = 0; \quad (7.7.32)$$

$$\text{при } \xi = 0, l, \quad \psi = 0, l_1 \quad (l_1 = \epsilon^{-1}l)$$

$$\omega_{nj} = -\bar{\omega}_j; \quad \omega_{nj, \psi\psi} = -\omega_{j, \xi\xi} - 2\omega_{nj-1, \psi\xi} - \omega_{nj-2, \xi\xi}; \quad (7.7.33)$$

или

$$\omega_{nj} = -\bar{\omega}_j; \quad \omega_{nj, \psi} = -\bar{\omega}_{nj, \xi} - \omega_{nj-1, \xi}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.7.34)$$

Здесь $\omega_{n\rho} = 0$ при $\rho < 1$. Можно записать

$$A_1 = -4 \left[\frac{\partial^4}{\partial \psi^3 \partial \xi} + \frac{\partial^4}{\partial \psi \partial \xi \partial \rho^2} + \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \rho \partial \eta} + \frac{\partial^4}{\partial \psi^3 \partial \eta} \right];$$

$$A_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \rho^2} - 8 \frac{\partial^4}{\partial \xi \partial \psi \partial \eta \partial \rho} -$$

$$-6 \frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \eta^2};$$

$$A_4 = -4 \left[\frac{\partial^4}{\partial \psi \partial \xi^3} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \rho \partial \eta} + \frac{\partial^4}{\partial \psi \partial \xi \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \rho \partial \eta^3} \right];$$

$$A_0(\dots) = (\alpha\epsilon)^{-1} \left[\frac{\partial^3(\dots)}{\partial \rho^3} \Big|_{\varphi=1} - \frac{\partial^3(\dots)}{\partial \rho^3} \Big|_{\varphi=0} \right];$$

$$A_{11} = -4 \frac{\partial^4}{\partial \psi^3 \partial \xi}; \quad A_{12} = -6 \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \xi^2};$$

$$A_{13} = -4 \frac{\partial^4}{\partial \psi \partial \xi^3}; \quad A_{14} = -\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}.$$

Предлагаемый метод позволит определять разложения искомых частот и форм колебаний с точностью до любой степени ϵ . Однако на

практике, как правило, бывает достаточно ограничиться первыми членами соответствующих разложений, к анализу которых мы и переходим.

Осредненное уравнение (7.7.16) с точностью до членов порядка ϵ совпадает с уравнением конструктивно-ортотропной теории, хотя и имеется существенное отличие: переменная η входит в него параметрически, поэтому зависимость ω_{00} от η можно определить

только в следующем приближении.

Ясно, что λ_0 — некратное собственное значение. Поэтому для определения λ_1 нужно умножить обе части уравнения (7.7.17) на ω_{00} и проинтегрировать с учетом граничных условий (7.7.20) (или (7.7.21)) и (7.7.22) по Ω . В результате получаем уравнение для определения λ_1 и зависимость функции ω_{00} от переменной

$$\nabla^4 \omega_{00} - \lambda_1 (1 + \rho) \omega_{00} = 0. \quad (7.7.35)$$

Собственное число λ_1 , вообще говоря, может быть кратным, однако подобные случаи не являются "случаями общего положения" и не представляют собой большого интереса для механики пластин и оболочек. Поэтому как в данной задаче, так и в рассматриваемых далее в настоящей работе будем считать соответствующие собственные числа некратными. Отметим, что и в случае кратности построение следующих приближений в разложении λ не представляет труда и может быть выполнено по известной схеме (см. гл. 1).

Считая λ_1 некратным, определяем, что $\lambda_2 = 0$,

$$\omega_{01} = \omega_{02} = 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} [\lambda_0 (1 + \rho \Phi \omega_1) + \Pi_{30} \omega_1] \omega_{00} d\xi d\eta}{(1 + \rho) \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \omega_{00}^2 d\xi d\eta}; \quad (7.7.36)$$

$$\lambda_k = \left\{ \lambda_{0k} - \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \left[(1 + \rho) \sum_{i=0}^{k-3} \lambda_i \omega_{0k-i} + \sum_{i=0}^{k-3} \lambda_i \omega_{k-2-i} (1 + \rho \Phi) + \right. \right.$$

$$\left. + \Pi_{30} \omega_{k-2} + \nabla^4 \omega_{0k-1} + \tilde{\omega}_{k-3} \right\} \omega_{00} d\xi d\eta \left. \right\} \times \\
 \times \left\{ (1 + \rho) \int_0^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \omega_{00}^2 d\xi d\eta \right\}^{-1}, \quad k = 4, 5, \dots \quad (7.7.37)$$

Вид выражения λ_{0j} зависит от граничных условий при $\xi = 0, l$.

Для варианта (7.7.20)

$$\lambda_{0j} = \alpha \int_{-0.5}^{0.5} (\tilde{\omega}_{j-2, \xi\xi} \omega_{00, \xi} + \tilde{\omega}_{j-2} \omega_{00, \xi\xi}) \Big|_{\xi=0}^{\xi=l} d\eta,$$

а для варианта (7.7.21)

$$\lambda_{0j} = \alpha \int_{-0.5}^{0.5} (\tilde{\omega}_{j-2, \xi} \omega_{00, \xi\xi} + \tilde{\omega}_{j-2} \omega_{00, \xi\xi\xi}) \Big|_{\xi=0}^{\xi=l} d\eta, \quad j = 3, 4, \dots$$

Медленные составляющие ω_{0k} ($k \geq 3, 4, \dots$) определяются из уравнений (7.7.19) после подстановки в них найденных значений λ_j .

Отметим, что уравнения (7.7.16), (7.7.17) можно объединить в одно, которое в исходных переменных будет иметь вид

$$D_1 \omega_{0,xxxx} + 2D \omega_{0,xyxy} + D \omega_{0,yyyy} + C \omega_0 - \tilde{\omega}^2 \rho_1 \omega_0 = 0. \quad (7.7.37')$$

Здесь

$$D_1 = D + \frac{EJ}{b}; \quad \rho_1 = \rho_0 h + \frac{\rho_c F}{b}; \quad \tilde{\omega}^2 = \epsilon^{-1} \omega_0^2 + \omega_1^2.$$

Это обычное уравнение конструктивно-ортотропной теории, получаемое "размазыванием" жесткостей и плотностей ребер по обшивке.

Граничные условия для уравнения (7.7.37) имеют вид:

$$\text{при } x = 0, L_1 \quad \omega_0 = \omega_{0xx} = 0; \quad (7.7.38)$$

или $\omega_0 = \omega_{0x} = 0$;

при $y = \pm L_2$ $\omega_0 = \omega_{0,y} = 0$. (7.7.38)

Перейдем к построению быстрых составляющих решения ω_i . Используя уравнение (7.7.23) и граничные условия (7.7.26), находим

$$\omega_1 = \frac{1}{24} \Pi_{01} \omega_0 F_4(\varphi), \quad (7.7.39)$$

где $F_4(\varphi)$ – периодическая функция, имеющая на периоде $0 < \varphi < 1$ вид $F_4(\varphi) = \varphi^2(\varphi - 1)^2$.

В исходных переменных

$$\omega_1 = \frac{1}{24b} \left[\frac{E_c J}{D} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \omega_0^2 \rho_c F \right] \omega_0 y^2 (y - b)^2. \quad (7.7.40)$$

Выражения для ω_i при $i > 1$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \omega_i = & \frac{1}{24} \left[\Pi_{01} \omega_{0i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^{\omega} \omega_{0k-1-j} \right] F_4(\varphi) + \\ & + \iiint \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\Pi_j \omega_{i-j}}{\omega_{i-4}} - \nabla^4 \frac{\omega_{i-4}}{\omega_{i-4}} + \sum_{j=0}^{i-4} \lambda_j^{\omega} \omega_{i-3-j} (1 + \rho\Phi) \right] d\varphi d\varphi d\varphi + \\ & + \sum_{j=0}^3 C_j^{(i)} \varphi^j, \quad (7.7.41) \end{aligned}$$

где "постоянные" $C_j^{(i)}(\xi, \eta)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (7.7.26).

Отметим, что соотношения (7.7.23)...(7.7.26) физически означают, что под действием быстропеременной по координате y нагрузки

деформация пластины сводится в основном к цилиндрическому изгибу между ребрами.

Наконец, рассмотрим соотношения пограничного слоя.

Решения уравнения (7.7.29) при граничных условиях (7.7.31) можно построить методом Канторовича, представляя функцию ω_{n1} в виде

$$\omega_{n1} = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\psi) \varphi^2 (\varphi - 1)^2 (\varphi - 0,5)^{2j-2}. \quad (7.7.42)$$

Ограничиваясь одним членом выражения (7.7.42) (такое приближение дает при расчете пластин вполне приемлемую точность [45]), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$P_{1,\psi\psi\psi\psi} - 8P_{1,\psi\psi} + \frac{63}{8} P_1 = 0. \quad (7.7.43)$$

Общее решение уравнения (7.7.43) имеет вид

$$P_1 = \exp(\sigma_1 \psi) [C_{10} \cos(\sigma_2 \psi) + C_{20} \sin(\sigma_2 \psi)] + \\ + \exp[\sigma_1 (\psi - l_1)] \{C_{30} \cos[\sigma_2 (\psi - l_1)] + C_{40} \sin[\sigma_2 (\psi - l_1)]\}.$$

Здесь $\sigma_1 = 4,150$, $\sigma_2 = 2,286$, $C_{10} - C_{40}$ - постоянные, позволяющие удовлетворить краевым условиям (7.7.33) или (7.7.34).

В исходных переменных решение типа погранслоя ω_{n1} можно записать так:

$$\omega_{n1} = \{ \exp(-4,150x/b) [C_{10} \cos(2,286x/b) + \\ + C_{20} \sin(2,286x/b)] + \exp[4,150(x - L_1)/b] \times \\ \times \{C_{30} \cos[(x - L_1)/b] + C_{40} \sin(2,286(x - L_1)/b)\} \} y^2 (y - b)^2. \quad (7.7.44)$$

Если $L_1 > 2, b$, то взаимным влиянием торцов полюсы при определении постоянных C_{j0} можно пренебречь, заменяя условие на противоположном торце условием затухания:

$$\omega_{n1} \rightarrow 0, \quad \omega_{n1, \psi} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\psi| \rightarrow \infty.$$

Последующие составляющие решения типа пограничного слоя можно найти из уравнений (7.7.30) и краевых условий (7.7.31)...(7.7.32) также при помощи метода Канторовича.

Для решения задач о вынужденных колебаниях можно эффективно использовать метод разложения по собственным формам колебаний. Дискретность ребер необходимо учитывать при построении собственных форм в тех случаях, когда по ним определяются изгибающие моменты. Определение же проекций внешней нагрузки на собственные формы и, следовательно, коэффициентов разложения решения по собственным формам может быть проведено в рамках конструктивно-ортотропной теории. Задача о свободных колебаниях сводится к задаче о вынужденных колебаниях, так как начальные условия

$$\omega = \omega^{(0)}(x, y);$$

$$\omega_t = \omega^{(1)}(x, y) \quad \text{при } t = 0$$

эквивалентны нагрузке

$$q = \omega^{(0)} \frac{d\delta(t)}{dt} + \omega^{(1)} \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}.$$

7.8. УПРОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

На основе метода осреднения могут быть получены упрощенные уравнения, описывающие динамику полых оболочек и пластин при учете геометрической нелинейности.

Для полой оболочки с радиусами кривизны R_1, R_2 , имеющей размеры в плане a, b , они имеют вид

$$\frac{D}{h} \nabla^4 \omega + \left[\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] F -$$

$$- \frac{E}{ab(1 - \nu^2)} \left[0,5 \nabla^2 \omega \int_0^a \int_0^b (\omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega_{xx} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \omega dx dy + \\
 & + \omega_{yy} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\nu}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right] \omega dx dy + \rho \omega_{tt} = 0; \quad (7.8.1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F + \left[\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega = 0. \quad (7.8.2)$$

Для пластины ($R_1^{-1} = R_2^{-1} = 0$) имеем так называемые уравнения

Бергера

$$\begin{aligned}
 D \nabla^4 \omega - \frac{Eh}{2ab(1-\nu^2)} \nabla^2 \omega \int_0^a \int_0^b (\omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy + \\
 + \rho \omega_{tt} = 0, \quad (7.8.3)
 \end{aligned}$$

$$\nabla^4 F = 0. \quad (7.8.4)$$

Уравнение в виде (7.8.3) было впервые построено Бергером [86] на основе гипотезы о возможности пренебрежения вторым инвариантом тензора деформаций $J_2 = \epsilon_{11}\epsilon_{22} - 0,25\epsilon_{12}^2$ в выражении потенциальной энергии деформации. Обсуждению применимости уравнений Бергера и возможностей обобщения их на случай оболочек посвящены работы [3, 8]. Однако лишь последовательное применение метода осреднения позволило обосновать уравнение (7.8.3) и получить последовательные уравнения для пологих оболочек (7.8.1). Отметим, что обобщения на случай трансверсально изотропных пластин и пологих оболочек, круглых пластин, вязкоупругих пластин и пологих оболочек также получены в работах [3, 8].

Из метода осреднения следует, что уравнения (7.8.1), (7.8.3) тем точнее, чем больше изменяемость по пространственным переменным. Поэтому указанные уравнения можно с успехом применять в обобщениях на нелинейный случай асимптотического метода динамического краевого эффекта.

7.9. КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС

Исследованию колебаний пластин и цилиндрических оболочек с присоединенными осцилляторами посвящено значительное число работ [2] (один из случаев схематично изображен на рис. 7.4). Точное решение можно получить лишь в случае специальных граничных условий. При краевых условиях, отличных от классических (шарнирное опирание), построение аналогичных решений затруднено, особенно при большом числе масс. Однако в этом случае можно эффективно использовать методы осреднения.

Уравнение колебаний круговой цилиндрической оболочки с регулярной системой присоединенных осцилляторов можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & D(\nabla^2 \bar{\Phi} + a^2 \bar{\Phi}_{xxxx} + 2\bar{\Phi}_{yyyy} + \bar{\Phi}_{yyyy}) + \rho h R^4 \nabla^4 \bar{\Phi}_{tt} + \\
 & + MR^2 \nabla^4 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \bar{\Phi}_{ij} \delta(x - x_i; y - y_j) + \\
 & + cR^2 \nabla^4 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \bar{\Phi}_{ij} \delta(x - x_i; y - y_j) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

Здесь $\bar{\Phi}$ — функция напряжений; c — жесткость присоединения; M — масса осциллятора; x, y — осевая и окружная координаты в долях радиуса цилиндрической оболочки.

Переходя к исследованию собственных колебаний, положим

$$\bar{\Phi} = \Phi(x, y) \exp(i\sqrt{\lambda} t).$$

Пусть оболочка закреплена по торцам:

$$\omega = \omega = u = v = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \tag{7.9.2}$$

Точное решение задачи на собственные значения (7.9.1), (7.9.2) невозможно. При большом числе масс ес-

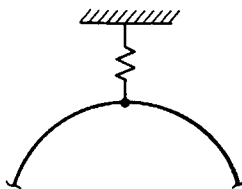


Рис. 7.4. Схема фрагмента оболочки с присоединенным осциллятором

естественно перейти к осредненному описанию, "размазав" сосредоточенные массы и жесткости:

$$D(\nabla^8 \Phi^{(0)} + a^2 \Phi_{xxxx}^{(0)} - 2\Phi_{yyyyyy}^{(0)} + \Phi_{yyyy}^{(0)}) - \rho h R^4 \lambda_0 \nabla^4 \Phi^{(0)} - R^2 M_0 \lambda_0 \nabla^4 \Phi^{(0)} + R^2 c_0 \nabla^4 \Phi^{(0)} = 0. \quad (7.9.3)$$

Такое упрощение имеет смысл тогда, когда рассматриваются колебания по формам, захватывающим несколько масс. Если задача может рассматриваться в рамках полубезмоментной теории, то при использовании осредненного уравнения (7.9.3) можно записать

$$\lambda_0 = \{D[(4.73l^{-1})^4 a^2 + (m^4 - 1)^2] + c_0 R^2\} R^{-2} (\rho h R^2 + M_0)^{-1};$$

$$\Phi^{(0)} = A(1 - \text{ch} k x \text{cos} k x) \sin m y, \quad (7.9.4)$$

где $k = \{R^2[(\rho h R^2 + M_0)\lambda_0 - c_0]D^{-1} - (m^2 - 1)^2\}^{1/4} a^{-1/2}$.

Представим далее исходные переменные Φ и λ в виде

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}; \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1.$$

Для определения $\Phi^{(1)}$ и λ_1 получаем уравнение

$$D(\nabla^8 \Phi^{(1)} + a^2 \Phi_{xxxx}^{(1)} - 2\Phi_{yyyyyy}^{(1)} + \Phi_{yyyy}^{(1)}) - \rho h R^4 (\lambda_0 + \lambda_1) \nabla^4 \Phi^{(1)} - R^2 M (\lambda_1 + \lambda_0) F \nabla^4 \Phi^{(1)} + R^2 c F \nabla^4 \Phi^{(1)} = \rho h R^4 \lambda_1 \nabla^4 \Phi^{(0)} + R^2 [(\lambda_1 + \lambda_0) M F - \lambda_0 M_0] \nabla^4 \Phi^{(0)} - R^2 (c F - c_0) \nabla^4 \Phi^{(0)}, \quad (7.9.5)$$

где $F = N_1 N_2 / (2\pi l) + 2N_1 N_2 / (\pi l) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2k\pi N_1 x / l) \cos(m N_2 y)$;

$$c_0 = 2c\pi l / (N_1 N_2); \quad M_0 = 2\pi l M / (N_1 N_2).$$

Воспользовавшись быстрой изменяемостью правой части уравнения (7.9.5), в первом приближении частное решение уравнения (7.9.5) можно найти в виде

$$\Phi_{11} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{km} \cos(2k\pi N_1 / l) \cos(m N_2 y). \quad (7.9.6)$$

Здесь

$$b_{km} = 2N_1 N_2 R^2 [(\lambda_0 + \lambda_1) M - c] \nabla^4 \Phi^{(0)} / \{\pi l D [(m N_2)^2 + (2k\pi N_1 / l)^2]^4\}.$$

Решение (7.9.6) удовлетворяет заданным краевым условиям (7.9.2). Поправку к частоте собственных колебаний получаем по методу возмущений

$$\lambda_1 = - \frac{4PR^2(\lambda_0 M_0 - c_0)^2}{D(\rho h R + M_0)} \quad (7.9.7)$$

$$\text{где } P = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(mN_2)^2 + (2k\pi N_1/l)^2]^{-4}.$$

Высшие приближения строятся аналогично.

Для оценки точности предложенного метода рассмотрим случай граничных условий, при которых частотное уравнение может быть получено точными методами, — классическое шарнирное опирание.

Трансцендентное уравнение для определения частоты имеет вид

$$F(\epsilon) = (M\lambda - c) \frac{R^2 N_2 (N_1 + 1)}{2\pi l D} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} - 1 = 0.$$

Здесь $\epsilon = mk/(N_1 N_2)$; $\Delta_{km} = (\gamma_k^2 + m^2)^4 + a^2 \gamma_k^4 - 2m^6 + m^4 - \lambda \rho h R^4 (\gamma_k^2 + m^2)^2 / D$; $\gamma_k = k\pi/l$; $k = \alpha$; $2s(N_1 + 1) \pm \alpha$; $m = \beta$; $sN_2 \pm \beta$ ($s = 1, 2, \dots$); α и β — целые числа, характеризующие форму волнообразования, причем $0 < \beta < N_2/2$.

Считая параметр ϵ малым, получим разложение частоты по ϵ :

$$\tilde{\lambda}_T = \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_1 + O(\epsilon^4),$$

где $\tilde{\lambda}_T$ — численное решение трансцендентного уравнения, в дальнейшем называемое точным, $\tilde{\lambda}_0$ совпадает с частотой колебаний оболочки с "размазанными" жесткостями и массами, $\tilde{\lambda}_1$ — с определяемой по формуле (7.9.7) поправкой.

Численное сравнение точного и приближенного решений выполнено при следующих значениях безразмерных геометрико-жесткостных параметров: $\nu = 0,3$; $R/h = 100$; $l = 3$.

На рис. 7.5,а показана зависимость k_λ от k_m при $k_c = 1$, $\epsilon =$

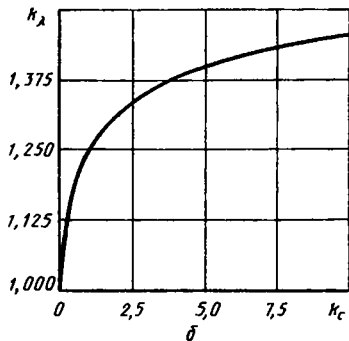
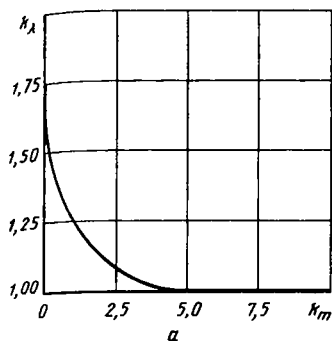


Рис. 7.5. Точность определения частот при осреднении:
а — по массе; б — по жесткости

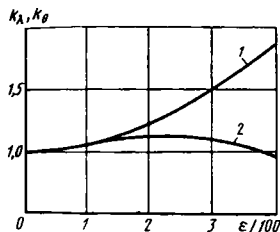


Рис. 7.6. Влияние параметра ϵ на точность определения частоты

$= 0,195 \cdot 10^{-1}$, где k_λ — отношение частоты колебаний оболочки с "размазанными" массами и жесткостями к точной ($k_\lambda = \bar{\lambda}_0 / \bar{\lambda}_T$), k_m — отношение приведенной массы присоединения к массе оболочки

$$(k_m = MN_1 N_2 / (2\pi R h \rho)),$$

k_c — отношение приведенной жесткости присоединения к жесткости оболочки на растяжение — сжатие ($k_c = cN_1 N_2 (1 - \nu^2) / (2\pi l E h)$).

На рис. 7.5, б изображена зависимость k_λ от k_c при $k_m = 1$, $\epsilon = 0,195 \cdot 10^{-1}$, а на рис. 7.6 — зависимость k_λ (кривая 1) и k_θ (кривая 2) от ϵ при $k_m = 1$, $k_c = 1$. Здесь k_θ — отношение суммы двух первых членов разложения к точной частоте ($k_\theta = (\lambda_0 + \lambda_1) / \lambda_T$).

ГЛАВА 8 АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

Для оценки собственных частот и форм колебаний упругих систем В.В. Болотиным был предложен асимптотический метод [26], дающий тем более точное решение, чем более высокая форма колебаний рассматривается. Основная идея метода состоит в расчленении решения исходных уравнений на основное (справедливое во внутренней области) и типа динамического краевого эффекта, локализованного в окрестности "линий искажения" (в частности, границ).

8.1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Проиллюстрируем применение асимптотического метода на примере простейшей задачи, имеющей точное решение. Рассмотрим собственные колебания стержня длиной l , которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0; \quad a^2 = \frac{\rho F}{EJ}. \quad (8.1.1)$$

Пусть имеют место два варианта закрепления концов стержня:

а) шарнирное опирание

$$\text{при } x = 0, l \quad \omega = 0; \quad \partial^2 \omega / \partial x^2 = 0; \quad (8.1.2)$$

б) жесткое защемление

$$\text{при } x = 0, l \quad \omega = 0; \quad \partial \omega / \partial x = 0. \quad (8.1.3)$$

Так как рассматриваются собственные колебания, то представим $\omega(x, t)$ в виде

$$\omega(x, t) = W(x) \exp(i\omega t).$$

Уравнение для $W(x)$ имеет вид

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - a^2 \omega^2 W = 0. \quad (8.1.4)$$

Рис. 8.1. Сравнение простого и динамического краевых эффектов

При граничных условиях (8.1.2) решение уравнения (8.1.4) не представляет труда, т.е.

$$W_m = \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (8.1.5)$$

$$\omega_m = \frac{1}{a} \left[\frac{m\pi}{l} \right]^2. \quad (8.1.6)$$

Легко убедиться в том, что при граничных условиях (8.1.3) уравнение (8.1.4) уже не допускает решений вида (8.1.5). Однако, если собственная функция является быстро осциллирующей по x (т.е. рассматривается достаточно высокая форма колебаний), то можно надеяться, что и в этом случае существует приближенное решение типа (8.1.5), справедливое для внутренней области, достаточно удаленной от границ. Краевым условиям такое решение, естественно, не удовлетворяет. Если удастся построить напряженное состояние типа динамического краевого эффекта, компенсирующее невязки на границе от основного решения и быстро затухающее при удалении во внутреннюю область, то асимптотические выражения для собственных функций и частот будут полностью определены.

Описываемая ситуация схематично изображена на рис. 8.1, где кривая 1 – основное состояние, кривая 2 – пограничный слой.

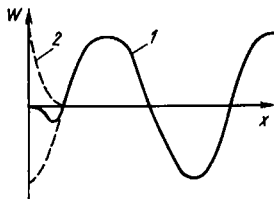
Запишем решение уравнения (8.1.4) для случая, когда граничные условия имеют вид (8.1.3), в виде

$$W_0 = \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x}, \quad (8.1.7)$$

где x_0 и λ_x – сдвиг по фазе и длина волны колебаний соответственно. Значения x_0 и λ_x будут определены ниже в процессе построения динамического краевого эффекта. Таким образом, последний позволит выделить из набора общих решений искомое.

Частота колебаний ω выражается через λ_x :

$$\omega = \frac{1}{a} \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2. \quad (8.1.8)$$



Для фактической реализации идеен краевого эффекта представим уравнение (8.1.4) следующим образом:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\omega \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\omega \right] W = 0. \quad (8.1.9)$$

Тогда его общее решение $W = W_1 + W_2$. При этом функции W_1 и W_2 являются, в свою очередь, общими решениями уравнений

$$\frac{d^2 W_1}{dx^2} + \alpha\omega W_1 = 0; \quad (8.1.10)$$

$$\frac{d^2 W_2}{dx^2} - \alpha\omega W_2 = 0. \quad (8.1.11)$$

При большой изменчивости собственной формы ($\alpha\omega \gg 1$) для функций W_1 и W_2 справедливы оценки

$$\frac{dW_1}{dx} \sim \alpha\omega W_1; \quad \frac{dW_2}{dx} \sim \alpha\omega W_2.$$

Но поведение этих функций существенно различно: W_1 является быстроосциллирующей функцией, а W_2 представляет собой сумму экспоненциальных функций с большими показателями. Следовательно, рассматриваемая ситуация принципиально отлична от случая сингулярной асимптотики, когда приходится разделять малые и большие действительные корни характеристического уравнения, т.е. соответствующие им медленно- и быстроизменяющиеся составляющие решения. Здесь идет речь о разделении состояний, одно из которых осциллирует с той же скоростью, с которой затухает крайовой эффект (т.е. характеристическое уравнение в этом случае имеет действительные и мнимые корни, сравнимые по величине).

Перейдем непосредственно к построению краевого эффекта, описываемого в данном случае уравнением (8.1.11). Учитывая выражение для собственной частоты (8.1.8), получим следующие соотношения для краевых эффектов, локализованных в окрестностях краев $x = 0$ и $x = l$ соответственно:

$$W_{кр(0)} = C_1 \exp(-\pi\lambda_x^{-1}x); \quad (8.1.12)$$

$$W_{кр}(l) = C_2 \exp[-\pi \lambda_x^{-1}(x - l)]. \quad (8.1.12)$$

Теперь, чтобы доопределить собственную форму и частоту, осталось найти величины x_0 , λ_x и произвольные постоянные интегрирования. Для этого можно использовать различные подходы. Например, метод сращиваемых асимптотических разложений (как это делает В.В. Болотин [26]). При этом соотношения для определения искомых величин получаются как условия склейки порождающего решения и двух крайних эффектов, идущих от двух противоположных границ области. Возможно также применение метода погранслоя. Используя последний подход, граничные условия (8.1.3) запишем в виде

$$\text{при } x = 0 \quad W_0 + W_{кр(0)} = 0; \quad \frac{d}{dx} (W_0 + W_{кр(0)}) = 0, \quad (8.1.13)$$

$$\text{при } x = l \quad W_0 + W_{кр(l)} = 0; \quad \frac{d}{dx} (W_0 + W_{кр(l)}) = 0, \quad (8.1.14)$$

Подставляя в (8.1.13), (8.1.14) выражения (8.1.7) и (8.1.12), получим

$$C_1 - \sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0; \quad C_1 - \cos \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0; \quad (8.1.15)$$

$$C_2 + \sin \left[\pi \frac{l - x_0}{\lambda_x} \right] = 0;$$

$$C_2 + \cos \left[\pi \frac{l - x_0}{\lambda_x} \right] = 0. \quad (8.1.16)$$

Система уравнений (8.1.15), (8.1.16) служит для определения величин λ_x , x_0 , C_1 , C_2 .

Так, для λ_x , x_0 имеем

$$\lambda_x = \frac{l}{m + 0,5}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$x_0 = \lambda_x(0,25 + k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда окончательно частота колебаний защемленного по концам стержня

$$\omega_m = \pi^2 \frac{(m + 0,5)^2}{al^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.1.17)$$

Как отмечается в работе [26], формула (8.1.17) даже для основной частоты колебаний дает погрешность менее 1%.

Отметим, что асимптотика В.В. Болотина является примером так называемых промежуточных асимптотик. Поясним кратко их суть. Для дифференциальных уравнений физики и механики (например, теории пластин и оболочек) известно немало точных решений. Однако, как правило, они не могут удовлетворить сколько-нибудь сложным граничным условиям. Поэтому польза от таких решений кажется иллюзорной. Однако дело в том, что эти частные решения представляют собой асимптотики широкого класса других решений, отвечающих другим начальным или граничным условиям. Так оказывается и при исследовании колебаний стержней (а также пластин и оболочек [26]): точное решение в виде тригонометрических функций является асимптотикой точного решения во внутренней области, а вблизи границы возникают динамические краевые эффекты.

8.2. СОБСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Пусть колебания стержня описываются уравнениями (7.8.3). Если концы стержня шарнирно закреплены, уравнения допускают разделение переменных.

Рассмотрим случай, когда стержень упруго защемлен:

$$\text{при } x = 0, l \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{c^*}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (8.2.1)$$

где $c^* = cl(EJ)^{-1}$, c — коэффициент упругого защемления. Представим порождающее решение в виде

$$W_0 = A \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x} \xi(t). \quad (8.2.2)$$

Подставляя выражение (8.2.2) в (7.8.3), получим уравнение для определения $\xi(t)$:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega^2 (1 + \gamma \xi^2) \xi = 0, \quad (8.2.3)$$

где $\omega^2 = EJ\rho^{-1} \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2$, $\gamma = 0,25(1 + \delta) \left[\frac{A}{r} \right]^2$;

$$\delta = \frac{\lambda_x}{2\pi l} \left[\sin \frac{2\pi(l - x_0)}{\lambda_x} + \sin \frac{2\pi x_0}{\lambda_x} \right];$$

$$r = \sqrt{JE^{-1}}.$$

Уравнение (8.2.3) при начальных условиях

$$\xi(0) = 1; \quad \frac{d\xi(0)}{dt} = 0 \quad (8.2.4)$$

имеет решение

$$\xi(t) = \operatorname{cn}(\sigma t, k), \quad \sigma = \omega \sqrt{1 + \gamma}, \quad (8.2.5)$$

где $\operatorname{cn}(\dots)$ – эллиптическая косинус-функция Якоби, период которой

$$T = 4K, \quad K = \int_0^{\frac{2\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-0,5} d\varphi - \text{полный эллиптический}$$

интеграл 1-го рода, модуль которого

$$k = \sqrt{0,5\gamma(1 + \gamma)^{-1}}.$$

Теперь основное решение задачи имеет вид

$$W_0 = A \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x} \operatorname{cn}(\sigma t, k). \quad (8.2.6)$$

Решение (8.2.6) удовлетворяет исходному уравнению (7.8.3), но не удовлетворяет граничным условиям (8.2.1). Для построения состояний, локализованных вблизи торцов, представим искомое решение в виде

$$\omega = W_0 + W_{кр}, \quad (8.2.7)$$

где $W_{кр}$ — динамический краевой эффект.

Подставляя выражение (8.2.7) в формулу (7.8.3), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} (W_0 + W_{кр}) - 0,5(r^2 l)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (W_0 + W_{кр}) \int_0^l \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial W_{кр}}{\partial x} \right]^2 dx + \rho(EJ)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (W_0 + W_{кр}) = 0. \quad (8.2.8)$$

Заметим, что в отличие от рассмотренного ранее линейного случая функции W_0 и $W_{кр}$ здесь оказываются связанными в силу нелинейности задачи. Причем изменяемость пограничья имеет тот же порядок, что и изменяемость основной части решения. Таким образом, обычные в теории оболочек и пластин методы построения краевых эффектов здесь неприменимы. В то же время основное состояние и искомые краевые эффекты сильно отличаются энергетически, так как первое существенно на всей длине стержня, а последние локализованы в малой окрестности концов.

Оценим порядок слагаемого, подчеркнутого в выражении (8.2.8), по отношению к $\pi/\lambda_x \gg 1$. Нетрудно показать, что

$$\int_0^l \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} \right]^2 dx - \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2;$$

$$\int_0^l \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_{кр}}{\partial x} dx - \frac{\pi}{\lambda_x};$$

$$\int_0^l \left[\frac{\partial W_{кр}}{\partial x} \right]^2 dx - 1. \quad (8.2.9)$$

Ограничившись в выражении (8.2.8) в первом приближении членом порядка $(\pi/\lambda_x)^2 \gg 1$, запишем (8.2.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} - 0,5(r^2 l)^{-1} \frac{\partial W_0}{\partial x^2} \int_0^l \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} \right]^2 dx + \rho(EJ)^{-1} \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} + \\ & + \frac{\partial^4 W_{кр}}{\partial x^4} - 0,5(r^2 l)^{-1} \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial x^2} \int_0^l \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} \right]^2 dx + \\ & + \rho(EJ)^{-1} \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

Подставляя в выражение (8.2.10) значение W_0 , приходим к уравнению для определения $W_{кр}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W_{кр}}{\partial x^4} - \alpha \operatorname{cn}(\alpha t, k) \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial x^2} - \rho(EJ)^{-1} \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial t^2} = 0; \\ & \alpha = \gamma \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Решающее значение имеет тот факт, что уравнение (8.2.11) — линейное, хотя и с переменным по времени коэффициентом.

В уравнении (8.2.11) пространственная и временная переменные точно не разделяются, поэтому для его решения применим метод Л.В. Канторовича [45], представив $W_{кр}$ в виде

$$W_{кр}(x, t) \equiv S(x) \operatorname{cn}(\alpha t, k). \quad (8.2.12)$$

Подставляя уравнение (8.2.12) в (8.2.11) и исключая время, получим для $S(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 S}{dx^4} - \alpha_1 \frac{d^2 S}{dx^2} - \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 \left[\left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 + \alpha_1 \right] S = 0, \quad (8.2.13)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \alpha \left[\frac{2k^2 - 1}{2k^2} + \frac{\sqrt{1 - k^2}}{2k \operatorname{arcsin} k} \right].$$

Из четырех корней характеристического уравнения для (8.2.13) два соответствуют порождающему решению и их следует отбросить, оставив лишь экспоненты:

$$S(x) = C_1 \exp \left[-\sqrt{\left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 + a_1} x \right] + \\ + C_2 \exp \left[-\sqrt{\left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 + a_1} x \right].$$

Из условия затухания краевого эффекта при $x \rightarrow \infty$ находим, что $C_2 = 0$.

Удовлетворяя граничным условиям при $x = 0$

$$W_0 + W_{\text{кр}} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{\text{кр}}}{\partial x^2} = \frac{c^*}{l} \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial W_{\text{кр}}}{\partial x} \right],$$

определяем C_1 :

$$C_1 = A \sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x}; \quad (8.2.14)$$

где $x_0 = \frac{\lambda_x}{\pi} \times$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda_x \left[\left(2 \left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 + a_1 \right) l (c^*)^{-1} + \sqrt{\left[\frac{\pi}{\lambda_x} \right]^2 + a_1} \right]}.$$

В соотношении (8.2.14) функция arctg принимается в смысле ее главного значения. Заметим, что при $c^* \rightarrow 0$ и $c^* \rightarrow \infty$ из (8.2.14) получаются соответствующие выражения для предельных случаев — концы стержня свободно оперты и жестко защемлены.

Аналогично можно построить динамический краевой эффект, локализованный у края $x = l$.

Рис. 8.2. Зависимость периода колебаний от амплитуды при различных жесткостях подкрепления края пластинки

Формы собственных нелинейных колебаний стержня можно разделить на группы по типам симметрии. Действительно, для симметричных относительно точки $x = 0,5l$ форм из условия

$$\frac{\partial W_0(0,5l; t)}{\partial x} = 0$$

находим

$$l - 2x_0 = (2s_1 + 1)\pi; \\ s_1 = 1, 2, \dots \quad (8.2.15)$$

Для антисимметричных форм из условия $W_0(0,5l; t) = 0$ следует

$$l - 2x_0 = 2s_2\pi; \quad s_2 = 1, 2, \dots \quad (8.2.16)$$

Уравнения (8.2.15), (8.2.16) легко сводятся к одному

$$l - 2x_0 = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.2.17)$$

в котором четные значения m соответствуют антисимметричным, а нечетные – симметричным относительно точки $x = 0,5l$ формам.

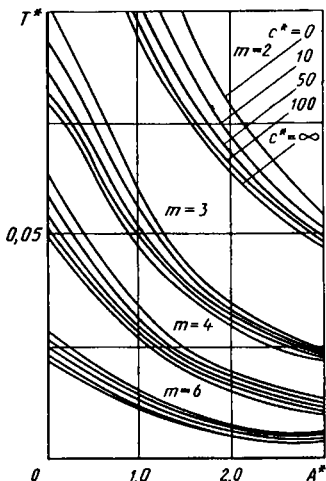
Таким образом, для определения постоянных λ_x и x_0 , имеющих смысл длины волны колебаний и сдвига по фазе соответственно, служат уравнения (8.2.14) и (8.2.17). Решение последней системы известными способами при помощи ЭВМ не представляет труда.

Период колебаний рассматриваемой системы

$$T = \left[\sqrt{EJ\rho^{-1}} \left(\frac{\pi}{\lambda_x} \right)^2 \frac{\sqrt{1+\gamma}}{4K} \right]^{-1}$$

На рис. 8.2 приведены зависимости величины $T^* = TT_{10}^{-1}$

$$(T_{10} = \left[\sqrt{EJ\rho^{-1}} \frac{\pi}{2l^2} \right]^{-1}) - \text{период основного тона линейных}$$



колебаний при шарнирном опирании) от амплитуды $A^* = Ah^{-1}$ для стержня прямоугольного поперечного сечения ($r = \frac{h}{2\sqrt{3}}$, h — высота

сечения) при различных значениях величины c^* , характеризующей степень упругости защемления опор.

8.3. СОБСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исходные соотношения имеют вид (7.8.3). Если пластина шарнирно оперта на краях $x = 0, a$ и $y = 0, b$, то можно положить

$$\omega_{mn}(x, y, t) = f_{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} \xi_{mn}(t). \quad (8.3.1)$$

Подставляем (8.3.1) в (7.8.3) и после исключения пространственных переменных получаем

$$\frac{d^2 \xi_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 (1 + \gamma \xi_{mn}^2) \xi_{mn} = 0, \quad (8.3.2)$$

где $\omega_{mn}^2 = \pi^4 D\rho^{-1} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2$; $\gamma = 1,5 \left[\frac{f_{mn}}{h} \right]^2$.

Задавая начальные условия (8.2.4), находим, что решение уравнения (8.3.2) имеет вид (8.2.5). Тогда окончательно

$$\omega_{mn}(x, y, t) = f_{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} \operatorname{cn}(\sigma t, k). \quad (8.3.3)$$

Таким образом, в случае шарнирного опирания точно разделяются пространственные и временная переменные, и определить нормальную форму нелинейных колебаний (одночастотный режим) [25] не представляет труда.

Пусть теперь пластина жестко защемлена по контуру:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, a \quad \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0; \\ \text{при } y = 0, b \quad \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Представим искомый прогиб следующим образом:

$$W_0(x, y, t) = f \operatorname{sink}_1(x - x_1) \operatorname{sink}_2(y - y_1) \xi(t). \quad (8.3.5)$$

Здесь k_1, x_1, y_1 — подлежащие определению постоянные величины.

Подставляя выражения (8.3.5) в (7.8.3) и исключая пространственные переменные, приходим к уравнению (8.3.2) для нахождения временной функции $\xi(t)$, коэффициенты которого

$$\omega^2 = D(\rho h)^{-1} (k_1^2 + k_2^2)^2,$$

$$\gamma = 1.5 \left[\frac{f}{h} \right]^2 \frac{k_1^2 (a_1 + A_1) (a_2 - A_2) + k_2^2 (a_1 - A_1) (a_2 + A_2)}{a_1 a_2 (k_1^2 + k_2^2)};$$

$$A_1 = 0.5 k_1^{-1} [\sin 2k_1(x - x_1)] \Big|_0^a;$$

$$A_2 = 0.5 k_2^{-1} [\sin 2k_2(y - y_1)] \Big|_0^b.$$

а решение имеет вид (8.2.5).

Таким образом, найдено порождающее решение задачи

$$W_0 = f \operatorname{sink}_1(x - x_1) \operatorname{sink}_2(y - y_1) \operatorname{cn}(\omega t, k). \quad (8.3.6)$$

справедливое во "внутренней", достаточно удаленной от границы, части пластины.

Перейдем к построению динамических краевых эффектов, локализованных в окрестности контура пластины, в процессе чего доопределим асимптотическое выражение для собственной формы (8.3.5).

Подставив ω в виде (8.2.7) в исходные соотношения, получим уравнения

$$D \nabla^4 (W_0 + W_{\text{кр}}) - N \nabla^2 (W_0 + W_{\text{кр}}) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (W_0 + W_{\text{кр}}) = 0; \quad (8.3.7)$$

$$N h^2 a b = 6D \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial (W_0 + W_{\text{кр}})}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (W_0 + W_{\text{кр}})}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy.$$

(8.3.8)

Используем далее энергетические соображения, выдвинутые выше при решении задачи о нелинейных колебаниях стержня. Оценим порядок величин, стоящих в правой части формулы (8.3.8), по отношению к

$k_1 \sim k_2 \gg 1$. При этом оказывается, что

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} \right]^2 dx dy &\sim k_1^2; & \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial W_0}{\partial y} \right]^2 dx dy &\sim k_2^2; \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_{кр}}{\partial x} dx dy &\sim k_1; & \int_0^a \int_0^b \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial W_{кр}}{\partial y} dx dy &\sim k_2; \\ \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial W_{кр}}{\partial x} \right]^2 dx dy &\sim k_1; & \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial W_{кр}}{\partial y} \right]^2 dx dy &\sim k_2. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Из полученных оценок следует, что в выражении (8.3.8) в первом приближении можно ограничиться слагаемыми порядка $k_1^2 \sim k_2^2 \gg 1$, зависящими только от основного состояния. Тогда система уравнений (8.3.7), (8.3.8) примет вид

$$D \nabla^4 W_{кр} - N_0 \nabla^2 W_{кр} + \rho h \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial t^2} = - \nabla^4 W_0 + N_0 \nabla^2 W_0 - \rho h \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2},$$

$$N_0 h^2 ab = 6D \int_0^a \int_0^b \left[\left[\frac{\partial W_0}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial W_0}{\partial y} \right]^2 \right] dx dy.$$

Подставляя в эти уравнения значение W_0 , окончательно имеем

$$\nabla^4 W_{кр} - H \sin^2(\alpha t, k) \nabla^2 W_{кр} - \rho h D^{-1} \frac{\partial^2 W_{кр}}{\partial t^2} = 0;$$

$$H = \gamma(k_1^2 + k_2^2). \quad (8.3.10)$$

Линейное уравнение в частных производных с переменным по времени коэффициентом (8.3.10) является исходным для последовательного построения четырех динамических краевых эффектов у краев пластин $x = 0$, a и $y = 0$, b , причем взаимным влиянием этих состояний можно пренебречь.

Рассмотрим построение краевого эффекта, локализованного в окрестности края $x = 0$ (в остальных случаях это делается аналогично). Представив $W_{кр}$ в виде

$$W_{кр}(x, y, t) = \Phi(x, t) \operatorname{sink}_2(y - y_1),$$

получим следующее уравнение для Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - [H \operatorname{cn}^2(\sigma t, k) + 2k_2^2] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ + k_2^2 [H \operatorname{cn}^2(\sigma t, k) + k_2^2] \Phi + \rho h D^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Используем далее метод Л.В. Канторовича [45], приняв для $\Phi(x, t)$ выражение

$$\Phi(x, t) \equiv \varphi(x) \operatorname{cn}(\sigma t, k).$$

Из (8.3.11) получим такое выражение для $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - (H_1 + 2k_2^2) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + [k_2^2 (H_1 + k_2^2) - \\ - (k_1^2 + k_2^2)(H_1 + k_1^2 + k_2^2)] \varphi = 0. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

Здесь $H_1 = H \left[\frac{2k^2 - 1}{2k^2} + \frac{\sqrt{k^{-2} - 1}}{2 \operatorname{arcsin} k} \right]$.

Уравнение (8.3.12) можно представить следующим образом:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k_1^2 \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} - k_1^2 - 2k_2^2 - H_1 \right] \varphi = 0.$$

Отбросив первый сомножитель, описывающий основное состояние получим для определения краевого эффекта уравнение, решение которого будет

$$\varphi(x) = c_1 \exp\left[-\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 + H_1} x\right] + c_2 \exp\left[\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 + H_1} x\right].$$

Окончательно, у края $x = 0$

$$W_{\text{кр}(1)} = \left[c_1 \exp\left[-\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 + H_1} x\right] + c_2 \exp\left[\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 + H_1} x\right] \right] \operatorname{sink}_2(y - y_1) \operatorname{cn}(\sigma t, k). \quad (8.3.13)$$

Аналогично строится краевой эффект у края $y = 0$:

$$W_{\text{кр}(2)} = \left[c_3 \exp\left[-\sqrt{k_2^2 + 2k_1^2 + H_1} y\right] + c_4 \exp\left[\sqrt{k_2^2 + 2k_1^2 + H_1} y\right] \right] \operatorname{sink}_1(x - x_1) \operatorname{cn}(\sigma t, k). \quad (8.3.14)$$

Запишем теперь граничные условия (8.3.4) на рассматриваемых сторонах с учетом представления (8.2.7):

$$\text{при } x = 0 \quad W_0 + W_{\text{кр}(1)} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} (W_0 + W_{\text{кр}(1)}) = 0; \quad (8.3.15)$$

$$\text{при } y = 0 \quad W_0 + W_{\text{кр}(2)} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} (W_0 + W_{\text{кр}(2)}) = 0; \quad (8.3.16)$$

Присоединим к последним условия затухания краевых эффектов:

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad W_{\text{кр}(1)} \rightarrow 0;$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad W_{\text{кр}(2)} \rightarrow 0. \quad (8.3.17)$$

Удовлетворяя соотношениям (8.3.15), (8.3.16), получим

$$x_1 = k_1^{-1} \operatorname{arctg}[k_1(k_1^2 + 2k_2^2 + H_1)^{-0.5}]; \quad (8.3.18)$$

$$c_1 = fk_1[2(k_1^2 + k_2^2) + H_1]^{-0,5}; \quad c_2 = 0;$$

$$y_1 = k_2^{-1} \operatorname{arctg}[k_2(k_2^2 + 2k_1^2 + H_1)^{-0,5}]; \quad (8.3.19)$$

$$c_3 = fk_2[2(k_1^2 + k_2^2) + H_1]^{-0,5}; \quad c_4 = 0;$$

В формулах (8.3.18), (8.3.19) функция $\operatorname{arctg}(\dots)$ понимается в смысле ее главного значения.

Разделим формы колебаний пластины на две группы по типам симметрии относительно центральных прямых $x = 0,5a$, $y = 0,5b$.

Для симметричной в обоих направлениях формы имеют место равенства

$$\frac{\partial W_0(0,5a; y; t)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial W_0(x; 0,5b; t)}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует

$$k_1(a - 2x_1) = (2s_1 + 1)\pi;$$

$$k_2(b - 2y_1) = (2s_2 + 1)\pi; \quad s_1, s_2 = 1, 2, \dots \quad (8.3.20)$$

Аналогично для антисимметричной в обоих направлениях формы

$$W_0(0,5a; y; t) = 0; \quad W_0(x; 0,5b; t) = 0.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$k_1(a - 2x_1) = 2s_3\pi; \quad (8.3.21)$$

$$k_2(b - 2y_1) = 2s_4\pi; \quad s_3, s_4 = 1, 2, \dots$$

Уравнения (8.3.20), (8.3.21) легко сводятся к двум:

$$k_1(a - 2x_1) = m\pi; \quad (8.3.22)$$

$$k_2(b - 2y_1) = n\pi; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

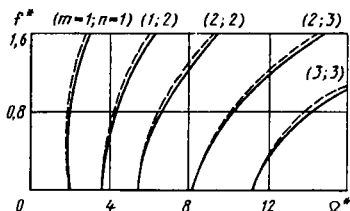


Рис. 8.3. Сравнение амплитудно-частотных характеристик для прямоугольной пластины, построенных различными методами

Таким образом, для определения величин k_1 , k_2 , x_1 и y_1 получим четыре трансцендентных уравнения (8.3.18), (8.3.19) и (8.3.22), причем при различном выборе значений m и n можно получить все возможные формы колебаний. Эта система при любой комбинации номеров форм разрешима при помощи ЭВМ. При этом может быть достигнута любая наперед заданная степень точности результата.

На рис. 8.3 сплюснутыми линиями изображены зависимости величины $\Omega^* = \Omega \Omega_0^{-1}$, представляющей собой отношение частоты нелинейных колебаний заземленной по контуру квадратной пластины

$$\Omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{(k_1^2 + k_2^2) \sqrt{1 + \gamma}}{4k}$$

к основной частоте малых колебаний этой пластины при свободном опирании по контуру

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi}{a_1^2}$$

Штриховыми линиями обозначены соответствующие кривые, приведенные в работе [8], при этом имеет место хорошее совпадение указанных результатов. Отметим, что роль геометрической нелинейности заметно возрастает с ростом номера формы колебаний.

8.4. РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

Асимптотический метод динамического краевого эффекта, предназначенный, вообще говоря, для поиска высоких собственных частот и форм, при кинематических граничных условиях дает хорошие результаты и для низших форм колебаний. Для статических условий на контуре

точность определения низших собственных частот падает. Попытки применения метода к задачам устойчивости, в которых важно именно первое собственное значение, показали, что погрешность определения критической нагрузки велика.

Одним из наиболее перспективных направлений повышения эффективности метода динамического краевого эффекта является сочетание его с энергетическими подходами. Такое соединение позволяет существенно повысить точность результатов и, как следствие, расширить область применимости метода [7].

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях квадратной ($0 \leq x, y \leq a$) пластины, свободной по контуру. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\omega_{xx} + \nu\omega_{yy}|_{x=0,a} = \omega_{xxx} - 2(1-\nu)\omega_{xyy}|_{x=0,a} = 0; \quad (8.4.1)$$

$$\omega_{yy} + \nu\omega_{xx}|_{y=0,a} = \omega_{yyy} - 2(1-\nu)\omega_{yxx}|_{y=0,a} = 0.$$

Для нахождения собственной частоты воспользуемся энергетическим методом Рэлея, основанным на принципе возможных перемещений. Согласно последнему, работа внутренних и внешних сил, действующих на пластину, на возможных перемещениях равна нулю, т.е.

$$U + V + R = 0. \quad (8.4.2)$$

Обозначим возможное перемещение пластины – ее прогиб – через $\omega(x, y, t)$. Тогда U – работа внутренних сил или потенциальная энергия пластины,

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^a [\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + 2\nu\omega_{xx}\omega_{yy} + 2(1-\nu)\omega_{xy}^2] dx dy, \quad (8.4.3)$$

Работа сил инерции – кинетическая энергия

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \rho h \omega_t^2 dx dy. \quad (8.4.4)$$

Работа внешних сил R в данном случае равна нулю. Представив прогиб в виде $\omega(x, y, t) = \omega(x, y)\exp(-i\omega t)$ из (8.4.2), получим формулу для безразмерной частоты

$$\lambda = \omega a^2 \left[\frac{\rho h}{D} \right]^{1/2} = a^2 \left\{ \int_0^a \int_0^a [\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + 2\nu \omega_{xx} \omega_{yy} + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \omega_{xy}^2] dx dy \right\}^{1/2} \left[\int_0^a \int_0^a \omega^2 dx dy \right]^{-1/2}.$$

Выражение для функции прогиба, полученное при помощи метода динамического краевого эффекта, имеет вид

$$f(x, y) = s_1(x) \sin(\beta_2 y + l_2) + s_2(y) \sin(\beta_1 x + l_1), \quad (8.4.5)$$

где $s_1(x) = \sin(\beta_1 x + l_1) + C_{11} \exp(a_1 x) + C_{12} \exp(-a_1 x)$;

$$s_2(y) = \sin(\beta_2 y + l_2) + C_{21} \exp(a_2 y) + C_{22} \exp(-a_2 y).$$

С учетом граничных условий для определения волновых чисел получим систему трансцендентных уравнений

$$\beta_i a = 2l_i + m_i \pi; \quad (i = 1, 2; m_i = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.4.6)$$

где $l_i = \arctg\{(\beta_i/a_i)[\beta_i^2 + (2 - \nu)\beta_k^2]/(\beta_i^2 + \nu\beta_k^2)^2\}$;

$$a_i = (\beta_i^2 + 2\beta_k^2)^{1/2}, \quad (i = 1, 2; k = 1, 2; i \neq k).$$

Постоянные C_{ij} в выражении (8.4.6) находятся по формулам

$$C_{i1} = (a_i^2 \sin l_i) / (a_i^2 - \nu \beta_k^2);$$

$$C_{i2} = (a_i^2 \sin(\beta_i a + l_i)) / (a_i^2 - \nu \beta_k^2)$$

$$(i = 1, 2; k = 1, 2; i \neq k). \quad (8.4.7)$$

Примем выражение для функции, аппроксимирующей форму прогиба $\omega(x, y)$, в виде

$$\omega(x, y) = s_1(x) s_2(y). \quad (8.4.8)$$

Тогда из соотношений (8.4.6) следует формула для частоты λ :

$$\lambda = a^2 \{ [K_1 + K_2 - 2\nu K_3 + 2(1 - \nu)K_4] / K_0 \}^{1/2},$$

где

$$K_0 = (\bar{A}_1 \bar{\xi})(\bar{A}_2 \bar{\xi}); \quad K_1 = (\bar{A}_1 \bar{\eta}_1)(\bar{A}_2 \bar{\eta}_2);$$

$$K_2 = (\bar{A}_1 \bar{\eta}_2)(\bar{A}_2 \bar{\eta}_1); \quad K_3 = (\bar{A}_1 \bar{\kappa}_1)(\bar{A}_2 \bar{\kappa}_2); \quad K_4 = (\bar{B}_1 \bar{\theta}_1)(\bar{B}_2 \bar{\theta}_2).$$

Компоненты векторов имеют вид

$$\bar{\xi} = \{1; 2; 1\}; \quad \bar{\eta}_i = \{\beta_i^4; -2a_i^2 \beta_i^2; a_i^4\};$$

$$\bar{\kappa}_i = \{-\beta_i^2; a_i^2 - \beta_i^2; a_i^2\}; \quad \bar{\theta}_i = \{\beta_i^2; 2a_i \beta_i; a_i^2\};$$

$$\bar{A}_i = \{A_{1i}; A_{2i}; A_{3i}\}; \quad \bar{B}_i = \{A_{4i}; A_{5i}; A_{6i}\} \quad (i = 1, 2),$$

$$\text{где } A_{1i} = \{z/2 - [\sin 2(\beta_i z + l_i)] / (4\beta_i)\} \Big|_0^a;$$

$$A_{2i} = \{(a_i^2 + \beta_i^2)^{-1} [a_i F_{4i}(z) F_{1i}(z) - \beta_i F_{3i}(z) F_{2i}(z)]\} \Big|_0^a;$$

$$A_{3i} = [F_{5i}(z) / (2a_i) + 2C_{1i} C_{2i} z] \Big|_0^a;$$

$$A_{4i} = \{z/2 + [\sin 2(\beta_i z + l_i)] / (4\beta_i)\} \Big|_0^a;$$

$$A_{5i} = \{(a_i^2 + \beta_i^2)^{-1} [a_i F_{3i}(z) F_{2i}(z) + \beta_i F_{4i}(z) F_{1i}(z)]\} \Big|_0^a;$$

$$A_{6i} = [F_{5i}(z) / (2a_i) - 2C_{1i} C_{2i} z] \Big|_0^a;$$

$$F_{1i}(z) = \sin(\beta_i z + l_i);$$

$$F_{2i}(z) = \cos(\beta_i z + l_i);$$

$$F_{3i}(z) = C_{i1} \exp(a_i z) + C_{i2} \exp(-a_i z);$$

$$F_{4i}(z) = C_{i1} \exp(a_i z) - C_{i2} \exp(-a_i z);$$

$$F_{5i}(z) = C_{i1}^2 \exp(2a_i z) - C_{i2}^2 \exp(-2a_i z) \quad (i = 1, 2).$$

Номер формы колебаний	λ , МРР [50]	λ , МРБ	Расхожде- ние с [50]. %	λ , АМБ	Расхожде- ние с [50]. %
1	14,10	14,48	2,7	12,41	13,6
3	35,96	36,68	2,0	34,60	3,9
5	65,24	66,33	1,7	63,44	2,8
6	74,45	75,28	1,1	73,59	2,5
7	109,30	109,10	0,2	106,30	2,8

Сравнение результатов вычислений безразмерной частоты λ для квадратной свободной по контуру пластины при $\nu = 0,225$ методами Рэлея-Болотина (МРБ), изложенными выше, Рэлея-Ритца (МРР) и традиционным методом динамического краевого эффекта приведены в табл. 8.1. Формы колебаний по цилиндрической поверхности не рассматривались, поскольку в этом случае может быть получено точное решение. Номера, соответствующие указанным формам колебаний, в таблице пропущены.

Результаты, полученные МРР с учетом высших приближений, обладают высокой степенью точности в области низших собственных частот. С увеличением номера формы точность падает. Сопоставление данных, полученных различными методами, показывает, что погрешность определения первой собственной частоты МРБ (2,7 %) значительно ниже, чем при вычислении ее традиционным методом динамического краевого эффекта (13,6 %). С увеличением номера формы оба решения асимптотически приближаются к точному, причем в случае применения МРБ — сверху, а в случае применения метода динамического краевого эффекта — по-видимому, снизу (строгое доказательство этого утверждения пока отсутствует).

Рассмотрим задачу устойчивости квадратной защемленной по краям изотропной пластины под действием равномерно распределенных сжимающих усилий N , приложенных к контуру в срединной плоскости.

Граничные условия имеют вид

$$\omega(0, y) = \omega_x(a, y) = \omega(x, 0) = \omega_y(x, a) = 0. \quad (8.4.9)$$

Для нахождения критического сжимающего усилия воспользуемся, как и ранее, энергетическим методом. В данном случае кинетическая энергия пластины равна нулю, работа активных сил

$$R = -\frac{N}{2} \int_0^a \int_0^a (\omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy. \quad (8.4.10)$$

Из уравнения (8.4.2) получим формулу для безразмерного критического усилия

$$P = \left[\frac{a}{\pi} \right]^2 \int_0^a \int_0^a (\omega_{xx}^2 + 2\omega_{xx}\omega_{yy} + \omega_{yy}^2) dx dy \left[\int_0^a \int_0^a (\omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy \right]^{-1}, \quad (8.4.11)$$

где $P = Na^2/(D\pi^2)$.

Действуя аналогично предыдущему случаю, получим

$$P = 2 \left[\frac{a}{\pi} \right]^2 (K_1 + K_3)/(K_4 + K_5), \quad (8.4.12)$$

где K_1, K_3 определяются по формулам, приведенным на с. 275;

$$K_4 = (\bar{B}_1 \bar{\theta}_1)(\bar{A}_2 \bar{\xi}); \quad K_5 = (\bar{B}_2 \bar{\theta}_2)(\bar{A}_1 \bar{\xi}).$$

В силу симметрии задачи система для определения волновых чисел вырождается в одно трансцендентное уравнение, которое согласно методу Болотина с учетом взаимовлияния краевых эффектов у противоположных границ имеет вид

$$\beta a = 2 \operatorname{arctg}[\operatorname{th}(\beta a/2)] + \pi. \quad (8.4.13)$$

Постоянные l_i, C_{ij} определяются по формулам

$$l_i = (\pi - \beta a)/2, \quad C_{i1} = C_{i2} = -\cos(\beta a/2)/\operatorname{ch}(\beta a/2) \\ (i = 1, 2).$$

Сопоставление результатов расчета критического сжимающего усилия P , найденного асимптотическими методами, с данными, полученными МРР с учетом высших приближений ($P = 5,31$) [89], показывает, что погрешность МРБ (0,8 %) значительно ниже, чем у АМБ (18 %). Как и в предыдущем примере, значение, определенное на основе МРБ, — это верхняя оценка критического усилия, в то время как АМБ дает, по-видимому, нижнюю его границу.

ГЛАВА 9 МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЯ ВИДА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ИСХОДНОЙ ОБЛАСТИ

Как известно, при некоторых граничных условиях (например, шарнирном опирании) можно довольно просто построить решение. Другие условия (зашемление, свободный край) существенно осложняют исследования. Поэтому был предложен метод возмущения вида граничных условий [46]. Суть его состоит в следующем. В граничные условия вводится параметр ϵ таким образом, чтобы при значении $\epsilon = 0$ получалась краевая задача, допускающая простое решение, а при $\epsilon = 1$ - исходная краевая задача. Далее применяется метод возмущений по ϵ и в полученном решении принимается $\epsilon = 1$.

9.1. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЯ ВИДА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим для примера колебания зашемленной балки ($-0,5 \leq x \leq 0,5$) и попробуем построить решения, отправляясь от случая шарнирного опирания.

Исходное уравнение и краевые условия таковы:

$$\omega^{IV} - \lambda\omega = 0; \quad (9.1.1)$$

$$\omega = 0|_{x=\pm 0,5}; \quad \omega' = 0|_{x=\pm 0,5}. \quad (9.1.2)$$

Введем в граничные условия (9.1.2) параметр ϵ следующим образом:

$$\omega = 0|_{x=\pm 0,5}; \quad (1 - \epsilon)\omega'' + \epsilon\omega' = 0|_{x=\pm 0,5}. \quad (9.1.3)$$

При значении $\epsilon = 0$ имеем шарнирное опирание, при $\epsilon = 1$ - зашемление. Промежуточные значения ϵ определяют случаи упругой заделки торцов жесткостью $c = \epsilon/(1 - \epsilon)$.

Представим теперь перемещение ω и собственное значение λ в виде рядов по параметру:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \dots; \quad (9.1.4)$$

$$\lambda = \lambda + \lambda_1\epsilon + \lambda_2\epsilon^2 + \dots. \quad (9.1.5)$$

Подставляя разложение (9.1.4), (9.1.5) в уравнение (9.1.1) и край-
вые условия (9.1.3), после расщепления по ϵ получаем

$$\text{для } \epsilon^0 \quad \omega_0^{IV} - \lambda_0 \omega_0 = 0;$$

$$\omega_0 = 0; \quad \omega_0' = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5, \quad (9.1.6)$$

$$\text{для } \epsilon^i \quad \omega_i^{IV} - \lambda_0 \omega_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j \omega_{i-j};$$

$$\omega_i = 0; \quad \omega_i' = \mp \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j' \quad \text{при } x = \pm 0,5, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9.1.7)$$

Решение в нулевом приближении можно записать так:

$$\lambda_0 = \pi^4 n^4; \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\omega_0 = c \begin{cases} \cos \pi n x \\ \sin \pi n x \end{cases}; \quad \begin{cases} n = 1, 3, 5 \dots \\ n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}. \quad (9.1.8)$$

Теперь в первом приближении имеем следующую краевую задачу:

$$\omega_1^{IV} - \pi^4 n^4 \omega_1 = \lambda_1 c \begin{cases} \cos \pi n x \\ \sin \pi n x \end{cases}; \quad \begin{cases} n = 1, 3, 5 \dots \\ n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}; \quad (9.1.9)$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_1' = \mp c \begin{cases} -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \frac{n}{2} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases} \pi n \quad \text{при } x = \pm 0,5. \quad (9.1.10)$$

Краевая задача первого приближения (9.1.9), (9.1.10) описы-
вается неоднородным дифференциальным уравнением с неоднородными гра-
ничными условиями. В общем случае оно не разрешается, т.е. мы не
можем удовлетворить всем граничным условиям при произвольном зна-
чении λ_1 . Такую несогласованность удастся устранить наложением не-
которых условий, называемых условиями разрешимости [61]. Ясно, что

вопрос о формулировке условий разрешимости сводится в конце концов к вопросу об определении параметра λ_1 неоднородного уравнения

(9.1.9), при котором правая часть этого уравнения была бы в каком-то смысле согласована с неоднородными граничными условиями (9.1.10). Здесь возможны два подхода: первый — получить дополнительное условие разрешимости согласно методике, изложенной в работе [62]; второй — определить λ_1 непосредственно из краевой задачи.

Рассмотрим второй случай. Общее решение уравнения (9.1.9)

$$\omega_1^{\text{общ}} = c_1 \begin{Bmatrix} \text{ch}\pi n x \\ \text{sh}\pi n x \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} \cos\pi n x \\ \sin\pi n x \end{Bmatrix}. \quad (9.1.11)$$

Частное решение уравнения (9.1.9) имеет вид

$$\omega_1^* = \frac{\lambda_1}{4\pi^3 n^3} \begin{Bmatrix} -\sin\pi n x \\ \cos\pi n x \end{Bmatrix}; \quad \begin{cases} n = 1, 3, 5 \dots \\ n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}. \quad (9.1.12)$$

Собственная форма ω_1 представляется суммой

$$\omega_1 = \omega_1^{\text{общ}} + \omega_1^*. \quad (9.1.13)$$

Удовлетворив граничным условиям (9.1.10), получим значение параметров c_1 и λ_1 :

$$c_1 = \frac{c}{2\pi n} \begin{Bmatrix} \frac{(-1)^{n-1/2}}{\text{ch}(\pi n/2)} \\ -\frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}\pi n/2} \end{Bmatrix}; \quad \lambda_1 = 4\pi^2 n^2.$$

Из краевых условий (9.1.10) постоянная c_2 не определяется.

может быть отброшена, поскольку функции $\begin{Bmatrix} \cos\pi n x \\ \sin\pi n x \end{Bmatrix}$ учтены в нулевом приближении.

Окончательно первая поправка ω_1 к собственной форме ω может быть записана следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{c}{\pi n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{n-1/2}}{2\text{ch}(\pi n/2)} \text{ch}\pi n x - x \text{sh}\pi n x \\ - \frac{(-1)^{n/2}}{2\text{sh}(\pi n/2)} \text{sin}\pi n x + x \text{ch}\pi n x \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} n = 1, 3, 5 \dots \\ n = 2, 4, 6 \dots \end{array} \right\}. \quad (9.1.14)$$

Аналогично определяются λ_2 и ω_2 . Отрезок ряда для собственного числа, составленный по трем первым приближениям, имеет вид

$$\lambda = \pi^4 n^4 + 4\pi^2 n^2 \epsilon + 4\pi n \left[\pi n - \frac{1}{2} \text{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{2\pi n} \right] \epsilon^2. \quad (9.1.15)$$

Аналогичный отрезок ряда для собственной формы

$$\begin{aligned} \omega = c \left\{ \begin{array}{l} \cos\pi n x \\ \sin\pi n x \end{array} \right\} + \frac{c}{\pi n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2\text{ch}(\pi n/2)} \text{ch}\pi n x - x \text{sin}\pi n x \\ - \frac{(-1)^{n/2}}{2\text{sh}(\pi n/2)} \text{sin}\pi n x + x \cos\pi n x \end{array} \right\} \epsilon + \\ + \left\{ \frac{c(-1)^{n+1}}{2\pi^2 n^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\text{ch}(\pi n/2)} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}(\pi n/2)} \end{array} \right\} \left[\left[\pi n - \text{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{\pi n} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{ch}\pi n x \\ \text{sh}\pi n x \end{array} \right\} + x \left\{ \begin{array}{l} \text{sh}\pi n x \\ \text{ch}\pi n x \end{array} \right\} \right] - (-1)^{n+1} \frac{c}{\pi^2 n^2} \left[\pi n - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \text{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi n} \right] x \left\{ \begin{array}{l} \text{sin}\pi n x \\ \cos\pi n x \end{array} \right\} - \right. \end{array} \quad (9.1.16)$$

$$-\frac{c}{\pi^2 n^2} x \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n x \\ \sin \pi n x \end{array} \right\} \epsilon^2. \quad (9.1.16)$$

В рамках излагаемого метода существует возможность асимптотического упрощения трансцендентного уравнения для определения собственных чисел и получения приближенного аналитического решения.

Покажем эту возможность на примере прямосимметричных форм. Решение уравнения примем в виде

$$\omega = c_1 \cos \bar{\lambda} x + c_2 \operatorname{ch} \bar{\lambda} x; \quad \bar{\lambda} = \sqrt[4]{\lambda}. \quad (9.1.17)$$

отбросив кососимметричные составляющие.

Удовлетворение возмущенным граничным условиям (9.1.3) приводит к трансцендентному уравнению относительно λ :

$$2(1 - \epsilon) \bar{\lambda} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}}{2} \cos \frac{\bar{\lambda}}{2} + \epsilon \left[\operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}}{2} \sin \frac{\bar{\lambda}}{2} + \cos \frac{\bar{\lambda}}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}}{2} \right] = 0. \quad (9.1.18)$$

Применяем к нему метод возмущения, для чего представим $\bar{\lambda}$ в виде ряда по ϵ :

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\lambda}_i \epsilon^i. \quad (9.1.19)$$

Подставляя данный ряд (9.1.19) в уравнение (9.1.18) и расщепляя по степеням ϵ , получаем рекуррентную последовательность трансцендентных уравнений:

$$\text{для } \epsilon^0 \quad 2\bar{\lambda}_0 \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^1 \quad & 2 \left[\bar{\lambda}_1 \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_0}{2} \left(\cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right) \right] - 2 \bar{\lambda}_0 \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \\ & + \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \sin \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } \epsilon^2 \quad & 2 \left\{ \bar{\lambda}_2 \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \frac{\bar{\lambda}_1^2}{2} \left[\cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right] + \lambda_0 \left[\frac{1}{2} \left[\bar{\lambda}_2 \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{\lambda}_1^2}{4} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right] \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} - \frac{\bar{\lambda}_1^2}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \sin \frac{\bar{\lambda}_0}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[\bar{\lambda}_2 \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \frac{\bar{\lambda}_1^2}{4} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right] \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right\} - \\ & - 2 \left[\bar{\lambda}_1 \cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_0}{2} \left(\cos \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\lambda}_0}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения легко решаются, после чего имеем

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \approx \pi n + \frac{1}{\pi n} \epsilon + \frac{1}{\pi n} \left[1 - \frac{1}{2\pi n} \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi n} \right] \epsilon^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

Очевидно, что данный отрезок ряда является корнем четвертой степени из отрезка ряда для λ (9.1.15).

9.2. УЛУЧШЕННЫЙ МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЯ ВИДА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Понятно, что формула (9.1.15) тем более точна, чем более высокая форма рассматривается. Поэтому в качестве критерия применимости метода возмущения вида граничных условий можно принять точность расчета первого собственного числа, поскольку граничные условия оказывают на него наибольшее влияние.

Численное решение трансцендентного уравнения (9.1.18) при $\epsilon = 1$ дает значение первого собственного числа краевой задачи $\lambda = (1,5056\pi)^4$. Отрезок ряда возмущений (9.1.15) при $n = 1$, $\epsilon = 1$ дает нам значение $\lambda = (1,1542\pi)^4$. Погрешность составляет 23,33 %.

Для улучшения результатов, полученных при помощи метода возмущения вида граничных условий, можно использовать АП, описанную в [5, 6].

Так, перестраивая отрезок ряда (9.1.15), получаем

$$\lambda_{[1, 1]}(\epsilon) = \frac{a_0 + a_1 \epsilon}{b_0 + b_1 \epsilon}, \quad (9.2.1)$$

где $a_0 = \lambda_0$; $a_1 = \lambda_1 - b_1 \lambda_0$; $b_0 = 1$; $b_1 = -\lambda_2 \lambda_1^{-1}$.

Теперь для собственного числа по формуле (9.2.1) при $n = 1$, $\epsilon = 1$ имеем $\lambda_{[1, 1]}(1) = (1,5139\pi)^4$ (погрешность 0,58 %).

Зависимость первого собственного числа задачи (9.1.1), (9.1.3) от различных значений ϵ ($0 < \epsilon < 1$) представлена на рис. 9.1. Видно, что результаты определения первого собственного числа задачи (9.1.1), (9.1.3), полученные при помощи метода АП (9.2.1), практически совпадают с точным решением для всех значений параметра ϵ , в то время как отрезок ряда возмущений даст удовлетворительные результаты только до $\epsilon = 0,4$.

Изменение погрешности δ в определении первых пятнадцати собственных чисел задачи (9.1.1), (9.1.3) представлено на рис. 9.2. Здесь

$$\delta = [(\lambda_{\text{пр}} - \lambda_{\text{т}}) / \lambda_{\text{т}}] \cdot 100 \%,$$

где $\lambda_{\text{т}}$ — точное значение частоты, $\lambda_{\text{пр}}$ — приближенное значение. Для низших собственных чисел расхождения между отрезком ряда и формулой, полученной по методу АП, достаточно велики, поэтому при опре-

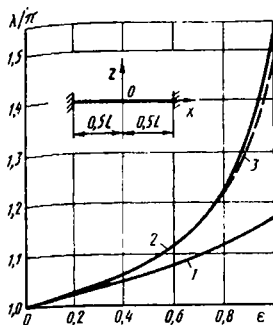


Рис. 9.1. Зависимость первого собственного числа задач (9.1.1), (9.1.3) от параметра ϵ :

1 - отрезок ряда (9.1.15); 2 - метод аппроксимации Паде (9.2.1); 3 - решение трансцендентного уравнения (9.1.18)

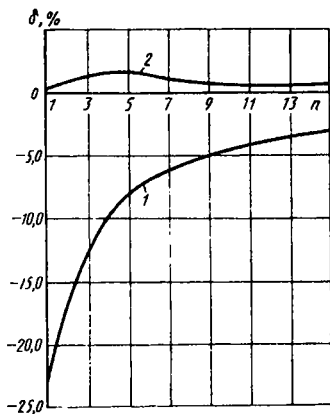


Рис. 9.2. Погрешность в определении первых пятнадцати собственных чисел задачи (9.1.1), (9.1.3):

1 - отрезок ряда (9.1.15) при $\epsilon = 1$; 2 - метод аппроксимации Паде (9.2.1) при $\epsilon = 1$

делении низших собственных чисел следует ориентироваться на результаты, полученные при помощи АП (9.2.1). Для высших собственных чисел ($n > 10$) погрешность в определении собственного числа отрезком ряда составляет менее 5 % и с ростом волнового числа уменьшается. Для высших частот удается получить оценки сверху (АП) и снизу (отрезок ряда). Эти оценки будут тем эффективнее, чем выше номер волнового числа.

Теперь обратимся к более сложному случаю - колебанию защемленной по контуру пластины, исходная задача для которой формулируется следующим образом:

$$\nabla^4 w - \lambda w = 0; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad (9.2.2)$$

$$\omega = 0; \quad \omega''_{xx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5k, \quad (9.2.3)$$

$$\omega = 0; \quad \omega''_{yy} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5, \quad (9.2.4)$$

$$(-0,5k < x < 0,5k; \quad -0,5 < y < 0,5).$$

Преобразуем граничные условия, введя в них параметр ϵ , тогда

$$\omega = 0; \quad (1 - \epsilon)\omega''_{xx} \pm \epsilon k \omega'_x = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5k, \quad (9.2.5)$$

$$\omega = 0; \quad (1 - \epsilon)\omega''_{yy} \pm \epsilon \omega'_y = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5. \quad (9.2.6)$$

Применим к краевой задаче (9.2.2), (9.2.5), (9.2.6) метод возмущений. Для этого представим собственное число λ и собственную форму в виде рядов по ϵ (9.1.4) и (9.1.5).

После подстановки этих рядов в дифференциальное уравнение (9.2.2) и граничные условия (9.2.5), (9.2.6) и расщепления по степеням ϵ получаем ряд краевых задач:

$$\text{для } \epsilon^0 \quad \nabla^4 \omega_0 - \lambda_0 \omega_0 = 0;$$

$$\omega_0 = 0; \quad \omega''_{0xx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5k;$$

$$\omega_0 = 0; \quad \omega''_{0yy} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5;$$

$$\text{для } \epsilon^i \quad \omega_i^{IV} - \lambda_0 \omega_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j \omega_{i-j}; \quad (9.2.7)$$

$$\omega_i = 0; \quad \omega''_{ixx} = \mp k \sum_{j=0}^{i-1} \omega'_{jx} \quad \text{при } x = \pm 0,5k;$$

$$\omega_i = 0; \quad \omega''_{iyy} = \mp \sum_{j=0}^{i-1} \omega'_{jy} \quad \text{при } y = \pm 0,5.$$

Решение нулевого приближения имеет вид

$$\omega_0 = X_0 Y_0 = \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x, \\ m = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \frac{\pi m}{k} x, \\ m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y, \\ n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \pi n y, \\ n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\};$$

$$\lambda_0 = \pi^4 a^2, \quad a = \frac{m^2}{k^2} + n^2.$$

В первом приближении теперь имеем следующую задачу:

$$\omega_1 - \lambda_0 \omega_1 = c \lambda_1 \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{array} \right\};$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega''_{1xx} = \pm \pi m \left\{ \begin{array}{l} -(-1)^{\frac{m-1}{2}} \\ \frac{m}{2} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{array} \right\}$$

при $x = \pm 0,5k$;

(9.2.8)

$$\omega_1 = 0; \quad \omega''_{1yy} = \pm \pi n \left\{ \begin{array}{l} -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \frac{n}{2} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\}$$

при $y = \pm 0,5$.

Решение этой краевой задачи будем искать в виде

$$\omega_1 = Y_1(y) \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} + X_1(x) \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{array} \right\}; \quad (9.2.9)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}.$$

После подстановки соотношений (9.2.9) в краевую задачу (9.2.8) разделения переменных получим две задачи:

$$Y_1^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 Y_1'' - \pi^4 n^2 \left[2\frac{m^2}{k^2} + n^2\right] Y_1 =$$

$$= c\lambda_{1y} \begin{Bmatrix} \cos m\pi y, \\ \sin m\pi y, \end{Bmatrix}; \quad (9.2.10)$$

$$Y_1 = 0; \quad Y_1'' = \mp \pi m \begin{Bmatrix} -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \frac{n}{2} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{Bmatrix} c; \quad y = \pm 0,5; \quad (9.2.11)$$

$$X_1^{IV} - 2\pi^2 n^2 X_1'' - \pi^2 \frac{m^2}{k^2} \left[\frac{m^2}{k^2} + 2n^2\right] X_1 =$$

$$= \lambda_{1x} c \begin{Bmatrix} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{Bmatrix}; \quad (9.2.12)$$

$$X_1 = 0; \quad X_1'' = \mp \pi m \begin{Bmatrix} -(-1)^{\frac{m-1}{2}} \\ \frac{m}{2} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} \end{Bmatrix} c. \quad (9.2.13)$$

Обе задачи описываются неоднородными дифференциальными уравнениями с неоднородными граничными условиями. Определение неизвестных параметров правой части будем производить для каждого уравнения по схеме, подробно описанной в подразд. 9.1. Окончательно имеем

$$\lambda_{1x} = 4\pi^2 \frac{m^2}{k^2}; \quad \lambda_{1y} = 4\pi^2 n^2; \quad \lambda_1 = 4\pi^2 a;$$

$$w_1 = (-1)^{m-1} \frac{c}{\pi} \frac{m}{ka} \left[\frac{k \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \\ (-1)^{m/2} \end{Bmatrix}}{2 \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_2 \\ \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_2 \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \pi \beta_2 kx \\ \operatorname{sh} \pi \beta_2 kx \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - x \begin{Bmatrix} \sin \frac{\pi m}{k} x \\ \cos \frac{\pi m}{k} x \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \cos \pi ny \\ \sin \pi ny \end{Bmatrix} + (-1)^{n-1} \frac{c}{\pi} \frac{n}{a} x$$

$$x \left[\frac{\begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{n/2} \end{Bmatrix}}{2 \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1 \\ \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_2 \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y \\ \operatorname{sh} \pi \beta_1 y \end{Bmatrix} - y \begin{Bmatrix} \sin \pi ny \\ \cos \pi ny \end{Bmatrix} \right] x$$

$$x \begin{Bmatrix} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{Bmatrix}; \quad \beta_1 = \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2};$$

$$\beta_2 = \sqrt{2n^2 + \frac{m^2}{k^2}}.$$

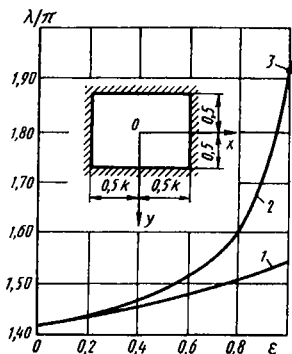


Рис. 9.3. Зависимость собственного числа λ от "упругости" заделки торцов ϵ :

1 — отрезок ряда (9.1.14); 2 — метод аппроксимаций Паде (9.2.1); 3 — численное решение

Аналогично продолжая для второго приближения, получим отрезок для собственного числа λ , содержащий три члена:

$$\lambda = \pi^4 a^2 + 4\pi^2 a\epsilon + 4\pi \left\{ \pi a + 2 \frac{n^2 m^2 k^2}{\pi a^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2a} \left[k \frac{m^2}{k^2} \beta_1 \operatorname{cth}^{(-1)m} \frac{\pi}{2k} \beta_1 + n^2 \beta_2 \operatorname{cth}^{(-1)n} \frac{\pi}{2} \beta_2 \right] \right\} \epsilon^2 + \dots \quad (9.2.14)$$

Далее отрезок ряда (9.2.14) перестраиваем в дробно-рациональную функцию (9.2.1).

Сравним численные результаты для первого собственного числа квадратной пластины ($k = m = n = 1$). Численное решение дает нам значение $\lambda = (1.9033\pi)^4$; отрезок ряда (9.2.14) при $\epsilon = 1$ — значение $\lambda = (1.535\pi)^4$ (расхождение 19,61 %); метод АП (9.2.1) при $\epsilon = 1$ — $\lambda_{[1/1]}(\epsilon = 1) = (1.9142\pi)^4$ (расхождение 0,25 %). Таким образом, предлагаемый метод работает и для двумерной задачи.

На рис. 9.3 представлена зависимость первого собственного числа квадратной пластины от "упругости" защемления торцов ϵ .

9.3. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ, ПЕРФОРИРОВАННОГО КВАДРАТНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Рассмотрение перфорированных конструкций является важным из-за их широкого практического использования [39].

Задача о кручении стержня, поперечное сечение которого пред-

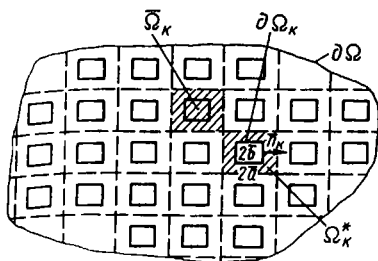


Рис. 9.4. Перфорированная среда

ставляет собой многосвязную область Ω (рис. 9.4), сводится к решению уравнения Пуассона

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = q(x, y). \quad (9.3.1)$$

Пусть на границе области $\partial\Omega$ и каждого из отверстий $\partial\Omega_k$ заданы следующие условия:

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0; \quad u(x, y)|_{\partial\Omega_k} = 0. \quad (9.3.2)$$

Разобьем исходную область на периодические участки Ω_k с одним отверстием, как показано на рис. 9.4 (периодичность, естественно, нарушается в окрестности границы области $\partial\Omega$). Пусть размеры периодического участка, называемого ячейкой, $2a \times 2a$, характерный линейный размер всей области — $L (L \gg 2a)$, а нагрузка $q(x, y)$ изменяется плавно. Введем малый параметр $\epsilon_1 = 2a/L$ ($\epsilon_1 \ll 1$) и быстрые переменные $\xi = x/\epsilon_1$ и $\eta = y/\epsilon_1$ (для медленных переменных оставим обозначения x и y). Выражения для производных по координатам и по нормали запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}; & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{n}_k(x, y)} &= \bar{n}_k(\xi, \eta) \cdot \left[\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] + \epsilon_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_k(\xi, \eta)}, \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

где \bar{i} и \bar{j} — единичные орты координатных осей ξ и η .

Применяя метод двух масштабов, решение исходной краевой задачи (9.3.1), (9.3.2) ищем в виде асимптотического разложения по ϵ_1 :

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \epsilon_1 u_1(x, y, \xi, \eta) + \epsilon_1^2 u_2(x, y, \xi, \eta) + \dots \quad (9.3.4)$$

где u_1, u_2, \dots – периодические по ξ и η функции с периодом L .

Подставляя выражение (9.3.4) в уравнение (9.3.1) и краевые условия (9.3.2) и учитывая соотношения (9.3.3), получаем рекуррентную систему краевых задач:

$$u_{1\xi\xi} + u_{1\eta\eta} = 0; \quad (9.3.5)$$

$$u_{1n_k} \Big|_{\partial\Omega_k} = -\bar{n}_k \left[\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] u_0; \quad (9.3.6)$$

$$u_{2\xi\xi} + u_{2\eta\eta} + 2(u_{1\xi x} + u_{1\eta y}) + u_{0xx} + u_{0yy} = q(x, y); \quad (9.3.7)$$

$$u_0 \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad (9.3.8)$$

$$u_{2n_k} \Big|_{\partial\Omega_k} = -\bar{n}_k \left[\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] u_1; \quad (9.3.9)$$

.....

Сначала решается краевая задача (9.3.5), (9.3.6) – задача на ячейке, при этом функция $u_1(x, y, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям периодического продолжения, т.е. значения функции и ее производные на противоположных сторонах ячейки должны быть равны. Далее, применяя к краевой задаче (9.3.7)...(9.3.9) оператор осреднения

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{|\Omega_k|} \iint_{\Omega_k} (\dots) d\xi d\eta, \quad (9.3.10)$$

приходим к осредненной краевой задаче

$$\frac{1}{|\Omega_k|} \iint_{\Omega_k} (u_{1\xi x} + u_{1\eta y}) d\xi d\eta + \Delta u_0 = q(x, y); \quad (9.3.11)$$

$$u_0 \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.3.12)$$

Решение краевой задачи (9.3.11), (9.3.12) уже не представляет трудностей, так как она сформулирована в односвязной области. Главная трудность, как и вообще в методе осреднения, заключается в решении задачи на ячейке (9.3.5), (9.3.6). Возможно, конечно, применение численных методов, например метода конечных элементов. В то же время полезно, к примеру, с точки зрения задачи рационального проектирования, иметь аналитическое решение. Этому вопросу посвящены следующие подразделы, позволяющие проиллюстрировать также методы возмущения формы границы и разложения по размеру области.

Метод разложения по размеру области связан, как правило, с переходом к бесконечным или полубесконечным областям. Здесь появляются специфические особенности. Например, если не удастся обеспечить конечность интеграла энергии, то решение становится неединственным, и возникает задача выбора нужного в дальнейшем решения. В сложившейся ситуации может помочь процедура регуляризации решения, описанная далее.

Рассмотрим задачу об изгибе квадратной пластинки с круговым отверстием радиуса R под действием равномерно распределенной нагрузки:

$$\Delta^2 \bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_{xxxx} + 2\bar{\omega}_{xxyy} + \bar{\omega}_{yyyy} = p/D. \quad (9.3.13)$$

Граница отверстия $\partial\Omega$ свободна от напряжений, т.е.

$$-(\Delta \bar{\omega})_{,n} + (1 - \nu) \left[\frac{1}{2} (\bar{\omega}_{xx} - \bar{\omega}_{yy}) \times \right. \\ \left. \times \sin 2\alpha - \bar{\omega}_{xy} \cos 2\alpha \right] \Big|_s \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad (9.3.14)$$

$$\Delta \bar{\omega} + (1 - \nu) (\bar{\omega}_{xy} \sin 2\alpha - \bar{\omega}_{xx} \sin^2 \alpha - \bar{\omega}_{yy} \cos^2 \alpha) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где α — угол между осью ox и нормалью \bar{n} к контуру отверстия.

Условия на внешнем контуре пластинки не ограничивают общности рассуждений.

Найдя частное решение $\bar{\omega}_p$ уравнения (9.3.13), перейдем к краевой задаче с однородным уравнением и неоднородными условиями.

Если отверстие не очень велико, то в первом приближении переходим к задаче об изгибе плоскости с круговым отверстием. Запишем эту задачу в полярной системе координат:

$$\Delta_1^2 \omega = 0, \quad (9.3.15)$$

$$L_1[\omega] = [\omega_{\rho\rho\rho} + \rho^{-2}\omega_{\rho\varphi\varphi} + \rho^{-1}\omega_{\rho\rho} - 2\rho^{-3}\omega_{\varphi\varphi} - \rho^{-2}\omega_{\rho} + (1 - \nu)(\rho^{-2}\omega_{\rho\varphi\varphi} + \rho^{-1}\omega_{\rho\rho} - 2\rho^{-3}\omega_{\varphi\varphi} - \rho^{-2}\omega_{\rho})] \Big|_{\rho=R} = -L_1[\omega_r]; \quad (9.3.16)$$

$$L_1[\omega] = [\omega_{\rho\rho} + \nu(\rho^{-2}\omega_{\varphi\varphi} + \rho^{-1}\omega_{\rho})] \Big|_{\rho=R} = -L_2[\omega_r], \quad (9.3.17)$$

где $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Правые части краевых условий (9.3.16) и (9.3.17) представим в следующем виде:

$$L_1[\omega_r] = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\varphi + f'_n \sin n\varphi);$$

$$L_2[\omega_r] = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n \cos n\varphi + \psi'_n \sin n\varphi).$$

Тогда решение краевой задачи (9.3.15)...(9.3.17) можно получить как сумму $\omega = \omega_0 + \omega_1$ решений двух следующих краевых задач:

$$а) \Delta_1^2 \omega_0 = 0; \quad (9.3.18)$$

$$L_1[\omega_0] \Big|_{\rho=R} = f_0; \quad (9.3.19)$$

$$L_2[\omega_0] \Big|_{\rho=R} = \psi_0; \quad (9.3.20)$$

$$б) \Delta_1^2 \omega_1 = 0; \quad (9.3.21)$$

$$L_1[\omega_1] \Big|_{\rho=R} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\varphi + f'_n \sin n\varphi); \quad (9.3.22)$$

$$L_2[\omega_1] \Big|_{\rho=R} = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n \cos n\varphi + \psi'_n \sin n\varphi). \quad (9.3.23)$$

Решение краевой задачи (9.3.18)...(9.3.20) неединственно, и появляется проблема выбора нужного решения. Для выбора такого решения вводится фиктивное упругое основание с коэффициентом постели k , т.е. рассматривается задача изгиба плоскости с круговым отверстием на упругом основании

$$D\Delta_1^2 \omega_0 = -k\omega_0; \quad (9.3.24)$$

$$L_1[\omega_0]|_{\rho=R} = f_0; \quad (9.3.25)$$

$$L_2[\omega_0]|_{\rho=R} = \psi_0. \quad (9.3.26)$$

Решение краевой задачи (9.3.24) имеет вид

$$\omega_0 = C_1 \text{ber}z + C_2 \text{bei}z + C_3 \text{ker}z + C_4 \text{keiz}, \quad (9.3.27)$$

где $z = \rho^2 \sqrt{k/D}$, $\text{ber}z$, $\text{bei}z$, $\text{ker}z$, keiz – функции Томсона.

Функции $\text{ber}z$ и $\text{bei}z$ экспоненциально возрастают с увеличением аргумента z . Поэтому, учитывая условие затухания на бесконечности, положим $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение, экспоненциально затухающее на бесконечности, запишется в виде

$$\omega_0 = C_3 \text{keiz} + C_4 \text{ker}z. \quad (9.3.28)$$

Используя выражения для функций keiz и $\text{ker}z$ при малых значениях аргумента z и ограничиваясь первыми слагаемыми разложения при $k \rightarrow +0$, получим решение краевой задачи (9.3.18)...(9.3.20) в виде

$$\omega_0 = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho \quad (A, B - \text{константы}). \quad (9.3.29)$$

Описанный подход представляет собой процедуру регуляризации решения.

Решение ω_1 краевой задачи (9.3.21)...(9.3.23) находится без труда.

Решение $\omega = \omega_0 + \omega_1$ задачи об изгибе плоскости с отверстием составляет невязку в краевых условиях на внешнем контуре пластинки, которая компенсируется решением краевой задачи для исходной области без отверстия.

Отметим еще следующий прием устранения бесконечных смещений. После того как решение в деформациях определено из решения для бесконечной области (задача в деформациях может иметь конечные решения при бесконечных перемещениях), определяются по ним смещения в исходной, конечной областях при учете заданных граничных условий.

На практике часто нужно найти решение задачи для области, мало отличающейся от некоторой "простой". Например, рассчитать изгиб пластинки, мало отличающейся от круговой, или плоскую деформацию плоскости с отверстием, близким к круговому, и т.д. В этом случае естественно возникает малый параметр, и в первом приближении можно от исходной "неправильной" области перейти к простой, для которой решения известны или могут быть без труда получены. Опишем построение высших приближений этого метода, называемого "методом возмущения формы границы" [40, 46]. Для примера рассмотрим решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \rho^{-1} u_{\rho} + \rho^{-2} u_{\varphi\varphi} = 0 \quad (9.3.30)$$

внутри области, ограниченной линией $\rho = 1 + \epsilon f(\varphi)$ ($\epsilon < 1$).

Пусть на границе области задано следующее граничное условие:

$$u(1 + \epsilon f(\varphi), \varphi) = \psi(\varphi). \quad (9.3.31)$$

Кроме того, решение всюду ограничено, т.е.

$$|u(0, \varphi)| < \infty. \quad (9.3.32)$$

Решение краевой задачи (9.3.30)...(9.3.32) ищем в виде разложения по степеням ϵ :

$$u(\rho, \varphi) = u_0(\rho, \varphi) + \epsilon u_1(\rho, \varphi) + \epsilon^2 u_2(\rho, \varphi) + \dots \quad (9.3.33)$$

Граничное условие (9.3.31) поставлено при $\rho = 1 + \epsilon f(\varphi)$.

Поэтому при подстановке разложения (9.3.33) в граничное условие (9.3.31) малый параметр ϵ будет входить не только в коэффициенты при последовательных членах разложения, но и в аргумент функции u . Поскольку обычная процедура метода возмущений состоит в приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях ϵ , мы не сможем провести ее до тех пор, пока не исключим параметр из аргумента функции u . Для этого перенесем граничное условие с линии $\rho = 1 + \epsilon f(\varphi)$

на окружность $\rho = 1$ при помощи тейлоровского степенного разложения. Тогда граничное условие (9.3.31) запишется в виде

$$u(1 + \epsilon f(\varphi), \varphi) = u(1, \varphi) + \frac{1}{1!} u_{\rho}(1, \varphi) \epsilon f(\varphi) + \\ + \frac{1}{2!} u_{\rho\rho}(1, \varphi) \epsilon^2 f^2(\varphi) + \dots = \psi(\varphi). \quad (9.3.34)$$

Подставляя разложение (9.3.33) в уравнение (9.3.30) и граничные условия (9.3.32)...(9.3.34), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , имеем следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\text{для } \epsilon^0 \quad u_{0\rho\rho} + \rho^{-1} u_{0\rho} + \rho^{-2} u_{0\varphi\varphi} = 0; \quad (9.3.35)$$

$$u_0(1, \varphi) = \psi(\varphi); \quad (9.3.36)$$

$$|u_0(0, \varphi)| < \infty. \quad (9.3.37)$$

$$\text{для } \epsilon^1 \quad u_{1\rho\rho} + \rho^{-1} u_{1\rho} + \rho^{-2} u_{1\varphi\varphi} = 0; \quad (9.3.38)$$

$$u_1(1, \varphi) = -u_{0\rho}(1, \varphi) f(\varphi); \quad (9.3.39)$$

$$|u_1(0, \varphi)| < \infty. \quad (9.3.40)$$

$$\text{для } \epsilon^2 \quad u_{2\rho\rho} + \rho^{-1} u_{2\rho} + \rho^{-2} u_{2\varphi\varphi} = 0; \quad (9.3.41)$$

$$u_2(1, \varphi) = -u_{1\rho}(1, \varphi) f(\varphi) - \frac{1}{2} u_{0\rho\rho}(1, \varphi) f^2(\varphi); \quad (9.3.42)$$

$$|u_2(0, \varphi)| < \infty; \quad (9.3.43)$$

.....

Поскольку уравнения (9.3.35), (9.3.38) и (9.3.41) имеют постоянные коэффициенты и однотипны, то соответствующие граничные задачи могут быть легко решены при помощи метода разделения переменных. При этом для решения исходной задачи в любом приближении достаточно один раз найти общий интеграл уравнения (9.3.35).

ГЛАВА 10 ДРУГИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В настоящее время разработано достаточно большое число асимптотических методов, получивших широкое применение в различных областях науки и техники, и сколько-нибудь их подробное изложение затруднительно, да и выходит за рамки настоящей книги. Здесь приводятся несколько подходов, выбор которых диктуется исключительно личными вкусами авторов. С другими же методами любознательный читатель может ознакомиться по работам [18, 22, 25, 31, 42, 43, 55, 60, 78, 90].

10.1. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В качестве модели выберем маятник с малой массой. Уравнение движения после соответствующего обезразмеривания можно записать в виде

$$\ddot{\epsilon x} + \dot{x} + x = 0, \quad \epsilon \ll 1. \quad (10.1.1)$$

Начальные условия

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = a; \quad a \equiv \text{const.} \quad (10.1.2)$$

Предельное уравнение ($\epsilon = 0$)

$$\dot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (10.1.3)$$

не может удовлетворить всем заданным начальным условиям. При предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$ нами было "потеряно" быстро затухающее состояние, локализованное вблизи начала движения $t = 0$. Это и понятно, так как при указанном предельном переходе неявно предполагалось, что $\dot{x} \sim x$, т.е. дифференцирование не меняет порядка функции. Вблизи же начала координат это не так, дифференцирование существенно увеличивает функцию

$$dx/dt \sim \epsilon^{-1} x.$$

Быстро изменяющееся состояние таково:

$$\epsilon x_n + \dot{x}_n = 0. \quad (10.1.4)$$

Теперь у нас есть два состояния, описывающих поведение системы во всей области изменения t , и начальные условия (10.1.2). Встает вопрос об их согласовании. Оно может быть выполнено различными методами, среди которых наиболее распространенными являются метод сращиваемых асимптотических разложений и метод пограничного слоя (называемый также методом составных разложений или методом Вышняка-Люстерника).

Первый метод нашел широкое распространение в гидродинамике, особенно в работах зарубежных авторов, второй – в механике деформируемого твердого тела, преимущественно в отечественной литературе. В определенной степени это дань традициям, однако между этими подходами имеются и существенные различия. Их достоинства и недостатки проанализируем далее.

Рассмотрим метод сращиваемых асимптотических разложений [29]. Находим общие решения уравнений (10.1.3) и (10.1.4):

$$x_0 = Ce^{-t}; \quad (10.1.5)$$

$$x_n = C_1 + C_2 e^{-\epsilon^{-1}t}. \quad (10.1.6)$$

Решение (10.1.5) называется внешним (основным), а решение (10.1.6) – внутренним. Внутреннее решение (10.1.6) дает возможность удовлетворить заданным начальным условиям. Для этого нужно положить

$$C_2 = -\epsilon a; \quad C_1 = \epsilon a.$$

Теперь выполним процедуру сращивания. Успех сращивания зависит от того, существует ли область перекрытия, в которой как внешнее, так и внутреннее решения пригодны. Существование такой области для широкого класса задач доказано. Наличие области перекрытия позволяет не искать непосредственно точку сращивания, а полагать, что в этой области внешнее решение уже достигло своего внутреннего предела (т.е. предела при $t \rightarrow 0$), а внутреннее – внешнего (при $t \rightarrow \infty$). Иными словами, правило сращивания в простейшей формулировке может быть записано так: внутренний предел внешнего разложения должен быть равен внешнему пределу внутреннего разложения, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x_n. \quad (10.1.7)$$

По этому правилу в нашей задаче получаем $C = C_1 = \epsilon a$.

Приведенное выше простое правило сращивания можно уточнить, описав более точно предельное поведение сращиваемых величин [29]. Взамен простых пределов мы используем асимптотические представления. Это дает следующий принцип сращивания: внутреннее представление внешнего представления равно внешнему представлению внутреннего представления. Здесь внешнее (или внутреннее) представление означает первый ненулевой член в асимптотическом разложении во внешних (или внутренних) переменных. Правило обеспечивает сращивание в тех случаях, когда предельный принцип дает только тривиальный результат. Этот принцип распространяется на приближения высшего порядка при сохранении дальнейших членов в асимптотических разложениях. Мы должны допустить, что число членов может быть различно во внутреннем и внешнем разложениях, поскольку нормальный порядок сращивания требует разницы на единицу на каждом шаге. Таким образом, мы получаем принцип асимптотического сращивания: m -членное внутреннее разложение n -членного внешнего разложения равно n -членному внешнему разложению m -членного внутреннего разложения. Здесь m и n — два целых числа, практически m обычно выбирается равным n или $n + 1$.

Иногда порядок необходимой для применения этого правила нумерации членов разложения может показаться неясным, тогда полезен иной вариант правила. Бывает непонятно, как нумеровать члены, например, в следующих случаях: когда асимптотическая последовательность имеет пропуски (к примеру, когда в степенном ряде по ϵ коэффициент по ϵ^2 тождественно равен нулю), когда асимптотические последовательности для внутреннего и внешнего разложений существенно различны (например, одна из них содержит целые степени ϵ , а другая — половинные), когда появляются логарифмические члены (например, $\epsilon^n \ln \epsilon$ имеется наряду с ϵ^n). Во всех этих случаях неопределенность исключается применением следующего варианта правила: внутреннее разложение порядка Δ внешнего разложения порядка δ равно внешнему разложению порядка δ внутреннего разложения порядка Δ . Здесь $\delta(\epsilon)$ и $\Delta(\epsilon)$ — две любые функции сравнения (не обязательно одинаковые), которые могут входить (а могут и не входить) в асимптотические последовательности для внутреннего и внешнего разложений. Конечно, эта измененная форма сводится к исходному правилу сращивания, когда нумерация членов не вызывает сомнений.

В общем случае сращивание должно производиться шаг за шагом.

Рис. 10.1. Схема сращивания асимптотических разложений

как показано сплошными стрелками на рис. 10.1. Внешнее решение определяет внутреннее решение, которое, в свою очередь, оказывает вторичное влияние на внешнее разложение и т.д. Иногда этот обычный порядок сращивания можно сократить. Очевидным случаем является задача с начальными условиями, в которой все граничные условия наложены во внешней области. Тогда можно вычислить неограниченное число членов внешнего разложения, как показано пунктирными стрелками на рис. 10.1, а затем срастить его с внутренним разложением для дополнения решения.

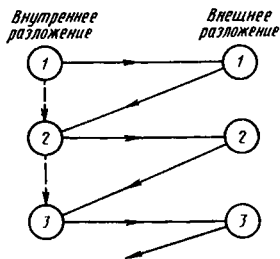
Представление решения задачи сингулярного возмущения в виде внутреннего и внешнего разложения может вызвать затруднительный практический вопрос о том, где нужно переходить от одного разложения к другому. Грубый рецепт состоял бы в том, чтобы такой переход совершался в точке пересечения кривых, однако в этом случае результат содержал бы несвойственные явлению угловые точки. Более того, внутреннее и внешнее решение первого приближения могут вообще не пересекаться.

К счастью, поскольку эти разложения имеют общую область пригодности, оказывается легко построить из них одно равномерно пригодное разложение. Результат по необходимости является более сложным, чем любое из составляющих.

Построение в принципе осуществимо разными путями, и результаты могут быть различны, поскольку составное разложение не единственно. Однако все они будут эквивалентны с точностью до принятого порядка.

На практике применяются два существенно различных метода. Первый может быть назван аддитивным составлением. Сумма внутреннего и внешнего разложений поправляется вычитанием их общей части, так что последняя не считается дважды. Общая часть может быть найдена проверкой. Иначе она может быть вычислена как внутреннее разложение внешнего разложения или наоборот.

Второй метод может быть назван мультипликативным составлением. Результат внешнего разложения умножается на поправочный множитель, состоящий из отношения внутреннего разложе-



ния к внешнему разложению этого внутреннего разложения (или проводится аналогичная операция для внутреннего разложения)

Аддитивное и мультипликативное правила составления связаны тем, что отношение двух величин, близких к единице, может быть разложено в ряд по формуле бинома. Аддитивное правило обычно проще в применении, мультипликативное — иногда дает более простые результаты.

Для рассматриваемой задачи аддитивное сращивание дает

$$x = x_0 + x_n - \lim_{t \rightarrow 0} x_0 = \epsilon a e^{-t} - \epsilon a e^{-1} + \epsilon a - \epsilon a = \epsilon (e^{-t} - e^{-1} t). \quad (10.1.8)$$

Мультипликативное правило позволяет записать решение в виде

$$x = \frac{x_0 x_n}{\lim_{t \rightarrow 0} x_0} = \epsilon a e^{-t} (1 - e^{-1} t). \quad (10.1.9)$$

Нетрудно убедиться, что представления (10.1.8) и (10.1.9) эквивалентны.

Трудную часть метода сращиваемых асимптотических разложений составляет согласование внешнего и внутреннего решений, определение области применимости каждого из этих решений, построение разложений, пригодных во всей области. Эти вопросы становятся особенно сложными, если для какого-то из состояний (тем более для обоих) нельзя выписать общее аналитическое решение, а также для уравнений высокого порядка, характерных, например, для теории оболочек. В то же время метод сращиваемых асимптотических разложений, в отличие от метода Вишика—Люстерника, не требует регулярности вырождения (т.е. дополнительное состояние может и не иметь характер пограничного слоя).

В целом же надо отметить, что широкое распространение за рубежом метода сращиваемых асимптотических разложений, а в СССР — метода Вишика—Люстерника во многом обусловлено традициями соответствующих научных школ.

Выбор того или иного метода решения конкретной задачи диктуется ее спецификой и целиком находится в руках исследователя.

10.2. МЕТОД ВЕНТЦЕЛЯ–КРАМЕРСА–БРИЛЛЮЭНА (ВКБ)⁴

Рассмотрим уравнение [61]

$$y'' + \lambda^2 q_1(x)y + q_2(x)y = 0, \quad (10.2.1)$$

где $\lambda^2 = \text{const} \gg 1$.

Разделив обе части уравнения на λ^2 , имеем

$$\lambda^{-2}y'' + q_1 y + \lambda^{-2}q_2 y = 0. \quad (10.2.2)$$

Если формально устремить λ в уравнении (10.2.2) к бесконечности, то оно перейдет в уравнение вида

$$q_1 y = 0, \quad (10.2.3)$$

которое имеет только тривиальное решение $y = 0$. Следовательно, мы не сможем построить приближенное решение уравнения (10.2.1), если станем искать его в виде

$$y(x) = y_0(x) + \lambda^{-1}y_1(x) + \dots \quad (10.2.4)$$

Поясним идею метода ВКБ на примере уравнения, в котором коэффициент $q_1 = \text{const}$, а $q_2 = 0$. В этом случае решение уравнения (10.2.1) имеет вид

$$y = C_1 \exp(i\lambda\sqrt{q_1}x) + C_2 \exp(-i\lambda\sqrt{q_1}x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Это наводит на мысль вместо прямого разложения по обратным степеням λ искать приближенное решение уравнения (10.2.1) в виде

⁴ Метод назван в честь Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна. Впрочем, математики говорят о методе Лиувилля–Грина, но могут быть добавлены и фамилии Карлини, Дебал, Джеффриса. Это довольно характерная для асимптотических методов ситуация, когда непросто точно указать автора того или иного подхода.

$$y = \exp[\lambda G(x, \lambda)], \quad (10.2.5)$$

а для функции G строить прямое разложение по обратным степеням λ .

Подставляя выражения для y в линейное уравнение (10.2.2), преобразуем его в следующее нелинейное уравнение:

$$G'^2 + q_1 + \lambda^{-1}G'' + \lambda^{-2}q_2 = 0. \quad (10.2.6)$$

Разложение функции G будем искать в форме

$$G(x, \lambda) = G_0(x) + \lambda^{-1}G_1(x) + \dots \quad (10.2.7)$$

Подставляя разложение (10.2.7) в уравнение (10.2.6), имеем

$$\begin{aligned} &(G'_0 + \lambda^{-1}G'_1 + \dots) + q_1 + \\ &+ \lambda^{-1}(G''_0 + \lambda^{-1}G''_1 + \dots) + \lambda^{-2}q_2 = 0, \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

или

$$G_0'^2 + 2\lambda^{-1}G'_0G'_1 + q_1 + \lambda^{-1}G''_0 + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при λ^0 и λ^{-1} , получаем

$$G_0'^2 + q_1 = 0; \quad (10.2.9)$$

$$G''_0 + 2G'_0G'_1 = 0. \quad (10.2.10)$$

Из уравнения (10.2.9) следует, что

$$G'_0 = \begin{cases} \pm i\sqrt{q_1}, & \text{если } q_1 > 0; \\ \pm\sqrt{-q_1}, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases} \quad (10.2.11)$$

Поэтому

$$G_0 = \begin{cases} \pm i\int\sqrt{q_1}dx, & \text{если } q_1 > 0; \\ \pm\int\sqrt{-q_1}dx, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases} \quad (10.2.12)$$

Чтобы решить уравнение (10.2.10), разделим обе его части на G'_0 :

$$\frac{1}{2} \frac{G_0}{G'_0} + G'_1 = 0.$$

После интегрирования имеем

$$G_1 + \frac{1}{2} \ln G'_0 = 0.$$

Из дальнейшего будет ясно, что постоянную интегрирования в последнем уравнении можно опустить. Переписывая это соотношение в виде

$$G_1 = -\ln \sqrt{G'_0} \quad (10.2.13)$$

и подставляя (10.2.12) и (10.2.13) в разложение (10.2.7), имеем

$$G = \pm i \sqrt{q_1} dx - \frac{1}{\lambda} [\ln \sqrt{\pm i} + \ln^4 \sqrt{q_1}] + \dots \text{ при } q_1 > 0 \quad (10.2.14)$$

или

$$G = \pm \sqrt{-q_1} dx - \frac{1}{\lambda} [\ln \sqrt{\pm i} + \ln^4 \sqrt{-q_1}] + \dots \text{ при } q_1 < 0. \quad (10.2.15)$$

Подстановка выражения (10.2.14) в формулу (10.2.5) дает

$$y \cong \frac{\exp[\pm i \lambda \int \sqrt{q_1} dx]}{\sqrt{\pm i} \sqrt[4]{q_1}}. \quad (10.2.16)$$

Формула (10.2.16) дает приближенные выражения для двух линейно независимых решений уравнений (10.2.1). Общее решение уравнения (10.2.1) можно приближенно записать в форме

$$y \cong \frac{C_1 \cos[\lambda \int \sqrt{q_1} dx] + C_2 \sin[\lambda \int \sqrt{q_1} dx]}{\sqrt[4]{q_1}}. \quad (10.2.17)$$

В случае $q_1 < 0$ можно приближенно записать общее решение уравнения (10.2.1) в виде

$$y = \frac{C_1 \exp[\lambda \int \sqrt{-q_1} dx] + C_2 \exp[-\lambda \int \sqrt{-q_1} dx]}{\sqrt[4]{-q_1}}. \quad (10.2.18)$$

Соотношения (10.2.16) и (10.2.18) называются обычно ВКБ-приближениями.

Отметим, что соотношения (10.2.16) и (10.2.18) становятся непригодными в окрестностях нулей функции $q_1(x)$. Эти точки называются обычно точками поворота или точками перехода. Задача для уравнения с точкой поворота рассматривается далее.

Используем ВКБ-приближение, чтобы найти собственные числа и собственные функции краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменным коэффициентом

$$y'' + \lambda^2 q_1(x)y = 0; \quad (10.2.19)$$

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \quad (10.2.20)$$

при больших значениях параметра λ .

Предполагается также, что $q_1 > 0$ на отрезке $[0, 1]$. Общее решение уравнения (10.2.19) в первом приближении может быть представлено формулой (10.2.17). Кроме того, должны быть удовлетворены граничные условия (10.2.20). Для упрощения вычислений выберем нижние пределы интегрирования в формуле (10.2.17) равными нулю:

$$y = \frac{C_1 \cos[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau] + C_2 \sin[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau]}{\sqrt[4]{q_1(x)}}. \quad (10.2.21)$$

Подставляя выражение (10.2.21) в граничные условия (10.2.20), имеем

$$C_1 = 0; \quad \sin \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] = 0.$$

Отсюда

$$\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.2.22)$$

Отметим, что случай $n = 0$ приводит к тривиальному решению задачи (10.2.19)...(10.2.20).

Таким образом, в первом приближении собственные числа и функции определяются формулами

$$\lambda_n = n\pi \left[\int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]^{-1};$$

$$y_n = q_1^{-1/4} \sin \left[\lambda_n \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right].$$

Как указывалось ранее, ВКБ-приближения (10.2.16) и (10.2.18) становятся непригодными в окрестностях нулей функции $q(x)$. Пусть, например, $q_1 = 1 - x^3$, $q_2 = 0$. В этом случае формулы (10.2.16), (10.2.18) можно представить в виде

$$y \approx \frac{C_1 \cos \left[\lambda \int_0^x \sqrt{1-\tau^3} d\tau \right] + C_2 \sin \left[\lambda \int_0^x \sqrt{1-\tau^3} d\tau \right]}{\sqrt[4]{1-x^3}}, \quad (10.2.23)$$

$$y \approx \frac{a_1 \exp \left[\lambda \int_0^x \sqrt{\tau^3-1} d\tau \right] + a_2 \exp \left[-\lambda \int_0^x \sqrt{\tau^3-1} d\tau \right]}{\sqrt[4]{x^3-1}}, \quad (10.2.24)$$

Отметим, что при исследовании уравнений с точками поворота один из пределов интегрирования в формулах ВКБ-приближения удобнее всего принимать равным координате точки поворота. Формулы (10.2.23) и (10.2.24) дают два различных представления одной и той же функции $y(x)$, причем одно из этих представлений пригодно при $x < 1$, а другое — при $x > 1$. При этом ясно, что постоянные a_n и C_n должны быть линейно связаны между собой, поскольку дифференциальное уравнение имеет второй порядок и его решение определяется лишь двумя произвольными постоянными. Один из рассматриваемых ниже методов нахождения связи между этими постоянными предусматривает построение разложения, пригодного в окрестности точки $x = 1$ (или

так называемого внутреннего разложения), и сравнение этого разложения соответственно с разложениями (10.2.23) и (10.2.24).

Для того чтобы построить разложение, пригодное в окрестности точки $x = 1$, введем "растягивающие" преобразования независимой переменной x , с тем чтобы координаты точек, близких к $x = 1$, оказались величинами $O(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. С этой целью положим $\xi = (x - 1)\lambda^\nu$, так что $x = 1 + \lambda^{-\nu}\xi$, причем $\nu > 0$.

Уравнение (10.2.1) в данном случае принимает вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\lambda^{2-3\nu}\xi \left[1 + \lambda^{-\nu}\xi + \frac{1}{3} \lambda^{-2\nu}\xi^2 \right] y = 0. \quad (10.2.25)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\lambda^{2-3\nu}\xi y = 0. \quad (10.2.26)$$

Уравнение (10.2.25) имеет различную предельную форму при $\lambda \rightarrow \infty$ в зависимости от величины показателя ν . В случае $\nu > 2/3$ уравнение (10.2.25) переходит в уравнение вида

$$d^2 y/d\xi^2 = 0. \quad (10.2.27)$$

В случае $\nu < 2/3$ уравнение (10.2.25) имеет предельную форму

$$\xi y = 0. \quad (10.2.28)$$

Наконец, при $\nu = 2/3$ уравнение (10.2.25) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\xi y = 0. \quad (10.2.29)$$

Предельная форма (10.2.29) включает в себя уравнения (10.2.27) и (10.2.28) в качестве частных случаев.

С точностью до коэффициента ν уравнение (10.2.29) представляет собой так называемое уравнение Эри, решения которого хорошо известны. Сделав замену

$$x = 1 + 3^{-1/3} \lambda^{-2/3} z,$$

вместо уравнения (10.2.29) придем к уравнению Эри в стандартной форме:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - zy = 0. \quad (10.2.30)$$

Общее решение уравнения (10.2.30) записывается в виде

$$y = b_1 A_i(z) + b_2 B_i(z), \quad (10.2.31)$$

где b_1 и b_2 – произвольные постоянные, $A_i(z)$ и $B_i(z)$ – функции Эри первого и второго порядка соответственно.

Теперь необходимо срастить решения (10.2.31) с ВКБ-решениями (10.2.23) и (10.2.24). Для этого потребуются асимптотические разложения функции $A_i(z)$ и $B_i(z)$ при больших значениях $|z|$.

Если мы будем искать указанные асимптотические разложения, исходя из дифференциального уравнения (10.2.30), то обнаружим, что первые члены этих разложений экспоненциально растут или затухают в случае положительных значений z и совершают синусоидальные колебания в случае отрицательных значений z :

$$y \sim z^{-1/4} \left[\bar{C}_1 \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + \bar{C}_2 \sin\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

и

$$y \sim z^{-1/4} \left[\bar{a}_1 e^{(2/3)z^{3/2}} + \bar{a}_2 e^{-(2/3)z^{3/2}} \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Однако при этом нам по-прежнему не известны соотношения между постоянными \bar{a}_n , \bar{C}_n и a_n , C_n с одной стороны, и \bar{a}_n , \bar{C}_n и b_n – с другой. Для того чтобы обойти это затруднение, обычно представляют решения уравнения (10.2.30) в интегральной форме и затем определяют главные члены асимптотических разложений полученных интегралов.

Главный член асимптотического разложения функции $A_i(z)$ при $z \rightarrow \infty$ таков:

$$A_i(z) \sim \frac{\exp\{(-2/3)z^{3/2}\}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty; \quad (10.2.32)$$

$$A_i(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (10.2.33)$$

при $z \rightarrow -\infty$;

$$B_i(z) \sim \frac{\exp[(2/3)z^{3/2}]}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty; \quad (10.2.34)$$

$$B_i(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (10.2.35)$$

при $z \rightarrow -\infty$.

Асимптотические представления (10.2.32)...(10.2.35) дают нам искомые соотношения между \tilde{C}_n , \tilde{a}_n и b_n . Устремляя теперь в решении (10.2.31) значение z к бесконечности и используя представления (10.2.32) и (10.2.34), находим

$$y \sim \frac{b_1 \exp[(-2/3)z^{3/2}]}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} + \frac{b_2 \exp[(2/3)z^{3/2}]}{\sqrt{\pi} z^{1/4}}. \quad (10.2.36)$$

Точно так же, устремляя в формуле (10.2.31) значение $z_k \rightarrow -\infty$ и используя представление (10.2.33) и (10.2.35), получим

$$y \sim \frac{b_1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] + \\ + \frac{b_2}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (10.2.37)$$

Для того чтобы найти соотношения между постоянным a_n и C_n в ВКБ-приближениях (10.2.23) и (10.2.24), необходимо срастить эти разложения с решением (10.2.31), справедливым в окрестности точки поворота. Чтобы срастить разложения (10.2.23) и (10.2.31), выразим в интегралах, входящих в (10.2.23), переменную x через z и устремим λ к бесконечности при фиксированном значении z . Таким образом, имеем

$$\int_x^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau = \int_{1+3^{-1/3}\lambda^{-2/3}z}^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau,$$

откуда, полагая $\tau = 1 + 3^{-1/3}\lambda^{-2/3}t$, находим

$$\begin{aligned} \lambda \int_x^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau &= \lambda \int_z^0 [-3^{-2/3}\lambda^{-2/3}t - 3^{1/3}\lambda^{-4/3}t^2 + \\ &+ \dots]^{1/2} 3^{-1/2}\lambda^{-2/3} dt = \int_z^0 (-t)^{1/2} dt = \frac{2}{3} (-z)^{3/2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y^{(1)} = \frac{C_1 \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{2/3}\right] + C_2 \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right]}{3^{1/6}\lambda^{-1/6}(-z)^{1/4}}, \quad (10.2.38)$$

где z фиксировано.

Для того чтобы использовать условие срашивания, необходимо выразить решение y через x при $x < 1$ и совершить предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном значении x . Эта процедура эквивалентна вычислению асимптотики y при $z \rightarrow -\infty$; в результате имеем представление (10.2.36). Приравнявая разложения (10.2.38) и (10.2.36) в соответствии с принципом срашивания, получаем

$$\begin{aligned} \pi^{1/2}\lambda^{1/6}3^{-1/6} \left\{ C_1 \cos\left[(-z)^{3/2} \frac{2}{3}\right] + C_2 \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right] \right\} = \\ = b_1 \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] + b_2 \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Далее, приравнявая коэффициенты при $\cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right]$ и $\sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right]$ в обеих частях полученного равенства, находим

$$C_1 = 3^{1/6}\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6} \left[b_1 \sin \frac{\pi}{4} + b_2 \cos \frac{\pi}{4} \right]; \quad (10.2.39)$$

$$C_2 = 3^{1/6} \pi^{-1/2} \lambda^{-1/6} \left[b_1 \cos \frac{\pi}{4} - b_2 \sin \frac{\pi}{4} \right]. \quad (10.2.39)$$

Перейдем теперь к сращиванию асимптотических представлений (10.2.24) и (10.2.31). Выразим переменную x в формуле (10.2.24) через z и совершим предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном положительном z , что соответствует $x > 1$. С этой целью запишем

$$\int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} \, d\tau = \int_1^{1+3^{-1/3} \lambda^{-2/3} z} \sqrt{\tau^3 - 1} \, d\tau$$

и, полагая $\tau = 1 + 3^{-1/3} \lambda^{-2/3} t$, преобразуем этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} \lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} \, d\tau &= \lambda \int_0^z [3^{2/3} \lambda^{-2/3} t + 3^{1/3} \lambda^{-4/3} t^2 + \\ &+ \dots]^{1/2} 3^{1/2} \lambda^{-2/3} dt = \int_0^z t^{1/2} dt = \frac{2}{3} z^{3/2}. \end{aligned}$$

Тогда из формулы (10.2.24) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y^{(2)} = 3^{-1/6} \lambda^{1/6} z^{-1/4} \{ a_1 \exp[(2/3)z^{3/2}] + a_2 \exp[(-2/3)z^{3/2}] \}, \quad (10.2.40)$$

где значение z фиксировано.

Далее необходимо выразить в решении (10.2.31) переменную z через x и совершить предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном x , большем единицы. Это эквивалентно нахождению асимптотики функции y при $z \rightarrow \infty$; результат дает формула (10.2.36). Приравнявая выражения (10.2.31) и (10.2.36) в соответствии с принципом сращивания, получаем соотношение вида

$$\begin{aligned} 3^{-1/6} \lambda^{1/6} \pi^{1/2} \left[a_1 \exp\left[\frac{2}{3} z^{3/2}\right] + a_2 \exp\left[-\frac{2}{3} z^{3/2}\right] \right] = \\ = \frac{b_1}{2} \exp\left[-\frac{2}{3} z^{3/2}\right] + b_2 \exp\left[\frac{2}{3} z^{3/2}\right], \end{aligned}$$

из которого, после приравнивания коэффициентов при каждой из экспонент в левой и правой частях, находим искомые связи между постоянными a_n и b_n :

$$a_1 = 3^{1/6} \lambda^{-1/6} \pi^{-1/2} b_2; \quad a_2 = \frac{1}{2} 3^{1/6} \lambda^{-1/6} \pi^{-1/2} b_1. \quad (10.2.41)$$

Итак, решение задачи дается тремя отдельными разложениями: разложением (10.2.23), пригодным при $x < 1$, разложением (10.2.24), пригодным при $x > 1$, и разложением (10.2.31), справедливым в окрестности точки $x = 1$.

Построение равномерно пригодных разложений уравнений высших порядков представляет определенные трудности. Поэтому в теории оболочек особенно перспективным представляется сочетание метода ВКБ с предварительным асимптотическим понижением порядка исходной системы уравнений.

10.3. ВАРИАЦИОННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Как известно, большая часть задач механики допускает вариационную формулировку. В то же время упрощенные путем асимптотического анализа краевые задачи такую постановку допускают не всегда. В связи с этим полезно после асимптотического анализа краевых задач проверять, сохранили ли они свой вариационный тип.

В работе [22] предложено выполнять асимптотический анализ соответствующих функционалов, что позволяет автоматически учесть вариационную структуру уравнений и те свойства результатов, которые ею фиксируются (корректность постановки краевых задач, их разрешимость и т. д.).

Вариационно-асимптотический метод, сводящийся, фактически, к набору эвристических правил и приемов, подробно описан в [22]. Его применение даже в тех случаях, когда он не является базовым методом, весьма полезно для контроля правильности и повышения достоверности полученных результатов.

10.4. РАЗДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ И МЕДЛЕННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Иногда удобно применять для разделения быстрых и медленных составляющих решения при исследовании нелинейных систем не метод осреднения, а преобразование Гильберта [28].

Изложим основные положения указанного подхода.

Пусть

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [V_c(\omega) \cos \omega t + V_s(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Функция $v(t)$, сопряженная $u(t)$ по Гильберту, такова:

$$v(t) = H[u] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [V_c(\omega) \sin \omega t - V_s(\omega) \cos \omega t] d\omega.$$

Преобразование Гильберта

$$H \left[\sum_{i=1}^n C_i u_i \right] = \sum_{i=1}^n C_i H[u_i]$$

линейно и коммутирует с другими однородными преобразованиями, в том числе с дифференцированием:

$$\frac{d}{dt} H[u] = H \left[\frac{du}{dt} \right].$$

Однако самое интересное, что медленный множитель, спектр которого не пересекается со спектром быстрого множителя, можно выносить за знак оператора H , т.е. медленные множители "замораживаются":

$$H[xu] = xH[u].$$

Например,

$$\begin{aligned} H[\cos 99t \cos 100t] &= \frac{1}{2} H[\cos 199t + \cos t] = \\ &= \frac{1}{2} [\sin 199t + \sin t] = \cos 99t \sin 100t = \\ &= \cos 99t H[\cos 100t]. \end{aligned}$$

Используя сопряженные по Гильберту функции $u(t)$ и $v(t)$, можно определить аналитический сигнал:

$$\omega(t) = u(t) + iv(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad (10.4.1)$$

где комплексная спектральная амплитуда исходной вещественной функции

$$U(\omega) = U_0(\omega) - iU_s(\omega).$$

Переход к аналитическому сигналу по формуле (10.4.1) аналогичен переходу гармонике $a \cos(\omega t + \varphi)$ к комплексной экспоненте $a e^{i\omega t} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Нетрудно проверить, что комплексная спектральная амплитуда аналитического сигнала $W(\omega) = 2U(\omega)$ при $\omega > 0$ и $W(\omega) = 0$ при $\omega < 0$. Более того, условие при $\omega < 0$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы данная функция $w(t)$ была аналитическим сигналом. Это свойство и является основным в приложениях описанного выше подхода к нелинейным колебаниям.

Рассмотрим уравнение Дюффинга

$$\ddot{u} + u = \epsilon u^3.$$

В нулевом приближении имеем уравнение

$$\ddot{u} + u = 0,$$

решение которого обозначим через $u^{(1)}$. В следующем приближении нужно решать уравнение

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \epsilon u^{(1)3}. \quad (10.4.2)$$

Вместо разложения правой части уравнения (10.4.2) в ряд Фурье перейдем к аналитическому сигналу $w^{(1)}$ и w по формулам

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} (w_1^{(1)} + \bar{w}_1^{(1)});$$

$$u_1 = \frac{1}{2} (w_1 + \bar{w}_1),$$

где $\bar{(\dots)}$ — комплексное сопряжение.

Поскольку слева и справа в уравнении (10.4.2) должны стоять только аналитические сигналы, нужно сохранить в нем только члены со спектром на положительных частотах:

$$\ddot{w}_1 + w_1 = \frac{\epsilon}{4} (3a^2 w^{(1)} + w^{(1)3}), \quad (10.4.3)$$

где $a^2 = w_1 \bar{w}_1$.

В правой части уравнения (10.4.3) содержатся первая $(\omega^{(1)})$ и третья $(\omega^{(1)})^3$ гармоники решения. Представляя и левую часть в виде $\omega_1 = \omega_1^{(1)} + \omega^{(3)}$, получаем после приравнивания гармоник

$$\ddot{\omega}'' + \left[1 - \frac{3}{4} \epsilon \alpha^2 \right] \omega^{(1)} = 0; \quad (10.4.4)$$

$$\ddot{\omega}^{(3)} + \omega^{(3)} = \frac{\epsilon}{4} \omega^{(1)3}. \quad (10.4.5)$$

Из уравнения (10.4.4) получаем поправку к частоте колебаний

$$\omega^2 = 1 - \frac{3}{4} \epsilon \alpha^2,$$

а из уравнения (10.4.5) – выражение для третьей гармоники

$$\omega^{(3)} = - \frac{\epsilon}{32} \omega^{(1)3}.$$

Далее процесс итераций можно продолжить.

По существу, мы имеем дело со своеобразным методом гармонического баланса.

Его применение весьма эффективно при построении высших приближений [28].

10.5. МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

Основным недостатком метода возмущений при решении нелинейных задач является однотипный учет малых линейных и нелинейных эффектов. Это сильно усложняет процедуру построения высших приближений.

Изложим подход [75], позволяющий учитывать все линейные консервативные эффекты независимо от нелинейных возмущений. При помощи соответствующей замены переменных удастся рассмотреть нормальные волны, не взаимодействующие между собой в линейном приближении и связанные лишь за счет нелинейности. Это максимально упрощает линейную часть задачи и создает предпосылку для эффективного и единообразного последующего упрощения уравнения с помощью приближенных методов теории нелинейных волн как в случае систем с сильной, так и со слабой дисперсией. Идея нормальных волн восходит к идее

нормальных колебаний в сосредоточенных системах с N степенями свободы. Как известно, в линейных сосредоточенных системах можно ввести нормальные координаты, такие, что движение по каждой из них происходит независимо от движений по остальным. Поэтому любые свободные и вынужденные колебания можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний. В нелинейных же системах такие нормальные колебания оказываются связанными между собой. Аналогичную процедуру введения нормальных волн можно распространить и на системы, описываемые уравнениями в частных производных.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + B \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \bar{u} = \bar{F} \left[\bar{u}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (10.5.1)$$

где \bar{u} — N -мерный вектор физических переменных; $B(\partial/\partial x)$ — линейная операторная матрица; $\bar{F}(\bar{u}, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ — вектор нелинейных и неконсервативных величин. Выражение, стоящее слева в (10.5.1), описывает линейную консервативную часть задачи. В данном случае переход от (10.5.1) к уравнениям связанных нормальных волн заключается в диагонализации операторной матрицы $B(\partial/\partial x)$ путем перехода в ее собственный базис при помощи замены переменных

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k (\partial/\partial x) U_k(x, t), \quad (10.5.2)$$

где $U_k(x, t)$ — новые волновые переменные; \bar{r}_k — правые собственные векторы матрицы $B(B\bar{r}_k = \lambda_k \bar{r}_k)$, $\lambda_k(\partial/\partial x)$ — ее собственные значения.

Подставим (10.5.2) в уравнения (10.5.1), умножим их на левые собственные векторы $\bar{l}_j(\partial/\partial x)$ и, воспользовавшись условием ортогональности $\bar{l}_j \bar{r}_k = 0$ при $j \neq k$, получим уравнение связанных нормальных волн

$$\frac{dU_k}{dt} + \lambda_k(\partial/\partial x) U_k = (\bar{l}_k \bar{r}_k)^{-1} [\bar{l}_k \bar{F}(\partial/\partial t, \partial/\partial x)]. \quad (10.5.3)$$

Здесь λ_k определяют различные ветви дисперсионного уравнения линейной системы

$$(i\omega_k + \lambda_k)(i\omega_k - i\lambda_k) = 0. \quad (10.5.4)$$

Имеющийся произвол в выборе собственных векторов можно использовать для приведения правой части (10.5.3) к наиболее простому виду.

Заметим, что уравнения (10.5.3) вместе с формулами связи (10.5.4) эквивалентны исходной системе (10.5.1). При их получении не предполагались ни малость нелинейности, ни слабость дисперсии. Малость этих параметров используется только для упрощения вида полученных уравнений. При изучении волновых процессов в неоднородных и нестационарных системах при переходе к уравнениям связанных нормальных волн (СНВ) соответствующие слагаемые уравнений должны быть перенесены в правую часть и учитываться вместе с нелинейностью и другими возмущениями. При выводе и упрощении уравнений СНВ (10.5.3) удобно пользоваться языком операторного формализма, полагая $\partial/\partial t = p$ и $\partial/\partial x = k$. Это позволит при математических выкладках обращаться с дифференциальными операторными выражениями как с обычными алгебраическими величинами. Во всех же спорных случаях следует обратиться к теории соответствующих интегральных преобразований.

П р и м е р. Геометрическая нелинейность связи деформаций и перемещений в тонких стержнях, пластинах и оболочках приводит к взаимодействию распространяющихся в них различных типов волн. Одним из наиболее характерных и ярких эффектов, относящихся к такому взаимодействию, является выпучивание стержней и оболочек при осевом ударе.

Уравнения, описывающие связь между продольными и изгибными волнами в тонком стержне, имеют вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{2} C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (10.5.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + C^2 r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

где $v(x, t)$, $w(x, t)$ — продольные и поперечные смещения точек осевой линии; $C = \sqrt{E/\rho}$ — скорость продольной волны в материале стержня; $r = \sqrt{J/E}$ — радиус инерции сечения стержня.

В дальнейшем будет более удобно работать с уравнениями (10.5.5) в матричной форме:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + B \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \bar{U} = \bar{F} \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{u} \right], \quad (10.5.6)$$

где $\bar{u}(x, t) = (v_t, v_x, \omega, \omega_t)$ — вектор физических переменных;
 $\bar{F}(\partial/\partial x, \bar{u})$ — вектор нелинейных величин; $B(\partial/\partial x = \kappa)$ — линейная операторная матрица 4×4 .

$$B(\kappa) = \begin{bmatrix} 0 & -C^2 \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & C^2 r^2 \kappa^4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C^2 \kappa (\kappa \omega)^2 \\ 0 \\ 0 \\ C^2 \kappa \left[\left[v_x + \frac{1}{2} (\kappa \omega)^2 \right] \kappa \omega \right] \end{bmatrix}.$$

Преобразование системы (10.5.6) к уравнениям связанных нормальных волн состоит в приведении матрицы $B(\kappa)$ к диагональному виду с помощью левых собственных векторов

$$\bar{\xi}_{1,2} = \left[-\frac{\kappa^2}{p_{1,2}(\kappa)}, \kappa, 0, 0 \right];$$

$$\bar{\xi}_{3,4} = (0, 0, p_{3,4}(\kappa), -1).$$

Здесь первые два вектора отвечают собственным значениям $p_{1,2} = \pm C\kappa$, описывающим продольные возмущения, а последние два — собственным значениям $p_{3,4} = iC r \kappa^2$, описывающим дисперсионные ветви изгибных волн ($p = i\omega$, $\kappa = -ik$). Второй шаг заключается во введении вместо физических переменных $\bar{u}(x, t)$ волновых переменных $G_m(x, t)$ и $U_m(x, t)$ ($m = 1, 2$) для каждой дисперсионной ветви линейной системы

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{m=1}^2 \psi_m(\kappa) G_m(x, t) + \sum_{m=1}^2 \psi_{m+2}(\kappa) U_m(x, t).$$

Здесь $\psi_m(k)$ — вектор операторных коэффициентов распределения m -ой нормальной волны, являющийся правым собственным вектором матрицы $B(k)$. Уравнения связанных нормальных волн в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{\partial G_{1,2}}{\partial x} C = \pm \frac{C}{2r^2} \frac{\partial}{\partial x} (U_1 - U_2)^2; \\ i \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} - \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} + \alpha (U_1 - U_2)^2 - \\ - \frac{C}{v_g'} (G_1 + G_2)(U_1 - U_2) = 0, \end{aligned}$$

где $v_g = 2Crk$ — групповая скорость нормальной волны, $v_g' = dv_g/dk$, $\alpha = (4Cr^3)^{-1}$ — параметр нелинейности. Переход от физических переменных к G_m и U_m выделяет общеволновую часть задачи из деталей ее конкретной физической постановки. Физические и волновые переменные в данной задаче связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) = C[G_2(x, t) - G_1(x, t)]; \quad v_x = [G_2(x, t) + G_1(x, t)]; \\ \omega_t = - \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial x} \right]; \quad \omega_x = \frac{2i}{v_g'} [U_2 - U_1]. \end{aligned}$$

В одноволновом приближении ($G_2 = U_2 = 0$) возмущения, распространяющиеся в положительном направлении оси x , описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{C}{2r^2} \frac{\partial U^2}{\partial x}; \\ i \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha |U|^2 U - \frac{C}{v_g'} GU = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что изгибные волны в тонких стержнях описываются нелинейным уравнением Шредингера, которое встречается в различных областях физики и описывает распространение модулированных волн в сильнодисперсирующих средах.

ГЛАВА 11 НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК

Асимптотические методы позволяют построить эффективные решения при рассмотрении задач о действии на оболочки различных локальных нагрузок. В этой главе рассмотрим действие на цилиндрические оболочки системы окружных локальных нагрузок, приложенных по прямоугольным областям, и радиальной нагрузки по круговой площадке. В первом случае решение, построенное по методу синтеза напряженного состояния, сведено к достаточно легко реализуемым выражениям. При нагружении по круговой площадке вычисление усилий и изгибающих моментов сведено к табулированным функциям Томсона. Рассмотрено также параболическое распределение нагрузки с нулевым значением давления на контуре площадки. Получены простые асимптотические формулы для вычисления усилий и моментов и установлены границы их применимости. Показано, что локальное напряженное состояние бесконечно длинных оболочек определяется одним безразмерным параметром, что позволяет построить универсальные графики для расчета оболочек различных толщин и диаметров, нагруженных по круговым площадкам различных радиусов.

Для вычисления напряжений в зоне малых нагруженных областей пологих оболочек получены замкнутые элементарные формулы, в которых учитываются размеры и форма области нагружения, плотность распределения нагрузки, а также форма срединной поверхности оболочки. Построение этих формул основано на замене функций Грина фундаментальными решениями дифференциальных уравнений пологих оболочек. При таком подходе игнорируется влияние граничных условий на распределение напряжений в зоне внешнего силового воздействия. Поэтому полученные выражения обеспечивают хорошую точность для небольших размеров площадок нагружения, достаточно удаленных от краев оболочки.

11.1. СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИЯ ОКРУЖНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

Рассмотрим случай нагружения круговой цилиндрической оболочки системой окружных локально приложенных сил, имеющих постоянную ин-

тенсивность на прямоугольных участках поверхности, периодически расположенных в фиксированном поперечном сечении бесконечно длинной оболочки.

Когда оболочка нагружена произвольно распределенной по поверхности окружной нагрузкой $p(a, \beta)$, получаем разрешающее уравнение общей теории оболочек

$$\nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 \Phi - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^4}{\partial a^4} - \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} \right] \nabla^2 \Phi + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} = - \frac{R^4}{D} p(a, \beta). \quad (11.1.1)$$

Здесь и в дальнейшем справедливы обозначения, принятые в работе [64].

Перемещения, усилия и изгибающие моменты связаны с разрешающей функцией $\Phi(a, \beta)$ с помощью следующих соотношений:

$$u = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial \beta} - c^2 \left[\frac{1 - \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \nabla^4 \Phi + \frac{2 \cdot 3\nu - \nu^2}{1 - \nu} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta} + \frac{1 \cdot 3\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a \partial \beta^3} \right];$$

$$v = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + c^2 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{1 - \nu} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right) \nabla^4 \Phi + \frac{4\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} + \frac{2(2 - \nu \cdot \nu^2)}{1 - \nu} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^2} \right];$$

$$w = (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - 2c^2 \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} \right];$$

$$T_1 = - \frac{Eh}{R} \left\{ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \frac{c^2}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} - \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right) \nabla^4 \Phi + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} - 2\nu(1 - \nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} - 2\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} \right] \right\};$$

$$T_2 = \frac{Eh}{R} \frac{c^2}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} \right] \nabla^4 \Phi + \right. \\ \left. + (2+2\nu-\nu^2) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + 4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} \right\};$$

$$S_1 = \frac{Eh}{R} \left\{ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^3} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right) \nabla^4 \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^5} + (2-\nu)(1-\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta^2} + (1-3\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a \partial \beta^4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a \partial \beta^2} \right] \right\};$$

$$S_2 = \frac{Eh}{R} \left\{ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^3} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right) \nabla^4 \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^5} - 2\nu(1-\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta^2} - 2\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a \partial \beta^4} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a \partial \beta^2} \right] \right\};$$

$$G_1 = -\frac{D}{R^2} \left\{ (2+\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + (1+\nu)^2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} - \right. \quad (11.1.2) \\ \left. - (1-2\nu-2\nu^2) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - c^2 \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial a^3 \partial \beta} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right) \nabla^4 \Phi + 2 \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^6 \partial \beta} + 2(1+\nu) \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta^3} + 2\nu \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^5} \right] \right\};$$

$$G_2 = -\frac{D}{R^2} \left\{ (2+\nu)\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + 2(1+\nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a \partial \beta^3} + \right.$$

$$+ (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - 2c^2 \left[(1 + \nu) \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta^3} + \nu \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^6 \partial \beta} + \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^5} \right] \Bigg\}.$$

Записанные выше разрешающие дифференциальные уравнения общей теории оболочек и соотношения (11.1.2) позволяют весьма точно построить напряженно-деформированное состояние оболочки при действии окружной нагрузки, имеющей любой закон изменения по поверхности оболочки. Но реализация таких решений часто наталкивается на значительные трудности, обусловленные высоким порядком уравнения и сложной структурой соотношений (11.1.2). Поэтому наряду с этой теорией будем применять и приближенные уравнения — моментной технической и полубезмоментной теории, а также уравнения тангенциального состояния, которые являются аналогом уравнений плоской задачи теории упругости. Решение на основе последних уравнений дает приемлемые результаты при большой изменчивости напряженного состояния и достаточно точно может описать тангенциальное состояние оболочки, являющееся компонентом полного напряженного состояния при использовании одного из методов синтеза напряженного состояния, описанных в гл. 5.

Уравнения моментной технической теории оболочек получаются из только что записанных уравнений, если произвести упрощения в соответствии с сильным неравенством

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \right| \gg |f|; \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right| \gg |f|; \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \right| \approx \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right|; \quad (11.1.3)$$

где $f(a, \beta)$ — любой силовой или деформационный фактор, возникающий в оболочке при действии нагрузки (перемещение, усилие, момент).

Итак, в случае моментной технической теории вместо (11.1.1), (11.1.2) получаем

$$\nabla^8 \Phi + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^4} = - \frac{R^4}{D} p(a, \beta); \quad (11.1.4)$$

$$u = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial \beta} - c^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \nabla^4 \Phi;$$

$$\begin{aligned}
v &= 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \nabla^4 \Phi; \\
w &= (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - 2c^2 \left[\frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} \right]; \\
T_1 &= -\frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} - \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \nabla^4 \Phi \right]; \\
T_2 &= \frac{Eh}{R} \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} \right] \nabla^4 \Phi; \quad (11.1.5) \\
S &= \frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial a^3} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right] \nabla^4 \Phi \right]; \\
G_1 &= -\frac{D}{R^2} \left\{ (2 + \nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + (1 + \nu)^2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} + \right. \\
&+ \nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} - c^2 \left[\left[\frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} - \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \nabla^4 \Phi + 2 \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^6 \partial \beta} + \right. \\
&+ \left. \left. 2(1 + \nu) \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta^3} + 2\nu \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^5} \right] \right\}; \\
G_2 &= -\frac{D}{R^2} \left\{ (2 + \nu)\nu \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta} + 2(1 + \nu) \frac{\partial^5 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^3} + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} - 2c^2 \left[(1 + \nu) \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^4 \partial \beta^3} + \nu \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^6 \partial \beta} + \frac{\partial^7 \Phi}{\partial a^2 \partial \beta^5} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь, как нетрудно заметить, в соответствии с (11.1.3) сохранены лишь старшие производные разрешающей функции.

При больших значениях показателя изменчивости напряженного состояния ($\rho > \rho^*$) уравнения (11.1.4), (11.1.5) могут быть без внесения заметной погрешности заменены следующими уравнениями:

$$\nabla^3 \Phi(a, \beta) = -\frac{R^4}{D} p(a, \beta); \quad (11.1.6)$$

$$u = -c^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \nabla^4 \Phi; \quad v = c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \nabla^4 \Phi;$$

$$T_1 = -\frac{Eh}{(1-\nu^2)R} c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} - \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \nabla^4 \Phi; \quad (11.1.7)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta} \right] \nabla^4 \Phi;$$

$$S = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right] \nabla^4 \Phi.$$

Если ввести в рассмотрение новую функцию

$$\varphi(a, \beta) = c^2 \nabla^4 \Phi(a, \beta),$$

уравнение (11.1.6) и соотношения (11.1.7) преобразуются к виду

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(a, \beta) = -\frac{(1-\nu^2)R}{Eh} p(a, \beta); \quad (11.1.8)$$

$$u(a, \beta) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial \beta};$$

$$v(a, \beta) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \varphi;$$

$$T_1(a, \beta) = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\nu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial \beta} \right]; \quad (11.1.9)$$

$$T_2(a, \beta) = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial \beta} \right];$$

$$S(a, \beta) = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3} - \nu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial \beta^2} \right].$$

При большой изменчивости напряженного состояния задача интегрирования уравнений теории оболочек (11.1.1), (11.1.2) может быть заменена интегрированием уравнений, практически совпадающих с уравнениями, к которым может быть сведена задача о плоском напряженном состоянии.

Для полубезмоментной теории разрешающее уравнение и соотношения, связывающие искомые перемещения, усилия и изгибающие моменты с разрешающей функцией, записываются в виде

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \Phi = -\frac{R^2}{Eh} p(\alpha, \beta); \quad (11.1.10)$$

$$u = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad v = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}; \quad w = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3}; \quad (11.1.11)$$

$$T_1 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta}; \quad T_2 = \frac{Eh}{R} \frac{c^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^5}{\partial \beta^5} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi;$$

$$S = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}; \quad G_1 = -\nu \frac{D}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi;$$

$$G_2 = -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi.$$

Построенные здесь уравнения полубезмоментной теории оболочек (11.1.10), (11.1.11), уравнения тангенциального состояния (11.1.8), (11.1.9) в сочетании с уравнениями моментной технической теории (11.1.4), (11.1.5) (или без этих уравнений) могут быть использованы для построения приближенного решения по методу синтеза напряженного состояния.

Рассмотрим длинную оболочку, нагруженную в одном сечении, принятом за начальное (начало координат помещено в середине одной из нагруженных прямоугольных областей), системой "к" локально приложенных окружных нагрузок. Нагруженные области с одинаковым шагом расположены вдоль контура оболочки. На каждой из нагруженных областей окружная нагрузка имеет постоянную интенсивность и имеет одно направление.

Внешнюю поверхностную нагрузку представим как четную кусочно-постоянную в продольном и окружном направлениях функцию, в виде интеграла и ряда Фурье

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda, \quad (11.1.12)$$

где $\theta_n = \frac{k\beta_0}{\pi} (n=0)$;

$$\theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin k n \beta_0 (n=1, 2, 3, \dots).$$

Воспользуемся уравнениями общей теории оболочек (11.1.1), (11.1.2) и представим их решение в форме

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k n \beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda. \quad (11.1.13)$$

В результате подстановки (11.1.12) и (11.1.13) в разрешающее уравнение (11.1.1) определим $\Phi_n(\lambda)$, а затем получим выражение для разрешающей функции

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & - \frac{24(1-\nu^2)}{\pi} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \times \\ & \times \frac{\rho_0 R}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (11.1.14)$$

Через полную нагрузку P , действующую на каждом из нагруженных участков поверхности, разрешающая функция выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & - \frac{6(1-\nu^2)}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \frac{P}{ER} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (11.1.15)$$

Здесь коэффициент $\mathcal{L}(\lambda, n)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, n) = & (\lambda^2 + k^2 n^2 - 1)^2 (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 + \\ & + 2(1-\nu) \lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + \frac{1-\nu^2}{c^2} \lambda^4. \end{aligned}$$

Разрешающая функция (11.1.15) вместе с соотношениями (11.1.2) полностью определяет напряженно-деформированное состояние оболочки.

При использовании метода синтеза напряженного состояния разрешающая функция $\Phi(\alpha, \beta)$ представляется в виде следующих слагаемых:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \begin{cases} \bar{\Phi}(\alpha, \beta) & (n < \bar{n}); \\ \tilde{\Phi}(\alpha, \beta) & (\bar{n} + 1 < n < n^*); \\ \hat{\Phi}(\alpha, \beta) & (n > n^* + 1). \end{cases} \quad (11.1.16)$$

Соответственно силовые и деформационные факторы оболочки могут быть получены путем сложения компонентов, являющихся решением уравнений полубезмоментной теории ($n < \bar{n}$), уравнений напряженного состояния с большой изменчивостью ($\bar{n} + 1 < n < n^*$) и уравнений тангенциального состояния. Рассматриваем только бимоментное напряженное состояние, имея в виду, что его часть, соответствующая работе оболочки как стержня с недеформируемым контуром, может быть без затруднений записана с учетом конкретных условий закрепления.

Таким образом, силовые и деформационные факторы оболочки могут быть получены путем сложения компонентов, являющихся решением уравнений полубезмоментной теории, напряженного состояния с большой изменчивостью и тангенциального состояния.

Рассмотрим каждый из этих компонентов напряженного состояния в отдельности, причем на примере лишь нескольких факторов.

Для описания основного состояния применяем уравнения полубезмоментной теории, записанные ранее.

Находим

$$\begin{aligned} \frac{ER}{P} \bar{u}^0(\alpha, \beta) &= \frac{k}{\pi^2 \alpha_0 \beta_0} \frac{R}{h} \times \\ &\times \sum_n^{\bar{n}} \operatorname{sinkn}\beta_0 \operatorname{sinkn}\beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \operatorname{sina}\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda; \\ \frac{ER}{P} v^0(\alpha, \beta) &= \frac{k^2}{\pi^2 \alpha_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{\bar{n}} n \operatorname{sinkn}\beta_0 \operatorname{coskn}\beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \operatorname{cosa}\lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} d\lambda; \end{aligned}$$

$$\frac{ER}{P} \omega^0(a, \beta) = - \frac{k^3}{\pi^2 a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \times$$

$$\times \sum_n^{\bar{n}} n^2 \operatorname{sinc} n \beta_0 \operatorname{sinc} n \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} d\lambda;$$

$$\frac{R}{P} T_1^0(a, \beta) = \frac{k}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \operatorname{sinc} n \beta_0 \operatorname{sinc} n \beta \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sina}_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda;$$

$$\frac{R}{P} T_2^0(a, \beta) = - \frac{4k}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\mu_n \operatorname{sinc} n \beta_0}{k^2 n^2 - 1} \operatorname{sinc} n \beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} d\lambda; \quad (11.1.17)$$

$$\frac{R}{P} S^0(a, \beta) = - \frac{1}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\operatorname{sinc} n \beta_0}{n} \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \operatorname{sina}_0 \lambda \operatorname{sina} \lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda;$$

$$\frac{1}{P} G_1^0(a, \beta) = - \frac{4\nu}{\pi^2 a_0 \beta_0 k} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\mu_n^4 \operatorname{sinc} n \beta_0}{n^2 (k^2 n^2 - 1)} \operatorname{sinc} n \beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} d\lambda;$$

$$\frac{1}{P} G_2^0(a, \beta) = - \frac{4}{\pi^2 k a_0 \beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\mu_n^4 \operatorname{sinc} n \beta_0}{n^2 (k^2 n^2 - 1)} \operatorname{sinc} n \beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sina}_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} d\lambda.$$

Здесь и дальше суммирование по n в основном состоянии начинается с $n = 1$ при $k \geq 2$, с $n = 2$ при $n = 1$ и распространяется до n

при использовании первого и второго методов синтеза напряженного состояния. В третьем методе верхний предел суммирования $n = \bar{n}$.

Вычислив несобственные интегралы, входящие в (11.1.17), и подставив их аналитические выражения, преобразуем перемещения, усилия и моменты к такому виду, удобному для вычислений (при $a \geq 0$):

$$\frac{ER}{P} u^o(a, \beta) = \frac{k}{16\pi a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{\mu_n^3} u^o(a) \sin kn\beta;$$

$$u_n^o(a) = \begin{cases} \chi_n(a_0 - a) + \xi_n(a_0 - a) - \chi_n(a_0 + a) - \\ - \xi_n(a_0 + a) & (a < a_0); \\ \chi_n(a - a_0) + \xi_n(a - a_0) - \chi_n(a + a_0) - \\ - \xi_n(a + a_0) & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{ER}{P} v_n^o(a, \beta) = \frac{k^2}{16\pi a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{\bar{n}} \frac{n}{\mu_n^4} \sin kn\beta_0 v^o(a) \cos kn\beta;$$

$$v_n^o(a) = \begin{cases} 2 - \chi_n(a_0 - a) - \chi_n(a_0 + a) & (a < a_0); \\ \chi_n(a - a_0) - \chi_n(a + a_0) & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{ER}{P} w^o(a, \beta) = - \frac{k^3}{16\pi a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{\bar{n}} \frac{n^2}{\mu_n^4} \sin kn\beta_0 w_n^o(a) \sin kn\beta;$$

$$\frac{R}{P} T_1^o(a, \beta) = \frac{k}{8\pi a_0 \beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{\mu_n^2} f_{1n}^o(a) \sin kn\beta; \quad (11.1.18)$$

$$f_{1n}^o(a) = \begin{cases} \xi_n(a_0 - a) + \xi_n(a_0 + a) & (a < a_0); \\ \xi_n(a + a_0) - \xi_n(a - a_0) & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} T_2^o(a, \beta) = - \frac{k}{4\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{k^2 n^2 - 1} t_2^o(a) \sin kn\beta;$$

$$t_{2n}^o(a) = v_n^o(a);$$

$$\frac{R}{P} S^o(a, \beta) = - \frac{1}{8\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n\mu_n} s_n^o(a) \cos kn\beta;$$

$$s_n^o(a) = \begin{cases} \chi_n(a_0 - a) - \xi_n(a_0 - a) - \chi_n(a_0 + a) + \\ + \xi_n(a_0 + a) & (a \leq a_0); \\ \chi_n(a - a_0) - \xi_n(a - a_0) - \chi_n(a + a_0) + \\ + \xi_n(a + a_0) & (a > a_0); \end{cases} \quad (11.1.18)$$

$$\frac{1}{P} G_2^o(a, \beta) = - \frac{1}{4\pi k\alpha_0\beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2 (k^2 n^2 - 1)} g_{2n}^o(a) \sin kn\beta;$$

$$g_{2n}^o(a) = v_n^o(a);$$

$$G_1^o(a, \beta) = \nu G_2^o(a, \beta).$$

Для функций $\chi_n(a)$, $\xi_n(a)$ справедливы обозначения, принятые в (5.3.3).

Суммирование рядов в формулах (11.1.18) начинается с $n = 1$ при числе нагрузок $k \geq 2$ и с $n = 2$ при действии одной нагрузки ($k = 1$).

Перейдем к рассмотрению напряженного состояния с большой изменчивостью, которое описывается уравнениями (11.1.4), (11.1.5). Разрешающая функция для него получается из выражения (11.1.15), если знаменатель подынтегрального выражения заменить следующим:

$$\mathcal{L}(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \lambda^4. \quad (11.1.19)$$

Для перемещений, усилий, моментов получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{ER}{P} u(a, \beta) &= \frac{6(1-\nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=1}^n \theta_n \sin k_n \beta \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{u(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{A}(\lambda, n)} \sin a \lambda d\lambda; \\
 \frac{ER}{P} v(a, \beta) &= \frac{6(1-\nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=1}^n \theta_n \cos k_n \beta \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{v(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{A}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda; \\
 \frac{ER}{P} w(a, \beta) &= -\frac{6(1-\nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=1}^n \theta_n \sin k_n \beta \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{w(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{A}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda; \\
 \frac{R}{P} T_1(a, \beta) &= \frac{6(1-\nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sum_{n=1}^n \theta_n \sin k_n \beta \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{t_{1n}(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{A}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda; \\
 \frac{R}{P} T_2(a, \beta) &= -\frac{1}{2\pi a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^n \theta_n \sin k_n \beta \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{t_{2n}(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{A}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda;
 \end{aligned} \tag{11.1.20}$$

$$\frac{R}{P} S(a, \beta) = - \frac{6(1-\nu^2)}{\pi a_0 \beta_0} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{s(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \sin a \lambda d\lambda;$$

$$\frac{1}{P} G_i(a, \beta) = - \frac{1}{2\pi a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \sin k n \beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{g_i(\lambda, n) \sin a_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos a \lambda d\lambda,$$

$$\text{где } u(\lambda, n) = \lambda k n + c^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda k n (\lambda^2 + k^2 n^2)^2;$$

$$v(\lambda, n) = 2(1+\nu)\lambda^2 + k^2 n^2 + c^2(k^2 n^2 + \frac{2}{1-\nu} \lambda^2) \times$$

$$\times (\lambda^2 + k^2 n^2)^2;$$

$$\omega(\lambda, n) = (2+\nu)\lambda^2 k n + k^3 n^3 + 2c^2(\lambda^4 k n + \lambda^2 k^3 n^3);$$

$$t_1(\lambda, n) = \lambda^2 k n + \frac{c^2}{1-\nu^2} (\lambda^2 k n - \nu k^2 n^2)(\lambda^2 + k^2 n^2)^2;$$

$$t_2(\lambda, n) = [k^3 n^3 + (2+\nu)\lambda^2 k n](\lambda^2 + k^2 n^2)^2;$$

$$s(\lambda, n) = \lambda^3 + \frac{c^2}{1-\nu^2} (\lambda^3 - \nu \lambda k^2 n^2)(\lambda^2 + k^2 n^2)^2;$$

$$g_1(\lambda, n) = (2+\nu)\lambda^4 k n + (1+\nu)^2 \lambda^2 k^3 n^3 + \nu k^5 n^5 + c^2 \times$$

$$\times [(\lambda^2 k n - \nu k^3 n^3)(\lambda^2 + k^2 n^2) + 2\lambda^6 k n + 2(1+\nu)\lambda^4 k^3 n^3 +$$

$$+ 2\nu \lambda^2 k^5 n^5];$$

$$g_2(\lambda, n) = \nu(2+\nu)\lambda^4 k n + 2(1+\nu)\lambda^2 k^3 n^3 + k^5 n^5 + 2c^2 \times$$

$$\times [(1+\nu)\lambda^4 k^3 n^3 + \nu \lambda^6 k n + \lambda^2 k^5 n^5];$$

$$i = 1; 2.$$

Для тангенциального состояния перемещения и усилия записывают в таком виде:

$$\frac{ER}{P} \hat{u}(a, \beta) = \frac{(1-\nu)^2 k}{\pi^2 a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kn\beta_0 \sin kn\beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \lambda \sin a \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda;$$

$$\frac{ER}{P} \hat{v}(a, \beta) = \frac{1-\nu^2}{\pi^2 a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} \times$$

$$\times \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{(k^2 n^2 + \frac{2}{1-\nu} \lambda^2) \sin a_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda (\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda;$$

$$\frac{R}{P} \hat{T}_1(a, \beta) = \frac{k}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kn\beta_0 \sin kn\beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^2 - \nu k^2 n^2) \sin a_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda (\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda; \quad (11.1.21)$$

$$\frac{R}{P} \hat{T}_2(a, \beta) = -\frac{k}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kn\beta_0 \sin kn\beta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{[k^2 n^2 + (2 + \nu) \lambda^2] \sin a_0 \lambda \cos a \lambda}{\lambda (\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda;$$

$$\frac{R}{P} \hat{S}(a, \beta) = -\frac{1}{\pi^2 a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} \times$$

$$\times \cos k n \beta \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^2 - \nu k^2 n^2) \sin a_0 \lambda \cos a \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda.$$

После вычисления несобственных интегралов, входящих в перемещения и усилия (11.1.21), и подстановки полученных аналитических выражений найдем (при $a > 0$)

$$\frac{ER}{P} \hat{u}(a, \beta) = \frac{(1+\nu)^2}{8\pi k a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k n \beta_0}{n^3} \times \hat{u}_n(a) \sin k n \beta;$$

$$\hat{u}_n(a) = \begin{cases} [1 + kn(a_0 - a)] e^{-kn(a_0 - a)} - \\ - [1 + kn(a_0 + a)] e^{-kn(a_0 + a)} & (a < a_0); \\ [1 + kn(a - a_0)] e^{-kn(a - a_0)} - \\ - [1 + kn(a + a_0)] e^{-kn(a + a_0)} & (a > a_0); \end{cases} \quad (11.1.22)$$

$$\frac{ER}{P} \hat{v}(a, \beta) = \frac{1 - \nu^2}{8\pi k^2 a_0 \beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k n \beta_0}{n^3} \hat{v}_n(a) \cos k n \beta;$$

$$\hat{v}_n(a) = \begin{cases} 4 - \left[2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} kn(a_0 - a) \right] e^{-kn(a_0 - a)} - \\ - \left[2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} kn(a_0 + a) \right] e^{-kn(a_0 + a)} & (a < a_0); \\ \left[2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} kn(a - a_0) \right] e^{-kn(a - a_0)} - \\ - \left[2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} kn(a + a_0) \right] e^{-kn(a + a_0)} & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} \hat{T}_1(a, \beta) = -\frac{1}{4\pi k a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k n \beta_0}{n^2} \hat{t}_{1n}(a) \sin k n \beta;$$

$$\hat{t}_{1n}(a) = \begin{cases} 2\nu - \left[\nu + \frac{1+\nu}{2} k n (a_0 - a) \right] e^{-k n (a_0 - a)} - \\ - \left[\nu + \frac{1+\nu}{2} k n (a_0 + a) \right] e^{-k n (a_0 + a)} & (a \leq a_0); \\ \left[\nu + \frac{1+\nu}{2} k n (a - a_0) \right] e^{-k n (a - a_0)} - \\ - \left[\nu + \frac{1+\nu}{2} k n (a + a_0) \right] e^{-k n (a + a_0)} & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} \hat{T}_2(a, \beta) = -\frac{1}{4\pi k a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k n \beta_0}{n^2} \hat{t}_{2n}(a) \sin k n \beta;$$

$$\hat{t}_{2n}(a) = \begin{cases} 2 - \left[1 - \frac{1+\nu}{2} k n (a_0 - a) \right] e^{-k n (a_0 - a)} - & (11.1.22) \\ - \left[1 - \frac{1+\nu}{2} k n (a_0 + a) \right] e^{-k n (a_0 + a)} & (a \leq a_0); \\ \left[1 - \frac{1+\nu}{2} k n (a - a_0) \right] e^{-k n (a - a_0)} - \\ - \left[1 - \frac{1+\nu}{2} k n (a + a_0) \right] e^{-k n (a + a_0)} & (a > a_0); \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} \hat{S}(a, \beta) = -\frac{1}{8\pi k a_0 \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k n \beta_0}{n^2} \hat{s}_n(a) \cos k n \beta;$$

$$s_n(a) = \begin{cases} [1 - \nu - (1 + \nu)kn(a_0 - a)]e^{-kn(a_0 - a)} - \\ - [1 - \nu - (1 + \nu)kn(a_0 + a)]e^{-kn(a_0 + a)} & (a < a_0) \\ [1 - \nu - (1 + \nu)kn(a - a_0)]e^{-kn(a - a_0)} - \\ - [1 - \nu - (1 + \nu)kn(a + a_0)]e^{-kn(a + a_0)} & (a > a_0). \end{cases}$$

Таким образом, построены компоненты полного напряженно-деформированного состояния оболочки — основное, тангенциальное состояние и напряженное состояние с большой изменчивостью.

Перемещения, усилия и изгибающие моменты находятся путем сложения этих состояний в соответствии с одним из методов синтеза напряженного состояния, сформулированных в гл. 5. В качестве примера запишем выражение для одного из важных факторов — сдвигающего усилия — на основе третьего метода:

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} S(a, \beta) = & - \frac{1}{8\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n} s_n^0(a) \cos kn\beta - \\ & - \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n} \cos kn\beta \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\bar{s}(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda^2(\lambda, n)} \sin \alpha \lambda d\lambda - \frac{1}{8\pi\alpha_0\beta_0} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2} s_n^0(a) \cos kn\beta. \end{aligned} \quad (11.1.23)$$

Здесь суммирование начинается с $n = 1$ при $k \geq 2$, с $n = 2$ при $k = 1$.

Аналогично (11.1.23) могут быть записаны выражения для остальных

ных факторов на основе одного из упомянутых методов. Принимая во внимание локальный характер нагрузки и напряженного состояния, построенные решения могут быть использованы и для анализа напряжений в оболочках с другими условиями закрепления. Для определения напряженно-деформированного состояния вне зоны нагружения и вдали от нее целесообразно на основе построенного решения вычислить бимоментное напряженное состояние и наложить на него элементарное решение, соответствующее работе оболочки как стержня с недеформируемым контуром, имеющего соответствующие условия закрепления.

11.2. ЛОКАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, НАГРУЖЕННОЙ ПО КРУГОВОЙ ПЛОЩАДКЕ

При анализе локального напряженного состояния исходим из уравнений тонких упругих изотропных оболочек с большим показателем изменчивости [66]. Площадку нагружения считаем достаточно удаленной от торцов тонкостенного тела, тогда можно пренебречь их влиянием на значения местных напряжений. В этих условиях исследование удобно провести методом двумерных интегральных преобразований Фурье. Полученные решения не будут периодическими по окружной координате. Однако это не вносит больших погрешностей, ввиду быстрого убывания решения по этой переменной.

Тангенциальные усилия T_1 , T_2 и изгибающие моменты G_1 , G_2 в центре окружности с равномерно распределенной силой P методом интегральных преобразований Фурье представим в виде квадратур:

$$G_1 = A_1 + \nu A_2; \quad G_2 = A_2 + \nu A_1; \quad (11.2.1)$$

$$T_1 \delta_{1j} + T_2 \delta_{2j} + A_1 \delta_{1k} + A_2 \delta_{2k} = -\frac{qr}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} [b^4 R_2 \xi^2 (\eta^2 \delta_{1j} + \xi^2 \delta_{2j}) - (\xi^2 + \eta^2)^2 (\xi^2 \delta_{1k} + \eta^2 \delta_{2k})] J_0(r \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \times \\ \times [(\xi^2 + \eta^2)^4 + b^4 \xi^4]^{-1} d\xi d\eta;$$

$$b^4 = 12(1 - \nu^2) h^2 R_2^{-2}. \quad (11.2.2)$$

Здесь R_2 , h – радиус и толщина оболочки; ν – коэффициент Пуассона ее материала; $q = P(2\pi r)^{-1}$ – плотность распределения внешней силы P по окружности радиуса r ; $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; δ_{mj} , δ_{nk} – символы Кронекера; $m = \overline{1, 2}$; $n = \overline{1, 2}$.

Заменим в (11.2.2) переменные ξ , η на γ , φ , положив $\xi = \gamma \cos \varphi$, $\eta = \gamma \sin \varphi$. В новых переменных несобственный интеграл по γ выражается через функцию Макдональда $K_0(z)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma r) \gamma}{\gamma^2 + ib^2 \cos^2 \varphi} d\gamma = K_0(\sqrt{i} br \cos \varphi), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Интегрирование по φ сводится также к табличным интегралам

$$\int_0^{\pi/2} K_0(z \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} I_0(z) K_0(z);$$

$$\int_0^{\pi/2} K_0(z \cos \varphi) \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} I_1(z) K_1(z),$$

в которых I_n , K_n – модифицированные функции Бесселя порядка n .

В результате усилия и моменты в центре окружности представляются выражениями

$$T_{1,2} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{h} qr \operatorname{Im}[I_0(ar)K_0(ar) \pm I_1(ar)K_1(ar)];$$

$$A_{1,2} = \frac{qr}{2} \operatorname{Re}[I_0(ar)K_0(ar) \mp I_1(ar)K_1(ar)]; \quad (11.2.3)$$

$$a = \frac{1}{2} b\sqrt{i}.$$

Это функции влияния для определения T_j , G_j в наиболее опасной точке, центре круговой площадки нагружения, распределенной нормальной силой. Так, при равномерном распределении силы по кругу

радиуса R их приходится интегрировать от нуля до R , что несложно выполнить с помощью выражений

$$\int_0^R r I_0(ar) K_0(ar) dr = \frac{R^2}{2} [I_0(aR) K_0(aR) + I_1(aR) K_1(aR)];$$

$$\int_0^R r I_1(ar) K_1(ar) dr = \frac{R^2}{2} \left[I_1(aR) K_1(aR) + I_0(aR) K_2(aR) - \frac{2}{a^2 R^2} \right].$$

Далее следует выделить вещественную и мнимую части, используя соотношения

$$I_n(x\sqrt{i}) = e^{-\frac{\pi\pi i}{2}} [\text{ber}_n(x) + i \text{bei}_n(x)];$$

$$K_n(x\sqrt{i}) = e^{\frac{\pi\pi i}{2}} [\text{ker}_n(x) + i \text{kei}_n(x)]$$

между модифицированными функциями Бесселя комплексного аргумента и функциями Томсона.

В результате усилия и моменты в центре круга с равномерным давлением $q = P(\pi R^2)^{-1}$ представляются в замкнутом виде:

$$T_{1,2} = \frac{P\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2\pi h} [B_0 F_0 + C_0 K_0 + B_1 F_1 + C_1 K_1 \pm (B_1 F_1 + C_1 K_1 - B_0 F_2 + C_0 K_2) + 8b^{-2} R^{-2}];$$

$$A_{1,2} = \frac{P}{4\pi} [B_0 K_0 - C_0 F_0 + B_1 K_1 - C_1 F_1 \mp (B_1 K_1 - C_1 F_1 + C_0 F_2 - B_0 K_2)]. \quad (11.2.4)$$

Здесь и в дальнейшем использованы сокращенные обозначения функций Томсона

$$B_m = \text{ber}_m(\rho); \quad C_m = \text{bei}_m(\rho); \quad K_m = \text{ker}_m(\rho); \quad F_m = \text{kei}_m(\rho)$$

$$\rho = bR/2.$$

С физической точки зрения более реальными являются распределения с нулевым значением давления на контуре площадки. Поэтому остановимся на параболическом распределении

$$f(r) = q(1 - r^2 R^{-2}); \quad q = 2P(\pi R^2)^{-1}.$$

Для вычисления T_j , G_j выражения (11.2.3) теперь следует интегрировать от нуля до R с весом $f(r)$. Это не вызывает затруднений, поскольку

$$\int_0^R r^3 I_0(ar) K_0(ar) dr = \frac{R^4}{6} [I_0(aR) K_0(aR) + \frac{1}{aR} I_1(aR) K_0(aR) + I_1(aR) K_1(aR) - \frac{1}{aR} I_2(aR) K_1(aR)];$$

$$\int_0^R r^3 I_1(ar) K_1(ar) dr = \frac{R^4}{6} [I_1(aR) K_1(aR) + I_2(aR) K_2(aR)].$$

После вычисления квадратур и выделения мнимой и вещественной частей получаем

$$T_{1,2} = \frac{2P\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3\pi h} \{B_0 F_0 + C_0 K_0 + B_1 F_1 + C_1 K_1 + \frac{1}{\sqrt{2bR}} (B_0 F_1 + C_0 K_1 + B_0 K_1 - C_0 F_1) - \frac{1}{\sqrt{2bR}} (B_1 K_2 - C_1 F_2 + C_1 K_2 + B_1 T_2) \pm [B_1 F_1 + C_1 K_1 - B_0 F_2 - C_0 K_2 + \frac{\sqrt{2}}{bR} (B_1 K_2 - C_1 F_2 + B_1 F_2 + C_1 K_2) + 12b^{-2} R^{-2}]\};$$

$$A_{1,2} = \frac{P}{3\pi} \{B_0 K_0 - C_0 F_0 + B_1 K_1 - C_1 F_1 + \frac{1}{\sqrt{2bR}} (B_0 K_1 -$$

$$\begin{aligned}
 & -C_0 F_1 - C_0 K_1 - B_0 F_1) - \frac{1}{\sqrt{2}bR} (B_1 K_2 - C_1 F_2 - C_1 K_2 - B_1 F_2) \mp \\
 & \mp [B_1 K_1 - C_1 F_1 - B_0 K_2 + C_0 F_2 + \frac{\sqrt{2}}{bR} (B_1 K_2 - C_1 F_2 - \\
 & - B_1 F_2 - C_1 K_2)]].
 \end{aligned}$$

Введем далее в рассмотрение безразмерные усилия $T_j^0 = 2\pi h(P\sqrt{3(1-\nu^2)})^{-1}T_j$ и моменты $G_j^0 = P^{-1}G_j$ ($j = \overline{1, 2}$). Из приведенных решений следует, что при заданном значении ν величины G_j^0, T_j^0 определяются только одним безразмерным параметром $bR/2$. Это параметр подобия, так как оболочки с различными R_2, h, R при фиксированном $bR/2$ имеют одинаковые T_j^0, G_j^0 . Поэтому в случае длинных цилиндрических оболочек, когда можно пренебречь влиянием торцов на распределение местных напряжений, графические зависимости T_j^0, G_j^0 от $bR/2$ примут универсальный характер и могут быть использованы для расчета оболочек с различными R_2, h, R . Эти зависимости представлены на рис. 11.1, а, б. Сплошные линии

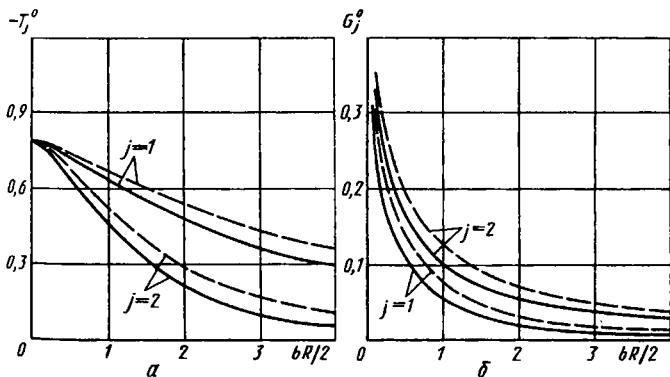


Рис. 11.1. Нормальные усилия (а) и изгибающие моменты (б) в цилиндрической оболочке при постоянной интенсивности нагрузки (сплошные линии) и параболическом распределении (штриховые линии)

Распределение нагрузки

ρ	равномерное				параболическое			
	$-T_1^0$	G_1^0	$-T_2^0$	G_2^0	$-T_1^0$	G_1^0	$-T_2^0$	G_2^0
1	0,781	0,274	0,774	0,330	0,782	0,300	0,777	0,356
...	...	0,114	0,645	0,167	0,744	0,138	0,682	0,192
1,0	0,639	0,056	0,457	0,104	0,675	0,076	0,530	0,126
2,0	0,477	0,021	0,206	0,056	0,538	0,032	0,294	0,072
4,0	0,294	0,009	0,057	0,028	0,358	0,013	0,102	0,037

Примечание: вычисления произведены по таблицам функций Томсона.

относятся к равномерному, а пунктирные — к параболическому распределению нагрузки (принято $\nu = 0,3$).

Величины T_j^0 , G_j^0 для отдельных значений $bR/2$ представлены в табл. 11.1, из которой следует, что параболическое распределение является более опасным, т.е. приводит к большим напряжениям в центре круга. Тангенциальное усилие T_1 оказывается большим, чем T_2 , что ранее отмечалось и при численном суммировании тригонометрических рядов для квадратной площадки нагружения. С увеличением значения $bR/2$ отношение моментов G_1/G_2 стремится к значению ν . Так, при $bR/2 = 4$ оно незначительно отличается от 0,3. Такое же отношение принимается в полубезмоментной теории оболочек [64], что говорит о возможности ее использования для расчетов при $bR/2 > 4$.

При небольших значениях $bR/2$ вычисление T_j^0 , G_j^0 можно проводить с помощью элементарных формул, не привлекая таблиц функций Томсона. Они получаются обрыванием степенных рядов. При равномерном распределении внешней силы два первых члена разложения дают

$$T_{1,2} = - \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \left[\frac{bR}{2} \right]^2 \left[(2 \mp 1) \ln \frac{bR}{4} - (0,3456 \pm 0,0772) \right] \right\}; \quad (11.2.5)$$

$$P^{-1}A_{1,2} = - \frac{1}{8\pi} \left[2 \ln \frac{bR}{4} - 0,1544 \pm 1 - \frac{\pi(2 \pm 1)}{16} \left[\frac{bR}{2} \right]^2 \right].$$

В случае параболического распределения в двучленном приближении находим

$$T_{1,2} = - \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} \left[\frac{bR}{2} \right]^2 \left[(2 \mp 1) \ln \frac{bR}{4} - (0,6790 \pm 0,0895) \right] \right\};$$

$$P^{-1}A_{1,2} = - \frac{1}{8\pi} \left[2 \ln \frac{bR}{4} - 0,3456 \pm 1 - \frac{\pi(2 \pm 1)}{24} \left[\frac{bR}{2} \right]^2 \right].$$

Результаты вычислений G_j^0 , T_j^0 по асимптотическим формулам представлены в табл. 11.2. Сравнение соответствующих данных в таблицах 11.1, 11.2 показывает, что при значении $bR < 1,8$ погрешность элементарных формул не превышает погрешности технической теории оболочек (порядка h/R_2 по сравнению с единицей). Поэтому неравенство $bR < 1,8$ следует рассматривать как область допустимого использования асимптотических формул, не

Т а б л и ц а 11.2

ρ	Распределение нагрузки							
	равномерное				параболическое			
	T_1^0	G_1^0	T_2^0	G_2^0	T_1^0	G_1^0	T_2^0	G_2^0
0.1	0.781	0.274	0.774	0.330	0.782	0.300	0.777	0.356
0.5	0.729	0.114	0.647	0.167	0.744	0.138	0.683	0.192
1.0	0.646	0.062	0.492	0.106	0.679	0.079	0.548	0.127
1.5	0.586	0.052	0.467	0.083	0.621	0.058	0.479	0.098

Таблица 11.3

x	Графики		Формулы (11.2.1), (11.2.5)	
	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,72	2,05	1,70	2,04
2	1,30	1,60	1,28	1,61
4	0,86	1,18	0,86	1,19
8	0,50	0,78	0,49	0,79
10	0,38	0,67	0,40	0,68

забывая о том, что использование расчетов по теории оболочек ограничено значениями $R \geq 0,68h$.

В заключение сравним результаты расчетов по формулам (11.2.1), (11.2.5) с результатами вычислений на ЭВМ [66] при значении $\nu = 0,3$; $R_2/h = 100$; $R = xh$: во второй и третьей колонках табл. 11.3 указаны значения $f_j = 6G_j$, заимствованные для различных x из опубликованных графиков, в четвертой и пятой колонках помещены f_j вычисленные по формулам (11.2.1), (11.2.5). Отклонения небольшие и обусловлены в определенной мере погрешностью графической информации. Следовательно, предложенные асимптотические формулы, являясь удобными для инженерных расчетов, обеспечивают приемлемую точность в указанном интервале изменения параметра подобия.

11.3. ПОЛОГАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Полученные ниже асимптотические результаты относятся к оболочкам нулевой и положительной гауссовой кривизны [65]. В случае поверхностей отрицательной кривизны медленное затухание возмущений позволяет пренебречь влиянием граничных условий. Замена функций Грина фундаментальными решениями приводит к некоторой потере точности замкнутых решений.

Общие асимптотические представления изгибающих моментов. При построении различных зависимостей исходим из уравнений теории пологих оболочек, фундаментальные решения которых разлагаются в степенной ряд с логарифмом по полярному радиусу n

тригонометрический ряд по полярному углу [65]. Ориентируясь на получение элементарных расчетных формул, ограничимся двучленным приближением в рядах, согласно которому вычисление изгибающих моментов $G_{1,2}$ сводится к интегралам

$$G_1 = A_1 + \nu A_2; \quad G_2 = A_2 + \nu A_1;$$

$$A_{1,2}(x_1, y_1) = \iint_{\Omega} q(x, y) \Phi_{1,2}(x, y, x_1, y_1) dx dy;$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} = & -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2\pi \frac{b(1 + \sqrt{\lambda})r}{4} + 1,1544 \pm \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} \pm \right. \\ & \pm \frac{X^2 - Y^2}{r^2} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{bR}{2} \right)^2 \left[\frac{2 \pm 1 \cdot \lambda(2 \mp 1)}{2} \pm \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{1 \pm 1 \cdot \lambda \mp \lambda}{2} \frac{X^2 - Y^2}{r^2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

$$X = x_1 - x; \quad Y = y_1 - y; \quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2};$$

$$b^4 = 12(1 - \nu^2)h^{-2}R_2^{-2}; \quad \lambda = R_2R_1^{-1}.$$

Здесь $R_2 < R_1$ — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки толщиной h ; ν — коэффициент Пуассона; x, y — координаты точки приложения нагрузки; x_1, y_1 — координаты расчетной точки в местной системе, начало которой находится в центре области нагружения Ω ; $q(x, y)$ — плотность распределения нагрузки; ось ox лежит в плоскости наименьшей кривизны.

В разложениях фундаментальных решений в ряды можно удерживать и более высокие приближения. Однако это усложнит конечные асимптотические формулы, не повышая существенно их точности для небольших размеров областей нагружения.

Изгибающие моменты являются основными компонентами напряженного состояния оболочки при действии нормальной локальной нагрузки. Поэтому остальные, как второстепенные, ниже определять не будем.

Аналитическое вычисление интегралов (11.3.1) для канонических

форм площадок не вызывает затруднений, если плотность распределения нагрузки аппроксимировать с помощью элементарных функций. В результате удается получить простые расчетные формулы. Остановимся на их построении для наиболее распространенных в расчетной и конструкторской практике случаев нагружения оболочек. Рассмотрим прямоугольную и эллиптическую область Ω .

Прямоугольная область $2a_0 \times 2b_0$. Будем считать, что величины $2a_0$ и $2b_0$ определяют ее размеры соответственно в направлении осей x, y . Внешняя сила P равномерно распределена по области, так что плотность задается функцией

$$q(x, y) = \begin{cases} P(4a_0 b_0)^{-1}, & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (11.3.2)$$

Определим изгибающие моменты в центре площадки ($x_1 = 0, y_1 = 0$), где они достигают наибольших значений. Выполнив интегрирование в (11.3.1) с учетом (11.3.2), получаем

$$\begin{aligned} A_j = & -\frac{P}{8\pi} \left\{ 2\ln \frac{b(1 + \sqrt{\lambda})(a_0^2 + b_0^2)^{1/2}}{4} - \right. \\ & - (-1)^j \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} - 1,8456 + \gamma_j - \frac{\pi b^2}{48} \times \\ & \times \left[\left[5 - 2j - \frac{1 - \lambda}{2} \right] a_0^2 + (2j - 1 - 2j(1 - \lambda)) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} (1 - \lambda) b_0^2 \right] \right\}, \quad j = \overline{1, 2}; \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

$$\gamma_1 = \frac{2a_0}{b_0} \operatorname{arctg} \frac{b_0}{a_0}; \quad \gamma_2 = \frac{2b_0}{a_0} \operatorname{arctg} \frac{a_0}{b_0}.$$

Для цилиндрической оболочки, нагруженной по квадратной области, формулы (11.3.3) при $\nu = 0,3$ приводят к следующим значениям изгибающих моментов:

$$G_1 = -P \left[0,0517 \ln \left[\frac{R}{h} \delta_0^2 \right] - 0,0321 - 0,0284 \left[\frac{R}{h} \delta_0^2 \right] \right];$$

$$G_2 = -P \left[0,0517 \ln \left[\frac{R}{h} \delta_0^2 \right] - 0,0878 - 0,0163 \left[\frac{R}{h} \delta_0^2 \right] \right]. \quad (11.3.4)$$

Здесь $\delta_0 = a_0 R^{-1}$, R – радиус цилиндра.

Представляет интерес сравнение расчетных величин моментов по асимптотическим формулам (11.3.4) с имеющимися результатами суммирования тригонометрических рядов на ЭВМ. Такое сравнение представлено табл. 11.4. В первой части содержатся безразмерные значения момента $G_1 P^{-1}$, а во второй – $G_2 P^{-1}$ для различных размеров площадки нагружения (параметра δ_0) и отношений радиуса оболочки к ее толщине. Результаты расчетов по асимптотическим формулам незначительно отличаются от значений, снимаемых с номограмм [64]. Таким образом, принятое выше двучленное приближение фундаментальных решений обеспечивает хорошую точность для небольших размеров площадок нагружения. Это будет достигаться и для других форм площадок, размеры которых удовлетворяют неравенству

$$b \sup(a_0, b_0) < 2.$$

Вторым условием применимости асимптотических формул (11.3.1) является достаточная удаленность области нагружения от края оболочки. Для сферической поверхности это удаление должно быть не менее $2b^{-1}$. В случае поверхностей других форм оно должно быть гораздо большим, так как сферическая оболочка характеризуется наиболее быстрым затуханием локальных возмущений.

Решения в виде тригонометрических рядов сходятся очень медленно при действии локальных нагрузок моментного типа. Имеющиеся асимптотические формулы в этом случае существенно завышают значения напряжений. Поэтому рассмотрим далее воздействие внешнего момента M , распределенного по закону

$$q(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} M (b_0 a_0^3)^{-1} x, & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Таблица 11.4

Rh^{-1}	δ_0	$R\delta_0^2 h^{-1}$	Номограммы	Асимптотическая формула
Значения $G_1 P^{-1}$				
100	0,030	0,090	0,15	0,159
150	0,010	0,015	0,25	0,249
400	0,015	0,090	0,15	0,159
400	0,050	1,000	0,05	0,060
900	0,100	0,900	0,16	0,159
Значения $G_2 P^{-1}$				
50	0,08	0,32	0,15	0,152
150	0,02	0,06	0,25	0,234
400	0,03	0,36	0,15	0,146
400	0,05	1,00	0,10	0,104
600	0,04	0,96	0,10	0,105

Вычислив интегралы (11.3.1) на краю площадки ($x_1 = a_0, y_1 = 0$), где изгибающие моменты максимальны, получаем:

$$A_1 = \frac{M}{8\pi a_0^3} \left\{ a_0^2 + 4 \frac{a_0^3}{b_0} \operatorname{arctg} \frac{b_0}{2a_0} + \frac{b_0^2}{4} \ln \frac{b_0^2}{b_0^2 + 4a_0^2} - \frac{\pi}{16} (5 + \lambda) b^2 a_0^4 \right\}; \quad (11.3.5)$$

$$A_2 = \frac{3M}{16\pi a_0^3} \left\{ 2a_0^2 + \frac{b_0^2}{2} \ln \frac{b_0^2 + 4a_0^2}{b_0^2} - 2a_0 \operatorname{arctg} \frac{2a_0}{b_0} - \frac{\pi}{24} (1 + \lambda) b^2 a_0^4 \right\}.$$

Эти выражения значительно упрощаются при нагружении оболочки по квадратной области. Тогда

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{M}{a_0} (B_1 + \nu B_2); \\
 G_2 &= \frac{M}{a_0} (B_2 + \nu B_1); \\
 B_1 &= 0,0976 - 0,0078(5 + \lambda)(ba_0)^2; \\
 B_2 &= 0,0352 - 0,0078(1 + \lambda)(ba_0)^2.
 \end{aligned} \tag{11.3.6}$$

Если вектор внешнего момента M коллинеарен оси x и плотность нагрузки задана функцией

$$q(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} M(a_0 b_0^3)^{-1} y, & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

определение $A_{1,2}$ сводится к формулам (11.3.5), в которых нужно заменить $a_0 \rightarrow b_0$, $(5 + \lambda) \rightarrow (1 + \lambda)$, $(1 + \lambda) \rightarrow (1 + 5\lambda)$.

Чтобы судить о точности формул (11.3.6), сравним значения, к которым они приводят, с имеющимися данными расчетов. Полагая $\nu = 0,3$; $R_2/h = 300$; $a_0/R_2 = 0,01$, для цилиндра ($\lambda = 0$) и сферы ($\lambda = 1$) находим соответственно $10^5 G_1 a_0 M^{-1} = 10404$; $10^5 G_2 a_0 M^{-1} = 6257$; $10^5 G_1 a_0 M^{-1} = 10303$; $10^5 G_2 a_0 M^{-1} = 6157$.

Комбинированным методом для этих параметров получены следующие результаты: 10444, 6278 и 10353, 6187. Малые отличия асимптотических результатов от данных численного суммирования тригонометрических рядов на ЭВМ свидетельствуют о том, что при $ba_0 < 0,5$ формулы (11.3.6) обеспечивают хорошую точность.

Эллиптическая область нагружения. Пусть a_0 и b_0 являются полуосями эллипса в направлении осей x и y . Примем распределение внешней силы P равномерным, когда $q(x, y) = P(\pi a_0 b_0)^{-1}$. Вычислив интегралы (11.3.1) для центра площадки ($x_1 = 0, y_1 = 0$), имеем

$$A_{1,2} = -\frac{P}{8\pi} \left\{ 2\pi \frac{b(a_0 + b_0)(1 + \sqrt{\lambda})}{8} + \right. \\
+ 0,1544 \pm \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \pm \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} - \frac{\pi b^2}{64} \times \\
\left. \times \left[(2 \pm 1)a_0^2 + (2 \mp 1)b_0^2 - (1 - \lambda) \frac{a_0^2 + (3 \mp 2)b_0^2}{2} \right] \right\}.$$

Из этих выражений как частный случай при $a_0 = b_0$ следуют известные результаты для круга.

Рассмотрим линейное распределение нагрузки по одной из переменных, когда внешнее воздействие сводится к моменту M . Полагая

$$q(x, y) = \begin{cases} M \left(\frac{\pi}{4} b_0 a_0^3 \right)^{-1} x, & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

после вычисления интегралов в точке $x_1 = a_0$, $y_1 = b_0$ для наибольших значений моментов, получаем

$$A_1 = \frac{M}{2\pi(a_0 + b_0)} \left[\frac{3 + a}{2} + \frac{1}{6} (2a^2 + 3a - 1) - \right. \\
\left. - \frac{\pi}{64} (5 + \lambda) b^2 a_0 (a_0 + b_0) \right];$$

$$a = \frac{b_0 - a_0}{b_0 + a_0}; \quad (11.3.7)$$

$$A_2 = \frac{Ma_0}{\pi(a_0 + b_0)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} (1 + 2a) - \frac{\pi}{128} \times \right. \\
\left. \times (1 + \lambda) b^2 (a_0 + b_0)^2 \right].$$

Полагая в формулах (11.3.7) $a_0 = b_0$, приходим к нагружению панели по кругу.

Представляет интерес нагружение оболочки по замкнутой линии в виде эллипса. Переходя от распределения момента M по площадке к нагружению по линии, вместо (11.3.7) в точке $x_1 = a_0$, $y_1 = 0$ получаем

$$A_1 = M \left[\frac{3 \cdot a}{4\pi(a_0 + b_0)} - \frac{1}{128} (5 + \lambda)b^2 a_0 \right]; \quad (11.3.8)$$

$$A_2 = M \left[\frac{a_0}{2\pi(a_0 + b_0)^2} - \frac{1}{128} (1 + \lambda)b^2 a_0 \right].$$

Расчет такого воздействия путем суммирования тригонометрических рядов приведен на ЭВМ. Поэтому для анализа погрешностей формул (11.3.8) сравним результаты вычислений. Полагая в (11.3.8) $R_2 = 1$ м; $\nu = 0,3$; $h = 4 \cdot 10^{-3} R_2$; $a_0 = 0,02 R_2$; $b_0 = 0,03 R_2$ для цилиндрической ($\lambda = 0$) и сферической ($\lambda = 1$) поверхностей, получаем соответственно $10^5 G_1 a_0 M^{-1} = 9581$; $10^5 G_2 a_0 M^{-1} = 4957$; $10^5 G_1 a_0 M^{-1} = 9246$; $10^5 G_2 a_0 M^{-1} = 4621$. При удержании 400×400 членов найдены следующие результаты: 9663, 5002, 9418, 4757. Таким образом, погрешность асимптотических формул в этом примере не превышает 3 %.

Если внешний момент коллинеарен оси x и его распределение задано линейной функцией

$$q(x, y) = \begin{cases} M \left(\frac{\pi}{4} a_0 b_0^3 \right) y, & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

в формулах (11.3.7)–(11.3.8), как и в случае прямоугольника, следует заменить $a_0 \rightarrow b_0$, $(5 + \lambda) \rightarrow (1 + \lambda)$, $(1 + \lambda) \rightarrow (1 + \lambda)$.

Отметим, что аналитическое интегрирование не вызывает затруднений и в случае других областей Ω , что позволяет рассмотреть действие нагрузок по треугольнику, ромбу и другим формам областей.

ГЛАВА 12 СИЛОВАЯ И ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В современной технике, в частности в конструкциях летательных аппаратов, широкое применение находят различные элементы, выполненные из материалов, обладающих механической и тепловой анизотропией, из которых значительное число можно отнести к классу ортотропных. Теория упругости анизотропного тела и анизотропных оболочек явилась основой не только для создания конструкций из композиционных материалов, например типа корпусов ЛА, но и для конструирования самих композиционных материалов, что привело, по сути, к созданию нового направления в науке и технике — технологической механики.

Здесь особенно эффективным оказывается применение асимптотических методов, позволяющих произвести априорный анализ решений дифференциальных уравнений и отбросить несущественные, а порой весьма громоздкие, как, например, в теории анизотропных оболочек, слагаемые. В значительной степени это относится к напряженному состоянию оболочек при локализованных силовых и температурных воздействиях, которым уделяется здесь основное внимание.

12.1. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Принимаем, что оболочка может быть подвергнута произвольному температурному полю, но интенсивность нагрева не настолько велика, чтобы при этом существенно повлиять на физико-механические характеристики материала. Так что модули упругости и коэффициенты линейного температурного расширения принимаются постоянными в любой точке оболочки.

Тогда, если следовать обычно принимаемым гипотезам термоупругости, а также принять, что справедливы гипотезы Кирхгофа—Лява, задача может быть сведена к решению системы трех дифференциальных уравнений в перемещениях, которая представлена в виде табл. 12.1.

Усилия и изгибающие моменты выражаются через перемещения $u(a, \beta)$, $v(a, \beta)$, $w(a, \beta)$ на основании обобщенного закона Гука с помощью следующих соотношений:

$$T_1(a, \beta) = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \omega \right) + c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \right] - T_{1t}(a, \beta); \quad (12.1.1)$$

$$T_2(a, \beta) = \frac{E_2 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial v}{\partial \beta} - \omega + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \omega \right) \right] - T_{2t}(a, \beta);$$

$$S_1(a, \beta) = \frac{Gh}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \right];$$

$$S_2(a, \beta) = \frac{Gh}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \right];$$

$$G_1(a, \beta) = - \frac{D_1}{R^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \omega + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial \beta} \right] - G_{1t}(a, \beta);$$

$$G_2(a, \beta) = - \frac{D_2}{R^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \omega + \omega \right] - G_{2t}(a, \beta).$$

Здесь приняты обозначения:

$$T_{1t}(a, \beta) = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (a_{1t} + \nu_2 a_{2t}) t^{\circ} (a, \beta); \quad (12.1.2)$$

$$T_{2t}(a, \beta) = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) t^{\circ} (a, \beta);$$

$$G_{1t}(a, \beta) = \frac{2}{h} D_1 (a_{1t} + \nu_2 a_{2t}) t^{\circ\circ} (a, \beta) = \\ = \frac{(a_{1t} + \nu_2 a_{2t}) E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^2}{6} t^{\circ\circ} (a, \beta);$$

$u(a, \beta)$ $v(a, \beta)$ $w(a, \beta)$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (\nu_2 + \mu_1) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \quad -\nu_2 \frac{\partial}{\partial a} \cdot c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right]$$

$$(\nu_2 + \mu_1) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \quad \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \quad -\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot c^2 (\nu_2 + 3\mu_1) \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta}$$

$$-\nu_2 \frac{\partial}{\partial a} \cdot \quad -\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \quad \lambda + c^2 \left[\frac{\partial^4}{\partial a^4} + 2(\nu_2 + 2\mu_1) \times \right. \\ \left. \cdot c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial a^3} - \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right] \right] \times \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \lambda \\ \left. - \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \right] \times \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \beta}$$

Примечание: $K_1 = E_1 h / (1 - \nu_1 \nu_2)$.

$$G_{2l}(a, \beta) = \frac{2}{h} D_2 (a_{2l} - \nu_1 a_{1l}) t^{**}(a, \beta) = \\ = \frac{(a_{2l} - \nu_1 a_{1l}) E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^2}{6} t^{**}(a, \nu);$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

где E_1, E_2 — модули упругости материала в направлении a и β соответственно; G — модуль сдвига; ν_1 — коэффициент поперечного сжатия

Правая часть

силовая
нагрузка

температурное воздействие

$$-p_1 \frac{R^2}{K_1} (a_{1t} + \nu_2 a_{2t}) R \frac{\partial t^{\circ}}{\partial a}$$

0

$$-p_2 \frac{R^2}{K_1} (a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) \lambda R \frac{\partial t^{\circ}}{\partial \beta}$$

$$- \frac{a_{2t} + \nu_1 a_{1t}}{6} \lambda h \frac{\partial t^{\circ\circ}}{\partial \beta}$$

$$p \frac{R^2}{K_1} -(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) \lambda R t^{\circ}$$

$$\left[\frac{a_{1t} + \nu_2 a_{2t}}{6} h \frac{\partial^2 t^{\circ\circ}}{\partial a^2} + \frac{a_{2t} + \nu_1 a_{1t}}{6} h \lambda \frac{\partial^2 t^{\circ\circ}}{\partial \beta^2} \right]$$

в направлении β при растяжении в направлении a ; ν_2 — коэффициент поперечного сжатия в направлении a при растяжении в направлении β ; a_{1t} , a_{2t} — коэффициенты линейного температурного расширения в направлении a и β соответственно; $t^{\circ}(a, \beta)$ — температура средней поверхности оболочки. Она определяется через температуру внутренней $t_1(a, \beta)$ и наружной $t_2(r, \beta)$ поверхностей оболочки:

$$t^{\circ} = (t_2 + t_1)/2; \quad (12.1.3)$$

$t^{\circ\circ}(a, \beta)$ характеризует перепад температуры по толщине стенки

$$t^{\circ\circ} = \frac{1}{2} (t_2 - t_1). \quad (12.1.4)$$

По модулю величина $t^{**}(a, \beta)$ равна половине перепада температуры по толщине стенки.

Силовая нагрузка $p_1(a, \beta)$, $p_2(a, \beta)$, $p(a, \beta)$ направлена соответственно вдоль образующей, контура и по нормали к поверхности оболочки.

12.2. СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИЯ РАДИАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим действие на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку самоуравновешенной системы локальных радиальных нагрузок, приложенных в одном поперечном сечении. Для удобства исходную систему трех дифференциальных уравнений в перемещениях, записанную в виде табл. 12.1, сведем к одному разрешающему уравнению относительно функции $\Phi(a, \beta)$, предварительно приняв, что задача является изотермической, а продольная и окружная нагрузки отсутствуют.

Имеем разрешающее уравнение

$$\mathcal{L}\Phi(a, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p(a, \beta), \quad (12.2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathcal{L} = & \frac{\partial^8}{\partial a^8} + a_{6.2} \frac{\partial^8}{\partial a^6 \partial \beta^2} + 2\nu_2 \frac{\partial^6}{\partial a^6} + \\ & + a_{4.4} \frac{\partial^8}{\partial a^4 \partial \beta^4} + a_{4.2} \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial a^4} + \\ & + a_{2.6} \frac{\partial^8}{\partial a^2 \partial \beta^6} + a_{2.4} \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} + a_{2.2} \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} + \\ & + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4}{\partial a^4}; \quad (12.2.2) \end{aligned}$$

$$a_{6.2} = \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1;$$

$$a_{4.4} = 2\lambda \left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_2} (1 - \nu_1 \nu_2) - 4\nu_1 (\nu_2 + \mu_1) \right];$$

$$a_{4,2} = a_{4,4}; \quad a_{2,6} = \lambda a_{6,2}; \quad a_{2,4} = 2\lambda(a_{6,2} - \nu_2);$$

$$a_{2,2} = \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right]; \quad \lambda = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}; \quad (12.2.2)$$

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad \mu_i = \frac{G}{E_i} (1 - \nu_1 \nu_2);$$

$$i = 1, 2; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие факторы находятся через разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$:

$$u(\alpha, \beta) = \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} - \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - c^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + \frac{1}{\mu_1} [\lambda - (\nu_2 + 2\mu_1)^2] \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \lambda \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right\} \Phi;$$

$$v(\alpha, \beta) = \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - \quad (12.2.3)$$

$$- 2c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (\nu_2 + 2\mu_1) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta};$$

$$w(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \Phi;$$

$$T_1(\alpha, \beta) = - \frac{E_1 h}{R} \left\{ \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \frac{2c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \times \right.$$

$$\times \left. \left[2\mu_1 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + (\lambda - \nu_2^2 - 2\nu_2 \mu_1) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} \right] \right\} \Phi.$$

$$\begin{aligned}
T_2(a, \beta) &= -\frac{E_2 h}{R} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial a^4} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\nu_1 \frac{\partial^6}{\partial a^6} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(3 + \lambda \frac{\nu_1}{\mu_1} - \frac{\nu_1}{\mu_1} (\nu_2 + 2\mu_1)^2 \right) \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - \nu_2 \right) \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} + \lambda \frac{\partial^6}{\partial \beta^6} \right] \right\} \Phi; \\
S_1(a, \beta) &= \frac{Gh}{R} \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta} - 2c^2 \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^5 \partial \beta} - \lambda \frac{\partial^6 \Phi}{\partial a \partial \beta^5} \right] \right]; \\
S_2(a, \beta) &= \frac{Gh}{R} \left\{ \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial a^3 \partial \beta} - \right. \\
&- \left. 2c^2 \left[2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial a^5 \partial \beta} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^6}{\partial a^3 \partial \beta^3} \right] \right\}; \quad (12.2.3) \\
G_1(a, \beta) &= -\frac{D_1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^6}{\partial a^6} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \right. \\
&+ \nu_2 \frac{\partial^4}{\partial a^4} + \left. \left[\lambda + \nu_2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \right] \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} - \right. \\
&- \left. \left[\lambda + \nu_2^2 - \frac{(\lambda - \nu_2^2)\nu_2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} + \lambda \nu_2 \left[\frac{\partial^6}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \right\} \Phi; \\
G_2(a, \beta) &= -\frac{D_2}{R^2} \left\{ \nu_1 \frac{\partial^6}{\partial a^6} + \frac{\partial^4}{\partial a^4} + \left[1 + \frac{(\lambda - \nu_2^2)\nu_1}{\mu_1} - \right. \right. \\
&- \left. \left. 2\nu_1 \nu_2 \right] \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right\} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \left[\frac{\partial^6}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \Phi.$$

Поместим начало координат в середине одной из нагруженных $k > 2$ областей, а нагрузку $p(\alpha, \beta)$ представим в виде ряда Фурье в окружном направлении и интеграла Фурье – в продольном

$$p(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \int_0^1 \frac{1}{\omega} \sin \alpha_0 \omega \cos \alpha \omega d\omega. \quad (12.2.4)$$

Решение уравнения (12.2.1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k n \beta \int_0^1 \Phi_n(\omega) \cos \alpha \omega d\omega. \quad (12.2.5)$$

В результате очевидных подстановок и преобразований находим разрешающую функцию, а затем – искомые перемещения и силовые факторы:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) &= \frac{6(1 - \nu_1 \nu_2)}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \frac{P}{E_1 R} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\sin \alpha_0 \omega}{\omega \tilde{\alpha}(\omega, \tilde{n})} \cos \alpha \omega d\omega; \\ \frac{E_2 R}{P} w(\alpha, \beta) &= \frac{6(1 - \nu_1 \nu_2) \lambda}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\sin \alpha_0 \omega}{\omega \tilde{\alpha}(\omega, \tilde{n})} \left[\omega^4 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \omega^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right] \cos \alpha \omega d\omega; \\ \frac{R}{P} T_i(\alpha, \beta) &= - \frac{6(1 - \nu_1 \nu_2) \lambda}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos k n \beta \times \\ &\times \int_0^1 \frac{t_i(\omega, \tilde{n}) \sin \alpha_0 \omega}{\omega \tilde{\alpha}(\omega, \tilde{n})} \cos \alpha \omega d\omega; \end{aligned} \quad (12.2.6)$$

$$\frac{1}{P} G_i(a, \beta) = \frac{1}{2\pi a_0 \beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{g_i(\omega, \bar{n}) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}(\omega, \bar{n})} \cos a \omega d\omega, \quad i = 1, 2.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\mathcal{L}(\omega, \bar{n}) = \omega^8 + a_{6,2} \omega^6 \bar{n}^2 - 2\nu_2 \omega^6 + a_{4,4} \omega^4 \bar{n}^4 - a_{4,2} \omega^4 \bar{n}^2 + \\ + \lambda \omega^4 + a_{2,6} \omega^2 \bar{n}^6 - a_{2,4} \omega^2 \bar{n}^4 + a_{2,2} \omega^2 \bar{n}^2 + \lambda^2 \bar{n}^4 (\bar{n}^2 - 1)^2 + \\ + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \omega^4; \quad (12.2.7)$$

$$t_1(\omega, \bar{n}) = \omega^2 \bar{n}^2 + \frac{2c^2}{\lambda(1 - \nu_1 \nu_2)} [2\mu_1 \omega^4 \bar{n}^2 + \\ + (\lambda - \nu_2^2 - 2\nu_2 \mu_1) \omega^2 \bar{n}^4]; \\ t_2(\omega, \bar{n}) = \omega^4 \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\nu_1 \omega^6 + \left[3 + \lambda \frac{\nu_1}{\mu_1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu_1}{\mu_1} (\nu_2 + 2\mu_1)^2 \right] \omega^4 \bar{n}^2 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - \nu_2 \right] \omega^2 \bar{n}^4 + \lambda \bar{n}^6 \right]; \\ g_1(\omega, \bar{n}) = \omega^6 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \omega^4 \bar{n}^2 - \nu_2 \omega^4 + \\ + \left[\lambda + \nu_2 \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \omega^2 \bar{n}^4 + \left[\lambda + \nu_2^2 - \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \nu_2 \right] \omega^2 \bar{n}^2 + \right. \\ \left. + \lambda \nu_2 \bar{n}^4 (\bar{n}^2 - 1) \right]; \quad (12.2.8)$$

$$g_2(\omega, \bar{n}) = \lambda \left\{ \nu_1 \omega^6 + \left[1 + \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \nu_1 - 2\nu_1 \nu_2 \right] \omega^4 \bar{n}^2 - \omega^4 + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right\} \omega^2 \bar{n}^4 - \left\{ \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right\} \omega^2 \bar{n}^2 + \lambda \bar{n}^4 (\bar{n}^2 - 1) \Big\}.$$

Решение, построенное на основе точных уравнений теории ортотропных оболочек, позволяет найти напряженно-деформированное состояние оболочки с высокой степенью точности, но требует проведения трудоемкой вычислительной работы. Вычислительные трудности существенно растут при локализации нагрузки и особенно при решении краевых задач для оболочек конечной длины, когда граничные условия отличны от классических (шарнирного закрепления). Их удается избежать полностью или в значительной степени, если применить один из предложенных в гл. 5 методов синтеза напряженного состояния. При этом в случае рассмотрения физически ортотропных оболочек формулы (5.2.1), (5.2.15) для номеров гармоник $n = \bar{n}$, $n = \bar{n}$, определяющих границы использования приближенных уравнений, обобщаются и принимают вид

$$n^4 = 2\sqrt{3} \frac{R}{h} \left[\sqrt{\lambda} \left[\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right] - \frac{\nu_2}{2} \right] \times \\ \times \left[\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right]^{-2}; \quad (12.2.9)$$

$$n^4 = 6(1 - \nu_1 \nu_2) \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_2} (1 - \nu_1 \nu_2) - \right. \\ \left. - 4\nu_1 (\nu_2 + \mu_1) \right]^{-1}. \quad (12.2.10)$$

Округленные до ближайшего целого числа значения n , определяемые по формулам (12.2.9), (12.2.10), равны соответственно \bar{n} , \bar{n} . Первое из них найдено из условия минимума асимптотической погрешности, второе — путем прямого сравнения членов в (12.2.7), содержащих множитель ω^4 , и принятия предположения о возможности пренебрежения величинами порядка $\sqrt{R/h}$ по сравнению с единицей при использовании приближенных уравнений теории оболочек.

Полное напряженное состояние, таким образом, при наличии значительных \bar{n} , \bar{n} может быть построено на основе одного из трех упомянутых методов синтеза напряженного состояния.

В соответствии с идеей третьего метода разрешающая функция записывается приближенно:

$$\Phi(a, \beta) = \underbrace{\Phi^0(a, \beta) + \Phi^K(a, \beta)}_{n < n^*} + \underbrace{\Phi^M(a, \beta)}_{n > n^*}. \quad (12.2.11)$$

Здесь слагаемые представляют собой основное состояние, крайовой эффект и изгибное состояние соответственно. Тогда с учетом роли компонентов основного состояния, локального крайowego эффекта и изгибного состояния для силовых факторов получим

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} T_1(a, \beta) &= - \frac{6(1-\nu_1\nu_2)\lambda}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sum_n^{n^*} \theta_n \cos k_n \beta \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{t_1^0(\omega, n) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}^0(\omega, \tilde{n})} \cos a \omega d\omega; \\ \frac{R}{P} T_2(a, \beta) &= - \frac{6(1-\nu_1\nu_2)\lambda}{\pi a_0 \beta_0} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{t_2^K(\omega) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}^K(\omega)} \cos a \omega d\omega \sum_{n=0}^\infty \theta_n \cos k_n \beta; \\ \frac{1}{P} T_3(a, \beta) &= \\ &= - \frac{1}{2\pi a_0 \beta_0} \left\{ \sum_n^{n^*} \theta_n \cos k_n \beta \int_0^\infty \frac{g_i^0(\omega, \tilde{n}) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}^0(\omega, \tilde{n})} \cos r \omega d\omega + \right. \\ &+ \int_0^\infty \frac{g_i^K(\omega) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}^K(\omega)} \cos a \omega d\omega \sum_{n=0}^{n^*} \theta_n \cos k_n \beta + \\ &\left. + \sum_{n^*+1}^\infty \theta_n \cos k_n \beta \int_0^\infty \frac{g_i^M(\omega, \tilde{n}) \sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}^M(\omega, \tilde{n})} \cos r \omega d\omega \right\}, \end{aligned} \quad (12.2.12)$$

$$\text{где } \mathcal{L}^0(\omega, \tilde{n}) = \frac{\lambda(1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2} \left[\omega^4 + \frac{c^2 \lambda}{1 - \nu_1 \nu_2} \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \right];$$

$$\mathcal{L}^K(\omega) = \omega^4 \left[\omega^4 + \frac{\lambda(1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2} \right];$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^H(\omega, \tilde{n}) &= [\omega^4 + 2(\nu_2 + 2\mu_1)\omega^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4] \times \\ &\times \left[\omega^4 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \omega^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right]; \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

$$f_1^0(\omega, \tilde{n}) = \omega^2 \tilde{n}^2; \quad f_2^K(\omega) = \omega^4; \quad g_2^0(\omega, \tilde{n}) = \lambda \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1);$$

$$g_1^0(\omega, \tilde{n}) = \nu_2 g_2^0(\omega, \tilde{n}); \quad g_1^H(\omega) = \omega^6; \quad g_2^K(\omega) = \nu_2 \omega^6;$$

$$\begin{aligned} g_1^H(\omega, \tilde{n}) &= \omega^6 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \omega^4 \tilde{n}^2 + \\ &+ \left[\lambda + \nu_2 \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \right] \omega^2 \tilde{n}^4 + \lambda \nu_2 \tilde{n}^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2^H(\omega, \tilde{n}) &= \nu_1 \omega^6 + \left[1 + \nu_1 \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \right] \omega^4 \tilde{n}^2 + \\ &+ \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \omega^2 \tilde{n}^4 + \lambda \tilde{n}^6. \end{aligned}$$

Примем для модуля зависимость $G = \sqrt{E_1 E_2} [2 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}]^{-1}$ и вычислим интегралы, входящие в (12.2.12), тогда найдем

$$\frac{R}{P} T_1(a, \beta) = - \frac{\sqrt{3(1 - \nu_1 \nu_2)}}{2\pi a_0 \beta_0 \sqrt{\lambda}} - \frac{R}{h} \sum_n \frac{\sin k n \beta_0}{n(\tilde{n}^2 - 1)} f_{1n}^0(a) \alpha \nu \tilde{n} \beta;$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} T_2(a, \beta) &= -\frac{1}{8a_0\beta_0} t_2^K(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta; \\ \frac{1}{P} G_1(a, \beta) &= \frac{1}{16a_0\beta_0\sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)\lambda}} \frac{h}{R} g^K(a) \times \\ &\times \sum_{n=0}^n \theta_n \cos n\beta + \frac{\nu_1}{4\pi a_0\beta_0} \sum_n \frac{\sin kn\beta_0}{n(n^2-1)} g_n^0(a) \cos n\beta + \\ &+ \frac{1}{4\pi a_0\beta_0 k^2 \sqrt{\lambda}} \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^3} g_{1n}^N(a) \cos n\beta; \end{aligned} \quad (12.2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(a, \beta) &= \frac{1}{4\pi a_0\beta_0} \sum_n \frac{\sin kn\beta_0}{n(n^2-1)} g_n^0(a) \cos n\beta + \\ &+ \frac{\nu_2}{16a_0\beta_0\sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)\lambda}} \frac{h}{R} g^K(a) \sum_{n=0}^n \theta_n \cos n\beta + \\ &+ \frac{1}{4\pi a_0\beta_0 k^2} \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^3} g_{2n}^N(a) \cos n\beta. \end{aligned}$$

В формулах (12.2.14) приняты обозначения:

$$t_{1n}^0(a) = \begin{cases} \zeta_n(a_0 - |a|) + \zeta_n(a_0 + |a|); \\ \zeta_n(|a| + a_0) - \zeta_n(|a| - a_0); \end{cases}$$

$$t_2^K(a) = \begin{cases} 2 - \chi(a_0 - |a|) - \chi(a_0 + |a|); \\ \chi(|a| - a_0) - \chi(|a| + a_0); \end{cases}$$

$$g_n^0(a) = \begin{cases} 2 - \chi_n(a_0 - |a|) - \chi_n(a_0 + |a|); \\ \chi_n(|a| - a_0) - \chi_n(|a| + a_0); \end{cases}$$

$$g_n^k(a) = \begin{cases} \zeta(a_0 - |a|) + \zeta(a_0 + |a|); \\ \zeta(|a| + a_0) - \zeta(|a| - a_0); \end{cases} \quad (12.2.15)$$

$$g_{1n}^n(a) = \begin{cases} 2\bar{\nu} - \frac{1}{2}[2\bar{\nu} - (1 - \bar{\nu})\bar{n}(a_0 - |a|)]e^{-\bar{n}(a_0 - |a|)} - \\ - \frac{1}{2}[2\bar{\nu} - (1 - \bar{\nu})\bar{n}(a_0 + |a|)]e^{-\bar{n}(a_0 + |a|)}; \\ - \frac{1}{2}[2\bar{\nu} - (1 - \bar{\nu})\bar{n}(|a| + a_0)]e^{-\bar{n}(|a| + a_0)} + \\ + \frac{1}{2}[2\bar{\nu} - (1 - \bar{\nu})\bar{n}(|a| - a_0)]e^{-\bar{n}(|a| - a_0)}; \end{cases}$$

$$g_{2n}^n(a) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}[2 + (1 - \bar{\nu})\bar{n}(a_0 - |a|)]e^{-\bar{n}(a_0 - |a|)} \\ - \frac{1}{2}[2 + (1 - \bar{\nu})\bar{n}(a_0 + |a|)]e^{-\bar{n}(a_0 + |a|)}; \\ \frac{1}{2}[2 + (1 - \bar{\nu})\bar{n}(|a| - a_0)]e^{-\bar{n}(|a| - a_0)} - \\ - \frac{1}{2}[2 + (1 - \bar{\nu})\bar{n}(|a| + a_0)]e^{-\bar{n}(|a| + a_0)}; \end{cases}$$

$$\chi_n(a) = e^{-\frac{\mu_n a}{n}} \cos \mu_n a; \quad \zeta_n(a) = e^{-\frac{\mu_n a}{n}} \sin \mu_n a;$$

$$\chi(a) = e^{-\frac{\eta a}{n}} \cos \eta a; \quad \zeta(a) = e^{-\frac{\eta a}{n}} \sin \eta a;$$

$$\mu_n = \frac{k n \sqrt{k^2 n^2 - 1}}{2 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2) \lambda^{-1}}} \sqrt{\frac{\hbar}{R}}; \quad \eta = \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2) \lambda} \sqrt{\frac{R}{\hbar}};$$

$$\bar{\nu} = \sqrt{\nu_1 \nu_2}; \quad \bar{n} = \sqrt[4]{\lambda} \bar{n} = \sqrt[4]{\lambda} kn.$$

Отметим, что верхние строки в формулах (12.2.15) справедливы при $|a| < a_0$, нижние — при $|a| > a_0$.

Перейдем к частному случаю силового воздействия — нагружению по линиям контура ($a_0 \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} T_1(a, \beta) &= - \frac{k \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)}}{2\pi\beta_0 \sqrt[4]{\lambda}} \sqrt{\frac{R}{h}} \times \\ &\times \sum_n \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} f_{1n}^0(|a|) \cos kn\beta; \\ \frac{R}{P} T_2(a, \beta) &= - \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)}}{4\beta_0} \sqrt{\frac{R}{h}} f_2^*(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta; \\ \frac{1}{P} G_1(a, \beta) &= \frac{1}{8\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)\lambda}} \sqrt{\frac{h}{R}} \times \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

$$g^*(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta + \frac{\nu_1 k \sqrt[4]{\lambda}}{4\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \times$$

$$\times \sum_n \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} g_n^0(a) \cos kn\beta + \frac{1}{4\pi k \beta_0 \sqrt[4]{\lambda}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2} g_{1n}^n(a) \cos kn\beta;$$

$$\frac{1}{P} G_2(a, \beta) = \frac{k \sqrt[4]{\lambda}}{4\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \times$$

$$\times \sum_n \frac{\sin kn\beta_0}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} g_n^o(a) \cos kn\beta + \frac{\nu_2}{8\beta_0^4 \sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)\lambda}} \sqrt{\frac{h}{R}} \times$$

$$g_n^k(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta + \frac{4\sqrt{\lambda}}{4\pi k\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^2} g_{2n}^n(a) \cos kn\beta.$$

где $f_{1n}^o(a) = \chi_n(|a|) - \zeta_n(|a|)$; $g_n^o(a) = \chi_n(|a|) + \zeta_n(|a|)$;

$f_{2n}^k(a) = \chi(|a|) + \zeta(|a|)$; $g_n^k(a) = \chi(|a|) - \zeta(|a|)$;

$g_{1n}(a) = [1 + \bar{\nu} - (1 - \bar{\nu})\bar{n}|a|]e^{-\bar{n}|a|}$;

$g_{2n}(a) = [1 + \bar{\nu} + (1 - \bar{\nu})\bar{n}|a|]e^{-\bar{n}|a|}$.

При $a = 0$ последние слагаемые в изгибающих моментах (12.2.16) могут быть записаны через табулированные ряды, что соответственно снижает и без того незначительный объем вычислений, необходимый для получения информации о напряженном состоянии.

Представляют наибольший интерес два отличных друг от друга случая нагружения оболочки — действие силы, близкой к сосредоточенной и распределенной на больших отрезках, для которых параметр $\beta_0 \sim \sqrt{h/R}$. В первом случае наиболее мощным является изгибное состояние, определяемое изгибающими моментами

$$\frac{1}{P} G_1(a, \beta) = \frac{1}{P} G_1^M(a, \beta) = \frac{1}{4\pi^4 \sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times \sum_n \frac{\cos kn\beta}{n} [1 + \sqrt{\nu_1\nu_2} - (1 - \sqrt{\nu_1\nu_2})\bar{n}|a|]e^{-\bar{n}|a|}; \quad (12.2.17)$$

$$\frac{1}{P} G_2(a, \beta) = \frac{1}{P} G_2^M(a, \beta) = \frac{4\sqrt{\lambda}}{4\pi} \sum_n \frac{\cos kn\beta}{n} \times$$

$$\times [1 + \sqrt{\nu_1\nu_2} + (1 - \sqrt{\nu_1\nu_2})\bar{n}|a|]e^{-\bar{n}|a|}.$$

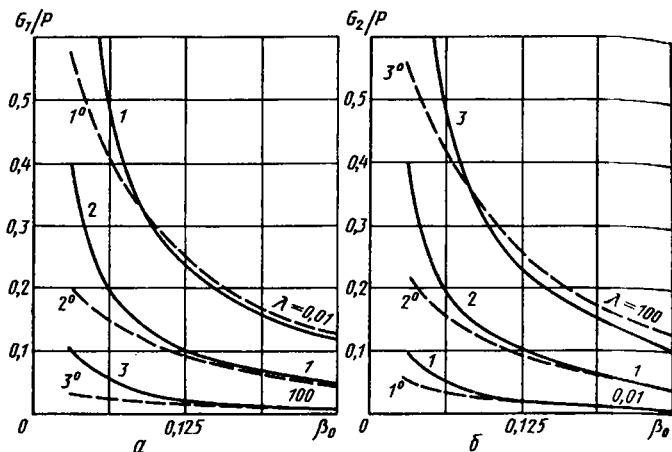


Рис. 12.1. Сравнение продольного (а) и кольцевого (б) изгибающих моментов на основе общей теории оболочек и по формулам (12.2.18)

Из приведенных выражений могут быть получены асимптотические формулы, описывающие поведение изгибающих моментов в окрестности точки $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

Во втором случае напряженное состояние определяется решением для основного состояния и простого краевого эффекта. Если ввести допущение $k^2 \pi^2 - 1 = k^2 \pi^2$ и принять $\pi \rightarrow \infty$, тогда максимальные значения силовых факторов (12.2.16) записываются, как и в случае изотропной оболочки, в виде конечных формул

$$\frac{1}{P} G_1(0, 0) = \frac{\pi + \nu_1 (\pi - k\beta_0) \sqrt{E_2/E_1}}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1\nu_2)E_2/E_1}} \sqrt{\frac{h}{R}}; \quad (12.2.18)$$

$$\frac{1}{P} G_2(0, 0) = \frac{\pi\nu_2 + (\pi - k\beta_0) \sqrt{E_2/E_1}}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1 - \nu_1\nu_2)E_2/E_1}} \sqrt{\frac{h}{R}}.$$

Значения изгибающих моментов, найденные по формулам (12.2.18) (кривые 1, 2, 3 на рис. 12.1), сравниваются с точным решением (12.2.6) (кривые 1⁰, 2⁰, 3⁰) при следующих параметрах: $R/h = 100$.

$k = 2$; $\lambda = 0,01$; 1 ; 100 . Хорошее совпадение наблюдается, как и в случае изотропных оболочек, при длинах нагруженных отрезков, удовлетворяющих условию $s_0 > 2\sqrt{Rh}$. Кривые, построенные на основе решения (12.2.16), не приведены ввиду их практически полного совпадения с точным решением (12.2.6).

12.3. ОБОЛОЧКА ПРИ ЛОКАЛИЗОВАННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ, ПОСТОЯННОМ ПО ТОЛЩИНЕ

В разд. 12.1 этой главы термоупругая задача сведена к решению системы трех дифференциальных уравнений относительно перемещений u , v , w , записанной в форме таблицы. Операторным методом указанная система может быть приведена к одному разрешающему уравнению относительно функции $\Phi^*(a, \beta)$:

$$\mathcal{L} \Phi^*(a, \beta) = \frac{a_2 t + \nu_1 a_1 t}{c^2} R t^*(a, \beta), \quad (12.3.1)$$

в котором оператор $\mathcal{L}(\dots)$ определяется соотношением (12.2.2).

Перемещения, усилия и изгибающие моменты связаны с функцией $\Phi^*(a, \beta)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u^*(a, \beta) = & \lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^3 \Phi^*}{\partial a^3} + \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \vartheta \mu_1 \frac{\partial^7}{\partial a^7} + \right. \\ & + [\vartheta(\lambda + 2\nu_2 \mu_1 + 4\mu_1^2) - \lambda \nu_2] \frac{\partial^7}{\partial a^5 \partial \beta^2} - \\ & \lambda[2(\nu_2 + \mu_1)(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta(5\mu_1 + 2\nu_2)] \frac{\partial^7}{\partial a^3 \partial \beta^4} - \\ & \lambda[2\vartheta(\nu_2 + 4\mu_1) - 2\nu_2^2 - 7\nu_2 \mu_1 - 4\mu_1^2] \frac{\partial^5}{\partial a^3 \partial \beta^2} - \\ & \left. - (\nu_2 + \mu_1 - \vartheta) \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \right\} \Phi^*; \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

$$\begin{aligned}
\vartheta^*(a, \beta) &= -\lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^3 \Phi^*}{\partial a^2 \partial \beta} - \frac{c^2}{\mu_1} \times \\
&\times \left\{ [\vartheta(\nu_2 + \mu_1) - \lambda] \frac{\partial^7}{\partial a^6 \partial \beta} + [(\vartheta \nu_2 - \lambda)(5\mu_1 + 2\nu_2) + \right. \\
&+ \vartheta \mu_1(\nu_2 + 4\mu_1)] \frac{\partial^7}{\partial a^4 \partial \beta^3} + [\vartheta(\nu_2^2 + 3\nu_2 \mu_1 + \lambda) - \\
&- 2\lambda(\nu_2 + \mu_1)] \frac{\partial^5}{\partial a^4 \partial \beta} + \lambda[\vartheta \nu_2 + \vartheta \mu_1 - \lambda - \\
&- 2\mu_1(\nu_2 + 2\mu_1)] \frac{\partial^7}{\partial a^2 \partial \beta^5} + \lambda[\vartheta(2\nu_2 + \mu_1) - \\
&- 2(\lambda + 2\mu_1^2)] \frac{\partial^5}{\partial a^2 \partial \beta^3} - \lambda^2 \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 \left. \right\} \Phi^*; \\
\omega^*(a, \beta) &= (\nu_2 \vartheta - \lambda) \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial a^4} - \lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial a^2 \partial \beta^2} - \\
&- \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \vartheta \mu_1 \frac{\partial^6}{\partial a^6} + [\vartheta(\lambda - \nu_2^2 - 4\nu_2 \mu_1 - 4\mu_1^2) + \right. \\
&+ 2\mu_1 \lambda \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \lambda \mu_1 [2(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} \left. \right\} \Phi^*; \\
T_1^*(a, \beta) &= \frac{E_1 h}{R} \left\{ \lambda \vartheta \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial a^4} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \vartheta \frac{\partial^8}{\partial a^8} + \right. \right. \\
&+ \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} + \vartheta \nu_2 + 4\vartheta \mu_1 - \lambda \right] \frac{\partial^8}{\partial a^6 \partial \beta^2} + \\
&+ \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} (5\mu_1 + 2\nu_2) - (\lambda + \nu_2 \vartheta)(\nu_2 + 4\mu_1) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^4 \partial \beta^4} - \\
&- \left. \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (\mu_1 - \vartheta)(\lambda - \nu_2^2) + \lambda \nu_2 (\vartheta - \nu_2 - 4\mu_1) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^2 \partial \beta^6} + \right.
\end{aligned} \tag{12.3.2}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu_2 \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + 2\nu_2 \vartheta \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} \times \right. \\
& \times (7\mu_1 + 2\nu_2) - 2(2\mu_1 \lambda + 2\mu_1 \nu_2 \vartheta + \nu_2 \lambda) \left. \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} - \\
& - 2\lambda \left[(\mu_1 - \vartheta) \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] - 3\nu_2 \mu_1 \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} - \\
& - \lambda^2 \left[\frac{\nu_2 - \vartheta}{\mu_1} + 1 \right] \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \left. \right\} \Phi^* \left. \right\} - \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \times \\
& \times (a_{1t} + \nu_2 a_{2t}) t^*(a, \beta);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^*(a, \beta) &= \frac{E_2 h}{R} \left\{ \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \nu_1 \vartheta \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} - \right. \right. \quad (12.3.2) \\
& - \left[\vartheta(1 - 2\nu_1 \nu_2 - 4\mu_1 \nu_1) - \lambda \left[\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{\mu_1} - \nu_1 \right] \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} - \\
& - \left[\left[5 + \frac{\nu_2}{\mu_1} \right] (\vartheta \nu_2 - \lambda + \nu_2^2) + 4(\nu_2 \mu_1 + \mu_1 \vartheta - \nu_2 \vartheta) + \right. \\
& + \left. \frac{\lambda \nu_2}{\mu_1} (\nu_1 \nu_2 - \nu_1 \vartheta + \nu_1 \mu_1 - 1) \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} - \\
& \left. \lambda \left[\vartheta - \nu_2 - 4\mu_1 - \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \right. \\
& + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + (\vartheta + \nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} - \\
& - \left[4\mu_1 (\vartheta + \nu_2) - 2(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{\lambda \nu_2}{\mu_1} - \lambda(5 - 7\nu_1 \nu_2) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} - \lambda \left[\nu_2 - 8\mu_1 + \vartheta - 2 \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} - \\
& - \frac{\lambda \nu_2}{\mu_1} (\nu_2 + \mu_1 - \vartheta) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \left. \right\} \Phi^* - \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \times \\
& \times (a_{2f} + \nu_1 a_{1f}) t^*(a, \beta); \\
S_1^*(a, \beta) &= \frac{Gh}{R} c^2 \left\{ \frac{\lambda - \nu_2 \vartheta}{\mu_1} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^7 \partial \beta} + \left[4(\lambda - \vartheta \nu_2) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\mu_1} (\lambda \nu_2 - 2\vartheta \nu_2^2 + \vartheta \lambda) \left. \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^5 \partial \beta^3} - \lambda \left[4(\lambda_2 - \vartheta) - \right. \\
& - \left. \frac{\lambda + \vartheta \nu_2 - 2\nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^3 \partial \beta^5} - \frac{\lambda^2}{\mu_1} (\nu_2 - \vartheta) \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \times \\
& \times \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 - \left[\vartheta \left[\frac{\lambda + \nu_2^2}{\mu_1} + 2\nu_2 \right] - 2 \frac{\lambda}{\mu_1} (\nu_2 + \mu_1) \right] \times \\
& \times \left. \frac{\partial^6}{\partial \alpha^5 \partial \beta} + \lambda \left[6(\vartheta - \nu_2) + \frac{2(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^3 \partial \beta^3} \right\} \Phi^*; (12.3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^*(a, \beta) &= \frac{Gh}{R} c^2 \left\{ \frac{\lambda - \vartheta \nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^7 \partial \beta} + \left[4(\lambda - \vartheta \nu_2) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\mu_1} (\lambda \nu_2 - 2\vartheta \nu_2^2 + \lambda \vartheta) \left. \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^5 \partial \beta^3} - \lambda \left[4(\lambda_2 - \vartheta) - \right. \\
& - \left. \frac{\lambda + \vartheta \nu_2 - 2\nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^3 \partial \beta^5} - \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 +
\end{aligned}$$

$$+ \left[4(\lambda - \vartheta\nu_2) + 2 \frac{\lambda\nu_2}{\mu_1} - \vartheta \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^6}{\partial\alpha^5\partial\beta} +$$

$$+ 2\lambda \left[4(\vartheta - \nu_2) + \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^6}{\partial\alpha^3\partial\beta^3} \Big\} \Phi^* ;$$

$$G_1^*(\alpha, \beta) = \frac{D_1}{R^2} \left\{ (\lambda - \nu_2\vartheta) \frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + \vartheta(\lambda - \nu_2^2) \frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + \right.$$

$$+ \lambda\nu_2(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^6}{\partial\alpha^2} \left[\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right] - \lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} +$$

$$+ c^2 \left\langle [3\lambda - 4\vartheta(\nu_2 + \mu_1)] \frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + [8\lambda\mu_1 + 5\lambda\nu_2 - 6\lambda\vartheta + \right.$$

$$+ 2\nu_2^2\vartheta - (\lambda - \nu_2^2) \frac{\nu_2\vartheta}{\mu_1} \Big] \frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + \lambda \left[\lambda - \frac{\vartheta}{\mu_1} (\lambda - \nu_2^2) \right] \times$$

$$\times \left. \frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} - \nu_2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1 \right]^2 \right\rangle \Phi^* ;$$

$$G_2^*(\alpha, \beta) = \frac{D_2}{R^2} \left\{ \nu_1(\lambda - \nu_2\vartheta) \frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + (\lambda - \nu_2^2) \frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + \right.$$

$$+ \lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \left[\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right] - (\nu_2\vartheta - \lambda) \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} +$$

$$+ c^2 \left[\nu_1\vartheta \frac{\partial^8}{\partial\alpha^6} + \left[\vartheta(\lambda - \nu_2^2) \frac{\nu_1}{\mu_1} - 4(\nu_2 + \mu_1) + \right.$$

$$\left. \vartheta + 2\nu_2 \right] \frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} - \vartheta(5\nu_2 + 4\mu_1) + \right.$$

$$+ 2(\lambda + \nu_2^2 + 2\mu_1\nu_2) \left] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + \lambda[2(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} \right] \Phi^* \quad (12.3.2)$$

Здесь принято обозначение: $\vartheta = (a_{1f} + \nu_2 a_{2f}) / (a_{2f} + \nu_1 a_{1f})$.

На основании записанных уравнений рассмотрим термоупругое напряженное состояние бесконечно длинной оболочки. Пусть температурное поле $t^*(\alpha, \beta)$, возникшее в какой-то момент времени в оболочке, имеет две плоскости симметрии. Поместим начало координат на пересечении этих плоскостей. Тогда, после подстановки в разрешающее уравнение (12.3.1) температурного поля, записанного в форме ряда Фурье по окружной координате β и соответствующим образом представленной разрешающей функции $\Phi^*(\alpha, \beta)$, в результате применения преобразования Фурье по переменной α к получившемуся обыкновенному дифференциальному уравнению и последующих преобразований получим

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{24}{\pi} (a_{2f} + \nu_1 a_{1f}) \left[\frac{R}{h} \right]^2 R t_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \omega}{\mathcal{L}(\omega, n)} d\omega \int_0^{\infty} \theta(\alpha) \cos \omega \alpha d\alpha, \quad (12.3.3)$$

где $\mathcal{L}(\omega, n) = \omega^8 + a_{6,2} \omega^6 n^2 - 2\nu_2 \omega^6 + a_{4,4} \omega^4 n^4 - a_{4,2} \omega^4 n^2 +$
 $+ \lambda \omega^4 + a_{2,6} \omega^2 n^6 - a_{2,4} \omega^2 n^4 + a_{2,2} \omega^2 n^2 + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 +$
 $+ \lambda (1 - \nu_1 \nu_2) c^{-2} \omega^4;$

t_0^* — амплитудное значение температурного поля;

$\theta(\alpha)$ — безразмерная функция распределения температуры вдоль образующей оболочки;

θ_n — коэффициенты ряда Фурье.

Разрешающая функция (12.3.3) в сочетании с соотношениями (12.3.2) позволяет построить напряженно-деформированное состояние оболочки для широкого класса функций распределения температуры t^*

ее поверхности. Изберем случай весьма локализованного, а именно кусочно-постоянного, изменения температуры как вызывающий наибольшие вычислительные трудности, но в то же время позволяющий наиболее полно раскрыть сущность приближенных методов, которые будут применены позже. При этом функция $\theta(a)$, входящая в (12.3.3), определяется следующим образом:

$$\theta(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } |a| \leq a_0; \\ 0 & \text{при } |a| > a_0, \end{cases} \quad (12.3.4)$$

а для коэффициентов θ_n ряда Фурье имеем значения

$$\theta_n = \begin{cases} \beta_0/\pi & \text{при } n = 0; \\ (2/\pi n) \sin n\beta_0 & \text{при } n = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (12.3.5)$$

При этом для разрешающей функции $\Phi^*(a, \beta)$ на основании (12.3.3), (12.3.4), (12.3.5) получаем

$$\begin{aligned} \Phi^*(a, \beta) &= \frac{24}{\pi} (a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) R t_0^* \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega \cos a \omega}{\omega \mathcal{L}(\omega, n)} d\omega. \end{aligned} \quad (12.3.6)$$

Перемещения, усилия, изгибающие моменты находятся в результате подстановки разрешающей функции (12.3.6) в (12.3.2):

$$\begin{aligned} \frac{w^*(a, \beta)}{(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) R t_0^*} &= \frac{24}{\pi} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}(\omega, n)} \left\{ (\nu_2 \vartheta - \lambda) \omega^4 - \lambda (\vartheta - \nu_2) \omega^2 n^2 + \right. \\ &+ \frac{c^2}{\mu_1} \left\langle \vartheta \mu_1 \omega^6 + [\vartheta (\lambda - \nu_2^2 - 4\nu_2 \mu_1 - 4\mu_1^2) + 2\lambda \mu_1] \omega^4 n^2 + \right. \\ &\left. \left. + \lambda \mu_1 [2(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \omega^2 n^4 \right\rangle \right\} \cos a \omega d\omega; \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1^*(a, \beta) &= \frac{24}{\pi} \left[\frac{R}{h} \right]^2 \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}(\omega, n)} \left\{ \vartheta(\lambda - \nu_2^2) \omega^4 + c^2 \langle \vartheta \omega^8 + \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} + \right. \right. \\
&+ \vartheta \nu_2 + 4\vartheta \mu_1 - \lambda \rangle \omega^6 n^2 + \left. \left. \left[\frac{\vartheta(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} (5\mu_1 + 2\nu_2) - \right. \right. \right. \\
&- (\lambda - \nu_2 \vartheta) (4\mu_1 + \nu_2) \left. \left. \right] \omega^4 n^4 - \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (\mu_1 - \vartheta)(\lambda - \nu_2^2) + \right. \right. \\
&+ \lambda \nu_2 (\vartheta - \nu_2 - 4\mu_1) \left. \left. \right] \omega^2 n^6 + \nu_2 \lambda^2 n^8 \right\} \cos a \omega d\omega - \\
&- \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega; \tag{12.3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1^*(a, \beta) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \sin n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{L}(\omega, n)} \left\{ \frac{\lambda - \vartheta \nu_2}{\mu_1} \omega^7 n + \right. \\
&+ \left. \left[4(\lambda - \vartheta \nu_2) + \frac{1}{\mu_1} (\lambda \nu_2 - 2\vartheta \nu_2^2 + \vartheta \lambda) \right] \omega^5 n^3 - \right. \\
&- \lambda \left[4(\nu_2 - \vartheta) - \frac{\lambda + \vartheta \nu_2 - 2\nu_2^2}{\mu_1} \right] \omega^3 n^5 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} (\nu_2 - \vartheta) \omega n^7 - \\
&- \left[4(\lambda - \vartheta \nu_2) + \frac{2\nu_2 \lambda}{\mu_1} - \vartheta \frac{\lambda + \nu_2^2}{\mu_1} \right] \omega^5 n - \\
&- \left. \lambda \left[8(\vartheta - \nu_2) + 2 \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \right] \omega^3 n^3 \right\} \sin a \omega d\omega;
\end{aligned}$$

$$\bar{G}_2^*(a, \beta) = -\frac{12}{\pi} \frac{R}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega \mathcal{A}(\omega, n)} \times$$

$$\times \left\{ \nu_1 (\lambda - \nu_2 \vartheta) \omega^6 + (\lambda - \nu_2^2) \omega^4 n^2 + \lambda (\vartheta - \nu_2) \omega^2 (n^4 - n^2) + \right.$$

$$+ (\nu_2 \vartheta - \lambda) \omega^4 - c^2 \left\langle \nu_1 \vartheta \omega^8 + \left[\vartheta (\lambda - \nu_2^2) \frac{\nu_1}{\mu_1} - 4(\nu_2 + \mu_1) + \right. \right.$$

$$+ (\vartheta + 2\nu_2) \omega^6 n^2 + \left. \left. \left[\frac{\vartheta (\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} - \vartheta (5\nu_2 + 4\mu_1) + 2(\lambda + \nu_2^2) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + 2\mu_1 \nu_2 \right] \omega^4 n^4 + \lambda [2(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \omega^2 n^6 \right\rangle \right\} \cos a \omega d\omega,$$

где $\bar{T}_1^*(a, \beta) = T_1^*(a, \beta) \left[\frac{a_{2t} + \nu_1 a_{1t}}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 h t_0^* \right]^{-1}$; (12.3.7)

$$\bar{S}_1^*(a, \beta) = S_1^*(a, \beta) \frac{1}{(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) G h t_0^*};$$

$$\bar{G}_2^*(a, \beta) = G_2^*(a, \beta) \left[\frac{(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) E_2 t_0^*}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^2}{6} \right]^{-1}.$$

Здесь записаны выражения для радиального перемещения, продольного и сдвигающего усилий, а также кольцевого изгибающего момента. Причем в слагаемых, содержащих множитель c^2 , сохранены только члены со старшими производными. Остальные искомые факторы записываются аналогично.

Надо отметить, что построенное здесь на основе уравнений общей теории физически ортотропных термоупругих оболочек решение (12.3.7) при его численной реализации требует проведения трудоемкой вычислительной работы.

Для построения приближенного решения воспользуемся методом

синтеза напряженного состояния (МСНС), который при решении краевых задач для оболочек конечной длины в сочетании с методом раздельного удовлетворения тангенциальных и нетангенциальных граничных условий позволяет полностью разделить краевую задачу для дифференциальных уравнений восьмого порядка на ряд краевых задач для уравнений четвертого порядка. Это уравнения полубезмоментной теории и теории краевого эффекта (при номерах гармоник $n < n^*$), изгибного и тангенциального состояний (при $n > n^*$). Причем, учитывая характер температурного поля, при $n > n^*$ строится только тангенциальное состояние (при температуре, постоянной по толщине оболочки) или изгибное состояние (при перепаде температур по толщине оболочки).

В качестве примера решения на основе МСНС рассмотрим один из характерных силовых факторов, обладающий наихудшей сходимостью, — продольное усилие, для которого получаем выражение:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^*(\alpha, \beta) = & \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin \alpha_0 \omega}{\omega^4 + 4\mu_n^4} \cos \alpha \omega d\omega + \\ & + \frac{2}{\pi \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{t_1^*(\omega, n) \sin \alpha_0 \omega}{\omega^4 (\omega, n)} \cos \alpha \omega d\omega - \\ & - \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin \alpha_0 \omega \cos \alpha \omega d\omega, \end{aligned} \quad (12.3.8)$$

$$\text{где } 4\mu_n^4 = \frac{\lambda c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} n^4 (n^2 - 1)^2;$$

$$t_1^*(\omega, n) = \vartheta \omega^4 \cdot \left[\vartheta \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] - \lambda \right] \omega^2 n^2 + \lambda \nu_2 n^4;$$

$$\alpha^0(\omega, n) = \omega^4 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] \omega^2 n^2 + \lambda n^4.$$

Это достаточно легко реализуемое выражение, особенно если учесть возможность вычисления входящих в него интегралов и суммирования бесконечных рядов.

Примем для модуля сдвига зависимость

$$G = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}. \quad (12.3.9)$$

Тогда знаменатель $\alpha^*(\omega, n)$ можно преобразовать к виду

$$\alpha^*(\omega, n) = (\omega^2 + \sqrt{\lambda} n^2)^2. \quad (12.3.10)$$

Для продольного усилия (12.3.8) после вычисления входящих в него интегралов получим выражение (при $a \geq 0$)

$$\begin{aligned} \bar{t}_1^*(a, \beta) = & \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} t_{1n}^0(a) \sin n \beta_0 \cos n \beta + \\ & + \frac{1}{\pi \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t_{1n}^*(a) \sin n \beta_0 \cos n \beta - \\ & - \frac{4}{\pi^2} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \beta_0 \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega, \quad (12.3.11) \end{aligned}$$

где $t_{1n}^0(a) = \chi_n(a_0 - a) + \chi_n(a_0 + a)$.

$$\begin{aligned} t_{1n}^*(a) = & 2\nu_2 + \left[\vartheta - \nu_2 + \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a_0 + a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 + a)} + \\ & + \left[\vartheta - \nu_2 + \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a_0 - a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 - a)} \quad \text{при } |a| \leq a_0; \end{aligned}$$

$$t_{1n}^0(a) = \chi_n(a + a_0) - \chi_n(a - a_0);$$

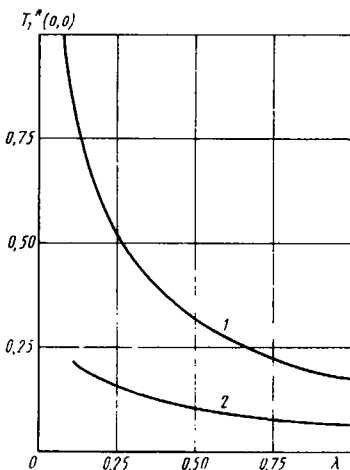
$$t_{1n}^*(a) = \left[\vartheta - \nu_2 + \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a + a_0) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a-a_0)} -$$

$$- \left[\vartheta - \nu_2 + \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a - a_0) \right] e^{-\sqrt{\lambda} n(a-a_0)} \quad \text{при } |a| > a_0;$$

$$\chi_n(a) = e^{-\mu_n a} \cos \mu_n a;$$

$$m = \vartheta - \nu_2 - \frac{\lambda - \nu_2 \vartheta}{\sqrt{\lambda}}.$$

В аналогичной форме могут быть записаны и другие искомые силовые факторы. Входящие в них бесконечные ряды обладают замечательным свойством — они допускают представление в замкнутом виде. Это позволяет свести процедуру получения числовой информации о напряженном состоянии оболочки к вычислению элементарных, как правило, табулированных, функций и рядов с верхним пределом суммирования $n = n^*$, определяемым соотношением (12.2.10).



В качестве примера приведем информацию о влиянии анизотропии свойств материала оболочки на величину продольного усилия, возникающего в центре нагретой области ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0,125$). Кривые 1 и 2 на рис 12.2 построены соответственно для значений $a_{1t} = a_{2t} = 10 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹ и

Рис. 12.2. Влияние анизотропии свойств материала оболочки при локализованном распределении температуры на величину продольного усилия

$a_{1f} = 0,1 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, $a_{2f} = 10 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, т.е. кривая 2 построена для оболочки, характеризующейся анизотропией температурного коэффициента линейного расширения. Точки на кривых при значении $\lambda = 1$ соответствуют продольному усилию в оболочке из изотропного материала.

12.4. СЛУЧАЙ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПЕРЕПАДА ПО ТОЛЩИНЕ ОБОЛОЧКИ

Как и при рассмотрении температуры, постоянной по толщине оболочки, произвольно распределенной в срединной поверхности оболочки, задачу приведем к решению одного разрешающего дифференциального уравнения относительно функции $\Phi^{**}(a, \beta)$:

$$\mathcal{L} \Phi^{**}(a, \beta) = - \frac{a_{2f} \cdot \nu_1 a_{1f}}{6c^2} h t^{**}(a, \beta). \quad (12.4.1)$$

Оператор $\mathcal{L}(\dots)$ в уравнении (12.4.1) определяется соотношением (12.2.2).

Для перемещений, усилий и изгибающих моментов получаем зависимости, связывающие их с разрешающей функцией $\Phi^{**}(a, \beta)$:

$$\begin{aligned} u^{**}(a, \beta) = & \vartheta \nu_2 \frac{\partial^5 \Phi^{**}}{\partial a^5} - \lambda(\vartheta - \nu_2) \frac{\partial^5 \Phi^{**}}{\partial a^3 \partial \beta^2} - \\ & - \lambda^2 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \beta^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi^{**} - c^2 \left\{ \vartheta \frac{\partial^7}{\partial a^7} + \right. \\ & + \frac{1}{\mu_1} [(\nu_2 + 2\mu_1)(\lambda(\vartheta + 1) - \vartheta(\nu_2 + 2\mu_1))] \frac{\partial^7}{\partial a^5 \partial \beta^2} + \\ & + \lambda \left[\frac{\lambda \cdot \nu_2^2}{\mu_1} + 2\nu_2 - \vartheta \right] \frac{\partial^7}{\partial a^3 \partial \beta^4} + \frac{\lambda^2 \nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial a \partial \beta^6} \left. \right\} \Phi^{**}; \\ v^{**}(a, \beta) = & \vartheta \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \frac{\partial^5 \Phi^{**}}{\partial a^4 \partial \beta} + \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \vartheta - \nu_2 \right] \frac{\partial^5}{\partial \alpha^2 \partial \beta^3} + \frac{\lambda(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} \frac{\partial^3 \Phi^{**}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \\
& + \lambda^2 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi^{**} + c^2 \left\{ \frac{\lambda - 2\mu_1 \vartheta}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha^6 \partial \beta} + \right. \\
& + \left. \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (2\nu_2 + 3\mu_1) - 2\vartheta(\nu_2 + 2\mu_1) \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^4 \partial \beta^3} + \right. \\
& + \left. \lambda^2 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^2 \partial \beta^5} + \lambda^2 \frac{\partial^7}{\partial \beta^7} \right\} \Phi^{**}; \\
\omega^{**}(\alpha, \beta) = & \vartheta \frac{\partial^6 \Phi^{**}}{\partial \alpha^6} + \left[\vartheta \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) + \lambda \right] \frac{\partial^6 \Phi^{**}}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \\
& + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \vartheta - 2\nu_2 \right] \frac{\partial^6 \Phi^{**}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi^{**} + \\
& + \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] \frac{\partial^4 \Phi^{**}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}; \tag{12.4.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1^{**}(\alpha, \beta) = & - \frac{E_1 h}{R} \left\{ \lambda \left[\vartheta \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \right] \Phi^{**} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \left[\lambda + 2\lambda\vartheta + 4\mu_1\vartheta - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\lambda\vartheta}{\mu_1} (1 - \nu_2) \right] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + (\lambda\nu_2 - 2\lambda\vartheta + 2\nu_2^2\vartheta + 4\nu_2\vartheta\mu_1) \times \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} - \lambda^2 \nu_2 \frac{\partial^8}{\partial \beta^8} - \lambda^2 \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} \right\} \Phi^{**} \right\};
\end{aligned}$$

$$T_2^{**}(\alpha, \beta) = - \frac{E_2 h}{R} \left\{ \left[\vartheta \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + \lambda \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} \right] \Phi^{**} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ -\vartheta \nu_1 \frac{\partial^8}{\partial a^8} + \left[4\nu_1 \vartheta (\nu_2 + \mu_1) - 2\nu_2 (1 + \vartheta) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\vartheta + \frac{\lambda - \nu_2^2 - \nu_2^2 \vartheta (1 - \nu_1)}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^6 \partial \beta^2} + \left[4(\lambda - \mu_1 \vartheta) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \nu_2 (\vartheta - 2\nu_2) + (\nu_2 - \vartheta) \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^4 \partial \beta^4} + \right. \\
& \left. + \lambda (2\nu_2 - \vartheta) \frac{\partial^8}{\partial a^2 \partial \beta^6} - \lambda^2 \frac{\partial^6}{\partial \beta^6} \right\} \Phi^{**}; \quad (12.4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{**}(a, \beta) = \frac{Gh}{R} (1 - \nu_1 \nu_2) & \left\{ \lambda \left[\vartheta \frac{\partial^6}{\partial a^5 \partial \beta} + \lambda \frac{\partial^6}{\partial a^3 \partial \beta^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda \frac{\partial^4}{\partial a^3 \partial \beta} \right] \Phi^{**} - \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \left[2\vartheta - \frac{\lambda}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^7 \partial \beta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda \left[\frac{\nu_2 (\vartheta - 1) - \vartheta}{\mu_1} + 2(\vartheta - 1) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^5 \partial \beta^3} + \lambda \left[2(2\nu_2 - \vartheta) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\lambda - 2\nu_2^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^3 \partial \beta^5} - \lambda^2 \left[2 - \frac{\nu_2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a \partial \beta^7} - \right. \\
& \left. \left. - \lambda^2 \frac{\partial^6}{\partial a \partial \beta^5} \right\} \Phi^{**} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{**}(a, \beta) = \frac{Gh}{R} (1 - \nu_1 \nu_2) & \left\{ \lambda \left[\vartheta \frac{\partial^6}{\partial a^5 \partial \beta} + \lambda \frac{\partial^6}{\partial a^3 \partial \beta^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda \frac{\partial^4}{\partial a^3 \partial \beta} \right] \Phi^{**} - \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \left[4\vartheta - \frac{\lambda}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^7 \partial \beta} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[2\vartheta(\lambda - 2\nu_2) + \frac{1}{\mu_1} (\lambda\nu_2\vartheta - 2\nu_2^2 - \lambda\nu_2 + \lambda\vartheta) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^5 \partial \beta^3} + \\
& + \left. \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^8}{\partial a^3 \partial \beta^5} + \frac{\lambda^2 \nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^8}{\partial a \partial \beta^7} + \lambda^2 \frac{\partial^6}{\partial a \partial \beta^5} \right\} \Phi^{**}; \\
G_1^{**}(a, \beta) = & - \frac{D_1}{R^2} \left\{ \vartheta \frac{\partial^8}{\partial a^8} + \left[\vartheta \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \lambda - \vartheta\nu_2 \right] \frac{\partial^8}{\partial a^6 \partial \beta^2} + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\mu_1\vartheta + \lambda + \nu_2\vartheta) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \nu_2(\lambda + \vartheta\nu_2) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^4 \partial \beta^4} + \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\nu_2 + \mu_1) + \right. \right. \quad (12.4.2) \\
& + \left. \left. \nu_2(\vartheta - \nu_2) \right] \frac{\partial^8}{\partial a^2 \partial \beta^6} + \nu^2 \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + \right. \\
& + \left. \vartheta\nu_2 \frac{\partial^6}{\partial a^6} + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\lambda + \nu_2\vartheta) - \vartheta(\lambda + \nu_2^2) \right] \frac{\partial^6}{\partial a^4 \partial \beta^2} + \right. \\
& + \left. \lambda\nu_2 \left[2 \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] + \vartheta \right] \frac{\partial^6}{\partial a^2 \partial \beta^4} + \frac{\lambda}{\mu_1} (\nu_2\lambda - \mu_1\lambda - \right. \\
& \left. - \nu_2^3) \frac{\partial^4}{\partial a^2 \partial \beta^2} \right\} \Phi^{**} - G_{1f}(a, \beta);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2^{**}(a, \beta) = & - \frac{D_2}{R^2} \left\{ \nu_1\vartheta \frac{\partial^8}{\partial a^8} + \left[\vartheta + \nu_1(\lambda + \vartheta\mu_1) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\vartheta(\nu_2 + \mu_1) - \nu_1\vartheta(\nu_2 + \mu_1)^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^8}{\partial a^6 \partial \beta^2} + \left[(\vartheta - \nu_2) \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] + \lambda(1 + \nu_1 \vartheta) \left] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + \frac{\lambda}{\mu_1} [\lambda(1 + \nu_1 \mu_1) + \right. \\
& + \mu_1 (\vartheta + \mu_1) - (\nu_2 + \mu_1)^2] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + \\
& + \left[\lambda - \vartheta \nu_2 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right] (\nu_2 + \vartheta) \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \quad (12.4.2) \\
& + \lambda \left[2 \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 + \vartheta \right] \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \right. \\
& \left. - \nu_2 \right] \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \left. \right\} \Phi^{**} - G_{2l}(a, \beta).
\end{aligned}$$

Рассматриваем бесконечно длинную оболочку. Относительно распределения температурного поля $t^{**}(a, \beta)$ принимаем то же предположение, что и в случае распределения температурного поля $t^*(a, \beta)$, а по толщине температура имеет перепад, определяемый формулой (12.1.4).

Разрешающую функцию $\Phi^{**}(a, \beta)$ получаем в виде

$$\begin{aligned}
\Phi^{**}(a, \beta) = & -\frac{4}{\pi} (a_{2l} + \nu_1 a_{1l}) \left[\frac{R}{h} \right]^2 h t_0^{**} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\
& \times \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \omega}{\mathcal{L}(\omega, n)} d\omega \int_0^{\infty} \theta(a) \cos \omega a da, \quad (12.4.3)
\end{aligned}$$

где t_0^{**} — амплитудное значение температурного поля, а остальные обозначения совпадают с принятыми в (12.3.3).

Имея разрешающую функцию в виде (12.4.3) и соотношения (12.4.2), можно получить выражения для искомых факторов. Ограничимся здесь записью двух из них — для продольного и окружного изгибающих моментов как наиболее важных при определении напряженного состояния оболочки:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1^{**}(a, \beta) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega \lambda(\omega, n)} \left\{ \vartheta \omega^8 + \right. \\
&+ \left[\vartheta \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \lambda - \vartheta \nu_2 \right] \omega^6 n^2 + \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\mu_1 \vartheta + \lambda + \nu_2 \vartheta) - \right. \\
&- \left. \nu_2 (\lambda + \vartheta \nu_2) \right] \omega^4 n^4 + \lambda \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\nu_2 + \mu_1) + \nu_2 (\vartheta - \nu_2) \right] \omega^2 n^6 + \\
&+ \nu_2 \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 - \vartheta \nu_2 \omega^6 - \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} (\lambda + \nu_2 \vartheta) - \right. \\
&- \left. \vartheta (\lambda + \nu_2^2) \right] \omega^4 n^2 - \lambda \nu_2 \left[\vartheta + 2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \right] \omega^2 n^4 + \\
&+ \frac{\lambda}{\mu_1} (\lambda \nu_2 - \lambda \mu_1 - \nu_2^3) \omega^2 n^2 \left. \right\} \cos a \omega d\omega - \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega; \tag{12.4.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_2^{**}(a, \beta) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega}{\omega (\omega, n)} \left\{ \nu_1 \vartheta \omega^8 + \right. \\
&+ \left[\nu_1 (\lambda + \vartheta \mu_1) + \frac{\vartheta (\mu_1 + \nu_2) - \nu_1 \vartheta (\mu_1 + \nu_2)^2}{\mu_1} \right] \omega^6 n^2 + \\
&+ \left[(\vartheta + \nu_2) \left[\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right] + \lambda (1 + \nu_1 \vartheta) \right] \omega^4 n^4 - \vartheta \omega^6 + \\
&+ \frac{\lambda}{\mu_1} [\lambda (1 + \nu_1 \mu_1) + \mu_1 (\vartheta + \mu_1) - (\nu_2 + \mu_1)^2] \omega^2 n^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 - \left[\lambda - \vartheta \nu_2 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) (\nu_2 + \vartheta) \right] \omega^4 n^2 - \\
& - \lambda \left\{ 2 \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 + \vartheta \right\} \omega^2 n^4 + \lambda \left\{ \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right\} \omega^2 n^2 \left\} \times \\
& \times \cos a \omega d \omega - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d \omega. \quad (12.4.4)
\end{aligned}$$

При использовании метода синтеза напряженного состояния полное напряженное состояние строим на основе полубезмоментной теории и теории краевого эффекта (при номерах гармоник $n < n^*$) и уравнений изгибного состояния (при $n > n^*$). Так, для изгибающих моментов получаем

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1^{**}(a, \beta) &= \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=0}^{n^*} \theta_n \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin a_0 \omega}{\omega^4 + 4\eta^4} \cos a \omega d \omega + \\
& + \frac{8}{\pi} \nu_2 \lambda \sum_{n=2}^{n^*} \theta_n \mu_n^4 \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega \cos a \omega}{\omega(\omega^4 + 4\mu_n^4)} d \omega + \\
& + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \theta_n \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{g_1^{**}(\omega, n) \sin a_0 \omega}{\omega \chi^{**}(\omega, n)} d \omega - \quad (12.4.5) \\
& - \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d \omega; \\
\bar{G}_2^{**}(a, \beta) &= \frac{2}{\pi} \nu_1 \vartheta \sum_{n=0}^{n^*} \theta_n \cos n \beta \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin a_0 \omega}{\omega^4 + 4\eta^4} \cos a \omega d \omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \vartheta \mu_n^4 \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin a_0 \omega \cos a \omega}{\omega(\omega^4 + 4\mu_n^4)} d\omega + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \times \\
& \times \int_0^{\infty} \frac{g_2^{**}(\omega, n) \sin a_0 \omega}{\omega \alpha^{**}(\omega, n)} \cos a \omega d\omega - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \times \\
& \times \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega, \tag{12.4.5}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{G}_1^{**}(a, \beta) = G_1^{**}(a, \beta) \left[\frac{a_2 t + \nu_1 a_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 t_0^{**} \frac{h^2}{6} \right]^{-1};$$

$$\bar{G}_2^{**}(a, \beta) = G_2^{**}(a, \beta) \left[\frac{a_2 t + \nu_1 a_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 t_0^{**} \frac{h^2}{6} \right]^{-1};$$

$$4\eta^4 = \lambda(1 - \nu_1 \nu_2) c^{-2};$$

$$g_1^{**}(\omega, n) = \vartheta \omega^4 + (\lambda + \vartheta \nu_2) \omega^2 n^2 + \lambda \nu_2 n^4;$$

$$g_2^{**}(\omega, n) = \vartheta \nu_1 \omega^4 + (\vartheta + \nu_2) \omega^2 n^2 + \lambda n^4;$$

$$\alpha^{**}(\omega, n) = \omega^4 + 2(\nu_2 + 2\mu_1) \omega^2 n^2 + \lambda n^4.$$

Примем, что для модуля сдвига справедлива зависимость (12.3.9), тогда $\mathcal{L}^{**}(\omega, n)$ преобразуется к виду (12.3.10), а изгибающие моменты после вычисления интегралов в (12.4.5) запишутся так (при $a > 0$):

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1^{**}(a, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{\vartheta}{\lambda} g^k(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta + \\
& + \frac{1}{\pi} \nu_2 \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n} g_n^o(a) \cos n\beta + \tag{12.4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n} g_{1n}^H(a) \cos n\beta - \\
& - \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega; \\
\bar{G}_2^{**}(a, \beta) & = \frac{1}{2} \nu_1 \vartheta g^X(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta + \\
& + \frac{1}{\pi} \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n} g_n^O(a) \cos n\beta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n} g_{2n}^H(a) \cos n\beta - \\
& - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin a_0 \omega \cos a \omega d\omega, \tag{12.4.6}
\end{aligned}$$

где $g^X(a) = \chi(a_0 - a) + \chi(a_0 + a)$;

$$g_n^O(a) = 2 - \chi_n(a_0 - a) - \chi_n(a_0 + a);$$

$$\begin{aligned}
g_{1n}^H(a) & = 2\nu_2 + \left[\vartheta - \nu_2 - \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a_0 + a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 + a)} + \\
& + \left[\vartheta - \nu_2 - \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\lambda} n(a_0 - a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 - a)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2n}^H(a) & = 2 - \left[1 - \vartheta\nu_1 + \frac{1}{2} k^* 4\sqrt{\lambda} n(a_0 + a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 + a)} - \\
& - \left[1 - \vartheta\nu_1 + \frac{1}{2} k^* 4\sqrt{\lambda} n(a_0 - a) \right] e^{-4\sqrt{\lambda} n(a_0 - a)} \quad \text{при } |a| < a_0;
\end{aligned}$$

$$g^X(a) = \chi(a + a_0) - \chi(a - a_0);$$

$$g_n^0(a) = \chi_n(a - a_0) - \chi_n(a + a_0);$$

$$g_{1n}^n(a) = \left[\vartheta - \nu_2 - \frac{1}{2} m \sqrt[4]{\lambda} n(a + a_0) \right] e^{-\sqrt[4]{\lambda} n(a + a_0)} - \left[\vartheta - \nu_2 - \frac{1}{2} m \sqrt[4]{\lambda} n(a - a_0) \right] e^{-\sqrt[4]{\lambda} n(a - a_0)}; \quad (12.4.7)$$

$$g_{2n}^n(a) = \left[1 - \vartheta \nu_1 + \frac{1}{2} k^* \sqrt[4]{\lambda} n(a - a_0) \right] e^{-\sqrt[4]{\lambda} n(a - a_0)} - \left[1 - \vartheta \nu_1 + \frac{1}{2} k^* \sqrt[4]{\lambda} n(a + a_0) \right] e^{-\sqrt[4]{\lambda} n(a + a_0)} \quad \text{при } |a| > a_0;$$

$$m = \vartheta - \frac{\lambda \cdot \vartheta \nu_2}{\sqrt{\lambda}} + \nu_2; \quad k^* = 1 - \frac{\vartheta \cdot \nu_2}{\sqrt{\lambda}} + \vartheta \nu_1;$$

$$\chi(a) = e^{-\eta a} \cos \eta a; \quad \chi_n(a) = e^{-\frac{\mu}{n} a} \cos \frac{\mu}{n} a.$$

В аналогичной форме могут быть записаны и другие искомые силовые факторы. Свойство входящих в них бесконечных рядов допускать представление в замкнутом виде позволяет свести процедуру получения числовой информации о напряженном состоянии оболочки к вычислению элементарных, как правило табулированных, функций и рядов с верхним пределом суммирования $n = n$, определяемым формулой (12.2.10).

Надо полагать, что высокий порядок разрешающих уравнений анизотропных оболочек и сложность соотношений, связывающих искомые факторы с разрешающей функцией, вместе с понятным стремлением к изящным аналитическим выражениям и необходимостью априорных оценок при создании алгоритмов и программ для автоматизированных вычислительных комплексов и прочностных модулей в системах автоматизированного проектирования (САПР) всегда будут мощным стимулом к их асимптотическому анализу, расчленению (декомпозиции) и синтезу напряженного состояния на основе приближенных уравнений более низкого порядка и более простой структуры.

12.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ К ЗАМКНУТОМУ ВИДУ

Термоупругие задачи в случае температуры, постоянной по толщине оболочки, и при наличии перепада температуры рассмотрены в предыдущих подразделах. Здесь, по аналогии с термоупругой задачей для изотропных оболочек [63], рассмотрим возможность представления построенного решения в виде конечных формул, не содержащих бесконечных рядов.

Представим слагаемые в (12.3.11), (12.4.6), описывающие тангенциальное состояние продольного усилия и изгибное состояние кольцевого изгибающего момента (при $k \geq 1$), в таком виде:

$$\frac{T_1^*(a, \beta)}{\frac{a_2 t_1^{\nu_1} a_1 t_1}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 h t_0^*} = \frac{1}{\pi \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sinkn}\beta_0}{n} t_{1n}^*(a) \text{coskn}\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi \lambda} \left[\kappa_{\tau}(a, \beta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sinkn}\beta_0}{n} t_{1n}^*(a) \text{coskn}\beta \right]; \quad (12.5.1)$$

$$\frac{G_2^{**}(a, \beta)}{\frac{(a_2 t_1^{\nu_1} a_1 t_1) E_2 t_0^{**}}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^2}{6}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sinkn}\beta_0 g_{2n}^{**}(a) \text{coskn}\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\kappa_G(a, \beta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sinkn}\beta_0 g_{2n}^{**}(a) \text{coskn}\beta \right],$$

$$\text{где } \kappa_{\tau}(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sinkn}\beta_0 t_{1n}^*(a) \text{coskn}\beta;$$

$$\kappa_G(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sinkn}\beta_0 g_{2n}^{**}(a) \text{coskn}\beta.$$

Последние ряды в выражениях (12.5.1) обладают замечательным свойством — они допускают преобразование к замкнутому виду, в чем нетрудно убедиться, если раскрыть содержание входящих в них функ-

ций $f_{1n}^*(a)$, $g_{2n}^{**}(a)$, определяемых формулами (12.3.11), (12.4.6).

С учетом этого выражения для продольного усилия (12.3.11) и кольцевого изгибающего момента (12.4.6) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_1^*(a, \beta)}{\frac{a_2 t^{\nu_1} a_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 h t_0^*} = \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} f_{1n}^0(a) \cos kn\beta + \\ + \frac{\vartheta - \nu_2}{\pi\lambda} [\bar{e}_T(a, \beta) - e_T^*(a, \beta)] + \\ + \frac{1}{\pi\lambda} \rho_1 \sqrt[4]{\lambda} k [\bar{\theta}_T(a, \beta) - \theta_T^*(a, \beta)] - \\ - \left\langle \frac{\vartheta - \nu_2}{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{k\beta_0}{\pi} (\beta < \beta_0) \\ \frac{k\beta_0}{\pi} (\beta > \beta_0) \end{array} \right\} \right\rangle + \\ + \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} \cos kn\beta \end{array} \right\} \\ (a < a_0); \quad (12.5.2) \\ = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} f_{1n}^0(a) \cos kn\beta + \\ + \frac{\vartheta - \nu_2}{\pi\lambda} [\bar{e}_T(a, \beta) - e_T^*(a, \beta)] + \\ + \frac{1}{\pi\lambda} \rho_1 \sqrt[4]{\lambda} k [\bar{\theta}_T(a, \beta) - \theta_T^*(a, \beta)] \\ (a > a_0). \end{array} \right.$$

Записанное выражение (12.5.2) справедливо при значениях $k \geq 2$. При $k = 1$, что соответствует одной нагретой области, содержимое скобки $\langle \dots \rangle$ следует заменить на следующее:

$$\frac{\vartheta - \nu_2}{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\beta_0}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin \beta_0 \right) (\beta < \beta_0) \\ \left(-\frac{\beta_0}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin \beta_0 \right) (\beta > \beta_0) \end{array} \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n} \cos n\beta.$$

При этом суммирование ряда в основном состоянии начинается со значения $n = 2$.

$$\left\{ \frac{G_2^{\bullet\bullet}(a, \beta)}{(a_{2t} \nu_1 a_{1t}) E_2 t_0^{\bullet\bullet} \frac{\hbar^2}{6}} \right\} = \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \nu_1 \vartheta g^k(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} g_n^0(a) \cos kn\beta - \\ &- \frac{1}{\pi} (1 - \vartheta \nu_1) [\epsilon_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) - \epsilon_{\tau}^{\circ}(a, \beta)] - \\ &- \frac{1}{\pi} q_1^4 \sqrt{\lambda} k [\theta_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) - \theta_{\tau}^{\circ}(a, \beta)] - \\ &- \frac{k\beta_0}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} \cos kn\beta; \\ &(a \leq a_0); \end{aligned} \right. \quad (12.5.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \nu_1 \vartheta g^k(a) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n} g_n^0(a) \cos kn\beta - \\ &- \frac{1}{\pi} (1 - \vartheta \nu_1) [\bar{\epsilon}_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) - \bar{\epsilon}_{\tau}^{\circ}(a, \beta)] - \\ &- \frac{1}{\pi} q_1^4 \sqrt{\lambda} k [\bar{\theta}_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) - \bar{\theta}_{\tau}^{\circ}(a, \beta)]; \\ &(a > a_0). \end{aligned} \right.$$

Суммирование в основном состоянии начинается со значений $n = 1$ при $k \geq 2$, с $n = 2$ при $k = 1$.

Отметим, что оболочка считается незакрепленной в продольном направлении, поэтому продольное усилие (12.5.2) обусловлено лишь деформацией контура поперечного сечения и в оболочке возникает лишь бимоментное (самоуравновешенное) напряженное состояние.

В зависимостях (12.5.2), (12.5.3) приняты обозначения:

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[\vartheta - \nu_2 - \frac{\lambda - \nu_2 \vartheta}{\sqrt{\lambda}} \right];$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda - \nu_2 \vartheta}{\sqrt[4]{\lambda}} + \sqrt[4]{\lambda} (\vartheta - \nu_2) \right];$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r(a, \beta) = & \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 - \beta)}{e^{r_1} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 - \beta)} + \right. \\ & + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 + \beta)}{e^{r_1} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 + \beta)} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 - \beta)}{e^{r_2} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 - \beta)} + \\ & \left. + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 + \beta)}{e^{r_2} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 + \beta)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_r(a, \beta) = & \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 - \beta)}{e^{\bar{r}_1} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 - \beta)} + \right. \\ & + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 + \beta)}{e^{\bar{r}_1} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 + \beta)} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 - \beta)}{e^{\bar{r}_2} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 - \beta)} - \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} k(\beta_0 + \beta)}{e^{\bar{r}_2} - \operatorname{cosh} k(\beta_0 + \beta)} \right]; \end{aligned}$$

$$\theta_{\tau}(a, \beta) = \frac{1}{4} \left\{ (a_0 + a) \left[\frac{\operatorname{sink}(\beta_0 - \beta)}{\operatorname{chr}_1 - \operatorname{cosk}(\beta_0 - \beta)} + \frac{\operatorname{sink}(\beta_0 + \beta)}{\operatorname{chr}_1 - \operatorname{cosk}(\beta_0 + \beta)} \right] + (a_0 - a) \left[\frac{\operatorname{sink}(\beta_0 - \beta)}{\operatorname{chr}_2 - \operatorname{cosk}(\beta_0 - \beta)} + \frac{\operatorname{sink}(\beta_0 + \beta)}{\operatorname{chr}_2 - \operatorname{cosk}(\beta_0 + \beta)} \right] \right\};$$

$$\bar{\theta}_{\tau}(a, \beta) = \frac{1}{4} \left\{ (a + a_0) \left[\frac{\operatorname{sink}(\beta_0 - \beta)}{\operatorname{chr}_1^{-} - \operatorname{cosk}(\beta_0 - \beta)} + \frac{\operatorname{sink}(\beta_0 + \beta)}{\operatorname{chr}_1^{-} - \operatorname{cosk}(\beta_0 + \beta)} \right] - (a - a_0) \left[\frac{\operatorname{sink}(\beta_0 - \beta)}{\operatorname{chr}_2^{-} - \operatorname{cosk}(\beta_0 - \beta)} + \frac{\operatorname{sink}(\beta_0 + \beta)}{\operatorname{chr}_2^{-} - \operatorname{cosk}(\beta_0 + \beta)} \right] \right\};$$

$$\epsilon_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-r_1 n} + e^{-r_2 n}) \operatorname{sink} \beta_0 \operatorname{cosk} n \beta;$$

$$\theta_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_0 + a) e^{-r_1 n} + (a_0 - a) e^{-r_2 n}] \operatorname{sink} \beta_0 \operatorname{cosk} n \beta;$$

$$\bar{\epsilon}_{\tau}^{\bullet}(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-\bar{r}_1 n} + e^{-\bar{r}_2 n}) \operatorname{sink} \beta_0 \operatorname{cosk} n \beta;$$

$$\bar{\theta}_r^*(a, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} [(a + a_0)e^{-\bar{r}_1 n} - (a - a_0)e^{-\bar{r}_2 n}] \sin kn\beta_0 \cos kn\beta;$$

$$r_1 = \bar{r}_1 = \sqrt[4]{\lambda} k(a_0 + a);$$

$$r_2 = \sqrt[4]{\lambda} k(a_0 - a);$$

$$\bar{r}_2 = \sqrt[4]{\lambda} k(a - a_0).$$

Другие силовые факторы, возникающие в оболочке, могут быть представлены аналогично.

Построенное здесь решение для случаев воздействия на бесконечно длинную оболочку температурных полей $t^*(a, \beta)$, $t^{**}(a, \beta)$ позволяет свести процедуру получения числовой информации о напряженном состоянии оболочки к вычислению элементарных табулированных функций и рядов с верхним пределом суммирования $n = n^*$, определяемым соотношением (12.2.10).

Отметим, что аналогичное напряженное состояние возникает в оболочке, если она нагрета равномерно, а в ней находятся включения из материала, обладающего иными физико-механическими характеристиками, чем основной материал.

12.6. ТЕРМОСИЛОВАЯ АНАЛОГИЯ ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСЧЛЕНЕНИИ И СИНТЕЗЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ

Между различными процессами, явлениями реального мира, проявляющимися в весьма отдаленных областях знаний, порой удается установить связь, сходство отдельных сторон или их полное сходство, которое формулируется в виде аналогий. Они позволяют перенести знания, полученные из рассмотрения одного объекта, на другой, менее изученный, менее наглядный или доступный для исследования. Примерами могут служить аналогии, установленные на

протяжении последнего столетия в механике деформируемого твердого тела. В частности, информацию о напряженном состоянии тонкостенных стержней можно получить на основании ряда аналогий, базирующихся на том, что математические задачи, поставленные для нахождения функции напряжений, встречаются и в других разделах математической физики, например в гидродинамике. Так, существует несколько гидродинамических аналогий между задачами о кручении и гидродинамическими задачами о движении жидкости в трубах того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень: это аналогии, установленные Буссинеском (1871 г.), Кельвином (Томсоном) (1883 г.), Гринхиллом (1910 г.) и др. В теории оболочек фундаментальное место заняла статико-геометрическая аналогия, основанная на сходстве структуры левых частей уравнений равновесия и соответствующих уравнений совместности деформаций. Здесь мы ограничимся рассмотрением между эффектами от температурного и силового воздействий на круговые физически ортотропные оболочки и запишем установленные в работе [68] соотношения существующей между ними математической аналогии.

При использовании полных уравнений теории физически ортотропных термоупругих тонких оболочек, построенных на основе принятия гипотез Кирхгофа-Льва, задача о действии на оболочку компонентов силовой поверхностной нагрузки и температурного поля, линейно меняющегося по ее толщине, может быть сведена к решению системы трех дифференциальных уравнений относительно перемещений $u(a, \beta)$, $v(a, \beta)$, $w(a, \beta)$, представленной в виде табл. 12.1. При помощи операторного метода упомянутая система уравнений приводится к пяти разрешающим уравнениям для компонентов силового и температурного воздействий на оболочку в отдельности: $p_1(a, \beta)$, $p_2(a, \beta)$, $p(a, \beta)$, $t^*(a, \beta)$, $t^{**}(a, \beta)$. Причем воздействиям $p(a, \beta)$, $t^*(a, \beta)$, $t^{**}(a, \beta)$ отвечают уравнения соответственно (12.2.1), (12.3.1) и (12.4.1), а для воздействий $p_1(a, \beta)$, $p_2(a, \beta)$ разрешающие уравнения могут быть получены простой заменой в правой части (12.2.1) нагрузки $p(a, \beta)$ на $p_1(a, \beta)$, $p_2(a, \beta)$, взятые с противоположным знаком. Перемещения, усилия и изгибающие моменты, а также другие факторы выражаются через соответствующую разрешающую функцию дифференциальными соотношениями в зависимости от направления нагрузки или вида температурного воздействия.

Пусть имеет место совпадение законов изменения силовых нагрузок и температурных полей, возникающих в какой-то момент в оболочке:

$$p(a, \beta) = p_0 \chi(a, \beta); \quad t(a, \beta) = t_0 \chi(a, \beta). \quad (12.6.1)$$

Тогда в результате очевидных преобразований получаем соотношения, выражающие чисто математическую связь, математическую аналогию, вначале между разрешающими функциями, а следовательно, и между напряженно-деформированными состояниями при силовом и температурном воздействиях на оболочку, позволяющие записать частные решения для искомых факторов при воздействии температурных полей через соответствующие факторы при силовом нагружении оболочки.

Запишем соотношения этой термосиловой математической аналогии лишь для некоторых факторов, имея в виду, что для остальных они записываются аналогично:

$$\begin{aligned} w^*(a, \beta) = & - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} w^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} w^{(2)}(a, \beta) + \right. \\ & \left. + \lambda w^{(3)}(a, \beta) \right] f_{\rho t}^*; \end{aligned} \quad (12.6.2)$$

$$\begin{aligned} T_j^*(a, \beta) = & - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} T_j^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} T_j^{(2)}(a, \beta) + \right. \\ & \left. + \lambda T_j^{(3)}(a, \beta) \right] f_{\rho t}^* - T_{jt}(a, \beta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_j^*(a, \beta) = & - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} G_j^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} G_j^{(2)}(a, \beta) + \right. \\ & \left. + \lambda G_j^{(3)}(a, \beta) \right] f_{\rho t}^*; \end{aligned} \quad (12.6.3)$$

$$w^{**}(a, \beta) = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} w^{(2)}(a, \beta) - \left[\vartheta \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \right. \right.$$

$$+ \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left. \right] \omega^{(3)}(a, \beta) \left. \right] f_{pt}^{**};$$

$$T_j^{**}(a, \beta) = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} T_j^{(2)}(a, \beta) - \left[\vartheta \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] T_j^{(3)}(a, \beta) \left. \right] f_{pt}^{**};$$

(12.6.3)

$$G_j^{**}(a, \beta) = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} G_j^{(2)}(a, \beta) - \left[\vartheta \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] G_j^{(3)}(a, \beta) \left. \right] f_{pt}^{**} - G_{jt}(a, \beta).$$

В соотношениях (12.6.2), (12.6.3) и далее индексы в скобках означают, что тот или иной фактор возникает в оболочке при действии продольной (1), окружной (2), радиальной (3) нагрузок. Первая группа соотношений относится к температурному воздействию $t^*(a, \beta)$, а вторая — к температурному воздействию $t^{**}(a, \beta)$.

Далее, в этих соотношениях приняты следующие обозначения:

$$f_{pt}^* = \frac{(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) t_0^*}{(1 - \nu_1 \nu_2) \rho_0} \frac{E_1 h}{R};$$

$$\vartheta = \frac{a_{1t} + \nu_2 a_{2t}}{a_{2t} + \nu_1 a_{1t}};$$

$$f_{pt}^{**} = \frac{(a_{2t} + \nu_1 a_{1t}) t_0^{**} E_1}{6(1 - \nu_1 \nu_2) \rho_0} \left(\frac{h}{R} \right)^2.$$

Соотношения (12.6.2) и (12.6.3), как ясно из предыдущих рассуждений, выражают аналогию при использовании уравнений общей

теории оболочек. В случае же применения уравнений типа Власова—Донелли или других уравнений, соответствующих приближенным теориям, занимающим промежуточное положение между указанными теориями, соотношения установленной аналогии сохраняют свою запись. При использовании полубезмоментной теории, теории простого краевого эффекта, изгибного или тангенциального состояний они упрощаются.

В случае полубезмоментной теории оболочек математическая аналогия выражается в виде зависимостей

$$\omega^*(a, \beta) = -\vartheta \frac{\partial}{\partial a} \omega^{(1)}(a, \beta) f_{pt}^*;$$

$$\Gamma_1^*(a, \beta) = -\vartheta \frac{\partial}{\partial a} \Gamma_1^{(1)}(a, \beta) f_{pt}^* - \Gamma_{1t}(a, \beta);$$

$$G_2^*(a, \beta) = -\vartheta \frac{\partial}{\partial a} G_2^{(1)}(a, \beta) f_{pt}^*;$$

$$\omega^{**}(a, \beta) = -\lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \omega^{(3)}(a, \beta) f_{pt}^{**};$$

$$\Gamma_1^{**}(a, \beta) = -\lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Gamma_1^{(3)}(a, \beta) f_{pt}^{**};$$

$$G_2^{**}(a, \beta) = -\lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] G_2^{(3)}(a, \beta) f_{pt}^{**} - G_{2t}(a, \beta).$$

Соотношения (12.6.2), (12.6.3) в случае рассмотрения уравнений, описывающих изгибное и тангенциальное состояния, упрощаются, принимая следующий вид:

$$u^*(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} u^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} u^{(2)}(a, \beta) \right] f_{pt}^*;$$

$$v^*(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} v^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} v^{(2)}(a, \beta) \right] f_{pt}^*;$$

$$T_j^*(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} T_j^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} T_j^{(2)}(a, \beta) \right] f_{pt}^* -$$

$$- T_{jt}(a, \beta);$$

$$S^*(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial}{\partial a} S^{(1)}(a, \beta) + \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} S^{(2)}(a, \beta) \right] f_{pt}^*;$$

$$w^{**}(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] w^{(3)}(a, \beta) f_{pt}^{**};$$

$$G_j^{**}(a, \beta) = - \left[\vartheta \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] G_j^{(3)}(a, \beta) f_{pt}^{**} - G_{jt}(a, \beta).$$

Записанные здесь соотношения математической аналогии, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами от силового и температурного воздействий на физически ортотропные цилиндрические оболочки, позволяют достаточно просто найти частные решения, а в случае, например, бесконечно длинной оболочки при локализованном температурном поле – полное решение задачи для всех искомых факторов при любом температурном поле, если имеются решения соответствующих силовых задач. В случае локализованных воздействий на оболочки эффективное решение может быть построено с использованием соотношений рассмотренной здесь термосиловой аналогии на основе одного из методов синтеза напряженного состояния, сформулированных в гл. 5 и примененных в настоящей и предыдущей главах. Причем в термоупругой задаче, как и в силовой, наиболее универсальными являются первый и второй методы синтеза напряженного состояния, а получающиеся на их основе результаты решения задач рассмотренного класса практически совпадают с данными, найденными с использованием точных уравнений теории оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 432 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 368 с.
3. Андрианов И.В. Построение упрощенных уравнений нелинейной динамики пластин и пологих оболочек на основе метода осреднения // Прикл. матем. и механика, 1986. Вып. 50. № 1. С. 171-175.
4. Андрианов И.В., Дисковский А.А. К исследованию устойчивости овальных цилиндрических оболочек, нагруженных внешним давлением // Гидроаэродинамика и теория упругости. 1978. № 23. С. 119-128.
5. Андрианов И.В., Иванков А.О. Применение Паде-аппроксимант в методе введения параметра при исследовании бигармонического уравнения со сложными граничными условиями // Журнал вычислит. математики и матем. физики. 1987. Вып. 27. № 2. С. 296-301.
6. Андрианов И.В., Иванков А.О. Решение смешанных задач теории изгиба пластины модифицированным методом возмущения вида граничных условий // ДАН УССР. Сер. А. 1988. № 1. С. 33-36.
7. Андрианов И.В., Крижевский Г.А. Расчет собственных колебаний параллелограммной пластины приближенным методом // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1988. № 2. С. 46-49.
8. Андрианов И.В., Леснигчая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
9. Андрианов И.В., Леснигчая В.А., Лобода В.В., Маневич Л.И. Расчет прочности ребристых оболочек инженерных конструкций. Киев-Донецк: Вища школа. 1986. 104 с.
10. Андрианов И.В., Маневич Л.И. Применение метода осреднения к расчету оболочек // Успехи механики. 1983. Т. 6. № 3/4. С. 3-29.
11. Андрианов И.В., Нерубайло Б.В. Методы синтеза предельных состояний и составных уравнений в теории оболочек // Шестой Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике. Ташкент. 1986. С. 40-41.
12. Андрианов И.В., Нерубайло Б.В., Образцов И.Ф. Построение асимптотически равномерно пригодных приближенных решений задач теории пластин и оболочек // Тр. XIV Всес. конференции по теории пластин и оболочек. Т. 1. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та. 1987. С. 94-98.
13. Андрианов И.В., Пасечник А.Н. Метод составных уравнений в теории цилиндрических оболочек // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 4. С. 806-809.

14. Андрианов И.В., Пасечник А.Н. Составные уравнения в теории оболочек // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 1. С. 35–38.
15. Андрианов И.В., Буланова Н.С. Об одном методе улучшения сходимости рядов теории возмущений в механике // Прикладная механика, 1984. Вып. 20. № 5. С. 119–122.
16. Андрианов И.В., Холод Е.Г. Решение нелинейных задач динамики подкрепленных конструкций при учете дискретности размещения силового набора // ДАН УССР. Сер. А. 1987. № 6. С. 20–22.
17. Андрианов И.В., Шевченко В.В. Определение усредненных характеристик в задачах изгиба и свободных колебаний периодически перфорированных пластин // ДАН УССР. Сер. А. 1988. № 12. С. 22–26.
18. Бабич В.М., Буддырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
19. Баранцев Р.Г., Энгельгардт В.Н. Асимптотические методы в механике жидкости и газа. Л.: 1987. 88 с.
20. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
21. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
22. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
23. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наукова думка, 1976. 270 с.
24. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 256 с.
25. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
26. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
27. Болотин В.В., Новичков Ю.И. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1986. 376 с.
28. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
29. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
30. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 267 с.
31. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

32. Вахромеев Ю.В., Корнев В.М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. XIII. № 7. С. 1163–1170.
33. Вышк М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1960. Т. 5. Вып. 3. С. 3–80.
34. Вышк М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 4. С. 27–95.
35. Вышк М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.
36. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
37. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
38. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
39. Григolloк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
40. Гузь А.Н., Немш Ю.Н. Методы возмущения в пространственных задачах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 349 с.
41. Даревский В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках // Прочность и динамика вращающихся двигателей. М.: Машиностроение, 1964. С. 23–83.
42. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
43. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
44. Каламкарров А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Изд. ВИНИТН. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1987. Т. 19. С. 78–147.
45. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
46. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев: Наукова думка, 1980. 168 с.

47. **Климов Д.М., Руденко В.В.** Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
48. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
49. **Кондратьев В.А., Олейник О.А.** Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. № 2. С. 3-76.
50. **Кудрявцев Е.П.** Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний упругих прямоугольных пластины // Расчеты на прочность. 1964. № 10. С. 352-362.
51. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Нпука, 1961. 398 с.
52. **Лукашевич С.** Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982. 542 с.
53. **Маневич А.И.** Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев-Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
54. **Маневич Л.И., Павленко А.В.** Асимптотический анализ уравнений теории оболочек эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 185-190.
55. **Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г.** Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев-Донецк: Вища школа, 1982. 152 с.
56. **Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П.** Соприженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах // Вычислительные процессы и системы. 1986. № 4. С. 5-62.
57. **Маслов В.П.** Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 310 с.
58. **Митропольский Ю.А., Мосеевков Б.И.** Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976. 590 с.
59. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения воли в слоистых упругих и жидких средах. Ленинград: Наука, 1984. 202 с.
60. **Назаров С.А.** Введение в асимптотические методы теории упругости. Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1983. 117 с.
61. **Найфе А.** Методы возмущений. М.: Мир, 1984. 456 с.
62. **Нерубайло Б.В.** К расчету напряжений в цилиндрических оболочках, нагруженных по линиям контура // Прикладная механика. 1975. Т. 11. Вып. 2. С. 41-48.
63. **Нерубайло Б.В.** Применение асимптотического метода в задачах термоупругости цилиндрических оболочек // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 3. С. 36-45.

64. **Нерубайло Б.В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
65. **Нерубайло Б.В., Образцов И.Ф., Ольшанский В.П.** Пологая оболочка под действием нормальной локальной нагрузки (асимптотические результаты) // МТТ. 1988. № 6. С. 156-159.
66. **Нерубайло Б.В., Образцов И.Ф., Ольшанский В.П.** Определение локальных напряжений в цилиндрической оболочке, нагруженной по круговой площадке // ПМТФ. 1988. № 6. С. 15-23.
67. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** О методах синтеза напряженно-го состояния в теории оболочек // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 54-56.
68. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** Об одной термосиловой аналогии в теории оболочек // ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 327-331.
69. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** Об одном классе решений краевых задач для термоупругих вращающихся оболочек // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 2. С. 306-309.
70. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.** Метод двумерных отображений в локальных задачах прочности оболочек // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 56-59.
71. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.** Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М.: 1988. Деп. в ВИНТИ 12.02.88. № 1222-В88.
72. **Папкович П.Ф.** Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335-339.
73. **Пыльничук В.Н.** К расчету сильно нелинейных систем, близких к виброударным // Прикл. матем. и механика, 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 744-751.
74. **Победра Б.Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд. МГУ, 1984. 336 с.
75. **Потапов А.И.** Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинках. Горький: Изд-во ГГУ, 1985. 108 с.
76. **Сайгачес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теории колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
77. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
78. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы в анализе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1986. С. 93-210.

79. **Филатов А.Н., Шарова Л.В.** Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 156 с.
80. **Фридрихс К.О.** Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969. 232 с.
81. **Холшевников К.В.** Асимптотические методы небесной механики. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.
82. **Чернышев Г.Н.** Характер решений уравнений оболочек нулевой кривизны при сосредоточенных воздействиях // Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 597-600.
83. **Шамровский А.Д.** Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 859-868.
84. **Яо, Дженонис.** Вылущивание эллиптических цилиндров под нормальным давлением // Ракетная техника и космонавтика. 1970. № 1. С. 25-28.
85. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
86. **Berger H.M.** A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. N 4. P. 465-472.
87. **Sanders J.L.** Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. N 1. P. 21-36.
88. **Suque P.** Methods d'homogenisation on mécanique des solides // Cah. groupe franc. rheol. 1981. P. 87-128.
89. **Taylor G.I.** The buckling load for a rectangular plate with forced clamped edges // ZAMM. 1933. V. 13. P. 147-150.
90. **Van den Berg J.** Nonstandard asymptotic analysis. Berlin: Springer, 1987. 187 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аппроксимация Паде 197 – 198
– – двухточечная 206 – 208
- Возмущение регулярное 5 – 19
– – сингулярное 45
- Диаграмма Ньютона 55 – 57
- Задача вязкоупругая 215 – 217
– на собственные значения 5 – 12
- Итерации 7 – 8
- Колесания нелинейные конструктивно-ортотропных оболочек 96 – 111
– – прямоугольной пластины 198 – 200, 266 – 272
– – системы с одной степенью свободы 39 – 44
– – стержня 260 – 265
– – стрингерной оболочки 35 – 39
- Мембрана армированная волокнами 230 – 234
- Метод аналитического продолжения 196
– асимптотического расчленения граничных условий 77 – 95
– аналитического сигнала 313 – 315
– Бубнова – Галеркина 22
– ВКБ 303 – 313
– вариационно-асимптотический 313
– возмущения вида граничных условий 278 – 290
– возмущения формы границы 296 – 297
– Гольденвейзера – Вишика – Люстерника 45 – 51
– двух масштабов 51 – 54
– динамического краевого эффекта 256 – 277
– "замораживания" 48 – 49
– Канторовича 70
– Лейбензона – Ишлинского 12
– Линдстедта – Пуанкаре 27 – 28
– нормальных форм 313 – 320
– обобщенного суммирования 196
– осреднения 211 – 215, 217 – 225
– аппроксимации Паде 197 – 198
– Папковича 68 – 69
– пограничного слоя 45 – 50
– Пригуло 33 – 34
– Пуанкаре – Лайтхилла – Го 31 – 33
– разложения по размеру области 293 – 295, 297

- Рэлея – Болотина 273 – 277
- Рэлея – Ритца 276
- синтеза напряженных состояний 163, 170 – 178
- составных уравнений 129 – 143
- сращиваемых асимптотических разложений 298 – 302
- Тиссерана 29
- Нагрузка локальная нормальная 346 – 353**
 - - окружная 321 – 339
 - - радиальная 358 – 370
 - - тепловая 271 – 283
 - по круговой площадке 339 – 346
 - - отрезкам контура 183 – 187
 - - прямоугольной области 348 – 351
- Неравномерность разложения 25 – 35**
- Оболочка вафельная 73, 74 – 80**
 - конструктивно-ортотропная 72 – 74
 - круговая цилиндрическая 62 – 66
 - овальная цилиндрическая 19
 - открытая 121 – 228
 - пологая 346 – 348
 - редко подкрепленная стрингерами 128 – 129
 - стрингерная 73, 74 – 80
 - шпангоутная 73, 74 – 80
- Особенности решения 69 – 71**
- Оценка погрешности асимптотических приближений 164**
 - - метода основных уравнений 141 – 143
 - - упрощенных уравнений теории оболочек 164 – 178
- Перенормировка 33 – 37**
- Пластина гофрированная 225 – 230**
 - ребристая 234 – 238
 - растянутая 59 – 62
 - узкая 66 – 68
- Погрешность приближенных уравнений асимптотическая 164 – 170**
 - - действительная 170 – 178
- Преобразование Бесселя 211**
 - Гильберта 313 – 315
 - Лапласа 208 – 211
 - Меллина 70
 - Фурье 169 – 170, 211
 - Эйлера 196

- Состояние напряженно-деформированное изгибное 163, 164
- - - основное 62 - 66
 - - - с большим показателем изменчивости 62 - 66
 - - - тангенциальное 62 - 66, 163, 164
- Теория безмоментная 62 - 66
- полубезмоментная 62 - 66
- Уравнения Ван-дер-Поля 201 - 202, 206 - 208
- Власова - Доннелла 171 - 183
 - Дюффинга 26 - 28
 - Лайтхилла 29
 - составные 129 - 135
- Устойчивость вертикального стержня при учете собственной массы 12 - 13
- консольного стержня 23 - 25
 - конструктивно-ортотропной оболочки 118 - 121
 - овальной цилиндрической оболочки 19 - 23
 - вафельной оболочки 120
 - стрингерной - 119
 - шпангоутной - 121
- Функция Томсона 295
- Эри 309 - 312
- Эффект краевой динамический 256 - 260
- - локальный 183 - 187
 - - обобщенный 122 - 124
 - - простой 62 - 66

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Регулярные возмущения параметров конструкций	5
1.1. Задачи на собственные значения	5
1.2. Устойчивость овальной цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением	19
1.3. Устойчивость консольного стержня	23
1.4. Устранение неравномерностей	25
1.5. Нелинейные колебания струнгерной оболочки	35
1.6. Неквазилинейная асимптотика нелинейной системы с одной степенью свободы	39
Глава 2. Сингулярные возмущения в механике пластин и оболочек.	45
2.1. Метод Гольденвейзера-Вишика-Люстерника	45
2.2. Метод двух масштабов	51
2.3. Определение параметров асимптотического интегрирования	55
2.4. Изгиб растянутой пластинки	59
2.5. Упрощение уравнений круговой цилиндрической оболочки	62
2.6. Изгиб узкой пластинки	66
Глава 3. Приближенные уравнения теории конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек	72
3.1. Статические задачи	72
3.2. Расчленение граничных условий	77
3.3. Упрощенные краевые задачи нелинейной динамики	96
3.4. Расчет открытых оболочек	121
3.5. Оболочки с редко расположенными струнгерными	128
Глава 4. Составные краевые задачи теории цилиндрических оболочек	129
4.1. Составные краевые задачи статики изотропных оболочек	130
4.2. Оценка точности метода составных уравнений	141
4.3. Составные краевые задачи динамики оболочек	143
4.4. Составные краевые задачи статики конструктивно-ортотропных оболочек	146
4.5. Задачи динамики конструктивно-ортотропных оболочек	159
4.6. Составные краевые задачи устойчивости конструктивно-ортотропных оболочек	161
	413

Глава 5. Методы синтеза напряженных состояний	163
5.1. Об асимптотической погрешности упрощенных уравнений теории оболочек. Решение для бесконечно длинной цилиндрической оболочки	164
5.2. Принципы синтеза напряженного состояния и действительная погрешность решений приближенных уравнений	170
5.3. Локальный краевой эффект, основное и изгибное состояния при нагружении оболочек по отрезкам контура	183
5.4. Запись выражений для силовых факторов в замкнутом виде	187
5.5. Преобразование выражений для перемещений	192
Глава 6. Расширение области применимости метода возмущений ...	195
6.1. Метод аппроксимаций Паде (АП)	197
6.2. Ускорение сходимости итерационных процессов	202
6.3. Оценка области применимости метода возмущений при помощи метода АП	205
6.4. Использование метода АП для сращивания предельных разложений	206
6.5. Обращение преобразования Лапласа при помощи двухточечных АП	208
Глава 7. Метод осреднения	211
7.1. Метод осреднения в нелинейных задачах	212
7.2. Вязкоупругие задачи и метод замораживания	215
7.3. Осреднение дифференциальных уравнений с быстропеременными коэффициентами	217
7.4. Осесимметричный изгиб гофрированной круглой пластины .	225
7.5. Деформация мембраны, армированной волокнами	230
7.6. Изгиб подкрепленной полосы с учетом дискретного характера размещения ребер	234
7.7. Другой способ решения дифференциальных уравнений с периодически разрывными коэффициентами	239
7.8. Упрощенные уравнения геометрически нелинейной динамики	250
7.9. Колебания цилиндрической оболочки с большим числом присоединенных масс	252
Глава 8. Асимптотический метод динамического краевого эффекта	256
8.1. Собственные колебания стержня	256
8.2. Собственные нелинейные колебания стержня	260

8.3. Собственные нелинейные колебания прямоугольной пластины	266
8.4. Расширение области применимости метода динамического краевого эффекта	272
Глава 9. Методы возмущения вида граничных условий и исходной области	278
9.1. Метод возмущения вида граничных условий	278
9.2. Улучшенный метод возмущения вида граничных условий	284
9.3. Кручение стержня, перфорированного квадратными отверстиями	290
Глава 10. Другие асимптотические методы	298
10.1. Метод сращиваемых асимптотических разложений	298
10.2. Метод Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ)	303
10.3. Вариационно-асимптотический метод	313
10.4. Разделение быстрых и медленных составляющих при помощи преобразования Гильберта	313
10.5. Метод нормальных форм в нелинейных задачах	316
Глава 11. Некоторые асимптотические результаты в локальных задачах прочности оболочек	321
11.1. Случай действия окружной локальной нагрузки на цилиндрическую оболочку	321
11.2. Локальные напряжения в цилиндрической оболочке, нагруженной по круговой площадке	339
11.3. Пологая оболочка при действии локальной нормальной нагрузки	346
Глава 12. Словая и термоупругая задачи для физически ортотропных цилиндрических оболочек. Асимптотические решения	354
12.1. Исходная система уравнений в перемещениях	354
12.2. Случай действия радиальной локальной нагрузки	358
12.3. Оболочка при локализованном температурном поле, постоянном по толщине	371
12.4. Случай локализованного температурного перепада по толщине оболочки	383
12.5. Преобразование решения термоупругой задачи к замкнутому виду	393
	415

12.6. Термосиловая аналогия при асимптотическом расчленении и синтезе напряженного состояния оболочки	399
Список литературы	404
Предметный указатель	410

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Образцов Иван Филиппович,
Нерубайло Борис Васильевич,
Андрианов Игорь Васильевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Редактор *Е. А. Мокринская*
Художественный редактор *В. В. Лебедев*
Переплет художника *В. А. Галкина*
Технический редактор *А. В. Боголюбова*
Корректор *Г. Л. Сафонова*

ИБ № 6646

Сдано в набор 19.02.90.	Подписано в печать 20.06.91.
Формат 60×88 1/16. Бумага офсетная №2.	Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,48.	Усл. кр.-отт. 25,48. Уч.-изд. л. 19.16.
Тираж 1000 экз.	Заказ № 1351. Цена 6 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Строминский пер., 4

Отпечатано в московской типографии № 8
Государственного комитета СССР по печати,
101898, Москва, Холмовский пер., 7
с оригинала-макета, изготовленного в издательстве "Машиностроение"
на персональных ЭВМ по программе "Астра-Н", разработанной НИИЦЭВТ

Опечатки в книге

Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машинноестроение, 1991. 416 с.

стр. 5, строка снизу 12

должно быть где $\delta_n(\varepsilon)$

стр. 6, строка сверху 8

должно быть

$$\bar{x}_0 = A_0^{-1} \bar{b}; \quad \bar{x}_1 = -A_0^{-1} A_1 \bar{x}_0; \quad \dots$$

строка сверху 10

должно быть для всякого \bar{x} . Тогда \bar{x}_0

стр. 7, строка сверху 7

должно быть

$$u_1 = -\frac{q}{2(E_0 F_0)^2} \left[\int_0^x E_1 F_1 (2x-L) dx - \frac{x}{L} \int_0^L E_1 F_1 (2x-L) dx \right]; \dots$$

стр. 12, строка снизу 16

должно быть $\frac{d^4 w_1}{d\varepsilon^4}$

строка снизу 12 должно быть $\bar{T} = 1 - \frac{1}{2} \pi \varepsilon$

строки снизу 5-11: как указала нам С.Бауэр, у Коллатца все верно (нас сбילה с толку нетривиальная система координат в книге Коллатца)

стр. 14, строка снизу 1 должно быть (1.1.20)

строка снизу 5 должно быть $= \lambda_0 \bar{x}_i^{(1)}$

стр. 15, строка снизу 4 должно быть $\bar{x}_i^{(1)}$

строка снизу 7 должно быть $\bar{x}_i^{(0)}$

стр. 18, строка сверху 9

должно быть оператора $E_0 F_0 (d^2 / dx^2)$

строка снизу 4 должно быть (1.1.5)

стр. 20, строка сверху 1

должно быть $(1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1})^2$

стр. 21 , строка сверху 2

должно быть $(1 + \mu \cos \frac{4\pi y}{L_1})^2 (\frac{\pi}{L})^4$

стр. 22 , строка сверху 3

должно быть $+(\frac{\pi R_0}{L})^4$

стр. 22 , строка сверху 4

должно быть $+(\frac{\pi R_0}{L})^4$

стр. 24 , строка сверху 9

должно быть $w_1(0) = w_1'(0) = 0; w_1'(L) = 0;$

стр. 25 , строка сверху 9

должно быть $+T_1 w_1'(L) = 0;$

стр. 25 , строка сверху 12

должно быть $w_1 = -5ALx^2 + Ax^3 + \frac{A}{2L}x^4 - \frac{A}{10L^2}x^5.$

стр. 26 , строка снизу 8

должно быть $u_1 = -\frac{3a^3}{8}t \sin t +$

стр. 26 , строка снизу 6

должно быть $+O(\varepsilon^2).$

стр. 26 , строка снизу 4

должно быть имеем $u \rightarrow \infty$

стр. 28 , строка сверху 1

должно быть $-2a_1 u_0;$

стр. 28 , строка сверху 9

должно быть то $\omega_1 = 0$

стр. 29 , строка снизу 5

должно быть $+O(\varepsilon^3).$

стр. 32 , строка снизу 1

должно быть $x_1 -$

стр. 33 , строка снизу 12

должно быть $+O\left(\frac{\varepsilon^3}{s^6}\right)$.

стр. 33 , строка снизу 13

должно быть $+O\left(\frac{\varepsilon^2}{s^6}\right)$.

стр. 34 , строка сверху 10

должно быть $+O(\varepsilon^2)$.

стр. 34 , строка сверху 12

должно быть (1.4.9)

стр. 34 , строка сверху 15

должно быть $+O(\varepsilon^2)$.

стр. 34 , строка снизу 5

должно быть $+O(\varepsilon^2)$.

стр. 34 , строка снизу 1

должно быть $+O(\varepsilon^2)$.

стр. 34 , строка снизу 1

должно быть $(x_1 + \frac{1}{3}s^{-2})]$

стр. 35 , строка сверху 14

должно быть $-L(w, \Phi) = 0;$

стр. 35 , строка сверху 15

должно быть $= \frac{1}{2R^2} L(w, w)$.

стр. 36 , строка сверху 7

должно быть $n_1 = n/R;$

стр. 36 , строка снизу 3

должно быть $(\frac{m_1}{h})^2 \dots (\frac{m_l}{h})^2$

стр. 36 , строка снизу 6

должно быть $f_2 = \frac{f_1^2}{4R} n^2.$

стр. 37 , строка сверху 1

должно быть $\int_0^{2\pi R L} \int_0^L$

стр. 38 , строка снизу 4

должно быть $i = 2, 3, 4, \dots$

стр. 39 , строка сверху 2

должно быть $\xi_2 + \xi_2 =$

стр. 46 , строка сверху 15

должно быть $z' \sim \varepsilon^{-\alpha} z.$

стр. 47 , строка сверху 1

должно быть для $\varepsilon^p : \varepsilon z_0' + z_0' = 0;$

стр. 47 , строка сверху 2

должно быть для $\varepsilon^{p+1} : \varepsilon z_1' + z_1' = -z_0';$

стр. 47 , строка снизу 2

должно быть (2.1.5)

стр. 47 , строка снизу 1

должно быть $z_0' = -z_0,$

стр. 48 , строка сверху 2

должно быть $\bar{z}_0 = z_0; \bar{z}_1 = z_1;$

стр. 48 , строка снизу 1

должно быть $+O(\varepsilon),$

стр. 49 , строка сверху 9

должно быть $+O(\varepsilon),$

стр. 49 , строка снизу 7

должно быть $+t + C.$

стр. 50 , строка снизу 8

должно быть $\ln|a| - \frac{a^2}{2};$

стр. 53 , строка сверху 9

должно быть $C_1'(0) = -C'(0)$

стр. 54 , строка сверху 4

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = -\frac{\partial y_0(0,0)}{\partial x_1};$$

стр. 54 , строка сверху 8

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad y_0 =$$

стр. 54 , строка сверху 10

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = ae^{-x_1}$$

стр. 54 , строка сверху 13

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = -a \sin \xi.$$

стр. 55 , строка сверху 10

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad f_i y^i.$$

стр. 55 , строка сверху 13

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = \varepsilon^a$$

стр. 55 , строка снизу 8

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} +O(\varepsilon^k),$$

стр. 55 , строка снизу 1

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad \dots, f_{0n} y_{kn}^n.$$

стр. 56 , строка снизу 12

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad \rho_s + sk > \rho_m + mk.$$

стр. 57 , строка сверху 1

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad /(\rho - m) = k,$$

стр. 57 , строка сверху 12

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} \quad (2.3.3)$$

стр. 59 , строка снизу 15

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = \partial w / \partial x = 0;$$

стр. 59 , строка снизу 14

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ} = \partial w / \partial y = 0.$$

стр. 61, строка снизу 4

должно быть На краях $x=0, a$

стр. 63, строка сверху 4

должно быть $+(1-\nu^2)\varepsilon^2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} -$

стр. 63, строка сверху 8

должно быть $\xi = x/L;$

стр. 64, строка снизу 4

должно быть $\varepsilon^{-2} I^{-4} \partial^4 \Phi / \partial \xi^4 = 0;$

стр. 70, строка сверху 2

должно быть $w_\theta =$

стр. 70, строка сверху 7

должно быть $+\theta(w_{11}(r) - \frac{2}{\pi} w_1(r))]] +$

стр. 70, строка сверху 8

должно быть $+w_{12}(r)]].$

стр. 71, строка сверху 14

должно быть $+C_{12} r^{3\lambda}]$

стр. 71, строка снизу 7

должно быть $= Cr^{1.5} \theta^2 [\theta - \frac{\pi}{2}]$

стр. 71, строка снизу 4

должно быть $C(r^{1.5})^{(k)} =$

стр. 211, строка сверху 9

должно быть (6.5.8)

стр. 213, строка снизу 7

должно быть $-2 \frac{dB}{d\tau} \omega \cos \omega t -$

стр. 215, строка сверху 8

должно быть $+O(\varepsilon).$

стр. 216, строка снизу 6

должно быть $R(t-t_1),$

стр. 217, строка сверху 7

должно быть $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (...). dt.$

стр. 217, строка сверху 7

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt.$$

стр. 217, строка сверху 9

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } I_1 = A(t) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^t R(t-t_1) dt_1 \right] dt.$$

стр. 217, строка сверху 12

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } + \rho h A_{ii} = 0.$$

стр. 218, строка сверху 13

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } + a(\eta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial \eta} +$$

стр. 219, строка сверху 3

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } = - \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_0}{dy}.$$

стр. 219, строка снизу 7

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } = + \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2}.$$

стр. 220, строка сверху 12

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } = A = u_1 \Big|_{y=\eta=0};$$

стр. 221, строка сверху 14

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } \hat{b} = \int_0^1 b(\eta) d\eta.$$

стр. 221, строка сверху 11

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } + u_0 + O(\varepsilon), \dots + O(\varepsilon).$$

стр. 223, строка сверху 4

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } + \lambda_0 u_0 + \lambda_0 (u_0 + u_1) = 0;$$

стр. 223, строка сверху 9

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } \frac{\partial u_1}{\partial \eta}$$

стр. 223, строка снизу 3

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } + C_1(y) / a.$$

стр. 223, строка снизу 1

$$\text{ДОЛЖНО БЫТЬ } C_1(y) = \hat{a} \left(\frac{du_0}{dy} + \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial y} d\eta \right).$$

стр. 230, строка сверху 11

должно быть $kl < y_1(k+1)l$

стр. 230, строка сверху 13

должно быть $q_1(x_1, y_1)$.

стр. 230, строка сверху 15

должно быть $\lim_{y_1 \rightarrow kl+0} u = u^+ = \lim_{y_1 \rightarrow kl-0} u = u^-$;

стр. 230, строка сверху 15

должно быть $= g_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

стр. 230, строка сверху 17,18

должно быть $x_1 = 0, H$

$u = 0$.

(7.5.3)

стр. 231, строка сверху 8

должно быть $+O(\varepsilon^{\alpha_1})$

стр. 231, строка сверху 10

должно быть $+O(\varepsilon^{\alpha_1}) \dots + O(\varepsilon^{\alpha_1})$

стр. 231, строка сверху 13

должно быть жесткости g нити

стр. 231, строка сверху 14

должно быть $(g \sim \varepsilon^{-\beta})$

стр. 231, строка снизу 13

должно быть $= q$.

стр. 232, строка сверху 2

должно быть $\alpha_1, \beta,$

Рис. 7.3 ось абсцисс должна быть α_1

стр. 232, строка сверху 8

должно быть $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$;

стр. 233, строка снизу 7

должно быть при $x = 0, H/L$.

стр. 235, строка сверху 3

должно быть $\lim_{y \rightarrow ik+0} w = w^+ = \lim_{y \rightarrow ik-0} w = w^-$;

стр. 235, строка сверху 5

должно быть $= \frac{E_c J}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_{y=ik}$.

стр. 236, строка сверху 9

должно быть $w_1 = (q_1 - \nabla^4 w_0) \frac{\eta^4}{24} +$

стр. 245, строка сверху 10

должно быть $A_2 = -2 \frac{\partial^4}{\partial \psi^2 \partial \xi^2} - 6 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial \xi^2} -$

стр. 248, строка сверху 9

должно быть $w_1 = \frac{1}{24Db} [E_c J \frac{\partial^4}{\partial x^4} -$

стр. 250, строка снизу 10

должно быть $q = w^{(0)} \frac{d\delta(t)}{dt} + w^{(1)} \delta(t)$.

стр. 250, строка снизу 1

должно быть $[0.5 \nabla^2 w \int_0^a \int_0^b (w_x^2 + w_y^2) dx dy +$

стр. 251, строка сверху 2

должно быть $+ w_{yy} \int_0^a \int_0^b (\frac{\nu}{R_2} + \frac{1}{R_1}) w dx dy] +$

стр. 251, строка сверху 5

должно быть $- \frac{Eh}{2ab(1-\nu^2)} \nabla^2 w \int_0^a \int_0^b (w_x^2 + w_y^2) dx dy +$

стр. 260, строка снизу 6

должно быть при $x=0, l$ $w=0$,

стр. 261, строка сверху 4

должно быть $r = \sqrt{JF^{-1}}$

стр. 261, строка снизу 9

должно быть $\int_0^{\pi \gamma(2a)}$

стр. 265, строка снизу 1

должно быть $(T_{10} = [\sqrt{EJ\rho^{-1}} \frac{\pi^2}{l^2}]^{-1})$

стр. 268, строка сверху 7

должно быть $\sim 1; \dots \sim 1$.

- стр. 268, строка снизу 2
должно быть $+ \rho h D^{-1}$
- стр. 272, строка снизу 11
должно быть $\frac{\pi^2}{a^2 + b^2}$
- стр. 274, строка сверху 5
должно быть $w(x, y) =$
- стр. 275, строка снизу 7
должно быть $\}}}$
- стр. 275, строка снизу 11
должно быть $\}}}$
- стр. 277, строка снизу 5
должно быть $(P = 5, 31)$
- стр. 277, строка сверху 7
должно быть $/(K_5 + K_6)$
- стр. 277, строка сверху 9
должно быть $K_5 = \dots K_6 = \dots$
- стр. 280, строка сверху 11
должно быть $= \frac{\lambda_4 x}{4\pi^3 n^3}$
- стр. 280, строка снизу 5
должно быть $(-1)^{(n-1)/2}$
- стр. 281, строка сверху 3
должно быть $(-1)^{(n-1)/2}$
- стр. 281, строка сверху 3
должно быть $-x \sin \pi n x$
- стр. 281, строка сверху 4
должно быть $sh \pi n x + x \cos \pi n x$

стр. 281, строка сверху 10
должно быть $sh\pi x + x\cos\pi x$

стр. 281, строка снизу 3
должно быть $\cos\pi x$

стр. 281, строка снизу 4
должно быть $\sin\pi x$

стр. 286, строка сверху 1
должно быть $w_x = 0$

стр. 286, строка сверху 2
должно быть $w_y = 0$

стр. 286, строка сверху 3
должно быть $-0.5 \leq y \leq 0.5$

стр. 286, строка снизу 3
должно быть $\nabla^4 w$

стр. 287, строка сверху 8
должно быть $\nabla^4 w$

стр. 302, строка сверху 8
должно быть $-\varepsilon a e^{-\varepsilon^2 t}$

стр. 302, строка сверху 9
должно быть $\varepsilon a(e^{-t} - e^{-\varepsilon^2 t})$

стр. 309, строка сверху 14
должно быть при $z \rightarrow -\infty$

стр. 314, строка снизу 5
должно быть $= \frac{1}{2}(\sin 199t + \sin t)$

стр. 315, строка снизу 8
должно быть и w_1

стр. 316, строка сверху 3
должно быть при $w =$

стр. 316, строка сверху 4
должно быть при $w^{(1)}$

стр. 316, строка сверху 9
должно быть $w^{(3)} =$

стр. 317, строка снизу 1
должно быть $(i\omega_k + \lambda_k)(i\omega_k - \lambda_k)$

стр. 316, строка сверху 8
должно быть $C^2 k([v+$