О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян,
А. С. Шамаев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1990

УДК 517.9+539.3

Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 311 с. — ISBN 5—211—00947—9.

Монография посвящена изучению математических задач теории упругости, возникающих при рассмотрении процессов, происходящих в композиционных и перфорированных средах. Основное вннмание уделено задачам усреднения уравнений теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированных областях с различными краевыми условиями, нахождению эффективных характеристик Отдельная глава посвящена вопросу усреднения частот собственных колебаний композитов и перфорированных конструкций

Для математиков, физиков, а также инженеров, изучающих и использующих композиты и перфорированные конструкции.

Рецензенты: профессор *М. И. Вишик*,
профессор *Б. В. Лидский*

В $\dfrac{1603040000-118}{077(02)-90}$ 82—90

ISBN 5—211—00947—9

Оглавление

Предисловие

В последние два десятилетия возникла новая область в теории уравнений с частными производными — усреднение дифференциальных операторов. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений такой раздел был создан уже давно, главным образом в связи с задачами нелинейной механики. Возникновению нового раздела в теории уравнений с частными производными способствовали многочисленные проблемы механики, физики, современной техники, приводящие к асимптотическому анализу задач для уравнений с частными производными, в основе которого лежит усреднение дифференциальных операторов.

Настоящая книга посвящена в основном задачам усреднения в теории упругости, математическим вопросам теории композиционных и перфорированных материалов. Этот раздел механики выдвигает большое число важных для приложений математических проблем, связанных с изучением микронеоднородных сред, композитов и перфорированных материалов.

Вопросам усреднения уравнений с частными производными и их приложениям посвящена обширная литература. Настоящая книга почти не имеет пересечений с другими монографиями, в которых излагаются задачи усреднения дифференциальных операторов. Особое внимание в ней обращено на задачи, связанные с линейной стационарной системой теории упругости. Поэтому для удобства читателя первая глава книги содержит материал, относящийся к исследованию стационарной системы теории упругости. В ней рассматриваются вопросы существования и единственности решений основных краевых задач теории упругости, неравенства Корна и их обобщения, априорные оценки решений и их свойства, краевые задачи в так называемых перфорированных областях и свойства их решений, а также приводятся некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа. Все эти результаты используются в последующих главах, многие из них излагаются впервые.

Вторая глава книги посвящена задачам усреднения краевых задач для системы теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и краевых задач теории упругости в перфорированных областях. Здесь даны формулы для коэффициентов усредненной системы, оценки отклонения вектора смещения, тензора напряжений, интеграла энергии системы теории упругости, описывающей процессы в сильно неоднородной среде, и усредненной системы; в ряде случаев даны полные асимптотические разложения решения относительно малого параметра, характеризующего период микроструктуры упругой среды; изучены также среды со слоистой структурой.

Третья глава относится к теории собственных колебаний упругих сильно неоднородных тел. Эти вопросы до сих пор мало освещены в монографической литературе. В начале третьей главы даны теоремы общего характера о поведении спектра семейства абстрактных операторов, зависящих от параметра и действующих в различных пространствах, также зависящих от параметра. На основе этих общих теорем исследуется поведение собственных значений и собственных функций краевых задач, асимптотический анализ которых представлен в гл. II, а также некоторых других родственных задач. Даны оценки отклонения собственных значений и собственных функций задачи с параметром и усредненной задачи. Все задачи исследованы единым, предложенным в § 1 гл. III, методом. Этот метод может найти дальнейшие широкие применения, так же как и теоремы, изложенные в § 8 этой главы о несамосопряженных операторах. Общий метод исследования спектров операторов, зависящих от параметра, применяется также для исследования спектральных задач в областях с осциллирующей границей, задач для эллиптических уравнений в перфорированной области, вырождающихся на границе полостей, а также для изучения свободных колебаний тел с концентрированными массами.

Хотя в книге рассмотрены стационарные задачи, предложенные в ней методы могут найти дальнейшие применения при изучении нестационарных задач.

Все результаты в книге приведены с полными доказательствами, причем используются лишь основные сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

Книга основана на исследованиях авторов, проводившихся ими на протяжении последних более чем десяти лет.

В каждой главе принята своя нумерация формул с указанием номера параграфа и порядкового номера формулы в этом параграфе. В книге принята также единая нумерация лемм, теорем и замечаний в каждой главе с указанием номера параграфа и порядкового номера предложения. При ссылках на формулы, леммы и теоремы из других глав указывается также и номер главы.

Мы надеемся, что результаты и методы, представленные в настоящей книге, будут способствовать дальнейшим исследованиям математических моделей процессов в композиционных и перфорированных средах, процессов теплопередачи, переноса энергии излучением, диффузии и фильтрации в пористой среде и многих других задач математической физики, а также в самой теории уравнений с частными производными.

Глава I

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Настоящая глава содержит все основные результаты, относящиеся к системе теории упругости, которые используются в последующих двух главах. Вводятся функциональные пространства, которым принадлежат решения основных краевых задач теории упругости, а также ряда специальных краевых задач, которые необходимы в гл. II для построения теории усреднения и в гл. III для изучения спектральных свойств операторов теории упругости в сильно неоднородных средах.

Ряд результатов представляет общий интерес для математической теории упругости. Это — неравенства Корна в конечных и перфорированных областях, обоснование принципа Сен-Венана, асимптотика решений системы теории упругости на бесконечности и ряд других вопросов. Много места уделено теоремам существования и единственности обобщенных решений краевых задач теории упругости в конечных и бесконечных областях. Эти задачи исследуются единым функциональным методом на основе теоремы Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ СВОЙСТВА. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе приведены определения основных функциональных пространств, а также даны формулировки теорем из функционального анализа, которые будут использоваться в дальнейшем. Доказательства этих теорем можно найти во многих монографиях и учебниках (см., например, [26; 43; 90; 89; 93]).

В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ будем обозначать точки через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, через $\bar{A}$ обозначается замыкание в $\mathbf{R}^n$ множества A.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, т. е. связное открытое множество точек в $\mathbf{R}^n$. Если не оговорено противное, будем предполагать, что область Ω ограничена.

Далее мы будем использовать следующие обозначения для основных функциональных пространств:

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся в Ω;

$C^k(\bar{\Omega})$ — пространство функций, определенных в $\bar{\Omega}$ и имеющих в Ω частные производные до порядка $[k]$ включительно, причем эти производные непрерывны в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $k-[k]$, если $k-[k]>0$; $[k]$ означает целую часть k;

$L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ — пространство вещественных функций f, определенных в Ω и таких, что $\int\limits_\Omega |f|^p\,dx<\infty$, если $p<\infty$, и существенно ограниченных по лебеговой мере, если $p=\infty$.

Норма в $L^p(\Omega)$ задается равенством

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\Big)^{1/p},$$

если $1\leqslant p<\infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u(x)|;$$

при $p=2$ получаем гильбертово пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u,\ v)_0=\int\limits_\Omega u(x)\,v(x)\,dx;$$

$H^m(\Omega)$ (m — целое неотрицательное число) — пополнение пространства $C^m(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, α — мультииндекс, $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ — целые неотрицательные числа;

$H_0^m(\Omega)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме **(1.1)**.

Введем теперь понятие липшицевой области, а также области с границей класса C^r. Граница области Ω обозначается через $\partial\Omega$.

Обозначим через $C_{R,L}$ цилиндр

$$\{y=(\hat{y},\ y_n):|\hat{y}|<R,\ -LR<y_n<LR\},$$

где L, R — положительные постоянные, $\hat{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_{n-1})$.

Область Ω называется липшицевой, если для любой точки $x^0\in\partial\Omega$ можно ввести координаты $y=B(x-x^0)$, B — постоянная ортогональная матрица, так, что в координатах y пересечение $\partial\Omega$ с $\bar{C}_{R,L}$ задается уравнением $y_n=\varphi(\hat{y})$, где $\varphi(\hat{y})$ удовлетворяет условию Липшица в шаре $\{\hat{y}:|\hat{y}|<R\}$ с постоянной Липшица, не превосходящей L, и

$$\bar{\Omega}\cap\bar{C}_{R,L}=\{y:|\hat{y}|\leqslant R,\ \varphi(\hat{y})\leqslant y_n\leqslant LR\}.$$

Числа R и L для данной области Ω фиксированы.

Скажем, что граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^r, если функции $\varphi(\hat{y})$, определенные выше, принадлежат пространству $C^r(|\hat{y}|\leqslant R)$, $(0\leqslant r)$.

Пусть γ — множество, лежащее на границе $\partial\Omega$ области Ω с липшицевой границей. Предположим, что γ имеет ненулевую меру Лебега на $\partial\Omega$.

Введем пространства функций, обращающихся в нуль на γ, и пространство следов на γ;

$H^m(\Omega, \gamma)$ — пополнение по норме (1.1) пространства функций $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в некоторой окрестности γ (m — целое положительное число); очевидно, $H^m(\Omega, \partial\Omega)=H_0^m(\Omega)$;

$H^{m+1/2}(\gamma)$ — фактор-пространство $H^{m+1}(\Omega)/H^{m+1}(\Omega, \gamma)$.

Скажем, что функция $u\in H^{m+1}(\Omega)$ совпадает на γ с функцией $\varphi\in H^{m+1}(\Omega)$ вместе с ее производными до порядка m включительно, если $u-\varphi\in H^{m+1}(\Omega, \gamma)$.

Норма в $H^{m+1/2}(\gamma)$, как обычно в фактор-пространстве, задается равенством

$$\|\varphi\|_{H^{m+1/2}(\gamma)}=\inf_{w}\{\|w\|_{H^{m+1}(\Omega)},\ w|_\gamma=\varphi\}=$$

$$=\inf_{v}\{\|\varphi+v\|_{H^{m+1}(\Omega)},\ v\in H^{m+1}(\Omega, \gamma)\}.$$

При сделанных предположениях относительно γ пространство $H^{m+1/2}(\gamma)$ нетривиально, поскольку $H^{m+1}(\Omega)$ не совпадает с $H^{m+1}(\Omega, \gamma)$. Действительно, имеет место

Лемма 1.1 (Неравенство Фридрихса). *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с липшицевой границей и γ — подмножество $\partial\Omega$, имеющее ненулевую меру Лебега на $\partial\Omega$. Тогда для любой $\varphi\in H^1(\Omega, \gamma)$ справедливо неравенство*

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.2}$$

где C — постоянная, не зависящая от φ; $\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$. *Если $\gamma=\partial\Omega$, то (1.2) справедливо для любой ограниченной Ω.*

Доказательство этой леммы и более общих утверждений можно найти в [56; 44].

Поскольку функции, тождественно равные постоянной, принадлежат пространству $H^1(\Omega)$ и неравенство (1.2) не может быть выполнено для таких функций, заключаем, что $H^1(\Omega, \gamma)\neq H^1(\Omega)$, так как $H^1(\Omega, \gamma)$ не содержит $\varphi=\mathrm{const}\neq 0$. Отсюда следует также, что $H^{m+1}(\Omega)\neq H^{m+1}(\Omega, \gamma)$.

Через $H^{-1}(\Omega)$ будем обозначать пространство, сопряженное с $H^1(\Omega, \partial\Omega)\equiv H_0^1(\Omega)$.

Следующая теорема описывает свойства функций, заданных в липшицевых областях. Эти свойства вытекают из более общих результатов, полные доказательства которых можно найти, например, в [49; 93; 61].

Теорема 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей. Тогда*

1. *Вложение $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ компактно.*
2. *Если $\bar{\Omega}\subset\Omega^0$, где Ω^0 — область в $\mathbf{R}^n$, то всякая функция $v\in H^1(\Omega)$ продолжается в Ω^0 до функции $\tilde{v}\in H^1(\Omega^0)$, такой, что*

$$\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega^0)}\leqslant C\,\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.3}$$

где постоянная C зависит только от Ω.
3. *Любая функция $w\in H^1(\Omega)$ имеет след на $\partial\Omega$* [93; 61] *и выполняется неравенство*

$$\|w\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant C_1\,\|w\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.4}$$

где постоянная C_1 зависит только от Ω.
4. *Для функций $w\in H^1(\Omega)$, таких, что $\int\limits_\Omega w\,dx=0$, справедливо неравенство Пуанкаре*

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_2\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где $C_2=\mathrm{const}$ и зависит только от Ω.
5. *Пространство $H^1(\Omega)$ совпадает с пространством функций, принадлежащих $L^2(\Omega)$ и имеющих обобщенные производные первого порядка из $L^2(\Omega)$.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, всюду предполагаем, что все рассматриваемые области имеют по крайней мере липшицеву границу.

Нам также потребуются некоторые пространства периодических функций.

Пусть $\mathbf{Z}^n$ — множество векторов $z=(z_1, \ldots, z_n)$ с целочисленными компонентами. Обозначим через $s_z(G)$ сдвиг множества G на вектор z, т. е. $s_z(G)=z+G$.

Через εG обозначим множество таких точек x, что $\varepsilon^{-1}x\in G$, $\varepsilon=\mathrm{const}>0$.

Скажем, что неограниченная область ω является областью с 1-периодической структурой, если ω инвариантна относительно сдвигов s_z, $z\in\mathbf{Z}^n$. Здесь, как и ранее, ω предполагается связным открытым множеством.

Определим пространства периодических функций:

$\widehat{C}^\infty(\bar{\omega})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\bar{\omega}$, 1-периодических по $x_1, \ldots, x_n$;

$\widehat{W}_2^1(\omega)$ — пополнение пространства $\widehat{C}^\infty(\bar{\omega})$ по норме $H^1(\omega\cap Q)$, $Q=\{x : 0<x_i<1,\ i=1, \ldots, n\}$;

$\widehat{C}_0^\infty(\omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций в ω, 1-периодических по $x_1, \ldots, x_n$ и равных нулю в окрестности $\partial\omega$;

$\overset{0}{W}(\omega)$ — пополнение пространства $\widehat{C}_0^\infty(\omega)$ по норме пространства $H^1(\omega\cap Q)$.

Скажем, что функция φ является 1-периодической по x и принадлежащей $H^1(\omega\cap Q)$, понимая под этим, что φ есть элемент пространства $\widetilde{W}_2^1(\omega)$.

Пусть ω — неограниченная область с 1-периодической структурой. Положим

$$\omega(a, b) = \omega \cap \{x : a < x_n < b\},$$

$$\widehat{\omega}(a, b) = \omega \cap \{x : 0 < x_j < 1, \ j = 1, \ldots, n-1, \ a < x_n < b\}. \tag{1.6}$$

Введем пространство $\widetilde{H}^1(\omega(a, b))$ как пополнение пространства бесконечно дифференцируемых в $\omega(a, b)$ функций, периодических по $x_1, \ldots, x_{n-1}$ с периодом 1, по норме пространства $H^1(\widehat{\omega}(a, b))$.

Элементы $\widetilde{H}^1(\omega(a, b))$ называем 1-периодическими по $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ функциями, принадлежащими $H^1(\widehat{\omega}(a, b))$.

Пусть множество γ лежит на $\partial\omega(a, b)$ и является инвариантным относительно сдвигов на векторы $z = (\hat{z}, 0)$, $\hat{z} \in \mathbf{Z}^{n-1}$. Для функций u, v на $\widetilde{H}^1(\omega(a, b))$ будем полагать $u = v$ на γ, если $u - v \in H^1(\widehat{\omega}(a, b), \gamma \cap \partial\widehat{\omega}(a, b))$.

Отметим, что пространства $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ — гильбертовы. Скалярное произведение в этих пространствах задается формулой

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx. \tag{1.7}$$

Пространства $\widehat{W}_2^1(\omega)$, $\widehat{H}^1(\omega(a, b))$ также являются гильбертовыми, причем скалярное произведение в них задается той же формулой, что и скалярное произведение в пространствах $H^1(\omega\cap Q)$, $H^1(\widehat{\omega}(a, b))$ соответственно.

Далее мы часто будем иметь дело с вектор-функциями и матрицами, элементы которых принадлежат одному из определенных выше пространств. При этом пользуемся следующими обозначениями.

Если $u = (u_1, \ldots, u_n)^*$, $v = (v_1, \ldots, v_n)^*$ — вектор-столбцы, то через (u, v) обозначается сумма $u_i v_i$, и, как обычно, $|u| = (u, u)^{1/2}$. Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагаем суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n; знак $*$ в вектор-столбцах ради сокращения записи иногда опускаем.

Для матриц A, B с элементами $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$ соответственно полагаем

$$(A, B) = a_{ij} b_{ij}, \qquad |A| = (A, A)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Пусть все компоненты векторов u, v, или элементы матриц A, B, принадлежат гильбертову пространству $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathscr{H}}$. Мы будем использовать обозначения

$$(u,\ v)_{\mathscr{H}}=(u_i,\ v_i)_{\mathscr{H}},\quad \|u\|_{\mathscr{H}}=(u,\ u)_{\mathscr{H}}^{1/2},$$
$$(A,\ B)_{\mathscr{H}}=(a_{ij},\ b_{ij})_{\mathscr{H}},\quad \|A\|_{\mathscr{H}}=(A,\ A)_{\mathscr{H}}^{1/2} \tag{1.9}$$

и писать $u,\ v\in\mathscr{H},\ A,\ B\in\mathscr{H}$ вместо $u,\ v\in\mathscr{H}^n,\ A,\ B\in\mathscr{H}^{n^2}$.

Для доказательства теорем существования и единственности решений различных краевых задач неоднократно будет применяться

Теорема 1.3 (Лакс—Мильграм). *Пусть H — гильбертово пространство и $a(u,\ v)$ — билинейная форма, определенная на $H\times H$, такая, что*

$$|a(u,\ v)|\leqslant C_1\|u\|_H\|v\|_H,$$
$$|a(u,\ u)|\geqslant C_2\|u\|_H^2,\ C_1,\ C_2=\text{const}>0. \tag{1.10}$$

Тогда для любого линейного непрерывного функционала l на H (т. е. $l\in H^*$) *существует единственный элемент $u\in H$, такой, что $l(v)=a(u,\ v)$ для любого $v\in H$* [26].

Из теоремы вложения С. Л. Соболева [93] вытекает

Лемма 1.4. *Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Тогда если $1-\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\geqslant 0$, то для любой функции $u\in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.11}$$

где постоянная C не зависит от u.

Положим $\rho(A,\ B)=\inf\{|x-y|,\ x\in A,\ y\in B\}$.

Лемма 1.5. *Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей и $B_\delta=\{x\in\Omega,\ \rho(x,\ \partial\Omega)<\delta\}$, $\delta>0$. Тогда существует $\delta_0>0$, такое, что при всех $\delta\in(0,\ \delta_0)$ для любой $v\in H^1(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\|v\|_{L^2(B_\delta)}\leqslant C\delta^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.12}$$

где постоянная C не зависит от δ и v.

Доказательство. В силу гладкости $\partial\Omega$ существует семейство гладких поверхностей S_τ, $\tau\in[0,\ \delta_0]$, где δ_0 — достаточно малое положительное число, таких, что S_τ ограничивает область $\Omega_\tau\subset\Omega$, $\Omega_\tau\supset\Omega_{\tau'}$ при $\tau'>\tau$, $\Omega_0=\Omega$, $c_1\tau\leqslant\rho(x,\ \partial\Omega)\leqslant c_2\tau$, если $x\in S_\tau$, $\tau\in[0,\ \delta_0]$, $c_1,\ c_2=\text{const}$, $\Omega\setminus\Omega_\tau\supset B_\tau$. Согласно теореме вложения

$$\int\limits_{S_\tau}|v|^2\,dS\leqslant C_3\|v\|_{H^1(\Omega_\tau)}^2\leqslant C_3\|v\|_{H^1(\Omega)}^2,\quad \tau\in[0,\ \delta_0],$$

где постоянная C_3 не зависит от τ. Интегрируя это неравенство по τ от 0 до δ, получим $\int\limits_{B_\delta}|v|^2\,dx\leqslant C_4\delta\|v\|_{H^1(\Omega)}^2$. Из этого неравенства вытекает (1.12). Лемма доказана.

Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n\times\Omega)$ множество функций $f(\xi, x)$, 1-периодических по ξ, которые ограничены и измеримы по $(\xi, x)\in\mathbf{R}^n\times\Omega$ и удовлетворяют условию Липшица по x равномерно по $\xi\in\mathbf{R}^n$, т. е.

$$|f(\xi, x)-f(\xi, x^0)|\leqslant C_f|x-x^0| \tag{1.13}$$

для любых x, $x^0\in\overline{\Omega}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, причем постоянная C_f не зависит от x, x^0, ξ.

Лемма 1.6. *Предположим, что* $g(\xi, x)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n\times\Omega)$, $\int\limits_Q g(\xi,x)\,d\xi=0$ *для любого* $x\in\overline{\Omega}$. *Тогда при всех* u, $v\in H^1(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_\Omega uvg\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx\right|\leqslant C\varepsilon\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.14}$$

где постоянная C *не зависит от* $\varepsilon\in(0, 1)$, u, v.

Если $F(\xi, x)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n\times\Omega)$, *то для любой* $\psi\in L^1(\Omega)$ *имеем*

$$\int\limits_\Omega \psi F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx\to\int\limits_\Omega \psi\widehat{F}(x)\,dx \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.15}$$

где $\widehat{F}(x)=\int\limits_Q F(\xi, x)\,d\xi$, $Q=]0, 1[^n\equiv\{\xi: 0<\xi_j<1,\ j=1, \dots, n\}$.

Доказательство. Обозначим через I^ε множество всех $z\in\mathbf{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(Q+z)\subset\Omega$. Положим $\Omega_1=\bigcup\limits_{z\in I^\varepsilon}\varepsilon(Q+z)$, $G=\Omega\setminus\overline{\Omega}_1$. Определим функции $m(x)$, $\zeta(x)$, $\eta(x)$, постоянные на множествах вида $\varepsilon(Q+z)$ и заданные равенствами

$$m(x)=\varepsilon^{-n}\int\limits_{\varepsilon(Q+z)} g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx,\quad \zeta(x)=\varepsilon^{-n}\int\limits_{\varepsilon(Q+z)} v(x)\,dx,$$

$$\eta(x)=\varepsilon^{-n}\int\limits_{\varepsilon(Q+z)} u(x)\,dx \quad \text{при} \quad x\in\varepsilon(Q+z).$$

Тогда

$$\int\limits_\Omega g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)uv\,dx=\int\limits_G g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)uv\,dx+\int\limits_{\Omega_1} m(x)\,uv\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_1}(u-\eta)v\left(g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)-m(x)\right)dx+\int\limits_{\Omega_1}\eta(v-\zeta)(g-m)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_1}\zeta\eta(g-m)\,dx. \tag{1.16}$$

Пусть x^0, $x \in \varepsilon(Q+z)$. Поскольку $g(\xi, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x и имеет нулевое среднее по ξ, имеем

$$|m(x)| = \varepsilon^{-n} \left| \int\limits_{\varepsilon(Q+z)} \left(g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) - g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x^0\right)\right) dx \right| \leqslant C\varepsilon, \quad C = \text{const}. \quad (1.17)$$

Легко видеть, что неравенство (1.17) имеет место, когда x пробегает множество полной меры в Ω_1.

Применяя неравенство Пуанкаре (1.5) в $\varepsilon(Q+z)$, получим

$$\begin{aligned} \|v-\zeta\|_{L^2(\Omega_1)} &\leqslant C_1\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}, \\ \|u-\eta\|_{L^2(\Omega_1)} &\leqslant C_1\varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

По определению функции $\eta(x)$ имеем

$$\|\eta\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{z \in I^\varepsilon} \varepsilon^{-2n} \left| \int\limits_{\varepsilon(Q+z)} u(x)\, dx \right|^2 \varepsilon^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{z \in I^\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon(Q+z)} |u|^2\, dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega_1)}. \quad (1.19)$$

Множество G лежит в $C_2\varepsilon$-окрестности $\partial\Omega$ ($C_2 = \text{const}$), поэтому в силу леммы 1.5

$$\|u\|_{L^2(G)} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L^2(G)} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.20)$$

Последний интеграл в (1.16) равен нулю. Из (1.16), пользуясь неравенством Гельдера и оценками (1.18)—(1.20), заключаем, что

$$\left| \int\limits_\Omega g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) uv\, dx \right| \leqslant C_4 [\|u\|_{L^2(G)} \|v\|_{L^2(G)} +$$

$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_1} |m(x)|\ \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \|u-\eta\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} +$$

$$+ \|\eta\|_{L^2(\Omega_1)} \|v-\zeta\|_{L^2(\Omega_1)}] \leqslant C_5 [\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} +$$

$$+ \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}],$$

где постоянная C_5 не зависит от ε. Отсюда вытекает неравенство (1.14).

Докажем соотношение (1.15). Для $\psi \in C^1(\Omega)$, очевидно, (1.15) следует из (1.14) при $u=\psi$, $v=1$, $g(\xi, x) = F(\xi, x) - \bar{F}(x)$. Приближая любую функцию из $L^1(\Omega)$ функциями из $C^1(\bar{\Omega})$ и пользуясь ограниченностью $F(\xi, x)$, получим (1.15) для $\psi \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Следствие 1.7. *Пусть* ω — *неограниченная область с* 1-*периодической структурой*, $\{\psi_\varepsilon\}$, $\{\varphi_\varepsilon\}$ — *последовательности функций из* $L^2(\Omega\cap\varepsilon\omega)$, *такие, что при* $\varepsilon\to 0$

$$\|\psi_\varepsilon-\psi\|_{L^2(\Omega\cap\varepsilon\omega)}\to 0,\quad \|\varphi_\varepsilon-\varphi\|_{L^2(\Omega\cap\varepsilon\omega)}\to 0, \tag{1.21}$$

где ψ, $\varphi\in L^2(\Omega)$. *Тогда для любой* $f(\xi, x)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n\times\Omega)$ *имеем*

$$\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}\psi_\varepsilon\varphi_\varepsilon f\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx\to\int\limits_{\Omega}F(x)\psi\varphi\,dx \tag{1.22}$$

при $\varepsilon\to 0$, *где*

$$F(x)=\operatorname{mes}(Q\cap\omega)\langle f(\cdot, x)\rangle\equiv\int\limits_{Q\cap\omega}f(\xi, x)\,d\xi. \tag{1.23}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}\psi_\varepsilon\varphi_\varepsilon f\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx=\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}\psi\varphi f\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}(\psi_\varepsilon-\psi)\varphi_\varepsilon f\,dx-\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}\varphi(\varphi-\varphi_\varepsilon)f\,dx. \tag{1.24}$$

Последние два интеграла стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$ в силу (1.21). Полагая в лемме 1.6 $F(\xi, x)=f(\xi, x)\chi_\omega$, где $\chi_\omega(\xi)$ — характеристическая функция области ω, получим

$$\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}\psi\varphi f\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx=\int\limits_{\Omega}\psi\varphi F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)dx\to\int\limits_{\Omega}\psi\varphi\widehat{F}(x)\,dx.$$

Отсюда и из (1.24) следует (1.22), так как

$$\int\limits_{Q}F(\xi, x)\,d\xi=\int\limits_{Q\cap\omega}f(\xi, x)\,d\xi.$$

Лемма 1.8. *Пусть* $a(\xi)$ — 1-*периодическая по* ξ *ограниченная кусочно-непрерывная функция*, $\int\limits_{Q}a(\xi)=0$. *Тогда существуют* 1-*периодические по* ξ *ограниченные, кусочно-непрерывные функции* $a_i(\xi)$, $i=1, \ldots, n$, *такие, что* $a(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial\xi_i}(\xi)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу независимых переменных. При $n=1$ утверждение леммы очевидно: достаточно взять $a_1(\xi_1)=\int\limits_0^{\xi_1}a(t)\,dt$. Предположим, что оно верно для функций от $n-1$ независимой переменной. Пусть $\xi=(\widehat{\xi}, \xi_n)$, $\widehat{\xi}\in\mathbf{R}^{n-1}$ и $a(\xi)$ удовлетворяет условиям леммы. Положим

$$C(\widehat{\xi})=\int_0^1 a(\widehat{\xi},\ t)\,dt,\quad b_i(\xi)=\ldots=b_{n-1}(\xi)=0,$$

$$b_n(\widehat{\xi},\ \xi_n)=\int_0^{\xi_n}(a(\widehat{\xi},\ \tau)-C(\widehat{\xi}))\,d\tau.$$

Функции $b_j(\xi)$, $j=1,\ \ldots,\ n$, являются 1-периодическими по ξ и

$$a(\xi)=\frac{\partial b_j(\xi)}{\partial \xi_j}+C(\widehat{\xi}), \tag{1.25}$$

причем $\int_{\widehat{Q}} C(\widehat{\xi})\,d\widehat{\xi}=0$, $\widehat{Q}=\{\widehat{\xi}:0<\xi_j<1,\ j=1,\ \ldots,\ n-1\}$. По предположению индукции $C(\widehat{\xi})=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial C_j}{\partial \xi_j}$. Отсюда и из (1.25) получаем искомое представление для $a(\xi)$. Лемма доказана.

§ 2. НЕРАВЕНСТВА КОРНА

При доказательстве разрешимости основных краевых задач теории упругости и получении оценок решений фундаментальную роль играют неравенства Корна (см. [99; 45; 46, 15]).

В этом разделе через u, v обозначаются вектор-функции $u=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$, $v=(v_1,\ \ldots,\ v_n)$, а через ∇u и $e(u)$ обозначаются матрицы с элементами

$$(\nabla u)_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad e_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.1}$$

Очевидно, что

$$|\nabla u|^2=\frac{\partial u_i}{\partial x_h}\frac{\partial u_i}{\partial x_h},\quad |e(u)|^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h}+\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h}+\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right).$$

В теории упругости $u=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — вектор перемещений, а матрица $e(u)$ — тензор деформаций.

2.1. Первое неравенство Корна

Теорема 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой вектор-функции $u\in H_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\,\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Легко видеть, что ввиду плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ неравенство (2.2) достаточно доказать для вектор-функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Применяя формулу Гаусса—Остроградского, получаем

$$\int_\Omega |e(u)|^2\,dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_h}\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_h}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right)dx =$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h\,\partial x_i}u_h\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_h}{\partial x_h}\,dx.$$

Учитывая, что второй интеграл в правой части этого равенства неотрицателен, получаем (2.2). Теорема доказана.

Заметим, что неравенство (2 2) теоремы 2.1 выполнено для произвольной ограниченной области Ω.

2.2. Второе неравенство Корна

Неравенство

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad (2.3)$$

для любой $u=(u_1, \ldots, u_n) \in H^1(\Omega)$ называется вторым неравенством Корна. Его доказательство представляет значительные трудности и требует в отличие от доказательства первого неравенства Корна дополнительных условий на Ω. Для широкого класса областей неравенство (2.3) и его обобщения установлены во многих работах (библиографию см. в [45] и п. 2.4).

Следуя работе [45], приведем здесь простое доказательство второго неравенства Корна для липшицевой области. При этом важную роль играют следующие две леммы.

Предполагаем, что Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с липшицевой границей. Через $\rho(x)$ обозначается расстояние от точки x до $\partial\Omega$, через Δ — оператор Лапласа.

Лемма 2.2. *Пусть* $v \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *и* $\rho^2 \Delta v \in L^2(\Omega)$. *Тогда* $\rho \nabla v \in L^2(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\|\rho \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho^2 \Delta v\|_{L^2(\Omega)}\right), \qquad (2.4)$$

где постоянная C не зависит от v.

Доказательство. Функция $\rho(x)$ удовлетворяет неравенству $\rho(x) - \rho(y) \leqslant |x-y|$ для любых $x, y \in \bar{\Omega}$. Действительно, обозначим через z_y точку на $\partial\Omega$, такую, что $\rho(y) = |y - z_y|$. Тогда $\rho(x) - \rho(y) \leqslant |x - z_y| - |y - z_y| \leqslant |x - z_y - y + z_y|$. Таким образом, функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию Липшица в Ω и, значит, [93] имеет ограниченные обобщенные производные в Ω первого порядка.

Пользуясь формулой Гаусса—Остроградского в области $\Omega_{(\delta)} = \Omega \cap \{x : \rho(x) > \delta\}$ и учитывая ограниченность первых производных функции $\rho(x)$, находим

$$\int\limits_{\Omega(\delta)} (\rho(x)-\delta)^2 \, |\nabla v|^2 \, dx = - \int\limits_{\Omega(\delta)} 2(\rho(x)-\delta) \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} v \, dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega(\delta)} (\rho(x)-\delta)^2 v \, \Delta v \, dx \leqslant C_1 [\| v \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})} \|(\rho-\delta) |\nabla v| \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})} +$$

$$+ \| v \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})} \|(\rho-\delta)^2 \Delta v \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})}].$$

Отсюда выводим, что

$$\|(\rho-\delta) |\nabla v| \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})} \leqslant C_2 [\| v \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})} + \|(\rho-\delta)^2 \Delta v \|_{L^2(\Omega_{(\delta)})}],$$

где постоянная C_2 не зависит от δ. Устремляя в этом неравенстве δ к нулю и учитывая, что в $\Omega_{(\delta)}$ имеем $\rho(x) > \delta$, получим

$$\| \rho |\nabla v| \|_{L^2(G)} \leqslant C_3 [\| v \|_{L^2(\Omega)} + \| \rho^2 \Delta v \|_{L^2(\Omega)}]$$

для любой области G, такой, что $\bar{G} \subset \Omega$, причем постоянная C_3 не зависит от G. Отсюда следует, что $\rho \nabla v \in L^2(\Omega)$ и выполняется оценка (2.4). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $w \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $\rho \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)$. *Тогда* $w \in H^1(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\| \nabla w \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left[\| w \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right], \tag{2.5}$$

где постоянная C не зависит от w.

Доказательство. Очевидно, что для любой функции $f \in C^1[0, b]$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\tau f^2(t) \, dt = f^2(\tau)\tau - 2\int\limits_0^\tau f f' t \, dt \leqslant f^2(\tau)\tau + \varepsilon \int\limits_0^\tau f^2 \, dt + \varepsilon^{-1} \int\limits_0^\tau (f')^2 t^2 \, dt. \tag{2.6}$$

Пользуясь теоремой о среднем, выберем τ таким, чтобы выполнялись соотношения

$$f^2(\tau) \leqslant \frac{2}{b} \int\limits_{b/2}^{b} f^2(t) \, dt, \quad b/2 \leqslant \tau \leqslant b.$$

Отсюда и из (2.6) получаем

$$\int\limits_0^b f^2 \, dt \leqslant C_1 \Big(\int\limits_{b/2}^b f^2 \, dt + \int\limits_0^b (f')^2 t^2 \, dt \Big), \tag{2.7}$$

где постоянная C_1 не зависит от f.

Покроем область Ω такими областями Ω_i, $i=0, 1, \ldots, N$, что $\Omega_0=\{x:\rho(x, \partial\Omega)>\delta\}$, $\delta=\mathrm{const}>0$ и

$$\Omega_i=\{x:\psi_i(x')<x_{k_i}<\psi_i(x')+b^i,\ x'=(x_1, \ldots, x_{k_i-1}, x_{k_i+1}, \ldots, x_n),\ x'\in\Omega_i'\},\quad i=1, \ldots, N,\quad 1\leqslant k_i\leqslant n,$$

(быть может, после ортогонального преобразования координат x), причем функции ψ_i удовлетворяют условию Липшица и $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i=\{x:x_{k_i}=\psi_i(x'), x'\in\Omega_i'\}$. Пользуясь леммой 2.2, находим

$$\int_{\Omega_0}|\nabla w|^2\,dx\leqslant C_2\left(\int_{\Omega_0^{\delta/2}}|w|^2\,dx+\int_{\Omega_0^{\delta/2}}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|^2 dx\right),\tag{2.8}$$

где $\Omega_0^{\delta/2}$ — $\delta/2$-окрестность области Ω_0, постоянная C_2 зависит только от δ.

Пусть теперь область Ω_i задана условиями $\psi(x')<x_k<\psi(x')+b^i$, $x'\in\Omega_i'$. Воспользуемся неравенством (2.7), полагая $b=b^i$, $f=\frac{\partial w}{\partial x_j}$, $t=x_k$ и рассматривая $\frac{\partial w}{\partial x_j}$ как функцию x_k. Имеем

$$\int_{\psi(x')+\varepsilon}^{\psi(x')+\varepsilon+b^i}\left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2 dx_k\leqslant C_1\left[\int_{\psi(x')+\varepsilon}^{\psi(x')+\varepsilon+b^i}(\psi(x')+\varepsilon-x_k)^2\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|^2 dx_k+\right.$$

$$\left.+\int_{\psi(x')+\varepsilon+b^i/2}^{\psi(x')+\varepsilon+b^i}\left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2 dx_k\right],\quad \varepsilon=\mathrm{const}>0.\tag{2.9}$$

В силу липшицевости функции $\psi(x')$ имеем $|\psi(x')+\varepsilon-x_k|\leqslant C\rho(x)$, где постоянная C зависит только от постоянной Липшица функции $\psi(x')$. Поэтому, интегрируя (2.9) по Ω_i' и устремляя ε к нулю, получим

$$\int_{\Omega_i}\left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2 dx\leqslant C_2\left[\int_{\Omega_i}\rho^2(x)\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|^2 dx+\int_{\Omega_0}\left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2 dx\right],$$

если δ выбрано достаточно малым. Суммируя эти неравенства по i от 1 до N и пользуясь (2.8), находим

$$\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx\leqslant C_3\left[\int_{\Omega}\rho^2\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|^2 dx+\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega_0^{\delta/2}}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|^2 dx+\int_{\Omega_0^{\delta/2}}|w|^2\,dx\right].$$

Отсюда вытекает оценка (2.5), поскольку $\rho(x)\geqslant\delta>0$ в Ω_0^δ. Лемма доказана.

Теорема 2.4 (второе неравенство Корна). *Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей. Тогда для любой вектор-функции $u\in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство* (2.3) *с постоянной C, зависящей только от Ω.*

Доказательство. Очевидно, что неравенство (2.3) достаточно доказать для вектор-функции $u\in C^\infty(\bar\Omega)$. По определению матрицы $e(u)$ имеем $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}=2\frac{\partial}{\partial x_j}e_{ij}(u)-\frac{\partial}{\partial x_i}e_{jj}(u)$ (по i, j нет суммирования).

Рассмотрим уравнения

$$\Delta v_i=\sum_{j=1}^n\left(2\frac{\partial}{\partial x_j}e_{ij}(u)-\frac{\partial}{\partial x_i}e_{jj}(u)\right)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}F_j^i. \tag{2.10}$$

Положим $F_j^i=0$ вне Ω, i, $j=1, \ldots, n$. Пусть v_i — решение уравнения (2.10) в области Ω^0 с гладкой границей, $\bar\Omega\subset\Omega^0$, причем $v_i\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^0)$, т. е. $v_i=0$ на $\partial\Omega^0$. Согласно известной априорной оценке [62]

$$\|v_i\|_{H^1(\Omega^0)}\leqslant C_1\sum_{j=1}^n\|F_j^i\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_2\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Это неравенство следует из интегрального тождества для решения задачи Дирихле для уравнения (2.10) и неравенства Фридрихса.

Положим $v=(v_1, \ldots, v_n)^*$, $w=u-v$. Тогда

$$\Delta w=0 \text{ в } \Omega,\ w\in C^\infty(\Omega),$$

$$\Delta(e_{ij}(w))=0 \text{ в } \Omega,\ e_{ij}(w)\in C^\infty(\Omega).$$

В силу (2.11) имеем

$$\|e(w)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}+\|e(v)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_3\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.12}$$

где постоянная C_3 не зависит от u. Поэтому, пользуясь оценкой (2.4), находим, что

$$\|\rho\nabla e_{ij}(w)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_4\|e_{ij}(w)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_5\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 w_l}{\partial x_p\,\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_p}e_{ll}(w)+\frac{\partial}{\partial x_l}e_{lp}(w)-\frac{\partial}{\partial x_l}e_{lp}(w).$$

Поэтому из (2.13) вытекает неравенство

$$\left\|\rho\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_6\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.5) леммы **2.3**, устанавливаем, что

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_7 \left[\left\| \rho \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \, \partial x_j} \right| \right\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_8 (\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}).$$

Так как $w=u-v$, из этого неравенства заключаем, что

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_9 (\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}).$$

Учитывая (2.11), отсюда выводим неравенство (2.3). Теорема доказана.

В ряде приложений важное значение имеет несколько иная форма второго неравенства Корна, а именно неравенство

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \, \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.14}$$

которое выполняется, если v принадлежит некоторому подпространству V из $H^1(\Omega)$. Такие подпространства неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ линейное пространство жестких перемещений в $\mathbf{R}^n$, т. е. множество вектор-функций $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ вида $\eta=a+Ax$, где $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — вектор с постоянными действительными компонентами, A — кососимметрическая $(n\times n)$-матрица с действительными постоянными элементами. Здесь η, a, x — вектор-столбцы. Легко видеть, что $\mathfrak{R}$ — конечномерное пространство и что его размерность равна $\frac{n(n-1)}{2}+n$.

Теорема 2.5. *Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей и V — замкнутое подпространство вектор-функций из $H^1(\Omega)$, такое, что $V\cap\mathfrak{R}=\{0\}$, где $\mathfrak{R}$ — пространство жестких перемещений. Тогда для любой $v\in V$ справедливо неравенство* (2.14).

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность вектор-функций $v^m\in V$, такая, что

$$\|v^m\|_{H^1(\Omega)}=1, \quad \|e(v^m)\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty. \tag{2.15}$$

Поскольку вложение $H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ компактно (см. теорему 1.2), то существует вектор-функция $v\in L^2(\Omega)$ и последовательность $m_j\to\infty$, такие, что $v^{m_j}\to v$ в $L^2(\Omega)$. Согласно второму неравенству Корна (2.3), которое в силу теоремы 2.4 выполняется в Ω, имеем

$$\|v^{m+p}-v^m\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\,(\|v^{m+p}-v^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(v^{m+p}-v^m)\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Отсюда и из (2.15) следует, что $v^{m_j}\to v$ в $H^1(\Omega)$ при $m_j\to\infty$. Так как V замкнуто в $H^1(\Omega)$, то на основании (2.15) заключаем, что

$$v\in V, \; \|v\|_{H^1(\Omega)}=1, \; \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

Из последнего равенства вытекает, что выполняются соотношения

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_h}+\frac{\partial v_h}{\partial x_i}=0, \quad i,\ h=1,\ \ldots,\ n. \tag{2.16}$$

Покажем, что отсюда следует, что $v \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим усреднения вектор-функции v:

$$v^\varepsilon=\varepsilon^{-n}\int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)v(y)\,dy,$$

где $v=0$ вне Ω, $\varphi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi(\xi)\geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)\,d\xi=1$, $\varphi(\xi)=0$ при $|\xi|\geqslant 1$. Как известно, $v^\varepsilon\in C^\infty(\bar G)$ и $v^\varepsilon\to v$ в $H^1(G)$ при $\varepsilon\to 0$ для любой подобласти G, $\bar G\subset\Omega$. Из (2.16) следует, что при достаточно малых ε

$$\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_h}+\frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial x_i}=0 \text{ в } G,\ i,\ h=1,\ \ldots,\ n.$$

Так как $v^\varepsilon\in C^\infty(\bar G)$, то отсюда вытекает, что в G

$$\frac{\partial^2 v_i^\varepsilon}{\partial x_k\,\partial x_h}=-\frac{\partial^2 v_k^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_h}=\frac{\partial^2 v_h^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_k}=-\frac{\partial^2 v_i^\varepsilon}{\partial x_h\,\partial x_k}=0.$$

Поэтому $v_i^\varepsilon=a_{ij}^\varepsilon x_j+b_i^\varepsilon$, где a_{ij}^ε, b_i^ε—постоянные, причем $a_{ij}^\varepsilon=-a_{ij}^\varepsilon$. Так как v^ε сходятся к v в $H^1(G)$ при $\varepsilon\to 0$, то $v\in\mathfrak{R}$. Таким образом, $v\in V\cap\mathfrak{R}$, $\|v\|_{H^1(\Omega)}=1$, а это противоречит условию $V\cap\mathfrak{R}=\{0\}$. Теорема доказана.

Следствие 2.6. *В частности, за V в теореме 2.5 можно взять одно из пространств*

$$V=\{v\in H^1(\Omega):(v,\ \eta)_{H^1(\Omega)}=0\quad\forall\eta\in\mathfrak{R}\},$$

или

$$V=\{v\in H^1(\Omega):(v,\ \eta)_{L^2(\Omega)}=0\quad\forall\eta\in\mathfrak{R}\}.$$

Приведем другие примеры пространств V, для которых выполнено неравенство (2.14) и которые будут неоднократно использоваться при изучении краевых задач для системы теории упругости.

Теорема 2.7. *Пусть Ω — ограниченная область, имеющая липшицеву границу. Пусть γ лежит на $\partial\Omega$ и представляется в виде $x_n=\varphi(\hat x)$, где $\hat x=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ пробегает открытое множество в $\mathbf{R}^{n-1}$, $\varphi(\hat x)$ — непрерывная функция. Тогда для любой вектор-функции $v\in H^1(\Omega,\ \gamma)$ выполняется неравенство* (2.14).

Доказательство. Покажем, что $H^1(\Omega,\ \gamma)\cap\mathfrak{R}=\{0\}$, и применим теорему 2.5 при $V=H^1(\Omega,\ \gamma)$. Пусть $\eta\in H^1(\Omega,\ \gamma)\cap\mathfrak{R}$. Следовательно, $\eta=0$ на γ. Жесткое перемещение η имеет вид $\eta=(b+Ax)$, где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами, а b — постоянный вектор. В силу линейности системы $Ax+b=0$ очевидно, что $(n-1)$-мерная поверхность $\gamma=\{x : x_n= =\varphi(\hat{x})\}$ должна быть частью гиперплоскости, если $A\neq 0$. Поэтому размерность многообразия решений системы $Ax+b=0$ должна быть не меньше $n-1$ и, значит, в этой системе может быть самое большее одно линейно независимое уравнение, т. е. все остальные уравнения получаются из него умножением на постоянную. Отсюда следует, что в этом уравнении все коэффициенты при переменных $x_1, \ldots, x_n$ равны нулю, поскольку в матрице A на главной диагонали стоят нули. Таким образом, $\eta\equiv 0$. Теорема доказана.

2.3. Неравенства Корна для периодических вектор-функций

Установим теперь неравенства Корна типа (2.14) для 1-периодических вектор-функций.

Теорема 2.8. *Пусть ω — неограниченная область с 1-периодической структурой и множество $\omega\cap Q$ является областью с липшицевой границей. Тогда для любой вектор-функции $v\in \tilde{W}_2^1(\omega)$, такой, что*

$$\int_{\omega\cap Q} v\,dx=0, \quad Q=\{x: 0<x_j<1,\ j=1, \ldots, n\}, \tag{2.17}$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{H^1(\omega\cap Q)} \leqslant C\,\|e(v)\|_{L^2(\omega\cap Q)}, \tag{2.18}$$

где постоянная C не зависит от v.

Доказательство. Обозначим через V пространство ограничений на область $\omega\cap Q$ вектор-функций v из $\tilde{W}_2^1(\omega)$, таких, что выполнено условие (2.17). Легко видеть, что V замкнуто в $H^1(\omega\cap Q)$ и любое жесткое перемещение, 1-периодическое по x, является постоянным вектором. Поэтому если $v\in V\cap\mathfrak{R}$, то в силу (2.17) $v\equiv 0$. Применяя теперь теорему 2.5 в случае области $\Omega= =\omega\cap Q$, получаем неравенство (2.18). Теорема доказана.

Получим второе неравенство Корна типа (2.14) для вектор-функций, 1-периодических по $\hat{x}$.

Теорема 2.9. *Пусть ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, $\omega(a, b)$, $\hat{\omega}(a, b)$ $(0<a<b<\infty)$ определены равенствами* (1.6). *Предположим, что $\hat{\omega}(a, b)$ имеет липшицеву границу. Тогда для любой вектор-функции $v\in\tilde{H}^1(\omega(a, b))$, такой, что*

$$\int_{\hat{\omega}(a,b)} v\,dx=0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{H^1(\hat{\omega}(a,b))} \leqslant c\,\|e(v)\|_{L^2(\hat{\omega}(a,b))}. \tag{2.19}$$

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.8. При этом следует учесть, что жесткое перемещение, 1-периодическое по $\hat{x}$, также может быть лишь постоянным вектором.

2.4. Неравенства Корна для звездных областей

Приведенное ниже элементарное доказательство неравенства Корна для звездных областей дает возможность выяснить зависимость постоянной в неравенстве Корна от геометрии области. Неравенства Корна в ограниченных и неограниченных областях, а также их обобщения на случаи норм в $L^p(\Omega)$ и весовых пространств рассматривались в [45; 46; 65] и многих других работах.

Область Ω называется звездной относительно шара G, принадлежащего Ω, если отрезок, соединяющий любую точку шара G и любую точку области Ω, принадлежит Ω.

Теорема 2.10. *Пусть область Ω — ограниченная и звездная относительно шара $Q_{R_1}=\{x:|x|<R_1\}$, диаметр области Ω равен R, $u=(u_1, \ldots, u_n)\in H^1(\Omega)$. Тогда*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_1\left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1}\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_2\left(\frac{R}{R_1}\right)^n\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{R_1})}, \quad (2.20)$$

где постоянные C_1, C_2 зависят только от n.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для гладких вектор-функций $u(x)$. Пусть $R_1=1$ Через C_j будем обозначать постоянные, зависящие только от n. Пусть $v=(v_1, \ldots, v_n)$ — решение системы уравнений

$$\Delta v_i=\sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{\partial}{\partial x_k}e_{ik}(u)-\frac{\partial}{\partial x_i}e_{kk}(u)\right) \text{ в } \Omega \quad (2.21)$$

с граничными условиями

$$v_i=0 \text{ на } \partial\Omega, \ i=1, \ldots, n. \quad (2.22)$$

Умножая уравнение (2.21) на v_i, интегрируя полученное равенство по Ω и преобразуя интегралы интегрированием по частям, находим, что

$$\int_\Omega|\nabla v|^2dx\leqslant C_3\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Положим $w=u-v$. Из (2.21) и тождеств

$$\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_p\partial x_q}\equiv\left[\frac{\partial}{\partial x_p}e_{lq}(v)+\frac{\partial}{\partial x_q}e_{lp}(v)-\frac{\partial}{\partial x_l}e_{pq}(v)\right], \quad (2.24)$$

l, p, $q=1, \ldots, n$, которые справедливы для компонент любой гладкой вектор-функции $v=(v_1, \ldots, v_n)$, вытекает, что

$$\Delta w=0 \text{ в } \Omega \tag{2.25}$$

$$\Delta e_{ij}(w)=0 \text{ в } \Omega,\ i,\ j=1, \ldots, n. \tag{2.26}$$

Из оценки (2.23) для v следует, что

$$\|e(w)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_4 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.27}$$

Отсюда на основании леммы 2.2 и соотношений (2.26) получаем

$$\|\rho \nabla e_{ij}(w)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_5 \|e_{ij}(w)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_6 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.28}$$

где $\rho=\rho(x)$ — расстояние от $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$. Из (2.28) и соотношения (2.24) вытекает, что

$$\int_\Omega \rho^2(x) \sum_{i,k,l=1}^n \left|\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k\, \partial x_l}\right|^2 dx \leqslant C_7 \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.29}$$

Воспользуемся следующим элементарным неравенством

$$\int_0^a f^2(t)\, dt \leqslant C\left(\int_0^a t^2 (f')^2\, dt + af^2(a)\right), \tag{2.30}$$

где постоянная C не зависит от a и f. Это неравенство следует из неравенства Харди (см., например, [47; 45])

$$\int_0^\infty \varphi^2(t)\, dt \leqslant C \int_0^\infty t^2 (\varphi')^2\, dt, \quad \varphi(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{2.31}$$

где постоянная C не зависит от φ. Для доказательства (2.30) нужно положить функцию $f(t)$ равной $f(a)$ при $t>a$ и применить неравенство (2.31) к $\varphi(t)=f(t)-f(a)$.

Применим (2.30) к функциям $f=\partial w_i/\partial x_j$ и отрезку AP луча OP, где P — любая точка на $\partial\Omega$, O — начало координат. Перенеся начало координат в точку P, получаем

$$\int_{|A|}^{|P|} |\nabla w|^2\, d|x| \leqslant C_8 \left(\int_{|A|}^{|P|} |x-P|^2 \sum_{i,k,l=1}^n \left|\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k\, \partial x_l}\right|^2 d|x| + |P-A|\, |\nabla w(A)|^2\right). \tag{2.32}$$

Точку A выберем так, что $A \in Q_{R_1}$, $|A|=\lambda \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$, и в силу теоремы о среднем

$$\int_{|A|=\lambda} |\nabla w(A)|^2\, d\omega \leqslant C_9 \int_{Q_{R_1}} |\nabla w(x)|^2\, dx, \tag{2.33}$$

где $d\omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Из (2.32) очевидно следует неравенство

$$\int\limits_{|A|}^{|P|} \frac{|x|^{n-1}}{R^{n-1}} |\nabla w|^2 d|x| \leqslant C_{10} \left(\int\limits_{|A|}^{|P|} |P-x|^2 |x|^{n-1} \sum_{i,k,l=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 d|x| + \right.$$

$$\left. + |P-A| \, |\nabla w(A)|^2 \right). \tag{2.34}$$

Проинтегрируем (2.34) по сферическим переменным. Из звездности области Ω относительно Q_{R_1} при $R_1=1$ следует, что $|P-x| \leqslant \rho(x) R$. Поэтому из соотношений (2.33), (2.34) находим, что

$$\int\limits_{\Omega \setminus Q_{R_1}} |\nabla w|^2 dx \leqslant C_{11} \left[R^{n+1} \int\limits_{\Omega} \rho^2(x) \sum_{i,k,l=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 dx + \right.$$

$$\left. + R^n \int\limits_{Q_{R_1}} |\nabla w(A)|^2 dx \right]. \tag{2.35}$$

Учитывая, что $w=u-v$, из (2.23), (2 29), (2.35) получаем оценку (2.20) при $R_1=1$. При любом $R_1>0$ неравенство (2.20) получаем из него же при $R_1=1$ заменой переменных $y=x/R_1$.

Замечание 2.11. Коэффициент при втором члене в правой части неравенства (2.20) является асимптотически точным и неулучшаемым в следующем смысле. Для вектор-функции $u=Ax+B$, где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами, B — постоянный вектор, неравенство (2.20) имеет место в виде равенства с коэффициентом $C_{12}(R/R_1)^n$, если объем области Ω имеет порядок R^n.

Замечание 2.12. Неравенство вида (2.20) имеет место для любой гладкой ограниченной области Ω (достаточно, чтобы $\partial\Omega$ удовлетворяла условию Липшица), так как в этом случае Ω можно представить как сумму конечного числа звездных областей.

Замечание 2.13. Несколько усложняя доказательство теоремы 2.10, можно уточнить коэффициент при первом интеграле в правой части (2.20). Именно, при предположениях теоремы 2.10 имеют место неравенства Корна вида

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \left(\frac{R}{R_1} \right)^n [\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{R_1})}], \quad n \geqslant 3, \tag{2.36}$$

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2 \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \ln \frac{4R}{R_1} \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3 \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{R_1})},$$

$$n=2. \tag{2.37}$$

Для доказательства (2.36) нужно воспользоваться неравенством

$$\int_0^a f^2(t)\, t^p\, dt \leqslant C\Big[\int_{a/4}^{a} (t-a)^2 t^p (f')^2\, dt + a^{p+1} \int_0^{3a/4} (f')^2 t^p\, dt +$$

$$+ a^{p+1} \int_0^1 t^p f^2(t)\, dt\Big],\quad a=\mathrm{const}>1,\ p=\mathrm{const}>1, \tag{2.38}$$

где постоянная C не зависит от a и f. Неравенство (2.38) также доказывается с помощью неравенства Харди. Для доказательства (2.37) вместо (2.38) используется неравенство

$$\int_0^a t f^2(t)\, dt \leqslant C\Big[\int_{a/4}^{a} (t-a)^2 t (f')^2\, dt + a^2 \ln 4a \int_0^{3a/4} (f')^2 t\, dt +$$

$$+ a^2 \int_0^1 t f^2(t)\, dt\Big],\quad a=\mathrm{const}>1,$$

где постоянная C не зависит от a и f.

Оценка (2.36) является неулучшаемой в следующем смысле. Для вектор-функции $u=\psi(Ax+B)$, где A — постоянная кососимметрическая матрица, B — постоянный вектор, $\psi(x)=0$ в Q_{R_1}, $\psi(x)=1$ вне шара $Q_{2R_1}=\{x:|x|<2R_1\}$, $Q_{2R_1}\subset\Omega$, $\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, неравенства (2.36) выполняются в виде равенства с коэффициентом $C_1(R/R_1)^n$ при первом интеграле в правой части, если объем области Ω имеет порядок R^n.

Теорема 2.14. *Предположим, что Ω удовлетворяет условиям теоремы 2.10, $u\in H^1(\Omega)$. Тогда*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1\left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1} \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\left(\frac{R}{R_1}\right)^n \gamma^{-2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.39}$$

где γ — расстояние от Q_{R_1} до $\partial\Omega$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi=1$ в Q_{R_1}, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ в Ω. Согласно теореме 2.1

$$\|\nabla(\varphi u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\,\|e(\varphi u)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{R_1})} \leqslant 2\,\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3\gamma^{-2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.40}$$

Из неравенств (2.20) и (2.40) получаем (2.39). Теорема доказана.

Теоремы 2.10, 2.14 могут быть применены при изучении задач усреднения для областей типа решеток, каркасных конструкций и других структур.

§ 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Некоторые свойства коэффициентов системы теории упругости

Рассмотрим в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ дифференциальный оператор линейной теории упругости

$$\mathscr{L}(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{3.1}$$

Здесь $u=(u_1, \ldots, u_n)$ — вектор-столбец с компонентами $u_1, \ldots, u_n$, $A^{hk}(x)$ — $(n\times n)$-матрицы, элементы которых $a_{ij}^{hk}(x)$ — ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям

$$a_{ij}^{hk}(x)=a_{ji}^{kh}(x)=a_{hj}^{ik}(x), \tag{3.2}$$

$$\varkappa_1\eta_{ih}\eta_{ih}\leqslant a_{ij}^{hk}(x)\,\eta_{ih}\eta_{jk}\leqslant\varkappa_2\eta_{ih}\eta_{ih}, \tag{3.3}$$

$$x\in\Omega,\quad \varkappa_1,\ \varkappa_2=\mathrm{const}>0,$$

где $\{\eta_{ih}\}$ — произвольная симметрическая матрица с действительными элементами.

Будем говорить, что матрицы A^{hk} принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, если их элементы a_{ij}^{hk} являются ограниченными измеримыми функциями, для которых выполнены условия (3.2), (3.3). В этом случае мы также будем говорить, что оператор $\mathscr{L}$ принадлежит классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.

Таким образом, оператор $\mathscr{L}$ в координатной записи имеет вид

$$\mathscr{L}_i(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{ij}^{hk}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right),\quad i=1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

В классической линейной теории упругости для однородного изотропного тела коэффициенты оператора (3.4) задаются формулами

$$a_{ij}^{hk}=\lambda\delta_{ih}\delta_{jk}+\mu\delta_{ij}\delta_{hk}+\mu\delta_{ik}\delta_{hj},$$

где $\lambda>0$, $\mu>0$ — постоянные Ламэ, δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$ при $i=j$. В этом случае

$$a_{ij}^{hk}\eta_{ih}\eta_{jk}=\lambda\eta_{hh}\eta_{ii}+2\mu\eta_{ih}\eta_{ih} \tag{3.5}$$

для любой симметрической матрицы $\{\eta_{ih}\}$, и матрицы A^{hk} принадлежит классу $E(2\mu, 2\mu+n\lambda)$. Действительно, равенство $\varkappa_1=2\mu$ очевидно, а равенство $\varkappa_2=2\mu+n\lambda$ вытекает из (3.5) и неравенства $(a_1+\ldots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+\ldots+a_n^2)$, которое в свою очередь следует из неравенства Коши—Буняковского.

Таким образом, для однородного изотропного тела оператор теории упругости (3.4) имеет вид

$$\mathcal{L}_i(u)=\mu u_{i,hh}+(\lambda+\mu)u_{h,hi}, \quad i=1, \ldots, n,$$

где $u_{l,hk}=\dfrac{\partial^2 u_l}{\partial x_h \partial x_k}$.

Прежде чем приступить к изучению основных краевых задач теории упругости, приведем некоторые простые свойства коэффициентов, которые легко выводятся из (3.2), (3.3) и которые будут многократно использоваться в дальнейшем.

Набору матриц $A^{hk}(x)$ из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ при каждом фиксированном x мы можем сопоставить линейное преобразование $\mathfrak{A}$, действующее в пространстве $(n\times n)$-матриц и переводящее матрицу ξ с элементами ξ_{jk} в матрицу $\mathfrak{A}\xi$ с элементами

$$(\mathfrak{A}\xi)_{jk}=a_{ij}^{hk}\xi_{ih}.$$

Тогда в соответствии с обозначениями (1.8)

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta)=a_{ij}^{hk}\xi_{ih}\eta_{jk}.$$

Лемма 3.1. *Пусть матрицы A^{hk} принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$. Тогда для любых действительных матриц $\xi=\{\xi_{ih}\}$, $\eta=\{\eta_{ih}\}$ имеют место следующие соотношения:*

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta)=(\xi, \mathfrak{A}\eta), \tag{3.6}$$

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta)\leqslant\frac{\varkappa_2}{4}|\xi+\xi^*||\eta+\eta^*|, \tag{3.7}$$

$$|\xi+\xi^*|^2\leqslant\frac{4}{\varkappa_1}(\mathfrak{A}\xi, \xi), \tag{3.8}$$

где ξ^*, η^* — матрицы, сопряженные с ξ, η соответственно.

Доказательство. Пользуясь первым неравенством в (3.2), получим

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta)=a_{ij}^{hk}\xi_{ih}\eta_{jk}=a_{ji}^{kh}\xi_{ih}\eta_{jk}=a_{ij}^{hk}\xi_{jk}\eta_{ih}=(\xi, \mathfrak{A}\eta).$$

В силу (3.3) и (3.6) билинейная форма $(\mathfrak{A}\xi, \eta)$ задает скалярное произведение в пространстве симметрических матриц. Поэтому, используя (3.2), (3.3) и неравенство Коши—Буняковского, получим

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta)=\frac{1}{4}(\mathfrak{A}(\xi+\xi^*), \eta+\eta^*)\leqslant\frac{\varkappa_2}{4}|\xi+\xi^*||\eta+\eta^*|.$$

Из (3.3) при $\eta=(\xi+\xi^*)$ с учетом (3.2) также получаем

$$\varkappa_1|\xi+\xi^*|^2\leqslant(\mathfrak{A}(\xi+\xi^*), \xi+\xi^*)=4(\mathfrak{A}\xi, \xi).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Оператор* (3.1) *класса* $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ $(\varkappa_1, \varkappa_2>0)$ *является эллиптическим, т. е.*

$$\det \| a_{ij}^{hk}\xi_h\xi_k \| \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \neq 0, \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{I}(\eta) = a_{ij}^{hk}\xi_h\xi_k\eta_i\eta_j = \frac{1}{4} a_{ij}^{hk} (\xi_h\eta_i + \xi_i\eta_h)(\xi_k\eta_j + \xi_j\eta_k) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varkappa_1}{4} \sum_{i,h=1}^{n} (\xi_h\eta_i + \xi_i\eta_h)^2 \tag{3.9}$$

при фиксированном $\xi \neq 0$. Если при каком-либо $\eta \neq 0$ квадратичная форма $\mathcal{I}(\eta)$ обращается в нуль, то из (3.9) следует, что

$$\xi_h\eta_i + \xi_i\eta_h = 0, \quad i, h = 1, \ldots, n.$$

Умножая каждое из этих равенств на $\xi_i\eta_h$ и суммируя по i, h от 1 до n, получим $|\xi_i\eta_i|^2 + |\xi|^2|\eta|^2 = 0$. Отсюда следует, что $\eta = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{I}(\eta) > 0$ при $\eta \neq 0$. Лемма доказана.

3.2. Основные краевые задачи теории упругости

Пусть $\mathcal{L}$ — оператор теории упругости класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, имеющий вид (3.1), и Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, занимаемая упругим телом, $u = (u_1, \ldots, u_n)^*$ — вектор перемещений.

В линейной теории упругости обычно рассматриваются следующие краевые задачи.

Первая краевая задача (задача Дирихле):

$$\mathcal{L}(u) = f \text{ в } \Omega, \quad u = \Phi \text{ на } \partial\Omega, \tag{3.10}$$

которая соответствует нахождению вектора перемещений u в точках упругого тела, на границе которого заданы перемещения $u = \Phi$ и к внутренним точкам которого приложена сила $f = (f_1, \ldots, f_n)^*$.

Вторая краевая задача (задача Неймана):

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}(u) = f \text{ в } \Omega, \\ &\sigma(u) \equiv \nu_h A^{hk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

т. е. на границе упругого тела заданы нагрузки $\sigma(u) = \varphi$. Здесь $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Третья краевая задача (смешанная задача):

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}(u) = f \text{ в } \Omega, \\ &u = \Phi \text{ на } \Gamma, \quad \sigma(u) = \varphi \text{ на } S. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

При этом предполагается, что граница области Ω представляется как объединение множеств $\overline{\Gamma}$ и $\overline{S}$, $\Gamma\cap S=\varnothing$.

Для доказательства существования и единственности решений этих краевых задач необходимо наложить определенные ограничения на $\partial\Omega$, Γ, S, о которых будет сказано ниже.

В § 6 мы также изучим некоторые другие краевые задачи для системы теории упругости, в частности задачи с условиями периодичности по части переменных.

Пусть $u=(u_1,\ldots,u_n)$ — вектор перемещений и $e(u)$ — тензор деформаций, т. е. матрица с компонентами $e_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$. Положим

$$\mathscr{E}(u)=(\mathfrak{A}\nabla u,\ \nabla u)^{1/2}\equiv\left(a_{ij}^{hk}\frac{\partial u_i}{\partial x_h}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^{1/2}.$$

Тогда в силу неравенств (3.7), (3.8), полагая $\xi=\nabla u$, $\xi^*=(\nabla u)^*$, получим

$$\varkappa_2^{-1}|\mathscr{E}(u)|^2\leqslant|e(u)|^2\leqslant\varkappa_1^{-1}|\mathscr{E}(u)|^2. \tag{3.13}$$

3.3. Первая краевая задача (задача Дирихле)

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, не обязательно липшицева, $f^j\in L^2(\Omega)$, $j=0,1,\ldots,n$, $\varphi\in H^1(\Omega)$.

Будем говорить, что вектор-функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи

$$\mathscr{L}(u)=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\ \text{в}\ \Omega,\quad u=\varphi\ \text{на}\ \partial\Omega, \tag{3.14}$$

если $u-\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega\left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int_\Omega\left[-(f^0,v)+\left(f^i,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right]dx \tag{3.15}$$

для любой $v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Теорема 3.3. *Существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи* (3.14), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}\leqslant C_0(\Omega)\left(\sum_{i=0}^n\|f^i\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{3.16}$$

где постоянная $C_0(\Omega)$ зависит только от постоянных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ в неравенствах (3.3) *и постоянной в неравенстве Фридрихса* (1.2) *при $\gamma=\partial\Omega$.*

Доказательство. Из (3.15) вытекает, что для вектор-функции $w=u-\varphi$ должно выполняться интегральное тождество

$$\int_\Omega \left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int_\Omega \left[\left(f^i, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-(f^0, v)-\right.$$

$$\left.-\left(A^{hk}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)\right]dx \tag{3.17}$$

при любой $v\in H_0^1(\Omega)$. Заметим, что в силу неравенства Фридрихса (1.2), первого неравенства Корна (2.2), а также неравенства (3.13) квадратичная форма

$$a(u, v)=\int_\Omega \left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx,\ u,\ v\in H_0^1(\Omega),$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3, если за H взять пространство вектор-функций с компонентами из $H_0^1(\Omega)$. Очевидно, что правая часть (3.17) является непрерывным линейным функционалом от v в $H_0^1(\Omega)$. Поэтому в силу теоремы 1 3 существует единственный элемент $w\in H_0^1(\Omega)$, для которого выполняется тождество (3.17). Полагая $u=w+\varphi$, получим искомое решение.

Установим теперь оценку (3.16). Для этого положим в (3.17) $w=u-\varphi$, $v=u-\varphi$. Пользуясь неравенством Фридрихса (1 2) и первым неравенством Корна (2.2), а также равенствами (3.13), устанавливаем

$$\|u-\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant C_1\int_\Omega |e(w)|^2dx\leqslant C_2\int_\Omega |\mathscr{E}(u-\varphi)|^2dx=$$

$$=C_2\left|\int_\Omega\left[\left(f^i, \frac{\partial(u-\varphi)}{\partial x_i}\right)-(f^0, u-\varphi)-\left(A^{hk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial(u-\varphi)}{\partial x_h}\right)\right]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(\sum_{i=0}^n\|f^i\|_{L^2(\Omega)}\|u-\varphi\|_{H^1(\Omega)}+\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|u-\varphi\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{3.18}$$

где постоянная C_3 зависит только от постоянных в неравенстве Фридрихса (1 2) и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Из (3.18), учитывая неравенство $|\|u\|-\|\varphi\||\leqslant\|u-\varphi\|$, получим оценку (3.16) Теорема доказана.

В книге [99] подробно изучен вопрос о гладкости обобщенного решения, полученного в теореме 3 3 Доказано, что если граница области Ω, коэффициенты системы (3.14) и вектор-функции f^i, φ являются гладкими, то и обобщенное решение задачи (3.14) также является гладким.

Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве вектор-функций $H_0^1(\Omega)$. Норма элемента $f\in H^{-1}(\Omega)$, как обычно, определяется формулой

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}=\sup_v\{|f(v)|,\quad v\in H_0^1(\Omega),\quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1\}.$$

Как показано в доказательстве теоремы 3.3, выражение $f=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i}$, $f^j\in L^2(\Omega)$, $j=0, \ldots, n$, определяет линейный непрерывный функционал на $H_0^1(\Omega)$:

$$f(v)=\int_\Omega\left[(f^0, v)-\left(f^i, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right]dx \tag{3.19}$$

для любой вектор-функции $v\in H_0^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant C\sum_{m=0}^{n}\|f^m\|_{L^2(\Omega)},\quad C=\mathrm{const}.$$

С другой стороны, для любого $f\in H^{-1}(\Omega)$ существуют вектор-функции $f^m\in L^2(\Omega)$, $m=0, \ldots, n$, такие, что

$$f=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i} \tag{3.20}$$

в смысле тождества (3.19), причем

$$\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_1\|f\|_{H^{-1}(\Omega)},\quad C_1=\mathrm{const}. \tag{3.21}$$

Действительно, по теореме Рисса [89] любой непрерывный функционал $f(v)$ на $H_0^1(\Omega)$ (т. е. $f\in H^{-1}(\Omega)$) представляется в виде скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$, т. е. существует единственный элемент $u\in H_0^1(\Omega)$, такой, что

$$\int_\Omega(\nabla u, \nabla v)\,dx+\int_\Omega(u, v)\,dx=f(v). \tag{3.22}$$

Полагая в этом равенстве $v=u$ и учитывая определение нормы в $H^{-1}(\Omega)$, находим, что

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2+|u|^2)\,dx\leqslant\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.23}$$

Полагая $f^0=u$, $f^i=-\frac{\partial u}{\partial x_i}$, получаем в силу (3.22), (3.23), что имеет место представление (3.20) и выполняется оценка (3.21).

З а м е ч а н и е 3.4. В частном случае, когда $\varphi=0$ в (3.14), для любого $f\in H^{-1}(\Omega)$ в силу представления (3.20) можем рассмотреть задачу

$$\mathscr{L}(u)=f,\quad u\in H_0^1(\Omega). \tag{3.24}$$

Тогда по теореме 3.3 и вследствие оценки (3.21) имеем

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{3.25}$$

где постоянная C зависит только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и постоянной в неравенстве Фридрихса (1 2) при $\gamma = \partial\Omega$.

3.4. Вторая краевая задача (задача Неймана)

В этом разделе предполагаем, что Ω — ограниченная область, имеющая липшицеву границу. Пусть S_1 — подмножество на $\partial\Omega$, имеющее ненулевую $(n-1)$-мерную меру Лебега на $\partial\Omega$. Положим

$$\sigma(u) \equiv \nu_h A^{hk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{3.26}$$

Скажем, что вектор-функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(u) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega, \\ &\sigma(u) = \varphi + \nu_i f^i \text{ на } S_1, \quad \sigma(u) = \nu_i f^i \text{ на } \partial\Omega \setminus S_1, \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

где $f^j \in L^2(\Omega)$, $j = 0, \ldots, n$, $\varphi \in L^2(S_1)$, если для любой $v \in H^1(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \left(A^{hk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h} \right) dx = \int_{S_1} (\varphi, v)\, dS + \\ + \int_\Omega \left[\left(f^i, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - (f^0, v) \right] dx. \tag{3.28}$$

Заметим, что поскольку f^j принадлежат $L^2(\Omega)$, то граничные условия в (3.27) выполняются лишь в обобщенном смысле, а именно в смысле тождества (3.28). Интеграл по S_1 в правой части (3.28) существует в силу того, что согласно утверждению 3 теоремы 1.2 имеем

$$\| v \|_{L^2(S_1)} \leqslant C(\Omega) \| v \|_{H^1(\Omega)} \tag{3.29}$$

для любой $v \in H^1(\Omega)$.

Теорема 3.5. *Пусть*

$$\int_{S_1} (\varphi, \eta)\, dS + \int_\Omega \left[\left(f^i, \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) - (f^0, \eta) \right] dx \equiv 0 \tag{3.30}$$

для любого жесткого перемещения $\eta \in \mathfrak{R}$. Тогда существует единственное с точностью до слагаемого $\eta \in \mathfrak{R}$ обобщенное решение $u(x)$ задачи (3.27), *такое, что*

$$\| e(u) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1(\Omega) \left(\sum_{i=0}^{n} \| f^i \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{L^2(S_1)} \right), \tag{3.31}$$

где постоянная $C_1(\Omega)$ зависит только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и постоянных в неравенстве (3.29) *и неравенстве* (2.14), *когда $V \subset H^1(\Omega)$ состоит из вектор-функций, ортогональных $\mathfrak{R}$ в $L^2(\Omega)$, или V — ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}$ в $H^1(\Omega)$*.

Доказательство. Обозначим через H гильбертово пространство, состоящее из вектор-функций, принадлежащих $H^1(\Omega)$ и ортогональных в $L^2(\Omega)$ пространству жестких перемещений $\mathfrak{R}$. За H можно также взять ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}$ в $H^1(\Omega)$. Легко видеть, что правая часть интегрального тождества (3.28) есть непрерывный линейный функционал относительно v на H, поскольку справедливо неравенство (3.29). Как и при доказательстве теоремы 3.3, с помощью второго неравенства Корна (2.3) и неравенства (3.13) устанавливаем, что билинейная форма в левой части (3.28) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3. Таким образом, по теореме 1.3 существует единственный элемент $u \in H$, для которого справедливо интегральное тождество (3.28) при всех $v \in H$. Если $v \in \mathfrak{R}$, то левая часть (3.28) равна нулю в силу того, что $\mathscr{L}(v)=0$ в Ω, $\sigma(v)=0$ на $\partial\Omega$. Правая часть (3.28) равна нулю при $v \in \mathfrak{R}$ в силу условий (3.30). Поэтому интегральное тождество (3.28) выполнено при всех $v \in H^1(\Omega)$. Оценка (3.31) вытекает из (3.28) при $v=u$, второго неравенства Корна и неравенств (3.13), (3.29). Теорема доказана.

Замечание 3.6. Если в теореме 3.5 выбрать решение $u(x)$, ортогональное в $L^2(\Omega)$ или в $H^1(\Omega)$ пространству жестких перемещений $\mathfrak{R}$, то для него будет справедлива оценка

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_2(\Omega) \left(\sum_{i=0}^{n} \| f^i \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{L^2(S_1)} \right), \tag{3.32}$$

где постоянная $C_2(\Omega)$ зависит от тех же величин, что и постоянная $C_1(\Omega)$ в неравенстве (3.31). Это вытекает из второго неравенства Корна (2.14) (см. теорему 2.5).

Замечание 3.7. Так же, как и для обобщенного решения задачи Дирихле, можно доказать гладкость обобщенного решения задачи Неймана, предполагая достаточную гладкость коэффициентов системы $a_{ij}^{hk}(x)$, границы области Ω и данных задачи φ, f^i (см. [99]).

3.5. Смешанная краевая задача

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ рассмотрим краевую задачу для оператора $\mathscr{L}$ из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(u) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega, \\ &\sigma(u) = \varphi + \nu_i f^i \text{ на } S_1, \quad \sigma(u) = \nu_i f^i \text{ на } S_2, \\ &u = \Phi \quad \text{на } \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

где $f^j \in L^2(\Omega)$, $j=0, 1, \ldots, n$, $\varphi \in L^2(S_1)$, $\Phi \in H^{1/2}(\gamma)$, $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$—единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Прежде чем дать определение обобщенного решения этой задачи, наложим некоторые ограничения на $\partial\Omega$, γ, S_1, S_2.

Предполагаем, что

1. $\partial\Omega=\overline{\gamma}\cup\overline{S}_1\cup\overline{S}_2$, причем γ, S_1, S_2 — взаимно непересекающиеся множества на $\partial\Omega$.

2. Ω — область с липшицевой границей $\partial\Omega$, γ содержит подмножество, удовлетворяющее условиям теоремы 2.7.

Заметим, что все дальнейшие результаты справедливы и при некоторых более слабых ограничениях на Ω и γ, обеспечивающих выполнение неравенств (1.2) и (2.14).

Обобщенным решением задачи (3.33) называем вектор-функцию $u\in H^1(\Omega)$, такую, что $u=\Phi$ на γ (т. е. $u-\Phi\in H^1(\Omega, \gamma)$) и для любой $v\in H^1(\Omega, \gamma)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int_\Omega\left[\left(f^i, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-(f^0, v)\right]dx+\int_{S_1}(\varphi, v)\,dS. \tag{3.34}$$

Отметим, что по определению пространства $H^{1/2}(\gamma)$ мы можем считать, что $\Phi\in H^1(\Omega)$.

Теорема 3.8. *Существует единственное обобщенное решение задачи* (3.33), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C(\Omega)\left(\sum_{i=0}^n \|f^i\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L^2(S_1)}+\|\Phi\|_{H^{1/2}(\gamma)}\right), \tag{3.35}$$

где постоянная $C(\Omega)$ *зависит только от* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, *постоянной в неравенстве* (3.29) *и постоянных в неравенстве Корна* (2.14) *для вектор-функций из* $H^1(\Omega, \gamma)$ (*см. теорему* 2.7).

Доказательство. Из (3.34) заключаем, что вектор-функция $w=u-\Phi$ должна удовлетворять интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int_\Omega\left[\left(f^i, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-(f^0, v)\right]dx+$$
$$+\int_{S_1}(\varphi, v)\,dS-\int_\Omega\left(A^{hk}(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx \tag{3.36}$$

для любой $v\in H^1(\Omega, \gamma)$. В силу утверждения 3 теоремы 1.2 для $v\in H^1(\Omega, \gamma)$ выполняется неравенство (3.29). Согласно теореме 2.7 для $v\in H^1(\Omega, \gamma)$ выполнено неравенство (2.14).

Неравенства (2.14), (3.13) показывают, что билинейная форма в левой части (3.36) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3 при $H=H^1(\Omega, \gamma)$. Вследствие (3.29) правая часть (3.36) задает линейный непрерывный функционал на $H^1(\Omega, \gamma)$. По теореме 1.3 существует единственный элемент $w\in H^1(\Omega, \gamma)$, для которого имеет место интегральное тождество (3.36). Очевидно, что $u=w+\Phi$ является искомым решением задачи (3.33). Установим оценку (3.35). Положим $v=w$ в (3.36). Тогда согласно (2.14) и (3.13)

$$\|w\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|e(w)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\varkappa_1}\|\mathscr{E}(w)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S_1)}\|w\|_{L^2(S_1)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}\right),$$

Учитывая неравенство (3.29) для $v=w$, отсюда получаем

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_2\left(\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S_1)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Так как $w=u-\Phi$, то

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_3\left(\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S_1)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\right). \quad (3.37)$$

Заметим, что при выводе этого неравенства за Φ можно было взять любую вектор-функцию $\tilde{\Phi}$, такую, что $\tilde{\Phi}-\tilde{\Phi}\in H^1(\Omega, \gamma)$, при этом постоянная C_3 не зависит от $\tilde{\Phi}$. Поэтому согласно определению нормы в $H^{1/2}(\gamma)$ из (3.37) выводим (3.35). Теорема доказана.

§ 4. ПЕРФОРИРОВАННЫЕ ОБЛАСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. ТЕОРЕМЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ

4.1. Основные типы перфорированных областей

Пусть ω — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с 1-периодической структурой, т. е. область, инвариантная относительно сдвигов на векторы $z=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Как и ранее, используются обозначения

$$Q=\{x : 0<x_j<1,\ j=1, \ldots, n\},$$

$$\varepsilon G=\{x : \varepsilon^{-1}x\in G\}, \quad z+G=\{x : x=z+y,\ y\in G\},$$

$\rho(A, B)$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ между множествами A и B, ε — малый параметр.

Далее рассматриваем только такие области ω, для которых выполнено

Условие B:

B1. ω — гладкая область в $\mathbf{R}^n$ с 1-периодической структурой;

B2. ячейка периодичности $\omega \cap Q$ является областью с липшицевой границей;

B3. Множество $Q \setminus \overline{\omega}$, а также пересечение $Q \setminus \overline{\omega}$ с δ-окрестностью $\left(\delta < \frac{1}{4}\right)$ границы ∂Q состоят из конечного числа липшицевых областей, отстоящих друг от друга и от ребер куба Q на положительное расстояние.

В дальнейшем рассматриваем два типа ограниченных перфорированных областей с периодической структурой, зависящей от малого параметра ε.

Область Ω^ε типа I:

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega, \tag{4.1}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей, ω — область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условию B. Предполагаем, что Ω^ε — область с липшицевой границей.

Граница области Ω^ε типа I имеет вид $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon$, где $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cup \varepsilon\omega$, $S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$.

Область Ω^ε типа II:

$$\overline{\Omega}^\varepsilon = \overline{\Omega}_1^\varepsilon \cup (\overline{\Omega} \setminus \Omega_1), \tag{4.2}$$

где Ω — ограниченная область с гладкой границей,

$$\overline{\Omega}_1 = \bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon (z + \overline{Q}), \quad \overline{\Omega}_1^\varepsilon = \overline{\Omega}_1 \cap \varepsilon\overline{\omega}, \tag{4.3}$$

T_ε — подмножество точек $z \in \mathbf{Z}^n$, таких, что

$$\varepsilon (z + Q) \subset \Omega, \quad \rho (\varepsilon (z + Q), \partial\Omega) \geqslant \varepsilon,$$

ε — малый параметр.

Предполагается, что Ω_1, Ω_1^ε, Ω^ε (множества внутренних точек $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_1^\varepsilon$, $\overline{\Omega}^\varepsilon$) являются областями с липшицевыми границами.

Граница $\partial\Omega^\varepsilon$ области Ω^ε типа II состоит из $\partial\Omega$ и границы полостей $S_\varepsilon \subset \Omega$, $S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$.

4.2. Теоремы о продолжении вектор-функций, заданных в перфорированных областях

Для получения оценок решений краевых задач теории упругости в перфорированных областях Ω^ε нам потребуются различные оценки продолжений вектор-функций, определенных в Ω^ε, на область Ω, равномерные по ε. В основе доказательства этих оценок лежит

Лемма 4.1. *Пусть $G \subset \mathscr{D} \subset \mathbf{R}^n$ и каждое из множеств G, $\mathscr{D}$ $\mathscr{D} \setminus \bar{G}$ является непустой ограниченной областью с липшицевой границей. Пусть множество $\gamma = (\partial G) \cap \mathscr{D}$ непусто. Тогда для вектор-функций из $H^1(\mathscr{D} \setminus G)$ существует линейный оператор продолжения $P: H^1(\mathscr{D} \setminus \bar{G}) \to H^1(\mathscr{D})$, такой, что*

$$P\eta = \eta, \quad \forall \eta \in \mathfrak{R}, \qquad (4.4)$$

$$\|Pw\|_{H^1(\mathscr{D})} \leqslant C_1 \|w\|_{H^1(\mathscr{D} \setminus \bar{G})}, \qquad (4.5)$$

$$\|Pw\|_{H^1(\mathscr{D})} \leqslant C_2 (\|w\|_{L^2(\mathscr{D} \setminus \bar{G})} + \|e(w)\|_{L^2(\mathscr{D} \setminus \bar{G})}), \qquad (4.6)$$

$$\|\nabla Pw\|_{L^2(\mathscr{D})} \leqslant C_3 \|\nabla w\|_{L^2(\mathscr{D} \setminus \bar{G})}, \qquad (4.7)$$

$$\|e(Pw)\|_{L^2(\mathscr{D})} \leqslant C_4 \|e(w)\|_{L^2(\mathscr{D} \setminus \bar{G})}, \qquad (4.8)$$

где постоянные $C_1, \ldots, C_4$ не зависят от $w \in H^1(\mathscr{D} \setminus \bar{G})$.

Доказательство. Покажем сначала, что всякую вектор-функцию $w \in H^1(\mathscr{D} \setminus \bar{G})$ можно продолжить до вектор-функции $\tilde{w} \in H^1(\mathscr{D})$ так, что выполняется оценка

$$\|\tilde{w}\|_{H^1(\mathscr{D})} \leqslant C \|w\|_{H^1(\mathscr{D} \setminus \bar{G})}, \qquad (4.9)$$

где постоянная C не зависит от w Действительно, пусть B — шар в $\mathbf{R}^n$ достаточно большого радиуса, содержащий некоторую окрестность множества $\bar{\mathscr{D}}$. Тогда по утверждению 2 теоремы 1.2 вектор-функция w продолжается с $\mathscr{D} \setminus \bar{G}$ на весь шар B до вектор-функции $w^1 \in H^1(B)$. Взяв ограничение w^1 на область $\mathscr{D}$, получим вектор-функцию $\tilde{w}$, для которой имеет место (4.9).

Обозначим через W обобщенное решение следующей краевой задачи для системы теории упругости:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(W) = 0 \text{ в } G, \\ W = \tilde{w} \text{ на } &\mathscr{D} \cap \partial G, \ \sigma(W) = 0 \text{ на } \partial G \cap \partial \mathscr{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

где $\mathscr{L}$ — произвольный оператор из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ с постоянными коэффициентами. Заметим, что если $\partial G \cap \partial \mathscr{D} = \varnothing$, то последнее краевое условие в (4.10) отсутствует. По теореме 3.8 вектор-функция W существует и удовлетворяет оценке

$$\|W\|_{H^1(G)} \leqslant M_1 \|\tilde{w}\|_{H^1(G)}.$$

Учитывая (4 9), отсюда получаем

$$\|W\|_{H^1(G)} \leqslant M_2 \|w\|_{H^1(\mathscr{D} \setminus G)}. \qquad (4.11)$$

Положим

$$P(w) = \begin{cases} w(x) \text{ при } x \in \mathscr{D} \setminus G, \\ W(x) \text{ при } x \in G. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Легко видеть, что $P(w)$ — вектор-функция из пространства $H^1(\mathscr{D})$. Из (4.10) следует, что $P\eta = \eta$ для любого $\eta \in \mathfrak{R}$. На основании (4.11) и неравенства Корна (2.3) для $\mathscr{D}\setminus\bar{G}$ (см. теорему 2.4) заключаем, что выполнены неравенства (4 5), (4 6), где постоянные C_1, C_2 зависят только от G, $\mathscr{D}$.

Докажем, что для Pw имеет место оценка (4 8). Предположим противное. Тогда существует последовательность вектор-функций $v^N \in H^1(\mathscr{D}\setminus G)$, такая, что

$$\|Pv^N\|_{H^1(\mathscr{D})} \leqslant C_1' \|v^N\|_{H^1(\mathscr{D}\setminus\bar{G})}, \tag{4.13}$$

но

$$\|e(Pv^N)\|_{L^2(\mathscr{D})} \geqslant N \|e(v^N)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus\bar{G})}, \tag{4.14}$$

$$\|e(v^N)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus\bar{G})} = \frac{1}{N}. \tag{4.15}$$

Можем считать, что $\int\limits_{\mathscr{D}\setminus G} (v^N, \eta)\, dx = 0$ для любого жесткого перемещения η, поскольку $P(v+\eta) = Pv + \eta$ в силу (4.10), (4.12) и для любой ограниченной области ω_0 и любой $v \in H^1(\omega_0)$ имеем $\int\limits_{\omega_0} |e(v+\eta)|^2 dx = \int\limits_{\omega_0} |e(v)|^2 dx$. Согласно второму неравенству Корна (2.14) (см следствие 2 6 из теоремы 2.5) для области $\mathscr{D}\setminus\setminus G$ имеем, учитывая (4.15),

$$\|v^N\|_{H^1(\mathscr{D}\setminus\bar{G})} \leqslant C \|e(v^N)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus G)} = \frac{C}{N}.$$

Поэтому $v^N \to 0$ при $N \to \infty$ в $H^1(\mathscr{D}\setminus\bar{G})$ и, значит, $\|Pv^N\|_{H^1(\mathscr{D})} \to 0$ при $N \to \infty$ вследствие (4.13). Однако, как видно из (4.14), $\|e(Pv^N)\|_{L^2(\mathscr{D})} \geqslant 1$. Полученное противоречие доказывает неравенство (4.8).

Установим неравенство (4.7). Пусть постоянный вектор C выбран так, что $\int\limits_{\mathscr{D}\setminus G} P(w+C)\, dx = 0$. Тогда из (4.5) следует, что

$$\|\nabla P(w+C)\|_{L^2(\mathscr{D})} \leqslant K_0 [\|P(w+C)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus\bar{G})} + \|\nabla P(w+C)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus\bar{G})}] \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \|\nabla P(w+C)\|_{L^2(\mathscr{D}\setminus\bar{G})}, \quad K_0, K_1 = \text{const}.$$

При выводе последнего неравенства мы воспользовались неравенством Пуанкаре (1 5) для $\mathscr{D}\setminus\bar{G}$. Поскольку $\nabla C = 0$, $PC = C$, отсюда следует (4.7). Лемма доказана.

Теорема 4.2 (о продолжении вектор-функций для областей Ω^ε типа II). *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* II. *Тогда для вектор-функций из $H^1(\Omega^\varepsilon)$ существует линейный оператор продолжения $P_\varepsilon : H^1(\Omega^\varepsilon) \to H^1(\Omega)$, такой, что*

$$P_\varepsilon \eta = \eta \quad \forall \eta \in \mathfrak{R}, \tag{4.16}$$

$$\|P_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.17}$$

$$\|P_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)}+\|e(P_\varepsilon v)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_2(\|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|e(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}),\qquad(4.18)$$

$$\|\nabla P_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_3\|\nabla v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\qquad(4.19)$$

$$\|e(P_\varepsilon v)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_4\|e(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\qquad(4.20)$$

где постоянные $C_1, \ldots, C_4$ не зависят от ε, вектор-функция v принадлежит $H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $v(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Положим $V(\xi)=v(\varepsilon\xi)$. Фиксируем $z\in T_\varepsilon$, где множество T_ε такое же, как и в определении области Ω^ε типа II (см. равенство (4 3)). Рассмотрим $V(\xi)$ в липшицевой области $\omega\cap(z+Q)$. В силу леммы 4 1 можем продолжить $V(\xi)$ до вектор-функции $R_1V\in H^1(z+Q)$, такой, что

$$P_1V=V\ \forall\ V\in\mathfrak{R},$$

$$\|P_1V\|_{H^1(z+Q)}\leqslant K_0\|V\|_{H^1(\omega\cap(z+Q))},$$

$$\|P_1V\|_{L^2(z+Q)}+\|e(P_1V)\|_{L^2(z+Q)}\leqslant K_1(\|V\|_{L^2(\omega\cap(z+Q))}+\|e(V)\|_{L^2(\omega\cap(z+Q))}),\qquad(4.21)$$

$$\|\nabla_\xi P_1V\|_{L^2(z+Q)}\leqslant K_2\|\nabla_\xi V\|_{L^2((z+Q)\cap\omega)},$$

$$\|e_\xi(P_1V)\|_{L^2(z+Q)}\leqslant K_3\|e_\xi(V)\|_{L^2((z+Q)\cap\omega)}.$$

Продолжая $V(\xi)$ таким образом для любого $z\in T_\varepsilon$, получим вектор-функцию P_1V, удовлетворяющую неравенствам (4.21) при любом $z\in T_\varepsilon$ с постоянными K_0, K_1, K_2, K_3, не зависящими от z.

Если множество $Q\setminus\bar\omega$ лежит строго внутри куба Q, то вектор-функция $(P_1V)(x/\varepsilon)$ является искомым продолжением, т. е можно положить $(P_\varepsilon v)(x)=(P_1V)(x/\varepsilon)$, где $V(\xi)=v(\varepsilon\xi)$.

Однако, если $\bar Q\setminus\omega$ имеет непустое пересечение с ∂Q, то вектор-функция $P_1V(\xi)$ может не принадлежать $H^1(\varepsilon^{-1}\Omega)$, поскольку ее следы на соседних гранях кубов $z+Q$, $z\in T_\varepsilon$, могут не совпадать. Вблизи таких граней изменим $P_1V(\xi)$ следующим образом.

В силу условия B3 на ω пересечение δ-окрестности ∂Q с $Q\setminus\bar\omega$ состоит из конечного числа липшицевых областей, отстоящих друг от друга и от ребер Q на расстояние, большее некоторого $\delta_1\in(0, 1/4)$. Для $l=0$ или $l=1$ обозначим через $\gamma_1^l, \ldots, \gamma_{m_l}^l$ те из указанных подобластей δ — окрестности ∂Q, граница которых имеет непустое пересечение с объединением граней Q вида $\xi_k=l$; $k=1,\ldots,n$.

Пусть область Ω_1 и множество $T_\varepsilon\subset\mathbf{Z}^n$ те же, что и в определении перфорированной области Ω^ε типа II. Обозначим через T_ε^1 множество $z\in T_\varepsilon$ таких, что $\overline{(\gamma_j^1+z)}\cap\partial(\varepsilon^{-1}\Omega_1)\neq\varnothing$ при некотором $j=1,\ldots,m_1$. Пусть через $G_1,\ldots,G_N$ обозначены все взаимно непересекающиеся области, каждая из которых имеет вид γ_j^0+z, $z\in T_\varepsilon$, или γ_j^1+z, $z\in T_\varepsilon^1$. Очевидно, что $\rho(G_s, G_t)>\delta_1$ при $s\neq t$; число N неограниченно растет при $\varepsilon\to0$, но области $G_1, \ldots, G_N$ являются сдвигами конечного числа ограниченных липшицевых областей.

Рассмотрим продолжение $P_1V(\xi)$. По построению, множество $\partial G_1\cup\ldots\cup\partial G_N$ содержит все участки граней кубов $z+Q$, $z\in T_\varepsilon$, на которых, как указано выше, следы $P_1V(\xi)$ могут не совпадать. Положим $G_0=G_1\cup\ldots\cup G_N$. Обозначим $\delta_1/2$-окрестность G_j через $\widetilde{G}_j$. Легко видеть, что $P_1V\in H^1(\varepsilon^{-1}\Omega\setminus G_0)$. Пользуясь леммой 4.1, продолжим P_1V на каждое из множеств G_j до вектор-функции P_2V, удовлетворяющей неравенствам

$$\|P_2V\|_{H^1(G_j)}\leqslant M_1\|P_1V\|_{H^1(\widetilde{G}_j\setminus G_j)},$$

$$\|P_2V\|_{L^2(G_j)}+\|e(P_2V)\|_{L^2(G_j)}\leqslant M_2(\|P_1V\|_{L^2(\widetilde{G}_j\setminus G_j)}+\|e(P_1V)\|_{L^2(\widetilde{G}_j\setminus G_j)}),$$

$$\|\nabla_\xi P_2V\|_{L^2(G_j)}\leqslant M_3\|\nabla_\xi P_1V\|_{L^2(\widetilde{G}_j\setminus G_j)}, \tag{4.22}$$

$$\|e_\xi(P_2V)\|_{L^2(G_j)}\leqslant M_4\|e_\xi(P_1V)\|_{L^2(\widetilde{G}_j\setminus G_j)},$$

причем $P_2V=V$, если $V\in\mathfrak{R}$, постоянные $M_1,\ldots,M_4$ не зависят от V, j. Положим $U(\xi)=(P_1V)(\xi)$ для $\xi\in(\varepsilon^{-1}\Omega)\setminus G_0$, $U(\xi)=(P_2V)(\xi)$ для $\xi\in G_0$. Пользуясь оценками (4.21), (4.22), заключаем, что вектор-функция $(P_\varepsilon v)(x)=U(x/\varepsilon)$ является искомым продолжением. Теорема доказана.

Теорема 4.3 (о продолжении вектор-функций в перфорированных областях Ω^ε типа I). *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа I и Ω_0 — ограниченная область, такая, что $\overline{\Omega}\subset\Omega_0$, $\rho(\partial\Omega_0,\Omega)>1$. Тогда при достаточно малых ε для вектор-функций из $H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ существует линейный оператор продолжения $P_\varepsilon: H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)\to \overset{1}{H}_0(\Omega_0)$, такой, что для любой $u\in H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ выполнены неравенства*

$$\|P_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_0)}\leqslant C_1\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.23}$$

$$\|\nabla P_\varepsilon u\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C_2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.24}$$

$$\|e(P_\varepsilon u)\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C_3\|e(u)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.25}$$

где постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от ε, u, причем $(P_\varepsilon u)|_g=0$ для любого открытого g, такого, что $\bar{g}\subset\Omega_0\setminus\Omega$, если ε достаточно мало.

Доказательство. Обозначим через T_ε множество $z\in\mathbf{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(Q\cap\omega+z)\cap\Omega\neq\varnothing$. Обозначим через $\widetilde{\Omega}_1^\varepsilon$ множество внутренних точек множества $\bigcup\limits_{z\in T_\varepsilon}\varepsilon(\overline{Q\cap\omega}+z)$, а через $\widetilde{\Omega}_1$ — множество внутренних точек множества $\bigcup\limits_{z\in T_\varepsilon}\varepsilon(\overline{Q}+z)$. Пусть $u\in H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$. Определим вектор-функцию $U(x)$ следующим образом:

$$U(x)=\begin{cases} u(x), & x\in\Omega^\varepsilon,\\ 0, & x\in\widetilde{\Omega}_1^\varepsilon\setminus\Omega,\\ 0, & x\in\Omega_0\setminus\widetilde{\Omega}_1.\end{cases}$$

Легко видеть, что $U(x)\in H^1(\tilde{\Omega}_1^\varepsilon)$. Согласно теореме 4.2 можем продолжить $U(x)$ в область Ω_0. Обозначим это продолжение через $\tilde{P}_\varepsilon U$. Положим $P_\varepsilon u=\tilde{P}_\varepsilon U$. Очевидно, что выполнены условия (4.23)—(4.25). Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку $P_\varepsilon u=0$ на $\Omega_0\setminus\tilde{\Omega}_1$. Теорема доказана.

4.3. Неравенства Корна для перфорированных областей

В этом разделе мы установим неравенства Корна для перфорированных областей Ω^ε с постоянными, не зависящими от ε. Эти оценки будут использоваться в гл. II для усреднения решений краевых задач.

Теорема 4.4 (неравенства Корна для перфорированной области Ω^ε типа II). *Пусть Ω^ε — область типа* II *и вектор-функция $u\in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Тогда*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|e(u)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}),\tag{4.26}$$

где постоянная C не зависит от u и ε.

Кроме того, если выполнено одно из двух условий

$$(u,\ \eta)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}=0\quad\forall\eta\in\mathfrak{R}\tag{4.27}$$

или

$$(u,\ \eta)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=0\quad\forall\eta\in\mathfrak{R},\tag{4.28}$$

то

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_1\|e(u)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\tag{4.29}$$

где постоянная C_1 не зависит от u, ε.

Доказательство. Неравенство (4.26) — простое следствие неравенства Корна (2.3) в области Ω (см. теорему 2.4 и теорему 4.2 о продолжении). Действительно, пусть P_ε — оператор продолжения из теоремы 4.2. Тогда

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\|P_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C_2(\|P_\varepsilon u\|_{L^2(\Omega)}+\|e(P_\varepsilon u)\|)_{L^2(\Omega)})\leqslant$$
$$\leqslant C_3(\|u\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|e(u)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}).$$

Пусть выполнено условие (4.27). Тогда, очевидно,

$$(u,\ u)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant(u-\eta,\ u-\eta)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\tag{4.30}$$

для любого жесткого перемещения $\eta\in\mathfrak{R}$. Пусть $P_\varepsilon u\in H^1(\Omega)$ — продолжение вектор-функции u, существование которого утверждается в теореме 4.2. Обозначим через η_0 ортогональную проекцию в $H^1(\Omega)$ вектор-функции $P_\varepsilon u$ на пространство $\mathfrak{R}$. Следовательно,

$$(P_\varepsilon u-\eta_0,\ \zeta)_{H^1(\Omega)}=0\quad\forall\zeta\in\mathfrak{R}.\tag{4.31}$$

Тогда в силу следствия 2.6 из теоремы 2.5

$$(P_\varepsilon u-\eta_0,\ P_\varepsilon u-\eta_0)_{H^1(\Omega)}\leqslant C_4\|e(P_\varepsilon u)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

так как $\|e(P_\varepsilon u-\eta_0)\|_{L^2(\Omega)}=\|e(P_\varepsilon u)\|_{L^2(\Omega)}$. Из этого неравенства, учитывая (4.30) и теорему 4.2, устанавливаем

$$(u,\ u)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant(u-\eta_0,\ u-\eta_0)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant(P_\varepsilon u-\eta_0,\ P_\varepsilon u-\eta_0)_{H^1(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant C_4\|e(P_\varepsilon u)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_5\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Пусть выполнено условие (4.28). Тогда

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\|u-\eta\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\quad\forall\eta\in\mathfrak{R}. \tag{4.32}$$

Выбирая $\eta=\eta_0$ так, чтобы для $u-\eta_0$ выполнялось условие (4.27), получим в силу (4.29)

$$\|u-\eta_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_1^2\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Поэтому $\|u\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_6\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$ вследствие (4.32). Отсюда и из (4.26) вытекает неравенство (4.29) для вектор-функций, удовлетворяющих (4.28). Теорема доказана.

Установим теперь неравенство Корна в случае перфорированной области Ω^ε типа I для вектор-функций из $H^1(\Omega^\varepsilon)$, равных нулю на Γ_ε. Заметим, что теорема 2.7 гарантирует выполнение этого неравенства с постоянной, вообще говоря, зависящей от ε, однако для дальнейшего необходимо иметь это неравенство с независящей от ε постоянной.

Теорема 4.5. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* I. *Тогда для любой вектор-функции $v\in H^1(\Omega^\varepsilon,\ \Gamma_\varepsilon)$ имеет место неравенство*

$$\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\|e(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4 33}$$

где постоянная C не зависит от v и ε.

Доказательство. Пусть $v\in H^1(\Omega^\varepsilon,\ \Gamma_\varepsilon)$ и $P_\varepsilon v\in H^1_0(\Omega_0)$ — продолжение вектор-функции v на область Ω_0, существование которого утверждается в теореме 4.3. По теореме 2.1 для $P_\varepsilon v$ выполняется неравенство Корна типа (2 2) в области Ω_0. Поэтому в силу (4.25) имеем

$$\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\|P_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega_0)}\leqslant C_1\|e(P_\varepsilon v)\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C_2\|e(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от ε, v. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 4.2 и утверждения 3 теоремы 1 2 вытекает

Лемма 4.6. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* II. *Тогда для любой $v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant C\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.34}$$

где постоянная C не зависит от ε.

§ 5. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

В § 3 установлены существование и единственность решений основных краевых задач теории упругости и получены оценки решений через данные задачи. Если область, в которой рассматривается решение, и коэффициенты системы зависят от параметра ε, то и постоянные в этих оценках, вообще говоря, будут зависеть от ε. В этом параграфе покажем, что в случае перфорированных областей Ω^ε, описанных в § 4, постоянные в оценках типа (3.31), (3.35) можно считать не зависящими от ε при условии, что матрицы коэффициентов системы теории упругости принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ с постоянными $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, не зависящими от ε.

5.1. Смешанная краевая задача

Пусть Ω^ε — перфорированная область с периодической структурой типа I (см. соотношение (4.1)), $\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$ где S_ε — граница полостей: $S_\varepsilon = \Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$; $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}(u) &= f^0 + \frac{\partial f^m}{\partial x_m} \ \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ u = \Phi \ \text{ на } \Gamma_\varepsilon, &\quad \sigma(u) = \nu_m f^m \ \text{ на } S_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

где $f^j \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j=0, \ldots, n$, $\Phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\mathscr{L}$ — оператор теории упругости вида (3.1) из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.

Эта задача в общем случае рассмотрена в § 3 (см. теорему 3.8). Следующая теорема уточняет теорему 3.8 для перфорированных областей Ω^ε.

Теорема 5.1. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа I и матрицы коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ с постоянными $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, не зависящими от ε. Тогда существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи* (5.1), *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\left(\sum_{j=0}^{n} \|f^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\Phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right), \tag{5.2}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (5.1) вытекают из теоремы 3.8 при $S_1 = \varnothing$, $S_2 = S_\varepsilon$, $\gamma = \Gamma_\varepsilon$. Согласно теореме 3.8 постоянная C в (5.2) зависит от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и постоянной в неравенстве Корна (4.33) для вектор-функций из $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Как следует из теоремы 4.5, эту постоянную можно считать не зависящей от ε, и потому (5.2) справедливо с постоянной C, также не зависящей от ε. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5.2. Вектор-функция $f^0 \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ определяет линейный непрерывный функционал $l(v)$ на пространстве $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ по формуле $l(v)=(f^0, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$. Обозначим норму этого функционала в $(H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))^*$ через $\|f^0\|_*$. Тогда

$$\|f^0\|_* = \sup_v \{|(f^0, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}|, \quad v \in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon), \ \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}=1\}. \tag{5.3}$$

Очевидно, что $\|f^0\|_* \leqslant \|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$. Из доказательства теоремы 3 3 вытекает, что оценку (5 2) можно заменить оценкой

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\|f^0\|_* + \sum_{j=1}^{n} \|f^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\Phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right). \tag{5.4}$$

5.2. Оценки решений задачи Неймана в перфорированной области

В перфорированной области Ω^ε типа II рассмотрим вторую краевую задачу теории упругости

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(u) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega^\varepsilon, \\ &\sigma(u) = \varphi + \nu_i f^i \ \text{на } \partial\Omega, \ \sigma(u) = \nu_i f^i \ \text{на } S_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где

$$f^j \in L^2(\Omega^\varepsilon), \ j=0, \dots, n, \ \varphi \in L^2(\partial\Omega), \tag{5.6}$$

$$\partial\Omega^\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon, \quad S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega. \tag{5.7}$$

Уточнением теоремы 3 5 является

Т е о р е м а 5.3. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* II.

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi, \eta)\, dS + \int_{\Omega^\varepsilon} \left[\left(f^i, \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right) - (f^0, \eta)\right] dx = 0 \tag{5.8}$$

для любого жесткого перемещения $\eta \in \mathfrak{R}$ и коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ с постоянными $\varkappa_1, \varkappa_2$, не зависящими от ε. Тогда существует единственное решение $u(x)$ задачи (5.5), *такое, что*

$$(u, \eta)_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 0 \ \forall \eta \in \mathfrak{R}$$

и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\sum_{i=0}^{n} \|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}\right), \tag{5.9}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения задачи (5.5) вытекают из теоремы 3.5 и замечания 3.6, причем постоянная C в неравенстве (5.9) зависит от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, а также от постоянной во втором неравенстве Корна (4.29). Все эти постоянные не зависят от ε, поэтому неравенство (5.9) справедливо с постоянной C, не зависящей от ε. Теорема доказана.

При изучении спектральных свойств задачи Неймана типа (5.7) рассматриваем следующую вспомогательную краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-\rho(x)\,u=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i} \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\ &\sigma(u)=\nu_i f^i \text{ на } S_\varepsilon,\ \sigma(u)=\varphi+\nu_i f^i \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

где $f^j\in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j=0, 1,\dots,n$, $\varphi\in L^2(\partial\Omega)$, матрицы $A^{hk}(x)$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\rho(x)$ — ограниченная измеримая функция в Ω^ε,

$$0<c_0\leqslant\rho(x)\leqslant c_1,\ c_0, c_1=\text{const}. \tag{5.11}$$

Обобщенным решением задачи (5.10) называется вектор-функция $u(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left[\left(A^{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right)+\rho(u, w)\right]dx=$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}(\varphi, w)\,dS+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left[\left(f^i, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)-(f^0, w)\right]dx \tag{5.12}$$

для любой $w\in H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Билинейная форма от u, w, стоящая в левой части этого равенства (обозначим ее через $a(u, w)$), удовлетворяет условиям теоремы 1.3 при $H=H^1(\Omega^\varepsilon)$ с постоянными C, C_1, не зависящими от ε. Это следует из неравенства Корна (4.26). Поэтому существование, единственность и оценка решений задачи (5.10) доказываются, исходя из (5.12), точно так же, как теоремы 3.5, 3.8. Таким образом, справедлива

Теорема 5.4. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* II, *матрицы $A^{hk}(x)$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и выполнены условия* (5.11), *причем постоянные c_0, c_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ не зависят от ε. Тогда существует единственное решение $u(x)$ задачи* (5.10), *такое, что*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}\right), \tag{5.13}$$

где постоянная C не зависит от ε.

§ 6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При изучении задач усреднения для системы теории упругости будем использовать теоремы существования решений некоторых специальных краевых задач для таких систем.

6.1. Решения системы теории упругости, периодические по всем переменным

Пусть ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условию В (см. § 4 гл. I).

Рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)=F^0(x)+\frac{\partial F^m}{\partial x_m} \text{ в } \omega,\\ &\sigma(w)=\nu_m F^m \text{ на } \partial\omega,\\ &w \text{ 1-периодична по } x, \int\limits_{Q\cap\omega} w\,dx=0, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где вектор-функции $F^j(x)$ являются 1-периодическими по x, $F^j\in L^2(\omega\cap Q)$, $j=0,\dots,n$, элементы матриц A^{hk} — 1-периодические по x функции, матрицы A^{hk} принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.

Обобщенным решением задачи (6 1) называем вектор-функцию $w\in \widehat{W}_2^1(\omega)$, такую, что $\int\limits_{\omega\cap Q} w\,dx=0$ и при любой $v\in\widehat{W}_2^1(\omega)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\omega\cap Q}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int\limits_{\omega\cap Q}\left[\left(F^m, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right)-(F^0, v)\right]dx. \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $\int\limits_{\omega\cap Q} F^0 dx=0$. *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (6.1) *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|w\|_{H^1(\omega\cap Q)}\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{n}\|F^j\|_{L^2(\omega\cap Q)}\right), \tag{6.3}$$

где постоянная C зависит только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ω.

Доказательство этой теоремы проводится при помощи теоремы 1.3 аналогично доказательству теоремы 3.5. При этом за пространство H следует взять множество вектор-функций v из $\widehat{W}_2^1(\omega)$, таких, что $\int\limits_{\omega\cap Q} v\,dx=0$. Неравенство Корна в этом случае дается теоремой 2.8.

В дальнейшем нам потребуется теорема о кусочной гладкости решений задачи (6.1) при условии, что коэффициенты системы и вектор-функции F^j, $j=0,\ldots,n$, являются кусочно-гладкими, и разрывы могут лежать лишь на поверхностях, не пересекающихся с $\partial\omega$.

Будем предполагать, что существуют взаимно непересекающиеся открытые подмножества ω с 1-периодической структурой $G_0, G_1,\ldots,G_m$, такие, что $G_j\cap\partial\omega=\varnothing$, $j=1,\ldots,n$, $G_0=\omega\setminus(\overline{G}_1\cup\ldots\cup\overline{G}_m)$, причем $G_1,\ldots,G_m$ имеют гладкую границу.

Скажем, что 1-периодическая по x функция φ принадлежит классу $\hat{C}$, т. е. является кусочно-гладкой в ω и гладкой в окрестности $\partial\omega$, если для каждого G_j, $j=0,\ldots,m$, функция φ имеет ограниченные в G_j производные любого порядка.

Теорема 6.2 *Пусть вектор-функция $w(x)\in \hat{W}_2^1(\omega)$ является обобщенным решением задачи* (6.1), *причем $A^{hk}(x)$, $F^j(x)$ принадлежат классу $\hat{C}$. Тогда w также принадлежит классу $\hat{C}$, т. е. является гладкой в окрестности $\partial\omega$ и кусочно-гладкой в $\overline{\omega}$.*

Доказательство. Гладкость w в окрестности точек $x\in\partial\omega$ вытекает из общих результатов о гладкости решений системы теории упругости вблизи границы (см. [99]).

Пусть $x^0\in\partial G_j$, $x^0\notin\partial\omega$. Рассмотрим множество $G_j\cap\{x:|x-x^0|<\delta\}=q_j^\delta(x^0)$. В [99, п. 13, ч. I] показано, что при достаточно малом δ вектор-функция w имеет ограниченные производные любого порядка в $q_j^\delta(x^0)$. Гладкость решения во внутренних точках ω, не принадлежащих ∂G_j, также доказана в [99]. Поэтому $w\in\hat{C}$.

6.2. Решения системы теории упругости, периодические по части переменных

Пусть матрицы коэффициентов $A^{hk}(x)$ оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и их элементы являются 1-периодическими по $\hat{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ функциями. В этом разделе ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, для которой выполнено условие B § 4, области $\omega(a, b)$ и $\hat{\omega}(a, b)$ заданы равенствами (1.6). Положим

$$\theta_t=\omega\cap\{x_n=t\}. \tag{6.4}$$

Пусть g_t — непустое открытое множество, лежащее на θ_t и инвариантное относительно сдвигов на векторы $z=(z_1,\ldots,z_{n-1}, 0)\in\mathbf{Z}^n$. Пусть

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_t&=\theta_t\cap\{x:0<x_j<1,\ j=1,\ldots,n-1\},\\ \hat{g}_t&=g_t\cap\{x:0<x_j<1,\ j=1,\ldots,n-1\}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}(w)=F^0(x)+\frac{\partial F^m}{\partial x_m} \text{ в } \omega(a,\ b);\\
&\sigma(w)=\nu_n F^n+\psi_a(\widehat{x}) \text{ на } g_a;\\
&\sigma(w)=\nu_n F^n+\psi_b(\widehat{x}) \text{ на } g_b;\\
&\sigma(w)=\nu_m F^m \text{ на } (\partial\omega(a,\ b))\diagdown(g_a\cup g_b);\\
&w \text{ 1-периодична по } \widehat{x},\quad \int\limits_{\widehat{\omega}(a,\,b)} w\,dx=0,
\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

где ψ_a, ψ_b, F^j — 1-периодические по $\widehat{x}$ вектор-функции,

$$F^j\in L^2(\widehat{\omega}(a,\ b))\ j=0,\ \ldots,\ n,\ \psi_a\in L^2(\widehat{g}_a),\ \psi_b\in L^2(\widehat{g}_b),$$

$0\leqslant a<b<\infty$, $\nu_n=-1$ на g_a, $\nu_n=1$ на g_b. Предполагается, что область $\widehat{\omega}(a,\ b)$ имеет липшицеву границу.

Вектор-функция $w\in\widehat{H}^1(\omega\ (a,\ b))$ называется обобщенным решением задачи (6.6), если для любой $v\in\widehat{H}^1(\omega(a,\ b))$ имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)}\left(\left(F^m,\ \frac{\partial v}{\partial x_m}\right)-(F^0,\ v)\right)dx+$$

$$+\int\limits_{\widehat{g}_a}(\psi_a,\ v)\,d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{g}_b}(\psi_b,\ v)\,d\widehat{x}. \tag{6.7}$$

Теорема 6.3. *Пусть*

$$\int\limits_{\widehat{g}_a}\psi_a d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{g}_b}\psi_b d\widehat{x}=\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)}F^0 dx. \tag{6.8}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение w задачи (6.6) и для этого решения выполнена оценка

$$\|w\|_{H^1(\widehat{\omega}(a,b))}\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{n}\|F^j\|_{L^2(\widehat{\omega}(a,b))}+\|\psi_a\|_{L^2(\widehat{g}_a)}+\|\psi_b\|_{L^2(\widehat{g}_b)}\right), \tag{6.9}$$

где постоянная C зависит только от ω, a, b, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.5. В этом случае за пространство H следует взять подпространство в $\widehat{H}^1(\omega(a,\ b))$, состоящее из вектор-функций v, таких, что $\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)} v\,dx=0$. Тогда второе неравенство Корна есть следствие теоремы 2.9. При оценке правой части (6.7) нужно воспользоваться неравенством

$$\|v\|_{L^2(\widehat{g}_a\cup\widehat{g}_b)}\leqslant C\|e(v)\|_{L^2(\widehat{\omega}(a,b))},\quad v\in H, \tag{6.10}$$

которое есть следствие утверждения 3 теоремы 1.2 и неравенства Корна (2.19).

Приведем также теорему об однозначной разрешимости для следующей смешанной краевой задачи:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathscr{L}(w)=F^0+\dfrac{\partial F^m}{\partial x_m} & \text{в} \quad \omega(a,\ b); \\ w=\Phi(\widehat{x}) & \text{на } \theta_a; \\ \sigma(w)=\nu_n F^n+\psi_b & \text{на } g_b; \\ \sigma(w)=\nu_m F^m & \text{на } \partial\omega(a,\ b)\diagdown(\theta_a\cup g_b); \\ w & 1\text{-периодична по } \widehat{x}, \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

где $\Phi(\widehat{x})$, $\psi_b(\widehat{x})$, $F^j(x)$, $j=0,\ \ldots,\ n$, 1-периодичны по $\widehat{x}$,

$$F^j\in L^2(\widehat{\omega}(a,\ b)),\quad \psi_b\in L^2(\widehat{g}_b),\quad \Phi\in H^{1/2}(\theta_a).$$

Вектор-функция $w\in\widehat{H}^1(\omega(a,\ b))$ называется обобщенным решением задачи (6.11), если $w=\Phi$ на θ_a и для любой $v\in\widehat{H}^1(\omega(a,\ b))\cap$ $\cap H^1(\widehat{\omega}(a,\ b),\ \theta_a)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{\widehat{\omega}(a,b)}\left[\left(F^m,\ \frac{\partial v}{\partial x_m}\right)-(F^0,\ v)\right]dx+\int\limits_{\widehat{g}_b}(\psi_b,\ v)\,d\widehat{x}. \tag{6.12}$$

Т е о р е м а 6.4. *Существует единственное обобщенное решение задачи* (6.11), *и для этого решения выполняется оценка*

$$\|w\|_{H^1(\widehat{\omega}(a,b))}\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{n}\|F^j\|_{L^2(\widehat{\omega}(a,b))}+\|\psi_b\|_{L^2(\widehat{g}_b)}+\|\Phi\|_{H^{1/2}(\widehat{\theta}_a)}\right), \tag{6.13}$$

где постоянная C *зависит от* ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, a, b.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой вектор-функции $v\in\widehat{H}^1(\omega(a,$ $b))\cap H^1(\widehat{\omega}(a,\ b),\ \theta_a)$ (т. е. $v=0$ на θ_a) выполняется неравенство Корна (2.14). Это вытекает из теоремы 2.7. Кроме того, как следует из утверждения 3 теоремы 1.2 и неравенства Корна,

$$\|v\|_{L^2(\widehat{g}_b)}\leqslant C\,\|e(v)\|_{L^2(\widehat{\omega}(a,b))}. \tag{6.14}$$

Учитывая неравенства (2.9), (6.14) и следуя схеме доказательства теоремы 3.8, устанавливаем разрешимость задачи (6.11) и оценку (6.13).

6.3. Задачи теории упругости в перфорированном слое с условиями периодичности

В этом разделе Ω^ε обозначает перфорированный слой:

$$\Omega^\varepsilon=\{x : 0<x_n<d\}\cap\varepsilon\omega,$$

где ω — область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условию В § 4, $d=\text{const}\geqslant 1$ — параметр, ε^{-1} — целое положительное число.

Положим

$$\widehat{\Omega}^\varepsilon=\Omega^\varepsilon\cap\{x : 0<x_j<1,\ j=1,\ \dots,\ n-1\},$$

$$\Gamma_t=\varepsilon\omega\cap\{x_n=t\},\quad \widehat{\Gamma}_t=\Gamma_t\cap\{x : 0<x_j<1,\ j=1,\ \dots,\ n-1\}.$$

В перфорированной области Ω^ε рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}(u)=f^0+\frac{\partial f^m}{\partial x_m}\ \text{ в } \Omega^\varepsilon;\\
&u(\hat{x},\ 0)=\Phi^1(\hat{x})\ \text{ на } \Gamma_0,\ u(\hat{x},\ d)=\Phi^2(\hat{x})\ \text{ на } \Gamma_d;\\
&\sigma(u)=\nu_m f^m\ \text{ на } (\partial\Omega^\varepsilon)\diagdown(\Gamma_0\cup\Gamma_d);\\
&u(x)\ \ \text{1-периодична по } \hat{x}.
\end{aligned}\right\}\tag{6.15}$$

Предполагается, что матрицы коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1,\ \varkappa_2)$ и их элементы являются 1-периодическими по $\hat{x}$ функциями, f^j, Φ^1, Φ^2 — 1-периодичны по $\hat{x}$,

$$f^j\in L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon),\ j=0,1,\dots,n,\quad \Phi^1\in H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0),\quad \Phi^2\in H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_d).$$

Вектор-функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (6.15), если $u\in\widehat{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, $u=\Phi^1$ на Γ_0, $u=\Phi^2$ на Γ_d и при любой $v\in\widehat{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, $v=0$ на $\Gamma_0\cup\Gamma_d$ (т. е. $v\in\widehat{H}^1(\Omega^\varepsilon)\cap H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon,\ \widehat{\Gamma}_0\cup\widehat{\Gamma}_d)$) выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}^\varepsilon}\left(A^{hk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial v}{\partial x_h}\right)dx=\int\limits_{\widehat{\Omega}^\varepsilon}\left[\left(f^m,\ \frac{\partial v}{\partial x_m}\right)-(f^0,\ v)\right]dx.$$

Теорема 6.5. *Существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи (6.15), и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{n}\|f^j\|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}+\|\Phi^1\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}+\|\Phi^2\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_d)}\right).\tag{6.16}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теорем 3.8 и 6.5. При этом нужно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 6.6. *Любая вектор-функция* $v \in \tilde{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, *такая, что* $v=0$ *на* $\Gamma_0 \cup \Gamma_d$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\| v \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)} \leqslant C_1 d \| e(v) \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}, \tag{6.17}$$

$$\| \nabla v \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)} \leqslant C_2 \| e(v) \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}, \tag{6.18}$$

где постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* ε, d, v.

Доказательство этой леммы проводится тем же методом, что и доказательство теорем 4 2, 4.3, и основано на продолжении вектор-функций, заданных в Ω^ε. Пусть $v \in \tilde{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, $v=0$ на $\Gamma_0 \cup \Gamma_d$. Продолжим v на область $\varepsilon\omega$ следующим образом:

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & x \in \varepsilon\omega, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant d; \\ 0, & x \in \varepsilon\omega, \quad x_n \geqslant d; \\ 0, & x \in \varepsilon\omega, \quad x_n \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть

$$B = \{x : -1 \leqslant x_n \leqslant d+1\}, \quad \widehat{B} = \{x : 0 < x_j < 1, \ j=1, \ldots, n-1, \\ -1 < x_n < d+1\}.$$

Точно так же, как в доказательстве теоремы 4.2, мы можем продолжить $\tilde{v}$ на все множество B до вектор-функции $\tilde{P}v$ из $\tilde{H}^1(B)$, $\tilde{P}v=0$ при $x_n=-1$, $x_n=d+1$ и такой, что

$$\left. \begin{aligned} &\| e(\tilde{P}v) \|_{L^2(\widehat{B})} \leqslant C_3 \| e(v) \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}; \\ &\| \nabla \tilde{P}v \|_{L^2(\widehat{B})} \leqslant C_4 \| \nabla v \|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}; \\ &\| \tilde{P}v \|_{H^1(\widehat{B})} \leqslant C_5 \| v \|_{H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}. \end{aligned} \right\} \tag{6.19}$$

Для области $\widehat{B}$ справедливо неравенство Фридрихса вида

$$\| \tilde{P}v \|_{L^2(\widehat{B})} \leqslant Cd \| \nabla \tilde{P}v \|_{L^2(\widehat{B})} \tag{6.20}$$

и неравенство Корна

$$\| \nabla \tilde{P}v \|^2_{L^2(\widehat{B})} \leqslant 2 \| e(\tilde{P}v) \|^2_{L^2(\widehat{B})}. \tag{6.21}$$

Из неравенств (6.19)—(6.21) вытекают оценки (6.17), (6.18). Неравенство (6.20) вытекает из представления

$$| w(\widehat{x}, x_n) |^2 = \int_{-1}^{x_n} \frac{\partial}{\partial \tau} | w(\widehat{x}, \tau) |^2 \, d\tau,$$

которое справедливо для любой $w \in C^\infty(\widehat{B})$, такой, что $w(\widehat{x}, -1) = 0$.

Неравенство (6.21) доказывается точно так же, как и неравенство (2.2) в теореме 2.1. Для этого нужно приблизить $\tilde{P}v$ последовательностью гладких вектор-функций w^m, 1-периодических по

$\hat{x}$ и равных нулю в окрестности гиперплоскостей $x_n=-1$, $x_n=d+1$, а затем воспользоваться формулой Гаусса—Остроградского в области $\hat{B}$, учитывая 1-периодичность по $\hat{x}$ вектор-функций w^m.

§ 7. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Принцип Сен-Венана был сформулирован в 1851 г. и нашел широкое применение при исследовании различных задач механики и при решении практических задач Математической формулировке и обоснованию принципа Сен-Венана посвящено большое число работ [154; 121; 143; 157 и др.]

Мы используем асимптотические свойства решений системы теории упругости, которые тесно связаны с этим принципом, для построения пограничных слоев при получении асимптотических разложений решений краевых задач для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами.

7.1. Обобщенные моменты и их свойства

В этом разделе ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условию В § 4.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
\omega(a,\ b)=\omega\cap\{x: a<x_n<b\};\\
\widehat{\omega}(a,\ b)=\omega\cap\{x: 0<x_j<1,\ j=1,\ \ldots,\ n-1;\ a<x_n<b\};\\
\Gamma_t=\omega\cap\{x: x_n=t\};\\
\widehat{\Gamma}_t=\widehat{\omega}(-\infty,\ \infty)\cap\{x: x_n=t\};\\
S(a,\ b)=(\partial\omega)\cap\{x: a<x_n<b\};\\
\widehat{S}(a,\ b)=S(a,\ b)\cap\{x: 0<x_j<1,\ j=1,\ \ldots,\ n-1\}.
\end{gathered}\tag{7.1}$$

Предполагается, что матрицы коэффициентов $A^{hk}(x)$ оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и являются 1-периодическими по $\hat{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2=\text{const}>0$.

Вектор-функция $u(x)$ называется 1-периодическим по $\hat{x}$ решением системы

$$\mathscr{L}(u)=f^0+\frac{\partial f^m}{\partial x_m} \text{ в } \omega(t_1,\ t_2)\ (0\leqslant t_1<t_2<\infty),\tag{7.2}$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$\sigma(u)=\nu_i f^i \quad \text{на } S(t_1,\ t_2),\tag{7.3}$$

если $u \in \widehat{H}^1(\omega(t_1, t_2))$ и для любой $v \in \widehat{H}^1(\omega(t_1, t_2))$, $v=0$ на $\Gamma_{t_1} \cup \Gamma_{t_2}$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(t_1,t_2)} \left(A^{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h}\right) dx = \int\limits_{\widehat{\omega}(t_1,t_2)} \left[\left(f^m, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right) - (f^0, v)\right] dx. \quad (7.4)$$

Вектор-функция $u(x)$ называется обобщенным 1-периодическим по $\hat{x}$ решением системы (7.2) в $\omega(0, \infty)$ с граничными условиями (7.3) на $S(0, \infty)$, если $u(x)$ является обобщенным 1-периодическим по $\hat{x}$ решением системы (7.2) с условиями (7.3) при любых t_1, t_2, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$.

Предполагается, что $f^j \in L^2(\widehat{\omega}(t_1, t_2))$, $j=0, \ldots, n$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$, и вектор-функции f^j являются 1-периодическими по $\hat{x}$. Если $t_2 = \infty$, то f^j могут не принадлежать пространству $L^2(\widehat{\omega}(t_1, \infty))$.

Для обобщенного 1-периодического по $\hat{x}$ решения системы (7.2) в $\omega(t_1, t_2)$ с граничными условиями (7.3) на $S(t_1, t_2)$ рассмотрим векторы $P(t, u)$, которые назовем обобщенными моментами. Они определяются с помощью формул

$$\begin{gathered} P(t, u) = \lim_{s \to +0} s^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t,t+s)} A^{nk} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx, \quad t \in [t_1, t_2), \\ P(t_2, u) = \lim_{s \to +0} s^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t_2-s, t_2)} A^{nk} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \end{gathered} \quad (7.5)$$

Существование $P(t, u)$ вытекает из леммы 7.1.

Лемма 7.1. *Пусть вектор-функция f^n такова, что*

$$\lim_{h \to +0} h^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t-h,t)} f^n \, dx = \lim_{h \to +0} h^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t,t+h)} f^n \, dx = \int\limits_{\widehat{\Gamma}_t} f^n \, d\hat{x} \quad (7.6)$$

и $u(x)$ — обобщенное 1-периодическое по $\hat{x}$ решение системы (7.2) в $\omega(t_1, t_2)$, удовлетворяющее граничным условиям (7.3) на $S(t_1, t_2)$. Тогда для обобщенных моментов $P(t, u)$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{gathered} P(t, u) = \lim_{s \to +0} s^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t,t+s)} A^{nk} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \\ = \lim_{s \to +0} s^{-1} \int\limits_{\widehat{\omega}(t-s,t)} A^{nk} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx, \quad t \in (t_1, t_2), \end{gathered} \quad (7.7)$$

$$\begin{gathered} P(t'', u) - P(t', u) = \int\limits_{\widehat{\omega}(t',t'')} f^0 \, dx - \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{t'}} f^n \, d\hat{x} + \\ + \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{t''}} f^n \, d\hat{x}, \quad t_1 < t' < t'' \leqslant t_2. \end{gathered} \quad (7.8)$$

Доказательство. В случае, когда коэффициенты системы (7.2), вектор-функции f^j, $j=0, \ldots, n$, и $u(x)$ достаточно гладкие, формулы (7.7) очевидны, а формулы (7.8) проверяются интегрированием по частям. Когда же мы рассматриваем обобщенные решения $u(x)$, нужно воспользоваться интегральным тождеством (7.4).

Пусть $e^1, \ldots, e^n$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n$ Возьмем в интегральном тождестве (7.4) $v=\theta(x_n)e^r$, где θ — непрерывная функция, $\theta(t)=1$, $\theta(x_n)=0$ при $t_1<x_n<t-h_1$ и при $t+h_2<x_n<t_2$, $\theta(x_n)$ линейна на отрезках $[t-h_1, t]$, $[t, t+h_2]$, где h_1, h_2 — достаточно малые положительные постоянные. Из (7.4) имеем при $r=1, \ldots, n$

$$-h_1^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t-h_1,t)}\left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, e^r\right)dx+h_2^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t,t+h_2)}\left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, e^r\right)dx=$$
$$=\int\limits_{\widehat{\omega}(t-h_1,t+h_2)}(f^0, v)\,dx-h_1^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t-h_1,t)}(f^n, e^r)\,dx+h_2^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t,t+h_2)}(f^n, e^r)\,dx. \qquad (7.9)$$

Отсюда следует, что первый интеграл в левой части этого равенства имеет предел при $h_1\to+0$ и второй интеграл имеет предел при $h_2\to+0$ Устремляя в (7.9) сначала h_1 к 0, а затем h_2 к 0, получим равенство (7 7).

Докажем теперь равенство (7 8). Положим в интегральном тождестве (7.4) $v=\theta_1(x_n)e^r$, где θ_1 — непрерывная функция, такая, что $\theta_1(t')=\theta_1(t'')=0$, $\theta\equiv1$ на $(t'+h, t''-h)$, $\theta(x_n)$ линейна на $[t', t'+h]$ и на $[t''-h, t'']$, $h>0$ и достаточно мало. Из (7.4) получаем

$$-h^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t',t'+h)}\left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, e^r\right)dx+h^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t''-h,t'')}\left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, e^r\right)dx=$$
$$=\int\limits_{\widehat{\omega}(t',t'')}(f^0, v)\,dx-h^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t',t'+h)}(f^n, e^r)\,dx+$$
$$+h^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(t''-h,t'')}(f^n, e^r)\,dx, \quad r=1, \ldots, n.$$

Отсюда и из условий (7.6) вытекает (7.8). Лемма доказана.

Если вектор-функции f^j, u и элементы матриц A^{nk} достаточно гладкие, то легко видеть, что

$$P(t, u)=\int\limits_{\widehat{\Gamma}_t}A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\widehat{dx}.$$

Всюду далее в этом и следующем параграфах предполагаем, что для системы вида (7.2) справедливы условия (7.6) при $t\in(t_1, t_2)$.

7.2. Принцип Сен-Венана для однородных задач

В механике сплошных сред основной интерес представляет принцип Сен-Венана в том случае, когда на границе цилиндрической области задано граничное условие $\sigma(u)=0$. Этот случай подробно изучен в [143]. Для приложений в теории усреднения необходимо рассмотреть случай задач с периодическими граничными условиями.

Теорема 7.2 (принцип Сен-Венана). *Пусть s, h — целые числа, такие, что $s>h>0$, и пусть $u(x)$ — обобщенное 1-периодическое по $\hat{x}$ решение системы*

$$\mathcal{L}(u)=0 \quad \text{в } \omega(s-h,\ s+1+h), \tag{7.10}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma(u)=0 \quad \text{на } S(s-h,\ s+1+h). \tag{7.11}$$

Предположим, что $P(s+1,\ u)=0$. Тогда

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} |\mathcal{E}(u)|^2\,dx \leqslant e^{-Ah} \int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+1+h)} |\mathcal{E}(u)|^2\,dx, \tag{7.12}$$

где A — положительная постоянная, не зависящая от u, s, h, A зависит только от $\widehat{\omega}(0,\ 1)$ и коэффициентов системы (7.10),

$$|\mathcal{E}(u)|^2=a_{ij}^{hk}\frac{\partial u_i}{\partial x_h}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Доказательство. Положим $g=\widehat{\omega}(s-h,\ s+1+h)$, $g^1=\widehat{\omega}(s-h, s)$, $g^2=\widehat{\omega}(s+1,\ s+1+h)$. Пусть $\{u^m\}$ — последовательность вектор-функций из $C^\infty(\overline{\omega(0,\ \infty)})$, 1-периодических по $\widehat{x}$ и таких, что $u^m \to u$ в $H_1(g)$ при $m\to\infty$. Определим скалярную функцию $\Phi(x_n)$, полагая $\Phi(x_n)=\exp[A(x_n-(s-h))]$ при $x\in[s-h,\ s]$, $\Phi(x_n)=\exp(Ah)$ при $x_n\in[s,\ s+1]$, $\Phi(x_n)=\exp[A(s+1+h-x_n)]$ при $x_n\in[s+1,\ s+1+h]$, где A — положительная постоянная, которая будет выбрана ниже. Полагая $v=(\Phi-1)u^m$ в интегральном тождестве для $u(x)$ в g, получим

$$\int\limits_g\left(A^{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k},\ (\Phi-1)\frac{\partial u^m}{\partial x_h}\right)dx=-\int\limits_g\left(A^{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_h}u^m\right)dx=$$

$$=-\int\limits_{g^1\cup g^2}\left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}u^m\right)dx. \tag{7.13}$$

Легко видеть, что $\overline{g}^1=\bigcup\limits_{t=0}^{h-1}\overline{\omega}_t^1$, где $\omega_t^1=\widehat{\omega}(s-h+t,\ s-h+t+1)$, $\overline{g}^2=\bigcup\limits_{t=0}^{h-1}\overline{\omega}_t^2$, где $\omega_t^2=\widehat{\omega}(s+1+t,\ s+1+t+1)$.

Фиксируем t и выберем постоянный вектор C таким, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\omega_t^1} (u^m+C)\,dx=0.$$

Тогда согласно неравенству Пуанкаре (см. теорему 1.2) при $\Omega=\omega_t^1$, второму неравенству Корна (2.19) и неравенству (3.13) имеем

$$\| u^m+C \|_{L^2(\omega_t^1)} \leqslant M_0 \| \mathscr{E}(u^m) \|_{L^2(\omega_t^1)}, \tag{7.14}$$

где M_0 — постоянная, не зависящая от t и m.

Принимая во внимание (7.14) и тот факт, что $P(x_n, u)=0$ при $x_n \in (s-h, s)$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right| = A\Phi$ при $x_n \in (s-h, s)$, $\exp(At) \leqslant \Phi(x_n) \leqslant$ $\leqslant \exp[A(t+1)]$ при $x \in \omega_t^1$, получаем

$$\left| \int_{\omega_t^1} \left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} u^m \right) dx \right| = \left| \int_{\omega_t^1} \left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u^m+C) \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 M_0 A e^{A(t+1)} \left(\int_{\omega_t^1} |\mathscr{E}(u)|^2\,dx \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_t^1} |\mathscr{E}(u^m)|^2\,dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 M_0 A e^{A} \int_{\omega_t^1} |\mathscr{E}(u)|^2 \Phi\,dx + \varepsilon_m, \tag{7.15}$$

где постоянная C_2 не зависит от s, t, h, ;$\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из (7.15) заключаем, что

$$\left| \int_{g^1} \left(A^{nk}\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} u^m \right) dx \right| \leqslant C M_0 A e^{A} \int_{g^1} |\mathscr{E}(u)|^2 \Phi\,dx + h\varepsilon_m. \tag{7.16}$$

Аналогичное неравенство имеет место для g^2 и доказывается в точности так же, как и (7.16) Устремляя m к ∞, из (7 16) и (7.13) находим, что

$$\int_{g} |\mathscr{E}(u)|^2 (\Phi-1)\,dx \leqslant C M_0 A e^{A} \int_{g^1 \cup g^2} |\mathscr{E}(u)|^2 \Phi\,dx.$$

Отсюда вытекает оценка (7.12), если постоянная A выбрана такой, что $CM_0Ae^A=1$. Теорема доказана.

Еще один вариант принципа Сен-Венана устанавливает

Теорема 7.3. *Пусть $w(x)$ — обобщенное 1-периодическое по $\hat{x}$ решение системы*

$$\mathscr{L}(w)=0 \quad \text{в } \omega(0, k+N),$$

где $k>0$, $N>0$ — целые числа, причем

$$w=0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad \sigma(w)=0 \quad \text{на } S(0,\ k+N).$$

Предположим, что $P(t, w)=0$ при $t\in(0, k+N)$. Тогда

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,k)} |\mathscr{E}(w)|^2\,dx \leqslant e^{-AN} \int\limits_{\widehat{\omega}(0,k+N)} |\mathscr{E}(w)|^2\,dx, \tag{7.17}$$

где A — та же постоянная, что и в теореме 7.2.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7.2.

7.3. Принцип Сен-Венана для неоднородных задач

Рассмотрим $(n-1)$-мерные открытые множества $g_j\subset\Gamma_j$, $j=0, 1, 2, \ldots$, такие, что $g_j\neq\varnothing$, $g_j=g_0+(0,\ldots,0,\ j)$, $g_j+z=g_j$ для всех $z\in\mathbf{Z}^n$ вида $z=(z_1,\ldots,z_{n-1},\ 0)$. Наличие таких множеств g_j обеспечивается условием B § 4 на ω. Положим $\hat{g}_j=g_j\cap\widehat{\Gamma}_j$, $j=0, 1, 2, \ldots$.

Докажем сначала несколько вспомогательных результатов.

Лемма 7.4. *Пусть $\varphi\in L^2(\hat{g}_0)$, $\psi\in L^2(\hat{g}_N)$ и при некотором* целом $N>0$

$$\int\limits_{\widehat{g}_0} \varphi\,d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi\,d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} f^0\,dx. \tag{7.18}$$

Тогда существует 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение $U(x)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(U)=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \omega(0,\ N),\\ &\sigma(U)=\varphi+\nu_i f^i \ \text{на } g_0, \quad \sigma(U)=\psi+\nu_i f^i \ \text{на } g_N,\\ &\sigma(U)=\nu_i f^i \ \text{на } (\partial\omega(0,\ N))\diagdown(g_0\cup g_N), \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

где $\nu=(\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\omega(0,\ N)$, и для этого решения справедлива оценка

$$\|e(U)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))} \leqslant C\left[\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}+\sum_{m=0}^{N}\|\psi_m\|^2_{L^2(\widehat{g}_m)}\right], \tag{7.20}$$

где постоянная C не зависит от N и

$$\psi_m=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\Bigl(\int\limits_{\widehat{\omega}(m,N)} f^0\,dx-\int\limits_{\widehat{g}_N}\psi\,d\widehat{x}\Bigr), \quad m=1,\ \ldots\ N-1, \tag{7.21}$$

$$\psi_0=\varphi, \quad \psi_N=-\psi.$$

Доказательство. Существование решения задачи (7.19) есть непосредственное следствие теоремы 6.3, поскольку имеет место равенство (6.8) при $a=0$, $b=N$ в силу (7.18).

Установим оценку (7.20). Полагая в интегральном тождестве (6.7) $w=v=U$, получим

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |\mathcal{E}(U)|^2\,dx = \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} \left[\left(f^i, \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) - (f^0, U)\right] dx + \\ + \int\limits_{\widehat{g}_0} (\varphi, U)\,d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} (\psi, U)\,d\widehat{x}. \qquad (7.22)$$

Обозначим через V^m, $m=1,\ldots,N$, обобщенные 1-периодические по $\hat{x}$ решения краевых задач:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{L}(V^m) = f^0 + \dfrac{\partial f^i}{\partial x_i} & \text{в } \omega(m-1, m), \\ \sigma(V^m) = -\psi_m + \nu_i f^i & \text{на } g_m, \\ \sigma(V^m) = \psi_{m-1} + \nu_i f^i & \text{на } g_{m-1}, \\ \sigma(V^m) = \nu_i f^i & \text{на } \partial\omega(m-1, m)\diagdown(g_m \cup g_{m-1}), \\ & m=1, \ldots, N, \end{array}\right\} \qquad (7.23)$$

где $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N$ — вектор-функции, определенные равенствами (7.21), $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\omega(m-1, m)$. Проверим для задачи (7.23) выполнение условий разрешимости.

При $m=1$, пользуясь условиями (7.18) и формулами (7.21), находим

$$\int\limits_{\widehat{g}_0} \psi_0 d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{g}_1} \psi_1 d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{g}_0} \varphi d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{\omega}(1,N)} f^0 dx + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} =$$

$$= \int\limits_{\widehat{g}_0} \varphi d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} f^0 dx + \int\limits_{\widehat{\omega}(0,1)} f^0 dx =$$

$$= \int\limits_{\widehat{g}_0} \varphi d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{g}_0} \varphi d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{\omega}(0,1)} f^0 dx = \int\limits_{\widehat{\omega}(0,1)} f^0 dx.$$

При $m=N$ из (7.21) имеем

$$\int\limits_{\widehat{g}_{N-1}} \psi_{N-1} d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(N-1,N)} f^0 dx - \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(N-1,N)} f^0 dx.$$

Если $m=2, \ldots, N-1$, то из (7.21) получаем

$$\int\limits_{\widehat{g}_{m-1}} \psi_{m-1} d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{g}_m} \psi_m d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,N)} f^0 dx - \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} - \int\limits_{\widehat{\omega}(m,N)} f^0 dx + \\ + \int\limits_{\widehat{g}_N} \psi d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} f^0 dx.$$

Таким образом, условия разрешимости для задачи (7.23) выполнены и, следовательно, по теореме 6.3 V^m существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\|e(V^m)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(m-1,m))} \leqslant C\Big[\sum_{i=0}^{n} \|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(m-1,m))} + \\ + \|\psi_{m-1}\|^2_{L^2(\widehat{g}_{m-1})} + \|\psi_m\|^2_{L^2(\widehat{g}_m)}\Big], \tag{7.24}$$

где постоянная C не зависит от m, N.

Из интегрального тождества для V^m имеем

$$-\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left(A^{hk}\frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial x_h}\right) dx = \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left[(f^0, U) - \left(f^i, \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\right] dx + \\ + \int\limits_{\widehat{g}_m} (\psi_m, U)\, \widehat{dx} - \int\limits_{\widehat{g}_{m-1}} (\psi_{m-1}, U)\, \widehat{dx}. \tag{7.25}$$

Суммируя эти равенства по m от 1 до N, находим

$$-\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left(A^{hk}\frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial x_h}\right) dx = \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} \left[(f^0, U) - \left(f^i, \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\right] dx - \\ - \int\limits_{\widehat{g}_0} (\varphi, U)\, \widehat{dx} - \int\limits_{\widehat{g}_N} (\psi, U)\, \widehat{dx}.$$

Сравнивая это равенство с (7.22), заключаем, что

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |\mathscr{E}(U)|^2\, dx = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left(A^{hk}\frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial x_h}\right) dx \leqslant \\ \leqslant \sum_{m=1}^{N} \Bigg(\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} |\mathscr{E}(V^m)|^2\, dx\Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} |\mathscr{E}(U)|^2\, dx\Bigg)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \Bigg(\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |\mathscr{E}(U)|^2\, dx\Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} |\mathscr{E}(V^m)|^2\, dx\Bigg)^{1/2}.$$

Отсюда и из неравенств (7.24) вытекает оценка (7.20). Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 7.5. *Пусть $U(x)$ — 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{L}(U)=f^0+\dfrac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \omega(0, N), \\ U=\Phi \quad \text{на } \Gamma_0, \quad \sigma(U)=\psi+\nu_i f^i \quad \text{на } g_N, \\ \sigma(U)=\nu_i f^i \quad \text{на } (\partial\omega(0, N))\diagdown(\Gamma_0 \cup g_N). \end{array}\right\} \tag{7.26}$$

Тогда для $U(x)$ справедлива оценка

$$\|e(U)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))} \leqslant C\left[\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}+\sum_{m=0}^{N}\|\psi_m\|^2_{L^2(\widehat{g}_m)}+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\right], \tag{7.27}$$

где постоянная C не зависит от N и

$$\begin{array}{l} \psi_m=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0^{-1})\left(\displaystyle\int\limits_{\widehat{\omega}(m,N)} f^0 dx-\int\limits_{\widehat{g}_N}\psi d\widehat{x}\right), \quad m=0, 1, \ldots, N-1, \\ \psi_N=-\psi. \end{array} \tag{7.28}$$

Доказательство. Пусть $w \in \widehat{H}^1(\omega(0, N))$, $w=\Phi$ на Γ_0, $w=0$ в $\omega\left(\frac{1}{2}, N\right)$. Из интегрального тождества для U вытекает равенство

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |\mathscr{E}(U-w)|^2 dx=\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)}\left[\left(f^i, \frac{\partial(U-w)}{\partial x_i}\right)-(f^0, U-w)\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\widehat{g}_N}(\psi, U-w)\,d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)}\left(A^{hk}\frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial(U-w)}{\partial x_h}\right)dx. \tag{7.29}$$

Обозначим через V^m обобщенное 1-периодическое по $\hat{x}$ решение задачи (7.23), где ψ_m заданы равенствами (7.28). Разрешимость этих задач проверяется точно так же, как и разрешимость соответствующих задач в лемме 7.4. Для V^m справедливы оценки (7.24), причем $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N$ определены формулами (7.28). Из интегрального тождества для V^m следует, что

$$-\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)}\left(A^{hk}\frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial(U-w)}{\partial x_h}\right)dx=$$
$$=\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)}\left[(f^0, U-w)-\left(f^i, \frac{\partial(U-w)}{\partial x_i}\right)\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\widehat{g}_m}(\psi_m, U-w)\,d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{g}_{m-1}}(\psi_{m-1}, U-w)\,d\widehat{x}.$$

Суммируя эти равенства по m от 1 до N и учитывая, что $U-w=0$ на g_0, получим

$$\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left(A^{hk} \frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial (U-w)}{\partial x_h}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} \left[\left(f^i, \frac{\partial (U-w)}{\partial x_i}\right) - (f^0, U-w)\right] dx + \int\limits_{\widehat{g}_N} (\psi, U-w)\, \widehat{dx}.$$

Из этого равенства и (7.29) заключаем, что

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |\mathscr{E}(U-w)|^2 dx = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} \left(A^{hk} \frac{\partial V^m}{\partial x_k}, \frac{\partial (U-w)}{\partial x_h}\right) dx -$$

$$- \int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} \left(A^{hk} \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial (U-w)}{\partial x_h}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N} \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} |\mathscr{E}(V^m)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(m-1,m)} |\mathscr{E}(U-w)|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(0,1/2)} |\mathscr{E}(w)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(0,1/2)} |\mathscr{E}(U-w)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Из этого неравенства и (7.24) вытекает оценка (7.27). Лемма доказана.

Лемма 7.6. *Пусть $u \in \hat{H}^1(\omega(0, N))$, $u=0$ на Γ_0. Тогда*

$$\|u\|_{L^2(\widehat{g}_N)} + \|u\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))} \leqslant M_0 N \|e(u)\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}, \tag{7.30}$$

где постоянная M_0 не зависит от N и u.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию w, которая является 1-периодическим по $\hat{x}$ обобщенным решением задачи

$$\mathscr{L}(w) = u \text{ в } \omega(0, N),$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(w) = -u \text{ на } g_N, \\ \sigma(w) = 0 \text{ на } \partial\omega(0, N) \setminus (\Gamma_0 \cup g_N), \quad w = 0 \text{ на } \Gamma_0. \end{array}\right\} \tag{7.31}$$

По лемме 7.5 для w справедлива оценка

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |e(w)|^2 dx \leqslant C\Big[\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |u|^2 dx + \sum_{m=0}^{N} \Big(\int\limits_{\widehat{\omega}(m,N)} u dx + \int\limits_{\widehat{g}_N} u \widehat{dx}\Big)^2\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big[\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |u|^2 dx + N\Big(\Big(\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |u|\, dx\Big)^2 + \int\limits_{\widehat{g}_N} |u|^2 \widehat{dx}\Big)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_2 N^2 \Big[\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |u|^2 dx + \int\limits_{\widehat{g}_N} |u|^2 dx\Big]. \tag{7.32}$$

Полагая $v=u$ в интегральном тождестве для w, получим

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} |u|^2\,dx+\int\limits_{\widehat{g}_N} |u|^2\,d\widehat{x}=-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} \left(A^{hk}\frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{\partial u}{\partial x_h}\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant \|\mathscr{E}(w)\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}\,\|\mathscr{E}(u)\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}.$$

Из этого неравенства, учитывая (7.32), получим оценку (7.30). Лемма доказана

Для приложений важно иметь обобщение теоремы 7 2 в случае неоднородных краевых условий и ненулевых обобщенных моментов. Для решений неоднородной системы теории упругости имеет место

Теорема 7.7 (обобщенный принцип Сен-Венана). *Пусть $u(x)$ является обобщенным 1-периодическим по $\hat{x}$ решением системы*

$$\mathscr{L}(u)=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\ \text{в}\ \omega(t_1,t_2) \tag{7.33}$$

с граничными условиями

$$\sigma(u)=\nu_i f^i\ \text{на}\ S(t_1,t_2), \tag{7.34}$$

где $t_2>t_1+2$, t_1, t_2 — целые положительные числа, причем для любого $t\in(t_1,t_2)$ выполнены условия (7.6).

Тогда для любых целых s, $h>0$, таких, что $s-h>t_1$, $s+1+h<$ $<t_2$, справедлива оценка

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} |e(u)|^2\,dx\leqslant C\Bigg[e^{-Ah}\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+1+h)} |e(u)|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+1+h)} (|f^0|^2+(f^i,f^i))\,dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{2h+1}\Bigg|P(s-h,u)+\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s-h+m)} f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}} f^n d\widehat{x}\Bigg|^2\Bigg], \tag{7.35}$$

где постоянная C не зависит от s, h; A — постоянная из теоремы 7.2.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $U(x)$, которая является 1-периодическим по $\hat{x}$ обобщенным решением задачи

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}(U)=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\ \text{в}\ \omega(s-h,\ s+h+1),\\ &\sigma(U)=\varphi+\nu_i f^i\ \text{на}\ g_{s-h},\ \sigma(U)=\psi+\nu_i f^i\ \text{на}\ g_{s+h+1},\\ &\sigma(U)=\nu_i f^i\ \text{на}\ \partial\omega(s-h,\ s+h+1)\diagdown(g_{s-h}\cup g_{s+h+1}),\end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

где φ, ψ — постоянные векторы, выбранные такими, чтобы выполнялись равенства

$$P(s-h,\ u)=P(s-h,\ U),\ \ P(s+h+1,\ u)=P(s+h+1,\ U). \quad (7.37)$$

Имеем

$$P(s+h+1,\ U)=\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}}\sigma(U)\,d\widehat{x}=\int\limits_{\widehat{g}_{s+h+1}}\psi d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}}f^n d\widehat{x},$$

$$P(s-h,\ U)=-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}}\sigma(U)\,d\widehat{x}=-\int\limits_{\widehat{g}_{s-h}}\varphi d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}}f^n d\widehat{x}.$$

Из соотношений (7.37) определяем ψ и φ:

$$\begin{gathered}\psi=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\Big[P(s+h+1,u)-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}}f^n d\widehat{x}\Big],\\ \varphi=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\Big[-P\ (s-h,\ u)+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}}f^n d\widehat{x}\Big].\end{gathered} \quad (7.38)$$

Покажем, что для φ и ψ выполнены условия разрешимости задачи (7.36). Действительно, пользуясь равенствами (7.8), получаем

$$\int\limits_{\widehat{}_{s+h+1}}\psi d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{g}_{s-h}}\varphi d\widehat{x}=P(s+h+1,\ u)-P(s-h,\ u)-$$

$$-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}}f^n d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}}f^n d\widehat{x}=\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+h+1)}f^0 dx.$$

Следовательно, по лемме 7.4 решение задачи (7.36) существует и для него справедлива оценка

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+h+1)}|e(U)|^2\,dx\leqslant C\Big[\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+h+1)}(|f^0|^2+(f^i,\ f^i))\,dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{2h+1}\int\limits_{\widehat{g}_{s-h+m}}|\psi_m|^2\,d\widehat{x}\Big], \quad (7.39)$$

где

$$\psi_m=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\Big(\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h+m,s+h+1)}f^0 dx-\int\limits_{\widehat{g}_{s+h+1}}\psi d\widehat{x}\Big),\ m=0,\ \dots,2h+1.$$

Поскольку

$$P(s+h+1,\ u)=P(s-h,\ u)+\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h,s+h+1)}f^0 dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}}f^n d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}}f^n d\widehat{x},$$

то из (7.37) следует, что

$$\psi_m = (\operatorname{mes} \widehat{g}_0)^{-1} \Big(\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h+m, s+h+1)} f^0 dx - P(s-h, u) -$$

$$- \int\limits_{\widehat{\omega}(s-h, s+h+1)} f^0 dx - \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}} f^n d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}} f^n d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s+h+1}} f^n d\widehat{x} \Big).$$

Таким образом,

$$\psi_m = -(\operatorname{mes} \widehat{g}_0)^{-1} \Big(\int\limits_{\widehat{\omega}(s-h, s-h+m)} f^0 dx + P(s-h, u) - \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{s-h}} f^n d\widehat{x} \Big). \quad (7.40)$$

Легко видеть, что вектор-функция $u-U$ является обобщенным 1-периодическим по $\hat{x}$ решением системы (7.10) с граничными условиями (7.11), причем $P(u-U, s-h) = 0$. Согласно теореме 7.2

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s, s+1)} |\mathscr{E}(u-U)|^2 dx \leqslant e^{-Ah} \int\limits_{\widehat{\omega}(s-h, s+1+h)} |\mathscr{E}(u-U)|^2 dx.$$

Отсюда и из (3.13) следует, что

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s, s+1)} |e(u)|^2 dx \leqslant C \Big[e^{-Ah} \int\limits_{\widehat{\omega}(s-h, s+1+h)} |e(u)|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{\widehat{\omega}(s-h, s+1+h)} |e(U)|^2 dx \Big].$$

Из этой оценки, учитывая (7.39) и (7.40), устанавливаем оценку (7.35). Теорема доказана.

§ 8. ОЦЕНКИ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом параграфе мы будем использовать те же обозначения, что и в § 7.

8.1. Теоремы типа Фрагмена—Линделефа

Классическая теорема Фрагмена—Линделефа для уравнения Лапласа обобщалась для эллиптических уравнений и систем в различных направлениях (см обзор в [50]).

Следующая теорема представляет собой вариант теоремы типа Фрагмена—Линделефа и является следствием обобщенного принципа Сен-Венана (теорема 7 7).

Теорема 8.1. *Предположим, что*

$$\|f^n\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_s)}+\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant C_1\exp(-a_1 s),\quad s=0,\,1,\,2,\ldots,\tag{8.1}$$

где C_1, a_1 — *положительные постоянные. Пусть* $u(x)$ — *обобщенное* 1-*периодическое по* $\hat{x}$ *решение системы*

$$\mathscr{L}(u)=f^0+\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\ \text{в}\ \omega(0,\infty),\tag{8.2}$$

$$\sigma(u)=\nu_i f^i\ \text{на}\ S(0,\infty),$$

такое, что

$$P(0,u)=-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,\infty)}f^0dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\hat{x},\tag{8.3}$$

$$\|e(u)\|_{L^2\left(\widehat{\omega}\left(0,\frac{3s+1}{2}\right)\right)}\leqslant C\exp\left(\frac{(A-\delta_0)s}{2}\right),\quad s=1,\,2,\ldots,\tag{8.4}$$

где $C=\mathrm{const}$ *не зависит от* s, $\delta_0=\mathrm{const}$, $0<\delta_0\leqslant A$, A — *постоянная из теоремы* 7.2. *Тогда существуют не зависящие от* s *положительные постоянные* C_2, C_3, a_2, a_3 *и постоянный вектор* w_∞, *такие, что справедливы оценки*

$$\|e(u)\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant C_2\exp(-a_2 s),\tag{8.5}$$

$$\|u-w_\infty\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant C_3\exp(-a_3 s).\tag{8.6}$$

Доказательство. Согласно формулам (7.8) и (8.3)

$$P(s,u)=P(0,u)+\int\limits_{\widehat{\omega}(0,s)}f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\hat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_s}f^n d\hat{x}=$$

$$=-\int\limits_{\widehat{\omega}(s,\infty)}f^0dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_s}f^n d\hat{x}.$$

Учитывая неравенства (8.1), получаем

$$|P(s,u)|\leqslant C\exp(-b_0 s),\quad s=0,\,1,\,2,\ldots,\ b_0=\mathrm{const}>0.\tag{8.7}$$

Положим в неравенстве (7.35) $h=[s/2]$. Тогда, принимая во внимание условие (8.4) и неравенства (8.7), (8.1), устанавливаем неравенство (8.5).

Докажем теперь оценку (8.6). Для каждого $s=0,\,1,\,2,\ldots$ положим

$$w_s=(\mathrm{mes}\,\widehat{\omega}(0,1))^{-1}\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)}u(x)\,dx.\tag{8.8}$$

В области $\omega(s, s+2)$ рассмотрим 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение задачи

$$\mathscr{L}(v) = (\operatorname{mes} \widehat{\omega}(0, 1))^{-1} (\chi_{\widehat{\omega}(s,s+1)} - \chi_{\widehat{\omega}(s+1,s+2)}) \text{ в } \omega(s, s+2), \tag{8.9}$$
$$\sigma(v) = 0 \text{ на } \partial\omega(s, s+2),$$

где χ_g — характеристическая функция множества g. Из интегрального тождества для решения задачи (8.9) и равенства (8.8) получаем

$$|w_s - w_{s+1}| = \left| \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+2)} \left(A^{hk} \frac{\partial v}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_h} \right) dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+2)} |\mathscr{E}(v)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+2)} |\mathscr{E}(u)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

В силу теоремы 6.3 $\|\mathscr{E}(v)\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+2))} \leqslant C$, где постоянная C не зависит от s. Поэтому, пользуясь уже доказанными неравенствами (8.5), находим

$$|w_s - w_{s+1}| \leqslant C \exp(-a_0 s), \quad a_0 = \text{const} > 0.$$

Следовательно, существует вектор $w_\infty = \lim\limits_{s \to \infty} w_s$. Кроме того,

$$|w_s - w_{s+t}| \leqslant |w_s - w_{s+1}| + |w_{s+1} - w_{s+2}| + \ldots + |w_{s+t-1} - w_{s+t}| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \sum_{j=0}^{t-1} \exp(-a_0(s+j)) \leqslant K_2 \exp(-a_0 s),$$

где постоянные K_1, K_2 не зависят от s, t. Устремляя в этом неравенстве t к ∞, получим

$$|w_s - w_\infty| \leqslant K_2 \exp(-a_0 s). \tag{8.10}$$

Для доказательства оценки (8.6) воспользуемся неравенством Корна (2.9) в области $\widehat{\omega}(s, s+1)$. Имеем

$$\|u - w_\infty\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))} \leqslant \|u - w_s\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))} + \|w_s - w_\infty\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 (\|e(u)\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))} + \exp(-a_0 s)),$$

где постоянная K_3 не зависит от s. Отсюда и из (8.5) устанавливаем неравенство (8.6). Теорема доказана.

Замечание 8.2. Пусть выполнены условия теоремы 8.1 и пусть $f^i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$. Если вектор-функция f^0 и коэффициенты системы 8.2 при больших x являются достаточно гладкими, то из априорных оценок для решений эллиптических систем [1] следует, что при больших s

$$\|u-w_\infty\|_{H^{m+2}(\widehat{\omega}(s,s+1))} \leqslant C_m(\|u-w_\infty\|_{L^2(\widehat{\omega}(s-1,s+2))} + \|f^0\|_{H^m(\widehat{\omega}(s-1,\,s+2))}),\quad m\geqslant 0.$$

Из теоремы 8.1 и теоремы вложения [93] вытекает, что при $m>\frac{n}{2}-2$

$$\max_{\widehat{\omega}(s,s+1)} |u-w_\infty| \leqslant C(\exp(-a_3 s)+\|f^0\|_{H^m(\widehat{\omega}(s-1,s+2))}).$$

8.2. Существование решений в бесконечных областях

В этом разделе мы будем изучать существование решений задачи

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}(u)=f^0+\dfrac{\partial f^i}{\partial x_i} \text{ в } \omega(0,\infty), \\ u=\Phi \text{ на } \Gamma_0,\ \sigma(u)=\nu_i f^i \text{ на } S(0,\infty), \\ u \text{ 1-периодична по } \widehat{x}. \end{array}\right\} \qquad (8.11)$$

Существование таких решений будет использоваться в гл. II при построении пограничных слоев в задачах усреднения.

Предполагается, что в (8.11) $\Phi\in H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)$, 1-периодична по $\hat{x}$, f^j 1-периодичны по $\hat{x}$, $f^j\in L^2(\widehat{\omega}(t_1,t_2))$ при любых t_1, t_2, $0\leqslant t_1<t_2<\infty$, $j=0,1,\ldots,n$.

Обобщенным решением задачи (8.11) называется вектор-функция $u(x)$, такая, что $u=\Phi$ на $\widehat{\Gamma}_0$, $u(x)$ принадлежит пространству $\widehat{H}^1(\omega(t_1,t_2))$ при любых $0\leqslant t_1<t_2<\infty$ и удовлетворяет интегральному тождеству (7.4).

Оценки решений типа Сен-Венана (см. теоремы 7.2, 7.3, 7.7) позволяют доказать существование и единственность решений для задачи (8.11) в классах растущих при $x_n\to\infty$ вектор-функций.

Теорема 8.3. *Пусть*

$$\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,s))}+\|f^n\|^2_{L^2(\widehat{\Gamma}_s)}\leqslant M\exp[(A-\delta)s],\quad s=1,2,\ldots, \qquad (8.12)$$

где M, $\delta=\text{const}$, A — постоянная из теоремы 7.2, $0<\delta\leqslant A$.

Тогда для любого постоянного вектора $q=(q_1,\ldots,q_n)$ существует единственное 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение $u(x)$ задачи (8.11), такое, что $P(0,u)=q$, и справедлива оценка

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant C[M\exp\{(A-\delta_1)k\}+ k\left|q-\int_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\right|^2+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}],\quad k=1,2,\ldots, \qquad (8.13)$$

где C — постоянная, не зависящая от k, δ_1 — любая постоянная из интервала $(0, \delta)$.

Доказательство. Обозначим через v^N обобщенное 1-периодическое по $\hat{x}$ решение задачи (7.26) при

$$\psi=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\left[q+\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\right]. \tag{8.14}$$

Легко видеть, что

$$P(0, v^N)=q. \tag{8.15}$$

Действительно, по формуле (7.8) имеем

$$P(N, v^N)-P(0, v^N)=\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} f^0dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_N} f^n d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}.$$

Учитывая, что

$$P(N, v^N)=\int\limits_{\widehat{g}_N}\psi d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_N} f^n d\widehat{x},$$

а также равенство (8.14), отсюда получаем

$$P(0, v^N)=\int\limits_{\widehat{g}_N}\psi d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_N} f^n d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,N)} f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_N} f^n d\widehat{x}+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}=q.$$

При таком выборе ψ вектор-функции ψ_m из (7.28) имеют вид

$$\psi_m=(\operatorname{mes}\widehat{g}_0)^{-1}\left(-q-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)} f^0dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\right). \tag{8.16}$$

Таким образом, из неравенства (7.27) леммы 7.5 вытекает, что

$$\|e(v^N)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}\leqslant C\left[\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{N}\left|q+\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)} f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\right|^2\right], \tag{8.17}$$

где постоянная C не зависит от N.

Вектор-функция $v^{k+N+1}-v^{N+k}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.3, поскольку в силу (8.15)

$$P(0, v^{k+N+1}-v^{k+N})=0.$$

Следовательно, из неравенства (7.17) получаем

$$\|e(v^{N+k+1}-v^{N+k})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant Ce^{-AN}\|e(v^{N+k+1}-v^{N+k})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k+N))}.$$

Учитывая (8.17), из этого неравенства заключаем, что

$$\|e(v^{N+k+1}-v^{N+k})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant C_1e^{-AN}\Big[\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k+N+1))}+$$

$$+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}+\sum_{m=0}^{N+k+1}\Big|q+\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)}f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2\Big]. \tag{8.18}$$

Оценим вторую сумму, стоящую в правой части (8.18). Имеем

$$\sum_{m=0}^{N+k+1}\Big|q+\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)}f^0dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2(N+k+1)\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2+2\sum_{m=0}^{N+k+1}\Big|\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)}f^0dx\Big|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2(N+k+1)\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2+2\sum_{m=0}^{N+k+1}\operatorname{mes}\widehat{\omega}(0,m)\int\limits_{\widehat{\omega}(0,m)}|f^0|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant 2(N+k+1)\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2+CM\exp((A-\delta_1)(N+k+1)), \tag{8.19}$$

где δ_1 — любая постоянная из интервала $(0, \delta)$, C зависит от δ_1 и не зависит от N и k. При выводе последнего неравенства мы воспользовались условиями (8.12), а также неравенством $\operatorname{mes}\omega(0, m)\leqslant C_1m$. Таким образом, из (8.12), (8.18), (8.19) выводим

$$\|e(v^{N+k+1}-v^{N+k})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant M_1e^{-AN}\Big[Me^{(A-\delta_1)(N+k+1)}+$$

$$+(N+k+1)\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n d\widehat{x}\Big|^2+\|\Phi\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big].$$

Поэтому

$$\|e(v^{N+k+1}-v^{N+k})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant$$

$$\leqslant M_2\Big[Me^{Ak}e^{-\delta_1(N+k)}+e^{-AN}(k+N+1)\times$$

$$\times\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}f^n dx\Big|^2+e^{-AN}\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big], \tag{8.20}$$

где постоянная M_2 не зависит от k и N.

Из (8.20) следует, что

$$\|e(v^{k+s}-v^{k+s+t}\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant\sum_{l=0}^{t-1}\|e(v^{k+s+l}-v^{k+s+l+1})\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{t-1}\Big[M_2Me^{Ak}e^{-\delta_1(s+l+k)}+M_2e^{-A(s+l)}(s+l+k+1)\times$$

$$\times\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\Big|^2+e^{-A(s+l)}M_2\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant (M_2M)^{1/2}e^{(A-\delta_1)k/2}e^{-\delta_1 s/2}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-\delta_1 l/2}+M_3k^{1/2}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(A-\delta_1)(s+l)/2}\times$$

$$\times\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\Big|+M_2^{1/2}e^{-As/2}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-Al/2}\|\Phi\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}.$$

Поэтому

$$\|e(v^{k+s}-v^{k+s+t})\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant M_4Me^{(A-\delta_1)k}e^{-\delta_1 s}+$$

$$+M_5ke^{-(A-\delta_1)s}\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\Big|^2+M_6e^{-As}\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}, \tag{8.21}$$

где δ_1 — любая постоянная из интервала $(0, \delta)$, постоянные M_j не зависят от k, s, t. Из неравенства (8.21) вытекает, что

$$\|e(v^{k+s}-v^{k+s+t})\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\to 0 \text{ при } s,\ t\to\infty. \tag{8.22}$$

Заметим, что $v^{k+s}-v^{k+s+t}=0$ на Γ_0. Поэтому мы можем применить к этой вектор-функции теорему 2.7, из которой заключаем, что

$$\|v^{k+s}-v^{k+s+t}\|_{H^1(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant C_1\|e(v^{k+s}-v^{k+s+t})\|_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}, \tag{8.23}$$

где постоянная C_1 зависит от k, но не зависит от s, t.

Из (8.22), (8.23) следует, что при всяком k последовательность v^s сходится в $\mathring{H}^1(\omega(0, k))$ при $s\to\infty$ к некоторой вектор-функции u. Переходя к пределу в интегральном тождестве для v^s при $s\to\infty$, получим, что u — решение задачи (8.11).

Устремляя t к ∞ в (8.21) при $s=0$ и пользуясь (8.17) при $N=k$, получаем

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}\leqslant M_7\Big[\|e(v^k)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,k))}+Me^{(A-\delta_1)k}+$$

$$+k\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\Big|^2+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big]\leqslant$$

$$\leqslant M_8\Big[Me^{(A-\delta_1)k}+k\Big|q-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}\Big|^2+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big].$$

Таким образом, неравенство (8.13) установлено.

Для завершения доказательства осталось показать, что $P(0, u)=q$. Согласно формуле (7.8) имеем при $s<m$

$$P(s, v^m)-P(0, v^m)=\int\limits_{\widehat{\omega}(0,s)} f^0 dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_s} f^n d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}.$$

Проинтегрируем это равенство по s от 0 до t. Тогда

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t P(s, v^m)\,ds=q+\frac{1}{t}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\widehat{\omega}(0,s)} f^0 dx+\frac{1}{t}\int\limits_{\widehat{\omega}(0,t)} f^n dx-\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $m\to\infty$ и затем в полученном равенстве для u переходя к пределу при $t\to+0$, получаем, что $P(0, u)=q$. Единственность построенного решения следует из теоремы 7.3. Теорема доказана

8.3. Решения, стабилизирующиеся на бесконечности к постоянной вектор-функции

Следующая теорема устанавливает существование и оценку решений задачи (8.11) при быстро убывающих правых частях.

Теорема 8.4. *Предположим, что выполнены условия* (8.1). *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (8.11), *такое, что*

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,\infty))}\leqslant M_1\Big\{\sum_{i=0}^{n}\|f^i\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,\infty))}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big|\int\limits_{\widehat{\omega}(m,\infty)} f^0 dx\Big|^2+\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\Big\}. \qquad (8.24)$$

Кроме того, существует постоянный вектор C_∞, такой, что

$$\|u-C_\infty\|_{H^1(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant M_2 e^{-a_0 s},\quad s=1, 2, \ldots, \qquad (8.25)$$

где M_1, M_2, a_0 — положительные постоянные, не зависящие от s.

Доказательство. Поскольку выполнены условия (8.1), то тем более выполнены условия (8.12). Положим в теореме 8.3

$$q=\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} f^n d\widehat{x}-\int\limits_{\widehat{\omega}(0,\infty)} f^0 dx. \qquad (8.26)$$

Пусть $u(x)$ — решение задачи (8.11), существование которого утверждается в теореме 8.3 при $P(0, u)=q$. Докажем, что для этого решения справедливы оценки (8.24), (8.25). Сначала проверим, что для $u(x)$ выполнены оценки (8.4). Действительно, для f^j, $j=0,\ldots,n$, неравенства (8.12) имеют место при $\delta=A$. Следовательно, для $u(x)$ неравенства (8.13) справедливы при $\delta_1=3A/4<\delta$.

Из (8.13) следует, что оценки (8.4) выполнены при $\delta_0=A/4$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.1 и, значит, имеют место неравенства (8.5), (8.6).

В силу неравенства Корна типа (2.3) для $\widehat{\omega}(s, s+1)$ имеем

$$\|u-w_\infty\|_{H^1(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant M\,(\|e(u-w_\infty)\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))}+\|u-w_\infty\|_{L^2(\widehat{\omega}(s,s+1))}).$$

Поэтому из (8.5), (8.6) следует (8.25).

Докажем теперь оценку (8.24). Рассмотрим вектор-функции v^N, построенные при доказательстве теоремы 8.3. Для этих функций справедливы оценки (8.17). Подставляя в (8.17) q, заданное формулой (8.26), и устремляя N к ∞, получим оценку (8.24). Осуществляя этот предельный переход, мы воспользовались оценками (8.1), а также сходимостью v^N к u в $\hat{H}^1(\omega(0, k))$ для любого фиксированного k, которая установлена при доказательстве теоремы 8.3. Теорема доказана

Для вектора C_∞ в оценке (8.25) может быть получена явная формула, выражающая C_∞ через f^j, $j=0,\ldots,n$, и значения $u(x)$ на Γ_0. При этом нам потребуются вспомогательные вектор-функции v^r, $r=1,\ldots,n$, существование которых обеспечивается теоремой 8.3.

Вектор-функции v^r, $r=1,\ldots,n$, определяются как 1-периодические по $\hat{x}$ обобщенные решения следующих краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}(v^r)=0 \text{ в } \omega(0, \infty),\\ &v^r=0 \text{ на } \Gamma_0,\ \sigma(v^r)=0 \text{ на } S(0, \infty),\\ &P(0, v^r)=-e_r,\ r=1,\ldots,n, \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

где $e_1,\ldots,e_n$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Согласно теореме 8.3 v^r могут быть выбраны такими, что выполняются оценки

$$\|e(v^r)\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}\leqslant M_0N,\ N=1, 2, \ldots,\ M_0=\text{const}. \tag{8.28}$$

По лемме 7.6 для v^r также выполняются неравенства

$$\|v^r\|^2_{L^2(\widehat{\omega}(0,N))}\leqslant M_1N^3,\ N=1, 2, \ldots,\ M_1=\text{const}. \tag{8.29}$$

Теорема 8.5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 8.4. *Тогда постоянный вектор* $C_\infty=(C^1_\infty,\ldots,C^n_\infty)$, *входящий в* (8.25), *определяется равенствами*

$$C^r_\infty=\int\limits_{\widehat{\omega}(0,\infty)}\left[(f^0, v^r)-\left(f^i, \frac{\partial v^r}{\partial x_i}\right)\right]dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}(\sigma(v^r), u)\,d\hat{x}, \tag{8.30}$$

где v^r — *решения задач* (8.27), *удовлетворяющие неравенствам* (8.28), (8.29).

Заметим, что если v^r и коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ достаточно гладкие, то интеграл

$$\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}(\sigma(v^r), u)\,d\hat{x}=\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}(\sigma(v^r), \Phi)\,d\hat{x}$$

определен очевидным образом. Придадим смысл этому интегралу, когда v^r являются лишь обобщенными решениями задачи (8.27). Легко видеть, что в случае гладких v^r

$$\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} (\sigma(v^r), \psi_\delta u)\, d\widehat{x} = \int\limits_{\widehat{\omega}(0,\infty)} \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi_\delta u}{\partial x_h}\right) dx \tag{8.31}$$

для любой 1-периодической по $\hat{x}$ функции $\psi_\delta \in C^1(\overline{\omega(0, \infty)})$, такой, что $\psi_\delta = 1$ в $\omega(0, \delta)$, $\psi_\delta = 0$ в $\omega(2\delta, \infty)$, где $\delta = \mathrm{const} > 0$. Из интегрального тождества для v^r следует, что интеграл в правой части (8.31) не зависит от ψ_δ и δ. Этот интеграл мы и будем рассматривать как $\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} (\sigma(v^r), u)\, d\widehat{x}$ в случае обобщенных решений v^r.

Доказательство теоремы 8.5. Фиксируем целое число $s > 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(x_n) \in C^0(\mathbf{R}^1)$, такую, что $\varphi(x_n) = 1$ при $x_n \in (0, s)$, $\varphi(x_n)$ линейна на отрезке $[s, s+1]$, $\varphi(x_n) = 0$ при $x_n \in [s+1, \infty)$. Положим $v = \varphi v^r$ в интегральном тождестве (7.4) при $t_1 = 0$, $t_2 = s+1$. Учитывая интегральное тождество для v^r и равенство (8.31), получим

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,s+1)} \left[(f^0, \varphi v^r) - \left(f^i, \frac{\partial \varphi v^r}{\partial x_i}\right)\right] dx = - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \left(A^{hk} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial (\varphi v^r)}{\partial x_h}\right) dx =$$

$$= - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \left(A^{hk} \frac{\partial \varphi v^r}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_h}\right) dx =$$

$$= - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \varphi \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_h}\right) dx -$$

$$- \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(A^{hk} v^r, \frac{\partial u}{\partial x_h}\right) dx = - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi u}{\partial x_h}\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_k}, u\right) dx - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(A^{hk} v^r, \frac{\partial u}{\partial x_h}\right) dx =$$

$$= - \int\limits_{\widehat{\Gamma}_0} (\sigma(v^r), u)\, d\widehat{x} + \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_h}, u - C_\infty\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \left(A^{hk} \frac{\partial v^r}{\partial x_k}, C_\infty\right) dx - \int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(A^{hk} v^r, \frac{\partial u}{\partial x_h}\right) dx. \tag{8.32}$$

Легко видеть, что второй и четвертый интегралы в правой части последнего равенства могут быть оценены величиной

$$\left(\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} (|e(u)|^2 + |u - C_\infty|^2)\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} (|e(v^r)|^2 + |v^r|^2)\, dx\right)^{1/2}$$

и потому экспоненциально затухают при $s\to\infty$ в силу (8.25), (8.29), (8.28). Рассмотрим третий интеграл в правой части (8.32). Учитывая определение $P(t, v^r)$ и равенство $P(t, v^r)=P(0, v^r)=-e_r$, находим

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(s,s+1)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial v^r}{\partial x_k}, C_\infty\right)dx=-\int\limits_s^{s+1}(P(t, v^r), C_\infty)\,dt=C^r_\infty.$$

Таким образом, устремляя в (8.32) s к ∞, получаем формулу (8.30). Теорема доказана.

Замечание 8.6. Из этой теоремы вытекает, что условия затухания решения задачи (8.11) при выполнении условий теоремы 8.4 имеют вид

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,\infty)}\left[(f^0, v^r)-\left(f^i, \frac{\partial v^r}{\partial x_i}\right)\right]dx+\int\limits_{\widehat{\Gamma}_0}(\sigma(v^r), \Phi)\,d\widehat{x}=0, \qquad (8.33)$$

где Φ — граничные значения вектор-функции u на Γ_0.

§ 9. СИЛЬНАЯ G-СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С задачами усреднения операторов теории упругости, которые рассмотрены в гл. II, тесно связано понятие сильной G-сходимости. Вопрос о G-сходимости и сильной G-сходимости исследовался во многих работах, начиная с работ [148; 149] С. Спаньоло 60-х годов (см. [116—118] и обзор [22]).

9.1. Необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости

Рассмотрим последовательность операторов теории упругости

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad x\in\Omega, \qquad (9.1)$$

где $\varepsilon\in(0, 1)$ — параметр, $A_\varepsilon^{ij}(x)$ — набор матриц из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, причем $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — положительные постоянные, не зависящие от ε, Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим также оператор теории упругости

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{A}^{ij}(x)\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\right)$$

класса $E(\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2)$, где $\tilde{\varkappa}_1$, $\tilde{\varkappa}_2$ — положительные постоянные, быть может, отличные от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Последовательность операторов $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ называется сильно G-сходящейся к оператору $\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$ $(\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}})$, если для любой $f\in H^-(\Omega)$ последовательность u^ε решений задач

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)=f \text{ в } \Omega, \quad u^\varepsilon=0 \text{ на } \partial\Omega \tag{9.2}$$

при $\varepsilon\to 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ сходится к u^0 — решению задачи

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0)=f \text{ в } \Omega, \quad u^0=0 \text{ на } \partial\Omega \tag{9.3}$$

и, кроме того, $\gamma_\varepsilon^i(x)\equiv A_\varepsilon^{ij}\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\to\widehat{\gamma}^i(x)\equiv\widehat{A}^{ij}\dfrac{\partial u^0}{\partial x_j}$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon\to\to 0$, $i=1, 2, \ldots, n$ [22].

Замечание 9.1. В определении сильной G-сходимости достаточно требовать соответствующей сходимости u^ε к u^0 и γ_ε^i к $\widehat{\gamma}^i$ при $\varepsilon\to 0$, когда f принадлежит подпространству $V\subset H^{-1}(\Omega)$, всюду плотному в $H^{-1}(\Omega)$.

Действительно, покажем, что тогда указанная сходимость u^ε к u^0, γ_ε^i к $\widehat{\gamma}^i$ имеет место для любой $f\in H^{-1}(\Omega)$.

Для этого рассмотрим последовательность $f^m\in V$, $f^m\to f$ по норме $H^{-1}(\Omega)$ при $m\to\infty$. Обозначим через u_m^ε, $\widehat{u}_m$ решения задач

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u_m^\varepsilon)=f^m,\ u_m^\varepsilon\in H_0^1(\Omega),\ \widehat{\mathscr{L}}(\widehat{u}_m)=f^m,\ \widehat{u}_m\in H_0^1(\Omega).$$

Обозначим через $\Gamma^\varepsilon(v)$ матрицу со столбцами $A_\varepsilon^{ij}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, $i=1, \ldots, n$, а через $\widehat{\Gamma}(v)$ — матрицу со столбцами $\widehat{A}^{ij}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, $i=1, \ldots, n$. Тогда для любой вектор-функции $v\in H_0^1(\Omega)$ и любой матрицы $w\in L^2(\Omega)$ имеем

$$(u^\varepsilon-u^0,\ v)_{H^1(\Omega)}=(u^\varepsilon-u_m^\varepsilon,\ v)_{H^1(\Omega)}+(u_m^\varepsilon-\widehat{u}_m,\ v)_{H^1(\Omega)}+(\widehat{u}_m-u^0,\ v)_{H^1(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}(\Gamma^\varepsilon(u^\varepsilon)-\widehat{\Gamma}(u^0),\ w)_{L^2(\Omega)}&=(\Gamma^\varepsilon(u^\varepsilon)-\Gamma^\varepsilon(u_m^\varepsilon),\ w)_{L^2(\Omega)}+\\&+(\Gamma^\varepsilon(u_m^\varepsilon)-\widehat{\Gamma}(\widehat{u}_m),\ w)_{L^2(\Omega)}+(\widehat{\Gamma}(\widehat{u}_m)-\widehat{\Gamma}(u^0),\ w)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что левые части этих равенств стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, так как согласно теореме 3.3 и замечанию 3.4

$$\|u^\varepsilon-u_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}+\|\widehat{u}_m-u^0\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C\|f^m-f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

с постоянной C, не зависящей от ε, m, а

$$(u_m^\varepsilon-\widehat{u}_m,\ v)_{H^1(\Omega)}\to 0,\quad (\Gamma^\varepsilon(u_m^\varepsilon)-\widehat{\Gamma}(\widehat{u}_m),\ w)_{L^2(\Omega)}\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ и фиксированном m, так как мы предположили выполненными условия сильной G-сходимости при $f=f^m\in V$.

Матрицы $\Gamma^\varepsilon(u^\varepsilon), \widehat{\Gamma}(u^0)$ со столбцами γ_ε^i, $\widehat{\gamma}^i$, $i=1, \ldots, n$, иногда называются обобщенными градиентами, или потоками.

Важную роль в исследовании сильной G-сходимости играет следующее условие N [22].

Будем говорить, что последовательность операторов теории упругости $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ удовлетворяет условию N, если существуют матрицы $\widetilde{A}^{ij}(x)$, $i, j=1, \ldots, n$, и матрицы $N_\varepsilon^s(x) \in H^1(\Omega)$, $s=1, \ldots, n$, такие, что при $\varepsilon \to 0$ имеем·

$$N\ 1.\ N_\varepsilon^s \to 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ s=1, \ldots, n;$$

$$N\ 2.\ \widetilde{A}_\varepsilon^{ij} \equiv A_\varepsilon^{il} \frac{\partial N_\varepsilon^j}{\partial x_l} + A_\varepsilon^{ij} \to \widetilde{A}^{ij}(x) \text{ слабо в } L^2(\Omega),\ i, j=1, \ldots, n;$$

$$N\ 3.\ \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{A}_\varepsilon^{ij} - \widetilde{A}^{ij}) \to 0 \text{ по норме } H^{-1}(\Omega),\ j=1, \ldots, n.$$

Отметим, что в условии N не предполагается, что матрицы $\widetilde{A}^{ij}(x)$ задают коэффициенты системы теории упругости, т. е. что для них справедливы соотношения типа (3.2), (3.3). Непосредственно из условия N вытекает лишь, что элементы матриц $\widetilde{A}^{ij}$ являются функциями из $L^2(\Omega)$. Тем не менее, как будет показано в теореме 9.1, из условия N вытекает выполнение соотношений (3.2), (3.3) для матриц $\widetilde{A}^{ij}$ и, в частности, ограниченность их элементов.

Теорема 9.1 *Предположим, что для последовательности операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ справедливо условие N, причем $\varkappa_1, \varkappa_2$ — положительные постоянные, не зависящие от ε. Тогда для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем*

$$\int_\Omega \varphi(x) \widetilde{A}^{qp}(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi \left(\frac{\partial (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} + \delta_{qj} E\right) A_\varepsilon^{jk}(x) \left(\frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + \delta_{pk} E\right) dx,$$

$$p, q=1, \ldots, n, \tag{9.4}$$

где A^* — матрица, сопряженная с A, E — матрица с элементами δ_{ij}, δ_{pk} — символ Кронекера.

Кроме того, система уравнений, коэффициенты которой определяются матрицами $\widetilde{A}^{qp}$, также принадлежит классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.

Доказательство. Установим сначала формулу (9.4). Обозначим через $\mathscr{J}_\varepsilon^{qp}$ интеграл в правой части (9.4). Тогда

$$\mathscr{J}_\varepsilon^{qp} = \int_\Omega \varphi \left(\frac{\partial (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + \frac{\partial (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jp} + A_\varepsilon^{qk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{qp}\right) dx =$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k}\,dx - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (N_\varepsilon^q)^* A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k}\,dx +$$

$$+\int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jp}\, dx - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (N_\varepsilon^q)^* A_\varepsilon^{jp}\, dx - \int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} \widetilde{A}^{jp}\, dx +$$

$$+\int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} \widetilde{A}^{jp}\, dx + \int_\Omega \varphi \left(A_\varepsilon^{qk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{qp} \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} \left(A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{jp} - \widetilde{A}^{jp} \right) dx -$$

$$- \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (N_\varepsilon^q)^* A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (N_\varepsilon^q)^* A_\varepsilon^{jp} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^q)^*}{\partial x_j} \widetilde{A}^{jp}\, dx + \int_\Omega \varphi \left(A_\varepsilon^{qk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{qp} \right) dx = \mathcal{J}_1^\varepsilon + \mathcal{J}_2^\varepsilon + \mathcal{J}_3^\varepsilon + \mathcal{J}_4^\varepsilon, \tag{9.5}$$

где через $\mathcal{J}_1^\varepsilon, \ldots, \mathcal{J}_4^\varepsilon$ последовательно обозначены интегралы, стоящие в левой части последнего равенства. Оценим эти интегралы.

В силу ограниченности слабо сходящейся последовательности в гильбертовом пространстве и компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ из условия $N1$ заключаем, что

$$N_\varepsilon^s \to 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega), \quad \frac{\partial N_\varepsilon^s}{\partial x_j} \to 0 \text{ слабо в } L^2(\Omega), \tag{9.6}$$

$$\| N_\varepsilon^s \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \tag{9.7}$$

при $\varepsilon \to 0$, $s, j = 1, \ldots, n$, где $C = \mathrm{const}$ и не зависит от ε. Легко видеть, что

$$|\mathcal{J}_1^\varepsilon| \leqslant C_1 \| \varphi (N_\varepsilon^q)^* \|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left[A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{jp} - \widetilde{A}^{jp} \right] \right\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Таким образом, $\mathcal{J}_1^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (9.7) и условия $N3$. Пользуясь неравенством Гельдера и равномерной ограниченностью по ε элементов матриц A_ε^{ij}, выводим, что

$$|\mathcal{J}_2^\varepsilon| \leqslant C_1 (\| N_\varepsilon^q \|_{L^2(\Omega)} \| N_\varepsilon^p \|_{H^1(\Omega)} + \| (N_\varepsilon^q)^* \|_{L^2(\Omega)}). \tag{9.8}$$

Поэтому $\mathcal{J}_2^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ вследствие (9.6) и (9.7). Из (9.6) вытекает, что $\mathcal{J}_3^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а из условия $N2$ вытекает, что $\mathcal{J}_4^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к левой части равенства (9.4). Таким образом, формула (9.4) доказана.

Покажем теперь, что матрицы $\tilde{A}^{pq}$ принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$. Это означает, что их элементы $\tilde{a}_{ij}^{pq}(x)$ удовлетворяют соотношениям (3.2), (3.3).

Равенство $\tilde{a}_{ih}^{ij} \equiv \tilde{a}_{i}^{lj}$ вытекает непосредственно из равенств (3 2) для элементов матриц A_ε^{pq} и условия $N2$ Для доказательства равенства $\tilde{a}_{ih}^{ij} = \tilde{a}_{hl}^{ji}$ остается показать, что $\tilde{A}^{pq} = (\tilde{A}^{qp})^*$. Это равенство есть следствие формулы (9.4) и соотношения $A_\varepsilon^{ij} = (A_\varepsilon^{ji})^*$, которое выполнено в силу (3 2) для элементов матриц $A_\varepsilon^{ij}(x)$.

Установим теперь неравенства (3.3) для $\tilde{A}^{ij}(x)$. Докажем оценку снизу. Пусть $\{\eta_{ih}\}$ — симметрическая $(n \times n)$-матрица с постоянными элементами. Обозначим через η^k столбец с компонентами $\eta_{1k} \ldots, \eta_{nk}$, а через η^{h*} — строку $(\eta_{h1}, \ldots, \eta_{hn})$. В силу формулы (9.4) имеем

$$\int\limits_\Omega \varphi \tilde{a}_{ij}^{pq}(x)\, \eta_{ip}\eta_{jq}\, dx = \int\limits_\Omega \varphi \eta^{p*} \tilde{A}^{pq}(x) \eta^q\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega \varphi \eta^{p*} \left(\frac{\partial (N_\varepsilon^p)^*}{\partial x_j} + \delta_{pj} E \right) A_\varepsilon^{jk}(x) \left(\frac{\partial N_\varepsilon^q}{\partial x_k} + \delta_{qk} E \right) \eta^q\, dx \qquad (9.9)$$

для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$. Положим

$$\zeta^k(\varepsilon, x) = \left(\frac{\partial N_\varepsilon^q}{\partial x_k} + \delta_{qk} E \right) \eta^q.$$

Легко видеть, что $\zeta^k(\varepsilon, x)$ — столбец с компонентами

$$\zeta_{ik}(\varepsilon, x) = \frac{\partial N_{\varepsilon is}^q}{\partial x_k} \eta_{sq} + \eta_{ik},$$

где $N_{\varepsilon is}^q$ — элементы матриц N_ε^q. Обозначим через $\mathcal{J}_\varepsilon$ интеграл, стоящий в (9.9) под знаком предела. Тогда

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \int\limits_\Omega \varphi a_{\varepsilon, ih}^{jk}(x)\, \zeta_{ij}(\varepsilon, x)\, \zeta_{hk}(\varepsilon, x)\, dx. \qquad (9.10)$$

Согласно лемме 3.1

$$\frac{\varkappa_1}{4} |\zeta + \zeta^*|^2 \leqslant a_{\varepsilon, ih}^{jk} \zeta_{ij} \zeta_{hk}. \qquad (9.11)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\varkappa_1}{4} |\zeta + \zeta^*|^2 = \frac{\varkappa_1}{4} (2\zeta_{ik}\zeta_{ik} + 2\zeta_{ik}\zeta_{ki}) =$$

$$= \frac{\varkappa_1}{4} \left[2 \left(\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k} + \eta_{ik} \right) \left(\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k} + \eta_{ik} \right) + 2 \left(\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k} + \eta_{ik} \right) \left(\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_i} + \eta_{ik} \right) \right],$$

где $M_\varepsilon^i = N_{\varepsilon is}^q \eta_{sq}$. Поэтому

$$\frac{\varkappa_1}{4}|\zeta+\zeta^*|^2 = \frac{\varkappa_1}{4}\left(4\eta_{ik}\eta_{ik} + 2\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k} + 6\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}\eta_{ik} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_i}\eta_{ik} + 2\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_i}\right).$$

Умножая это равенство на $\varphi(x) \geqslant 0$, интегрируя по Ω и учитывая, что

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_i}dx = \int_\Omega \varphi \frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_i}\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_k}dx +$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_i}M_\varepsilon^k dx - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}M_\varepsilon^k dx,$$

а также (9.11), получаем

$$\varkappa_1\eta_{ik}\eta_{ik}\int_\Omega \varphi\, dx \leqslant \int_\Omega a_{\varepsilon,ih}^{jk}\zeta_{ij}\zeta_{hk}\varphi\, dx - \frac{\varkappa_1}{2}\int_\Omega \varphi \frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}\frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_k}dx -$$
$$- \frac{\varkappa_1}{2}\int_\Omega \varphi \frac{\partial M_\varepsilon^i}{\partial x_i}\frac{\partial M_\varepsilon^k}{\partial x_k}dx + \mu_\varepsilon,$$

где $\mu_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (9.6), (9.7). Поскольку второй и третий интегралы в правой части этого неравенства неотрицательны, то согласно (9.10)

$$\varkappa_1\eta_{ik}\eta_{ik}\int_\Omega \varphi\, dx \leqslant \mathcal{J}_\varepsilon + \mu_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем вследствие (9.9)

$$\varkappa_1\eta_{ik}\eta_{ik}\int_\Omega \varphi\, dx \leqslant \int_\Omega \varphi \tilde{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jq}dx.$$

Отсюда в силу произвольности φ вытекает первая оценка (3.3).

Установим теперь второе неравенство (3.3) для элементов матриц $\tilde{A}^{pq}$. Фиксируем симметрическую $(n\times n)$-матрицу $\eta = \{\eta_{ih}\}$ с постоянными элементами. В первой части доказательства этой теоремы установлено (см. (9.4), (9.5)), что для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$,

$$T \equiv \int_\Omega \varphi(x)\eta^{q*}\tilde{A}^{qp}(x)\eta^p dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi\eta^{q*}\left(A_\varepsilon^{qk}\frac{\partial N_\varepsilon^p}{\partial x_k} + A_\varepsilon^{qp}\right)\eta^p dx =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi\eta^{q*}\left(\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jk}_\varepsilon \frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_k} + \frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jp}_\varepsilon + A^{qk}\frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_k} + A^{qp}\right)\eta^p\,dx.$$

Следовательно, (9.12)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi\eta^{q*}\left(\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jk}_\varepsilon \frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_k} + \frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jp}_\varepsilon\right)\eta^p\,dx = 0.$$

Поскольку согласно лемме 3.1 $\eta^{q*}\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jk}_\varepsilon \frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_k}\eta^p \geqslant 0$, отсюда вытекает, что найдется последовательность $\varepsilon'\to 0$, такая, что

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_\Omega \varphi\eta^{q*}\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jp}_{\varepsilon'}\eta^p\,dx \leqslant 0.$$

Учитывая, что $(A^{jp}_\varepsilon)^* = A^{pj}_\varepsilon$, имеем

$$\left(\eta^{q*}\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jp}_\varepsilon\eta^p\right)^* = \left(\frac{\partial (N^q_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jp}_\varepsilon\eta^p\right)^*\eta^q = \eta^{p*}A^{pj}_\varepsilon \frac{\partial N^q_\varepsilon}{\partial x_j}\eta^q =$$

$$= \eta^{q*}A^{qj}_\varepsilon \frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_j}\eta^p.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_\Omega \varphi\eta^{q*}A^{qk}_{\varepsilon'}\frac{\partial N^p_\varepsilon}{\partial x_k}\eta^p\,dx \leqslant 0.$$

Ввиду того, что $\eta^{q*}A^{qp}_\varepsilon\eta^p \leqslant \varkappa_2\eta_{ih}\eta_{ih}$, из условия $N2$ получаем оценку $T \leqslant \varkappa_2\eta_{ih}\eta_{ih}\int_\Omega \varphi\,dx$. Отсюда вытекает верхняя оценка (3.3). Теорема доказана.

Теорема 9.2. *Пусть для последовательности операторов теории упругости $\mathscr{L}_\varepsilon$ выполнено условие N, $\mathscr{L}_\varepsilon \in E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и постоянные $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ не зависят от ε. Тогда при $\varepsilon\to 0$ последовательность $\mathscr{L}_\varepsilon$ сильно G-сходится к оператору теории упругости $\tilde{\mathscr{L}}$, коэффициенты которого задаются матрицами $\tilde{A}^{ij}(x)$ из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.*

Доказательство. Тот факт, что матрицы $\tilde{A}^{ij}(x)$ задают систему теории упругости, и их принадлежность классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ установлены в теореме 9.1. Докажем сильную G-сходимость $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\tilde{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$.

В силу представления элементов из $H^{-1}(\Omega)$ в виде (3.20) и оценки (3.21) условие $N3$ можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial (N^s_\varepsilon)^*}{\partial x_j} A^{jk}_\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(A^{si}_\varepsilon - \tilde{A}^{si}) = F^0_{\varepsilon s} + \frac{\partial F^i_{\varepsilon s}}{\partial x_i}, \\ &F^j_{\varepsilon s}\to 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0,\ j=0,\ \ldots,\ n,\ s=1,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\}\quad (9.13)$$

При этом мы использовали равенства

$$(A_\varepsilon^{is})^* = A_\varepsilon^{si}, \quad (\tilde{A}^{is})^* = \tilde{A}^{si} \tag{9.14}$$

(см. доказательство теоремы 9.1).

Рассмотрим вектор-функцию φu^ε, где φ — произвольная скалярная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, u^ε — обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_\varepsilon^{jk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \text{ в } \Omega, \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{9.15}$$

Из (9.13) получаем

$$-\int_\Omega \frac{\partial (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial \varphi u^\varepsilon}{\partial x_k}\,dx - \int_\Omega (A_\varepsilon^{si} - \tilde{A}^{si}) \frac{\partial \varphi u^\varepsilon}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= \int_\Omega \left[F_{\varepsilon s}^0 \varphi u^\varepsilon - F_{\varepsilon s}^i \frac{\partial \varphi u^\varepsilon}{\partial x_i}\right] dx. \tag{9.16}$$

По определению обобщенного решения задачи (9.15)

$$-\int_\Omega \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\,dx = \int_\Omega \left(\varphi (N_\varepsilon^s)^* f^0 - \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_i} f^i\right) dx. \tag{9.17}$$

Вычитая (9.16) из (9.17), получаем

$$-\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (N_\varepsilon^s)^* A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\,dx + \int_\Omega \frac{\partial (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} u^\varepsilon\,dx +$$

$$+ \int_\Omega (A_\varepsilon^{si} - \tilde{A}^{si}) \frac{\partial \varphi u^\varepsilon}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \Big[\varphi (N_\varepsilon^s)^* f^0 - \frac{\partial \varphi (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_j} f^j -$$

$$- F_{\varepsilon s}^0 \varphi u^\varepsilon + F_{\varepsilon s}^i \frac{\partial \varphi u^\varepsilon}{\partial x_i}\Big] dx. \tag{9.18}$$

В силу теоремы 3.3 имеем

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C_1, \quad \|\gamma_\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2 \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9.19}$$

где $\gamma_\varepsilon^j = A_\varepsilon^{jk} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}$ и постоянные C_1, C_2 не зависят от ε.

Вследствие компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ из (9.19) вытекает существование вектор-функций $U \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{\gamma}^j \in L^2(\Omega)$, таких, что

$$\left.\begin{aligned} &u^{\varepsilon'} \to U \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^2(\Omega), \\ &\gamma_{\varepsilon'}^j \to \tilde{\gamma}^j \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

по некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$.

Заметим, что в силу (9.6), (9.7), (9.13), (9.19) первый интеграл в левой части (9.18) и интеграл в правой части (9.18) стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Поэтому из (9.18) заключаем

$$\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\left[\frac{\partial (N_\varepsilon^s)^*}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk} + A_\varepsilon^{sk} - \widetilde{A}^{sk}\right] u^\varepsilon\, dx + \int_\Omega \varphi\,(A_\varepsilon^{sk} - \widetilde{A}^{sk}) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\, dx = \mu_\varepsilon, \qquad (9.21)$$

где $\mu_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Поскольку $u^{\varepsilon'} - U\to 0$ сильно в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon'\to 0$, то, переходя к пределу в (9.21) по подпоследовательности $\varepsilon'\to 0$ и учитывая условия $N2$ и (9.14), (9.20), устанавливаем, что первый интеграл в левой части (9.21) стремится к нулю при $\varepsilon'\to\to 0$, а второй интеграл стремится к

$$\int_\Omega \varphi\widetilde{\gamma}^s(x)\, dx - \int_\Omega \varphi\widetilde{A}^{sk}\frac{\partial U}{\partial x_k}\, dx = 0.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\widetilde{\gamma}^s = \widetilde{A}^{sk}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (9.22)$$

Покажем, что $U(x)$ является обобщенным решением задачи

$$\widetilde{\mathscr{L}}(U) = f^0 + \frac{\partial f^l}{\partial x_l} \text{ в } \Omega,\ U\in H_0^1(\Omega). \qquad (9.23)$$

Для любой матрицы $M(x)\in H_0^1(\Omega)$ имеем по определению обобщенного решения задачи (9.15)

$$-\int_\Omega \frac{\partial M}{\partial x_j} A_\varepsilon^{jk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\, dx = \int_\Omega\left[M f^0 - \frac{\partial M}{\partial x_j} f^j\right] dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon'\to 0$ в силу (9.20) и (9.22), получаем

$$-\int_\Omega \frac{\partial M}{\partial x_j}\widetilde{A}^{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k}\, dx = \int_\Omega\left[M f^0 - \frac{\partial M}{\partial x_j} f^j\right] dx.$$

Это означает, что $U(x)$ — обобщенное решение задачи (9.23).

Как вытекает из только что приведенных рассуждений, из любой последовательности $(u^{\varepsilon'}, \gamma_{\varepsilon'}^1, \ldots, \gamma_{\varepsilon'}^n)$ можно выбрать подпоследовательность, такую, что $u^{\varepsilon''}\to U$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, $\gamma_{\varepsilon''}^i\to\widetilde{\gamma}^i$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon''\to 0$, т. е. последовательность операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ сильно G-сходится к оператору $\widetilde{\mathscr{L}}$. Теорема доказана.

Теорема 9.3 (о единственности сильного G-предела). *Пусть $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\widehat{\mathscr{L}}}$ при $\varepsilon\to 0$, где $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ — последовательность операторов класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и $\varkappa_1, \varkappa_2$ — положительные постоянные, не зависящие от ε, $\widehat{\mathscr{L}}$, $\widehat{\widehat{\mathscr{L}}}$ — некоторые операторы тео-*

рии упругости с ограниченными измеримыми коэффициентами. Тогда матрицы коэффициентов операторов $\widehat{\mathscr{L}}$ и $\widehat{\widehat{\mathscr{L}}}$ совпадают почти всюду в Ω.

Доказательство. Пусть $\hat{u}$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $C_0^\infty(\Omega)$. Положим $f=\widehat{\mathscr{L}}\hat{u}$ и рассмотрим последовательность $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ решений задач $\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)=f$ в Ω, $u^\varepsilon=0$ на $\partial\Omega$ В силу сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ и $\widehat{\widehat{\mathscr{L}}}$ при $\varepsilon\to 0$ имеем $u^\varepsilon \to \hat{u}$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, $A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \to \widehat{A}^{ij}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}$ слабо в $L^2(\Omega)$, $A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \to \widehat{\widehat{A}}^{ij}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}$ слабо в $L^2(\Omega)$, где $\widehat{A}^{ij}$, $\widehat{\widehat{A}}^{ij}$ — матрицы коэффициентов операторов $\widehat{\mathscr{L}}$ и $\widehat{\widehat{\mathscr{L}}}$ соответственно. Поэтому $\widehat{A}^{ij}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}=\widehat{\widehat{A}}^{ij}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}$ почти всюду в Ω для любой $\hat{u}\in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда следует, что $\widehat{A}^{ij}=\widehat{\widehat{A}}^{ij}$ почти всюду в Ω. Теорема доказана.

Теорема 9.4. *Пусть $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ — последовательность операторов теории упругости класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, причем $\varkappa_1, \varkappa_2>0$ — постоянные, не зависящие от ε, и $\widehat{\mathscr{L}}$ — некоторый оператор теории упругости. Тогда условие N для матриц коэффициентов операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathscr{L}}$ является необходимым и достаточным для сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$.*

Доказательство. Достаточность условия N для сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ установлена в теореме 9.2. Докажем необходимость. Пусть $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$. Рассмотрим последовательность матриц B_ε^j $(j=1, \ldots, n, \varepsilon\to 0)$, являющихся решениями задач

$$\mathscr{L}_\varepsilon(B_\varepsilon^j)=\frac{\partial}{\partial x_i}A_\varepsilon^{ij} \text{ в } \Omega, \quad B_\varepsilon^j=0 \text{ на } \partial\Omega.$$

В силу равномерной ограниченности элементов матриц $A_\varepsilon^{ij}(x)$ и теоремы 3.3 $\|B_\varepsilon^j\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant C$, где постоянная C не зависит от ε. В силу слабой компактности шара в гильбертовом пространстве существует подпоследовательность $\varepsilon'\to 0$, такая, что

$$B_{\varepsilon'}^j \to B_0^j \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon'\to 0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Определим матрицы $\widetilde{N}_{\varepsilon'}^j$ как решения краевых задач

$$\mathscr{L}_{\varepsilon'}\widetilde{N}_{\varepsilon'}^j=\widehat{\mathscr{L}}B_0^j-\frac{\partial}{\partial x_i}A_{\varepsilon'}^{ij} \text{ в } \Omega, \quad \widetilde{N}_{\varepsilon'}^j=0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{9.24}$$

Пусть $\widetilde{N}_{\varepsilon'}^j=-B_{\varepsilon'}^j+M_{\varepsilon'}^j$. В силу сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &M^j_{\varepsilon'} \to B^j_0 \text{ слабо в } H^1_0(\Omega), \quad j=1, \ldots, n, \\ &A^{il}_{\varepsilon'} \frac{\partial M^j_{\varepsilon'}}{\partial x_l} \to \widehat{A}^{il} \frac{\partial B^j_0}{\partial x_l} \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad i, j=1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (9.25)$$

Отсюда следует, что выполнено условие $N1$ для подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$, т. е. $\widetilde{N}^{\varepsilon'}_j \to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$.

Ввиду равномерной по ε ограниченности в $L^2(\Omega)$ элементов матриц $\widetilde{A}^{ij}_\varepsilon \equiv A^{il}_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_l} \widetilde{N}^j_\varepsilon + A^{ij}_\varepsilon$, $i, j=1, \ldots, n$, существует подпоследовательность ε'' последовательности $\varepsilon' \to 0$, такая, что

$$A^{il}_{\varepsilon''} \frac{\partial}{\partial x_l} \widetilde{N}^j_{\varepsilon''} + A^{ij}_{\varepsilon''} \to A^{ij}_*(x) \text{ слабо в } L^2(\Omega), \qquad (9.26)$$

где A^{ij}_* — некоторые матрицы с элементами из $L^2(\Omega)$

Рассмотрим условие $N3$ для последовательности $\varepsilon'' \to 0$ и матриц $\widetilde{N}^j_{\varepsilon''}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{A}^{ij}_{\varepsilon''} - A^{ij}_*) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^{il}_{\varepsilon''} \frac{\partial \widetilde{N}^j_{\varepsilon''}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} A^{ij}_{\varepsilon''} - \frac{\partial}{\partial x_i} A^{ij}_* =$$

$$= \widehat{\mathscr{L}} B^j_0 - \frac{\partial}{\partial x_i} A^{ij}_* = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{A}^{il} \frac{\partial B^j_0}{\partial x_l} - A^{ij}_*\right). \qquad (9.27)$$

Из интегрального тождества для задачи (9.24) получим для любой матрицы $M \in H^1_0(\Omega)$:

$$\int_\Omega \left(A^{il}_{\varepsilon'} \frac{\partial \widetilde{N}^j_{\varepsilon'}}{\partial x_l} \frac{\partial M}{\partial x_i} + A^{ij}_{\varepsilon'} \frac{\partial M}{\partial x_i}\right) dx = \int_\Omega \widehat{A}^{il} \frac{\partial B^j_0}{\partial x_l} \frac{\partial M}{\partial x_i}\, dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по подпоследовательности $\varepsilon'' \to 0$ и пользуясь (9.26), получаем

$$\int_\Omega A^{ij}_* \frac{\partial M}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \widehat{A}^{il} \frac{\partial B^j_0}{\partial x_l} \frac{\partial M}{\partial x_i}\, dx.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{A}^{il} \frac{\partial B^j_0}{\partial x_l} - A^{ij}_*\right) = 0$ и в силу (9.27) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{A}^{ij}_{\varepsilon''} - A^{ij}_*) = 0$. Таким образом, для подпоследовательности $\varepsilon'' \to 0$ выполнено условие N с матрицами A^{ij}_*. По теореме 9.3 о единственности сильного G-предела и теореме 9.2 получаем, что $A^{ij}_* = \widehat{A}^{ij}$ почти всюду в Ω.

Покажем теперь, что условие N имеет место для всей последовательности $\varepsilon \to 0$. Определим матрицы N^j_ε как решения задач

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^{il}_\varepsilon \frac{\partial N^j_\varepsilon}{\partial x_l}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\widehat{A}^{ij} - A^{ij}_\varepsilon), \quad N^j_\varepsilon \in H^1_0(\Omega). \qquad (9.28)$$

Как следует из (9.27), эти уравнения выполнены при $\varepsilon=\varepsilon''$, $\tilde{N}^j_\varepsilon=N^j_\varepsilon$. Таким образом, из любой последовательности N^j_ε, определенной (9.28), можно выбрать подпоследовательность, удовлетворяющую условиям $N1$—$N3$ с коэффициентами $\hat{A}^{ij}(x)$. Отсюда следует, что вся последовательность N^j_ε удовлетворяет условию N. Теорема доказана.

Следствие 9.5. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — операторы из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\varkappa_1, \varkappa_2>0$ и не зависят от ε, $\mathcal{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \hat{\mathcal{L}}$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда коэффициенты оператора $\hat{\mathcal{L}}$ также принадлежат классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.*

9.2. Оценки скорости сходимости решений задачи Дирихле для последовательности сильно G-сходящихся операторов

Как показано в предыдущем разделе, выполнение условия N обеспечивает лишь слабую сходимость в $H^1_0(\Omega)$ решений u^ε задач (9.2) к решению u^0 задачи (9.3). Если наложить дополнительные требования на сходимость соответствующих функций в условии N, то оказывается возможным оценить $u^0-u^\varepsilon-v_\varepsilon$ в норме $H^1(\Omega)$, где v_ε — так называемый корректор.

Будем предполагать, что граница области Ω и коэффициенты оператора $\hat{\mathcal{L}}$ являются гладкими.

Введем функциональные пространства, которые в дальнейшем используем для характеристики близости коэффициентов операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\hat{\mathcal{L}}$.

Обозначим через $H^{-m,\infty}(\Omega)$ ($m\geqslant 0$ — целое) пространство, элементами которого являются обобщенные функции вида

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha(x), \tag{9.29}$$

где $f_\alpha\in L^\infty(\Omega)$. Норму в $H^{-m,\infty}(\Omega)$ зададим равенством

$$\|f\|_{-m,\infty}=\inf \max_{|\alpha|\leqslant m} \|f_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $f(x)$ в виде (9.29).

Лемма 9.6. *Пусть $g=\sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha g_\alpha \in H^{-m,\infty}(\Omega)$, $g_\alpha\in L^\infty(\Omega)$, $u\in H^m(\Omega)$. Тогда определен элемент $ug\in H^{-m}(\Omega)$, действующий по формуле*

$$\langle ug, \varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha D^\alpha(u\varphi)\,dx,\quad \varphi\in H^m_0(\Omega), \tag{9.30}$$

причем

$$\|ug\|_{H^{-m}(\Omega)}\leqslant C\|g\|_{-m,\infty}\|u\|_{H^m(\Omega)},\quad C=\text{const}. \tag{9.31}$$

Доказательство. Покажем, что равенство (9.30) корректно определяет линейный функционал на $H_0^m(\Omega)$. Действительно, пусть $g=\sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g'_\alpha$ — другое представление $g\in H^{-m,\infty}(\Omega)$, $g'_\alpha\in L^\infty(\Omega)$. Тогда в смысле теории распределений имеет место равенство

$$g(\psi)=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g'_\alpha D^\alpha\psi\,dx=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha D^\alpha\psi\,dx \quad (9.32)$$

для любой $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$. В силу ограниченности норм g'_α, g_α в $L^\infty(\Omega)$ последнее равенство справедливо при ψ, таких, что $\mathscr{D}^\alpha\psi\in L^1(\Omega)$, $|\alpha|\leq m$, и, значит, при $\psi=u\varphi$. Неравенство (9.31) вытекает из (9.30) и определения норм в $H^{-m,\infty}(\Omega)$ и $H^{-m}(\Omega)$. Лемма доказана.

Скажем, что последовательность операторов теории упругости $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ удовлетворяет условию N', если существуют матрицы $\hat{A}^{ij}(x)$, $i, j=1,\dots,n$, и матрицы $N_\varepsilon^s(x)\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, такие, что при $\varepsilon\to 0$ имеем:

N' 1. $\dfrac{\partial}{\partial x_l}N_\varepsilon^s(x)\in L^\infty(\Omega)$, $i, s=1, \dots, n$, $N_\varepsilon^s(x)\to 0$ в $L^\infty(\Omega)$;

N' 2. $\widehat{A}_\varepsilon^{ij}\equiv A_\varepsilon^{il}\dfrac{\partial N_\varepsilon^j}{\partial x_l}+A_\varepsilon^{ij}\to\widehat{A}^{ij}(x)$ по норме пространства $H^{-1,\infty}(\Omega)$;

N' 3. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\widehat{A}_\varepsilon^{ij}-\widehat{A}^{ij})\to 0$ по норме пространства $H^{-1,\infty}(\Omega)$.

Нетрудно проверить, что из выполнения условия N' следует справедливость условия N. Поэтому матрицы $\hat{A}^{ij}$ определяют оператор теории упругости $\widehat{\mathscr{L}}$, также принадлежащий классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$.

Введем числа, характеризующие скорость сходимости в условиях $N'1$—$N'3$:

$$\alpha_\varepsilon=\max_{s=1,\dots,n}\|N_\varepsilon^s(x)\|_{L^\infty(\Omega)}; \quad (9.33)$$

$$\beta_\varepsilon=\max_{i,j=1,\dots,n}\|\widehat{A}_\varepsilon^{ij}-\widehat{A}^{ij}\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}; \quad (9.34)$$

$$\gamma_\varepsilon=\max_{j=1,\dots,n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\widehat{A}_\varepsilon^{ij}-\widehat{A}^{ij})\right\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}. \quad (9.35)$$

Теорема 9.7. *Пусть для операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ выполнено условие N' и коэффициенты $\widehat{a}_{hk}^{ij}(x)$ оператора $\widehat{\mathscr{L}}$ — гладкие функции. Тогда для решений задач* (9.2), (9.3) *при* $f\in H^1(\Omega)$ *имеют место оценки*

$$\left\| u^{\varepsilon}-u^{0}-N_{\varepsilon}^{s}(x)\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{s}}\right\|_{H^{1}(\Omega)} \leqslant \|v^{\varepsilon}\|_{H^{1}(\Omega)}+K_{1}\,[\beta_{\varepsilon}\|f\|_{H^{1}(\Omega)}+ +(\alpha_{\varepsilon}+\gamma_{\varepsilon})\|f\|_{L^{2}(\Omega)}], \tag{9.36}$$

$$\|u^{\varepsilon}-u^{0}\|_{L^{2}(\Omega)}\leqslant\|v^{\varepsilon}\|_{L^{2}(\Omega)}+K_{2}\,[\beta_{\varepsilon}\|f\|_{H^{1}(\Omega)}+(\alpha_{\varepsilon}+\gamma_{\varepsilon})\|f\|_{L^{2}(\Omega)}], \tag{9.37}$$

где постоянные K_1, K_2 не зависят от ε, через v^{ε} обозначено решение задачи Дирихле

$$\mathscr{L}_{\varepsilon}(v^{\varepsilon})=0 \text{ в } \Omega,\quad v^{\varepsilon}=N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{s}} \text{ на } \partial\Omega. \tag{9.38}$$

Доказательство. Положим $\tilde{u}=u^{0}+N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{s}}$. Применяя оператор $\mathscr{L}_{\varepsilon}$ к вектор-функции $u^{\varepsilon}-\tilde{u}+v^{\varepsilon}$, получим следующие равенства, понимаемые в смысле теории обобщенных функций:

$$\mathscr{L}_{\varepsilon}(u^{\varepsilon}-\tilde{u}+v^{\varepsilon})=f-\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left(A_{\varepsilon}^{hk}\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(u^{0}+N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{s}}\right)\right)=$$

$$=f-\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{k}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{k}}-A_{\varepsilon}^{hk}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{k}}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left[A_{\varepsilon}^{hk}\left(\frac{\partial N_{\varepsilon}^{s}}{\partial x_{k}}\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{s}}+N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial^{2}u^{0}}{\partial x_{k}\,\partial x_{s}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left[\left(\widehat{A}^{hk}-A_{\varepsilon}^{hk}-A_{\varepsilon}^{hj}\frac{\partial N_{\varepsilon}^{k}}{\partial x_{j}}\right)\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{k}}\right]-\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left(A_{\varepsilon}^{hk}N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial^{2}u^{0}}{\partial x_{k}\,\partial x_{s}}\right)=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_{h}}(\widehat{A}^{hk}-\widehat{A}_{\varepsilon}^{hk})\right]\frac{\partial u^{0}}{\partial x_{k}}+(\widehat{A}^{hk}-\widehat{A}_{\varepsilon}^{hk})\frac{\partial^{2}u^{0}}{\partial x_{h}\,\partial x_{k}}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{h}}\left(A_{\varepsilon}^{hk}N_{\varepsilon}^{s}\frac{\partial^{2}u^{0}}{\partial x_{k}\,\partial x_{s}}\right)=F_{1}^{\varepsilon}+F_{2}^{\varepsilon}+F_{3}^{\varepsilon}. \tag{9.39}$$

Согласно (9.39) $F_1^{\varepsilon}, F_2^{\varepsilon}\in H^{-1}(\Omega)$, причем

$$\|F_{1}^{\varepsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant C\gamma_{\varepsilon}\|u^{0}\|_{H^{2}(\Omega)}, \tag{9.40}$$

$$\|F_{2}^{\varepsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant C\beta_{\varepsilon}\|u^{0}\|_{H^{3}(\Omega)}, \tag{9.41}$$

где γ_{ε}, β_{ε} определены равенствами (9.35), (9.34), постоянная C не зависит от ε. Легко видеть, что F_3^{ε} также принадлежит $H^{-1}(\Omega)$ и

$$\|F_{3}^{\varepsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant C_{1}\alpha_{\varepsilon}\|u^{0}\|_{H^{2}(\Omega)}, \tag{9.42}$$

где $C_1=\mathrm{const}$ и не зависит от ε, α_{ε} определено равенством (9.33).

Поскольку $u^{\varepsilon}-\tilde{u}+v^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega)$, то из (9.39)—(9.42), пользуясь замечанием 3.6, устанавливаем, что

$$\|u^{\varepsilon}-\tilde{u}+v^{\varepsilon}\|_{H^{1}(\Omega)}\leqslant C_{2}\,[(\alpha_{\varepsilon}+\gamma_{\varepsilon})\|u^{0}\|_{H^{2}(\Omega)}+\beta_{\varepsilon}\|u^{0}\|_{H^{3}(\Omega)}], \tag{9.43}$$

где постоянная C_2 не зависит от ε. Так как оператор $\widehat{\mathscr{L}}$ является эллиптическим и его коэффициенты — гладкие функции, то в силу известных априорных оценок для решений эллиптических краевых задач (см., например, [1]) имеем

$$\| u^0 \|_{H^{m+2}(\Omega)} \leqslant C_m \| f \|_{H^m(\Omega)}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \qquad (9.44)$$

Отсюда и из (9.43) вытекают оценки (9.36), (9.37). Теорема доказана.

Таким образом, очевидно, что для оценки близости решений u^ε и u^0 достаточно построить матрицы N_ε^s, удовлетворяющие условиям $N'1$—$N'3$, а затем оценить величины α_ε, β_ε, γ_ε, а также норму $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$.

Укажем простейший пример, когда условие N' выполнено.

Пример 9.8. Пусть $A_\varepsilon^{ij}(x) \to \widehat{A}^{ij}(x)$ по норме пространства $L^\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Положим $N_\varepsilon^s(x) \equiv 0$ в Ω, $s=1, \ldots, n$. Тогда условия $N'1$—$N'3$ выполнены, причем $\alpha_\varepsilon=0$, $\beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon \leqslant \sup\limits_{i,j=1,\ldots,n} \|A_\varepsilon^{ij} - \widehat{A}^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Таким образом,

$$\| u^\varepsilon - u^0 \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \max_{i,j} \| A_\varepsilon^{ij} - \widehat{A}^{ij} \|_{L^\infty(\Omega)} \| f \|_{L^2(\Omega)}, \quad C=\text{const}. \qquad (9.45)$$

Вообще говоря, согласно теореме 9.7 в правой части последнего неравенства вместо $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ должно стоять $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ однако в данном случае, как видно из вывода оценки (9.41), имеем $\|F_2^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C \sup\limits_{i,j} \|A_\varepsilon^{ij} - \widehat{A}^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|u^0\|_{H^2(\Omega)}$. Поэтому справедлива оценка (9.45).

Ниже мы рассмотрим менее тривиальные случаи, когда имеет место условие N'.

Пример 9.9. Предположим, что матрицы коэффициентов $A_\varepsilon^{ij}(x)$ операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ имеют вид $A_\varepsilon^{ij}(x) = A^{ij}(x/\varepsilon)$, причем элементы $a_{hk}^{ij}(\xi)$ матриц $A^{ij}(\xi)$ — гладкие 1-периодические по ξ функции. Этот случай в более общем виде и другим методом изучен в гл. II.

Определим матрицы $N_\varepsilon^s(x)$ по формуле $N_\varepsilon^s(x) = \varepsilon N^s(x/\varepsilon)$, где $N^s(\xi)$ — 1-периодические по ξ решения системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A^{ij}(\xi) \frac{\partial N^s}{\partial \xi_j} \right) = -\frac{\partial A^{is}}{\partial \xi_i}(\xi) \text{ в } \mathbf{R}^n, \ s=1, \ldots, n. \qquad (9.46)$$

Как показано в § 6.1, эта система разрешима в классе 1-периодических по ξ гладких функций. Определим теперь матрицы коэффициентов $\hat{A}^{ij}$, отвечающие оператору $\widehat{\mathscr{L}}$, который является сильным G-пределом последовательности $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ при $\xi \to 0$. Положим

$$\widehat{A}^{ij}=\left\langle A^{ij}(\xi)+A^{is}(\xi)\frac{\partial N^j}{\partial \xi_s}\right\rangle, \qquad (9.47)$$

где $\langle f\rangle=\int\limits_Q f(\xi)\,d\xi$, $Q=\{\xi: 0<\xi_j<1,\ j=1, \ldots, n\}$.

Проверим, что для рассматриваемых A_ε^{ij}, $\widehat{A}^{ij}$, N_ε^s справедливо условие N'.

Условие $N'1$ выполняется очевидным образом в силу гладкости функций $N^s(\xi)$ причем $\alpha_\varepsilon\leqslant C\varepsilon$, $C=\text{const}$.

Условие $N'3$ выполнено в силу уравнений (9.46), причем $\gamma_\varepsilon=0$.

Проверим выполнение условия $N'2$. Легко видеть, что $\widehat{A}_\varepsilon^{ij}(x)-\widehat{A}^{ij} \equiv B^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где $B^{ij}(\xi)$— матрицы, элементы которых гладкие 1-периодические по ξ функции, причем в силу (9.47) $\int\limits_Q B^{ij}(\xi)\times d\xi=0$. Согласно лемме 1.8 $B^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_l}F_l^{ij}(\varepsilon, x)$, где элементы матриц $F_l^{ij}(\varepsilon, x)$— гладкие функции, равномерно ограниченные по ε, x. Это означает, что $\left\|B^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}\leqslant C\varepsilon$. Таким образом, $\beta_\varepsilon\leqslant C\varepsilon$, $C=\text{const}$.

Теперь для получения эффективной оценки $u^\varepsilon-u^0$ нам достаточно оценить величину $\|v^\varepsilon\|H^1(\Omega)$. Рассмотрим срезающую функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, такую, что

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \varphi_\varepsilon(x)=1 \text{ при } \rho(x, \partial\Omega)\leqslant\varepsilon,\\ \varphi_\varepsilon(x)=0 \text{ при } \rho(x, \partial\Omega)\geqslant 2\varepsilon,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 1,\ |\nabla\varphi_\varepsilon|\leqslant C\varepsilon^{-1},\\ C=\text{const}.\end{array}\right\} \qquad (9.48)$$

Легко видеть, что v^ε является решением задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v^\varepsilon)=0 \text{ в } \Omega,\quad v^\varepsilon=\psi_\varepsilon'\equiv\varepsilon\varphi_\varepsilon N^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_p} \text{ на } \partial\Omega, \qquad (9.49)$$

причем

$$\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_j}=\varepsilon\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_j}N^p\frac{\partial u^0}{\partial x_p}+\varphi_\varepsilon\frac{\partial N^p}{\partial\xi_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_p}+\varepsilon\varphi_\varepsilon N^p\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\,\partial x_j}. \qquad (9.50)$$

Поскольку элементы матриц N^p, $\frac{\partial N^p}{\partial\xi_j}$, $p, j=1, \ldots, n$,— ограниченные функции, то

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C_1\left[\|\nabla u^0\|_{L^2(K_\varepsilon)}+\varepsilon\|u^0\|_{H^2(\Omega)}\right], \qquad (9.51)$$

где постоянная C_1 не зависит от ε, K_ε — множество точек $x\in\Omega$, в которых $\varphi_\varepsilon(x)\neq 0$. Легко видеть, что K_ε лежит в окрестности $\partial\Omega$

порядка ε, поэтому в силу леммы 1.5 $\|\nabla u^0\|_{L^2(K_\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)}$. Таким образом,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)},\ C_3=\mathrm{const}. \tag{9.52}$$

Применяя теорему 3.3 к решению задачи (9.49), получим

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_4\varepsilon^{1/2}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Поэтому из теоремы 9.7 можем заключить, что имеет место оценка

$$\left\|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon N^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_p}\right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Глава II

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. КОМПОЗИТЫ И ПЕРФОРИРОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Настоящая глава посвящена вопросам усреднения в механике сильно неоднородных сред. Рассматривается стационарная система линейной теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами в областях, которые могут содержать мелкие полости, расположенные периодически с периодом ε Такие области называются в механике перфорированными. Основной задачей является построение эффективной среды, т. е. построение таких приближений к решению системы, которые удовлетворяют системе с медленно меняющимися или постоянными коэффициентами в области без полостей. Такие системы называются усредненными. В гл. II даны оценки отклонения вектора смещения, тензора деформаций, энергии, тензора напряжений микронеоднородной упругой среды от соответствующих величин, отвечающих усредненной системе при различных граничных условиях. Задачам усреднения для уравнений с частными производными посвящены многие монографии и статьи (см. [107; 91, 3; 22; 133] и приведенную там библиографию, а также список литературы в конце настоящей книги).

§ 1. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ НА ВНЕШНЕЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ И УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОСТЕЙ

1.1. Постановка задачи. Усредненные уравнения

Пусть $\Omega^\varepsilon=\Omega\cap\varepsilon\omega$ — перфорированная область типа I с периодической структурой, определенная в § 4 гл. I.

В области Ω^ε рассмотрим краевую задачу вида

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)=f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\&u^\varepsilon=\Phi^\varepsilon \text{ на } \Gamma_\varepsilon;\quad \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)\equiv\nu_h A^{hk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}=0 \text{ на } S_\varepsilon,\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

где $A^{hk}(\xi)$ — $(n\times n)$-матрицы класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\varkappa_1, \varkappa_2=\mathrm{const}>0$, элементы которых $a_{ij}^{hk}(\xi)$ — 1-периодические по ξ функции. Предполагается также, что коэффициенты $a_{ij}^{hk}(\xi)$ кусочно-гладкие в ω, причем поверхности, на которых они могут иметь разрывы, не пересекаются с $\partial\omega$ (т. е. $a_{ij}^{hk}\in\widehat{C}$, см. п. 6.1 гл. I).

Существование и единственность решения задачи (1.1) при $f^\varepsilon\in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $\Phi^\varepsilon\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ обеспечиваются теоремой 5.1 гл. I.

Наша задача — исследовать поведение решения u^ε задачи (1.1) при $\varepsilon\to 0$ и найти оценку отклонения u^ε от u^0, где u^0 — решение краевой задачи для некоторой усредненной системы теории упругости с постоянными коэффициентами в области Ω. Используя построенные приближенные решения, вычислим эффективные характеристики перфорированного сильно неоднородного упругого тела, упругое состояние которого описывается условиями задачи (1.1), такие, как энергия, тензор напряжений и частоты собственных колебаний.

Усредненная система уравнений, соответствующая задаче (1.1), имеет вид

$$\widehat{\mathcal{L}}(v)\equiv\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\widehat{A}^{pq}\frac{\partial v}{\partial x_q}\right)=f, \tag{1.2}$$

где матрицы коэффициентов $\widehat{A}^{pq}$ $(p, q=1, \ldots, n)$ определены по формуле

$$\widehat{A}^{pq}=(\mathrm{mes}\, Q\cap\omega)^{-1}\int\limits_{Q\cap\omega}\left(A^{pq}(\xi)+A^{pj}(\xi)\frac{\partial N^q(\xi)}{\partial\xi_j}\right)d\xi, \tag{1.3}$$

а матрицы $N^q(\xi)$, $q=1,\ldots,n$, являются решениями следующих краевых задач для системы теории упругости:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}N^q\right)=-\dfrac{\partial}{\partial\xi_k}A^{kq}(\xi)\ \text{в}\ \omega,\\ \sigma(N^q)=-\nu_k A^{kq}\ \text{на}\ \partial\omega,\\ N^q(\xi)\ \text{1-периодична по}\ \xi,\ \displaystyle\int\limits_{Q\cap\omega}N^q(\xi)\,d\xi=0,\\ Q=\{\xi: 0<\xi_j<1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}.\end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Существование матриц N^q является следствием теоремы 6.1 гл. I.

В силу теоремы 6.2 гл. I элементы матриц N^q являются кусочно-гладкими функциями в ω из класса $\widehat{C}$.

К системе (1.2) можно прийти, используя метод асимптотических разложений, изложенный во многих монографиях и статьях [3; 91; 107]. Мы не проводим здесь эту хорошо известную процедуру. Для системы теории упругости она проводится точно так же, как и для эллиптического уравнения второго порядка (см., например, [107]).

Теорема 1.1. *Система* (1 2) *является системой теории упругости, т. е. матрицы* $\widehat{A}^{kl}$ *с элементами* $\widehat{a}_{ij}^{kl}$ *удовлетворяют условиям*

$$\widehat{a}_{ij}^{kl} = \widehat{a}_{ji}^{lk} = \widehat{a}_{kj}^{il}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{\varkappa}_1 \eta_{ih}\eta_{ih} \leqslant \widehat{a}_{ij}^{kl}\eta_{ik}\eta_{jl} \leqslant \widetilde{\varkappa}_2\eta_{ih}\eta_{ih} \tag{1.6}$$

для любой симметрической матрицы $\eta = \{\eta_{ih}\}$, *где* $\widetilde{\varkappa}_1$, $\widetilde{\varkappa}_2$ — *положительные постоянные, т. е. оператор* $\widehat{\mathscr{L}}$ *принадлежит классу* $E(\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2)$.

Доказательство В частном случае, когда $\omega = \mathbf{R}^n$, т. е. $\Omega^\varepsilon = \Omega$, соотношения (1.5), (1.6) можно вывести из теоремы 9.2 гл. I, поскольку для матриц $N_\varepsilon^q(x) \equiv \varepsilon N^q(x/\varepsilon)$ и $\widehat{A}^{kl}$ выполнено условие N, которое легко проверяется исходя из (1.3), (1.4). В общем случае, когда ω может отличаться от $\mathbf{R}^n$, т. е. Ω^ε может быть перфорированной областью, теорема 9.2 гл. I неприменима. Поэтому докажем соотношения (1.5), (1.6) другим способом.

Пусть ζ — вектор-столбец с компонентами $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Обозначим через ζ^* строку $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Через A^* обозначим матрицу, транспонированную к матрице A, через $A\zeta = \gamma$ — вектор-столбец с компонентами $\gamma_j = a_{ji}\zeta_i$, $j = 1, \ldots, n$, через $\gamma^* = \zeta^* A$ — вектор-строку с компонентами $\gamma_j = \zeta_i a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$.

Легко видеть, что второе равенство в (1.5) вытекает непосредственно из формулы (1.3) и свойств элементов матриц $A^{pq}(\xi)$, поскольку

$$\widehat{a}_{st}^{pq} = (\operatorname{mes} Q \cap \omega)^{-1} \int\limits_{Q \cap \omega} \left[a_{sm}^{pl}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_l} N_{mt}^q(\xi) + a_{st}^{pq}(\xi) \right] d\xi, \tag{1.7}$$

где N_{mt}^q — элементы матриц N^q.

Установим первое равенство в (1.5), которое равносильно соотношению $(\widehat{A}^{pq})^* = \widehat{A}^{qp}$.

Из интегрального тождества для решения задачи (1.4) вытекает, что для любой матрицы $M(\xi) \in \widetilde{W}_2^1(\omega)$ справедливо равенство

$$-\int\limits_{Q \cap \omega} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} A^{kj}(\xi) \frac{\partial N^q}{\partial \xi_j} d\xi = \int\limits_{Q \cap \omega} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} A^{kq}(\xi)\, d\xi. \tag{1.8}$$

Пользуясь тем, что $(A^{kj}(\xi))^* = A^{jk}(\xi)$, $(AB)^* = B^* A^*$, для матриц A, B, из (1.8) получаем

$$-\int\limits_{Q \cap \omega} \frac{\partial N^{q*}}{\partial \xi_j} A^{jk}(\xi) \frac{\partial M^*}{\partial \xi_k} d\xi = \int\limits_{Q \cap \omega} A^{qk}(\xi) \frac{\partial M^*}{\partial \xi_k} d\xi. \tag{1.9}$$

Полагая в этом равенстве $M=N^{p*}$ и учитывая (1.3), а также соотношение $(A^{pj})^*=A^{jp}$, находим

$$\int_{Q\cap\omega} \frac{\partial}{\partial\xi_j}(N^{q*}+\xi_q E)A^{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}(N^p+\xi_p E)\,d\xi=$$

$$=\int_{Q\cap\omega}\left(\frac{\partial N^{q*}}{\partial\xi_j}A^{jk}(\xi)\frac{\partial N^p}{\partial\xi_k}+\delta_{jq}A^{jk}(\xi)\frac{\partial N^p}{\partial\xi_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial N^{q*}}{\partial\xi_j}A^{jk}(\xi)\delta_{kp}E+\delta_{jq}A^{jk}(\xi)\delta_{kp}E\right)d\xi=$$

$$=\int_{Q\cap\omega}\left(\frac{\partial N^{q*}}{\partial\xi_j}A^{jk}(\xi)\frac{\partial N^p}{\partial\xi_k}+A^{qk}(\xi)\frac{\partial N^p}{\partial\xi_k}+\frac{\partial N^{q*}}{\partial\xi_j}A^{jp}(\xi)+A^{qp}(\xi)\right)d\xi=$$

$$=\int_{Q\cap\omega}\left(\frac{\partial N^{q*}}{\partial\xi_j}A^{jp}(\xi)+A^{qp}(\xi)\right)d\xi=(\operatorname{mes} Q\cap\omega)(\widehat{A}^{pq})^*.$$

Отсюда выводим, что матрицы коэффициентов усредненной системы представляются в виде

$$\widehat{A}^{pq}=(\operatorname{mes} Q\cap\omega)^{-1}\int_{Q\cap\omega}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(N^{p*}+\xi_p E)A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}(N^q+\xi_q E)\,d\xi. \tag{1.10}$$

Меняя местами в этой формуле p и q и транспонируя полученное равенство, получим $\widehat{A}^{pq}=(\widehat{A}^{qp})^*$.

Для доказательства неравенств (1.6) заметим, что $\widehat{a}_{ij}^{hk}\eta_{ih}\eta_{jk}=$ $=\eta^{h*}\widehat{A}^{hk}\eta^k$, где η^k — столбец с компонентами $\eta_{1k},\ldots,\eta_{nk}$, $\eta^{h*}=$ $=(\eta_{1h},\ldots,\eta_{nh})$. Для любой симметрической матрицы η с постоянными элементами η_{ih} получаем в силу (1.10)

$$\widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jq}=\eta^{p*}\widehat{A}^{pq}\eta^q=(\operatorname{mes} Q\cap\omega)^{-1}\int_{Q\cap\omega}\frac{\partial}{\partial\xi_k}[\eta^{p*}(N^{p*}+\xi_p E)]\times$$

$$\times A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}[(N^q+\xi_q E)\eta^q]\,d\xi. \tag{1.11}$$

Пусть $w=(N^q+\xi_q E)\eta^q$ — вектор-функция с компонентами $w_1,\ldots,w_n$. Тогда из (1.11) имеем

$$\widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jq}=(\operatorname{mes} Q\cap\omega)^{-1}\int_{Q\cap\omega}\frac{\partial w^*}{\partial\xi_k}A^{kj}\frac{\partial w}{\partial\xi_j}\,d\xi=$$

$$=(\operatorname{mes} Q\cap\omega)^{-1}\int_{Q\cap\omega}a_{st}^{kj}\frac{\partial w_t}{\partial\xi_j}\frac{\partial w_s}{\partial\xi_k}\,d\xi. \tag{1.12}$$

Допустим, что для некоторой симметрической матрицы η выполняется равенство $\widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jq}=0$. Тогда из (1.12) и оценки (3.13) гл. I вытекает, что $\|e(w)\|_{L^2(Q\cap\omega)}=0$ и, значит, w является жестким перемещением (см. доказательство теоремы 2.5 гл. I). С другой стороны, $w=(N^q+\xi_q E)\eta^q$. Поэтому ввиду периодичности $N^q(\xi)$ вектор-функция $N^q\eta^q$ должна быть постоянной, а матрица η должна быть кососимметрической. Следовательно, $\eta=0$. Поэтому $\widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jq}>0$ при $\eta\neq 0$. Отсюда вытекает оценка (1.6) снизу. Оценка (1.6) сверху легко следует из формулы (1.7) для $\widehat{a}_{st}^{pq}$ и ограниченности коэффициентов $a_{st}^{pq}(\xi)$. Теорема доказана.

1.2. Основные оценки и их приложения

В качестве приближенного решения задачи (1.1) возьмем вектор-функцию

$$\widetilde{u}=u^0(x)+\varepsilon N^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_p},\tag{1.13}$$

где $N^p(\xi)$ — матрицы, определенные из (1.4), а вектор-функция $u^0(x)$ является решением задачи

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0)=f^0 \text{ в } \Omega,\quad u^0=\Phi^0 \text{ на } \partial\Omega.\tag{1.14}$$

Теорема 1.2. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ — обобщенное решение задачи* (1.1) *в* Ω^ε

$$f^\varepsilon\in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \Phi^\varepsilon\in H^1(\Omega^\varepsilon),\ f^0\in H^1(\Omega),\ \Phi^0\in H^3(\Omega),$$

$u^0(x)$ *— решение усредненной задачи* (1.14). *Тогда*

$$\left\|u^\varepsilon(x)-u^0(x)-\varepsilon N^q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_q}\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c\left[\|f^\varepsilon-f^0\|_*+\right.$$

$$\left.+\|\Phi^\varepsilon-\Phi^0\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}+\varepsilon^{1/2}\|f^0\|_{H^1(\Omega)}+\varepsilon^{1/2}\|\Phi^0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}\right],\tag{1.15}$$

где постоянная c не зависит от ε, норма $\|\cdot\|_*$ определена формулой (5.3) *гл.* I.

Доказательство. Применяя оператор $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $u^\varepsilon-\widetilde{u}$, получаем следующие равенства, которые понимаются в смысле теории обобщенных функций:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})=\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u^0+\varepsilon N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-A^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[A^{hk}\left(\varepsilon\frac{\partial N^s}{\partial x_k}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}+\varepsilon N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)\right]=f^\varepsilon-f^0+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\left(\widehat{A}^{hk}-\widehat{A}^{hk}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right).$$

Так как для матриц N^s выполнены уравнения (1.4), то

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=f^\varepsilon-f^0+\left(\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}(A^{hk}N^s)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-\varepsilon A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s}=f^\varepsilon-f^0-\varepsilon A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s}+$$

$$+\left[\hat{A}^{pq}-A^{pq}+A^{pj}\frac{\partial N^q}{\partial \xi_j}-\frac{\partial}{\partial \xi_h}(A^{hp}N^q)\right]\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}. \tag{1.16}$$

Определим матрицы $N^{pq}(\xi)$, $(p,\ q=1,\dots,n)$, как обобщенные решения краевых задач

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}N^{pq}(\xi)\right)=-\frac{\partial}{\partial \xi_k}(A^{kp}(\xi)N^q(\xi))-\\&-A^{pj}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}N^q(\xi)-A^{pq}(\xi)+\hat{A}^{pq}\ \text{ в } \omega,\\&\sigma(N^{pq})=-\nu_k A^{kp}(\xi)N^q(\xi)\ \text{ на } \partial\omega,\\&N^{pq}\ \text{1-периодична по } \xi,\quad \int\limits_{Q\cap\omega}N^{pq}(\xi)\,d\xi=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Существование $N^{pq}(\xi)$ вытекает из теоремы 6.1 гл. I и равенств (1.3). Таким образом, из (1.16), (1.17) заключаем, что

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-u^0)=f^\varepsilon-f^0-\varepsilon A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s}+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}=f^\varepsilon-f^0-\varepsilon A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s}-$$

$$-\varepsilon A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_p\partial x_q\partial x_k}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left[A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}\right].$$

Поэтому

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=f^\varepsilon-f^0+\varepsilon F_0+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}F_k, \tag{1.18}$$

где

$$F_0=-A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s}-A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_p\partial x_q\partial x_k},$$

$$F_k=A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}. \tag{1.19}$$

Рассмотрим граничные условия вектор-функции $u^\varepsilon-\tilde{u}$ на S_ε. Имеем

$$\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)-\sigma_\varepsilon(\tilde{u})=-\nu_h A^{hk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u^0+\varepsilon N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right)=$$

$$=-\nu_h A^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\nu_h A^{hk}\frac{\partial N^s}{\partial \xi_k}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}-\varepsilon\nu_h A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s\partial x_k}=$$

$$=-\left(\nu_h A^{hq}+\nu_h A^{hk}\frac{\partial N^q}{\partial \xi_k}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_q}-\varepsilon\nu_k A^{kp}N^q\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}.$$

В силу граничных условий на $\partial\omega$ для N^q и N^{pq} отсюда следует, что

$$\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=\varepsilon\nu_k A^{kj}\frac{\partial N^{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_p\partial x_q}=\varepsilon\nu_h F_k. \tag{1.20}$$

На внешней части границы области Ω^ε имеем

$$u^\varepsilon-\tilde{u}=\Phi^\varepsilon-\Phi^0-\varepsilon N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}=\psi_\varepsilon \text{ на } \Gamma_\varepsilon. \tag{1.21}$$

Покажем, что

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}\leqslant c\,(\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)}+\|\Phi^\varepsilon-\Phi^0\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}), \tag{1.22}$$

где постоянная c не зависит от ε. Для этого достаточно показать, что существует вектор-функция $\Psi_\varepsilon\in H^1(\Omega^\varepsilon)$, такая, что

$$\Psi_\varepsilon+\varepsilon N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\in H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon),$$

$$\|\Psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_1\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Пусть φ_ε—скалярная функция из $C^\infty(\bar{\Omega})$, такая, что $\varphi_\varepsilon(x)=1$ при $\rho(x,\partial\Omega)\leqslant\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(x)=0$ при $\rho(x,\partial\Omega)\geqslant 2\varepsilon$, $0\leqslant\varphi_\varepsilon(x)\leqslant 1$, $|\nabla\varphi|\leqslant c_2\varepsilon^{-1}$.

Положим

$$\Psi_\varepsilon(x)=-\varphi_\varepsilon\varepsilon N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s};\quad K_\varepsilon=\{x:\rho(x,\partial\Omega)\leqslant 2\varepsilon\}\cap\Omega^\varepsilon.$$

Легко видеть, что $\Psi_\varepsilon\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ и

$$\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_j}=-\varepsilon\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_j}N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}-\varepsilon\varphi_\varepsilon\frac{\partial N^s}{\partial x_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}-\varepsilon\varphi_\varepsilon N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_j\partial x_s}.$$

Поэтому, учитывая свойства φ_ε и ограниченность $N^s(\xi)$, $\partial N^s(\xi)/\partial\xi_j$, устанавливаем неравенство

$$\|\Psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_3(\|u^0\|_{H^1(K_\varepsilon)}+\varepsilon\|u^0\|_{H^2(K_\varepsilon)}). \tag{1.24}$$

Пользуясь леммой 1.5 гл. I, получаем

$$\|u^0\|_{H^1(K_\varepsilon)}\leqslant c_4\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)},$$

где постоянная c_4 не зависит от ε. Отсюда и из (1.24) выводим неравенство (1.23). Следовательно, справедлива оценка (1.22).

Таким образом, на основании (1.18), (1.20)—(1.22) заключаем, что $u^\varepsilon - \tilde{u}$ — обобщенное решение следующей смешанной краевой задачи, изученной в § 5 гл. I:

$$\mathcal{L}_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) = f^\varepsilon - f^0 + \varepsilon F_0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} F_k \text{ в } \Omega^\varepsilon,$$

$$u^\varepsilon - \tilde{u} = \psi_\varepsilon \text{ на } \Gamma_\varepsilon; \ \sigma_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) = \varepsilon \nu_k F_k \text{ на } S_\varepsilon,$$

причем для ψ_ε справедлива оценка (1.22) и, кроме того,

$$\sum_{k=0}^{n} \|F_k\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_5 \|u^0\|_{H^3(\Omega)},$$

где постоянная c_5 не зависит от ε, поскольку элементы матриц A^{hk}, N^p, N^{pq} — кусочно-гладкие функции (см. теорему 6.2 гл. I). По теореме 5.1 гл. I и замечанию 5.2 отсюда получаем

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_6 (\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^3(\Omega)} + \|f^\varepsilon - f^0\|_* + \|\Phi^\varepsilon - \Phi^0\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}).$$

Из этого неравенства следует (1.15), поскольку в силу априорных оценок для решений сильно эллиптических систем (см. [1])

$$\|u^0\|_{H^3(\Omega)} \leqslant c (\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}).$$

Теорема доказана.

Получим теперь некоторые следствия из этой теоремы.

Формула (1.13) для приближенного решения задачи (1.1) позволяет оценить эффективные характеристики сильно неоднородных тел, такие, как тензор напряжений, энергия и др.

Пусть Ω' — подобласть области Ω с гладкой границей, $\Omega' \subset \Omega$. Положим

$$E_\varepsilon (u^\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, A^{jk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} \right) dx, \tag{1.25}$$

$$E_0 (u^0) = \int\limits_{\Omega'} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j}, \hat{A}^{jk} \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \right) dx. \tag{1.26}$$

Величины $E_\varepsilon (u^\varepsilon)$, $E_0 (u^0)$ задают энергию, сосредоточенную в $\Omega^\varepsilon \cap \Omega'$ и Ω' соответственно.

Теорема 1.3 (о сходимости интегралов энергии). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда*

$$|E_\varepsilon (u^\varepsilon) - (\operatorname{mes} Q \cap \omega) E_0 (u^0)| \leqslant$$

$$\leqslant c [\varepsilon^{1/2} (\|f^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|^2_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \|f^0 - f^\varepsilon\|^2_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} +$$

$$+ (\|\Phi^0\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \|f^0\|_{L^2(\Omega)}) (\|f^0 - f^\varepsilon\|_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)})], \tag{1.27}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. В силу теоремы 1.2

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial N^p(\varepsilon^{-1}x)}{\partial \xi_i}\frac{\partial u^0}{\partial x_p} + q_i^\varepsilon(x), \tag{1.28}$$

где

$$\|q_i^\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_0 [\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \\ + \|f^0 - f^\varepsilon\|_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}], \tag{1.29}$$

c_0 постоянная, не зависящая от ε. Поэтому

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} \left(\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_i} + \frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}\frac{\partial N^{s*}}{\partial \xi_i}\right) A^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial N^t}{\partial \xi_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\right) dx + p_\varepsilon, \tag{1.30}$$

где

$$p_\varepsilon = \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} \left(\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_i} + \frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}\frac{\partial N^{s*}}{\partial \xi_i}\right) A^{ij} q_\varepsilon^j\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} q_\varepsilon^i A^{ij}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial N^t}{\partial \xi_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\right) dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} q_\varepsilon^i A^{ij} q_\varepsilon^j\, dx.$$

Отсюда, принимая во внимание ограниченность элементов матриц A^{ij} и $\dfrac{\partial N^s}{\partial \xi_i}$ (см. теорему 6.2 гл. I), получаем

$$|p_\varepsilon| \leqslant c_1\left[\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} q_\varepsilon^j q_\varepsilon^j\, dx + \|u^0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon \cap \Omega')}\left(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} q_\varepsilon^j q_\varepsilon^j\, dx\right)^{1/2}\right].$$

Из этого неравенства и из (1.29) вытекает, что

$$|p_\varepsilon| \leqslant c_2 \{\varepsilon(\|f^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|^2_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \|f^0 - f^\varepsilon\|^2_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \\ + (\|f^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})[\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \\ + \|f^0 - f^\varepsilon\|_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}]\}.$$

Следовательно,

$$|p_\varepsilon| \leqslant c_3[\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|^2_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \|f^0 - f^\varepsilon\|^2_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \\ + (\|f^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})(\|f^0 - f^\varepsilon\|_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)})]. \tag{1.31}$$

Введем матрицы

$$H^{st}(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i}(N^{s*} + \xi_s E) A^{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j}(N^t + \xi_t E) - (\operatorname{mes} Q \cap \omega)\hat{A}^{st}. \tag{1.32}$$

Будем считать, что $A^{ij}(\xi)$, $N^s(\xi)$, $\partial N^s/\partial\xi_i$ продолжены нулем в $\mathbb{R}^n\setminus\omega$. Тогда в силу формулы (1.10) имеем

$$\int\limits_Q H^{st}(\xi)\,d\xi=0, \tag{1.33}$$

и в (1.30) область интегрирования $\Omega^\varepsilon\cap\Omega'$ можно заменить на Ω'. Поэтому, преобразуя (1.30), получаем

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon)=\int\limits_{\Omega'}\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial\xi_i}(N^{s*}+\xi_sE)A^{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(N^t+\xi_tE)\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx+p^\varepsilon. \tag{1.34}$$

Отсюда и из (1.32) заключаем, что

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon)-(\mathrm{mes}\,Q\cap\omega)\,E_0(u^0)=\int\limits_{\Omega'}\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}H^{st}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx+p_\varepsilon. \tag{1.35}$$

Заметим, что в силу теоремы 6.2 гл. I элементы матриц H^{st} являются ограниченными функциями.

Обозначим через $\mathcal{Y}_\varepsilon$ множество индексов $z\in\mathbb{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(Q+z)\subset\Omega'$, а через $\mathcal{Y}_\varepsilon'$ — множество индексов $z\in\mathbb{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(Q+z)\cap\partial\Omega'\neq\varnothing$. Тогда

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon)-(\mathrm{mes}\,Q\cap\omega)\,E_0(u^0)=$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{Y}_\varepsilon'}\;\int\limits_{\varepsilon(z+Q)\cap\Omega'}\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}H^{st}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx+$$

$$+\sum_{z\in\mathcal{Y}_\varepsilon}\;\int\limits_{\varepsilon(z+Q)}\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}H^{st}\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx+p_\varepsilon=K_1+K_2+p_\varepsilon. \tag{1.36}$$

Легко видеть, что первую сумму в правой части этого равенства можно представить в виде

$$K_1=\int\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s}H^{st}\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx,$$

где G_ε — открытое множество, примыкающее к $\partial\Omega'$ и лежащее в ее δ — окрестности, δ порядка ε. Поэтому, пользуясь леммой 1.5 гл. I, выводим, что

$$|K_1|\leqslant c_4\varepsilon\,\|u^0\|^2_{H^2(\Omega')}. \tag{1.37}$$

Рассмотрим K_2 — вторую сумму в правой части (1.36). Обозначим через Ω'' множество, составленное из кубов $\varepsilon(z+Q)$, когда z пробегает множество $\mathcal{Y}_\varepsilon$. Положим

$$\gamma_t(x)=-\frac{1}{\mathrm{mes}\,\varepsilon Q}\int\limits_{\varepsilon(z+Q)}\frac{\partial u^0}{\partial x_t}\,dx\quad\text{при } x\in\varepsilon(z+Q).$$

Векторы $\gamma_t(x)$ постоянны на каждом из множеств $\varepsilon(z+Q)$. Имеем

$$K_2 = \int_{\Omega''} \frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s} H^{st} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_t} + \gamma_t \right) dx - \int_{\Omega''} \frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s} H^{st} \gamma_t dx =$$

$$= \int_{\Omega''} \frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s} H^{st} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_t} + \gamma_t \right) dx - \int_{\Omega''} \left(\frac{\partial u^{0*}}{\partial x_s} + \gamma_s^* \right) H^{st} \gamma_t dx + \int_{\Omega''} \gamma_s^* H^{st} \gamma_t dx. \tag{1.38}$$

Легко видеть, что

$$\int_{\Omega''} |\gamma_t|^2 dx = \sum_{z \in \mathcal{Y}_\varepsilon} \operatorname{mes} \varepsilon Q \frac{1}{(\operatorname{mes} \varepsilon Q)^2} \left(\int_{\varepsilon(z+Q)} \frac{\partial u^0}{\partial x_t} dx \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{z \in \mathcal{Y}_\varepsilon} \frac{\operatorname{mes} \varepsilon Q}{(\operatorname{mes} \varepsilon Q)^2} \operatorname{mes} \varepsilon Q \int_{\varepsilon(z+Q)} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_t} \right|^2 dx = \int_{\Omega''} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_t} \right|^2 dx. \tag{1.39}$$

Учитывая неравенство Пуанкаре в $\varepsilon(z+Q)$, получаем

$$\int_{\Omega''} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_t} + \gamma_t \right|^2 dx \leqslant c_5 \varepsilon^2 \|u^0\|^2_{H^2(\Omega'')}. \tag{1.40}$$

Оценим теперь K_2. В силу (1.33) последний интеграл в (1.38) равен нулю, так как γ_t постоянны на множествах $\varepsilon(z+Q)$, $z \in \mathcal{Y}_\varepsilon$. Следовательно,

$$|K_2| \leqslant c_6 \left(\int_{\Omega''} |\nabla u^0|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^{n} \int_{\Omega''} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_t} + \gamma_t \right|^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ c_7 \left(\sum_{t=1}^{n} \int_{\Omega''} |\gamma_t|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{s=1}^{n} \int_{\Omega''} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \gamma_s \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Учитывая (1.39), (1.40), отсюда получаем

$$|K_2| \leqslant c_8 \varepsilon \|u^0\|^2_{H^2(\Omega'')}. \tag{1.41}$$

Из (1.31), (1.36), (1.37), (1.41) и неравенства

$$\|u^0\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_9 (\|f^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)})$$

получаем оценку (1.27). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости тензоров напряжений, т. е. матриц со столбцами

$$\sigma_\varepsilon^p(x) \equiv A^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{1.42}$$

где u^ε — решение задачи (1.1).

Усредненной задаче (1.14) соответствует тензор напряжений вида

$$\sigma_0^p(x) \equiv \widehat{A}^{pk} \frac{\partial u^0}{\partial x_k}, \quad p=1, \ldots, n. \tag{1.43}$$

В теории усреднения матрицы со столбцами σ_ε^p, σ_0^p называются также обобщенными градиентами, или потоками.

В следующей теореме предполагаем, что

$$\sigma_\varepsilon^p(x) \equiv 0 \text{ в } \Omega \setminus \Omega^\varepsilon$$

и что

$$A^{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial N^s(\xi)}{\partial \xi_l} \equiv N^p(\xi) \equiv 0 \text{ в } Q \setminus \omega.$$

Теорема 1.4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.3. *Тогда*

$$\left\| \sigma_\varepsilon^p - (\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \sigma_0^p - G^{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_q} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c\,[\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi^0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}) + \|f^0 - f^\varepsilon\|_* + \|\Phi^0 - \Phi^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}], \tag{1.44}$$

где постоянная c не зависит от ε, матрицы $G^{pq}(\xi)$ определены формулами

$$\begin{gathered} G^{ps}(\xi) = A^{ps}(\xi) + A^{pi} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_i} - (\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \widehat{A}^{ps} \text{ при } \xi \in Q \cap \omega, \\ G^{ps}(\xi) = -(\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \widehat{A}^{ps} \text{ при } \xi \in Q \setminus \omega. \end{gathered} \tag{1.45}$$

Кроме того, если $f^\varepsilon = f^0$, $\Phi^\varepsilon = \Phi^0$, то $\sigma_\varepsilon^p(x) \to (\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \sigma_0^p(x)$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Воспользуемся соотношениями (1.28), (1.29), вытекающими из теоремы 1.2. Тогда, согласно (1.42) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^p(x) &\equiv A^{pi} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = A^{pi} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + A^{pi} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_i} \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + A^{pi} q_i^\varepsilon(x) = \\ &= \left(A^{ps} + A^{pi} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + A^{pi} q_i^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Учитывая (1.43), отсюда получаем

$$\sigma_\varepsilon^p(x) - (\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \sigma_0^p(x) = G^{ps}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + A^{pi} q_i^\varepsilon(x).$$

Из этого равенства и из (1.29) вытекает оценка (1.44).

Слабая сходимость $\sigma_\varepsilon^p(x)$ к $(\operatorname{mes} Q \cap \omega)\sigma_0^p(x)$ при $f^\varepsilon = f^0$, $\Phi^\varepsilon = \Phi^0$ вытекает из (1.44) и равенства $\int\limits_Q G^{ps}(\xi)\,d\xi = 0$, в силу которого по лемме 1.6 гл. I $G^{ps}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s} \to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

§ 2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

Результаты, аналогичные полученным в § 1 для смешанной краевой задачи с условиями Дирихле на внешней части границы Ω^ε и с условиями Неймана на границе полостей, могут быть доказаны и для задачи Неймана в перфорированной области Ω^ε типа II (см. § 4 гл. I).

Однако в последнем случае возникают дополнительные трудности при оценке граничных значений конормальной производной быстро осциллирующего корректора вида $\varepsilon N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s}$. Поэтому, чтобы прояснить основные идеи доказательства теоремы, аналогичной теореме 1.2, рассмотрим сначала задачу Неймана в области Ω, не зависящей от ε, для одного эллиптического уравнения второго порядка с быстро осциллирующими гладкими периодическими коэффициентами. Отметим, что отсутствие полостей существенно упрощает доказательство.

2.1. Усреднение решений задачи Неймана в области Ω для эллиптического уравнения второго порядка с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами

В ограниченной области Ω с гладкой границей рассмотрим задачу Неймана

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} &\equiv a^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\nu_i = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Предполагается, что $a^{ij}(\xi)$ — гладкие 1-периодические по ξ в $\mathbf{R}^n$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\varkappa_1 |\eta|^2 \leqslant a^{ij}(\xi)\eta_i\eta_j \leqslant \varkappa_2 |\eta|^2 \quad \forall \eta \in \mathbf{R}^n, \quad a^{ij} \equiv a^{ji},$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2=\mathrm{const}>0$. Функции f и φ достаточно гладкие и удовлетворяют условию разрешимости задачи (2.1), т. е.

$$\int\limits_{\Omega} f\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\varphi\,dS. \tag{2.2}$$

Определим функции $N^p(\xi)$, $p=1,\dots,n$, как решения задач

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(a^{kh}(\xi)\frac{\partial N^p}{\partial\xi_h}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi_k}a^{kp}(\xi)\ \text{в}\ \mathbf{R}^n,\\ &N^p(\xi)\ \text{1-периодична по}\ \xi,\ \int\limits_Q N^p(\xi)\,d\xi=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Положим

$$\hat{a}^{hk}=\int\limits_Q\left[a^{hk}(\xi)+a^{hi}\frac{\partial N^k}{\partial\xi_i}\right]d\xi,\ Q=\{x:0<x_j<1,\ j=1,\dots,n\}.$$

В качестве приближенного решения задачи (2.1) рассмотрим функцию

$$\tilde{u}=u^0(x)+\varepsilon N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s}, \tag{2.4}$$

где u^0 — решение усредненной задачи Неймана

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\mathscr{L}}(u^0)\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}^{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\right)=f\ \text{в}\ \Omega,\\ &\frac{\partial u^0}{\partial\nu_{\hat{A}}}\equiv\hat{a}^{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\nu_i=\varphi\ \text{на}\ \partial\Omega.\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить (см. вывод формулы (1.16)), что

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=-\varepsilon a^{ij}N^s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_i\partial x_s\partial x_j}+$$

$$+\left[\hat{a}^{is}-a^{is}-\varepsilon a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_l}(a^{li}N^s)\right]\frac{\partial^2u^0}{\partial x_s\partial x_i}.$$

Определим функции $N^{is}(\xi)$ как решения задач

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(a^{kh}\frac{\partial N^{is}}{\partial\xi_h}\right)=\hat{a}^{is}-a^{is}-a^{ij}\frac{\partial N^s}{\partial\xi_j}-\frac{\partial}{\partial\xi_l}(a^{li}N^s)\ \text{в}\ \omega,\\ &N^{is}(\xi)\ \text{1-периодична по}\ \xi,\ \int\limits_Q N^{is}(\xi)\,d\xi=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Тогда

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a^{kh}\frac{\partial N^{is}}{\partial\xi_h}\right)\frac{\partial^2u^0}{\partial x_s\partial x_i}-\varepsilon a^{ij}N^s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_s\partial x_i\partial x_j}=$$

$$=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a^{kh}\frac{\partial N^{is}}{\partial\xi_h}\frac{\partial^2u^0}{\partial x_s\partial x_i}\right)-\varepsilon a^{kh}\frac{\partial N^{is}}{\partial\xi_h}\frac{\partial^3u^0}{\partial x_s\partial x_i\partial x_k}-$$

$$-\varepsilon a^{ij}N^s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_s\partial x_i\partial x_j}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}F_k^0+\varepsilon F_1, \tag{2.7}$$

где

$$F_k^0 = a^{kh} \frac{\partial N^{is}}{\partial \xi_h} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_i}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.8}$$

$$F_1 = -a^{kh} \frac{\partial N^{is}}{\partial \xi_h} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_s \partial x_i \partial x_k} - a^{ij} N^s \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_s \partial x_i \partial x_j}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} (u^\varepsilon - \widetilde{u}) \equiv a^{ij} \frac{\partial (u^\varepsilon - \widetilde{u})}{\partial x_j} \nu_i = \varphi - a^{ij} \nu_i \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial N^s}{\partial \xi_j} \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon N^s \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_j} \right) = -a^{ij} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_j} \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_s} - \varepsilon a^{ij} \nu_i N^s \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_j} +$$

$$+ (\widehat{a}^{ij} - a^{ij}) \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_j}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} (u^\varepsilon - \widetilde{u}) = \left[\widehat{a}^{is} - a^{is} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - a^{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial N^s}{\partial \xi_j} \right] \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_s} -$$

$$- \varepsilon a^{ij} \nu_i N^s \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_j}. \tag{2.10}$$

Введем обозначения

$$\alpha^{is}(\xi) \equiv \widehat{a}^{is} - a^{is}(\xi) - a^{ij}(\xi) \frac{\partial N^s(\xi)}{\partial \xi_j}, \tag{2.11}$$

$$\widehat{\xi}_j = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

$$\widehat{S}_t^j = \{\xi : \xi_j = t, \ 0 < \xi_l < 1, \ l \neq j\}.$$

Лемма 2.1. *Функции* $\alpha^{is}(\xi)$, *определенные равенствами* (2.11), *удовлетворяют соотношениям*

$$\int_Q \alpha^{is}(\xi)\, d\xi = 0, \quad i, s = 1, \ldots, n; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \alpha^{is}(\xi) = 0, \quad s = 1, \ldots, n; \tag{2.13}$$

$$\int_{\widehat{S}_t^j} \alpha^{js}(\xi)\, d\widehat{\xi}_j = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}^1, \ s, j = 1, \ldots, n \tag{2.14}$$

(*по* j *суммирование не проводится*).

Доказательство. Равенства (2.12) и (2.13) вытекают непосредственно из (2.3) и определения $\hat{a}^{hk}$. Докажем (2.14). Обозначим через $Q_{t_1 t_2}^j$ множество

$$Q_{t_1 t_2}^j = \{\xi : t_1 < \xi_j < t_2, \ 0 < \xi_l < 1, \ l \neq j\}.$$

Умножим (2.13) на $\xi_j - t_1$ и проинтегрируем по $Q^j_{t_1 t_2}$. Имеем

$$0 = \int\limits_{Q^j_{t_1 t_2}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \alpha^{is}(\xi)(\xi_j - t_1)\, d\xi = \int\limits_{\widehat{S}^j_{t_2}} \alpha^{js}(\xi)(t_2 - t_1)\, d\widehat{\xi}_j - \int\limits_{Q^j_{t_1 t_2}} \alpha^{js}(\xi)\, d\xi.$$

Здесь по j нет суммирования. Полагая $t_1 = t_2 - 1$ и учитывая (2.12), получим (2.14) при $t = t_2$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $\alpha^{is}(\xi)$ — 1-периодические по ξ функции из $H^1(Q)$, удовлетворяющие условиям* (2.1)—(2.14). *Тогда для любой $v \in H^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega} \alpha^{ik}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nu_i v\, dS \right| \leqslant c\varepsilon^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

где постоянная c не зависит от ε и v.

Доказательство. Обозначим через I_ε^1 множество всех таких векторов $z \in \mathbf{Z}^n$, что $\varepsilon(z + \overline{Q}) \subset \Omega$, $\rho(\varepsilon(z+Q), \partial\Omega) \geqslant \varepsilon$. Положим $\Omega_1 = \bigcup\limits_{z \in I_\varepsilon^1} (\varepsilon z + Q)$. Легко видеть, что

$$0 = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha^{ik}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) v\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \alpha^{ik} \nu_i v\, dS -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega_1} \alpha^{ik} \nu_i v\, dS - \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_1} \alpha^{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \alpha^{ik}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nu_i v\, dS = \int\limits_{\partial\Omega_1} \alpha^{ik} \nu_i v\, dS + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_1} \alpha^{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \tag{2.16}$$

Очевидно, что

$$\left| \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_1} \alpha^{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leqslant c\,(\mathrm{mes}\, \Omega \setminus \Omega_1)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_1} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \varepsilon^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} \| \nabla v|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.17}$$

Оценим первый интеграл в правой части (2.16).

Легко видеть, что $\partial\Omega_1$ состоит из $(n-1)$-мерных граней кубов $\varepsilon(z + \overline{Q})$ при некоторых $z \in I_\varepsilon^1$. Через $\sigma_j^1, \ldots, \sigma_j^{l_j}$ обозначим $(n-1)$-мерные грани кубов $\varepsilon(z+Q)$ при $z \in I_\varepsilon^1$, параллельные гиперплоскости $x_j = 0$ и лежащие на $\partial\Omega_1$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\partial\Omega_1 = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{l_j} \overline{\sigma}_j^s.$$

Куб $\varepsilon(z+Q)$, на поверхности которого лежит σ_j^s, обозначим через q_j^s. Легко видеть, что среди q_j^s, $j=1, \ldots, n$, $s=1, \ldots, l_j$, один и тот же куб может встретиться не более $2n$ раз.

В силу условия (2.14) для любого σ_j^s имеем

$$\int_{\sigma_j^s} \alpha^{ik} \nu_i dS = \int_{\sigma_j^s} \alpha^{jk} \nu_j dS = 0, \text{ так как } \nu_i = 0 \text{ при } i \neq j, \tag{2.18}$$

(по j нет суммирования). Положим

$$\eta(x) = (\operatorname{mes} q_j^s)^{-1} \int_{q_j^s} v\,dx, \quad x \in \sigma_j^s, \quad j=1, \ldots, n, \quad s=1, \ldots, l_j.$$

Таким образом, $\eta(x)$ постоянна на каждом σ_j^s. Учитывая (2.18), получаем

$$\left| \int_{\partial\Omega_1} \alpha^{ik} \nu_i v\,dS \right|^2 = \left| \int_{\partial\Omega_1} \alpha^{ik} \nu_i (v-\eta)\,dS \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\partial\Omega_1} |v-\eta|^2 dS = C \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} \int_{\sigma_j^s} |v-\eta|^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} \varepsilon \int_{q_j^s} |\nabla v|^2 dx \leqslant C_1 \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \tag{2.19}$$

При выводе этого неравенства мы воспользовались тем, что среди q_j^s имеется не более $2n$ одинаковых кубов, а также неравенством

$$\int_{\sigma_j^s} |v-\eta|^2 dx \leqslant c\varepsilon \int_{q_j^s} |\nabla v|^2\, dx, \tag{2.20}$$

для доказательства которого нужно сделать замену переменных $\xi = \varepsilon^{-1} x$ и применить утверждения 3 и 4 теоремы 1.2 гл. I для области $\Omega = \varepsilon^{-1} q_j^s$.

Из (2.16), (2.17) и (2.19) вытекает (2.15). Лемма доказана.

Таким образом, в силу (2.7)—(2.10) имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} F_k^0 + \varepsilon F_1 \text{ в } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) &= \alpha^{is} \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \varepsilon F_2 \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

где F_1, F_k^0, F_2 — ограниченные (равномерно по ε) функции.

Полагая $w=u^\varepsilon-\tilde{u}+\eta^\varepsilon$, где постоянная η^ε выбрана из условия $\int\limits_\Omega w dx=0$, из (2.21) получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla w|^2 dx \leqslant c\left[\varepsilon\left|\int\limits_\Omega F_1 w dx\right|+\varepsilon\left|\int\limits_\Omega F_k^0 \frac{\partial w}{\partial x_k} dx\right|\right]+$$
$$+\left|\int\limits_{\partial\Omega} \alpha^{is}\nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_s} w dS\right|+\varepsilon\left|\int\limits_{\partial\Omega} F_k \nu_k w dS\right|+\varepsilon\left|\int\limits_{\partial\Omega} F_2 w dS\right|.$$

Применяя лемму 2.2 при $v=\frac{\partial u^0}{\partial x_s} w$ и неравенство Пуанкаре (1.5) гл. I, получаем, что

$$\left(\int\limits_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant c\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{C^3(\bar{\Omega})}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.3. *Пусть* u^ε, u^0 — *решения задач* (2.1), (2.5) *соответственно, причем* f, φ — *гладкие функции, для которых выполнено условие разрешимости задач* (2.1), (2.5). *Тогда найдется такая постоянная* η^ε, *что имеет место оценка*

$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s} - \eta^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\varepsilon^{1/2},$$

где постоянная c *не зависит от* ε.

Аналогично тому, как это сделано в § 1, можно получить оценки отклонения энергии и обобщенных градиентов, отвечающих задачам (2.1), (2.5). Мы не будем останавливаться на этом. Такие оценки для системы теории упругости в перфорированной области будут получены ниже.

2.2. Усреднение решений задачи Неймана для системы теории упругости в перфорированной области. Формулировка основных результатов

Всюду далее в этом параграфе Ω^ε обозначает перфорированную область типа II, определенную в § 4 гл. I. Ее граница $\partial\Omega^\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и поверхности полостей $S_\varepsilon \subset \Omega$.

В области Ω^ε рассмотрим краевую задачу Неймана для системы теории упругости

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)=f^\varepsilon(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)=0 \text{ на } S_\varepsilon=\partial\Omega^\varepsilon \setminus \partial\Omega, \\ &\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)=\psi^\varepsilon \text{ на } \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Предполагается, что элементы матриц A^{hk} удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты системы (1.1), $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $\psi^\varepsilon \in$

$\in L^2(\partial\Omega)$ и выполнены условия разрешимости задачи (2.22), а именно

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (f^\varepsilon, \eta)\, dx = \int_{\partial\Omega} (\psi^\varepsilon, \eta)\, dS \ \ \forall \eta \in \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ — пространство жестких перемещений.

Существование и единственность (с точностью до слагаемого из $\mathfrak{R}$) решения этой задачи вытекают из теоремы 5.3 гл. I.

Рассмотрим также краевую задачу Неймана для усредненного оператора теории упругости

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\mathscr{L}}(u^0) \equiv \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right) = f^0 \text{ в } \Omega, \\ &(\operatorname{mes} Q \cap \omega)\, \widehat{\sigma}(u^0) = \psi^0 \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

где $\widehat{\sigma}(u^0) = \nu_h \widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}$, матрицы $\hat{A}^{hk}$ определены формулами (1.3), $\psi^0 \in L^2(\partial\Omega)$, $f^0 \in L^2(\Omega)$ и выполнены условия разрешимости

$$(\operatorname{mes} Q \cap \omega)^{-1} \int_{\partial\Omega} (\psi^0, \eta)\, dS = \int_{\Omega} (f^0, \eta)\, dx \ \ \forall \eta \in \mathfrak{R}.$$

Следует отметить наличие множителя $\operatorname{mes} Q \cap \omega$ в граничных условиях Неймана на $\partial\Omega$, который равен 1, если область Ω^ε совпадает с Ω (см. формулу (2 5) п. 2.1).

Для характеристики близости f^0, ψ^0 и f^ε, ψ^ε введем следующие обозначения.

Для любых вектор-функций $f \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ скалярные произведения $(f, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, $(\psi, v)_{L^2(\partial\Omega)}$ задают непрерывные линейные функционалы на $H^1(\Omega^\varepsilon)$, и поэтому f и ψ можно рассматривать как элементы из $H^1(\Omega^\varepsilon)^*$. Обозначим нормы этих функционалов через $\|f\|_{H^{1*}}$, $\|\psi\|_{H^{1*}}$, т. е.

$$\|f\|_{H^{1*}} = \sup_v \{(f, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\ v \in H^1(\Omega^\varepsilon),\ \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 1\},$$

$$\|\psi\|_{H^{1*}} = \sup_v \{(\psi, v)_{L^2(\partial\Omega)},\ v \in H^1(\Omega^\varepsilon),\ \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 1\}.$$

Отметим, что $\|f\|_{H^{1*}} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, $\|\psi\|_{H^{1*}} \leqslant c\|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}$.

Приближенное решение задачи (2.22) ищем в виде

$$\tilde{u}(x) = u^0 + \varepsilon\varphi(x) N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s}. \tag{2.24}$$

Здесь u^0 — решение задачи (2 23), N^s — решения задач (1.4), $\varphi(x)$ — срезающая функция, такая, что

$$\left.\begin{aligned} &\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |\nabla\varphi| \leqslant c\varepsilon^{-1},\ \varphi = 0 \text{ в } \Omega\setminus\Omega_1, \\ &\varphi(x) = 1 \text{ при } x \in \Omega_1 \text{ и таких, что } \rho(x, \partial\Omega_1) \geqslant c_1\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где c_1, c — не зависящие от ε постоянные, Ω_1 определена формулой (4.3) в гл. I.

В отличие от рассмотренного в п 2.1 случая одного эллиптического уравнения второго порядка (см. формулу (2.4)) здесь при определении вектор-функции $\tilde{u}$ используем срезающую функцию φ. Это связано с тем, что решение u^ε рассматривается в перфорированной области Ω^ε и в окрестности $\partial\Omega$ матрицы $N^s(x/\varepsilon)$, вообще говоря, не определены.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.4. *Пусть* $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $f^0 \in H^1(\Omega)$, $\psi^\varepsilon \in L^2(\partial\Omega)$, $\psi^0 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, u^ε, u^0 — *решения задач* (2.22), (2.23) *соответственно. Тогда имеет место оценка*

$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon\varphi N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \eta^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\varepsilon^{1/2}\left(\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}\right) + \|f^0 - f^\varepsilon\|_{H^{1*}} + \|\psi^0 - \psi^\varepsilon\|_{H^{1*}}\right], \quad (2.26)$$

где постоянная c *не зависит от* ε, η^ε — *некоторое жесткое перемещение, которое может зависеть от* ε.

Доказательство этой теоремы изложено ниже, в разд. 2.4. Оно опирается на леммы, приведенные в следующем разделе.

2.3. Некоторые вспомогательные результаты

Введем обозначения

$$\alpha^{is}(\xi) = \widehat{A}^{is} - A^{is}(\xi) - A^{ij}(\xi)\frac{\partial N^s}{\partial \xi_j}, \quad i, s = 1, \ldots, n,$$

$$\widehat{\xi}_j = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

$$\widehat{S}_t^j = \{\xi : \xi_j = t,\ 0 < \xi_l < 1,\ l \neq j\} \cap \omega,$$

$$Q_{t_1 t_2}^j = \{\xi : t_1 < \xi_j < t_2,\ 0 < \xi_l < 1,\ l \neq j\}.$$

Лемма 2.5. *Матрицы* $\alpha^{is}(\xi)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\int\limits_{Q\cap\omega} \alpha^{is}(\xi)\, d\xi = 0, \quad i, s = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\alpha^{is}(\xi) = 0 \text{ в } \omega, \quad s = 1, \ldots, n, \quad (2.27)$$

$$\nu_i \alpha^{is} = \nu_i \widehat{A}^{is} \text{ на } \partial\omega, \quad s = 1, \ldots, n, \quad (2.28)$$

$$\int\limits_{\widehat{S}_t^j} \alpha^{js}(\xi)\, d\widehat{\xi}_j = (\operatorname{mes} \widehat{S}_t^j - \operatorname{mes} Q \cap \omega)\widehat{A}^{js}. \quad (2.29)$$

Здесь не предполагается суммирование по j.

Доказательство. Равенства (2.27), (2.28) непосредственно вытекают из (1.3), (1.4). Установим равенство (2.29).

Умножим систему (1.4) на $(\xi_j - t_1)E$, где E — единичная матрица, и проинтегрируем по $Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega$, $(t_1 < t_2)$. Имеем

$$-\int\limits_{Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega} A^{jl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} d\xi + \int\limits_{\partial(Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega)} (\xi_j - t_1) \nu_k A^{kl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} dS =$$

$$= \int\limits_{\omega \cap Q^j_{t_1 t_2}} A^{jq} d\xi - \int\limits_{\partial(Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega)} (\xi_j - t_1) \nu_k A^{kq} dS. \qquad (2.30)$$

Интегралы в (2.30) по $\partial(Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega)$ можно представить как суммы интегралов по множествам

$$\overline{Q}^j_{t_1 t_2} \cap \partial\omega, \quad \widehat{S}^j_{t_1} \cup \widehat{S}^j_{t_2}, \quad \bigcup_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} \widehat{S}^r_0 \cup \widehat{S}^r_1.$$

Учитывая, что на $\overline{Q}^j_{t_1 t_2} \cap \partial\omega$ выполнены условия

$$\nu_k A^{kl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} = -\nu_k A^{kq}$$

и подынтегральные функции 1-периодичны по всем ξ_r, $r \neq j$, $r = 1, \ldots, n$, из (2.30) получаем

$$-\int\limits_{Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega} A^{jl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} d\xi + (t_2 - t_1) \int\limits_{\widehat{S}^j_{t_2}} A^{jl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} d\widehat{\xi}^j =$$

$$= \int\limits_{Q^j_{t_1 t_2} \cap \omega} A^{jq} d\xi - (t_2 - t_1) \int\limits_{\widehat{S}^j_{t_2}} A^{jq} d\widehat{\xi}^j,$$

где по индексу j суммирование не производится.

Полагая в этом равенстве $t_1 = t_2 - 1$ и учитывая (1.3), находим

$$\int\limits_{Q \cap \omega} \left(A^{jq}(\xi) + A^{jl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} \right) d\xi = \int\limits_{\widehat{S}^j_{t_2}} \left(A^{jq} + A^{jl} \frac{\partial N^q}{\partial \xi_l} \right) d\widehat{\xi}_j = (\operatorname{mes} Q \cap \omega) \widehat{A}^{jq}.$$

Из этого равенства и определения $\alpha^{js}(\xi)$ имеем

$$\int\limits_{\widehat{S}^j_t} \alpha^{js}(\xi)\, d\widehat{\xi}_j = \int\limits_{\widehat{S}^j_t} \left(\widehat{A}^{js} - A^{js} - A^{jl} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_l} \right) d\widehat{\xi}_j =$$

$$= (\operatorname{mes} \widehat{S}^j_t) \widehat{A}^{js} - \int\limits_{\widehat{S}^j_t} \left(A^{js} + A^{jl} \frac{\partial N^s}{\partial \xi_l} \right) d\widehat{\xi}_j =$$

$$= (\operatorname{mes} \widehat{S}^j_t) \widehat{A}^{js} - (\operatorname{mes} Q \cap \omega) \widehat{A}^{js} = (\operatorname{mes} \widehat{S}^j_t - \operatorname{mes} Q \cap \omega) \widehat{A}^{js}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2.6. Если область Ω^ε не является перфорированной, т. е. $\omega=R^n$, $\Omega^\varepsilon=\Omega$, то $\int\limits_{\widehat{S}_t^j}\alpha^{js}(\xi)\,d\widehat{\xi}_j=0$, поскольку $\operatorname{mes}\widehat{S}_t^j=\operatorname{mes}Q\cap\cap\omega=1$ (см. лемму 2.1).

Лемма 2.7. *Пусть* $\sigma_1,\dots,\sigma_{2n}$ — $(n-1)$*-мерные грани куба* $\varepsilon Q=\{x:0<x_j<\varepsilon,\ j=1,\dots,n\}$. *Тогда для любой* $u\in H^1(\varepsilon Q)$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_{\sigma_i}|u|^2\,d\sigma-\int\limits_{\sigma_j}|u|^2\,d\sigma\leqslant c\,\|u\|^2_{H^1(\varepsilon Q)},\ i\neq j, \tag{2.31}$$

где постоянная c *не зависит от* i, j, ε.

Доказательство. Пусть $\sigma_1=\{x_1=0\}\cap\varepsilon\overline{Q}$, $\sigma_2=\{x_2=0\}\cap\varepsilon\overline{Q}$, $S_1=\varepsilon^{-1}\sigma_1$, $S_2=\varepsilon^{-1}\sigma_2$. Рассмотрим на гранях S_1, S_2 куба Q точки $\widehat{y}^1=(0,y_2,y_3,\dots,y_n)$, $\widehat{y}^2=(y_2,0,y_3,\dots,y_n)$. Отрезок $g(t,y_2,y_3,\dots\\\dots,y_n)=t\widehat{y}^1+(1-t)\widehat{y}^2$ при $t\in[0,1]$ целиком лежит в $\overline{Q}$. Легко видеть, что для любой $v\in H^1(Q)$ имеем

$$v^2(g(1,y_2,\dots,y_n))-v^2(g(0,y_2,\dots,y_n))=\int\limits_0^1\frac{\partial v^2}{\partial t}(g(t,y_2,\dots,y_n))\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^1 v(g(t,y_2,\dots,y_n))\,\frac{\partial v}{\partial\xi_j}(g(t,y_2,\dots,y_n))\,\frac{\partial g_j}{\partial t}\,dt.$$

Интегрируя это равенство по $y_2,\dots,y_n$ от 0 до 1, получим

$$\int\limits_{S_1}v^2dS-\int\limits_{S_2}v^2dS\leqslant C\int\limits_Q|v|\ |\nabla_\xi v|\,d\xi,\ \xi=\frac{x}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon^{-(n-1)}\int\limits_{\sigma_1}v^2d\sigma-\varepsilon^{-(n-1)}\int\limits_{\sigma_2}v^2d\sigma\leqslant C\varepsilon^{-n}\,\varepsilon\int\limits_{\varepsilon Q}|v|\ |\nabla_x v|\,dx.$$

Отсюда следует (2.31). Для других граней σ_i, σ_j оценка (2.31) доказывается аналогично.

В следующих двух леммах устанавливаются некоторые равномерные по ε неравенства для функций, определенных на границе $\partial\Omega_1$ области Ω_1, которая зависит от ε и состоит из $(n-1)$-мерных граней кубов $\varepsilon(z+Q)$, $z\in T_\varepsilon$ (см. формулу (4.3) гл. I).

Через $\sigma_j^1,\dots,\sigma_j^{l_j}$ обозначим $(n-1)$-мерные грани кубов $\varepsilon(z+\overline{Q})$ при $z\in T_\varepsilon$, параллельные гиперплоскости $x_j=0$, $j=1,\dots,n$, и лежащие на $\partial\Omega_1$. Тогда

$$\partial\Omega_1=\bigcup_{j=1}^{n}\ \bigcup_{s=1}^{l_j}\overline{\sigma}_j^s. \tag{2.32}$$

Куб $\varepsilon(z+Q)$, $z\in T_\varepsilon$, на поверхности которого лежит множество σ_j^s, обозначим через q_j^s. Легко видеть, что среди кубов q_j^s, $j=$

$=1,\dots,n$, $s=1,\dots,l_j$, один и тот же куб может встретиться не более $2n$ раз.

Лемма 2.8. *Пусть $u\in H^1(\Omega)$. Тогда*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega_1)}\leqslant c\,\|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.33}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. Согласно (2.32) $\partial\Omega_1$ состоит из множеств σ_j^l, каждое из которых является гранью куба q_j^l. Поскольку граница $\partial\Omega$ — гладкая, то у каждого куба q_j^s найдется $(n-1)$-мерная грань $\sigma_{s,j}$, параллельная плоскости $x_{m(j,s)}=0$, причем $\sigma_{s,j}$ является ортогональной проекцией вдоль оси $0x_{m(j,s)}$ поверхности $S_{s,j}\subset\partial\Omega$, которая задается уравнением

$$x_m=\psi_m(\widehat{x}_m),\ \widehat{x}_m\in\sigma_{s,j},\ \|\psi_m\|_{C^2}\leqslant M,\ m=m(j,s),$$

$$c_1\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant c_2\varepsilon \text{ при } x\in\sigma_{s,j},\ y\in S_{s,j},$$

где постоянные c_1, c_2, M не зависят от ε, s, j.

Обозначим через $Q_{s,j}$ множество, образованное отрезками нормалей к $\sigma_{s,j}$, соединяющих точки $\sigma_{s,j}$ и $S_{s,j}$. Тогда, пользуясь гладкой заменой переменных x, переводящей $Q_{s,j}$ в εQ, и учитывая лемму 2.7, устанавливаем, что

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_{s,j})}\leqslant C\left(\|u\|^2_{L^2(S_{s,j})}+\|u\|^2_{H^1(Q_{s,j})}\right).$$

Снова пользуясь леммой 2.7, из этого неравенства получаем

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_j^s)}\leqslant C_1\left(\|u\|^2_{L^2(S_{s,j})}+\|u\|^2_{H_1(Q_{s,j})}\right).$$

Суммируя эти неравенства по j, s, получаем оценку (2.33). При этом мы воспользовались тем фактом, что ввиду гладкости $\partial\Omega$ найдется не зависящее от ε число k, такое, что каждое $\overline{Q}_{s,j}$ может пересекаться лишь с конечным числом множеств $\overline{Q}_{l,t}$, не превосходящим k. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть матрицы $\gamma^{hk}(x)\in L^\infty(\partial\Omega_1)$ таковы, что*

$$\int\limits_{\sigma_h^m}\gamma^{hk}(x)\,dS=0 \text{ (суммирование по } h \text{ не производится).}$$

$$\sup_{\partial\Omega_1}|\gamma^{hk}|\leqslant\gamma,\ h,k=1,\dots,n,\ m=1,\dots,l_h, \tag{2.34}$$

где σ_h^m те же, что в (2.32), $\gamma=\text{const}$.

Тогда для любых вектор-функций $u^0\in H^3(\Omega)$, $w\in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\nu_h\gamma^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k},w\right)dS\right|\leqslant c\varepsilon^{1/2}\gamma\,\|u^0\|_{H^3(\Omega)}\,\|w\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.35}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\Gamma(x)$, заданную почти всюду на $\partial\Omega_1$ и определенную равенством

$$\Gamma(x)=(\operatorname{mes}\sigma_l^m)^{-1}\int\limits_{\sigma_l^m}\nu_h\gamma^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\,dS \text{ при } x\in\sigma_l^m,$$

Легко видеть, что $\Gamma(x)$ постоянна на множестве σ_l^m. Поэтому, полагая

$$\zeta_k(x)=(\operatorname{mes}\sigma_l^m)^{-1}\int\limits_{\sigma_l^m}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\,dS \text{ при } x\in\sigma_l^m,$$

имеем, учитывая (2.34) и неравенство Пуанкаре на σ_l^m:

$$\int\limits_{\partial\Omega_1}|\Gamma|^2dS=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\int\limits_{\sigma_j^s}|\Gamma|^2dS=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\frac{\operatorname{mes}\sigma_j^s}{(\operatorname{mes}\sigma_j^s)^2}\Bigl(\int\limits_{\sigma_j^s}\nu_h\gamma^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\,dS\Bigr)^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}(\operatorname{mes}\sigma_j^s)^{-1}\Bigl(\int\limits_{\sigma_j^s}\nu_j\gamma^{jk}\Bigl(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\zeta_k\Bigr)dS\Bigr)^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma_j^s}\Bigl(\int\limits_{\sigma_j^s}|\gamma^{jk}\nu_j|^2dS\Bigr)\Bigl(\int\limits_{\sigma_j^s}\Bigl(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\zeta_k\Bigr)^2dS\Bigr)\leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\gamma^2\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\sigma_j^s}\Bigl|\nabla\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\Bigr|^2dS=c_1\varepsilon^2\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\partial\Omega_1}\Bigl|\nabla\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\Bigr|^2dS.$$

Отсюда, учитывая лемму 2.8, получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega_1}|\Gamma|^2dS\leqslant c_2\varepsilon^2\gamma^2\|u^0\|^2_{H^3(\Omega)},\tag{2.36}$$

где постоянная c_2 не зависит от ε.

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\partial\Omega_1}\Bigl(\gamma^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k},w\Bigr)dS=\int\limits_{\partial\Omega_1}(\Gamma,w)\,dS+\int\limits_{\partial\Omega_1}\Bigl(\gamma^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\Gamma,w\Bigr)dS.\tag{2.37}$$

Согласно (2.36) и лемме 2.8

$$\Bigl|\int\limits_{\partial\Omega_1}(\Gamma,w)\,dS\Bigr|\leqslant\Bigl(\int\limits_{\partial\Omega_1}|\Gamma|^2dS\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_{\partial\Omega_1}|w|^2dS\Bigr)^{1/2}\leqslant c_3\varepsilon\gamma\|u^0\|_{H^3(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}.\tag{2.38}$$

Оценим второй интеграл в правой части равенства (2.37). Определим вектор-функцию $\eta(x)$ на $\partial\Omega_1$, полагая

$$\eta(x)=(\operatorname{mes} q_m^l)^{-1}\int\limits_{q_m^l} w\,dx \text{ при } x\in\sigma_m^l.$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega_1}|w-\eta|^2dS=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\int\limits_{\sigma_j^s}|w-\eta|^2dS\leqslant$$

$$\leqslant c_4\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j}\int\limits_{q_j^s}|\nabla w|^2dx\leqslant c_5\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2dx. \tag{2.39}$$

При выводе этого неравенства мы воспользовались тем фактом, что среди q_j^s один и тот же куб может встретиться не более $2n$ раз, а также неравенствами (2.20) при $v=w$.

По определению вектор-функции Γ имеем

$$\int\limits_{\sigma_m^l}\left(\gamma^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\Gamma\right)dS=0.$$

Поэтому в силу того, что $\eta(x)$ постоянна на σ_m^l, устанавливаем, учитывая (2.39), (2.36) и лемму 2.9, что

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\gamma^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\Gamma, w\right)dS\right|\leqslant\left(\int\limits_{\partial\Omega_1}\left|\gamma^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\Gamma\right|^2dS\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\partial\Omega_1}|w-\eta|^2dS\right)^{1/2}\leqslant c_6\left[\gamma\left(\int\limits_{\partial\Omega_1}|\nabla v^0|^2dS\right)^{1/2}+\left(\int\limits_{\partial\Omega_1}|\Gamma|^2dS\right)^{1/2}\right]\times$$

$$\times\,\varepsilon^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2dx\right)^{1/2}\leqslant c_7\gamma\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^3(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

Из этого неравенства, а также из (2.37), (2.38) следует оценка (2.35). Лемма доказана.

2.4. Доказательство оценки отклонения решения задачи Неймана в перфорированной области от решения усредненной задачи

Приведем теперь доказательство теоремы 2.4.

Применим оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ к вектор-функции $u^\varepsilon-\tilde{u}$, где $\tilde{u}$ задана формулой (2.24). Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u^0+\varepsilon\varphi N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\hat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\hat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-A^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[A^{hk}\left(\varepsilon\frac{\partial(\varphi N^s)}{\partial x_k}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}+\varepsilon\varphi N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)\right]=$$

$$=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\hat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-A^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial\varphi N^k}{\partial x_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)=f^\varepsilon-f^0+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\left(\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial\varphi N^k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\varphi N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)=$$

$$=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[(1-\varphi)(\hat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\varphi\left(\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right).$$

Далее, учитывая, что N^s удовлетворяют системе (1.4), получаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[(1-\varphi)(\hat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]+\left[\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\right.$$

$$\left.-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}\right]\varphi\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\left[\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}A^{hk}N^\Delta\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-$$

$$-\varepsilon\varphi\frac{\partial}{\partial x_h}(A^{hk}N^s)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-\varepsilon\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}=$$

$$=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[(1-\varphi)(\hat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]+$$

$$+\left[\hat{A}^{hk}-A^{hk}-\varepsilon A^{hj}\frac{\partial N^k}{\partial x_j}-\varepsilon\frac{\partial A^{sh}N^k}{\partial x_s}\right]\varphi\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-\varepsilon\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}.$$

Определим матрицы $N^{hk}(\xi)$ как обобщенные решения следующих задач:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}\left(A^{jl}\dfrac{\partial N^{hk}}{\partial\xi_l}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial\xi_s}(A^{sh}N^k)-A^{hj}\dfrac{\partial N^k}{\partial\xi_j}-A^{hk}+\hat{A}^{hk}\ \text{в}\ \omega,\\ \sigma(N^{hk})=-\nu_s A^{sh}N^k\ \text{на}\ \partial\omega,\quad N^{hk}(\xi)\ \text{1-периодична по}\ \xi.\end{array}\right\}\quad(2.40)$$

Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[(1-\varphi)(\widehat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]+$$

$$+\varphi\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-\varepsilon\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_h}\left[(1-\varphi)(\widehat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varphi A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}\right]-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}-\varepsilon\varphi A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}-$$

$$-\varepsilon\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}+f^\varepsilon-f^0.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})=f^\varepsilon-f^0+\frac{\partial F_h^1}{\partial x_h}+\frac{\partial F_j^2}{\partial x_j}+F_1^0+F_2^0+F_3^0, \tag{2.41}$$

где

$$F_h^1=(1-\varphi)(\widehat{A}^{hk}-A^{hk})\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{hj}N^k\frac{\partial u^0}{\partial x_k},$$

$$F_j^2=\varepsilon\varphi A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_h}, \tag{2.42}$$

$$F_1^0=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_h\partial x_k}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}A^{hk}N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s},$$

$$F_2^0=-\varepsilon\varphi A^{jl}\frac{\partial N^{hk}}{\partial \xi_l}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_j}-\varepsilon\varphi A^{hk}N^s\frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s},$$

$$F_3^0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}.$$

Рассмотрим теперь граничные условия для $u^\varepsilon-\tilde{u}$. Имеем

$$\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})=A^{ij}\nu_i\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}-A^{ij}\nu_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u^0+\varepsilon\varphi N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right)=$$

$$=(1-\varphi)\nu_iA^{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}+\varphi\nu_iA^{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}-\nu_iA^{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}-\varepsilon\nu_iA^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}N^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}-$$

$$-\varepsilon\nu_iA^{ij}\varphi\frac{\partial N^s}{\partial x_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}-\varepsilon\nu_iA^{ij}\varphi N^s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s\partial x_j}=$$

$$= (1-\varphi) A^{ij} \nu_i \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} + (1-\varphi) \nu_i (\widehat{A}^{ij} - A^{ij}) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} - (1-\varphi) \widehat{A}^{ij} \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_j} -$$

$$- \varphi \nu_i A^{ij} \frac{\partial u^0}{\partial x_j} - \varepsilon \nu_i \varphi A^{il} \frac{\partial N^j}{\partial x_l} \frac{\partial u^0}{\partial x_j} - \varepsilon \nu_i A^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} N^s \frac{\partial u^0}{\partial x_s} -$$

$$- \varepsilon \nu_i A^{ij} \varphi N^s \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_j} = (1-\varphi) A^{ij} \nu_i \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} - (1-\varphi) \widehat{A}^{ij} \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_j} +$$

$$+ (1-\varphi) \nu_i (\widehat{A}^{ij} - A^{ij}) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} - \varphi \left(\nu_i A^{ij} + \varepsilon \nu_i A^{il} \frac{\partial N^j}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} -$$

$$- \varepsilon \nu_i A^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} N^s \frac{\partial u^0}{\partial x_s} - \varepsilon \nu_i A^{ij} \varphi N^s \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_s \partial x_j}.$$

Заметим, что в силу граничных условий в (1.4), (2.40)

$$\varphi \left(\nu_i A^{ij} + \varepsilon \nu_i A^{il} \frac{\partial N^j}{\partial x_l} \right) = 0,$$

$$- \varepsilon \nu_i \varphi A^{ij} N^s = \varepsilon \varphi \nu_h A^{hl} \frac{\partial N^{js}}{\partial \xi_l} \text{ на } \partial \Omega^\varepsilon.$$

Поэтому, учитывая (2.42), получаем

$$\sigma_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) = (1-\varphi) \nu_i A^{ij} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} - (1-\varphi) \widehat{A}^{ij} \nu_i \frac{\partial u^0}{\partial x_j} +$$

$$+ \nu_h F_h^1 + \nu_j F_j^2 \text{ на } \partial \Omega^\varepsilon. \qquad (2.43)$$

Положим $w = u^\varepsilon - \tilde{u} + \eta^\varepsilon$, где η^ε — жесткое перемещение ($\eta^\varepsilon \in \mathfrak{R}$), такое, что

$$(w, \eta)_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 0 \text{ для любого } \eta \in \mathfrak{R}.$$

Учитывая граничные условия для u^0, u^ε и равенство $\varphi = 0$ в $\Omega \setminus \setminus \Omega_1$, из (2.41), (2.43) получаем для w

$$- \int_{\Omega^\varepsilon} \left(A^{hk} \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial w}{\partial x_h} \right) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} (f^\varepsilon - f^0, w)\, dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \left((F_h^1, \frac{\partial w}{\partial x_h} \right) dx -$$

$$- \int_{\Omega^\varepsilon} \left(F_h^2, \frac{\partial w}{\partial x_h} \right) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} [(F_1^0, w) + (F_2^0, w) + (F_3^0, w)]\, dx +$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \left(\nu_i \widehat{A}^{ij} (1-\varphi) \frac{\partial u^0}{\partial x_j}, w \right) dS + \int_{\partial \Omega} ((\operatorname{mes} Q \cap \omega)^{-1} \psi^0 - \psi^\varepsilon, w)\, dS. \qquad (2.44)$$

Оценим интегралы в правой части этого равенства. Заметим, что в силу (2.25) функции $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $1 - \varphi$ равны нулю в $\Omega_2 = \{x : x \in \Omega_1,$

$\rho(x, \partial\Omega_1) \geqslant c_1\varepsilon\}$ и $|\varepsilon\nabla\varphi| \leqslant c$, где c, c_1 не зависят от ε. Поэтому, пользуясь леммой 1.5 гл. I, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(F_h^1, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right) dx\right| + \left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(F_1^0, w)\, dx\right| \leqslant c_2 \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, \varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega)}, \tag{2.45}$$

где постоянная c_3 не зависит от ε.

Непосредственно из (2.42) вытекает

$$\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(F_h^2, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right) dx\right| + \left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(F_2^0, w)\, dx\right| \leqslant c_4\varepsilon \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|u^0\|_{H^2(\Omega)}, \tag{2.46}$$

где постоянная c_4 не зависит от ε.

В силу соотношений (2.27), (2.28), полагая $\alpha = \operatorname{mes} Q \cap \omega$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 = {} & \int\limits_{\Omega^\varepsilon}(F_3^0, w)\, dx + \int\limits_{S_\varepsilon}\left(\widehat{A}^{ij}\nu_i(1-\varphi)\frac{\partial u^0}{\partial x_j}, w\right) dS + \\
& + \int\limits_{\partial\Omega}(\alpha^{-1}\psi^0 - \psi^\varepsilon, w)\, dS = \int\limits_{\Omega_1^\varepsilon}\left(\frac{\partial(\varphi-1)}{\partial x_h}\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}, w\right) dx - \\
& - \int\limits_{S_\varepsilon}(\varphi-1)\left(\nu_i\widehat{A}^{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}, w\right) dS + \int\limits_{\partial\Omega}(\alpha^{-1}\psi^0 - \psi^\varepsilon, w)\, dS = \\
= {} & - \int\limits_{(\partial\Omega_1)\setminus S_\varepsilon}\left(\nu_h\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}, w\right) dS + \int\limits_{\partial\Omega_1\cap S_\varepsilon}\left(\nu_i\widehat{A}^{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}, w\right) dS + \\
& + \int\limits_{\partial\Omega}(\alpha^{-1}\psi^0 - \psi^\varepsilon, w)\, dS - \int\limits_{\Omega_1^\varepsilon}\left((\varphi-1)\alpha^{hk}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k \partial x_h}, w\right) dx - \\
& - \int\limits_{\Omega_1^\varepsilon}(\varphi-1)\left(\alpha^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right) dx,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

причем в интеграле по $(\partial\Omega_1)\setminus S_\varepsilon$ нормаль ν — внешняя по отношению к $\partial\Omega_1$, а в интеграле по $\partial\Omega_1 \cap S_\varepsilon$ ν — внешняя нормаль к Ω^ε. Последние два интеграла в правой части (2.47) оцениваются аналогично (2.45) величиной $c\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{H^2(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$.

Введем матрицы $\beta^{hk}(\xi)$, полагая

$$\beta^{hk}(\xi) = \begin{cases} \alpha^{hk}(\xi) & \text{в } \omega, \\ \widehat{A}^{hk} & \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \omega. \end{cases}$$

Тогда

$$\beta^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\begin{cases}\alpha^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{на } \partial\Omega_1\setminus S_\varepsilon, \\ \widehat{A}^{hk} & \text{на } \partial\Omega_1\cap S_\varepsilon.\end{cases} \tag{2.48}$$

Из (2.47), (2.48) получаем

$$|\mathcal{J}_1|\leqslant|\mathcal{J}_2|+c\varepsilon^{1/2}\,\|u^0\|_{H^2(\Omega)}\,\|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{2.49}$$

где

$$\mathcal{J}_2=-\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\beta^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k},w\right)dS+\frac{\operatorname{mes}Q\setminus\omega}{\operatorname{mes}Q\cap\omega}\int\limits_{\partial\Omega}(\psi^0,w)\,dS+$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}(\psi^0-\psi^\varepsilon,w)\,dS. \tag{2.50}$$

Из интегрального тождества для u^0 вытекает, что

$$-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1}\left(\widehat{A}^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k},\frac{\partial w}{\partial x_h}\right)dx+\int\limits_{\partial\Omega}(\alpha^{-1}\psi^0,w)\,dS-$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\widehat{A}^{hk}\nu_h\frac{\partial u^0}{\partial x_k},w\right)dS=\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1}(f^0,w)\,dx.$$

Следовательно, в силу леммы 1.5 гл. I

$$\frac{\operatorname{mes}Q\setminus\omega}{\operatorname{mes}Q\cap\omega}\int\limits_{\partial\Omega}(\psi^0,w)\,dS=(\operatorname{mes}Q\setminus\omega)\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\nu_hA^{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_h},w\right)dS+\mathcal{J}_3, \tag{2.51}$$

где

$$|\mathcal{J}_3|\leqslant c\varepsilon^{1/2}(\|u^0\|_{H^2(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}+\|f^0\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}). \tag{2.52}$$

Таким образом, из (2.50), (2.51) получаем

$$\mathcal{J}_2=\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\left((\operatorname{mes}Q\setminus\omega)\,\nu_h\widehat{A}^{hk}-\nu_h\beta^{hk}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_h},w\right)dS+$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}(\psi^0-\psi^\varepsilon,w)\,dS+\mathcal{J}_3. \tag{2.53}$$

Положим в лемме 2.9

$$\gamma^{hk}=(\operatorname{mes}Q\setminus\omega)\,\widehat{A}^{hk}-\beta^{hk}.$$

Легко видеть, что для таких γ^{hk} выполнены условия (2.34). Действительно, пользуясь (2.48) и (2.29), получим

$$\int\limits_{\sigma_h^m} \gamma^{hk} dS = \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} Q \setminus \omega) \widehat{A}^{hk} - \int\limits_{\sigma_h^m \setminus S_\varepsilon} \beta^{hk} dS - \int\limits_{\sigma_h^m \cap S_\varepsilon} \beta^{hk} dS =$$

$$= \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} Q \setminus \omega) \widehat{A}^{hk} - \int\limits_{\sigma_h^m \setminus S_\varepsilon} \alpha^{hk} dS - (\operatorname{mes} \sigma_h^m \cap S_\varepsilon) \widehat{A}^{hk} =$$

$$= \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} Q \setminus \omega) \widehat{A}^{hk} - \varepsilon^{n-1} \int\limits_{\varepsilon^{-1}(\sigma_h^m \setminus S_\varepsilon)} \alpha^{hk}(\xi)\, dS - (\operatorname{mes} \sigma_h^m \cap S_\varepsilon) \widehat{A}^{hk} =$$

$$= \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} Q \setminus \omega) \widehat{A}^{hk} - \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} \varepsilon^{-1} (\overline{\sigma}_h^m \setminus S_\varepsilon) - \operatorname{mes} Q \cap \omega) \widehat{A}^{hk} -$$

$$- (\operatorname{mes} \sigma_h^m \cap S_\varepsilon) \widehat{A}^{hk} = \varepsilon^{n-1} (\operatorname{mes} Q \setminus \omega - \operatorname{mes} \varepsilon^{-1} (\sigma_h^m \setminus S_\varepsilon) +$$

$$+ \operatorname{mes} Q \cap \omega - \operatorname{mes} \varepsilon^{-1} (\sigma_h^m \cap S_\varepsilon)) \widehat{A}^{hk} = 0,$$

поскольку

$$\operatorname{mes} Q \setminus \omega + \operatorname{mes} Q \cap \omega = 1,$$

$$\operatorname{mes} \varepsilon^{-1} (\sigma_h^m \setminus S_\varepsilon) + \operatorname{mes} \varepsilon^{-1} (\sigma_h^m \cap S_\varepsilon) = 1.$$

Из (2.52), (2.53) и леммы 2.9 заключаем, что

$$|\mathcal{J}_2| \leqslant c\,[\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^3(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|f^0\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$+ \|\psi^0 - \psi^\varepsilon\|_{H^{1*}} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}]. \tag{2.54}$$

Из (2.44)—(2.46), (2.49), (2.54) следует, что

$$\|e(w)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_1 [\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^3(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|f^0\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} +$$
$$+ \|f^0 - f^\varepsilon\|_{H^{1*}} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \|\psi^0 - \psi^\varepsilon\|_{H^{1*}} \|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}]. \tag{2.55}$$

Так как $\partial\Omega$ — гладкая и $f^0 \in H^1(\Omega)$, $\psi^0 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, то

$$\|u^0\|_{H^3(\Omega)} \leqslant c_2 (\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}). \tag{2.56}$$

Поэтому из (2.55) в силу теоремы 4.4 гл. I, учитывая (2.56), получаем оценку (2.26). Теорема доказана.

2.5. Оценки энергии и тензоров напряжений

Следуя схеме доказательства теорем 1.3 и 1.4 о сходимости интегралов энергии и тензоров напряжений, с помощью оценки (2.26) устанавливаем аналогичные теоремы в случае задачи Неймана.

Теорема 2.10 (о сходимости интегралов энергии). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4 *и* $E_\varepsilon(u^\varepsilon)$, $E_0(u^0)$ *определены формулами* (1.25), (1.26). *Тогда имеет место оценка*

$$|E_\varepsilon(u^\varepsilon)-(\operatorname{mes} Q\cap\omega)\,E_0(u^0)|\leqslant$$
$$\leqslant c\,[\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\psi^0\|^2_{H^{3/2}(\partial\Omega)})+\|f^0-f^\varepsilon\|_{H^{1*}}+\|\psi^0-\psi^\varepsilon\|_{H^{1*}}+$$
$$+(\|\psi^0\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|f^0\|_{L^2(\Omega)})(\|f^0-f^\varepsilon\|_{H^{1*}}+\|\psi^0-\psi^\varepsilon\|_{H^{1*}})], \qquad (2.57)$$

где постоянная C не зависит от ε.

Отметим, что при доказательстве этой теоремы берем такие u^0 и u^ε, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon}(u^\varepsilon,\ \eta)\,dx=\int_{\Omega^\varepsilon}(u^0,\ \eta)\,dx=0\quad \forall\,\eta\in\mathfrak{R}. \qquad (2.58)$$

Такой выбор возможен, поскольку решения задач (2.22), (2.23) определены с точностью до слагаемого из $\mathfrak{R}$. В этом случае в оценке (2.26) можно положить $\eta^\varepsilon=0$. Кроме того, используем оценки

$$\|u^0\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c\,(\|f^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\psi^0\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$
$$\|u^0\|_{H^3(\Omega)}\leqslant c\,(\|f^0\|_{H^1(\Omega)}+\|\psi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}),$$

которые известны для решений эллиптических краевых задач [1].

Аналогично теореме 1.4 устанавливается

Теорема 2.11 (о сходимости тензоров напряжений). *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.4 *и* u^ε, u^0 *удовлетворяют условиям* (2.58) *ортогональности пространству жестких перемещений. Пусть тензоры напряжений* $\sigma^p_\varepsilon(x)$, $\sigma^p_0(x)$ *определены формулами* (1.42), (1.43). *Тогда имеет место оценка*

$$\left\|\sigma^p_\varepsilon-(\operatorname{mes} Q\cap\omega)\,\sigma^p_0-G^{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_q}\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant c\,[\varepsilon^{1/2}(\|f^0\|_{H^1(\Omega)}+\|\psi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)})+\|f^0-f^\varepsilon\|_{H^{1*}}+\|\psi^0-\psi^\varepsilon\|_{H^{1*}}], \qquad (2.59)$$

где постоянная c *не зависит от* ε, *матрицы* G^{pq} *определены формулами* (1.45). *Кроме того,*

$$\sigma^p_\varepsilon(x)\to(\operatorname{mes} Q\cap\omega)\,\sigma^p_0(x)\ \text{ слабо в } L^2(\Omega)\ \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

2.6. Некоторые обобщения

При усреднении собственных значений задачи Неймана для системы теории упругости в перфорированной области нам понадобятся результаты об усреднении решений задачи Неймана для некоторой вспомогательной системы уравнений.

Рассмотрим краевую задачу Неймана

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)-\rho_\varepsilon(x)\,u^\varepsilon=f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)=\psi^\varepsilon \text{ на } \partial\Omega,\quad \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)=0 \text{ на } S_\varepsilon,\end{aligned}\right\} \qquad (2.60)$$

а также задачу Неймана для усредненной системы

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{\mathscr{L}}(u^0)-\rho_0(x)u^0=f^0 \text{ в } \Omega,\\&(\operatorname{mes} Q\cap\omega)\,\widehat{\sigma}(u^0)=\psi^0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{2.61}$$

где $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — те же операторы, что и в задачах (2.22), (2.23), функции $\rho_\varepsilon\in L^\infty(\Omega^\varepsilon)$, $\rho_0\in L^\infty(\Omega)$, такие, что

$$\begin{aligned}&0<c_0\leqslant\rho_\varepsilon\leqslant c_1,\\&0<c_2\leqslant\rho_0\leqslant c_3,\end{aligned}\tag{2.62}$$

причем постоянные c_0, c_1, c_2, c_3 не зависят от ε.

В теореме 2.4 установлена оценка близости решений задач (2.60), (2.61) при $\rho_\varepsilon\equiv 0$, $\rho_0\equiv 0$. Если ввести величину, характеризующую отклонение ρ_ε от ρ_0, то оказывается возможным доказать аналогичную теорему для задач (2.60), (2.61) при условии (2.62).

В частности, представляет интерес случай, когда $\rho_\varepsilon(x)=\rho\times\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$, где $\rho(\xi, x)$ 1-периодична по ξ и удовлетворяет условию Липшица по $x\in\overline{\Omega}$ равномерно по ξ, т. е. в обозначениях леммы 1.6 гл. I $\rho(\xi, x)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n\times\overline{\Omega})$. Пусть $\rho_0(x)\equiv\langle\rho(\cdot, x)\rangle$, где $\langle\rho(\cdot, x)\rangle$ определено в гл. I формулой (1.23) и является средним функции $\rho(\xi, x)$ по ξ.

Из леммы 1.6 гл. I следует, что для любых вектор-функций $u, v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left[\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)-\rho_0(x)\right](u, v)\,dx\right|\leqslant c\varepsilon\,\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\,\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.\tag{2.63}$$

Действительно, положим в лемме 1.6 гл. I $g(\xi, x)=(\rho(\xi, x)-\rho_0(x))\chi_\omega(\xi)$, где $\chi_\omega(\xi)$ — характеристическая функция области ω с 1-периодической структурой. Легко видеть, что $g(\xi, x)\in\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{R}^n\times\overline{\Omega})$, $\int\limits_Q g(\xi, x)\,d\xi=0$. Рассмотрим продолжения $P_\varepsilon u$, $P_\varepsilon v$ вектор-функций u, v на область Ω, существование которых утверждается в теореме 4.2 гл. I. Тогда

$$\begin{aligned}q^\varepsilon=&\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)(u, v)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{\Omega\cap\varepsilon\omega}g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)(u, v)\,dx\right|+\\&+\left|\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1}g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)(u, v)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{\Omega}g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)(P_\varepsilon u, P_\varepsilon v)\,dx\right|+\\&+C\,\|u\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_1)}\,\|v\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Заметим, что множество $\Omega\setminus\Omega_1$ лежит в окрестности $\partial\Omega$ порядка ε. Поэтому, применяя лемму 1.6 гл. I для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства и лемму 1.5 гл. I для оценки второго слагаемого, получим $q^\varepsilon \leqslant c_1\varepsilon \|P_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \|P_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega)}$. Отсюда и из (4.17) гл. I следует неравенство (2.63).

Таким образом, функции $\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$ и $\rho_0(x)$ близки в смысле неравенства (2.63). В более общем случае мы будем характеризовать близость ρ_ε и ρ_0 с помощью нормы

$$|||\rho||| = \sup_{u,v}\left\{\left|\int_{\Omega^\varepsilon}\rho(u, v)\,dx\right|, \ \|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 1\right\}, \tag{2.64}$$

где верхняя грань берется по всем вектор-функциям u, v из $H^1(\Omega^\varepsilon)$. Соотношение (2.64) означает, что для любых $u, v \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\Omega^\varepsilon}\rho(u, v)\,dx\right| \leqslant |||\rho|||\,\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.65}$$

Непосредственно из оценки (2.63) вытекает

Лемма 2.12. *Пусть* $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$, $\rho_0 \equiv \langle\rho(\cdot, x)\rangle$, $\rho(\xi, x) \in \widehat{L}(\mathbf{R}^n \times \overline{\Omega})$. *Тогда*

$$|||\rho_\varepsilon - \rho_0||| < c\varepsilon, \tag{2.66}$$

где постоянная c *не зависит от* ε.

Теорема 2.13. *Пусть* $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $f^0 \in H^1(\Omega)$, $\psi^\varepsilon \in L^2(\partial\Omega)$, $\psi^0 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, $\rho_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ *и* u^ε, u^0 — *решения задач* (2.60), (2.61) *соответственно. Тогда*

$$\left\|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon\varphi N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant C\,[(\varepsilon^{1/2} + |||\rho_\varepsilon - \rho_0|||)(\|f^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi^0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}) + \|f^0 - f^\varepsilon\|_{H^{1*}} +$$

$$+ \|\psi^0 - \psi^\varepsilon\|_{H^{1*}}], \tag{2.67}$$

где постоянная C *не зависит от* ε, *функция* φ — *та же, что и в теореме* 2.4, *и удовлетворяет условиям* (2.25).

Доказательство этой теоремы почти повторяет доказательство теоремы 2.4. Укажем основные его этапы.

Приближенное решение задачи (2.60) ищется в виде

$$\tilde{u} = u^0 + \varepsilon\varphi N^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s},$$

где u^0 — решение задачи (2.61), N^s — те же, что и в теореме 2.4.

Применяя оператор $\mathscr{L}_\varepsilon - \rho_\varepsilon I$ к $u^\varepsilon - \tilde{u}$, получим

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}) - \rho_\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}) = f^\varepsilon - f^0 + \frac{\partial F_h^1}{\partial x_h} + \frac{\partial F_j^2}{\partial x_j} + F_1^0 + F_2^0 + F_3^0 + F_4^0, \tag{2.68}$$

где F_h^1, F_j^2, F_1^0, F_2^0, F_3^0 определены формулами (2.42), а

$$F_4^0=(\rho_\varepsilon-\rho_0)\,u^0+\varepsilon\rho_\varepsilon\varphi N_0^s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}. \tag{2.69}$$

Для $\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u})$ справедлива формула (2.43).

Полагая $w=u^\varepsilon-\tilde{u}$, из интегрального тождества для решения задачи (2.68), (2.43) получаем для w аналогично (2.44):

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(A^{hk}\frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{\partial w}{\partial x_h}\right)dx-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\rho_\varepsilon(w,\ w)\,dx=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(f^\varepsilon-f^0,\ w)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(F_h^1+F_h^2,\ \frac{\partial w}{\partial x_h}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(F_1^0+F_2^0+F_3^0+F_4^0,\ w)\,dx+$$

$$+\int\limits_{S_\varepsilon}\left(\nu_i\widehat{A}^{ij}(1-\varphi)\frac{\partial u^0}{\partial x_j},\ w\right)dS+\int\limits_{\partial\Omega}((\operatorname{mes}Q\cap\omega)^{-1}\,\psi^0-\psi^\varepsilon,\ w)\,dS. \tag{2.70}$$

В силу (2.65), (2.69) имеем

$$\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(F_4^0,\ w)\,dx\right|\leqslant(|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||+\varepsilon)\,\|u^0\|_{H^1(\Omega)}\,\|w\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Формулы (2.45)—(2.50) сохраняют прежний вид. При выводе (2.53) нужно воспользоваться интегральным тождеством в $\Omega\setminus\Omega_1$ для решения u^0 задачи (2.61). Дальнейшие изменения в доказательстве теоремы 2.4 очевидны.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОМ СЛОЕ

3.1. Постановка задачи

Пусть область Ω^ε имеет вид

$$\Omega^\varepsilon=\{x:0<x_n<d\}\cap\varepsilon\omega,$$

где ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условию B (см. п. 4.1 гл. I), ε— малый параметр, ε^{-1} — целое положительное число.

Положим

$$\widehat{\Omega}^\varepsilon=\Omega^\varepsilon\cap\{x:0<x_j<1,\quad j=1,\ \ldots,\ n-1\},$$

$$\Gamma_t=\{x:x_n=t\}\cap\varepsilon\omega,$$

$$\widehat{\Gamma}_t=\Gamma_t\cap\{x:0<x_j<1,\quad j=1,\ \ldots,\ n-1\}.$$

Если $\omega \neq \mathbf{R}^n$, то область Ω^ε представляет собой перфорированный слой.

В Ω^ε рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right) = f(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\
&u^\varepsilon(\widehat{x}, 0) = \Phi^1(\widehat{x}) \text{ на } \Gamma_0,\ u^\varepsilon(\widehat{x}, d) = \Phi^2(\widehat{x}) \text{ на } \Gamma_d,\\
&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \nu_h A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = 0 \text{ на } (\partial\Omega^\varepsilon) \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_d),\\
&u^\varepsilon(x) \text{ 1-периодична по } \widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}).
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Здесь $A^{hk}(\xi)$ — $(n \times n)$-матрицы из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ $(\varkappa_1, \varkappa_2 > 0)$, элементы которых $a_{ij}^{hk}(\xi)$ являются 1-периодическими по ξ функциями.

Существование, единственность и оценки решений задачи (3 1) при соответствующих условиях на f, Φ^1, Φ^2 установлены в § 6.3 гл. I (теорема 6 5).

В этом разделе предполагаем, что $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\Phi^j \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, f, Φ^j являются 1-периодическими по $\hat{x}$, $j = 1, 2$

Наша цель — получить асимптотическое разложение решения u^ε задачи (3.1) по степеням малого параметра ε и дать оценку остаточного члена этого разложения.

В случае одного эллиптического уравнения второго порядка такое разложение было построено в [85] Здесь излагаем результаты, полученные в работе [79].

Для любого целого $k > 0$ решение u^ε задачи (3 1) может быть представлено в виде

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l \sum_{m=0}^{s_l} P_m^l\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) Y_m^l(x, \varepsilon) + \varepsilon^k \mu_k(\varepsilon, x),$$

где $P_m^l(\xi, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матрицы, которые имеют вид

$$P_m^l(\xi, \varepsilon) = P_{m0}^l(\xi) + P_{m1}^l(\xi) + P_{m2}^l\left(\widehat{\xi}, \xi_n - \frac{d}{\varepsilon}\right),$$

причем P_{m0}^l являются 1-периодическими по ξ, $P_{m1}^l(\xi)$ и $P_{m2}^l\left(\widehat{\xi}, \xi_n - \frac{d}{\varepsilon}\right)$ задают пограничные слои, компоненты векторов $Y_m^l(x, \varepsilon)$ являются многочленами по ε, коэффициенты которых определяются через решения краевых задач для усредненной системы теории упругости с постоянными коэффициентами в слое $\{x : 0 < x_n < d\}$, остаточный член разложения удовлетворяет оценке

$$\|\mu_k(\varepsilon, x)\|_{H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon)} \leqslant M_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

с постоянной M_k, не зависящей от ε.

3.2. Построение формального асимптотического разложения

Будем искать решение задачи (3 1) в виде

$$u^\varepsilon=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_\alpha(\xi)\,D^\alpha v_\varepsilon(x),\quad \xi=\varepsilon^{-1}x. \tag{3.2}$$

В этом параграфе, в отличие от главы I, используем следующие удобные здесь обозначения.

$$D^\alpha v=\frac{\partial^l v}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_l}},\quad \alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l),\quad \langle\alpha\rangle=l,$$

α_i может принимать любые значения среди $1,\ \ldots,\ n$; $N_\alpha(\xi)$ — матрицы, 1-периодические по ξ; $v_\varepsilon(x)=(v_1^\varepsilon,\ \ldots,\ v_n^\varepsilon)$ — вектор-функция, 1-периодическая по $\hat{x}$.

Подставляя ряд (3 2) в (3.1) и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v(x,\ \varepsilon^{-1}x))=\frac{\partial v(x,\ \xi)}{\partial x_i}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial v(x,\ \xi)}{\partial\xi_i},\quad \xi=\varepsilon^{-1}x,$$

получим формальное равенство

$$f(x)\cong\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right)\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}A^{kj}(\xi)\,N_\alpha(\xi)\frac{\partial^2 D^\alpha v_\varepsilon}{\partial x_k\,\partial x_j}+$$

$$+\varepsilon^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_\alpha(\xi)}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial D^\alpha v_\varepsilon}{\partial x_k}+$$

$$+\varepsilon^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(A^{kj}(\xi)\,N_\alpha(\xi))\frac{\partial D^\alpha v_\varepsilon}{\partial x_j}+$$

$$+\varepsilon^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_\alpha(\xi)\right)D^\alpha v_\varepsilon\cong$$

$$\cong\sum_{l=2}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)\,N_{\alpha_3\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)\,D^\alpha v_\varepsilon+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_2\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)\,D^\alpha v_\varepsilon+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(A^{k\alpha_1}(\xi)\,N_{\alpha_2\ \ldots\ \alpha_l}(\xi))\,D^\alpha v_\varepsilon+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)\right)D^{\alpha}v_{\varepsilon}\cong$$

$$\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}H_{\alpha}(\xi)\,D^{\alpha}v_{\varepsilon},\quad \xi=\varepsilon^{-1}x.$$

Здесь мы обозначили

$$H_{\alpha}(\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)\,N_{\alpha_2\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)\right)+$$
$$+A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_2\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)+A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)\,N_{\alpha_3\ \ldots\ \alpha_l}(\xi)$$

при $\langle\alpha\rangle\geqslant 2$,

$$H_{\alpha_1}(\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1}(\xi)\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)\,N_0(\xi)\right)+$$
$$+A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial N_0(\xi)}{\partial\xi_j},$$

если $\langle\alpha\rangle=1$,

$$H_0(\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_0(\xi)\right),$$

если $\langle\alpha\rangle=0$.

Подстановка ряда (3.2) в граничные условия (3.1) приводит к формальным равенствам

$$\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_{\alpha}(\widehat{\xi},\ 0)\,D^{\alpha}v_{\varepsilon}|_{x_n=0}\cong\Phi^1(\widehat{x}),\quad x\in\Gamma_0,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_{\alpha}\left(\widehat{\xi},\ \frac{d}{\varepsilon}\right)D^{\alpha}v_{\varepsilon}\Big|_{x_n=d}\cong\Phi^2(\widehat{x}),\quad x\in\Gamma_d,\quad \widehat{\xi}=\varepsilon^{-1}\widehat{x}.$$

Для $x\in\partial\Omega^{\varepsilon}\diagdown(\Gamma_0\cup\Gamma_d)$, $\xi=\varepsilon^{-1}x$, имеем формально

$$\sigma_{\varepsilon}(u^{\varepsilon})\equiv\left(\nu_k A^{kj}(\xi)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)\cong\varepsilon^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_k A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_{\alpha}(\xi)}{\partial\xi_j}D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu^k A^{kj}(\xi)\,N_{\alpha}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)\cong$$

$$\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_k A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\xi)}{\partial\xi_j}D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_k A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}(\xi)D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)\cong\varepsilon^{-1}\nu_k A^{kj}\frac{\partial N_0(\xi)}{\partial\xi_j}v_{\varepsilon}(x)+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_k\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\xi)}{\partial\xi_j}+A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}(\xi)\right)D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)\cong$$

$$\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}B_{\alpha}(\xi)D^{\alpha}v_{\varepsilon}(x)\cong 0,$$

где

$$B_{\alpha}(\xi)=\nu_k\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\xi)}{\partial\xi_j}+A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}(\xi)\right),\tag{3.3}$$

если $\langle\alpha\rangle>0$, и

$$B_0(\xi)=\nu_k A^{kj}\frac{\partial N_0(\xi)}{\partial\xi_j},$$

если $\langle\alpha\rangle=0$.

Будем искать $N_{\alpha}(\xi)$ в виде

$$N_{\alpha}(\xi)=N_{\alpha}^0(\xi)+N_{\alpha}^1(\xi)+N_{\alpha}^2(\xi),$$

где $N_{\alpha}^0(\xi)$ — 1-периодические по ξ матрицы, а N_{α}^1, N_{α}^2 соответствуют пограничным слоям вблизи гиперплоскостей $x_n=0$, $x_n=d$ соответственно.

Положим $N_0^0=E$, $N_0^1=N_0^2=0$, где E — единичная $(n\times n)$-матрица. Обозначим

$$T_{\alpha}^p(\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_k}(A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}^p(\xi))+A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}^p(\xi)+$$

$$+A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}^p,$$

$$Z_{\alpha}^p(\xi)\equiv\nu_k A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}^p(\xi),\quad p=0,\ 1,\ 2,$$

где N_{α}^p с отрицательной длиной индекса α считаются равными нулю. Положим

$$h_{\alpha}^0=\mu^{-1}\int_{Q\cap\omega}\left(A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial \tilde{N}_{\alpha_2\ldots\alpha_l}^0(\xi)}{\partial\xi_j}+A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}^0(\xi)\right)d\xi,$$

$$\mu=\mathrm{mes}\,(Q\cap\omega).\tag{3.4}$$

Матрицы $N_{\alpha}^0(\xi)$ определим как решения рекуррентной последовательности задач

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_\alpha^0\right)=-T_\alpha^0(\xi)+h_\alpha^0 \quad \xi\in\omega,\\&\sigma(N_\alpha^0)=-Z_\alpha^0(\xi),\quad \xi\in\partial\omega;\\&N_\alpha^0(\xi)\ 1\text{-периодична по } \xi,\ \int\limits_{Q\cap\omega}N_\alpha^0(\xi)\,d\xi=0,\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

$\langle\alpha\rangle=1, 2,\ldots$.

Существование и единственность N_α^0 легко выводятся по индукции, исходя из теоремы 6.1 гл. I.

Матрицы N_α^1, N_α^2 определим последовательно из рекуррентных последовательностей задач при $\langle\alpha\rangle=1, 2,\ldots$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_\alpha^1}{\partial\xi_j}\right)=-T_\alpha^1 \text{ в } \omega(0,\ \infty),\\&\sigma(N_\alpha^1)=-Z_\alpha^1(\xi) \text{ на } \partial\omega\cap\partial\omega(0,\ \infty),\\&N_\alpha^1(\hat{\xi},\ 0)=-N_\alpha^0(\hat{\xi},\ 0)+h_\alpha^1 \text{ на } \partial\omega(0,\ \infty)\setminus\partial\omega,\\&N_\alpha^1(\xi)\ 1\text{-периодична по } \hat{\xi},\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_\alpha^2}{\partial\xi_j}\right)=-T_\alpha^2 \text{ в } \omega\left(-\infty,\ \frac{d}{\varepsilon}\right),\\&\sigma(N_\alpha^2)=-Z_\alpha^2(\xi) \text{ на } \partial\omega\cap\partial\omega\left(-\infty,\ \frac{d}{\varepsilon}\right),\\&N_\alpha^2\left(\hat{\xi},\ \frac{d}{\varepsilon}\right)=-N_\alpha^0\left(\hat{\xi},\ \frac{d}{\varepsilon}\right)+h_\alpha^2 \text{ на } \partial\omega\left(-\infty,\ \frac{d}{\varepsilon}\right)\setminus\partial\omega,\\&N_\alpha^2(\xi)\ 1\text{-периодична по } \hat{\xi},\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

где h_α^1, h_α^2—$(n\times n)$-матрицы с постоянными элементами, выбранные так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|N_\alpha^1(\xi)\|_{H^1(\widehat{\omega}(s,s+1))}\leqslant C_1^\alpha\exp(-\varkappa_\alpha^1 s),\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\tag{3.8}$$

$$\|N_\alpha^2(\xi)\|_{H^1(\widehat{\omega}(s-1,s))}\leqslant C_2^\alpha\exp\left(-\varkappa_\alpha^2\left(\frac{d}{\varepsilon}-s\right)\right),\quad s=\frac{d}{\varepsilon},\ \frac{d}{\varepsilon}-1,\ \ldots,\tag{3.9}$$

C_1^α, C_2^α, $\varkappa_\alpha^1$, $\varkappa_\alpha^2$— положительные постоянные, не зависящие от ε.

Существование решений задачи (3.6), (3.7) и наличие таких постоянных матриц h_α^1, h_α^2, что выполнены условия (3.8), (3 9), легко доказываются по индукции на основании теоремы 8.4 гл. I.

Заметим, что в силу граничного условия при $\xi_n=d/\varepsilon$ задачи (3.7) матрицы N_α^2 и h_α^2 зависят от ε Если d кратно ε, то вследствие 1-периодичности по ξ матриц $A^{hk}(\xi)$ зависимость $N_\alpha^2(\xi)$ от ε определяется тем, что $N_\alpha^2(\xi)$ представляется в виде $N_\alpha^2(\xi)=\tilde{N}_\alpha^2(\hat{\xi},\xi_n-d/\varepsilon)$, где $\tilde{N}_\alpha^2(\xi)$ являются решениями соответствующей рекуррентной последовательности задач вида (3.7) в области $\omega(-\infty, 0)$ с граничными условиями

$$\tilde{N}_\alpha^2(\hat{\xi}, 0) = -N_\alpha^0(\hat{\xi}, 0) + \tilde{h}_\alpha^2.$$

Очевидно, что $\tilde{N}_\alpha^2$, $\tilde{h}_\alpha^2$ не зависят от ε.

Определив таким образом N_α^p, $p=0, 1, 2$, после подстановки v_ε в (3.1), получаем формальные равенства

$$f(x) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^0 D^\alpha v_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{3.10}$$

$$\Phi^1(\hat{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} \left(h_\alpha^1 + N_\alpha^2\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, 0\right)\right) D^\alpha v_\varepsilon \Big|_{x_n=0},$$

$$\Phi^2(\hat{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} \left(h_\alpha^2 + N_\alpha^1\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \frac{d}{\varepsilon}\right)\right) D^\alpha v_\varepsilon \Big|_{x_n=\alpha}, \tag{3.11}$$

где, как нетрудно проверить,

$$h_0^0 = h_{\alpha_1}^0 = 0, \quad h_0^1 = h_0^2 = E, \tag{3.12}$$

граничные условия на $(\partial\Omega^\varepsilon) \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_d)$ выполнены в силу граничных условий в (3.5)—(3.7) для матриц N_α^0, N_α^1, N_α^2. Отметим, что в силу формул (3.4) постоянные матрицы $h_{\alpha_1\alpha_2}^0$ определяются соотношениями

$$h_{\alpha_1\alpha_2}^0 = (\operatorname{mes} Q \cap \omega)^{-1} \int_{Q\cap\omega} \left(A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi) + A^{\alpha_1 j} \frac{\partial N_{\alpha_2}^0}{\partial \xi_j}\right) d\xi.$$

Сравнивая эти равенства с (1.3), заключаем, что $h_{ij}^0 = \hat{A}^{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, т. е. что h_{ij}^0 являются матрицами, задающими коэффициенты усредненной системы теории упругости.

Будем искать v_ε в виде ряда

$$v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_j(x). \tag{3.13}$$

Подставим формально вектор-функцию v_ε, заданную формулой (3.13), в (3.10). Учитывая (3.12), получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^0 D^\alpha v_\varepsilon \cong \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{l+j-2} \sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^0 D^\alpha V_j =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\sum_{m=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^0 D^\alpha V_{k-m}=\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\sum_{m=2}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^0 D^\alpha V_{k-m}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}\sum_{m=2}^{j+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^0 D^\alpha V_{j+2-m}.$$

Отсюда и из (3.10) находим формальное равенство

$$f(x)\cong\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}\sum_{m=2}^{j+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^0 D^\alpha V_{j+2-m}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим первое равенство (3.11). Легко видеть, учитывая (3.13), что

$$\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}h_\alpha^1 D^\alpha v_\varepsilon=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j+l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}h_\alpha^1 D^\alpha V_j=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\sum_{m=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^1 D^\alpha V_{k-m}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что в силу (3.9) $\left\|N_\alpha^2\left(\frac{\widehat{x}}{\varepsilon},\ 0\right)\right\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)}\leqslant\leqslant ce^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}$, $\gamma,\ c=\mathrm{const}>0$, из первого равенства (3.11) получаем формальное равенство

$$\Phi^1(\widehat{x})\cong\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\sum_{m=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^1 D^\alpha V_{k-m}\Big|_{x_n=0}. \tag{3.15}$$

Аналогично находим, что

$$\Phi^2(\widehat{x})\cong\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\sum_{m=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=m}h_\alpha^2 D^\alpha V_{k-m}\Big|_{x_n=d}. \tag{3.16}$$

Приравнивая в (3.14)—(3.16) члены одного порядка по ε, получим рекуррентную последовательность задач для $V_j(x)$:

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{\mathscr{L}}(V_j)\equiv\widehat{A}^{sk}\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s\,\partial x_k}=\Psi^j\quad\text{в}\quad\{x:0<x_n<d\},\\&V_j(\widehat{x},\ 0)=\varphi_j^1(x),\quad V_j(\widehat{x},\ d)=\varphi_j^2(x),\\&V_j(x)\ \text{1-периодична по}\ \widehat{x},\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Здесь

$$\varphi_0^p=\Phi^p,\quad \varphi_j^p=-\sum_{l=1}^{j}\sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^p D^\alpha V_{j-l},\quad p=1,\ 2,$$

$$\Psi^0=f,\quad \Psi^j=-\sum_{l\leq 3}^{j+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^0 D^\alpha V_{j+2-l},\quad j=1,\ 2,\ \ldots \tag{3.18}$$

Существование V_j следует из теоремы 6.5 гл. I в случае, когда $\omega=\mathbf{R}^n$ и коэффициенты системы теории упругости не зависят от ε.

3.3. Обоснование асимптотического разложения. Оценки остаточного члена

В предыдущем разделе мы построили формальное асимптотическое разложение для вектор-функции u^ε, которая является решением задачи (3.1), в виде (3.2), где $N_\alpha=N_\alpha^0+N_\alpha^1+N_\alpha^2$, N_α^0, N_α^1, N_α^2 — решения задач (3.5)—(3.7) соответственно, v_ε имеет вид (3.13) и V_j являются решениями рекуррентной последовательности задач (3.17).

Приближенное решение задачи (3.1) ищем в виде

$$u^{(k)}(x)=\sum_{l=0}^{k+1}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^\alpha v^{(k)}(x), \tag{3.19}$$

где

$$v^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j V_j(x). \tag{3.20}$$

В следующей теореме дается оценка остаточного члена асимптотического разложения решения u^ε задачи (3 1).

Теорема 3.1. *Пусть u^ε — решение задачи* (3.1). *Тогда при любом целом $k\geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\|u^{(k)}-u^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon)}\leqslant M_k\varepsilon^{k+1}, \tag{3.21}$$

где постоянная M_k не зависит от ε, $u^{(k)}$ задано формулой (3.19).

Доказательству этой теоремы предпошлем лемму, в которой устанавливаются оценки матриц N_α^p, $p=0,\ 1,\ 2$.

Лемма 3.2. *Для решений N_α^p, $p=0,\ 1,\ 2$, задач* (3.5)—(3.7) *справедливы оценки*

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon}\left(\left|\nabla_\xi N_\alpha^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2+\left|N_\alpha^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2\right)dx\leqslant M_\alpha^p,\quad p=0,\ 1,\ 2, \tag{3.22}$$

$$\left\| N^1_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_d)} \leqslant c_1 e^{-\frac{\gamma_1}{\varepsilon}}, \tag{3.23}$$

$$\left\| N^2_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)} \leqslant c_2 e^{-\frac{\gamma_2}{\varepsilon}}, \tag{3.24}$$

где M^p_α, c_l, γ_l— положительные постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство. Получим оценку (3.22) при $p=0$. По индукции относительно $\langle\alpha\rangle=0, 1, 2, \ldots$, используя теорему 6.1 гл I, выводим, что

$$\int\limits_{Q\cap\omega} (|\nabla_\xi N^0_\alpha(\xi)|^2 + |N^0_\alpha(\xi)|^2)\, d\xi \leqslant C_\alpha.$$

Переходя к переменным $x=\varepsilon\xi$ и учитывая, что $N^0_\alpha(\xi)$ 1-периодичны по ξ и область $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ содержит не более $(d+1)\varepsilon^{-n}$ ячеек вида $\varepsilon(z+Q\cap\omega)$, $z\in\mathbf{Z}^n$, получим оценку (3.22) при $p=0$.

Докажем теперь (3.22) при $p=1$.

Суммируя оценки (3.8) по $s=0, 1, \ldots$, устанавливаем, что

$$\int\limits_{\widehat{\omega}(0,d/\varepsilon)} (|\nabla_\xi N^1_\alpha(\xi)|^2 + |N^1_\alpha(\xi)|^2)\, d\xi \leqslant M_\alpha,$$

где $M_\alpha=\mathrm{const}$ и не зависит от ε. Переходя в этом неравенстве к переменным $x=\varepsilon\xi$ и учитывая, что область $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ состоит из $\varepsilon^{-(n-1)}$ областей вида $\varepsilon(z+\widehat{\omega}(0, d/\varepsilon))$ $z\in\mathbf{Z}^n$, $z=(\hat{z}, 0)$, а также что элементы матриц $N^1_\alpha(\xi)$ являются 1-периодическими по $\widehat{\xi}$ функциями, получаем оценку (3.22) при $p=1$

При $p=2$ оценка (3.22) выводится аналогично случаю $p=1$, но при этом следует воспользоваться неравенствами (3.9).

Оценки (3.23), (3.24) вытекают непосредственно из (3.8), (3.9) и определения нормы в пространствах $H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)$, $H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_d)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что вектор-функция $u^{(k)}$, заданная равенством (3.19), является решением задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\varepsilon(u^{(k)}) = f + \varepsilon^{k+1}\Theta^0(x, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}\frac{\partial}{\partial x_m}\Theta^m(x, \varepsilon) \text{ на } \Omega^\varepsilon,\\
&u^{(k)}(\widehat{x}, 0) = \Phi^1(\widehat{x}) + \varepsilon^{k+1}\theta_1(\widehat{x}, \varepsilon) \text{ на } \Gamma_0,\\
&u^{(k)}(\widehat{x}, d) = \Phi^2(\widehat{x}) + \varepsilon^{k+1}\theta_2(\widehat{x}, \varepsilon) \text{ на } \Gamma_d,\\
&\sigma_\varepsilon(u^{(k)}) = \nu_m\varepsilon^{k+1}\Theta^m(x, \varepsilon) \text{ на } (\partial\Omega^\varepsilon)\diagdown(\Gamma_0\cup\Gamma_d),
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

$u^{(k)}(x)$ 1-периодична по $\widehat{x}$, где

$$\sum_{l=0} \|\Theta^l\|_{L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)} \leqslant M_0, \tag{3.26}$$

$$\|\theta_1(\widehat{x}, \varepsilon)\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_0)} \leqslant M_1, \ \|\theta_2(x, \varepsilon)\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_d)} \leqslant M_2, \tag{3.27}$$

M_0, M_1, M_2 — не зависящие от ε постоянные.

Тогда оценка (3 21) будет прямым следствием теоремы 6.5 гл. I.

Рассмотрим сначала граничные условия для вектор-функции $u^{(k)}(x)$. Имеем

$$u^{(k)}(\widehat{x}, d) = \sum_{l=0}^{k+1} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha^2 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^j D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d} + \gamma_\varepsilon^1 =$$

$$= \sum_{s=0}^{2k+1} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{k} \sum_{\langle\alpha\rangle=s-j} h_\alpha^2 D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d} + \gamma_\varepsilon^1 =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \varepsilon^s \sum_{t=0}^{s} \sum_{\langle\alpha\rangle=t} h_\alpha^2 D^\alpha V_{s-t} \Big|_{x_n=d} + \sum_{s=k+1}^{2k+1} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{k} \sum_{\langle\alpha\rangle=s-j} h_\alpha^2 D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d} + \gamma_\varepsilon^1 =$$

$$= \Phi^2 + \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^s \left(V_s + \sum_{t=1}^{s} \sum_{\langle\alpha\rangle=t} h_\alpha^2 D^\alpha V_{s-t} \right) \Big|_{x_n=d} +$$

$$+ \sum_{s=k+1}^{2k+1} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{k} \sum_{\langle\alpha\rangle=s-j} h_\alpha^2 D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d} + \gamma_\varepsilon^1,$$

где

$$\gamma_\varepsilon^1 = \sum_{l=0}^{k+1} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} N_\alpha^1 \left(\frac{\widehat{x}}{\varepsilon}, \frac{d}{\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^j D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d}, \tag{3.28}$$

$h_\alpha{}^2$ с отрицательной либо большей $k+1$ длиной $\langle\alpha\rangle$ индекса α считаются равными нулю. В силу условий (3.18) имеем

$$u^{(k)}(\widehat{x}, d) = \Phi^2 + \sum_{s=k+1}^{2k+1} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{k} \sum_{\langle\alpha\rangle=s-j} h_\alpha^2 D^\alpha V_j \Big|_{x_n=d} + \gamma_\varepsilon^1. \tag{3.29}$$

Учитывая, что вектор-функции V_j являются бесконечно дифференцируемыми в слое $\{x : 0 \leqslant x_n \leqslant d\}$, а также оценки (3.23), из (3.28), (3.29) выводим, что $u^{(k)}(\hat{x}, d) = \Phi^2(\hat{x}) + \varepsilon^{k+1}\theta_2(\hat{x}, \varepsilon)$ и выполнено второе неравенство (3.27). Аналогично доказывается, что $u^{(k)}(\hat{x}, 0) = \Phi^1(\hat{x}) + \varepsilon^{k+1}\theta_1(\hat{x}, \varepsilon)$ и выполнено первое неравенство (3.27).

Вычислим теперь $\sigma_\varepsilon(u^{(k)})$ на $(\partial\Omega^\varepsilon) \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_d)$. При $\xi = \varepsilon^{-1}x$, учитывая (3.3), имеем

$$\sigma_\varepsilon(u^{(k)})=\sum_{l=0}^{k+1}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_m A^{mj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\ \ \alpha_l}(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_{l=1}^{k+2}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}\nu_m A^{m\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\,.\,\alpha_l}(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}(x)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k+1}\varepsilon^{l-1}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}B_\alpha(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}(x)+$$

$$+\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}\nu_m A^{m\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\ \ \alpha_{k+2}}(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}(x)=$$

$$=-\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}\sigma(N_{\alpha_1\ \ \alpha_{k+2}})\,D^\alpha v^{(k)}=$$

$$=-\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}\nu_m A^{mj}\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_\alpha(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}. \tag{3.30}$$

При этом мы воспользовались равенством $B_\alpha(\xi)=0$ при $\xi\in\in\varepsilon^{-1}(\partial\Omega^\varepsilon(\Gamma_0\cup\Gamma_d))$, которое выполнено в виду граничных условий в (3.5)—(3.7).

Подставляя $u^{(k)}$ в систему (3.1), получаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^{(k)})=\sum_{l=0}^{k+1}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}h_\alpha^0 D^\alpha v^{(k)}(x)+$$

$$+\varepsilon^k\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}A^{m\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2\,.\,\alpha_{k+2}}(\xi)+A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_2\,..\,\alpha_{k+2}}(\xi)+\right.$$

$$\left.+A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3.\ \ \alpha_{k+2}}\right]D^\alpha v^{(k)}(x)+\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+3}A^{\alpha_1\alpha_2}N_{\alpha_3\ \ \alpha_{k+3}}(\xi)\,D^\alpha v^{(k)}(x),$$

$$\xi=\varepsilon^{-1}x. \tag{3.31}$$

Пользуясь тем, что N_α^0, N_α^1, N_α^2 суть решения задач (3.5)—(3.7) соответственно, можем заменить выражение, стоящее в квадратных скобках в (3.31), на

$$h^0_{\alpha_1\ \ \alpha_{k+2}}-\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(A^{mj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\,.\,\alpha_{k+2}}\right).$$

Поэтому

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^{(k)})=\sum_{l=0}^{k+2}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}h_\alpha^0 D^\alpha v^{(k)}(x)+\gamma_\varepsilon^0, \tag{3.32}$$

$$\gamma_\varepsilon^0=-\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+2}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)D^\alpha v^{(k)}(x)+$$

$$+\varepsilon^{k+1}\sum_{\langle\alpha\rangle=k+3}A^{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_{\alpha_3\ldots\alpha_{k+3}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha v^{(k)}(x). \qquad (3.33)$$

Преобразуем теперь выражение (3.32), полагая $\tilde{h}_\alpha^0=h_\alpha^0$ при $\langle\alpha\rangle\leqslant k+2$, $\tilde{h}_\alpha^0=0$ при $\langle\alpha\rangle\geqslant k+3$. Имеем

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^{(k)})=\sum_{l=0}^{k+2}\varepsilon^{l-2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}h_\alpha^0D^\alpha\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^jV_j+\gamma_\varepsilon^0=$$

$$=\sum_{s=0}^{2k+2}\varepsilon^{s-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=s-j}\tilde{h}_\alpha^0D^\alpha V_j+\gamma_\varepsilon^0=\sum_{s=0}^{k+2}\varepsilon^{s-2}\sum_{t=0}^{s}\sum_{\langle\alpha\rangle=t}h_\alpha^0D^\alpha V_{s-t}+$$

$$+\sum_{s=k+3}^{2k+2}\varepsilon^{s-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=s-j}\tilde{h}_\alpha^0D^\alpha V_j+\gamma_\varepsilon^0=$$

$$=f+\sum_{s=3}^{k+2}\varepsilon^{s-2}\left(h_{\alpha_1,\alpha_2}^0\frac{\partial^2V_{s-2}}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}}+\sum_{t=3}^{s}\sum_{\langle\alpha\rangle=t}h_\alpha^0D^\alpha V_{s-t}\right)+$$

$$+\sum_{s=k+3}^{2k+2}\varepsilon^{s-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=s-j}\tilde{h}_\alpha^0D^\alpha V_j+\gamma_\varepsilon^0.$$

Отсюда и из (3.17), (3.18), (3.33) следует, что

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^{(k)})=f+\sum_{s=3}^{k+2}\varepsilon^{s-2}(\widehat{\mathscr{L}}(V_{s-2})-\psi^{s-2})+$$

$$+\varepsilon^{k+1}\Theta^0(x,\varepsilon)+\varepsilon^{k+1}\frac{\partial}{\partial x_m}\Theta^m(x,\varepsilon), \qquad (3.34)$$

где
$$\Theta^m=-\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}A^{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+2}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha v^{(k)}(x), \qquad (3.35)$$

$$\Theta^0=\sum_{\langle\alpha\rangle=k+2}A^{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_{\alpha_3\ldots\alpha_{k+2}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha\frac{\partial}{\partial x_m}v^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_{\langle\alpha\rangle=k+3}A^{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_{\alpha_3\ldots\alpha_{k+3}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha v^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_{s=k+3}^{2k+2}\varepsilon^{s-(k+3)}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=s-j}\tilde{h}_\alpha^0D^\alpha V_j(x). \qquad (3.36)$$

Вследствие неравенств (3.22) леммы 3.2 и гладкости вектор-функций V_j справедлива оценка (3.26).

Очевидно, что вектор-функция $u^{(k)}$ удовлетворяет соотношениям (3 25). Теорема доказана.

Замечание 3.3. Из оценки (3.21) и равенств (3.19), (3.20) следует, что

$$u^{\varepsilon}(x)=u^{(k)}(x)+\varepsilon^{k+1}q(x, \varepsilon)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k+1}\varepsilon^{l}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_{\alpha}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{j}D^{\alpha}V_{j}(x)+\varepsilon^{k+1}q(x, \varepsilon), \tag{3.37}$$

где $\|q(x, \varepsilon)\|_{H^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})}\leqslant M$ с постоянной M, не зависящей от ε. Отсюда вытекает, что

$$u^{\varepsilon}(x)=\sum_{t=0}^{k}\varepsilon^{t}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\langle\alpha\rangle=t-j}N_{\alpha}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^{\alpha}V_{j}+\varepsilon^{k+1}q_{1}(x, \varepsilon),$$

где $\|q_1(x, \varepsilon)\|_{L^2(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})}\leqslant M_1$, $M_1=\mathrm{const}$ и не зависит от ε, $N_{\alpha}=0$ при отрицательных $\langle\alpha\rangle$. В частности, при $k=0$ получаем

$$\|u^{\varepsilon}(x)-V_0\|_{L^2(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})}\leqslant c\varepsilon,$$

где c — не зависящая от ε постоянная

Из (3.37) при $k=0$ получаем также

$$\left\|u^{\varepsilon}-V_{0}-\varepsilon N_{p}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial V_{0}}{\partial x_{p}}\right\|_{H^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})}\leqslant c_{1}\varepsilon,$$

где $c_1=\mathrm{const}$ и не зависит от ε.

Отметим, что, построив пограничные слои, в первом приближении можем получить оценку остаточного члена порядка ε, тогда как без учета пограничного слоя удается получить лишь оценку порядка $\varepsilon^{1/2}$, как это сделано в теореме 1.2 при $\Phi^0=\Phi^{\varepsilon}$, $f^0=f^{\varepsilon}$ (см. оценку (1.15)).

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

В этом параграфе рассмотрим асимптотические разложения по ε решений задачи Дирихле для системы теории упругости в перфорированной области Ω_{ε} с периодической структурой в случае однородных краевых условий на границе полостей S_{ε}.

Впервые асимптотические разложения для решений задачи Дирихле для уравнения $\Delta u^{\varepsilon}=f$ в перфорированной области Ω^{ε} были получены Ж. Л. Лионсом [126], где были даны оценки остаточного члена разложения при условии, что $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Для обоснования асимптотических разложений при $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ без предположения финитности f мы строим функции типа пограничного слоя, которые экспоненциально затухают при удалении от $\partial\Omega$.

4.1. Постановка задачи. Вспомогательные результаты

Рассмотрим перфорированную область Ω^ε, которая имеет вид $\Omega \cap \varepsilon\omega$, где ω — неограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с 1-периодической структурой, т. е. ω инвариантна относительно сдвигов на векторы $z \in \mathbf{Z}^n$, причем $\bar{Q} \setminus \omega$ содержит поверхность класса C^1, $Q = \{x : 0 < x_j < 1,\ j = 1, \dots, n\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей.

Заметим, что здесь мы не требуем гладкости границы области ω.

В Ω^ε мы будем изучать следующую задачу Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right) = f(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &u^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon,\quad f \in C^\infty(\bar{\Omega}), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где $A^{hk}(\xi)$ — $(n \times n)$-матрицы класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, элементы которых $a_{ij}^{hk}(\xi)$ — 1-периодические по ξ функции.

Основной результат этого параграфа — обоснование асимптотического разложения решения задачи (4.1):

$$u^\varepsilon(x) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+2} \sum_{\langle\alpha\rangle = l} N_\alpha(\varepsilon, \xi) D^\alpha f(x),\quad \xi = \varepsilon^{-1}x, \tag{4.2}$$

где α, D^α — те же обозначения, что и в § 3, $N_\alpha(\xi)$ — матрицы вида $N_\alpha = N_\alpha^1 + N_\alpha^0$, такие, что элементы N_α^0 являются 1-периодическими по ξ функциями в ω, а $N_\alpha^1\left(\varepsilon, \dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ экспоненциально затухают в Ω^ε при удалении от $\partial\Omega$, причем N_α^0 и N_α^1 не зависят от f.

Прежде чем перейти к строгому обоснованию разложения (4.2), приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 4.1. *Для любой вектор-функции $w \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ имеют место оценки*

$$\|w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant M\varepsilon \|e(w)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.3}$$

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2^{1/2} \|e(w)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.4}$$

где постоянная M не зависит от ε.

Доказательство. Неравенство (4.4) вытекает из первого неравенства Корна (2.2) гл. I в области Ω, поскольку можно продолжить w нулем на множество $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ до вектор-функции из $H_0^1(\Omega)$.

Докажем неравенство (4.3). Продолжим вектор-функцию w нулем на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega^\varepsilon$. Обозначим через T^ε множество $z \in \mathbb{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(z+Q) \cap \Omega \neq \varnothing$. Рассмотрим вектор-функцию $W(\xi)=w(\varepsilon\xi)$. Поскольку $W(\xi)=0$ на $\partial\omega$, то, учитывая условия на $\partial\omega$, в силу неравенства Фридрихса, установленного в лемме 1.1 гл. I, получаем

$$\int\limits_{(z+Q)\cap\omega} |W(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant c \int\limits_{(z+Q)\cap\omega} |\nabla_\xi W|^2 \, d\xi. \tag{4.5}$$

Производя в этом неравенстве замену переменных $x=\varepsilon\xi$ и суммируя полученные неравенства по $z \in T^\varepsilon$, получим, учитывая (4.4), неравенство (4.3). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $U(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ — обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon(U) = f^0(x) + \frac{\partial f^j(x)}{\partial x_j} \ \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &U = \Phi \ \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где $f^j \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j=0,\ldots,n$, $\Phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Тогда имеют место оценки

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla U|^2 \, dx \leqslant C\Big[\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f^0|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (f^j, f^j) \, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\Phi|^2 \, dx\Big],$$

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |U|^2 \, dx \leqslant C_1 \Big[\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f^0|^2 \, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (f^j, f^j) \, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\Phi|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\Phi|^2 \, dx\Big]. \tag{4.7}$$

Доказательство Из интегрального тождества вида (3.15) гл. I для $w=U-\Phi$ получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(A^{hk} \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right) dx \leqslant \Big|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (f^0, w) \, dx\Big| + \Big|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(f^i, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) dx\Big| + \Big|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(A^{hk} \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_h}\right) dx\Big|. \tag{4.8}$$

В силу неравенства (3.13) гл. I имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |e(w)|^2 \, dx \leqslant K_1 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(A^{hk} \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial w}{\partial x_h}\right) dx.$$

Отсюда и из (4.3), (4.4), (4.8) выводим

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w|^2 \, dx \leqslant K_2 \Big[\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f^0|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (f^i, f^i) \, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\Phi|^2 \, dx\Big],$$

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |w|^2\,dx \leqslant K_3\left[\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f^0|^2\,dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (f^i, f^i)\,dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\Phi|^2\,dx\right],$$

где постоянные K_2, K_3 не зависят от ε.

Из этих неравенств, учитывая, что $w=U-\Phi$, получаем оценки (4.7). Лемма доказана.

В следующей теореме устанавливается, в частности, тот факт, что решения задачи (4 6) имеют вид пограничного слоя, сосредоточенного вблизи $\partial\Omega$, при условии, что $\Phi=0$ на $(\partial\Omega^\varepsilon)\cap\Omega$ и вектор-функции $f^i(x)$, $i=0,\ldots,n$, достаточно быстро убывают в Ω^ε при удалении x от $\partial\Omega$.

Рассмотрим скалярную функцию $\tau(x)\in C^1(\bar{\Omega})$, такую, что $\tau\equiv\equiv 0$ в окрестности $\partial\Omega$, $\tau\geqslant 0$ в Ω, $|\nabla\tau|\leqslant M=\mathrm{const}$. Далее считаем, что ε настолько мало, что существует подобласть $\Omega'\subset\Omega$, замыкание которой $\bar{\Omega}'$ состоит из кубов $\varepsilon\bar{Q}+\varepsilon z$, где z пробегает некоторое подмножество $T_\varepsilon\subset\mathbf{Z}^n$. Предположим также, что $\partial\Omega'$ лежит в окрестности $\partial\Omega$, где $\tau\equiv 0$.

Теорема 4.3. *Пусть* $U(x)$ *является обобщенным решением задачи* (4.6), *причем* $\Phi(x)=0$ *на* $(\partial\Omega^\varepsilon)\setminus\partial\Omega$ (*т. е.* $\Phi\in H^1(\Omega^\varepsilon, S_\varepsilon)$). *Тогда*

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |U|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |\nabla U|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |e(U)|^2 \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx \leqslant K\left[\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |e(U)|^2\,dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |f^0|^2 \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} (f^j, f^j) \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\right], \qquad (4.9)$$

где K, δ — *положительные постоянные, не зависящие от* ε.

Доказательство. Возьмем $v=(e^{\mu\tau}-1)U$ в интегральном тождестве (3.15) гл. I для $U(x)$, где $\mu=\mathrm{const}>0$ — параметр, который будет выбран ниже. Имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(A^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial x_h}\right)\exp\mu\tau dx = -\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(A^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_k}, U\right)\mu\frac{\partial\tau}{\partial x_h}\exp(\mu\tau)\,dx -$$
$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(f^0, U)(\exp(\mu\tau)-1)\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(f^j, \frac{\partial U}{\partial x_j}\right)(\exp(\mu\tau)-1)\,dx +$$
$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mu\frac{\partial\tau}{\partial x_j}(f^j, U)\exp(\mu\tau)\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(A^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial x_h}\right)dx.$$

Поскольку $\tau\equiv 0$ вне Ω', учитывая неравенство (3.13) гл. I, устанавливаем

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |e(U)|^2 \exp(\mu\tau)\,dx \leqslant c_1\mu \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |e(U)|^2 \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |f^0| \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} + c_2 \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} (f^j, f^j) \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |\nabla U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} + \mu c_3 \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} (f^j, f^j) \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2} + c_4 \int_{\Omega^\varepsilon} |e(U)|^2\,dx. \qquad (4.10)$$

Согласно неравенству Корна для вектор-функций $w \in H^1(Q\cap\omega, \partial\omega\cap\bar{Q})$ (т. е. $w=0$ на $(\partial\omega)\cap\bar{Q}$) имеем

$$\int_{Q\cap\omega} (|w|^2 + |\nabla_\xi w|^2)\,d\xi \leqslant M \int_{Q\cap\omega} |e_\xi(w)|^2\,d\xi. \qquad (4.11)$$

Это неравенство вытекает из теоремы 2.7 гл. I, если продолжить w нулем на $Q\setminus\omega$ и учесть, что $\bar{Q}\setminus\omega$ содержит поверхность класса C^1.

Пользуясь неравенством, получающимся из (4.11) при замене переменных $\xi=\varepsilon^{-1}x$, устанавливаем, что для каждого множества вида $\omega_z=\varepsilon(Q\cap\omega)+\varepsilon z \subset \Omega^\varepsilon\cap\Omega'$, $z\in T_\varepsilon$, выполняются неравенства

$$\int_{\omega_z} |U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5\varepsilon^2 \int_{\omega_z} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial\left(\exp\frac{\mu\tau}{2} U_i\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\exp\frac{\mu\tau}{2} U_j\right)}{\partial x_i} \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5\varepsilon^2 \int_{\omega_z} \sum_{i,j=1}^n \Big[\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \Big) \exp\frac{\mu\tau}{2} +$$

$$+ \Big(U_i \frac{\mu}{2} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} + U_j \frac{\mu}{2} \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \Big) \exp\frac{\mu\tau}{2} \Big]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c_6\varepsilon^2 \int_{\omega_z} |e(U)|^2 \exp(\mu\tau)\,dx + c_6\varepsilon^2\mu^2 \int_{\omega_z} |U|^2 \exp(\mu\tau)\,dx. \qquad (4.12)$$

Полагая $\mu=\sigma(2\sqrt{c_6}\,\varepsilon)^{-1}$, где $\sigma=\mathrm{const}\in(0,\ 1)$ и будет выбрано ниже, из (4.12) выводим

$$\int\limits_{\omega_z}|U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\leqslant c_7\varepsilon^2\int\limits_{\omega_z}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx$$

для любого $\omega_z\subset\Omega^\varepsilon\cap\Omega'$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\leqslant c_7\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx. \tag{4.13}$$

В силу неравенства (4.11) имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}\left|\nabla\left(\exp\left(\frac{\mu\tau}{2}\right)U\right)\right|^2dx\leqslant M_1\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}\left|e\left(\exp\left(\frac{\mu\tau}{2}\right)U\right)\right|^2dx.$$

Из этого неравенства получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\leqslant c_8\Big[\mu\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}+\mu^2\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|U|^2\exp(\mu\tau)\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big].$$

Отсюда с помощью (4.13) и равенства $\mu=\sigma/2\sqrt{c_6}\varepsilon$ выводим оценку

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\leqslant c_9(\sigma+\sigma^2)\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp\mu\tau dx+$$
$$+c_9\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx.$$

Таким образом, при всех $\sigma\in(0,\min(1,\ 1/4c_9))$ имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp(\mu\tau)\,dx\leqslant c_{10}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx. \tag{4.14}$$

Из (4.10), (4.13), (4.14) следует, что

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|e(U)|^2\exp\mu\tau dx\leqslant c_{11}\Big[\mu\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx+$$
$$+\varepsilon\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|f^0|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}+$$
$$+\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}(f^j,f^j)\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}+$$

$$+\mu\varepsilon\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}(f^j, f^j)\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|e(U)|^2\exp(\mu\tau)\,dx\Big)^{1/2}+$$

$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|e(U)|^2\,dx\Big]. \qquad (4.15)$$

Выбирая σ достаточно малым и не зависящим от ε и учитывая равенство $\mu=\sigma/2\sqrt{c_6}\varepsilon$, из (4.15)—(4.13) получим оценку (4.9)'. Теорема доказана.

Для обоснования асимптотического разложения используем также следующую теорему.

Рассмотрим краевую задачу для системы теории упругости

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_h}\left(A^{hk}(\xi)\frac{\partial w}{\partial\xi_k}\right)=F^0(\xi)+\frac{\partial F^i(\xi)}{\partial\xi_i}\ \text{в}\ \omega,\\ &w=0\ \text{на}\ \partial\omega,\ w\ \text{1-периодична по}\ \xi,\end{aligned}\right\}\qquad(4.16)$$

где $A^{hk}(\xi)$—матрицы из класса $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $w=(w_1, \ldots, w_n)^*$, $F^j\in L^2(Q\cap\omega)$, F^j 1-периодичны по ξ, $j=0, 1, \ldots, n$.

Обобщенным решением задачи (4.16) называется вектор-функция $w\in\overset{0}{W}(\omega)=\widehat{W}_2^1(\omega)\cap H^1(Q\cap\omega, \bar{Q}\cap\partial\omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (6.2) гл. I при $x=\xi$ для любой $v\in\overset{0}{W}(\omega)$.

Теорема 4.4. *Существует единственное обобщенное решение w задачи* (4.16), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|w\|_{H^1(Q\cap\omega)}\leqslant c\sum_{j=0}^{n}\|F^j\|_{L^2(Q\cap\omega)}.$$

Доказательство этой теоремы основано на теореме 1.3 гл. I и проводится аналогично доказательству теорем 6.1 и 3.5 гл. I.

4.2. Обоснование асимптотического разложения

Формально подставляя в уравнение (4.1) ряд

$$\tilde{u}^\varepsilon(x)\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_\alpha(\varepsilon,\xi)D^\alpha f(x),\ \xi=\frac{x}{\varepsilon},\qquad(4.17)$$

точно так же, как в § 3.2, устанавливаем формальное равенство

$$\mathscr{L}_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(x))\cong\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{\langle\alpha\rangle=l}H_\alpha(\xi)D^\alpha f(x)\cong f(x),\qquad(4.18)$$

где

$$H_0(\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N_0(\xi)\right),$$

$$H_{\alpha_1}(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_{\alpha_1}(\xi)\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)N_0(\xi)\right) + A^{\alpha_1 j}\frac{\partial N_0(\xi)}{\partial \xi_j},$$

$$H_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{kj}\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\xi)\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2 \ldots \alpha_s}(\xi)\right) +$$

$$+ A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_{\alpha_2 \ldots \alpha_s}(\xi) + A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3 \ldots \alpha_s}(\xi), \quad s \geqslant 2.$$

Ищем $N_\alpha(\xi)$ в виде $N_\alpha = N_\alpha^0(\xi) + N_\alpha^1(\xi)$, где $N_\alpha^0(\xi)$ — матрицы, элементы которых являются 1-периодическими функциями по ξ из $\overset{0}{W}(\omega)$, а элементы матриц $N_\alpha^1(x/\varepsilon)$ экспоненциально затухают при удалении x от $\partial\Omega$.

Введем следующие обозначения:

$$T_0^0 \equiv I, \quad T_0^1 \equiv 0,$$

$$T_{\alpha_1}^q(\xi) \equiv -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)N_0^q\right) - A^{\alpha_1 j}\frac{\partial N_0^q(\xi)}{\partial \xi_j}, \quad q=0,\ 1,$$

$$T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}^q(\xi) \equiv -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{k\alpha_1}(\xi)N_{\alpha_2 \ldots \alpha_l}^q(\xi)\right) - A^{\alpha_1 j}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_{\alpha_2 \ldots \alpha_l}^q(\xi) -$$

$$- A^{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3 \ldots \alpha_l}^q(\xi), \quad l \geqslant 2, \quad q=0,\ 1, \tag{4.19}$$

где I — единичная матрица.

Определим матрицы $N_\alpha^0(\xi)$ как обобщенные решения краевых задач

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_\alpha^0(\xi)}{\partial \xi_j}\right) = T_\alpha^0(\xi) \text{ в } \omega, \\ &N_\alpha^0(\xi) = 0 \text{ на } \partial\omega, \quad N_\alpha^0(\xi) \text{ 1-периодична по } \xi. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Определим матрицы $N_\alpha^1(\xi)$ как обобщенные решения краевых задач

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial N_\alpha^1}{\partial \xi_j}\right) = T_\alpha^1(\xi) \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon, \\ &N_\alpha^1(\xi) = -N_\alpha^0(\xi) \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Пользуясь индукцией по l и теоремами 4.3, 3.3 гл. I о существовании и единственности решений соответствующих краевых задач, легко доказать существование матриц N_α^0, N_α^1.

Лемма 4.5. *Матрицы $N_\alpha^j(x/\varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\varepsilon\,\|\nabla_x N_\alpha^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|N_\alpha^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_\alpha, \quad \langle\alpha\rangle \geqslant 0, \quad j=0,\ 1, \tag{4.22}$$

где постоянные c_α не зависят от ε.

Доказательство. На основании (4.19), (4.20), (4.21) легко видеть, что матрицы $N_\alpha(x/\varepsilon)=N^0_\alpha(x/\varepsilon)+N^1_\alpha(\varepsilon, x/\varepsilon)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(N_0)=\varepsilon^{-2} I \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ N_0=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \tag{4.23}$$

$$\mathscr{L}_\varepsilon(N_{\alpha_1})=-\varepsilon^{-1} A^{\alpha_1 j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial x_j}-$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^{k\alpha_1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ N_{\alpha_1}=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \tag{4.24}$$

$$\mathscr{L}_\varepsilon(N_{\alpha_1\ldots\alpha_l})=-\varepsilon^{-1}A^{\alpha_1 j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^{k\alpha_1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)-$$

$$-\varepsilon^{-2}A^{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ l\geqslant 2,\ N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon. \tag{4.25}$$

Воспользуемся индукцией по l. Пусть $l=0$. Тогда из (4.23) согласно (4.7) при $\Phi\equiv 0$ получаем

$$\|\nabla_x N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_0\varepsilon^{-1},\quad \|N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_0, \tag{4.26}$$

где постоянная c_0 не зависит от ε.

Пусть $l=1$. Снова пользуясь (4.7), из (4.24) находим

$$\|\nabla_x N_{\alpha_1}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_1(\|\nabla_x N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\varepsilon^{-1}\|N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}),$$

$$\|N_{\alpha_1}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_2(\varepsilon\|\nabla_x N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|N_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}).$$

Из этих неравенств и (4.26) следует, что при $k\leqslant 1$

$$\|\nabla_x N_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\varepsilon^{-1},\quad \|N_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_{\alpha_1\ldots\alpha_k}. \tag{4.27}$$

Пусть по предположению индукции соотношения (4.27) выполнены при $k\leqslant l-1$. Докажем, что они выполнены при $k=l$. Из (4.25), (4.7) получаем

$$\|\nabla_x N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_1[\|\nabla_x N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{-1}\|N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\varepsilon^{-1}\|N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}],$$

$$\|N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_2[\varepsilon\|\nabla N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\|N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}].$$

Отсюда и из (4.27) при $k\leqslant l-1$ вытекает (4.27) при $k=l$. Элементы матриц $N^0_\alpha(\xi)$ являются 1-периодическими по ξ функциями. Поэтому оценки (4.22) при $j=1$ очевидны. Оценки (4.22) при $j=2$ вытекают из (4.22) при $j=1$ и неравенств (4.27). Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Элементы матриц $N_\alpha^1(\varepsilon, x/\varepsilon)$ имеют вид пограничного слоя вблизи $\partial\Omega$, т. е. для любой подобласти Ω^0, такой, что $\overline{\Omega}^0\subset\Omega$, выполняются оценки*

$$\left\| N_\alpha^1\left(\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^1(\Omega^0\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_\alpha \exp(-\gamma\varepsilon^{-1}), \tag{4.28}$$

где c_α, γ — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство. Рассмотрим область Ω', такую, что $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, $\Omega^0\subset\Omega'$, расстояние между Ω^0 и $\partial\Omega'$ больше некоторой постоянной $\varkappa>0$, не зависящей от ε, и $\overline{\Omega}'$ состоит из кубов $\varepsilon(Q+z)$, $z\in T$, где T — некоторое множество индексов из $\mathbf{Z}^n$. Мы предполагаем ε столь малым, что Ω' с указанными свойствами существует.

Построим скалярную функцию $\tau(x)$, такую, что $\tau\in C^1(\overline{\Omega}), \tau\equiv 1$ на Ω^0, $\tau\equiv 0$ вне $\varkappa/2$-окрестности Ω^0, $|\nabla\tau|\leqslant c\varkappa^{-1}$. Пользуясь методом математической индукции по $s=0, 1, 2, \ldots$, докажем, что $N_\alpha^1(x/\varepsilon)$ при $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ удовлетворяют неравенствам

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |N_\alpha^1|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_x N_\alpha^1|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx \leqslant c_\alpha\varepsilon^{-2}, \tag{4.29}$$

где c_α, δ — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Покажем сначала, что (4.29) имеет место для матрицы N_0^1, которая является решением краевой задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon(N_0^1)=0 \text{ в } \Omega^\varepsilon,\quad N_0^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = -N_0^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Поскольку $N_0^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=0$ на $\partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega$, можем воспользоваться оценкой (4.9) теоремы 4.3 для $N_0^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Получаем

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |N_0^1|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_x N_0^1|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx \leqslant$$
$$\leqslant K\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_x N_0^1|^2\, dx.$$

Из этого неравенства и (4.22) выводим (4.29) для N_0^1.

Пусть теперь s — произвольное натуральное число. Предположим, что неравенства (4.29) выполнены для всех N_α^1 при $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, $l\leqslant s-1$. Покажем, что тогда (4.29) имеет место при $l=s$, т. е. (4.29) выполнено для матрицы $N_{\alpha_1\ldots\alpha_s}^1$, которая является решением задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon (N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_s})=\varepsilon^{-1} A^{\alpha_1 j}\frac{\partial}{\partial x_j} N^1_{\alpha_2\,.\,\alpha_s}-\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}(A^{k\alpha_1}N^1_{\alpha_2\,.\,\alpha_s})-$$

$$-\varepsilon^{-2}A^{\alpha_1\alpha_2}N^1_{\alpha_3\ldots\alpha_s} \text{ в } \Omega^\varepsilon,$$

$$N^1_{\alpha_1\,.\alpha_s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=-N^0_{\alpha_1\quad\alpha_s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ на } \Omega^\varepsilon.$$

Учитывая, что $N^0_\alpha(x/\varepsilon)=0$ на $\partial\Omega^\varepsilon\diagdown\partial\Omega$, и пользуясь оценкой (4.9) теоремы 4 3, примененной к $N^1_{\alpha_1\,.\alpha_s}$, устанавливаем

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|N^1_{\alpha_1\quad\alpha_s}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla_x N^1_{\alpha_1\quad\alpha_s}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant K_1\Bigg[\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla_x N^1_{\alpha_1\quad\alpha_s}|^2\,dx+\varepsilon^2\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega'^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla_x N^1_{\alpha_2\quad\alpha_s}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\varepsilon^{-4}\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|N^1_{\alpha_3\,.\quad\alpha_s}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|N^1_{\alpha_2\,..\,\alpha_s}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\Bigg].$$

Пользуясь соотношением (4.22) для оценки первого интеграла в правой части этого неравенства и предположением индукции для оценки остальных интегралов, получаем неравенство (4.29) для $N^1_{\alpha_1\quad\alpha_s}$. Оценки (4.28) следуют из (4.29), поскольку $\tau\equiv 1$ на Ω^0. Лемма доказана.

Теорема 4.7. *Пусть* $u^\varepsilon(x)$ — *обобщенное решение задачи* (4.1), $f\in C^{s+2}(\bar\Omega)$. *Пусть*

$$u^s_\varepsilon(x)=\sum_{l=0}^{s}\varepsilon^{l+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha f(x),$$

$$v^s_\varepsilon(x)=\sum_{l=0}^{s}\varepsilon^{l+2}\sum_{\langle\alpha\rangle=l}N^0_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha f(x), \tag{4.30}$$

где $N_\alpha=N^0_\alpha+N^1_\alpha$, N^0_α, N^1_α — *обобщенные решения задач* (4.20), (4.21) *соответственно. Тогда*

$$\|u^s_\varepsilon(x)-u^\varepsilon(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_0\varepsilon^{s+2}\|f\|_{C^{s+2}(\bar\Omega)}, \tag{4.31}$$

$$\|v^s_\varepsilon(x)-u^\varepsilon(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\cap\Omega^0)}\leqslant c_1\varepsilon^{s+2}\|f\|_{C^{s+2}(\bar\Omega)}, \tag{4.32}$$

где Ω^0 — *подобласть* Ω, *такая, что* $\bar\Omega^0\subset\Omega$, *постоянные* c_0, c_1 *не зависят от* ε; c_1 *может зависеть от* Ω^0.

Доказательство. Применим оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ к $u_\varepsilon^s - u^\varepsilon$. Считая $N_\alpha = 0$ в формуле (4.17) при $\langle\alpha\rangle \geqslant s$, так же как и при выводе (4.18), устанавливаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^s - u^\varepsilon) = \varepsilon^{s+1} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}=1}^{n} A^{\alpha_1 k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{\alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}} D^{\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} f +$$

$$+ \varepsilon^{s+1} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_h} (A^{h\alpha_1} N_{\alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}}) D^{\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} f +$$

$$+ \varepsilon^{s+1} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}=1}^{n} A^{\alpha_1 \alpha_2} N_{\alpha_3 \ldots \alpha_{s+1}} D^{\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} f +$$

$$+ \varepsilon^{s+2} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+2}=1}^{n} A^{\alpha_1 \alpha_2} N_{\alpha_3 \ldots \alpha_{s+2}} D^{\alpha_1 \ldots \alpha_{s+2}} f \text{ в } \Omega^\varepsilon,$$

$$u_\varepsilon^s - u^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Заметим, что в силу (4 22) нормы в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ элементов матриц $N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \xi_j} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ограничены постоянной, не зависящей от ε. Поэтому применяя к $u_\varepsilon^s - u^\varepsilon$ лемму 4.2 при $f^j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $\Phi = 0$, получим оценку (4.31).

Для вывода оценки (4.32) достаточно заметить, что в $N_\alpha = N_\alpha^0 + N_\alpha^1$ и для N_α^1 справедливы неравенства (4.28). Теорема доказана.

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ НА СЛУЧАЙ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЕЙ С НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

5.1. Постановка задачи. Вспомогательные предложения

Методы, использованные в § 4.1, 4.2, могут быть также применены для обоснования асимптотических разложений решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка. Рассмотрим здесь важный для механики частный случай таких уравнений — бигармоническое уравнение — и получим полное асимптотическое разложение решения задачи

$$\Delta^2 u^\varepsilon(x) = f(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ u^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon. \tag{5.1}$$

Здесь Ω^ε — перфорированная область типа I с периодической структурой, описанная в § 4 1, $f(x)$ — достаточно гладкая функция в Ω, ν — внешняя нормаль.

Искомое асимптотическое разложение решения задачи (5.1) имеет вид

$$u_\varepsilon^s = \sum_{l=0}^{s} \varepsilon^{l+4} \sum_{\langle\alpha\rangle = l} N_\alpha(\varepsilon, \xi) D^\alpha f(x),\ \xi = \varepsilon^{-1}x, \tag{5.2}$$

где D^α и α определены в § 3.2.

Для обоснования асимптотического разложения (5.2) приведем сначала некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 5.1. *Для любой* $v \in H_0^2(\Omega^\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\varepsilon^{-2}\|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant M_1 \|E_2(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{5.3}$$

где $E_2(v) = \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)^{1/2}$, M_1 — *постоянная, не зависящая от* ε.

Доказательство. Легко видеть, что неравенство (5.3) достаточно доказать для $v \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$. Положим $v=0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega^\varepsilon$. Обозначим через T^ε множество $z \in \mathbb{Z}^n$, таких, что $\varepsilon(z+Q) \cap \Omega \neq \varnothing$. Рассмотрим $W(\xi) = v(\varepsilon\xi)$. Поскольку $W=0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \omega$, то, применяя в каждом из множеств $\omega_z = z+Q$ неравенство Фридрихса, получаем

$$\int_{\omega_z} |W|^2 d\xi \leqslant C_1 \int_{\omega_z} |\nabla_\xi W|^2 d\xi,$$

$$\int_{\omega_z} |\nabla_\xi W|^2 d\xi \leqslant C_2 \int_{\omega_z} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\xi.$$

Суммируя эти неравенства по всем $z \in T^\varepsilon$ и переходя в них к переменным $x = \varepsilon\xi$, получаем (5.3). Лемма доказана.

Пусть $\Phi \in H^2(\Omega^\varepsilon)$, $f^j \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Будем говорить, что $U(x)$ является обобщенным решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta^2 U(x) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ U = \Phi,\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \end{gathered} \tag{5.4}$$

если функция $W = U - \Phi$ принадлежит пространству $H_0^2(\Omega^\varepsilon)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx = -\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx + $$
$$+ \int_{\Omega^\varepsilon} \left(f^0 v - f^i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \tag{5.5}$$

для любой $v \in H_0^2(\Omega^\varepsilon)$.

Обозначим через $\widehat{H}_0^2(\omega)$ пополнение по норме $\|v\|_{H^2(Q\cap\omega)}$ пространства функций $v(\xi)$, таких, что $v \in C^2(\bar{\omega})$, $v=0$ в окрестности $\partial\omega$, $v(\xi)$ 1-периодична по ξ. Здесь ω — неограниченная область с 1-периодической структурой, такая же, как в § 4.1.

Будем говорить, что w является обобщенным решением задачи

$$\Delta_\xi^2 w = F^0(\xi) + \frac{\partial F^j}{\partial \xi_j} \text{ в } \omega,$$
$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\omega, \tag{5.6}$$

$w(\xi)$ 1-периодична по ξ,
где $F^j \in L^2(\omega \cap Q)$, $F^j(\xi)$ 1-периодичны по ξ, $j=0, ..., n$, если $w \in \widehat{H}_0^2(\omega)$ и для любой $v \in \widehat{H}_0^2(\omega)$ выполняется интегральное тождество

$$-\int_{Q\cap\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\xi = \int_{Q\cap\omega} \left(F^0 v - \frac{\partial v}{\partial \xi_j} F^j \right) d\xi. \tag{5.7}$$

Существование и единственность решения задач (5.4), (5.6) вытекают из теоремы 1.3 гл. I.

Лемма 5.2. *Обобщенное решение $U(x)$ задачи* (5.4) *удовлетворяет неравенствам*

$$\|E_2(U)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K_1 \left[\varepsilon^2 \|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|E_2(\Phi\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \right], \tag{5.8}$$

$$\|\nabla U\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K_2 \left[\varepsilon^3 \|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon \|E_2(\Phi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right], \tag{5.9}$$

$$\|U\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K_3 \left[\varepsilon^4 \|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2 \|E_2(\Phi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\Phi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right], \tag{5.10}$$

где постоянные K_1, K_2, K_3 не зависят от ε.

Доказательство. Положим в интегральном тождестве (5.5) $v=W=U-\Phi$. Тогда, учитывая неравенства (5.3) для $v=W$, получаем

$$\|E_2(W)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_j}dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(f^0W-f^i\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant C\Big[\|E_2(\Phi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|W\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\|\nabla W\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\sum_{i=1}^n\|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\Big]\leqslant C_1\Big[\|E_2(\Phi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^2\|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\varepsilon\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\sum_{i=1}^n\|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\Big].$$

Отсюда следует, что

$$\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_2\left[\varepsilon^2\|f^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\varepsilon\sum_{i=1}^n\|f^i\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|E_2(\Phi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right].\quad(5.11)$$

Поскольку $W=U-\Phi$, из этого неравенства выводим (5.8).

В силу (5.3)

$$\|W\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_1\varepsilon^2\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\quad \|\nabla W\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_1\varepsilon\|E_2(W)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Из этих неравенств и (5.11) получаем (5.9), (5.10), снова пользуясь тем, что $W=U-\Phi$. Лемма доказана.

Пусть $\tau(x)$ — функция из класса $C^2(\bar\Omega)$, такая, что $\tau\equiv 0$ в окрестности $\partial\Omega$, $\tau\geqslant 0$ в Ω.

Пусть Ω' — подобласть Ω, определенная непосредственно перед теоремой 4.3, $\tau\equiv 0$ вне Ω'.

Теорема 5.3. *Пусть $U(x)$—обобщенное решение задачи* (5.4) *и* $\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0$ *на* $\partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega$, *т. е.* $\Phi\in H^2(\Omega^\varepsilon,\ \partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega)$. *Тогда*

$$\varepsilon^{-4}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|U|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla U|^2\exp\left(\frac{d\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|E_2(U)|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\leqslant K_0\Big[\varepsilon^4\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|f^0|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}f^if^i\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|E_2(U)|^2dx\Big],\quad(5.12)$$

где $K_0>0$, $\delta>0$ — постоянные, не зависящие от ε (заметим, что K_0 и δ могут зависеть от Ω' и $\|\tau\|_{C^2(\bar\Omega)}$).

Доказательство. Функция $U(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(f^0 v - \frac{\partial v}{\partial x_j} f^j \right) dx$$

для любой $v \in H_0^2(\Omega^\varepsilon)$. Положим $v = (e^{\mu\tau} - 1) U$, где $\mu > 0$ — параметр, который будет выбран ниже. Имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} e^{\mu\tau} dx = -2\mu \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} e^{\mu\tau} dx -$$

$$-\mu \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} U \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} e^{\mu\tau} dx - \mu^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} U \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} e^{\mu\tau} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^0 U (e^{\mu\tau} - 1) dx - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^i \frac{\partial U}{\partial x_i} (e^{\mu\tau} - 1) dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^i U \mu \frac{\partial \tau}{\partial x_i} e^{\mu\tau} dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} dx. \tag{5.13}$$

Учитывая, что $\tau \equiv 0$ вне Ω' и применяя неравенство Гёльдера, на основании (5.13) устанавливаем, что

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant C_1 \mu \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |\nabla U|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ C_2 (\mu + \mu^2) \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |U|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ C_3 \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |f^0|^2 (e^{\mu\tau} - 1) dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |U|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ C_4 \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} f^i f^i (e^{\mu\tau} - 1) dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |\nabla U|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ C_5 \mu \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} f^i f^i e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |U|^2 e^{\mu\tau} dx \Big)^{1/2} + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 dx. \tag{5.14}$$

Аналогично тому, как получено неравенство (4.14) в доказательстве теоремы 4.3, находим, что

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |U|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant K_1 \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon \cap \Omega'} |\nabla U|^2 e^{\mu\tau} dx, \tag{5.15}$$

где $\mu = \sigma / K\varepsilon$, K — постоянная, не зависящая от ε, постоянная $\sigma \in (0, 1)$ и будет выбрана ниже.

Поскольку функцию $U(x)$ можно приблизить в $H^2(\Omega^\varepsilon)$ функциями из $C^2(\overline{\Omega}^\varepsilon)$, равными нулю вблизи $\partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega$, то неравенство, аналогичное (5.15), справедливо для первых производных $U(x)$ т. е.

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |\nabla U|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant K_2\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx. \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |U|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant K_3\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx, \tag{5.17}$$

где K_2, K_3 — не зависящие от ε постоянные.

На основании (5.14), (5.16), (5.17) заключаем, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant C_6\mu\varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx + \\ + C_7(\mu+\mu^2)\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx + \\ + C_8\varepsilon^2 \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |f^0|^2 e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} + \\ + C_9\varepsilon \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} f^i f^i e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2'(U)|^2 e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} + \\ + C_{10}\mu\varepsilon^2 \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} f^i f^i e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx\Big)^{1/2} + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 dx,\end{aligned} \tag{5.18}$$

где $\mu = |\sigma/K\varepsilon$. Выбирая σ достаточно малым, но не зависящим от ε, из (5.18) получим неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant M_1\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} |f^0|^2 e^{\mu\tau} dx + \\ + M_2\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'} f^i f^i e^{\mu\tau} dx + M_3 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |E_2(U)|^2 dx,\end{aligned} \tag{5.19}$$

где постоянные M_1, M_2, M_3 не зависят от ε.

Оценка (5.12) вытекает из неравенств (5.19), (5.16), (5.17). Теорема доказана.

5.2. Построение и обоснование асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в перфорированной области

Пусть в задаче (5.1) $f \in C^{s+4}(\bar{\Omega})$. Ищем асимптотическое разложение решения этой задачи в виде (5.2), где α, D^α такие же, как в § 3.2, $N_\alpha(\varepsilon, \xi)$ — функции вида $N_\alpha(\varepsilon, \xi) = N_\alpha^0(\xi) + N_\alpha^1(\varepsilon, \xi)$, причем $N_\alpha^0(\xi)$ 1-периодические по ξ, а $N_\alpha^1(\varepsilon, x/\varepsilon)$ — функции типа пограничного слоя в Ω^ε, экспоненциально затухающие при удалении от $\partial\Omega$.

Нетрудно проверить, что

$$\Delta_x \left(N_\alpha \left(\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon} \right) D^\alpha f \right) =$$
$$= \varepsilon^{-2} \Delta_\xi N_\alpha D^\alpha f + 2\varepsilon^{-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_i} D^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + N_\alpha D^\alpha \Delta_x f.$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta_x^2 (N_\alpha D^\alpha f) = \varepsilon^{-4} \Delta_\xi^2 N_\alpha D^\alpha f + 2\varepsilon^{-3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Delta_\xi N_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha f + \varepsilon^{-2} \Delta_\xi N_\alpha D^\alpha \Delta_x f +$$
$$+ 2\varepsilon^{-3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Delta_\xi N_\alpha D^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4\varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_i} D^\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ 2\varepsilon^{-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_i} D^\alpha \frac{\partial \Delta_x f}{\partial x_i} + \varepsilon^{-2} \Delta_\xi N_\alpha D^\alpha \Delta_x f + \tag{5.20}$$
$$+ \varepsilon^{-1} 2 \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_j} D^\alpha \Delta \frac{\partial f}{\partial x_j} + N_\alpha D^\alpha \Delta_x^2 f.$$

Из (5.2), (5.20) заключаем, что

$$\Delta^2 u_\varepsilon^s(x) = \sum_{m=0}^{s} \varepsilon^m \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1}^{n} \Delta_\xi^2 N_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} D^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f +$$
$$+ \sum_{m=1}^{s+1} \varepsilon^m \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1}^{n} 4 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_1}} \Delta_\xi N_{\alpha_2 \ldots \alpha_m} D^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f +$$
$$+ \sum_{m=2}^{s+2} \varepsilon^m \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1}^{n} \left(2\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \Delta_\xi N_{\alpha_3 \ldots \alpha_m} + 4 \frac{\partial^2 N_{\alpha_3 \ldots \alpha_m}}{\partial \xi_{\alpha_1} \partial \xi_{\alpha_2}} \right) D^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f +$$

$$+\sum_{m=3}^{s+3}\varepsilon^m\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^{n}4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N_{\alpha_4\ldots\alpha_m}}{\partial\xi_{\alpha_3}}D^{\alpha_1\ldots\alpha_m}f+$$

$$+\sum_{m=4}^{s+4}\varepsilon^m\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^{n}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}N_{\alpha_5\ldots\alpha_m}D^{\alpha_1\ldots\alpha_m}f, \tag{5.21}$$

где δ_{pq} — символ Кронекера.

Определим $N_\alpha(\varepsilon,\xi)$ как обобщенные решения следующих краевых задач:

$$\Delta_\xi^2 N_0=1 \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,\quad N_0=\frac{\partial N_0}{\partial\nu}=0 \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon),$$

$$\Delta_\xi^2 N_{\alpha_1}=-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N_0 \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,\quad N_{\alpha_1}=\frac{\partial N_{\alpha_1}}{\partial\nu}=0 \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon),$$

$$\Delta_\xi^2 N_{\alpha_1\alpha_2}=-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N_{\alpha_2}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N_0-4\frac{\partial^2 N_0}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}} \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,$$

$$N_{\alpha_1\alpha_2}=\frac{\partial N_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial\nu}=0 \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon), \tag{5.22}$$

$$\Delta_\xi^2 N_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N_{\alpha_2\alpha_3}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N_{\alpha_3}-$$

$$-4\frac{\partial^2 N_{\alpha_3}}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}}-4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N_0}{\partial\xi_{\alpha_3}} \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,$$

$$N_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=\frac{\partial N_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}{\partial\nu}=0 \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon),$$

$$\Delta_\xi^2 N_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N_{\alpha_2\ldots\alpha_m}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N_{\alpha_3\ldots\alpha_m}-$$

$$-4\frac{\partial^2 N_{\alpha_3\ldots\alpha_m}}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}}-4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N_{\alpha_4\ldots\alpha_m}}{\partial\xi_{\alpha_3}}-\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}N_{\alpha_5\ldots\alpha_m} \text{ в } \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,$$

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=\frac{\partial}{\partial\nu}N_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=0 \text{ на } \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon).$$

По индукции легко показать, что функции $N_\alpha(\xi)$ существуют в силу теоремы 1.3 гл. I.

Покажем, что $N_\alpha(\varepsilon,\xi)=N_\alpha^0+N_\alpha^1$, где $N_\alpha^0(\xi)$ — функции, 1-периодические по ξ и принадлежащие $\widehat{H}_0^2(\omega)$, а $N_\alpha^1(\varepsilon, x/\varepsilon)$ имеют вид пограничного слоя в Ω^ε. Положим

$$T^j_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\xi)\equiv-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N^j_{\alpha_2\ldots\alpha_m}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N^j_{\alpha_3\ldots\alpha_m}-$$

$$-4\frac{\partial^2 N^j_{\alpha_3\ldots\alpha_m}}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}}-4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N^j_{\alpha_4\ldots\alpha_m}}{\partial\xi_{\alpha_3}}-\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}N^j_{\alpha_5\ldots\alpha_m},\ j=0,1,\ m\geqslant 4;$$

$$T^j_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\xi)\equiv-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N^j_{\alpha_2\alpha_3}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N^j_{\alpha_3}-4\frac{\partial^2 N^j_{\alpha_3}}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}}-$$

$$-4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N^j_0}{\partial\xi_{\alpha_3}};\ T^j_{\alpha_1\alpha_2}\equiv-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N^j_{\alpha_2}-2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_\xi N^j_0-$$

$$-4\frac{\partial^2 N^j_0}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}};\ T^j_{\alpha_1}\equiv-4\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha_1}}\Delta_\xi N^j_0,\ j=0,1;$$

$$T^0_0\equiv 1,\ T^1_0\equiv 0.$$

Определим функции $N^0_\alpha(\xi)$ как решения следующих задач:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2_\xi N^0_\alpha(\xi)=T^0_\alpha(\xi)\ \text{в}\ \omega,\\&N^0_\alpha=\frac{\partial N^0_\alpha}{\partial\nu}=0\ \text{на}\ \partial\omega,\ N^0_\alpha(\xi)\ \text{1-периодична по}\ \xi.\end{aligned}\right\}\qquad(5.23)$$

Существование $N^0_\alpha(\xi)$ вытекает из теоремы 1.3 гл. I.

В области $\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon$ определим функции N^1_α как обобщенные решения задач Дирихле

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2_\xi N^1_\alpha(\varepsilon,\xi)=T^1_\alpha(\xi)\ \text{в}\ \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon,\\&N^1_\alpha(\varepsilon,\xi)=-N^0_\alpha(\xi),\ \frac{\partial N^1_\alpha(\varepsilon,\xi)}{\partial\nu}=-\frac{\partial N^0_\alpha(\xi)}{\partial\nu}\ \text{на}\ \partial(\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon).\end{aligned}\right\}(5.24)$$

Легко видеть, что $N_\alpha=N^0_\alpha+N^1_\alpha$.

Лемма 5.4. *Для функций $N^0_\alpha(x/\varepsilon)$, $N^1_\alpha(\varepsilon, x/\varepsilon)$ справедливы оценки*

$$\varepsilon^2\|\overline{E_2(N^j_\alpha)}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\varepsilon\|\nabla_x N^j_\alpha\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|N^j_\alpha\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_\alpha,\qquad(5.25)$$

где постоянные M_α не зависят от ε, $j=0, 1$.

Доказательство этой леммы проводится по индукции аналогично доказательству леммы 4.5.

Лемма 5.5. *Функции $N^1_\alpha(\varepsilon, x/\varepsilon)$ имеют вид пограничного слоя, а именно, для любой области $\overline{\Omega^0}$, такой, что $\Omega^0\subset\Omega$, выполняются оценки*

$$\left\|N^1_\alpha\left(\varepsilon,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^2(\Omega^0\cap\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_\alpha\exp(-\gamma\varepsilon^{-1}),\qquad(5.26)$$

где *C_α, γ — положительные постоянные, не зависящие от ε (C_α и γ могут зависеть от области Ω^0).*

Доказательство. Оценка (5.26) получается тем же путем, что и оценка (4.28) в лемме 4.5. Укажем основные этапы ее доказательства.

Пусть Ω' — подобласть Ω, состоящая из кубов $\varepsilon(z+Q)$, и функция $\tau(x)\in C^2(\bar\Omega)$ обладает теми же свойствами, что в доказательстве леммы 4.5.

Функция $N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\varepsilon, x/\varepsilon)$ является обобщенным решением задачи

$$\Delta_x^2 N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=-\varepsilon^{-1}4\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}\Delta_x N^1_{\alpha_2\ldots\alpha_m}-\varepsilon^{-2}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\Delta_x N^1_{\alpha_3\ldots\alpha_m}-$$

$$-\varepsilon^{-2}4\frac{\partial^2 N^1_{\alpha_3\ldots\alpha_m}}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}}-4\varepsilon^{-3}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial N^1_{\alpha_4\ldots\alpha_m}}{\partial x_{\alpha_3}}-\varepsilon^{-4}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}N^1_{\alpha_5\ldots\alpha_m}\quad\text{в } \Omega^\varepsilon,$$

$$N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=-N^0_{\alpha_1\ldots\alpha_m},\quad \frac{\partial N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}}{\partial\nu}=-\frac{\partial N^0_{\alpha_1\ldots\alpha_m}}{\partial\nu}\quad\text{на } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Поскольку $N^0_\alpha=\partial N^0_\alpha/\partial\nu=0$ на $\partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega$, то к N^1_α можем применить теорему 5.3. В силу оценки (5.12) для $U\equiv N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ получаем

$$\varepsilon^{-4}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|N^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|\nabla N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}|^2\times$$

$$\times\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|E_2(N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m})|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant K_1\Big\{\varepsilon^4\int\limits_{\Omega^\varepsilon}[\varepsilon^{-4}|E_2(N^1_{\alpha_2\ldots\alpha_m})|^2+\varepsilon^{-4}|E_2(N^1_{\alpha_4\ldots\alpha_m})|^2+$$

$$+\varepsilon^{-6}|\nabla_x N^1_{\alpha_4\ldots\alpha_m}|^2+\varepsilon^{-8}|N^1_{\alpha_5\ldots\alpha_m}|^2]\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}\varepsilon^{-2}|E_2(N^1_{\alpha_2\ldots\alpha_m})|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|E_2(N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m})|^2dx\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant K_2\Big\{\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}[|E_2(N^1_{\alpha_2\ldots\alpha_m})|^2+|E_2(N^1_{\alpha_3\ldots\alpha_m})|^2+\varepsilon^{-2}|\nabla N^1_{\alpha_4\ldots\alpha_m}|^2+$$

$$+\varepsilon^{-4}|N^1_{\alpha_5\ldots\alpha_m}|^2]\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|E_2(N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m})|^2dx\Big\},$$

где постоянная K_2 не зависит от ε.

Пользуясь этими неравенствами и оценками (5.25), с помощью индукции по $m=0, 1, 2, \ldots$ устанавливаем неравенства

$$\varepsilon^{-4}\int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\Omega'}|N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}|^2\exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\cap\Omega'} |\nabla_x N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m}|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} |E_2(N^1_{\alpha_1\ldots\alpha_m})|^2 \exp\left(\frac{\delta\tau}{\varepsilon}\right)dx\leqslant K_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\varepsilon^{-4},$$

где постоянная $K_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ не зависит от ε. Поэтому, учитывая, что $\tau\equiv 1$ на Ω^0, выводим оценки (5.26). Лемма доказана.

Теорема 5.6 (об асимптотическом разложении решения задачи (5.1)). *Пусть $u^\varepsilon(x)$ — обобщенное решение задачи* (5.1), $f\in C^{s+4}(\overline{\Omega})$,

$$u_s^\varepsilon(x)=\sum_{l=0}^{s}\varepsilon^{l+4}\sum_{\langle\alpha\rangle=l} N_\alpha\left(\varepsilon,\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha f(x),$$

$$v_s^\varepsilon(x)=\sum_{l=0}^{s}\varepsilon^{l+4}\sum_{\langle\alpha\rangle=l} N^0_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\alpha f(x),$$

где $N_\alpha(\varepsilon,\xi)=N^0_\alpha+N^1_\alpha$ и N^0_α, N^1_α являются решениями задач (5.23) (5.24). *Тогда*

$$\|u^\varepsilon(x)-u_s^\varepsilon(x)\|_{H^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_1\varepsilon^{s+3}\|f\|_{C^{s+4}(\overline{\Omega})},\tag{5.27}$$

$$\|u^\varepsilon(x)-v_s^\varepsilon(x)\|_{H^2(\Omega^0\cap\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_2\varepsilon^{s+3}\|f\|_{C^{s+4}(\overline{\Omega})},\tag{5.28}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от ε, Ω^0 — подобласть области Ω, такая, что $\overline{\Omega}^0\subset\Omega$, постоянная C_2 может зависеть от Ω^0.

Доказательство. Легко видеть, что в силу (5.21), (5.22) функция $u_s^\varepsilon-u^\varepsilon$ является обобщенным решением задачи

$$\Delta^2(u_s^\varepsilon-u^\varepsilon)=\varepsilon^{s+1}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{s+1}=1}^{n}4\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}[(\Delta_x N_{\alpha_2\ldots\alpha_{s+1}})D^{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}}f]-$$

$$-\varepsilon^{s+1}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{s+1}=1}4\varepsilon^3\Delta_x N_{\alpha_2\ldots\alpha_{s+1}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}D^{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}}f+$$

$$+\sum_{m=s+1}^{s+2}\varepsilon^m\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^{n}\left(2\delta_{\alpha_1\alpha_2}\varepsilon^2\Delta_x N_{\alpha_3\ldots\alpha_m}+4\varepsilon^2\frac{\partial^2 N_{\alpha_3\ldots\alpha_m}}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}}\right)D^{\alpha_1\ldots\alpha_m}f+$$

$$+\sum_{m=s+1}^{s+3}\varepsilon^m\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^{n}4\delta_{\alpha_1\alpha_2}\varepsilon\frac{\partial N_{\alpha_4\ldots\alpha_m}}{\partial x_{\alpha_3}}D^{\alpha_1\ldots\alpha_m}f+$$

$$+\sum_{m=s+1}^{s+4}\varepsilon^m\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^{n}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}N_{\alpha_5\ldots\alpha_m}D^{\alpha_1\ldots\alpha_m}f \text{ в } \Omega^\varepsilon,$$

$$u_s^\varepsilon-u^\varepsilon=\frac{\partial}{\partial\nu}(u_s^\varepsilon-u^\varepsilon)=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Согласно оценкам (5.8) получаем

$$\|E_2(u_s^\varepsilon-u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant K\Big[\varepsilon^{s+1}\varepsilon\,\varepsilon^3\sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_{s+1}=1}^{n}\|E_2(N_{\alpha_2\ldots\alpha_{s+1}})\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{s+1}\varepsilon^2\varepsilon^3\sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_{s+1}=1}^{n}\|E_2(N_{\alpha_2\ldots\alpha_{s+1}})\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{s+1}\varepsilon^2\varepsilon^2\sum_{m=s+1}^{s+2}\sum_{\alpha_3,\ldots,\alpha_m=1}^{n}\|E_2(N_{\alpha_3\ldots\alpha_m})\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{s+1}\varepsilon\,\varepsilon^2\sum_{m=s+1}^{s+3}\sum_{\alpha_4,\ldots,\alpha_m=1}^{m}\|\nabla_x N_{\alpha_4\ldots\alpha_m}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{s+1}\varepsilon^2\sum_{m=s+1}^{s+4}\sum_{\alpha_5,\ldots,\alpha_m=1}\|N_{\alpha_5\ldots\alpha_m}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\Big]\|f\|_{C^{s+4}(\bar\Omega)}.$$

Отсюда, пользуясь неравенствами (5.25) и тем фактом, что $N_\alpha=$ $=N_\alpha^0+N_\alpha^1$, находим

$$\|E_2(u_s^\varepsilon-u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M\varepsilon^{s+1}(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\|f\|_{C^{s+4}(\bar\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant M_1\varepsilon^{s+3}\|f\|_{C^{s+4}(\bar\Omega)},\quad M_1, M=\text{const}.$$

Из этой оценки и (5.9), (5.10) вытекает (5.27). Неравенства (5.28) являются следствиями (5.27) и (5 26). Теорема доказана.

5.3. Перфорированные области с непериодической структурой

Из доказательства теорем 4.3, 5.3 нетрудно увидеть, что оценки, аналогичные (4.9), (5.12), могут быть получены для некоторых перфорированных областей, имеющих непериодическую структуру.

Рассмотрим подобласть $\Omega'\subset\Omega$, такую, что $\overline{\Omega'}\subset\Omega$, $\overline{\Omega'}=\bigcup\limits_{s=1}^{d_\varepsilon}\overline{B_s^\varepsilon}$, где B_s^ε — ограниченные области в $\mathbf{R}^n$, $B_i^\varepsilon\cap B_j^\varepsilon=\varnothing$ для $i\neq j$. Пусть Γ_s^ε, $s=1,\ldots,d_\varepsilon$, замкнутые множества $\Gamma_s^\varepsilon\subset\overline{B_s^\varepsilon}$ и для любого $v\in$

$\in C^1(\overline{B}^\varepsilon_s)$, $v=0$ в окрестности Γ^ε_s, справедливо неравенство Фридрихса

$$\|v\|_{L^2(B^\varepsilon_s)} \leqslant C^* \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(B^\varepsilon_s)}, \tag{5.29}$$

где постоянная C^* не зависит от ε и s.

Пусть $\tau(x)$ — функция класса $C^2(\overline{\Omega})$, такая, что $\tau=0$ в $\Omega\setminus\Omega'$, $\tau\geqslant 0$ в Ω, $\|\tau\|_{C^2(\overline{\Omega})}\leqslant M^*$, где $M^*=\mathrm{const}$ и не зависит от ε

Теорема 5.7. *Пусть $U(x)$* — обобщенное решение задачи

$$\Delta^2 U = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{s=1}^{d_\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_s,$$

$$U=\Phi, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \quad \text{на } \partial\Omega^\varepsilon,$$

причем $\Phi\in H^2(\Omega^\varepsilon)$, $\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0$ на $\Omega'\cap\partial\Omega^\varepsilon$, $f^j\in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j=0,\dots,n$. Тогда имеет место неравенство (5.12), *где постоянные $K_0>0$, $\delta>0$ зависят только от постоянных C^* в* (5.29) *и M^*.*

Пусть $f^j=0$, $j=0,\dots,n$, в $\Omega^\varepsilon\cap\Omega'$, $\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0$ на $\Omega'\cap\Omega^\varepsilon$ и область Ω^0 такова, что $\Omega^0\subset\Omega'$, $\rho(\partial\Omega^0, \partial\Omega')\geqslant\varkappa>0$, где постоянная $\varkappa$ не зависит от ε. Тогда решение $U(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|U\|_{H^2(\Omega^0\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\Big[\|\Phi\|_{H^2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=0}^{n} \|f^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega')}\Big] e^{-\delta/2\varepsilon}, \tag{5.30}$$

где $C>0$ — постоянная, зависящая только от C^*, Ω^0.

Оценка вида (5.12) доказывается точно так же, как теорема 5.3. Оценка (5.30) вытекает из оценки (5.12), если за $\tau(x)$ взять функцию, такую, что $\tau(x)=1$ на Ω^0, $\tau(x)=0$ вне $\varkappa/2$-окрестности Ω^0, норма $\tau(x)$ в $C^2(\overline{\Omega})$ ограничена постоянной, не зависящей от ε.

Рассмотрим теперь систему теории упругости.

Пусть множества Γ^ε_s, $s=1,\dots,d_\varepsilon$, таковы, что для любой вектор-функции $v\in C^1(\overline{B}^\varepsilon_s)$, $v=0$ в окрестности Γ^s_ε, справедливо неравенство

$$\varepsilon^{-1}\|v\|_{L^2(B^\varepsilon_s)} + \|\nabla v\|_{L^2(B^\varepsilon_s)} \leqslant C_1^* \|e(v)\|_{L^2(B^\varepsilon_s)}, \tag{5.31}$$

где постоянная C_1^* не зависит от ε. Пусть $\tau(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, $\tau(x)=0$ вне Ω', $\|\tau\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_1^*$ и постоянная M_1^* не зависит от ε.

Теорема 5.8. *Пусть $U(x)$ — обобщенное решение краевой задачи для системы теории упругости*

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}(x,\varepsilon)\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = f^0 + \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega^\varepsilon = \Omega\setminus\bigcup_{s=1}^{d_\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_s,$$

$$U=\Phi \quad \text{на } \partial\Omega^\varepsilon,$$

где $f^j \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $j=0, \ldots, n$, $\Phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\Phi=0$ *на* $\Omega' \cap \partial\Omega^\varepsilon$, *матрицы* $A^{hk}(x, \varepsilon)$ *принадлежат классу* $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ *с постоянными* $\varkappa_1, \varkappa_2>0$, *не зависящими от* ε. *Тогда для* $U(x)$ *выполняется оценка* (4.9) *с постоянными* $K>0$, $\delta>0$, *зависящими только от* C_1^* *в* (5.31) *и* M_1^*, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Пусть $f^j \equiv 0$, $j=0, \ldots, n$, *в* $\Omega^\varepsilon \cap \Omega'$, $\Phi=0$ *на* $\Omega' \cap \partial\Omega^\varepsilon$, *и область* Ω^0 *такова, что* $\rho(\partial\Omega^0, \partial\Omega') \geqslant \varkappa > 0$, $\varkappa=\mathrm{const}$ *и не зависит от* ε. *Тогда решение* $U(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|U\|_{H^1(\Omega^0 \cap \Omega^\varepsilon)} \leqslant c \left[\|\Phi\|_{H^1(\Omega)^\varepsilon} + \sum_{j=0}^{n} \|f^j\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega')}\right] \exp\left(\frac{-\delta}{2\varepsilon}\right), \quad (5.32)$$

где постоянная c *зависит только от* c_1^*, M_1^*, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, Ω^0.

Оценка вида (4.9) в этом случае доказывается тем же способом, что и соответствующая оценка в теореме 4.3. Оценка (5.32) вытекает из (4.9), если за $\tau(x)$ взять функцию, такую, что $\tau=1$ на Ω^0, $\tau=0$ вне $\varkappa/2$-окрестности Ω^0, норма $\|\tau\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ ограничена не зависящей от ε постоянной.

§ 6. ОБ УСРЕДНЕНИИ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об усреднении решений задачи Дирихле для системы теории упругости с быстро осциллирующими почти-периодическими коэффициентами.

6.1. Пространства почти-периодических функций

Обозначим через $\mathrm{Trig}\,\mathbf{R}^n$ множество тригонометрических полиномов, т. е. действительных функций, представимых как конечные суммы вида

$$u(y)=\sum_{\xi} C_\xi \exp\{i(y, \xi)\}, \quad y, \xi \in \mathbf{R}^n, \quad (y, \xi)=y_i\xi_i,$$
$$C_\xi=\overline{C}_{-\xi}, \quad C_\xi=\mathrm{const}. \quad (6.1)$$

Пополнение $\mathrm{Trig}\,\mathbf{R}^n$ по норме $\sup\limits_{\mathbf{R}^n}|u(y)|$ называется пространством почти-периодических функций Бора и обозначается через $AP(\mathbf{R}^n)$ (см. [51; 52]).

Обозначим через $\overset{0}{\mathrm{Trig}}\,\mathbf{R}^n$ множество конечных сумм вида (6.1), для которых $C_0=0$.

Число $M\{\psi\}$ называется средним значением функции $\psi \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$, если

$$\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to M\{\psi\}$$

при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L^2(G)$ для любой ограниченной области G в $\mathbf{R}^n$.

Как известно, для любой T-периодической по y функции $g(y) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$M\{g\} = \frac{1}{T^n} \int\limits_{[0,T]^n} g(y)\,dy,$$

$$[0, T]^n = \{y : 0 \leqslant y_j \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Таким образом, каждая функция из $\operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$ обладает конечным средним значением, и потому в пространстве $\operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$ можем ввести скалярное произведение по формуле

$$(\psi, g) \equiv M\{\psi, g\}. \tag{6.2}$$

Пополнение $\operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$ по норме, соответствующей скалярному произведению (6.2), обозначается $B^2(\mathbf{R}^n)$ и называется пространством почти-периодических функций Безиковича. Скалярное произведение двух элементов ψ и g из $B^2(\mathbf{R}^n)$ обозначаем тем же символом $M\{\psi g\}$.

Далее мы будем говорить, что матрица, или вектор-функция, принадлежит одному из пространств $\operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$, $B^2(\mathbf{R}^n)$, $AP(\mathbf{R}^n)$, если элементы этой матрицы, или вектор-функции, принадлежат соответствующему пространству, при этом матрица, или вектор, составленные из средних значений их элементов, называется средним значением матрицы, или вектор-функции, соответственно.

Для матриц и вектор-функций также используем обозначения (1.8), (1.9) гл. I.

Для любой вектор-функции $u(y) = (u_1, \ldots, u_n)$, как и ранее, обозначим через $e(u)$ симметрическую матрицу с компонентами

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_l}\right) = e_{lj}(u).$$

Лемма 6.1. *Пусть функции* f, $g \in \operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$ *и вектор-функция* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$. Тогда

$$M\left\{\frac{\partial f}{\partial y_j} g\right\} = -M\left\{f \frac{\partial g}{\partial y_j}\right\}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6.3}$$

$$M\{|\nabla u|^2\} \leqslant 2M\{|e(u)|^2\}. \tag{6.4}$$

Для любых функций $F_{lh} \in \operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$, *таких, что* $F_{lh} = F_{hl}$, $l, h = 1, \ldots, n$, *существует вектор-функция* $w \in \operatorname{Trig} \mathbf{R}^n$, *такая, что*

$$\frac{\partial e_{lh}(w)}{\partial y_h} = \frac{\partial F_{lh}}{\partial y_h}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Доказательство. Заметим, что

$$M\{e^{i(y,\xi)}\}=0, \quad \text{если} \quad \xi\neq 0. \tag{6.6}$$

Пусть

$$f=\sum_{\xi} f_{\xi}e^{i(y,\xi)}, \quad g=\sum_{\eta} g_{\eta}e^{i(y,\eta)},$$

$$f_{\xi}=\bar{f}_{-\xi}, \quad g_{\eta}=\bar{g}_{-\eta}.$$

Тогда, учитывая (6,6), имеем

$$M\left\{\frac{\partial f}{\partial y_j}g\right\}=M\left\{\sum_{\xi,\eta} i\xi_j f_{\xi}g_{\eta}e^{i(y,\xi+\eta)}\right\}=M\left\{i\sum_{\xi}\xi_j f_{\xi}g_{-\xi}\right\}=$$

$$=M\left\{i\sum_{\eta}(-\eta_j)f_{-\eta}g_{\eta}\right\}=-M\left\{\frac{\partial g}{\partial y_j}f\right\}.$$

Докажем теперь неравенство (6.4). Пусть $u=(u_1, \ldots, u_n)$, $u_j=\sum_{\xi} c_{\xi}^{j}e^{i(y,\xi)}$. Тогда, пользуясь (6.6), находим

$$4M\{e_{lj}(u)\,e_{lj}(u)\}=M\left\{-\sum_{\xi,\eta}(c_{\xi}^{l}\xi_j+c_{\xi}^{j}\xi_l)(c_{\eta}^{l}\eta_j+c_{\eta}^{j}\eta_l)\,e^{i(y,\xi+\eta)}\right\}=$$

$$=\sum_{\xi}(c_{\xi}^{l}\xi_j+c_{\xi}^{j}\xi_l)(c_{-\xi}^{l}\xi_j+c_{-\xi}^{j}\xi_l)=\sum_{\xi}(2|\xi|^2 c_{\xi}^{l}\bar{c}_{\xi}^{l}+2|c_{\xi}^{l}\xi_l|^2),$$

$$M\left\{\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right\}=M\left\{-\sum_{\xi,\eta}c_{\xi}^{l}\xi_j c_{\eta}^{l}\eta_j e^{i(y,\xi+\eta)}\right\}=$$

$$=\sum_{\xi}c_{\xi}^{l}\bar{c}_{\xi}^{l}\xi_j\xi_j=\sum_{\xi}|\xi|^2 c_{\xi}^{l}\bar{c}_{\xi}^{l}.$$

Отсюда следует (6.4).

Покажем теперь разрешимость уравнений (6.5). Пусть

$$F_{lh}=\sum_{\xi}c_{\xi}^{lh}e^{i(y,\xi)}, \quad c_{\xi}^{lh}=c_{\xi}^{hl}.$$

Ищем w в виде $w=\sum_{\xi} w_{\xi}e^{i(y,\xi)}$. Тогда

$$\frac{\partial F_{lh}}{\partial y_h}=i\sum_{\xi}\xi_h c_{\xi}^{lh}e^{i(y,\xi)}, \quad e_{lh}(w)=\frac{i}{2}\sum_{\xi}(w_{\xi}^{h}\xi_l+w_{\xi}^{l}\xi_h)\,e^{i(y,\xi)},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}e_{lh}(w)=-\frac{1}{2}\sum_{\xi}(w_{\xi}^{h}\xi_l\xi_h+w_{\xi}^{l}\xi_h\xi_h)\,e^{i(y,\xi)}.$$

Очевидно, что при каждом $\xi\neq0$ коэффициенты w_ξ^h должны удовлетворять системе

$$-\frac{1}{2}w_\xi^h\xi_h\xi_l-\frac{1}{2}w_\xi^l|\xi|^2=i\xi_h=c_\xi^{lh},\quad l=1,\ \ldots,\ n. \qquad (6.7)$$

При каждом $\xi\neq0$ эта система имеет единственное решение, так как соответствующая ей однородная система имеет лишь тривиальное решение. Действительно, при $\xi\neq0$ и $c_\xi^{lh}=0$, l, $h=1,\ \ldots,\ n$, умножая уравнения (6.7) на $\overline{w}_\xi^l$ и суммируя по l от 1 до n, получим

$$-\frac{1}{2}|w_\xi^h\xi_h|^2-\frac{1}{2}w_\xi^l\overline{w}_\xi^l|\xi|^2=0.$$

Поэтому $w_\xi^l=0$.

Заменяя в (6.7) ξ на $-\xi$, переходя в полученном уравнении к комплексно-сопряженному и пользуясь равенствами $c_\xi^{lh}=\overline{c}_{-\xi}^{lh}$, находим, что $w_\xi^h=\overline{w}_{-\xi}^h$. Лемма доказана.

Рассмотрим прямое произведение n^2 пространств $B^2(\mathbf{R}^n)$ и обозначим через W замыкание в нем множества $S=\{e(u):u=(u_1,\ \ldots,\ \ldots,\ u_n)\in\mathrm{Trig}\,\mathbf{R}^n\}$. Элементы пространства W обозначим через e, $\tilde{e}$.

Норма элемента $e\in W$ задается величиной

$$M\{e_{lj}e_{lj}\}^{1/2}=M\{(e,\ e)\}^{1/2}.$$

Отметим, что не всякий элемент $e\in W$ представим в виде $e=e(u)$, где $u\in B^2(\mathbf{R}^n)$. Тем не менее для любого $e\in W$ существует последовательность вектор-функций $\{u^\delta\}$ с компонентами из $\mathrm{Trig}\,\mathbf{R}^n$, такая, что

$$M\{|e-e(u^\delta)|^2\}\to0\quad\text{при}\quad\delta\to0.$$

6.2. Система теории упругости с почти-периодическими коэффициентами. Почти-решения

Рассмотрим систему теории упругости

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\left(A^{hk}(y)\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)=\frac{\partial f_j}{\partial y_j}, \qquad (6.8)$$

где $A^{hk}(y)$ — матрицы из класса $E(\varkappa_1,\ \varkappa_2)$, $\varkappa_1,\ \varkappa_2=\mathrm{const}>0$, элементы которых $a_{ij}^{hk}(y)$ принадлежат $AP(\mathbf{R}^n)$, $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $f_j=(f_{1j},\ldots,f_{nj})$ — столбцы, $f_{jl}=f_{lj}\in AP(\mathbf{R}^n)$, l, $j=1,\ \ldots,\ n$.

В общем случае почти-периодических коэффициентов не удается доказать существование решения $u\in B^2(\mathbf{R}^n)$ системы (6.8). Тем не менее, как показано в работе [24], можно построить так называемые почти-решения u^δ системы (6.8) с компонентами из $\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$.

Изложим метод построения таких почти-решений, следуя работе [24].

В силу соотношений (3.2) гл. I систему (6.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\left(a_{lj}^{hk}(y)\, e_{jk}(u)\right)=\frac{\partial f_{lj}}{\partial y_j},\quad l=1,\ \ldots,\ n. \tag{6.9}$$

Далее в этом параграфе для матрицы η с элементами $\{\eta_{ih}\}$ через η_h будем обозначать столбец $(\eta_{1h}, \ldots, \eta_{nh})$. Тогда систему (6.9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\left(A^{hk}e_k(u)\right)=\frac{\partial f_j}{\partial y_j}, \tag{6.10}$$

где $e_k(u)=(e_{1k}(u), \ldots, e_{nk}(u))$.

Если коэффициенты $a_{lj}^{hk}(y)$ и функции f_{lj} являются 1-периодическими по y, то по определению обобщенного 1-периодического по y решения (см. § 6, гл. I) справедливо интегральное тождество

$$M\{(\mathfrak{A}e(u),\ e(v))-(f,\ e(v))\}=0 \tag{6.11}$$

для любой $v\in\widehat{W}_2^1(\mathbf{R}^n)$, f — матрица с элементами f_{lh},

$$(\mathfrak{A}\eta)_{ih}=a_{ij}^{hk}\eta_{jk}.$$

В почти-периодическом случае по аналогии с (6.10), (6.11) рассмотрим систему

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\left(A^{hk}(y)\,\tilde{e}_k\right)=\frac{\partial f_j}{\partial y_j},\quad \tilde{e}_k=(\tilde{e}_{1k},\ \ldots,\ \tilde{e}_{nk}), \tag{6.12}$$

и определим ее обобщенное решение как элемент $\tilde{e}\in W$, $\tilde{e}=\{\tilde{e}_{ij}\}$, удовлетворяющий тождеству

$$M\{(\mathfrak{A}\tilde{e},\ e)-(f,\ e)\}=0 \tag{6.13}$$

для любого $e\in W$.

Из леммы 3.1 гл. I следует, что форма $M\{(\mathfrak{A}\,\tilde{e},\ e)\}$ непрерывна на $W\times W$, т. е.

$$M\{a_{lj}^{hk}\tilde{e}_{jk}e_{lh}\}\leqslant CM\{|\tilde{e}|^2\}^{1/2}M\{|e|^2\}^{1/2} \tag{6.14}$$

для любых $\tilde{e}$, $e\in W$, так как если $a(y)\in AP(\mathbf{R}^n)$,

$$f\in B^2(\mathbf{R}^n),\ \text{то}\ af\in B^2(\mathbf{R}^n)\ \text{и}\ \|af\|_{B^2(\mathbf{R}^n)}\leqslant\sup_{\mathbf{R}^n}|a|\,\|f\|_{B^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Кроме того, из условия (3.8) гл. I получаем, что

$$M\{(\mathfrak{A}e,\ e)\}\geqslant\varkappa_1M\{|e|^2\} \tag{6.15}$$

для любого $e\in W$.

Из (6.14), (6.15) вытекает, что билинейная форма $M\{(\mathfrak{A}\tilde{e}, e)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3 гл. I при $H=W$. Поэтому разрешимость задачи (6.12) в пространстве W следует из теоремы 1.3 гл. I.

Покажем, что можно выбрать вектор-функции $U^\delta(y)=(U_1^\delta, \ldots, U_n^\delta)\in \operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$, приближенно удовлетворяющие системе (6.9) в смысле теории распределений. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 6.2. *Пусть f_j, $A^{hk}\in AP(\mathbf{R}^n)$ и $\tilde{e}\in W$ — обобщенное решение системы (6.12). Тогда существуют последовательность $\delta\to 0$, $\delta>0$, и вектор-функции $U^\delta\in\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$, а также матрицы $g^\delta\in AP(\mathbf{R}^n)$ со столбцами $g_j^\delta=(g_{1j}^\delta, \ldots, g_{nj}^\delta)$, $g_{lj}^\delta=g_{jl}^\delta$, $l, j=1, \ldots, n$, такие, что*

$$\lim_{\delta\to 0} M\{|g^\delta|^2\}\to 0, \tag{6.16}$$

$$\lim_{\delta\to 0} M\{|\tilde{e}-e(U^\delta)|^2\}\to 0 \tag{6.17}$$

и выполняется интегральное тождество

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(A^{hk}(y)\frac{\partial U^\delta}{\partial y_k}, \frac{\partial\psi}{\partial y_h}\right)dy=\int_{\mathbf{R}^n}\left(f_j, \frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right)dx+\int_{\mathbf{R}^n}\left(g_j^\delta, \frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right)dx \tag{6.18}$$

для любой вектор-функции $\psi(y)=(\psi_1, \ldots, \psi_n)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство Согласно определению пространства W найдется последовательность вектор-функций $U^\delta\in\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$, такая, что выполнено соотношение (6.17). Поэтому в силу (6.13), (6.14) имеем

$$|M\{(\mathfrak{A}e(U^\delta), e)-(f, e)\}|\leqslant\gamma(\delta)M\{|e|^2\}^{1/2} \tag{6.19}$$

для любого $e\in W$, где $\gamma(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Положим

$$\Phi^\delta=\mathfrak{A}e(U^\delta)-f.$$

Так как элементы Φ_{lh}^δ матриц Φ^δ принадлежат $AP(\mathbf{R}^n)$, то Φ^δ можно представить в виде

$$\Phi^\delta=F^\delta+G^\delta, \tag{6.20}$$

где Φ^δ, F^δ, G^δ — симметрические матрицы с элементами Φ_{lh}^δ, F_{lh}^δ, G_{lh}^δ, $F^\delta\in\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$, $G^\delta\in AP(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\lim_{\delta\to 0} M\{|G^\delta|^2\}=0. \tag{6.21}$$

Поскольку

$$M\{(F^\delta, e)\}=M\{(\Phi^\delta, e)\}-M\{G^\delta, e)\},$$

то в силу (6.19), (6.21) имеем

$$|M\{(F^{\delta},\ e)\}| \leqslant \gamma_1(\delta) M\{|e|^2\}^{1/2} \tag{6.22}$$

для любого $e \in W$, где $\gamma_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Согласно лемме 6.1 существует вектор-функция $w^{\delta} \in \mathrm{Trig}\,\mathbf{R}^n$, такая, что

$$\frac{\partial}{\partial y_h} e_{lh}(w^{\delta}) = \frac{\partial F_{lh}^{\delta}}{\partial y_h}, \quad l=1, \ldots, n. \tag{6.23}$$

Умножая каждое из этих уравнений на w_l^{δ}, суммируя по l от 1 до n и пользуясь равенством (6.3) леммы 6.1, находим, что

$$M\{|e(w^{\delta})|^2\} = M\{(F^{\delta},\ e(w^{\delta}))\} \leqslant M\{|F^{\delta}|^2\}^{1/2} M\{|e(w^{\delta})|^2\}^{1/2}. \tag{6.24}$$

Следовательно,

$$M\{|e(w^{\delta})|^2\} \leqslant M\{|F^{\delta}|^2\}. \tag{6.25}$$

Из представления (6.20), а также из соотношений (6.17), (6.21) вытекает, что $M\{|F^{\delta}|^2\}$ ограничены постоянной, не зависящей от δ. Поэтому из (6.24), (6.25) следует, что

$$M\{|e(w^{\delta})|^2\} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{6.26}$$

Очевидно, что в силу (6.20) имеет место равенство, понимаемое в смысле теории распределений:

$$\frac{\partial}{\partial y_h}(a_{lj}^{hk}(y)\, e_{jk}(U^{\delta})) - \frac{\partial f_{lh}}{\partial y_h} = \frac{\partial}{\partial y_h} g_{lh}^{\delta}, \quad l=1, \ldots, n, \tag{6.27}$$

где $g^{\delta} = e(w^{\delta}) + G^{\delta}$.

Соотношение (6.16) выполняется в силу (6.26), (6.21), а интегральное тождество (6.18) следует из (6.27) и условий (3.2) гл. I на a_{lj}^{hk}. Лемма доказана.

Вектор-функция U^{δ} называется почти-решением системы (6.9) с почти-периодическими коэффициентами.

Установим теперь некоторые дополнительные свойства почти-решений U^{δ}, которые играют существенную роль при исследовании G-сходимости операторов теории упругости с быстро осциллирующими почти-периодическими коэффициентами.

Л е м м а 6.3. *Пусть* f_j, $A^{hk} \in AP(\mathbf{R}^n)$ *и* $\tilde{e}$ — *обобщенное решение системы* (6.9), $\tilde{e} \in W$, *а* U^{δ}, $\delta \to 0$ — *последовательность почти-решений системы* (6.9), *тогда из любой последовательности* $\varepsilon \to 0$ *можно выбрать подпоследовательность* $\varepsilon_{\delta} \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *такую, что*

$$\varepsilon_{\delta}\left(U^{\delta}\left(\frac{x}{\varepsilon_{\delta}}\right) + C_{\delta}\right) \to 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega), \tag{6.28}$$

где C_δ — некоторый постоянный вектор,

$$\Gamma_{\delta p}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\to M\{A^{pk}\tilde{e}_h-f_p\} \text{ слабо в } L^2(\Omega),\quad p=1,\ \ldots,\ n, \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\Gamma_{\delta h}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\to 0 \text{ по норме } H^{-1}(\Omega), \tag{6.30}$$

где

$$\Gamma_{\delta p}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\equiv A^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon_\delta U^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right)-f_p\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right), \tag{6.31}$$

$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ *— ограниченная область с липшицевой границей.*

Доказательство. Поскольку $U^\delta\in\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n$, то, учитывая неравенство (6.4) леммы 6.1 и соотношение (6.17), получаем, что

$$M\left\{\left(\frac{\partial U^\delta}{\partial y_j},\ \frac{\partial U^\delta}{\partial y_j}\right)\right\}\leqslant 2M\{|e(U^\delta)|^2\}\leqslant K, \tag{6.32}$$

где постоянная K не зависит от δ.

Обозначим теперь $G^{\delta,\varepsilon}(x)$ матрицы с элементами

$$G_{jl}^{\delta,\varepsilon}(x)\equiv\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_l}U_j^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\in\operatorname{Trig}\mathbf{R}^n.$$

Заметим, что матрицы $G^{\delta,\varepsilon}$ необязательно симметрические.

По определению среднего значения имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega|G^{\delta,\varepsilon}(x)|^2\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\left(\frac{\partial U^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial y_l},\ \frac{\partial U^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial y_l}\right)dx=$$

$$=(\operatorname{mes}\Omega)\,M\left\{\left(\frac{\partial U^\delta}{\partial y_l},\ \frac{\partial U^\delta}{\partial y_l}\right)\right\}. \tag{6.33}$$

Аналогично получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\left|g^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2dx=(\operatorname{mes}\Omega)\,M\{|g^\delta|^2\}, \tag{6.34}$$

где g^δ — матрицы, построенные в лемме 6.2.

Очевидно, что

$$\mathfrak{A}e(U^\delta)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\to M\{\mathfrak{A}e(U^\delta)\} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{6.35}$$

Кроме того,

$$G^{\delta,\varepsilon}(x)\to 0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{6.36}$$

поскольку $\frac{\partial U^\delta}{\partial y_l}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\in\overset{0}{\operatorname{Trig}}\,\mathbf{R}^n$ и $e^{i(x/\varepsilon,\xi)}\to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\xi\neq 0$, $\varepsilon\to 0$.

Пусть $\mathscr{V}=\{\eta^1, \eta^2, \dots\}$ — счетное множество матриц, элементы которых являются функциями из $L^2(\Omega)$, и это множество всюду плотно в $(L^2(\Omega))^{n^2}$.

Пользуясь соотношениями (6.33)—(6.36), каждому δ можем сопоставить такое ε_δ, что

$$\left|\left\| e(U^\delta)\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-(\operatorname{mes}\Omega) M\{|e(U^\delta)|^2\}\right|\leqslant\delta, \tag{6.37}$$

$$\left|\left\| g^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-(\operatorname{mes}\Omega) M\{|g^\delta|^2\}\right|\leqslant\delta, \tag{6.38}$$

$$\left|\| G^{\delta,\varepsilon_\delta}(x)\|^2_{L^2(\Omega)}-(\operatorname{mes}\Omega) M\left\{\left(\frac{\partial U^\delta}{\partial y_l}, \frac{\partial U^\delta}{\partial y_l}\right)\right\}\right|\leqslant\delta, \tag{6.39}$$

$$\left|\int\limits_\Omega (G^{\delta,\varepsilon_\delta}, \eta^m)\,dx\right|\leqslant\delta, \tag{6.40}$$

$$\left|\int\limits_\Omega \left(\mathfrak{A}e(U^\delta)\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)-M\{\mathfrak{A}e(U^\delta)\}, \eta^m\right)dx\right|\leqslant\delta \tag{6.41}$$

при $m\leqslant\delta^{-1}$, $m=1, 2, \dots$; $\eta^m\in\mathscr{V}$.

Из (6.32), (6.39) следует, что нормы $\|G^{\delta,\varepsilon_\delta}\|_{L^2(\Omega)}$ ограничены постоянной, не зависящей от δ, а из неравенств (6.40) следует, что для любой $\eta^m\in\mathscr{V}$

$$\int\limits_\Omega (G^{\delta,\varepsilon_\delta}, \eta^m)\,dx\to 0 \quad\text{при}\quad \delta\to 0.$$

Поэтому

$$G^{\delta,\varepsilon_\delta}(x)\to 0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \delta\to 0. \tag{6.42}$$

Положим

$$V^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)=U^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)+C_\delta,$$

где постоянные C_δ выбраны из условия

$$\int\limits_\Omega V^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)dx=0. \tag{6.43}$$

Тогда в силу неравенства Пуанкаре

$$\left\|\varepsilon_\delta V^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|G^{\delta,\varepsilon_\delta}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.44}$$

где постоянная C не зависит от δ. Так как правая часть (6.44) ограничена по δ, то из (6.42) и (6.44) следует, что по некоторой подпоследовательности $\delta'\to 0$ $\varepsilon_{\delta'}V^{\delta'}\left(\frac{x}{\varepsilon_{\delta'}}\right)\to V$ слабо в $H^1(\Omega)$ и сильно в $L^2(\Omega)$. При этом мы воспользовались слабой компактностью шара в гильбертовом пространстве и компактностью вложения $H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$. В силу (6.43), (6.42) $V\equiv 0$. Таким образом, соотношение (6.28) доказано.

Из (6.17), (6.37) и ограниченности элементов a_{ij}^{hk} матриц A^{hk} следует, что $\left\|\mathfrak{A}e(U^\delta)\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}$ ограничена постоянной, не зависящей от δ. Поэтому, учитывая, что в силу (6.17)

$$\lim_{\delta\to 0} M\{\mathfrak{A}e(U^\delta)\}=M\{\widetilde{\mathfrak{A}e}\},$$

из (6.41) заключаем, что при $\delta\to 0$

$$\mathfrak{A}e(U^\delta)\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\to M\{\widetilde{\mathfrak{A}e}\} \text{ слабо в } L^2(\Omega).$$

Для доказательства (6 29) достаточно заметить, что $\Gamma_{\delta p}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)$ определяется формулой (6.31).

Докажем (6.30). Пусть $\psi(x)=(\psi_1,\ldots,\psi_n)\in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда в силу (6.31), (6.18) имеем

$$\int_\Omega\left(\Gamma_{\delta_p},\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\right)dx=\int_\Omega\left(A^{pk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon U^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right),\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\right)dx-$$

$$-\int_\Omega\left(f_p\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right),\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\right)dx=\int_\Omega\left(g_p^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right),\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\right)dx.$$

Поэтому

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_p}\Gamma_{\delta_p}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant C\left\|g^\delta\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда, а также из (6.38) и (6.16) следует справедливость соотношения (6.30). Лемма доказана.

6.3. Сильная G-сходимость операторов теории упругости с быстро осциллирующими почти-периодическими коэффициентами

В ограниченной области Ω с липшицевой границей рассмотрим задачу Дирихле для системы теории упругости

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)=f(x) \quad \text{в} \quad \Omega,\quad u\in H_0^1(\Omega), \tag{6.45}$$

где $f\in H^{-1}(\Omega)$, матрицы $A^{hk}(y)$ принадлежат классу $E(\varkappa_1,\varkappa_2)$, $\varkappa_1,\varkappa_2=\mathrm{const}>0$, и их элементы $a_{ij}^{hk}(y)$ являются почти-периодическими функциями класса $AP(\mathbf{R}^n)$.

Если $A^{hk}(y)$ являются 1-периодическими по y, то, как показано в § 1 гл. II, коэффициенты усредненной системы теории упругости, соответствующей сильному G-пределу операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$, задаются формулами

$$\widehat{a}_{ls}^{hq}=\int\limits_Q\left(a_{ls}^{hq}(y)+a_{lj}^{hk}\frac{\partial N_{js}^q}{\partial y_h}\right)dy=\int\limits_Q(a_{ls}^{hq}(y)+a_{lj}^{hk}e_{jk}(N_s^q))\,dy,$$

$$Q=\{y:0<y_i<1,\quad i=1,\ \ldots,\ n\},\tag{6.46}$$

где $N_s^q=(N_{1s}^q,\ \ldots,\ N_{ns}^q)$ — s-й столбец матрицы N^q, $e_{jk}(N_s^q)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\partial N_{ks}^q}{\partial y_j}+\frac{\partial N_{js}^q}{\partial y_h}\right)$, причем столбцы N_s^q являются 1-периодическими по y решениями системы

$$\frac{\partial}{\partial y_h}(a_{lj}^{hk}(y)\,e_{jk}(N_s^q))=-\frac{\partial}{\partial y_j}a_{ls}^{jq},\quad l=1,\ \ldots,\ n.\tag{6.47}$$

Полагая $A_s^{pq}=(a_{1s}^{pq},\ \ldots,\ a_{ns}^{pq})$, $\widehat{A}_s^{pq}=(\widehat{a}_{1s}^{pq},\ \ldots,\ \widehat{a}_{ns}^{pq})$, можем переписать (6.46), (6.47) в векторном виде:

$$\widehat{A}_s^{hq}=\int\limits_Q(A_s^{hq}(y)+A^{hk}e_k(N_s^q))\,dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}(A^{hk}e_k(N_s^q))=-\frac{\partial}{\partial y_j}A_s^{jq}.$$

Пусть теперь $a_{ls}^{hq}(y)\in AP(\mathbf{R}^n)$. В этом случае при фиксированных q, s, как показано выше, можно построить обобщенные решения $\widetilde{e}^{qs}\in W$ ($\widetilde{e}^{qs}$ — матрица с элементами $\widetilde{e}_{jr}^{qs}$) системы

$$\frac{\partial}{\partial y_h}(A^{hk}(y)\,\widetilde{e}_k^{qs})=-\frac{\partial}{\partial y_j}A_s^{jq},\quad q,\ s=1,\ \ldots,\ n,\tag{6.48}$$

которая аналогична системе (6.12) при

$$f_j=-(a_{1s}^{jq},\ \ldots,\ a_{ns}^{jq})=-A_s^{jq}.\tag{6.49}$$

Положим

$$\widehat{a}_{ls}^{hq}=M\{a_{ls}^{hq}+a_{lj}^{hk}\widetilde{e}_{jk}^{qs}\},\quad \widehat{A}_s^{hq}=M\{A_s^{hq}+A^{hk}\widetilde{e}_k^{qs}\}.\tag{6.50}$$

Обозначим через $\widehat{A}^{hq}$ матрицы с элементами $\widehat{a}_{ls}^{hq}$.

Теорема 6.4. *Пусть $A^{pq}(y)$ — матрицы из класса $E(\varkappa_1,\ \varkappa_2)$, $\varkappa_1,\ \varkappa_2=\mathrm{const}>0$, с почти-периодическими элементами $a_{ij}^{pq}(y)\in AP(\mathbf{R}^n)$. Тогда последовательность операторов*

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

при $\varepsilon\to 0$ является сильно G-сходящейся к оператору теории упругости $\widehat{\mathscr{L}}$, коэффициенты которого заданы равенствами (6.50).

Доказательство. Покажем, что существуют последовательность $\delta\to 0$ и матрицы N_δ^q, $q=1, \ldots, n$, такие, что для матриц $A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)$, $\widehat{A}^{hk}$ при $\delta\to 0$ выполняется условие N § 9 гл. I, где $\widehat{A}^{hk}$ — матрицы, элементы которых заданы формулами (6.50). По теореме 9.2 гл. I это означает, что $\mathscr{L}_{\varepsilon_\delta}\overset{G}{\Rightarrow}\widehat{\mathscr{L}}$ при $\delta\to 0$. В силу единственности сильного G-предела (см. теорему 9.3 гл. I) отсюда следует, что $\mathscr{L}_\varepsilon\overset{G}{\Rightarrow}\widehat{\mathscr{L}}$.

При фиксированных q, s рассмотрим почти-решения $U_{\delta s}^q=(U_{\delta 1s}^q, \ldots, U_{\delta ns}^q)$ системы (6.48), построенные в лемме 6.2. Положим

$$N_{\delta s}^q(x)=(N_{\delta 1s}^q, \ldots, N_{\delta ns}^q)^*=\varepsilon_\delta\left(U_{\delta s}^q\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)+C_{\delta s}^q\right), \tag{6.51}$$

где $C_{\delta s}^q$ — постоянные векторы, для которых выполнено условие (6.28) при $U^\delta=U_{\delta s}^q$. Обозначим через $N_\delta^q(x)$ матрицы, столбцы которых имеют вид (6.51).

Проверим, что для матриц N_δ^q выполнено условие N при $\delta\to 0$. Действительно, условие $N1$ есть следствие соотношений (6.51) и (6.28). Проверим, что условия $N2$, $N3$ также имеют место.

В силу соотношений (6.29)—(6.31) имеем при $\delta\to 0$

$$A_s^{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)+A^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}N_{\delta s}^q(x)\to M\{A^{pk}\tilde{e}_k^{qs}+A_s^{pq}\} \tag{6.52}$$

слабо в $L^2(\Omega)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left[A^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)\frac{\partial N_{\delta s}^q}{\partial x_k}+A_s^{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon_\delta}\right)-M\{A^{pk}\tilde{e}_k^{qs}+A_s^{pq}\}\right]\to 0 \tag{6.53}$$

по норме $H^{-1}(\Omega)$.

Эти соотношения означают, что выполнены условия $N2$ и $N3$, поскольку выражение в правой части (6.52) в силу (6.50) равно $\widehat{A}_s^{pq}$ и является вектором с постоянными компонентами. Теорема доказана.

§ 7. УСРЕДНЕНИЕ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

7.1. Формулы для усредненных уравнений. Оценки решений

Рассмотрим последовательность $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ дифференциальных операторов линейной теории упругости

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}(\varphi(x), x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \qquad (7.1)$$

принадлежащих классу $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ с постоянными $\varkappa_1, \varkappa_2>0$, не зависящими от ε, x (см. § 3, гл. 1), ε — малый параметр, $\varepsilon\in(0, 1)$. Предполагается также, что элементы матриц $A_\varepsilon^{ij}(t, y)$ являются ограниченными (равномерно по ε) измеримыми функциями $t\in\mathbf{R}^1$, $y\in\mathbf{R}^n$ с ограниченными (равномерно по ε) первыми производными по $y_1, \ldots, y_n$, $\varphi(x)$ — скалярная функция класса $C^2(\overline{\Omega})$, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $|\nabla\varphi|\geqslant\mathrm{const}>0$, Ω — ограниченная область с гладкой границей.

Рассмотрим также систему теории упругости

$$\widehat{\mathscr{L}}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{A}^{ij}(\varphi(x), x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \qquad (7.2)$$

класса $E(\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2)$, где $\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2$ — положительные постоянные, быть может, отличные от $\varkappa_1, \varkappa_2$, элементы матриц $\widehat{A}^{ij}(t, y)$ являются ограниченными измеримыми функциями $t\in\mathbf{R}^1$, $y\in\mathbf{R}^n$, с ограниченными первыми производными по $y_1, \ldots, y_n$.

В этом параграфе изучим следующие задачи Дирихле:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) = f \text{ в } \Omega, \quad u^\varepsilon = \Phi \text{ на } \partial\Omega, \qquad (7.3)$$

$$\widehat{\mathscr{L}}(u) = f \text{ в } \Omega, \quad u = \Phi \text{ на } \partial\Omega, \qquad (7.4)$$

$$f\in H^{-1}(\Omega), \quad \Phi\in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

С помощью задач типа (7.3) можно, в частности, описать стационарные процессы в упругих телах, имеющих сильно неоднородную слоистую структуру, со слоями малой толщины, расположенными вдоль поверхностей уровня функции $\varphi(x)$.

Дадим оценки отклонения функции u^ε от u через величины, выраженные посредством коэффициентов систем (7.3) и (7.4), а также оценки отклонения тензоров напряжений, энергий, частот собственных колебаний, соответствующих системам (7.3), (7.4), установим необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$, получим в этом случае явные формулы для коэффициентов оператора $\widehat{\mathscr{L}}$.

Определим матрицы $N_j^\varepsilon(t, y)$, $M_{ij}^\varepsilon(t, y)$:

$$N_s^\varepsilon(t, y) \equiv \int_0^t [\varphi_l(y)\varphi_k(y)A_\varepsilon^{kl}(\tau, y)]^{-1}\varphi_p(y)(\widehat{A}^{ps}(\tau, y) - A_\varepsilon^{ps}(\tau, y))\,d\tau, \qquad (7.5)$$

$$M_{is}^\varepsilon(t, y) \equiv \int_0^t \{\varphi_j(y)A_\varepsilon^{ij}(\tau, y)[\varphi_l(y)\varphi_k(y)A_\varepsilon^{kl}(\tau, y)]^{-1}\varphi_p(y)(\widehat{A}^{ps}(\tau, y) - A_\varepsilon^{ps}(\tau, y)) + A_\varepsilon^{is}(\tau, y) - \widehat{A}^{is}(\tau, y)\}\,d\tau,$$

где $(\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)) \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right) \equiv \nabla\varphi$, B^{-1} — матрица, обратная к B. Ниже в лемме 7.5 будет показано, что матрица $[\varphi_l(y)\varphi_k(y)A_\varepsilon^{kl}(\tau, y)]^{-1}$ существует и ее элементы являются ограниченными (равномерно по ε) функциями.

Определим параметр δ_ε, посредством которого будем характеризовать близость решений задач (7.3) и (7.4).

Положим

$$\delta_\varepsilon = \max_{\substack{x\in\overline{\Omega},\\ l,i,j=1,\ldots,n}} \left\{ |M_{ij}^\varepsilon(\varphi(x), x)|, \ |N_j^\varepsilon(\varphi(x), x)|, \ \left|\frac{\partial M_{ij}^\varepsilon}{\partial y_l}(\varphi(x), x)\right|, \right.$$

$$\left. \left|\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_l}(\varphi(x), x)\right| \right\}. \tag{7.6}$$

Для матрицы B с элементами b^{rs} полагаем

$$|B| = (b^{kl}b^{kl})^{1/2}.$$

Теорема 7.1. *Пусть u^ε, u — решения задач* (7.3) *и* (7.4) *соответственно, $u \in H^2(\Omega)$. Тогда*

$$\left\| u^\varepsilon - u - N_s^\varepsilon(\varphi(x), x)\frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_0\delta_\varepsilon^{1/2}\|u\|_{H^2(\Omega)}, \tag{7.7}$$

$$\left\| \gamma_\varepsilon^i - \widehat{\gamma}^i - \frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial t}(\varphi(x), x)\frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1\delta_\varepsilon^{1/2}\|u\|_{H^2(\Omega)}, \tag{7.8}$$

где $\gamma_\varepsilon^i \equiv A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}$, $\widehat{\gamma}^i \equiv \widehat{A}^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, n$,

постоянные c_0, c_1 не зависят от ε.

Доказательство. Обозначим через $v_\varepsilon(x)$ обобщенное решение задачи Дирихле

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v_\varepsilon) = 0 \text{ в } \Omega, \quad v_\varepsilon = N_j^\varepsilon(\varphi(x), x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \text{ на } \partial\Omega, \quad v_\varepsilon \in H^1(\Omega). \tag{7.9}$$

Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon\left(u^\varepsilon - u - N_s^\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_s} + v_\varepsilon\right) = f - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}N_s^\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_s\,\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\widehat{A}^{is} - A_\varepsilon^{is} - A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u}{\partial x_s} +$$

$$+ \left(\widehat{A}^{ij} - A_\varepsilon^{ij} - A_\varepsilon^{il}\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial x_l}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}N_s^\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_s\,\partial x_j}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mathscr{L}_\varepsilon\left(u^\varepsilon-u-N_s^\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_s}+v_\varepsilon\right)=F_\varepsilon\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\widehat{A}^{is}-A_\varepsilon^{is}-A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_\varepsilon^{ij}N_s^\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_s\,\partial x_j}\right), \qquad (7.10)$$

причем правая часть этого равенства понимается как элемент пространства $H^{-1}(\Omega)$.

Пользуясь определением δ_ε, N_j^ε, M_{ij}^ε, покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)=\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial}{\partial x_k}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)+\beta_{is}(x,\ \varepsilon), \qquad (7.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)=\alpha_s(x,\ \varepsilon), \qquad (7.12)$$

$$\widehat{A}^{is}(\varphi(x),\ x)-A_\varepsilon^{is}(\varphi(x),\ x)-A_\varepsilon^{ij}(\varphi(x),\ x)\frac{\partial N_s^\varepsilon(\varphi(x),\ x)}{\partial x_j}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}M_{is}^\varepsilon+\alpha_{is}(x,\ \varepsilon), \qquad (7.13)$$

где $|\beta_{is}(x,\ \varepsilon)|\leqslant c_2\delta_\varepsilon$, $|\alpha_s(x,\ \varepsilon)|\leqslant c_3\delta_\varepsilon$, $|\alpha_{is}(x,\ \varepsilon)|\leqslant c_4\delta_\varepsilon$ и постоянные c_2, c_3, c_4 не зависят от ε.

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)=\varphi_k\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial y_k}.$$

Умножая это равенство на φ_k, суммируя по k и пользуясь неравенством $\left|\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial y_l}\right|\leqslant c\delta_\varepsilon$, получим (7.11). Полагая в (7.14) $k=i$ и пользуясь (7.5), находим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)=\varphi_i\varphi_jA_\varepsilon^{ij}\,[\varphi_l\varphi_kA_\varepsilon^{kl}]^{-1}\,\varphi_p(\widehat{A}^{ps}-A_\varepsilon^{ps})+$$

$$+\varphi_i(A_\varepsilon^{is}-\widehat{A}^{is})+\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial y_i}.$$

Отсюда следует (7.12). Согласно формулам (7.6) и (7.5) имеем

$$\widehat{A}^{is}-A_\varepsilon^{is}-A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial N_s^\varepsilon(\varphi(x),\ x)}{\partial x_j}=\widehat{A}^{is}-A_\varepsilon^{is}-A_\varepsilon^{ij}\varphi_j\frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial t}-A_\varepsilon^{ij}\frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial y_j}=$$

$$=\widehat{A}^{is}-A_\varepsilon^{is}-\varphi_p\varphi_jA_\varepsilon^{ij}\,[\varphi_l\varphi_kA_\varepsilon^{kl}]^{-1}\,(\widehat{A}^{ps}-A_\varepsilon^{ps})+$$

$$+\alpha_{is}(x,\ \varepsilon)=-\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial t}+\alpha_{is}(x,\ \varepsilon).$$

Оценим норму правой части равенства (7.10) в пространстве $H^{-1}(\Omega)$. Пусть $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — вектор-столбец с компонентами $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$. Имеем, учитывая (7.13), (7.11),

$$\int_\Omega \left(\left(\widehat{A}^{is} - A_\varepsilon^{is} - A_\varepsilon^{ij} \frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \left(\alpha_{is}(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx = -\int_\Omega \left(\frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial M_{is}^\varepsilon(\varphi(x), x)}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \left((\alpha_{is}(x, \varepsilon) - \beta_{is}(x, \varepsilon)) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \left(M_{is}^\varepsilon \frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \left(M_{is}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \left((\alpha_{is} - \beta_{is}) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) dx -$$

$$-\int_\Omega \left(M_{is}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right), \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) dx +$$

$$+\int_\Omega \left(M_{is}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\varphi_k}{|\nabla \varphi|^2} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega \left((\alpha_{is} - \beta_{is}) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx.$$

Отсюда, принимая во внимание (7.12) и определение δ_ε, находим, что

$$\left| \int_\Omega \left(\left(\widehat{A}^{is} - A_\varepsilon^{is} - A_\varepsilon^{ij} \frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx \right| \leqslant c_5 \delta_\varepsilon \| u \|_{H^2(\Omega)} \| \psi \|_{H^1(\Omega)}, \tag{7.14}$$

где постоянная c_5 не зависит от ε.

Оценим второй член в правой части равенства (7.10) по норме $H^{-1}(\Omega)$, пользуясь определением δ_ε. Имеем

$$\left| \int_\Omega \left(A_\varepsilon^{ij} N_s^\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx \right| \leqslant c_6 \delta_\varepsilon \| u \|_{H^2(\Omega)} \| \psi \|_{H^1(\Omega)}. \tag{7.15}$$

Таким образом, из (7.10), (7.14), (7.15) следует, что

$$\| F_\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant c_7 \delta_\varepsilon \| u \|_{H^2(\Omega)}, \tag{7.16}$$

где c_7 не зависит от ε.

Из (7.10), (7.16), замечания 3.4 гл. I и теоремы 3.3 гл. I следует, что

$$\left\| u^\varepsilon - u - N_s^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_s} + v_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_8 \delta_\varepsilon \| u \|_{H^2(\Omega)}, \tag{7.17}$$

где постоянная c_8 не зависит от ε.

Оценим норму $\| v_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)}$. Положим $w_\varepsilon = v_\varepsilon - \theta_\varepsilon$, где $\theta_\varepsilon = \psi_\varepsilon N_j^\varepsilon (\varphi(x), x) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $\psi_\varepsilon = 1$ в δ_ε-окрестности $\partial\Omega$, $\psi_\varepsilon = 0$ вне $2\delta_\varepsilon$-окрестности $\partial\Omega$, $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $0 \leqslant \psi_\varepsilon \leqslant 1$, $\delta_\varepsilon |\nabla \psi_\varepsilon| \leqslant \text{const}$. По теореме 3.1 гл. I получаем

$$\| w_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_9 \| \theta_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)}.$$

Оценим $\| \theta_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)}$. По определению θ_ε имеем

$$\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_k} = \psi_\varepsilon \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \psi_\varepsilon N_j^\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_k} N_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Поэтому

$$\| \theta_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{10} \delta_\varepsilon^2 \| u \|^2_{H^2(\Omega)} + c_{11} \| \nabla u \|^2_{L^2(\omega_1)},$$

где ω_1 — $2\delta_\varepsilon$-окрестность $\partial\Omega$. В силу леммы 1.3 гл. I $\| \nabla u \|^2_{L^2(\omega_1)} \leqslant c_{12} \delta_\varepsilon \| u \|^2_{H^2(\Omega)}$. Таким образом,

$$\| v_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{13} \delta_\varepsilon^{1/2} \| u \|_{H^2(\Omega)}. \tag{7.18}$$

Оценка (7.7) есть следствие (7.17), (7.18).

Докажем неравенства (7.8). В силу (7.7)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_s} + q_j^\varepsilon,$$

где

$$\| q_j^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_{14} \delta_\varepsilon^{1/2} \| u \|_{H^2(\Omega)}. \tag{7.19}$$

Применяя равенство (7.13), получаем

$$A_\varepsilon^{ij} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} - \hat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial M_{is}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \alpha_{is}(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_s} + A_\varepsilon^{ij} q_j^\varepsilon.$$

Отсюда вытекает (7.8). Теорема доказана.

Следствие 7.2. *Предположим, что коэффициенты системы (7.4) являются гладкими функциями в $\bar{\Omega}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\Phi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$. Тогда в условиях теоремы 7.1 имеем*

$$\left\| u^\varepsilon - u - N_s^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_0 \delta_\varepsilon^{1/2} (\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \Phi \|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}), \tag{7.20}$$

$$\left\| \gamma^i_\varepsilon - \widehat{\gamma}^i - \frac{\partial M^\varepsilon_{is}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 \delta_\varepsilon^{1/2} (\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \Phi \|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}), \quad (7.21)$$

где c_0, c_1 — постоянные, не зависящие от ε.

Оценки (7.20), (7.21) следуют из (7.7), (7.8) в силу неравенства

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_2 (\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \Phi \|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}), \quad (7.22)$$

которое, как известно, имеет место для решений эллиптических систем в предположениях гладкости коэффициентов и границы $\partial\Omega$ области Ω (см. [1]).

Получим теперь эффективную оценку энергии, содержащейся в части тела $G \subset \Omega$.

Пусть G — гладкая подобласть Ω. Определим энергию, соответствующую u^ε и u, по формулам

$$E^\varepsilon_G (u^\varepsilon) = \int_G \left(A^{ij}_\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx,$$

$$E_G (u) = \int_G \left(\widehat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx.$$

Теорема 7.3. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ и $u(x)$ — решения задач* (7.3), (7.4) *соответственно,* $u \in H^2(\Omega)$. *Тогда*

$$| E^\varepsilon_G (u^\varepsilon) - E_G (u) | \leqslant c_1 (G) \delta_\varepsilon^{1/2} [\| u \|^2_{H^2(\Omega)} + \| u \|_{H^2(\Omega)} \| u^\varepsilon \|_{H^1(\Omega)}] \quad (7.23)$$

где $c_1(G)$ — постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство. Предположим для простоты, что элементы матриц A^{ij}_ε являются гладкими функциями. Нетрудно показать, что теорема остается справедливой и при негладких коэффициентах. Для этого нужно приблизить коэффициенты системы (7.3) гладкими функциями.

Из (7.19) и (7.8) вытекает, что

$$\left| \int_G \left[\left(\gamma^i_\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \left(\widehat{\gamma}^i, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial M^\varepsilon_{is}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right] dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \delta_\varepsilon^{1/2} \| u \|_{H^2(\Omega)} \| u^\varepsilon \|_{H^1(\Omega)}. \quad (7.24)$$

Принимая во внимание соотношения (7.19), (7.11), находим

$$\int_G \left(\frac{\partial M^\varepsilon_{is}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx = \int_G \left(\frac{\partial M^\varepsilon_{is}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx +$$

$$+ \int_G \left(\frac{\partial M^\varepsilon_{is}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_s}, \frac{\partial N^\varepsilon_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx + q_\varepsilon =$$

$$=\int_G \left[\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_k}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_k}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ \frac{\partial N_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]dx+q_{\varepsilon}^1=$$

$$=-\int_G\left(M_{is}^{\varepsilon}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)dx-\int_G\left(M_{is}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right),\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx-$$

$$-\int_G\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right),\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx-$$

$$-\int_G\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_k}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)dx-$$

$$-\int_G\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx+q_{\varepsilon}^1+$$

$$+\int_{\partial G}\left[\left(M_{is}^{\varepsilon}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\nu_k+\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_k}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\nu_i\right]dS, \tag{7.25}$$

где $|q_{\varepsilon}^1|\leqslant c_3\delta_{\varepsilon}^{1/2}\|u\|_{H^2(\Omega)}^2$.

Вследствие (7.12) имеем

$$\int_G\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx=$$

$$=-\int_G\left(\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right),\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx-$$

$$-\int_G\left(\alpha_s\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)dx+$$

$$+\int_{\partial G}\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ N_j^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\nu_k\,dS.$$

Поэтому, пользуясь (7.25), получим

$$\left|\int_G\left(\frac{\partial M_{is}^{\varepsilon}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_s},\ \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)dx\right|\leqslant c_4\,[\|u\|_{H^2(\Omega)}^2\delta_{\varepsilon}+\|\nabla u\|_{L^2(\partial G)}^2\delta_{\varepsilon}+$$

$$+\delta_{\varepsilon}^{1/2}\|u\|_{H^2(\Omega)}^2]. \tag{7.26}$$

В силу (7.19) имеем

$$\left|\int_G \left(\widehat{\gamma}^i, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) dx - \int_G \left(\widehat{\gamma}^i, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx\right| = \left|\int_G \left(\widehat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial N_s^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s}\right) dx + p_\varepsilon^1\right| =$$

$$= \left| - \int_G \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), N_s^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_s}\right) dx - \int_G \left(\widehat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, N_s^\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_i}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial G} \left(\widehat{A}^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, N_s^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \nu_i \, dS + p_\varepsilon^1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \delta_\varepsilon (\| u \|_{H^2(\Omega)} \| u \|_{H^1(\Omega)} + \| u \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^2(\partial G)}) + |p_\varepsilon^1|, \quad (7.27)$$

где $|p_\varepsilon^1| \leqslant c_6 \delta_\varepsilon^{1/2} \|u\|^2_{H^2(\Omega)}$.

Поскольку согласно утверждению 3 теоремы 1.2 гл. I для любой $u \in H^2(\Omega)$ справедливо неравенство $\|\nabla u\|_{L^2(\partial G)} \leqslant c \| u \|_{H^2(G)}$, то из оценок (7.24)—(7.27) вытекает (7.23). Теорема доказана.

Следствие 7.4. *В предположениях гладкости коэффициентов системы* (7.3) *в силу неравенства* (7.22) *из оценки* (7.23) *вытекает, что*

$$|E_G^\varepsilon(u^\varepsilon) - E_G(u)| \leqslant c_2(G) \delta_\varepsilon^{1/2} (\| f \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \Phi \|^2_{H^{3/2}(\partial\Omega)}).$$

Напомним, что в определении матриц N_s^ε, M_{ij}^ε присутствует матрица $(\varphi_k \varphi_l A_\varepsilon^{kl})^{-1}$. Покажем, что эта матрица существует и имеет равномерно по ε ограниченные элементы.

Лемма 7.5. *Пусть* $A^{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, *набор матриц класса* $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$, *где* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — *положительные постоянные, не зависящие от* x. *Пусть* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $|\nabla\varphi| \geqslant \mathrm{const} > 0$, $\nabla\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Тогда существуют постоянные $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, *зависящие только от* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *и* φ, *такие, что для любого* $\xi \in \mathbf{R}^n$

$$\varkappa_3 |\xi|^2 \leqslant ((\varphi_l(x) \varphi_p(x) A^{pl}(x))^{-1} \xi, \xi) \leqslant \varkappa_4 |\xi|^2, \quad \varkappa_3, \varkappa_4 > 0. \quad (7.28)$$

Доказательство. В условиях (3.3) гл. I положим $\eta_{ih} = \varphi_i \xi_h + \varphi_h \xi_i$. Имеем

$$a_{hl}^{ij} \eta_{ih} \eta_{jl} = 4 \varphi_q \varphi_p a_{ij}^{pq} \xi_i \xi_j,$$

$$(\varphi_i \xi_h + \varphi_h \xi_i)(\varphi_i \xi_h + \varphi_h \xi_i) = \eta_{ih} \eta_{ih} = 2 \varphi_i \varphi_i \xi_j \xi_j + 2 (\varphi_i \xi_i)^2 \geqslant C_0 |\xi|^2.$$

Пусть $K(x) \equiv \varphi_q(x) \varphi_p(x) A^{pq}(x)$. Тогда для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$ в силу (3.3) гл. I получим

$$c_1 |\xi|^2 \leqslant \varkappa_1 \eta_{ih} \eta_{ih} \leqslant 4 (K\xi, \xi), \quad (K\xi, K\xi) \leqslant M_1 |\xi|^2,$$

где постоянные c_1, M_1 зависят только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, φ. Отсюда следует существование матрицы K^{-1}. Полагая $\xi = K^{-1}\zeta$, находим

$$C_1 |K^{-1}\zeta|^2 \leqslant 4 (\zeta, K^{-1}\zeta) \leqslant 4 |\zeta| |K^{-1}\zeta|, \quad |\zeta|^2 \leqslant M_1 |K^{-1}\zeta|^2.$$

Из этих неравенств вытекает (7.28). Лемма доказана.

7.2. Необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости для операторов, описывающих слоистые среды

В случае слоистых сред общие результаты о сильной G-сходимости, изложенные в § 9 гл. I, а также формулы (7.5) и теорема 7.1 позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости последовательности $\mathcal{L}_\varepsilon$ к оператору $\hat{\mathcal{L}}$ в терминах сходимости некоторых комбинаций коэффициентов операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$, при этом оказывается возможным получить явные выражения для коэффициентов $\hat{\mathcal{L}}$ через слабые пределы соответствующих комбинаций коэффициентов операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$.

Нам потребуются некоторые вспомогательные результаты о компактности в пространствах функций.

Обозначим через $C^{0,\beta}$ пространство ограниченных измеримых функций $g(t, y)$, $(t, y)\in[0, 1]\times\overline{\Omega}$, имеющих конечную норму:

$$\|g\|_{0,\beta}=\sup_{t,y}|g(t, y)|+\sup_{t,y',y''}\frac{|g(t, y')-g(t, y'')|}{|y'-y''|^\beta},$$

$$y,\ y',\ y''\in\overline{\Omega},\quad y'\neq y'',\quad 0<\beta\leqslant 1,$$

t пробегает множество полной меры на $[0, 1]$.

Через $C^{1,\beta}$ обозначим множество функций $g(t, y)$, таких, что $g(t, y)$, $\frac{\partial g}{\partial y_j}\in C^{0,\beta}$, $j=1, \ldots, n$.

Лемма 7.6. *Пусть семейство функций $\psi_\varepsilon(t, y)$, $\varepsilon\in(0, 1)$, равномерно ограничено по норме $C^{0,\beta}$. Тогда существуют последовательность $\varepsilon'\to 0$ и функция $\Phi\in C^{0,\beta}$, такие, что при каждом $y\in\overline{\Omega}$ $\psi_{\varepsilon'}(t, y)\to\Phi(t, y)$ слабо в $L^2(0, 1)$ при $\varepsilon'\to 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — счетное множество функций, всюду плотное в $L^2(0, 1)$. При фиксированной $v\in\mathcal{V}$ рассмотрим семейство функций от y:

$$\left\{\int_0^1\psi_\varepsilon(t, y)v(t)\,dt\right\},\quad \varepsilon\in(0, 1).$$

В силу предположения леммы 7.6 это семейство равностепенно непрерывно и равномерно по ε ограничено. Поэтому вследствие теоремы Арцела существует подпоследовательность $\varepsilon'\to 0$, такая, что

$$\int_0^1\psi_{\varepsilon'}(t, y)v(t)\,dt\to\Psi_v(y)\ \text{равномерно по}\ y, \tag{7.29}$$

где $\Psi_v(y)$ — функция от $y\in\overline{\Omega}$. Поскольку $\mathcal{V}$ — счетное множество, то диагональным процессом можно выделить последовательность ε', такую, что сходимость (7.29) имеет место при всяком $v\in\mathcal{V}$.

Пусть теперь w — произвольная функция из $L^2(0, 1)$ и $v_j \to w$ в $L^2(0, 1)$ при $j \to \infty$, где $v_j \in \mathscr{V}$.

Покажем, что существует функция $\Psi_w(y)$, такая, что $\Psi_{v_j}(y) \to \Psi_w(y)$ равномерно в $\overline{\Omega}$ при $j \to \infty$. Действительно, легко видеть, что

$$\Psi_{v_j}(y) - \Psi_{v_k}(y) = \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y)(v_j - v_k)\,dt + \Psi_{v_j}(y) - \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) v_j\,dt -$$

$$- \Psi_{v_k}(y) + \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) v_k\,dt.$$

Выбирая ε^0 столь малым, что

$$\left| \Psi_{v_k}(y) - \int_0^1 \varphi_{\varepsilon'}(t, y) v_k\,dt \right| + \left| \Psi_{v_j}(y) - \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) v_j\,dt \right| \leqslant \delta/2$$

при $\varepsilon' < \varepsilon^0$, получим

$$| \Psi_{v_j}(y) - \Psi_{v_k}(y) | \leqslant c \, \| v_j - v_k \|_{L^2(0,1)} + \delta/2$$

для любых j, k, $y \in \overline{\Omega}$. Отсюда следует, что $\{\Psi_{v_j}(y)\}$ — последовательность Коши в пространстве $C^0(\overline{\Omega})$ при $j \to \infty$ и, значит, найдется функция $\Psi_w \in C^0(\overline{\Omega})$, такая, что $\Psi_{v_j}(y) \to \Psi_w(y)$ равномерно по $y \in \overline{\Omega}$ при $j \to \infty$.

Из неравенства

$$\left| \Psi_w(y) - \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) w\,dt \right| \leqslant | \Psi_w(y) - \Psi_{v_j}(y) | +$$

$$+ \left| \Psi_{v_j}(y) - \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) v_j\,dt \right| + \left| \int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y)(w - v_j)\,dt \right|,$$

выбирая достаточно большое j, устанавливаем, что

$$\int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) w(t)\,dt \to \Psi_w(y) \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0$$

равномерно по $y \in \overline{\Omega}$. Очевидно, что при каждом $y \in \overline{\Omega}$ $\Psi_w(y)$ — ограниченный линейный функционал на $L^2(0, 1)$, действующий на функцию w. Поэтому

$$\Psi_w(y) = \int_0^1 \Phi(t, y) w(t)\,dt,$$

где $\Phi(t, y) \in L^2(0, 1)$ при каждом $y \in \overline{\Omega}$. Следовательно,

$$\int_0^1 \psi_{\varepsilon'}(t, y) w(t)\, dt \to \int_0^1 \Phi(t, y) w(t)\, dt \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0$$

для любой $w(t) \in L^2(0, 1)$. Функция $\Phi(t, y)$ удовлетворяет неравенствам

$$-C|y'-y''|^{\beta} \leqslant \Phi(t, y') - \Phi(t, y'') \leqslant C|y'-y''|^{\beta}, \qquad (7.30)$$

поскольку если $f_\varepsilon \to f$ слабо в $L^2(0, 1)$ при $\varepsilon \to 0$, и $m \leqslant f_\varepsilon \leqslant M$, то $m \leqslant f \leqslant M$ для почти всех $t \in (0, 1)$. Таким образом, исправляя, если необходимо, функцию Φ на множестве нулевой меры, в силу (7.30) получим, что $\Phi \in C^{0,\beta}$. Лемма доказана.

Следствие 7.7. *Пусть семейство функций* $\{\psi_\varepsilon(t, y)\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, *равномерно по* ε *ограничено в* $C^{1,\beta}$.

Тогда для некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ *имеем*

$$\psi_{\varepsilon'}(t, y) \to \psi(t, y), \quad \frac{\partial \psi_{\varepsilon'}(t, y)}{\partial y_j} \to \frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

слабо в $L^2(0, 1)$ *при каждом* $y \in \overline{\Omega}$, *где* $\psi \in C^{1,\beta}$.

Доказательство Из леммы 7.6 вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ имеет место сходимость

$$\psi_{\varepsilon'}(t, y) \to \psi, \quad \frac{\partial \psi_{\varepsilon'}(t, y)}{\partial y_j} \to \varphi^j(t, y)$$

слабо в $L^2(0, 1)$ при всех $y \in \overline{\Omega}$, где $\psi, \varphi^j \in C^{0,\beta}$, $j = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что для любой $g \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$-\lim_{\varepsilon' \to 0} \int_0^1 \int_\Omega \psi_{\varepsilon'}(t, y) v(t) \frac{\partial g(y)}{\partial y_j}\, dy\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \psi_{\varepsilon'}(t, y)}{\partial y_j} v(t) g(y)\, dy\, dt = \int_0^1 \int_\Omega \varphi^j(t, y) v(t) g(y)\, dy\, dt.$$

Это означает, что $\varphi^j(t, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(t, y)$ в смысле обобщенных функций. Так как ψ^j, $\psi \in C^{0,\beta}$, то это равенство выполнено и в классическом смысле при почти всех t.

Лемма 7.8. *Пусть семейство функций* $\psi_\varepsilon(t, y)$ *равномерно по* ε *ограничено в* $C^{0,\beta}$ *и* $\psi_\varepsilon(t, y) \to 0$ *слабо в* $L^2(0, 1)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для любого* $y \in \overline{\Omega}$.

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\Phi_\varepsilon(t, y) \equiv \int_0^t \psi_\varepsilon(\tau, y)\, d\tau \to 0 \text{ по норме } C^0([0, 1] \times \overline{\Omega}).$$

Если, кроме того, $\left|\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial y_j}\right|$, $j=1, \ldots, n$, *равномерно по* ε *ограничены, то*

$$\Phi_\varepsilon(\varphi(x), x) \to 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega)$$

для любой $\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Семейство $\{\Phi\varepsilon(t, y)\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $[0, 1] \times \overline{\Omega}$. По теореме Арцела существует функция ψ, такая, что $\Phi_{\varepsilon''} \to \psi$ по норме $C^0([0, 1] \times \Omega)$ для некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$. Так как $\Phi_{\varepsilon'} = \int_0^t \psi_{\varepsilon'}(\tau, y)\, d\tau \to \psi(t, y)$ при всех $(t, y) \in [0, 1] \times \overline{\Omega}$, то в силу слабой сходимости в $L^2(0, 1)$ последовательности $\psi_\varepsilon(t, y)$ к нулю при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $y \in \Omega$ получим, что $\psi = 0$.

Докажем, что $\Phi_\varepsilon(\varphi(x), x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$. Действительно, по доказанному $\Phi_\varepsilon(\varphi(x), x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ по норме $L^\infty(\Omega)$. Кроме того, производные $\frac{\partial\Phi_\varepsilon(\varphi(x), x)}{\partial x_i}$ равномерно по ε ограничены. Следовательно, в силу слабой компактности шара в $L^2(\Omega)$ для некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ имеем $\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_{\varepsilon'}(\varphi(x), x) \to \chi$ слабо в $L^2(\Omega)$ и, значит, $\chi = 0$. Лемма доказана.

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^0(t, y) &\equiv [\varphi_l(y)\varphi_k(y) A_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1},\\
B_\varepsilon^s(t, y) &\equiv [\varphi_l(y)\varphi_k(y) A_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y) A_\varepsilon^{ps}(t, y),\\
B_\varepsilon^{is}(t, y) &\equiv \varphi_j(y) A_\varepsilon^{ij}(t, y)[\varphi_l(y)\varphi_k(y) A_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y) A_\varepsilon^{ps}(t, y) -\\
&\quad - A_\varepsilon^{is}(t, y), \qquad (7.31)\\
\widehat{B}^0(t, y) &\equiv [\varphi_l(y)\varphi_k(y)\widehat{A}^{kl}(t, y)]^{-1},\\
\widehat{B}^s(t, y) &\equiv [\varphi_l(y)\varphi_k(y)\widehat{A}^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y)\widehat{A}^{ps}(t, y),\\
\widehat{B}^{is}(t, y) &\equiv \varphi_j(y)\widehat{A}^{ij}(t, y)[\varphi_l(y)\varphi_k(y)\widehat{A}^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y)\widehat{A}^{ps}(t, y) -\\
&\quad - \widehat{A}^{is}(t, y).
\end{aligned}
$$

Пользуясь результатами о сильной G-сходимости, изложенными в § 9 гл. I, установим необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости операторов, описывающих слоистые среды, в терминах слабой сходимости комбинаций коэффициентов системы (7.1).

Теорема 7.9. *Предположим, что элементы матриц* $A_\varepsilon^{ij}(t, y)$ *имеют равномерно по* ε *ограниченные нормы в пространстве* $C^{1,\beta}$.

Последовательность операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ является сильно G-сходящейся к $\widehat{\mathcal{L}}$ при $\varepsilon\to 0$ ($\mathcal{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathcal{L}}$) тогда и только тогда, когда при $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned} &B_\varepsilon^s(t,\ y)\to \widehat{B}^s(t,\ y), \quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\\ &B_\varepsilon^{ij}(t,\ y)\to \widehat{B}^{ij}(t,\ y), \quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n, \end{aligned} \tag{7.32}$$

слабо в $L^2(0,\ 1)$ для любого $y\in\overline{\Omega}$.

Доказательство. Предположим, что выполнены условия (7.32). Покажем, что в этом случае $\delta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, где δ_ε определено формулой (7.6). Действительно, нетрудно проверить, что имеют место равенства

$$\varphi_p B_\varepsilon^{ps}=0,\ \ \varphi_p\widehat{B}^{ps}=0,\ \ \varphi_p B_\varepsilon^p=E,$$

$$\varphi_p A_\varepsilon^{ps}=(B_\varepsilon^0)^{-1}B_\varepsilon^s,\ \ \varphi_p\widehat{A}^{ps}=(\widehat{B}^0)^{-1}\widehat{B}^s,$$

$$A_\varepsilon^{is}=-B_\varepsilon^{is}+(B_\varepsilon^i)^*(B_\varepsilon^0)^{-1}B_\varepsilon^s,\ \ \widehat{A}^{is}=-B^{is}+(\widehat{B}^i)^*(\widehat{B}^0)^{-1}\widehat{B}^s.$$

Поэтому

$$N_s^\varepsilon(t,\ y)=\int_0^t [B_\varepsilon^0(\tau,\ y)(\widehat{B}^0(\tau,\ y))^{-1}\widehat{B}^s(\tau,\ y)-B_\varepsilon^s(\tau,\ y)]\,d\tau,$$

$$\begin{aligned} M_{is}^\varepsilon(t,\ y)=\int_0^t [&(B_\varepsilon^i(\tau,\ y))^*(\widehat{B}^0(\tau,\ y))^{-1}\widehat{B}^s(\tau,\ y)-B_\varepsilon^{is}(\tau,\ y)-\\ &-(\widehat{B}^i(\tau,\ y))^*(\widehat{B}^0(\tau,\ y))^{-1}\widehat{B}^s(\tau,\ y)-\widehat{B}^{is}(\tau,\ y)]\,d\tau. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Обозначим подынтегральные выражения в определениях $N_s^\varepsilon(t,\ y)$, $M_{is}^\varepsilon(t,\ y)$ через $n_s^\varepsilon(t,\ y)$, $m_{is}^\varepsilon(t,\ y)$ соответственно. Тогда по условию теоремы 7.9 n_s^ε, $m_{is}^\varepsilon\in C^{1,\beta}$. В силу (7.32) имеем

$$n_s^\varepsilon(t,\ y),\ m_{is}^\varepsilon(t,\ y)\to 0 \text{ слабо в } L^2(0,\ 1) \tag{7.34}$$

при $\varepsilon\to 0$ и любом $y\in\overline{\Omega}$.

Пользуясь следствием 7.7, отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial y_j}n_s^\varepsilon(t,\ y)\to 0,\ \ \frac{\partial}{\partial y_j}m_{is}^\varepsilon(t,\ y)\to 0 \text{ слабо в } L^2(0,\ 1) \tag{7.35}$$

при $\varepsilon\to 0$ и любом $y\in\overline{\Omega}$.

Согласно лемме 7.8 из (7.34), (7.35) вытекает сходимость к нулю по норме $C^0([0,\ 1]\times\overline{\Omega})$ матриц $N_s^\varepsilon(t,\ y)$, $M_{is}^\varepsilon(t,y)$, $\dfrac{\partial N_s^\varepsilon(t,\ y)}{\partial y_j}$, $\dfrac{\partial M_{is}^\varepsilon(t,\ y)}{\partial y_j}$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому в силу (7.6) имеем

$$\delta_\varepsilon\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{7.36}$$

Кроме того, из леммы 7.8 также следует, что

$$N_s^\varepsilon(\varphi(x),\ x)\to 0,\ M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)\to 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0. \quad (7.37)$$

Принимая во внимание (7.11), (7.36), (7.37), устанавливаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)\to 0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0, \quad (7.38)$$

поскольку $\frac{\varphi_k}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial}{\partial x_k} M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)\to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$.

Докажем сильную G-сходимость операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$.

Пусть в теореме 7.1 $u\in C_0^\infty(\Omega)$, $f=\widehat{\mathscr{L}}(u)\in H^{-1}(\Omega)$, $\Phi=0$. Тогда имеют место оценки (7.7), (7.8). В силу (7.36)—(7.38) при $\varepsilon\to 0$

$$u^\varepsilon\to u \text{ слабо в } H_0^1(\Omega),\quad \gamma_\varepsilon^i\to\widehat{\gamma}^i \text{ слабо в } L^2(\Omega).$$

Отсюда на основании замечания 9.1 гл. I заключаем, что $\mathscr{L}_\varepsilon\overset{G}{\Rightarrow}\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$, так как множество $\{\widehat{\mathscr{L}}(v),\ v\in C_0^\infty(\Omega)\}$ всюду плотно в $H^{-1}(\Omega)$. Действительно, согласно замечанию 3.1 гл. I любой функционал $g\in H^{-1}(\Omega)$ представляется в виде $g=\widehat{\mathscr{L}}(v)$, $v\in H_0^1(\Omega)$, и для любого функционала $f=\widehat{\mathscr{L}}(w)$, $w\in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$|g(\varphi)-f(\varphi)|\leqslant C\,\|v-w\|_{H^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Докажем теперь необходимость условий (7.32) для сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$. Пусть $\mathscr{L}_\varepsilon\overset{G}{\Rightarrow}\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon\to 0$.

В силу предположений на коэффициенты системы (7.1) и леммы 7.5 элементы матриц $B_\varepsilon^s(t,\ y)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $B_\varepsilon^{ij}(t,\ y)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, принадлежат классу $C^{1,\beta}$ и имеют равномерно по ε ограниченные нормы в $C^{1,\beta}$. Поэтому, принимая во внимание следствие 7.3 из леммы 7.6, можем заключить, что существуют матрицы $\widetilde{B}^0(t,\ y)$, $\widetilde{B}^s(t,\ y)$, $\widetilde{B}^{ij}(t,\ y)$, $s,\ i,\ j=1,\ldots,n$, с элементами из $C^{1,\beta}$, такие, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon'\to 0$ имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^\alpha}{\partial y_l^\alpha} B_{\varepsilon'}^s(t,\ y)\to\frac{\partial^\alpha}{\partial y_l^\alpha}\widetilde{B}^s(t,\ y),\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\\ \frac{\partial^\alpha}{\partial y_l^\alpha} B_{\varepsilon'}^{ij}(t,\ y)\to\frac{\partial^\alpha}{\partial y_l^\alpha}\widetilde{B}^{ij}(t,\ y),\ \alpha=0,\ 1;\ l,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\end{gathered} \quad (7.39)$$

слабо в $L^2(0,\ 1)$ для любого $y\in\overline{\Omega}$.

Положим

$$\widetilde{A}^{is}=(\widetilde{B}^i)^*(\widetilde{B}^0)^{-1}\widetilde{B}^s-\widetilde{B}^{is},\quad i,\ s=1,\ \ldots,\ n. \quad (7.40)$$

Определим матрицы $\widetilde{N}_j^\varepsilon(t,\ y)$, $\widetilde{M}_{ij}^\varepsilon(t,\ y)$ формулами (7.5), заменяя в них $\widehat{A}^{ij}(\tau,\ y)$ на $\widetilde{A}^{ij}(\tau,\ y)$, и определим $\widetilde{\delta}_\varepsilon$ посредством (7.6), заменяя там N_j^ε, M_{ij}^ε на $\widetilde{N}_j^\varepsilon$, $\widetilde{M}_{ij}^\varepsilon$.

Аналогично тому, как это сделано в начале доказательства этой теоремы, устанавливаем, что при $\varepsilon' \to 0$

$$\begin{gathered}\widetilde{\delta}_{\varepsilon'} \to 0,\\ \widetilde{N}_j^{\varepsilon'}(\varphi(x), x) \to 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega),\\ \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{M}_{is}^{\varepsilon'}(\varphi(x), x) \to 0 \text{ слабо в } L^2(\Omega).\end{gathered} \tag{7.41}$$

Пусть $\widetilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначим через u^ε решения следующих задач:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\widetilde{A}^{hk}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_k}\right) \in H^{-1}(\Omega), \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega).$$

Положим

$$\gamma_\varepsilon^i = A_\varepsilon^{ik}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}, \quad \widetilde{\gamma}_\varepsilon^i = \widetilde{A}^{ik}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_k}.$$

Совершенно аналогично доказательству теоремы 7.1 устанавливаем, что

$$\left\| u^{\varepsilon'} - \widetilde{u} - \widetilde{N}_s^{\varepsilon'}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_s}\right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_0 \widetilde{\delta}_{\varepsilon'}^{1/2} \|\widetilde{u}\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\left\| \gamma_{\varepsilon'}^i - \widetilde{\gamma}^i - \frac{\partial \widetilde{M}_{is}^{\varepsilon'}}{\partial t}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_s}\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \widetilde{\delta}_{\varepsilon'}^{1/2} \|\widetilde{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Отсюда и из (7.41) вытекает, что при $\varepsilon' \to 0$ имеем

$$u^{\varepsilon'} \to \widetilde{u} \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \gamma_{\varepsilon'}^i \to \widetilde{\gamma}^i \text{ слабо в } L^2(\Omega). \tag{7.42}$$

Обозначим через u^0 решение задачи

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0) = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\widetilde{A}^{hk}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_h}\right) \text{ в } \Omega, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega).$$

По определению сильной G-сходимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ и в силу (7.42) имеем $u^0 = \widetilde{u}$, $\widehat{A}^{hk}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_h} = \widetilde{A}^{hk}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_h}$ почти всюду в Ω. Поскольку $\widetilde{u}$ — произвольная вектор-функция из $C_0^\infty(\Omega)$, то отсюда следует, что $\widetilde{A}^{hk} = \widehat{A}^{hk}$ почти всюду в Ω.

Таким образом, из любой подпоследовательности $\varepsilon'' \to 0$ можем выбрать последовательность $\varepsilon' \to 0$, такую, что справедливы соотношения (7.39) с $\widetilde{B}^s \equiv \widehat{B}^s$, $\widetilde{B}^{ij} = \widehat{B}^{ij}$, $s=0, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, n$, где $\widehat{B}^s$, $\widehat{B}^{ij}$ выражаются через коэффициенты G-предельного оператора $\widehat{\mathscr{L}}$ по формулам (7.31). Ввиду произвольности подпоследовательности $\varepsilon'' \to 0$ отсюда следует выполнение условий (7.32) при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 7.9 мы получили следующее утверждение.

Теорема 7.10. *Пусть элементы матриц* $A^{ij}_\varepsilon(t, y)$ *имеют равномерно по* ε *ограниченные нормы в* $C^{1,\beta}$ *и существуют матрицы* $\widehat{B}^s(t, y)$, $\widehat{B}^{ij}(t, y)$, $s=0, \ldots, n$, $i, j=1, \ldots, n$, *такие, что имеет место сходимость* (7.32). *Тогда последовательность операторов* $\mathscr{L}_\varepsilon$, *отвечающая матрицам коэффициентов* $A^{ij}_\varepsilon(\varphi(x), x)$, *сильно G-сходится к оператору* $\widehat{\mathscr{L}}$ *с коэффициентами* $\hat{A}^{ij}(\varphi(x), x)$, *где* $\hat{A}^{ij}(t, y)$ *имеют вид*

$$\widehat{A}^{is}=(\widehat{B}^{i})^{*}(\widehat{B}^{0})^{-1}\widehat{B}^{s}-\widehat{B}^{is}, \quad i, s=1, \ldots, n. \tag{7.43}$$

Рассмотрим некоторые примеры последовательностей сильно G-сходящихся операторов, для которых выполнены условия (7.32).

Теорема 7.11. *Пусть элементы матриц* $A^{ij}_\varepsilon(x)$ *класса* $E(\varkappa_1, \varkappa_2)$ *имеют вид* $a^{ij}_{hl}(\varepsilon^{-1}x_1)$, *где* $a^{ij}_{hl}(\xi)$ *почти-периодические функции из* $AP(\mathbf{R}^1)$. *Тогда* $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$, *где матрицы коэффициентов оператора* $\widehat{\mathscr{L}}$ *задаются формулами*

$$\widehat{A}^{ij}=\langle A^{ij}\rangle-\langle A^{i1}(A^{11})^{-1}A^{1j}\rangle+\langle A^{i1}(A^{11})^{-1}\rangle\langle(A^{11})^{-1}\rangle^{-1}\langle(A^{11})^{-1}A^{1j}\rangle,$$

причем $\langle A^{ij}\rangle$ *определяется как матрица с элементами*

$$\langle a^{ij}_{hl}\rangle\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}a^{ij}_{hl}(\xi)\,d\xi.$$

Кроме того, выполняются оценки (7.7), (7.8) *и* $\delta_\varepsilon\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $A^{ij}_\varepsilon(t, y)=A^{ij}(t/\varepsilon)$, $\varphi(x)=x_1$. Положим

$$Y_j(s)=(A^{11}(s))^{-1}(\widehat{A}^{1j}-A^{1j}(s)),$$

$$Z_{ij}(s)=A^{i1}(s)(A^{11}(s))^{-1}(\widehat{A}^{1j}-A^{1j}(s))+A^{ij}(s)-\widehat{A}^{ij}.$$

Элементы матриц Y_j, Z_{ij} — почти-периодические функции, так как для любых почти-периодических функций f, g, $f\gg\mathrm{const}>0$, функции fg, $\frac{1}{f}$ также являются почти-периодическими. Легко видеть, что в рассматриваемом случае

$$N^\varepsilon_j(x_1)=\int\limits_0^{x_1}Y_j\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)d\xi, \quad M^\varepsilon_{ij}(x_1)=\int\limits_0^{x_1}Z_{ij}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)d\xi.$$

Отсюда следует, что $\delta_\varepsilon\to 0$ в теореме 7.1, поскольку $\langle Z_{ij}\rangle=0$, $\langle Y_j\rangle=0$, N^ε_j, M^ε_{ji} образуют равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства и в каждой точке $x_1\in(0, 1)$ они сходятся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Сильная G-сходимость $\mathscr{L}_\varepsilon$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ вытекает из условий (7.32), которые справедливы, поскольку для любой почти-периодической функции $f(t)$ имеем $f\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \to \langle f \rangle$ слабо в $L^2(0, 1)$ при $\varepsilon \to 0$ Теорема доказана

Рассмотрим примеры, когда G-предельный оператор $\widehat{\mathscr{L}}$ имеет коэффициенты, зависящие от x.

Введем класс $\mathscr{A}_\sigma$, состоящий из функций $f(t, y)$, таких, что существуют функции $c_f(y)$, $g_f(t, y)$, для которых

$$\int_0^t f(s, y)\, ds - c_f(y)\, t = g_f(t, y), \tag{7.44}$$

причем $f(t, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y_l}$, $c_f(y)$, $\frac{\partial c_f(y)}{\partial y_l}$, g_f, $\frac{\partial g_f}{\partial y_l}$, $l=1, \ldots, n$, являются непрерывными по Гельдеру по $y \in \overline{\Omega}$ равномерно по $t \in [0, 1]$ и

$$|g_f(t, y)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_l} g_f(t, y) \right| \leqslant c_0 (1 + |t|)^{1-\sigma}, \tag{7.45}$$

где постоянные c_0, σ не зависят от t, $\sigma \in (0, 1]$.

Положим

$$\langle f(\cdot, y) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s, y)\, ds.$$

Очевидно, что если $f \in \mathscr{A}_\sigma$, то $\langle f(\cdot, y) \rangle = c_f(y)$.

Рассмотрим примеры функций, принадлежащих $\mathscr{A}_\sigma$

1. Функции $f(t, y)$ из класса $C^{1,\beta}$ и 1-периодические по t принадлежат $\mathscr{A}_\sigma$ при $\sigma=1$.
2. Пусть $f(t)$ имеет вид $f(t) = M + \varphi(t)$, где $M = \mathrm{const}$, $|\varphi(t)| \leqslant C(1+|t|)^{-N}$, $N > 0$ Легко проверить, что $f \in \mathscr{A}_1$, если $N > 1$; $f \in \mathscr{A}_\sigma$ для любого $\sigma \in (0, 1)$, если $N=1$; $f \in \mathscr{A}_N$, если $0 < N < 1$.
3. Сумма $\psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \in \mathscr{A}_{\sigma_1}$, $\psi_2 \in \mathscr{A}_{\sigma_2}$, принадлежит $\mathscr{A}_{\sigma_3}$, $\sigma_3 = \min(\sigma_1, \sigma_2)$, σ_1, $\sigma_2 \in (0, 1]$.

Л е м м а 7.12 *Пусть $f(t, y) \in \mathscr{A}_\sigma$ и $\sigma \in (0, 1]$, $\langle f(\cdot, y) \rangle = 0$ для любого $y \in \overline{\Omega}$ Тогда для функции $f(\varepsilon^{-1}\tau, y)$ имеем*

$$\left| \int_0^T \frac{\partial^\alpha}{\partial y_l^\alpha} f(\varepsilon^{-1}\tau, y)\, d\tau \right| \leqslant c_1 \varepsilon^\sigma (T+1), \quad \alpha = 0,\ 1;\ l = 1, \ldots, n, \tag{7.46}$$

$$f(\varepsilon^{-1}\tau, y) \to 0, \ \frac{\partial}{\partial y_l} f(\varepsilon^{-1}\tau, y) \to 0 \ \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{7.47}$$

как функции τ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом $y \in \overline{\Omega}$, где постоянная c_1 не зависит от ε, y, T.

Д о к а з а т е л ь с т в о Установим неравенство (7.46) при $\alpha=0$. Поскольку $\langle f(\cdot, y) \rangle = 0$, то в условии (7.44) $c_f(y) = 0$ и, значит,

$\int\limits_0^t f(s, y)\,ds = g(t, y)$. Полагая $s=\tau/\varepsilon$, получим $\varepsilon^{-1}\int\limits_0^{\varepsilon t} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)d\tau = g(t, y)$. При $T=\varepsilon t$ отсюда получаем, учитывая (7.45), что

$$\left|\int\limits_0^T f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)d\tau\right| = \left|\varepsilon g\left(\frac{T}{\varepsilon}, y\right)\right| \leqslant \varepsilon C_0\left(1+\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1-\sigma} \leqslant C_1\varepsilon^{\sigma}(T+1).$$

Таким образом, оценка (7.46) доказана при $\alpha=0$. При $\alpha=1$ (7.46) доказывается аналогично, так как (7.44) можно почленно дифференцировать по y_l и при этом $\partial c_f(y)/\partial y_l=0$.

Сходимость (7.47) есть простое следствие неравенств (7.46). Действительно, для характеристических функций $\chi_{[a,b]}(s)$ на (0, 1) при $0<a<b<1$, очевидно, $\int\limits_0^1 \frac{\partial^\alpha f}{\partial y_l^\alpha}\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\right)\chi_{[a,b]}(s)\,ds \to 0$ при $\varepsilon\to 0$ в силу (7.46). Приближая любую $v\in L^2(0, 1)$ линейными комбинациями характеристических функций и учитывая ограниченность f, $\partial f/\partial y_l$, получим, что $\int\limits_0^1 \frac{\partial^\alpha f}{\partial y_l^\alpha}\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\right)v(s)\,ds \to 0$.

Лемма доказана.

Пусть $B(t, y)$ — матрица с элементами $B_{ij}(t, y)$. Через $\langle B(\cdot, y)\rangle$ обозначается матрица с элементами $\langle B_{ij}(\cdot, y)\rangle$.

Теорема 7.13. *Пусть элементы матриц A_ε^{ij}, отвечающих оператору $\mathscr{L}_\varepsilon$, имеют вид*

$$a^{ij}_{\varepsilon,hk} \equiv a^{ij}_{hk}\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, x\right) \equiv a^{ij}_{hk}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), \quad t=\varphi(x), \quad y=(x_1, \ldots, x_n)$$

и пусть

$$B^0_\varepsilon(t, y) \equiv B^0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right) \equiv \left[\varphi_l(y)\varphi_k(y)A^{kl}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\right]^{-1},$$

$$B^s_\varepsilon(t, y) \equiv B^s\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right) \equiv \left[\varphi_l(y)\varphi_k(y)A^{kl}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\right]^{-1}\varphi_p(y)A^{ps}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right); \tag{7.48}$$

$$B^{is}_\varepsilon(t, y) \equiv B^{is}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right) \equiv$$
$$\equiv \varphi_j(y)A^{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\left[\varphi_l(y)\varphi_k(y)A^{kl}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\right]^{-1}\varphi_p(y)A^{ps}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right) -$$
$$-A^{is}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right).$$

Предположим, что элементы матриц $B^0(\tau, y)$, $B^s(\tau, y)$, $B^{is}(\tau, y)$ принадлежат классу $\mathscr{A}_\sigma$ при некотором $\sigma\in(0, 1]$. Тогда последовательность операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$, отвечающих матрицам коэффициентов

$A^{ij}\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, x\right)$, *сильно G-сходится к оператору* $\widehat{\mathscr{L}}$ *с коэффициентами*

$$\widehat{A}^{is}(x)=\langle B^i(\cdot, x)\rangle^* \langle B^0(\cdot, x)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, x)\rangle-\langle B^{is}(\cdot, x)\rangle, \quad (7.49)$$

при этом δ_ε *в теореме* 7.1 *удовлетворяет неравенству* $\delta_\varepsilon \leqslant C\varepsilon^\sigma$, *где* $C=\mathrm{const}$ *и не зависит от* ε.

Доказательство. По лемме 7.12 имеем

$$B^s\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\to\langle B^s(\cdot, y)\rangle, \quad s=0, 1, \ldots, n,$$

$$B^{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)\to\langle B^{ij}(\cdot, y)\rangle, \quad i, j=1, \ldots, n,$$

при $\varepsilon\to 0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом $y\in\overline{\Omega}$. Поэтому согласно теореме 7.9 можно взять

$$\widehat{B}^s(t, y)=\langle B^s(\cdot, y)\rangle, \; \widehat{B}^{ij}(t, y)=\langle B^{ij}(\cdot, y)\rangle, \quad s=0, 1, \ldots, n;$$
$$i, j=1, \ldots, n.$$

В силу формулы (7.43) коэффициенты G-предельной системы имеют вид (7.49).

Покажем, что δ_ε в теореме 7.1 удовлетворяет оценке $\delta_\varepsilon\leqslant C\varepsilon^\sigma$. Легко видеть, что

$$\varphi_p(y)\widehat{A}^{ps}(y)=\langle B^0(\cdot, y)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, y)\rangle,$$

$$\varphi_j(y)\widehat{A}^{ij}(y)=\langle B^i(\cdot, y)\rangle^*\langle B^0(\cdot, y)\rangle^{-1}.$$

Поэтому матрицы $N_j^\varepsilon(t, y)$, $M_{is}^\varepsilon(t, y)$, заданные формулами (7.5), согласно (7.48) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} N_j^\varepsilon(t, y)&=\int_0^t\left[B^0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)\langle B^0(\cdot, y)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, y)\rangle-B^s\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)\right]d\tau,\\ M_{is}^\varepsilon(t, y)&=\int_0^t\left[\left(B^i\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)\right)^*\langle B^0(\cdot, y)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, y)\rangle-\right.\\ &\left.-\langle B^i(\cdot, y)\rangle^*\langle B^0(\cdot, y)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, y)\rangle+\langle B^{is}(\cdot, y)\rangle-B^{is}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)\right]d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (7.50)$$

Обозначая подынтегральные выражения в (7.50) через $n_j(\tau/\varepsilon, y)$, $m_{ij}(\tau/\varepsilon, y)$ соответственно, имеем $\langle n_j(\cdot, y)\rangle=\langle m_{ij}(\cdot, y)\rangle=0$ и элементы матриц $n_j(t, y)$, $m_{ij}(t, y)$ суть функции класса $\mathscr{A}_\sigma$. Поэтому из оценок (7.46) и определения δ_ε получаем, что $\delta_\varepsilon\leqslant C\varepsilon^\sigma$. Теорема доказана.

Следствие 7.14. *В случае, когда в теореме* 7.13 $\varsigma(x)=x_1$, *коэффициенты G-предельной системы определяются по формуле*

$$\widehat{A}^{ij}(x)=\langle A^{ij}(\cdot,\ x)\rangle-\langle A^{i1}(\cdot,\ x)(A^{11}(\cdot,\ x))^{-1}A^{1j}(\cdot,\ x)\rangle+$$
$$+\langle A^{i1}(\cdot,\ x)(A^{11}(\cdot,\ x))^{-1}\rangle\langle(A^{11}(\ ,\ x))^{-1}\rangle^{-1}\langle(A^{11}(\cdot,\ x))^{-1}A^{1j}(\cdot,\ x)\rangle.$$

§ 8. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИЛЬНО G-СХОДЯЩЕЙСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

8.1. Эллиптические операторы в многомерных областях

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ с гладкой границей дифференциальные операторы вида

$$\mathcal{L}(u)=\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m,\\ |\beta|\leqslant m}}(-1)^{\alpha}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}u),\quad x\in\Omega, \tag{8.1}$$

где $a_{\alpha\beta}(x)$ — ограниченные измеримые функции в Ω, α, $\beta\in\mathbf{Z}^n_+$ $|\alpha|=$ $=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $u(x)$ — скалярная функция из $H^m_0(\Omega)$.

Будем говорить, что дифференциальный оператор $\mathcal{L}:H^m_0(\Omega)\to$ $\to H^{-m}(\Omega)$ вида (8.1) принадлежит классу $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$, если его коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|a_{\alpha\beta}(x)|\leqslant\lambda_1,\quad |\alpha|,\quad |\beta|\leqslant m,$$

$$(\mathcal{L}^0(u),\ u)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_{\Omega}a_{\alpha\beta}D^{\beta}uD^{\alpha}u\,dx\geqslant\lambda_0\|u\|^2_{H^m(\Omega)}-\lambda_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

для любой $u\in C^{\infty}_0(\Omega)$, где λ_0, λ_1, $\lambda_2=\mathrm{const}>0$ и не зависят от u. Из последнего неравенства следует (см [26; 10]), что для любого вектора $\xi\in\mathbf{R}^n$ и $x\in\Omega$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\geqslant C_0|\xi|^{2m},$$

где $C_0=\mathrm{const}>0$, $\xi^{\alpha}=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, т. е. оператор $\mathcal{L}$ из класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ является эллиптическим.

Дадим определение сильной G-сходимости последовательности операторов $\{\mathcal{L}_k\}$ [22]. Будем говорить, что последовательность оператора $\{\mathcal{L}_k\}$ из класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ сильно G-сходится к оператору $\widehat{\mathcal{L}}$ из класса $E(\widehat{\lambda}_0,\ \widehat{\lambda}_1,\ \widehat{\lambda}_2)$, если для любого $\lambda\geqslant\widetilde{\lambda}$ ($\widetilde{\lambda}=\mathrm{const}>$ >0) и $f\in H^{-m}(\Omega)$ последовательность решений задач Дирихле

$$(\mathcal{L}_k+\lambda)(u_k)=f,\quad u_k\in H^m_0(\Omega), \tag{8.2}$$

слабо в $H_0^m(\Omega)$ сходится к решению задачи Дирихле

$$(\widehat{\mathscr{L}}+\lambda)(u)=f,\quad u\in H_0^m(\Omega), \tag{8.3}$$

и, кроме того, последовательности функций

$$\Gamma_\alpha(u_k,\mathscr{L}_k)\equiv\sum_{|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}^k(x)D^\beta u_k,\quad |\alpha|\leqslant m,$$

сходятся при $k\to\infty$ к функциям

$$\Gamma_\alpha(u,\widehat{\mathscr{L}})\equiv\sum_{|\beta|\leqslant m}\widehat{a}_{\alpha\beta}(x)D^\beta u,\quad |\alpha|\leqslant m,$$

слабо в $L^2(\Omega)$.

Здесь $\{a_{\alpha\beta}^k(x)\}$ и $\{\widehat{a}_{\alpha\beta}(x)\}$ — матрицы коэффициентов операторов $\mathscr{L}_k$ и $\widehat{\mathscr{L}}$ соответственно. Из приведенного определения видно, что условие сильной G-сходимости отличается от условия обычной G-сходимости требованием сходимости функций $\Gamma_\alpha(u_k,\mathscr{L}_k)$ к $\Gamma_\alpha(u,\widehat{\mathscr{L}})$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $k\to\infty$.

В работе [22] доказано, что сильная G-сходимость $\mathscr{L}_k$ к $\widehat{\mathscr{L}}$ при $k\to\infty$ эквивалентна следующему условию («условие N»).

Существуют последовательности функций $\{N_\gamma^k(x)\}$, такие, что при $k\to\infty$

N1. $\quad N_\gamma^k\in H^m(\Omega),\ N_\gamma^k\to 0$ слабо в $H^m(\Omega)$, $|\gamma|<m$;

N2. $$\widehat{a}_{\alpha\beta}^k\equiv\sum_{|\gamma|=m}a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k+a_{\alpha\beta}^k\to\widehat{a}_{\alpha\beta}\ \text{слабо в}\ L^2(\Omega),\quad |\alpha|,\ |\beta|\leqslant m;$$

N3. $$\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(\widehat{a}_{\alpha\beta}^k-\widehat{a}_{\alpha\beta})\to 0\ \text{по норме}\ H^{-m}(\Omega),\quad |\beta|\leqslant m.$$

Аналогичное условие для системы теории упругости приведено в § 9 гл. I.

Если наложить дополнительные условия на функции N_γ^k, то получим более сильное условие («условие N'»), при выполнении которого можно оценить разность решений задач (8.2) и (8.3), а не только утверждать слабую сходимость u_k к u при $k\to\infty$ в $H_0^m(\Omega)$.

Будем говорить, что последовательность операторов $\{\mathscr{L}_k\}$ из класса $E(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$, которым соответствуют матрицы коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}^k(x)\}$, $|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$, удовлетворяет условию N' в области Ω, если существует оператор $\widehat{\mathscr{L}}\in E(\widehat{\lambda}_0,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)$ с матрицей коэффициентов $\{\widehat{a}_{\alpha\beta}(x)\}$ и система функций $N_\gamma^k\in H^m(\Omega)$, $|\gamma|\leqslant m$, удовлетворяющие при $k\to\infty$ условиям:

N′1. $\quad D^\alpha N_\gamma^k\in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha|\leqslant m,\ |\gamma|\leqslant m$,

$$D^\alpha N_\gamma^k\to 0\ \text{по норме}\ L^\infty(\Omega)\ \text{при}\ |\alpha|<m,\ |\gamma|\leqslant m;$$

N′2. $\widehat{a}^k_{\alpha\beta} \equiv \sum\limits_{|\gamma|=m} a^k_{\alpha\gamma} D^\gamma N^k_\beta + a^k_{\alpha\beta} \to \widehat{a}_{\alpha\beta}$ по норме $H^{-1,\infty}(\Omega)$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$;

N′3. $\sum\limits_{|\alpha|=m} D^\alpha (\widehat{a}^k_{\alpha\beta} - \widehat{a}_{\alpha\beta}) \to 0$ по норме $H^{-m,\infty}(\Omega)$, $|\beta| \leqslant m$.

(Определение пространств $H^{-m,\infty}(\Omega)$ см. в § 9.2 гл. I.) Для простоты предполагаем, что коэффициенты $\widehat{a}_{\alpha\beta}$ и граница области Ω — бесконечно гладкие.

Введем также числа, характеризующие скорость сходимости в условиях $N'1$, $N'2$, $N'3$. Положим

$$\alpha_k = \max_{\substack{|\alpha|\leqslant m \\ |\gamma|\leqslant m}} \|D^\alpha N^k_\gamma\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{8.4}$$

$$\beta^{(1)}_k = \max_{\substack{|\alpha|=m, \\ |\beta|\leqslant m}} \|\widehat{a}^k_{\alpha\beta} - \widehat{a}_{\alpha\beta}\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}, \tag{8.5}$$

$$\beta^{(2)}_k = \max_{\substack{|\alpha|<m, \\ |\beta|\leqslant m}} \|\widehat{a}^k_{\alpha\beta} - \widehat{a}_{\alpha\beta}\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}, \tag{8.6}$$

$$\gamma_k = \max_{|\beta|\leqslant m} \Big\| \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha (\widehat{a}^k_{\alpha\beta} - \widehat{a}_{\alpha\beta}) \Big\|_{H^{-m,\infty}(\Omega)}. \tag{8.7}$$

Теорема 8.1. *Пусть для операторов $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$ выполнено условие N'. Тогда при $s \leqslant m-1$ и $\mu > \widetilde{\mu}$ ($\widetilde{\mu}$ — некоторая постоянная) для решений задач Дирихле*

$$(\mathscr{L}_k + \mu)(u_k) = f \text{ в } \Omega, \; u_k \in H^m_0(\Omega), \tag{8.8}$$

$$(\widehat{\mathscr{L}} + \mu)(u) = f \text{ в } \Omega, \; u \in H^m_0(\Omega), \; f \in H^1(\Omega) \tag{8.9}$$

имеют место оценки

$$\Big\| u_k - u - \sum_{|\gamma|\leqslant m} N^k_\gamma D^\gamma u \Big\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \|v_k\|_{H^m(\Omega)} + $$
$$+ K [\beta^{(1)}_k \|f\|_{H^1(\Omega)} + (\alpha_k + \beta^{(2)}_k + \gamma_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}], \tag{8.10}$$

$$\|u_k - u\|_{H^s(\Omega)} \leqslant \|v_k\|_{H^s(\Omega)} + K [\beta^{(1)}_k \|f\|_{H^1(\Omega)} + (\alpha_k + \beta^{(2)}_k + \gamma_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}], \tag{8.11}$$

где $K = \mathrm{const}$ не зависит от k, f, а через v_k обозначено решение задачи Дирихле

$$(\mathscr{L}_k + \mu)(v_k) = 0 \text{ в } \Omega, \; v_k - \sum_{|\gamma|\leqslant m} N^k_\gamma D^\gamma u \in H^m_0(\Omega). \tag{8.12}$$

Доказательство. Как известно (см., например, [53; 10]), для любого оператора $\mathscr{L} \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ существует постоянная $\widetilde{\mu}$, зависящая только от λ_0, λ_1, λ_2, такая, что при $\mu > \tilde{\mu}$ для решения задачи Дирихле

$$(\mathscr{L}+\mu)(w)=f,\ f\in H^{-m}(\Omega),\ w\in H_0^m(\Omega),$$

справедлива оценка

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C\,\|f\|_{H^{-m}(\Omega)}, \tag{8.13}$$

где постоянная C зависит только от λ_0, λ_1, λ_2 Пусть $\mu > \tilde{\mu} > 0$ — такая постоянная, что решения задачи Дирихле, отвечающие операторам $\mathscr{L}_k+\mu$, $\hat{\mathscr{L}}+\mu$, удовлетворяют неравенству (8.13) с общей для всех k постоянной $C>0$.

Далее используем следующие формулы Лейбница (см, например, [98]):

$$D^\alpha(uv)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}uD^\beta v, \tag{8.14}$$

$$vD^\alpha u=\sum_{\beta\leqslant\alpha}(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}[uD^\beta v], \tag{8.15}$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\dots\binom{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!},\ \alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_n!,$$

$\beta\leqslant\alpha$ означает, что $\beta_j\leqslant\alpha_j$ для каждого $j=1,\dots,n$.

Положим

$$u_k^1=u+\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^k D^\gamma u,$$

где u — решение задачи (8 9), N_γ^k — функции из условия N'. Пользуясь равенством (8.14), находим

$$(\mathscr{L}_k(u_k^1),v)\equiv\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m,\\|\beta|\leqslant m}}\int_\Omega a_{\alpha\beta}^k D^\beta u_k^1 D^\alpha v dx=\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}^k D^\beta u D^\alpha v dx+$$

$$+\int_\Omega\sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m,\\|\gamma|\leqslant m}}a_{\alpha\beta}^k\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\beta-\sigma}N_\gamma^k D^{\sigma+\gamma}uD^\alpha v dx=$$

$$=\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m,\\|\beta|\leqslant m}}\int_\Omega a_{\alpha\beta}^k D^\beta u D^\alpha v dx+\int_\Omega\sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m,\\|\gamma|\leqslant m}}a_{\alpha\beta}^k D^\beta N_\gamma^k D^\gamma u D^\alpha v dx+$$

$$+\int_\Omega\sum_{|\alpha|,\,|\beta|,\,|\gamma|\leqslant m}a_{\alpha\beta}^k\sum_{0\neq\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^{\beta-\sigma}N_\gamma^k)D^{\sigma+\gamma}uD^\alpha v dx. \tag{8.16}$$

Обозначим последний интеграл через $\mathcal{I}_0$. Тогда в силу (8.4) имеем

$$|\mathcal{I}_0| \leqslant C_1 \alpha_k \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)}, \tag{8.17}$$

где постоянная C_1 не зависит от k.

Из (8.16) далее получаем, меняя местами мультииндексы γ и β в предпоследнем интеграле:

$$(\mathcal{L}_k(u_k^1), v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m, \\ |\beta| \leqslant m}} \int_\Omega \widehat{a}_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m, \\ |\beta| \leqslant m}} \Big(a_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta} + \sum_{|\gamma| \leqslant m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k \Big) D^\beta u D^\alpha v dx + \mathcal{I}_0 =$$

$$= (\widehat{\mathcal{L}}(u), v) + \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leqslant m}} \Big(a_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta} + \sum_{|\gamma| = m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k \Big) D^\beta u D^\alpha v dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| < m, \\ |\beta| \leqslant m}} \Big(a_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta} + \sum_{|\gamma| = m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k \Big) D^\beta u D^\alpha v dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m, \\ |\beta| \leqslant m}} \sum_{|\gamma| < m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k D^\beta u D^\alpha v dx + \mathcal{I}_0 =$$

$$= (\widehat{\mathcal{L}}(u), v) + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_0, \tag{8.18}$$

где через $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ обозначены соответственно интегралы в левой части последнего равенства

В силу (8.4) имеем

$$|\mathcal{I}_3| \leqslant \alpha_k \|u\|_{H^m(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{8.19}$$

Из (8.6) согласно лемме 9 1 гл I получаем

$$|\mathcal{I}_2| \leqslant \beta_k^{(2)} \|u\|_{H^{m+1}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{8.20}$$

Оценим $\mathcal{I}_1$. Пользуясь равенством (8.15), находим

$$\mathcal{I}_1 = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leqslant m}} (\widehat{a}_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta}) D^\beta u D^\alpha v dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leqslant m}} (\widehat{a}_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta}) \sum_{\sigma \leqslant \alpha} (-1)^\sigma \binom{\alpha}{\sigma} D^{\alpha-\sigma} (v D^{\sigma+\beta} u) dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leqslant m}} (\widehat{a}_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta}) D^\alpha (v D^\beta u) dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leqslant m}} (\widehat{a}_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta}) \sum_{0 \neq \sigma \leqslant \alpha} (-1)^{|\sigma|} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\alpha-\sigma} (v D^{\sigma+\beta} u) dx. \tag{8.21}$$

Применяя лемму 9 6 гл. I и равенства (8 7), (8.5) для оценки первого и второго интегралов в правой части этого равенства, получаем

$$|\mathcal{I}_1| \leqslant C_1 [\gamma_k \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} + \beta_k^{(1)} \|v\|_{H^m(\Omega)} \|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)}]. \quad (8.22)$$

Таким образом,

$$((\widehat{\mathcal{L}}_k + \mu)(u_k^1), v) = ((\widehat{\mathcal{L}} + \mu)(u), v) + q_k(u, v)$$

для любой $v \in H_0^m(\Omega)$, где

$$|q_k(u, v)| \leqslant C_2 [\alpha_k \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} + \beta_k^{(2)} \|u\|_{H^{m+1}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} +$$
$$+ \gamma_k \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} + \beta_k^{(1)} \|v\|_{H^m(\Omega)} \|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)}]. \quad (8.23)$$

Поскольку $u_k^1 - v_k - u_k \in H_0^m(\Omega)$ и

$$((\mathcal{L}_k + \mu)(u_k^1 - v_k - u_k), v) = ((\mathcal{L}_k + \mu)(u_k^1), v) - ((\mathcal{L}_k + \mu)(u_k), v) =$$
$$= (f, v) - (f, v) + q_k(u, v),$$

то, полагая в этом равенстве $v = u_k^1 - v_k - u_k$ и пользуясь оценками (8 23), (8.13), получаем

$$\|u_k^1 - v_k - u_k\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C_3 [(\alpha_k + \beta_k^{(2)} + \gamma_k) \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} + \beta_k^{(1)} \|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)}].$$

Отсюда следует оценка (8 10), так как для решения задачи (8 9) справедлива априорная оценка (см , например, [53])

$$\|u\|_{H^{2m+s}(\Omega)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^s(\Omega)}. \quad (8.24)$$

При $s \leqslant m-1$ имеем в силу (8.4)

$$\|u^k - u\|_{H^s(\Omega)} \leqslant \|v_k\|_{H^s(\Omega)} + \Big\| \sum_{|\gamma| \leqslant m} N_\gamma^k D^\gamma u \Big\|_{H^s(\Omega)} +$$
$$+ C_5 [\beta_k^{(1)} \|f\|_{H^1(\Omega)} + (\alpha_k + \beta_k^{(2)} + \gamma_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}] \leqslant$$
$$\leqslant \|v_k\|_{H^s(\Omega)} + C [\beta_k^{(1)} \|f\|_{H^1(\Omega)} + (\alpha_k + \beta_k^{(2)} + \gamma_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}].$$

Теорема доказана.

Укажем простейший случай выполнения условий N', когда

$$a_{\alpha\beta}^k(x) \to \widehat{a}_{\alpha\beta}(x) \text{ при } k \to \infty$$

по норме пространства $L^\infty(\Omega)$. В этом случае можно положить $N_\gamma^k \equiv 0$, и условия $N'1$—$N'3$ будут, очевидно, выполнены, причем

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k^{(1)} \leqslant C\delta_k, \quad \beta_k^{(2)} \leqslant C\delta_k, \quad \gamma_k \leqslant C\delta_k,$$

где C постоянная, не зависящая от k,

$$\delta_k = \max_{\substack{|\alpha|\leqslant m,\\ |\beta|\leqslant m}} \|a^k_{\alpha\beta}-\widehat{a}_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Согласно теореме 8 1

$$\|u_k-u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant K_1\delta_k\,\|f\|_{H^1(\Omega)},\quad s\leqslant m-1.$$

В действительности, в рассматриваемом случае выполнено более сильное неравенство

$$\|u_k-u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant K_1'\delta_k\,\|f\|_{L^2(\Omega)},\quad s\leqslant m-1,\ K_1,\ K_1'=\text{const}. \tag{8.25}$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что в доказательстве теоремы 8.1 норма $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ оценивает $\|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)}$ в неравенстве (8.22). Норма $\|u\|_{H^{2m+1}}$ возникает при оценке первого интеграла в правой части (8.21). Легко видеть, что в данном случае этот интеграл оценивается величиной

$$\delta_k\,\|u\|_{H^{2m}(\Omega)}\,\|v\|_{H^m(\Omega)}.$$

Рассмотрим теперь менее простой случай, когда выполнено условие N'. Предположим, что коэффициенты $a^k_{\alpha\beta}(x)$ операторов $\mathscr{L}_k$ зависят только от переменной x_1, т. е.

$$a^k_{\alpha\beta}(x)=a^k_{\alpha\beta}(x_1).$$

Пусть коэффициенты $\widehat{a}_{\alpha\beta}(x_1)$ оператора $\widehat{\mathscr{L}}$ таковы, что для всех

$$|\alpha|\leqslant m,\quad |\beta|\leqslant m,\quad \sigma=(m,0,\ldots,0)$$

$$\frac{1}{a^k_{\sigma\sigma}}\to\frac{1}{\widehat{a}_{\sigma\sigma}},\quad \frac{a^k_{\sigma\beta}}{a^k_{\sigma\sigma}}\to\frac{\widehat{a}_{\sigma\beta}}{\widehat{a}_{\sigma\sigma}},\quad \frac{a^k_{\alpha\sigma}}{a^k_{\sigma\sigma}}\to\frac{\widehat{a}_{\alpha\sigma}}{\widehat{a}_{\sigma\sigma}}, \tag{8.26}$$

$$a^k_{\alpha\beta}-\frac{a^k_{\alpha\sigma}a^k_{\sigma\beta}}{a^k_{\sigma\sigma}}\to\widehat{a}_{\alpha\beta}-\frac{\widehat{a}_{\alpha\sigma}\widehat{a}_{\sigma\beta}}{\widehat{a}_{\sigma\sigma}}\ \text{слабо в}\ L^2[0,l]$$

при $k\to\infty$, l — такое число, что область Ω заключена в слое $\{x: 0<x_1<l\}$.

Определим функции $N^k_\beta(x_1)$ как решения уравнения

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m,\\ |\gamma|=m}} D^\alpha(a^k_{\alpha\gamma}D^\gamma N^k_\beta)=\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(\widehat{a}_{\alpha\beta}-a^k_{\alpha\beta}),\quad |\beta|\leqslant m, \tag{8.27}$$

такие, что

$$\frac{d^m}{dx_1^m} N_\beta^k(x_1) = \frac{\widehat{a}_{\sigma\beta} - a_{\sigma\beta}^k}{a_{\sigma\sigma}^k}, \quad x_1 \in [0, l], \tag{8.28}$$

$$\frac{d^s}{dx_1^s} N_\beta^k(0) = 0, \quad s = 1, \ldots, m-1. \tag{8.29}$$

Отсюда вытекает, что справедливо условие $N'3$ и $\beta_k^{(1)} \to 0$ при $k \to \infty$, $\gamma_k = 0$ в равенствах (8.5), (8.7).

В силу условий (8.26) правая часть (8.28) стремится к нулю при $k \to \infty$ слабо в $L^2[0, l]$. Поэтому

$$\frac{d^s}{dx_1^s} N_\beta^k(x_1) \to 0 \text{ при } k \to \infty \text{ по норме } C^0([0, l])$$

$s = 0, 1, \ldots, m-1$. Очевидно, что в силу (8.28), (8.4) имеем

$$\alpha_k = \sup_{\substack{x_1 \in [0, l], \\ |\beta| \leqslant m,\ s \leqslant m-1}} \left| \frac{d^s}{dx_1^s} N_\beta^k(x_1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\substack{|\beta| \leqslant m \\ x_1 \in [0, l]}} \left| \int_0^{x_1} \frac{\widehat{a}_{\sigma\beta}(t) - a_{\sigma\beta}^k(t)}{a_{\sigma\sigma}^k(t)} \, dt \right|, \quad C = \mathrm{const}, \tag{8.30}$$

причем $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, условие $N'1$ также имеет место. Проверим выполнение условия $N'2$. Пользуясь (8.28), получаем

$$\widehat{a}_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\sigma}^k D^\sigma N_\beta^k + a_{\alpha\beta}^k - \widehat{a}_{\alpha\beta} =$$

$$= \left(\frac{a_{\alpha\sigma}^k \widehat{a}_{\sigma\beta}}{a_{\sigma\sigma}^k} - \widehat{a}_{\alpha\beta} \right) - \left(\frac{a_{\alpha\sigma}^k a_{\sigma\beta}^k}{a_{\sigma\sigma}^k} - a_{\alpha\beta}^k \right).$$

Согласно (8.26) имеем $\widehat{a}_{\alpha\beta}^k(x_1) - \widehat{a}_{\alpha\beta}(x_1) \to 0$ слабо в $L^2(0, l)$. Поэтому

$$\Phi_{\alpha\beta}^k(x_1) = \int_0^{x_1} (\widehat{a}_{\alpha\beta}^k(s) - \widehat{a}_{\alpha\beta}(s)) \, ds \to 0 \text{ по норме } C^0([0, l]).$$

Поскольку $\widehat{a}_{\alpha\beta}^k(x_1) - \widehat{a}_{\alpha\beta}(x_1) = \frac{d}{dx_1} \Phi_{\alpha\beta}^k(x_1)$, то в (8.6) можно считать, что

$$\beta_k^{(2)} = C \max_{\substack{|\alpha| \leqslant m, \\ |\beta| \leqslant m}} \left| \int_0^{x_1} \left(\frac{a_{\alpha\sigma}^k(s) \, \widehat{a}_{\sigma\beta}(s)}{a_{\sigma\sigma}^k(s)} - \widehat{a}_{\alpha\beta}(s) - \left(\frac{a_{\alpha\sigma}^k(s) \, a_{\sigma\beta}^k(s)}{a_{\sigma\sigma}^k(s)} - a_{\alpha\beta}^k(s) \right) \right] ds, \right.$$

причем $\beta_k^{(2)} \to 0$ при $k \to \infty$, $C = \mathrm{const}$.

Теперь для нахождения эффективной оценки отклонения $u_k(x)$ от $u(x)$ осталось оценить величину $\|v_k\|_{H^m(\Omega)}$. Имеем

$$\|v_k\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C_0 \Big\| \sum_{|\beta|\leqslant m} N_\beta^k(x_1) D^\beta u \Big\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big\| \sum_{|\beta|\leqslant m} N_\beta^k D^\beta u \Big\|^{1/2}_{H^{m-1}(\partial\Omega)} \Big\| \sum_{|\beta'|\leqslant m} N_\beta^k D^\beta u \Big\|^{1/2}_{H^m(\partial\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \alpha_k^{1/2} \|u\|^{1/2}_{H^{2m-1}(\partial\Omega)} \|u\|^{1/2}_{H^{2m}(\partial\Omega)} \leqslant C_3 \alpha_k^{1/2} \|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)} \leqslant C_4 \alpha_k^{1/2} \|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

При выводе последних неравенств мы воспользовались определением α_k, априорной оценкой (8.24), неравенством

$$\|u\|^2_{H^s(\partial\Omega)} \leqslant C_5 \|u\|_{H^{s-t}(\partial\Omega)} \|u\|_{H^{s+t}(\partial\Omega)}, \quad s>0,\ t>0 \quad [10],$$

а также равномерной по k ограниченностью производных функций N_β^k до порядка m включительно.

Определим теперь величину δ_k, полагая $\delta_k = \max\{\alpha_k, \beta_k^{(2)}\}$. Тогда на основании теоремы 8.1 получаем неравенства

$$\|u_k - u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant C_6 \delta_k^{1/2} \|f\|_{H^1(\Omega)}, \tag{8.31}$$

$$\Big\| u_k - u - \sum_{|\beta|\leqslant m} N_\beta^k(x_1) D^\beta u \Big\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C_7 \delta_k^{1/2} \|f\|_{H^1(\Omega)}, \quad C_j = \mathrm{const}.$$

8.2. Обыкновенные дифференциальные операторы

Результаты п. 8 1 для эллиптических операторов высокого порядка могут быть уточнены для обыкновенных дифференциальных операторов. Приведем здесь некоторые теоремы в этом направлении.

Пусть $\Omega=(0, 1)$ и $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — обыкновенные дифференциальные операторы:

$$\mathscr{L}_k(u) = \sum_{p,q\leqslant m} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\left(a_{pq}^k(x) \frac{d^q u}{dx^q}\right), \quad a_{mm}^k \neq 0, \tag{8.32}$$

$$\widehat{\mathscr{L}}(u) = \sum_{p,q\leqslant m} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\left(\widehat{a}_{pq}(x) \frac{d^q u}{dx^q}\right), \quad x\in(0, 1),\ \widehat{a}_{mm}\neq 0. \tag{8.33}$$

Теорема 8.2. *Для решений u_k и u задач Дирихле*

$$(\mathscr{L}_k+\mu)(u_k)=f, \quad (\widehat{\mathscr{L}}+\mu)(u)=f, \quad u_k, u\in H_0^m(0, 1), \tag{8.34}$$

где $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — обыкновенные дифференциальные операторы вида (8.32), (8.33), *выполняются оценки*

$$\|u_k - u\|_{H^s(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\Delta_k, \quad s=0, \dots, m-1, \tag{8.35}$$

$$\Big\| u_k - u - \sum_{p\leqslant m} N_p^k \frac{d^p u}{dx^p}\Big\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\Delta_k, \tag{8.36}$$

где постоянная C не зависит от f, k,

$$\Delta_k = \max_{\substack{x\in[0,1],\\ p=1,\dots,m}} \left| \int_0^x \left(\frac{\widehat{a}_{mp}}{a_{mm}^k} - \frac{a_{mp}^k}{a_{mm}^k} \right) dt \right| +$$

$$+ \max_{\substack{x\in[0,1]\\ p<m,\, q\leqslant m}} \left| \int_0^x \left[\left(\frac{a_{pm}^k \widehat{a}_{mq}}{a_{mm}^k} - \widehat{a}_{pq} \right) - \left(\frac{a_{pm}^k a_{mq}^k}{a_{mm}^k} - a_{pq}^k \right) \right] dt \right|, \tag{8.37}$$

функции $N_p{}^k$ являются решениями уравнений

$$\frac{d^m N_p^k}{dx^m} = \frac{\widehat{a}_{mp}}{a_{mm}^k} - \frac{a_{mp}^k}{a_{mm}^k} \tag{8.38}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^j N_p^k}{dx^j}\right|_{x=0} = 0, \quad j=0, \dots, m-1. \tag{8.39}$$

Доказательство. В силу результатов, установленных выше для одного эллиптического уравнения, коэффициенты которого зависят только от одного переменного, легко видеть, что для доказательства оценок (8.35), (8.36) нужно оценить функцию v_k, которая является решением задачи (8.12):

$$\begin{gathered} \sum_{p,q\leqslant m} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\left(a_{pq}^k(x) \frac{d^q v_k}{dx^q} \right) + \mu v_k = 0 \text{ на } (0,\ 1), \\ v_k - \sum_{p=0}^m N_p^k \frac{d^p u}{dx^p} \in H_0^m(0,\ 1). \end{gathered} \tag{8.40}$$

Функции $N_p{}^k$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\frac{d^i N_p^k}{dx^i}\right|_{x=0} = 0, \quad \left| \left.\frac{d^i N_p^k}{dx^i}\right|_{x=1} \right| \leqslant \Delta_k, \quad i=0, \dots, m-1. \tag{8.41}$$

Кроме того, если $p\leqslant 2m-1$, то на основании леммы Соболева имеем

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{d^p n}{dx^p} \right| \leqslant c\,\|u\|_{H^{2m}(0,1)},$$

$c=\mathrm{const}$ и не зависит от u. Поэтому согласно оценке (8 24)

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right|\leqslant c_1\|f\|_{L^2(0,1)},\quad p\leqslant 2m-1. \tag{8.42}$$

Положим

$$\varphi_k=\sum_{p=0}^{m} N_p^k\frac{d^p u}{dx^p},$$

$$a_{i,k}^{(0)}=\left.\frac{d^i\varphi_k}{dx^i}\right|_{x=0},\quad a_{i,k}^{(1)}=\left.\frac{d^i\varphi_k}{dx^i}\right|_{x=1},\quad i=0,1,\ldots,m-1.$$

Тогда из неравенств (8.41), (8.42) вытекает, что

$$|a_{i,k}^{(0)}|,\quad |a_{i,k}^{(1)}|\leqslant c_2\Delta_k\|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{8.43}$$

Для любого $s=1, 2,\ldots$ можно построить непрерывный оператор продолжения P: $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to H^s(0, 1)$, ставящий в соответствие двум наборам чисел $\{a_i^{(0)}\}$, $\{a_i^{(1)}\}$, $i=0, 1,\ldots,m-1$, гладкую функцию $\varphi(x)$ на $[0, 1]$, такую, что

$$\left.\frac{d^i\varphi}{dx^i}\right|_{x=0}=a_i^{(0)},\quad \left.\frac{d^i\varphi}{dx^i}\right|_{x=1}=a_i^{(1)},\quad i=0,\ldots,m-1.$$

Для этого достаточно определить функцию $\varphi(x)$ формулой

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i^{(0)}e_i^{(0)}(x)+\sum_{i=0}^{m-1}a_i^{(1)}e_i^{(1)}(x), \tag{8.44}$$

где $e_i^{(0)}(x)$ и $e_i^{(1)}(x)$ — гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\left.\frac{d^i e_j^{(0)}}{dx^i}\right|_{x=0}=\delta_{ij},\quad \left.\frac{d^i e_j^{(0)}}{dx^i}\right|_{x=1}=0$$

$$\left.\frac{d^i e_j^{(1)}}{dx^i}\right|_{x=1}=\delta_{ij},\quad \left.\frac{d^i e_j^{(1)}}{dx^i}\right|_{x=0}=0,\quad i, j=0, 1,\ldots,m-1.$$

Поэтому функцию v_k можно рассматривать как решение задачи Дирихле

$$\mathcal{L}_k(v_k)+\mu v_k=0 \text{ на } (0, 1),\quad v_k-\varphi_k\in H_0^m(0, 1),$$

где через φ_k обозначены функции, построенные по формуле (8 44) при $a_i^{(0)}=a_{i,k}^{(0)}$, $a_i^{(1)}=a_{i,k}^{(1)}$. Тогда на основании (8.43) и (8.44)

$$\|\varphi_k\|_{H^m(0,1)}\leqslant c_3\max_{i=0,\ldots,m-1}\{|a_{i,k}^{(1)}|,\ |a_{i,k}^{(0)}|\}\leqslant c_4\Delta_k\|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{8.45}$$

Положим $w_k = v_k - \varphi_k$. Тогда функция w_k является решением задачи Дирихле

$$\mathscr{L}_k(w_k) = \mathscr{L}_k(\varphi_k), \quad w_k \in \overset{\circ}{H}{}^m_0(0, 1).$$

На основании неравенства (8.13) и оценки (8.45) имеем

$$\|\mathscr{L}_k(\varphi_k)\|_{H^{-m}(0,1)} \leqslant c_5 \|\varphi_k\|_{H^m(0,1)} \leqslant c_6 \Delta_k \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Следовательно, $\|w_k\|_{H^m} \leqslant c_7 \Delta_k \|f\|_{L^2(0,1)}$, и окончательно получаем $\|v_k\|_{H^m} \leqslant c_8 \Delta_k \|f\|_{L^2(0,1)}$.

Легко видеть, что $\gamma_k = \beta_k^{(1)} = 0$; $\beta_k^{(2)}$, $\alpha_k \leqslant c\Delta_k$, и поэтому из (8.10), (8.11) следуют оценки (8.35). Теорема доказана.

Замечание 8.3. В случае, когда коэффициенты $a^k_{pq}(x)$ операторов $\mathscr{L}_k$ имеют вид $a^k_{pq}(x) = a_{pq}(kx)$, где $a_{pq}(\xi)$ — 1-периодические ограниченные функции, из условия (8.26) вытекает, что коэффициенты G-предельного оператора $\hat{\mathscr{L}}$ вычисляются по формулам

$$\hat{a}_{mm} = \left\langle \frac{1}{a_{mm}} \right\rangle^{-1}, \quad \hat{a}_{mq} = \left\langle \frac{1}{a_{mm}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{a_{mq}}{a_{mm}} \right\rangle,$$

$$\hat{a}_{pm} = \left\langle \frac{1}{a_{mm}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{a_{pm}}{a_{mm}} \right\rangle,$$

$$\hat{a}_{pq} = \langle a_{pq} \rangle + \left\langle \frac{1}{a_{mm}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{a_{pm}}{a_{mm}} \right\rangle \left\langle \frac{a_{mq}}{a_{mm}} \right\rangle - \left\langle \frac{a_{pm} a_{mq}}{a_{mm}} \right\rangle, \quad p, q \leqslant m-1,$$

где $\langle f \rangle = \int\limits_0^1 f(\xi)\, d\xi$.

При этом оценки (8.31) принимают вид (поскольку $\Delta_k \leqslant ck^{-1}$):

$$\|u_k - u\|_{H^s(0,1)} \leqslant \frac{c}{k} \|f\|_{L^2(0,1)}, \quad s = 0, \ldots, m-1,$$

$$\left\| u_k - u - \sum_{p \leqslant m} N^k_p \frac{d^p u}{dx^p} \right\|_{H^m(0,1)} \leqslant \frac{c}{k} \|f\|_{L^2(0,1)},$$

где $c = \text{const} > 0$ и не зависит от k и f.

В случае, когда $\mathscr{L}_k = \frac{d}{dx}\left(a^k(x) \frac{d}{dx}\right)$, $\hat{\mathscr{L}} = \frac{d}{dx}\left(\hat{a}(x) \frac{d}{dx}\right)$, оценка (8.31) принимает простой вид:

$$\|u_k - u_0\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \max_{x \in [0,1]} \left| \int\limits_0^x \left(\frac{\hat{a}(t)}{a^k(t)} - 1 \right) dt \right| \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Рассмотрим этот случай более подробно, с тем чтобы получить явное выражение для постоянной C.

Легко видеть, что

$$N^k(x)=\int_0^x\left(\frac{\widehat{a}(t)}{a^k(t)}-1\right)dt$$

и

$$\mathscr{L}_k\left(u_k-u-N^k\frac{du}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(a^k(x)N^k(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right).$$

Поэтому

$$\left\|u_k-u-N^k\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\delta_0}\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\left(\frac{\widehat{a}(t)}{a^k(t)}-1\right)dt\right|\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L^2(0,1)}+\|v_k\|_{L^2(0,1)},$$

где $\delta_0\leqslant a^k(x)\leqslant M$ для любого $k=1, 2,\dots$ и функция v_k является решением задачи

$$\mathscr{L}_k(v_k)=0,\ x\in[0,1],$$

$$v_k(0)=N^k(0)\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0},\ v_k(1)=N^k(1)\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}.$$

Пусть $R>0$ такая постоянная, что

$$\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant R\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Существование R следует из оценки (8 24). Ниже покажем, как R зависит от коэффициентов уравнения $\widehat{\mathscr{L}}(u)=f$. Тогда

$$\|u_k-u\|_{L^2(0,1)}\leqslant\frac{MR+1}{\delta_0}\Delta_k\|f\|_{L^2(0,1)}+\|v_k\|_{L^2(0,1)},$$

где

$$\Delta_k=\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\left(\frac{\widehat{a}(t)}{a^k(t)}-1\right)dt\right|.$$

Осталось оценить величину $\|v_k\|_{L^2(0,1)}$. На основании принципа максимума имеем

$$\max_{x\in[0,1]}|v_k|\leqslant\max\{|v_k(0)|,\ |v_k(1)|\}.$$

Следовательно,

$$\max_{x\in[0,1]}|v_k|\leqslant\left|N^k(1)\frac{du(1)}{dx}\right|\leqslant\Delta_k\left(\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(0,1)}\right),$$

поскольку, как нетрудно видеть,

$$\left|\frac{du(1)}{dx}\right|\leqslant\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(0,1)}.$$

Таким образом,

$$\|u_k - u\|_{L^2(0,1)} \leqslant \left(\frac{MR+1}{\delta_0} + R + \frac{1}{\delta_0} \right) \Delta_k \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Постоянную $R > 0$ можно оценить через величины, зависящие от коэффициентов G-предельного оператора. В самом деле, возведем обе части равенства $\widehat{a}\,\frac{d^2u}{dx^2} = f - \frac{d\widehat{a}}{dx}\,\frac{du}{dx}$ в квадрат и проинтегрируем по отрезку [0, 1]. Получим, используя неравенство $2ab \leqslant \leqslant a^2 + b^2$,

$$\int_0^1 \widehat{a}^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx \leqslant 2 \int_0^1 f^2(x)\,dx + 2 \int_0^1 \left(\frac{d\widehat{a}}{dx} \right)^2 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx.$$

Отсюда следует, что

$$\delta_0^2 \left\| \frac{d^2u}{dx^2} \right\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant 2\|f\|^2_{L^2(0,1)} + 2P^2 \left\| \frac{du}{dx} \right\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \left(2 + \frac{2P^2}{\delta_0^2} \right) \|f\|^2_{L^2(0,1)},$$

где $P > 0$ — такая постоянная, что $\max\limits_{x \in [0,1]} \left| \frac{d\widehat{a}}{dx} \right| \leqslant P$. Таким образом,

$$\left\| \frac{d^2u}{dx^2} \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{2^{1/2}}{\delta_0} \left(1 + \frac{P^2}{\delta_0^2} \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Следовательно, в качестве R можно взять постоянную

$$R = \frac{2^{1/2}}{\delta_0} \left(1 + \frac{P^2}{\delta_0^2} \right)^{1/2}.$$

Итак, мы получили неравенство

$$\|u_k - u\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{(M + \delta_0) R + 2}{\delta_0} \Delta_k \|f\|_{L^2(0,1)},$$

где постоянные M, R, δ_0 оцениваются через коэффициенты предельного и допредельного операторов.

Глава III

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УСРЕДНЕНИЯ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Здесь мы приводим некоторые известные результаты из теории операторов, которые будут использоваться в дальнейшем. Кроме того, в § 1 гл. III дано доказательство теорем о сходимости собственных значений и собственных элементов для последовательности абстрактных операторов, определенных на разных пространствах. Подобные результаты для несамосопряженных операторов изложены в книге [11]. На этих теоремах основаны все дальнейшие исследования спектральных задач теории усреднения, а также вопросов о поведении спектров сингулярно возмущенных операторов, рассмотренных в данной главе.

1.1. Оценки разности собственных значений двух операторов, действующих в одном пространстве

Приведенные ниже теоремы из теории операторов используются в дальнейшем в отдельных частных случаях при исследовании спектральных задач теории усреднения и вопросов о поведении спектров сингулярно возмущенных дифференциальных операторов. Приводим для полноты эти теоремы для абстрактных операторов в их более общем виде.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_H$ и $\mathcal{A}$ — линейный непрерывный оператор $\mathcal{A}: H \to H$. Через $\|\mathcal{A}\|$ обозначается

$$\sup \frac{\|\mathcal{A}u\|_H}{\|u\|_H}, \quad \|u\|_H = (u, u)_H^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем $u \in H$, $u \neq 0$.

Пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{A}: H \to H$ обозначим $\mathcal{L}(H)$. Как известно, пространство $\mathcal{L}(H)$ с нормой $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\mathcal{A}\|$ является банаховым

Лемма 1.1 (см. [13]). *Пусть $\mathcal{A}: H \to H$ — линейный самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве*

H. Пусть существуют число $\mu>0$ и вектор $u\in H$, $\|u\|_H=1$, такие, что

$$\|\mathcal{A}u-\mu u\|_H\leqslant\alpha,\quad \alpha=\mathrm{const}>0. \tag{1.1}$$

Тогда найдется собственное значение μ_i оператора $\mathcal{A}$, такое, что

$$|\mu_i-\mu|\leqslant\alpha. \tag{1.2}$$

Кроме того, для любого $d>\alpha$ существует вектор $\bar{u}$, такой, что

$$\|u-\bar{u}\|_H\leqslant 2\alpha d^{-1},\quad \|\bar{u}\|_H=1, \tag{1.3}$$

и $\bar{u}$ является линейной комбинацией собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям $\mathcal{A}$ из интервала $[\mu-d,\ \mu+d]$.

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ пространства H, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\varphi_k=\mu_k\varphi_k$, $k=1, 2, \ldots$. Такой базис существует по теореме Гильберта—Шмидта [43]. Тогда

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k,\quad \mathcal{A}u=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\mu_k\varphi_k,\quad c_k=(u,\ \varphi_k)_H.$$

По условию леммы 1.1 имеем

$$\|\mu u-\mathcal{A}u\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\mu_k-\mu)^2\leqslant\alpha^2.$$

Тогда, если $\min\limits_k|\mu_k-\mu|=|\mu_i-\mu|$, то $|\mu_i-\mu|^2\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2\leqslant\alpha^2$, и, следовательно, $|\mu_i-\mu|\leqslant\alpha$, так как $\|u\|_H^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2=1$.

Докажем теперь второе утверждение леммы 1.1. Пусть

$$\mathcal{A}u-\mu u=w \text{ и } w=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(\mu_k-\mu)\varphi_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\leqslant\alpha^2$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\mu\neq\mu_j$ для любого j. Поэтому $c_k=(\mu_k-\mu)^{-1}\alpha_k$.

Положим $u_0=\sum\limits_l c_l\varphi_l$, где суммирование проводится по тем индексам l, для которых $\mu_l\in[\mu-d,\ \mu+d]$. Имеем

$$u=u_0+\sum_k(\mu_k-\mu)^{-1}\alpha_k\varphi_k=u_0+v,\quad \|v\|_H\leqslant d^{-1}\alpha,$$

где суммирование проводится по всем k, таким, что $\mu_k \notin [\mu-d, \mu+ +d]$. Покажем, что вектор $\bar{u}=\|u_0\|_H^{-1}u_0$ является искомым. Действительно, поскольку $\|u-u_0\|_H=\|v\|_H\leqslant \alpha d^{-1}$, $\|u_0\|_H\leqslant 1$, $\|u_0\|_H\geqslant\|u\|_H- -\|v\|_H$, имеем

$$\|u-\|u_0\|_H^{-1}u_0\|_H\leqslant\|u-u_0\|_H+\|u_0-\|u_0\|_H^{-1}u_0\|_H=$$
$$=\|v\|_H+1-\|u_0\|_H\leqslant\|v\|_H+1-\|u\|_H+\|v\|_H\leqslant 2\alpha d^{-1}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем потребуются некоторые сведения из вариационной теории собственных значений (см. [42; 93]).

Теорема 1.2. *Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\mathcal{D}_A$ и удовлетворяющий следующим условиям:*

1. *A — симметрический оператор, т. е. $(Ax, y)_H=(Ay, x)_H$, $x, y\in\mathcal{D}_A$;*
2. *$(Au, u)_H\geqslant c_0\|u\|_H^2$, $c_0=\mathrm{const}>0$, $u\in\mathcal{D}_A$;*
3. *если последовательность $\{u_k\}$ векторов из $\mathcal{D}_A$ такова, что $\sup_k(Au_k, u_k)_H<\infty$, то $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в H.*

Тогда собственные значения λ_k оператора A определяются по формулам

$$\lambda_k=\sup_{v_1,\ldots,v_{k-1}}\inf_{u\in\mathcal{D}_A}\{(Au, u)_H/(u, u)_H,\ u\neq 0,\ (u, v_j)=0,$$
$$j=1,\ldots,k-1\},\ 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots, \tag{1.4}$$

где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Верхняя грань в (1.4) достигается, в частности, если $v_1,\ldots,v_{k-1}$ являются взаимно ортогональными собственными векторами оператора A, отвечающими первым $k-1$ собственным значениям A.

Равенство (1.4) можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\lambda_k)^{-1}=\inf_{v_1,\ldots,v_{k-1}}\sup_{u\in\mathcal{D}_A}\{(u, u)_H/(Au, u)_H,\ u\neq 0,\ (u, v_j)_H=0,$$
$$j=1,\ldots,k-1\}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. *Пусть $B\in\mathcal{L}(H)$ — положительный компактный самосопряженный оператор $(Bu, u)_H\geqslant c\|u\|_H^2$, $c=\mathrm{const}>0$, $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant \geqslant\ldots\mu_k\ldots>0$ — последовательность всех собственных значений оператора B, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть $\varphi_1, \varphi_2,\ldots$ взаимно ортогональные собственные векторы оператора B, отвечающие собственным значениям μ_k, $k=1, 2,\ldots$, соответственно. Тогда*

$$\mu_k=\inf_{h_1,\ldots,h_{k-1}\in H}\sup_{f\in H}\{(Bf, f)_H,\ \|f\|_H=1,\ (f, h_i)_H=0,\ i=1,\ldots,k-1\}, \tag{1.6}$$

причем нижняя грань в (1 6) *достигается, в частности, если* $h_1 = \varphi_1, \ldots, h_{k-1} = \varphi_{k-1}$.

Доказательство этой теоремы приведено в [89, 63].

Теорема 1.4 (см [89]) *Пусть* $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(H)$ — *компактные положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве* H; $\mu_{1,k}$—k-*е собственное значение оператора* B_1, $\mu_{2,k}$— k-*е собственное значение оператора* B_2 (*Предполагается, что собственные значения операторов* B_1, B_2 *занумерованы с учетом монотонности и кратности, как в теореме* 1 3)

Тогда

$$|\mu_{1,k}-\mu_{2,k}| \leqslant \|B_1-B_2\|. \tag{1.7}$$

Доказательство Обозначим через $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$, k-е собственные функции, отвечающие собственным значениям $\mu_{1,k}$, $\mu_{2,k}$ операторов B_1, B_2 соответственно Положим $A=B_1-B_2$. Пользуясь (1 6) при $B=B_2+A$ и учитывая, что для собственных значений оператора B_2 нижняя грань в (1 6) достигается при $h_j=\varphi_{2,j}$, $j=1, \ldots, k-1$, получим

$$\mu_{1,k} \leqslant \sup_{f\in H} \{((B_2+A)f, f)_H, \|f\|_H=1, (f, \varphi_{2,j})_H=0,$$

$$j=1, \ldots, k-1\} \leqslant \mu_{2,k}+\mu_1,$$

где μ_1 — наибольшее положительное собственное значение оператора A. Поскольку $\mu_1 \leqslant \|B_1-B_2\|$, имеем $\mu_{1,k}-\mu_{2,k} \leqslant \|B_1-B_2\|$. Рассматривая оператор $A=B_2-B_1$, аналогично устанавливаем $\mu_{2,k}-\mu_{1,k} \leqslant \|B_2-B_1\|$. Теорема доказана.

Обозначим через $N(\lambda, A)$ пространство всех собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ. Для любого $x \in H$ через $\rho(x, N(\lambda, A))$ обозначается расстояние от x до подпространства $N(\lambda, A)$, т. е

$$\rho(x, N(\lambda, A)) = \inf_{g\in N(\lambda, A)} \|x-g\|_H. \tag{1.8}$$

Теорема 1.5. *Пусть* $B \in \mathscr{L}(H)$ — *компактный положительный самосопряженный оператор в* H *и* A — *линейный оператор в* H. *Пусть* μ_B, μ_A — *собственные значения операторов* B *и* A *соответственно, причем* $Af=\mu_A f$, $\mu_B \neq 0$. *Тогда*

$$\rho(f, N(\mu_B, B)) \leqslant (\inf_{\mu_i\neq\mu_B} |\mu_B-\mu_i|)^{-1} [|\mu_B-\mu_A| \, \|f\|_H + \|(B-A)f\|_H], \tag{1.9}$$

где нижняя грань берется по всем собственным значениям μ_i *оператора* B, *отличным от* μ_B.

Доказательство Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ортонормированный базис в H, образованный собственными векторами оператора B, $B\varphi_i=\mu_i\varphi_i$. Пусть $f=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j$. Очевидно, что $\rho(f, N(B, \mu_B)) = \|g\|_H$, где $g=\sum_j' c_j\varphi_j$ и суммирование производится по всем индексам j, для которых $\mu_j \neq \mu_B$. По условиям теоремы имеем $(\mu_B I - B) f = (\mu_B - \mu_A) f + (A - B) f$ и, значит,

$$(\mu_B - \mu_A) f + (A - B) f = (\mu_B I - B) g = \sum_j{}' (\mu_B - \mu_j) c_j \varphi_j. \qquad (1.10)$$

Отсюда получаем

$$\inf_{\mu_j \neq \mu_B} |\mu_j - \mu_B|^2 \sum_j{}' |c_j|^2 \leqslant \sum_j{}' (\mu_B - \mu_j)^2 |c_j|^2 \leqslant \|(\mu_B I - B) g\|^2.$$

Таким образом,

$$\|g\|^2 = \sum_j{}' |c_j|^2 \leqslant (\inf_{j, \mu_j \neq \mu_B} |\mu_j - \mu_B|^2)^{-1} \|(\mu_B I - B) g\|^2.$$

Из этого неравенства в силу (1.10) вытекает оценка (1.9). Теорема доказана.

Для любых банаховых пространств V и W через $\mathscr{L}(V, W)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов, действующих из V в W. Норма оператора B из $\mathscr{L}(V, W)$ обозначается через $\|B\|_{\mathscr{L}(V,W)}$ и определяется как нижняя грань постоянных M, таких, что $\|Bv\|_W \leqslant M \|v\|_V$ для любого $v \in V$.

Теорема 1.6 *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, V — банахово пространство, $V \subset H$. Пусть $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(H) \cap \mathscr{L}(H, V)$ — компактные самосопряженные положительные операторы в H, $B_1 - B_2 \in \mathscr{L}(V, H)$* и $\{\mu_1^k\}$, $\{\mu_2^k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *последовательности собственных значений операторов B_1, B_2 соответственно, занумерованные в порядке невозрастания и с учетом кратности. Тогда*

$$|(\mu_1^k)^2| - (\mu_2^k)^2| \leqslant \|B_1 - B_2\|_{\mathscr{L}(V,H)} (\|B_1\|_{\mathscr{L}(H,V)} + \|B_2\|_{\mathscr{L}(H,V)}). \qquad (1.11)$$

Доказательство. Поскольку $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(H, V)$ и $B_1 - B_2 \in \mathscr{L}(V, H)$, то $(B_1 - B_2) B_1$, $(B_1 - B_2) B_2 \in \mathscr{L}(H)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\|B_1^2 - B_2^2\|_{\mathscr{L}(H)} &= \|B_1^2 - B_1 B_2 + B_1 B_2 - B_2^2\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant \\ &\leqslant \|B_1 (B_1 - B_2)\|_{\mathscr{L}(H)} + \|(B_1 - B_2) B_2\|_{\mathscr{L}(H)} = \\ &= \|(B_1 - B_2) B_1\|_{\mathscr{L}(H)} + \|(B_1 - B_2) B_2\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant \\ &\leqslant \|B_1 - B_2\|_{\mathscr{L}(V,H)} (\|B_1\|_{\mathscr{L}(H,V)} + \|B_2\|_{\mathscr{L}(H,V)}).\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались тем фактом что норма в $\mathscr{L}(H)$ оператора $B_1(B_1 - B_2)$ равна норме сопряженного с ним оператора $(B_1 - B_2) B_1$. Отсюда в силу теоремы 1.4 для операторов B_1^2, B_2^2 вытекает оценка (1.11). Теорема доказана.

1.2. Оценки разности собственных значений и собственных векторов двух операторов, действующих в разных пространствах

В этом разделе мы докажем основные теоремы о поведении собственных значений и собственных векторов последовательности операторов, заданных в различных гильбертовых пространствах, при определенных ограничениях на эту последовательность (условия C1—C4). Этим условиям при подходящем выборе гильбертовых пространств удовлетворяют многие операторы, возникающие в задачах усреднения и других сингулярно возмущенных задачах, что позволяет исследовать их спектральные свойства

Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{H}_0$ — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \quad (u, v)_{\mathcal{H}_0}$$

соответственно и пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon, \quad \mathcal{A}_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 —$$

линейные непрерывные операторы, причем $\operatorname{Im} \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{V}$ — линейное подпространство в $\mathcal{H}_0$,

$$\operatorname{Im} \mathcal{A}_0 = \{v : v = \mathcal{A}_0 u, \ u \in \mathcal{H}_0\}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

В дальнейшем рассматриваем пространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{V}$ и операторы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_\varepsilon$, для которых выполнены следующие условия C1—C4.

C1. *Существуют линейные непрерывные операторы* $R_\varepsilon : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\varepsilon$, *такие, что для любого* $f^0 \in \mathcal{V}$

$$(R_\varepsilon f^0, R_\varepsilon f^0)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to \gamma (f^0, f^0)_{\mathcal{H}_0} \textit{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1.12}$$

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$ *не зависит от* f^0.

(Если $\mathcal{H}_0 = \mathcal{V} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(\Omega^\varepsilon)$ и Ω^ε — перфорированная область типа I или II из § 4 гл. I, то за R_ε можно взять оператор ограничения, ставящий в соответствие функции $f \in L^2(\Omega)$ ее ограничение $f|_{\Omega^\varepsilon}$ на Ω^ε, при этом, как будет показано далее, $\gamma = \mathrm{mes}(Q \cap \omega)$.)

C2. *Операторы* $\mathcal{A}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ *являются положительными, компактными и самосопряженными, причем нормы* $\| \mathcal{A}_\varepsilon \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon)}$ *ограничены постоянной, не зависящей от* ε

C3. *Для любой* $f \in \mathcal{V}$

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \textit{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1.13}$$

C4. *Семейство операторов* $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}$ *равномерно компактно в следующем смысле. Из любой последовательности* $f^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$, *такой,* *что* $\sup\limits_{\varepsilon} \| f^\varepsilon \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} < \infty$, *можно выбрать подпоследовательность* $f^{\varepsilon'}$ *и найти вектор* $w^0 \in \mathcal{V}$, *такие, что*

$$\| \mathcal{A}_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} w^0 \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \to 0 \text{ при } \varepsilon' \to 0. \tag{1.14}$$

Замечание 1.7. Из условия C1 следует, что если последовательности f^ε, $g^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ и элементы f^0, $g^0 \in \mathcal{V}$ таковы, что

$$\| f^\varepsilon - R_\varepsilon f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0, \quad \| g^\varepsilon - R_\varepsilon g^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1.15}$$

то

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to \gamma (f^0, g^0)_{\mathcal{H}_0}. \tag{1.16}$$

Действительно,

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon} - (R_\varepsilon f^0, R_\varepsilon g^0)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = (f^\varepsilon - R_\varepsilon f^0, g^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon} + (g^\varepsilon - R_\varepsilon g^0, R_\varepsilon f^0)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \| f^\varepsilon - R_\varepsilon f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \| g^\varepsilon \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \| g^\varepsilon - R_\varepsilon g^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \| R_\varepsilon f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

в силу (1.12), (1.15). Легко видеть, что из (1.12) вытекает, что $(R_\varepsilon f^0, R_\varepsilon g^0)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to \gamma (f^0, g^0)_{\mathcal{H}_0}$, так как $(u, v) = 4^{-1} (\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2)$.

Замечание 1.8. Из условия C3 следует, что если $f^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ и $f^0 \in \mathcal{V}$,

$$\| f^\varepsilon - R_\varepsilon f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1.17}$$

то

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1.18}$$

поскольку $\| \mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant \| \mathcal{A}_\varepsilon (f^\varepsilon - R_\varepsilon f^0) \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon}$ и нормы операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ ограничены постоянной, не зависящей от ε.

Рассмотрим спектральные задачи для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_0$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon^k = \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_\varepsilon^k \in \mathcal{H}_\varepsilon, \\ &\mu_\varepsilon^1 \geqslant \mu_\varepsilon^2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_\varepsilon^k \geqslant \ldots, \quad \mu_\varepsilon^k > 0, \\ &(u_\varepsilon^l, u_\varepsilon^m)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \delta_{lm}, \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{A}_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_0^k \in \mathcal{H}_0, \\ &\mu_0^1 \geqslant \mu_0^2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_0^k \geqslant \ldots, \quad \mu_0^k > 0, \\ &(u_0^l, u_0^m)_{\mathcal{H}_0} = \delta_{lm}, \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, $\delta_{lm} = 0$ при $l \neq m$, $\delta_{lm} = 1$ при $l = m$, собственные значения занумерованы в порядке невозрастания, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Наша цель — оценить отклонение собственных значений и собственных векторов задач (1.19) и (1.20) при малых ε

Теорема 1.9. *Пусть для пространств* $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{V}$ *и операторов* $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_0$ *выполнены условия* C1—C4. *Тогда существует последовательность* $\beta_\varepsilon^k \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $0 < \beta_\varepsilon^k < \mu_0^k$, *такая, что*

$$|\mu_\varepsilon^k - \mu_0^k| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_0^k \gamma^{-1/2}}{\mu_0^k - \beta_\varepsilon^k} \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon u - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.21}$$

где μ_ε^k, μ_0^k — *собственные значения задач* (1.19), (1.20) *соответственно*, $N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) = \{u \in \mathcal{H}_0,\ \mathcal{A}_0 u = \mu_0^k u\}$ — *собственное подпространство оператора* $\mathcal{A}_0$, *отвечающее собственному значению* μ_0^k.

Прежде чем доказывать эту теорему, изучим некоторые свойства операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_0$.

Лемма 1.10 *Пусть* $u_* \in \mathcal{V}$ *и* $\{u_\varepsilon^k\}$, $\{\mu_\varepsilon^k\}$ — *последовательности собственных векторов и собственных значений задачи* (1.19), *такие, что*

$$\|u_\varepsilon^k - R_\varepsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0, \quad \mu_\varepsilon^k \to \mu_* \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{1.22}$$

и фиксированном k. *Тогда* u_*, μ_* — *собственный вектор и собственное значение оператора* $\mathcal{A}_0$, *т. е.* $A_0 u_* = \mu_* u_*$, $u_* \neq 0$.

Доказательство Полагая в (1.17) $f^\varepsilon = u_\varepsilon^k$, $f^0 = u_*$, находим, пользуясь (1.22), (1.18), что

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon^k - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{1.23}$$

Легко видеть, что

$$\|R_\varepsilon(\mu_* u_* - \mathcal{A}_0 u_*)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \|\mu_* R_\varepsilon u_* - \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k + \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu_* R_\varepsilon u_* - \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \|\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon^k - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \|(\mu^* - \mu_\varepsilon^k) R_\varepsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \|\mu_\varepsilon^k (R_\varepsilon u_* - u_\varepsilon^k)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + \|\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon^k - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

При $\varepsilon \to 0$ первые два слагаемых в правой части этого неравенства стремятся к нулю в силу условий (1.22), а третье слагаемое стремится к нулю в силу (1.23) Таким образом,

$$\|R_\varepsilon(\mu_* u_* - \mathcal{A}_0 u_*)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда, пользуясь (1.12), заключаем, что $\mathcal{A}_0 u_* = \mu_* u_*$. В силу (1.22) $\|u_\varepsilon^k\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} - \|R_\varepsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому согласно (1.12) $\gamma^{1/2} \|u_*\|_{\mathcal{H}_0} = 1$, и, значит, $u_* \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 1.11. *Пусть выполнены условия* C1—C4 *Тогда*

$$\mu_\varepsilon^k \to \mu_0^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \textit{при } \varepsilon \to 0,$$

где μ_ε^k, μ_0^k — *собственные значения задач* (1.19), (1.20) *соответственно.*

Доказательство. Установим сначала, что

$$c_0 \geqslant \mu_\varepsilon^j \geqslant c(j) > 0, \quad j=1, 2, \ldots, \tag{1.24}$$

где c_0, $c(j)$ — постоянные, не зависящие от ε, c_0 не зависит от j.

Ограниченность μ_ε^j сверху следует из равномерной по ε ограниченности норм операторов $\mathscr{A}_\varepsilon$.

Фиксируем целое $j>0$. Пусть $\tilde{\mu}_0^1 > \tilde{\mu}_0^2 > \ldots \tilde{\mu}_0^{j+1}$ — собственные значения оператора $\mathcal{A}_0$ и $\tilde{u}_0^1, \ldots, \tilde{u}_0^{j+1}$ — отвечающие им собственные векторы $\|\tilde{u}_0^l\|_{\mathscr{H}_0}=1$, $l=1, \ldots, j+1$. Такие $\tilde{\mu}_0^l$ существуют, поскольку каждое собственное подпространство оператора $\mathscr{A}_0$ конечномерно и $\mu_0^k \neq 0$, $k=1, 2, \ldots$.

Полагая в условии С3 при каждом $k=1, \ldots, j+1$, $f=\tilde{u}_0^k$, получим из (1.13)

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon \tilde{u}_0^k - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 \tilde{u}_0^k \|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно,

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon \tilde{u}_0^k - \mu_0^k R_\varepsilon \tilde{u}_0^k \|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Тогда по лемме 1.1 при $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\varepsilon$, $H=\mathscr{H}_\varepsilon$, $\mu=\tilde{\mu}_0^k$, $u=\| R_\varepsilon \tilde{u}_0^k \|_{\mathscr{H}_\varepsilon}^{-1} R_\varepsilon \tilde{u}_0^k$ существует последовательность

$$\mu_\varepsilon^{m(k,\varepsilon)} \to \tilde{\mu}_0^k \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \quad k=1, 2, \ldots, j+1,$$

где $\mu_\varepsilon^{m(k,\varepsilon)}$ — собственные значения задачи (1.19), причем

$$\mu_\varepsilon^{m(1,\varepsilon)} > \mu_\varepsilon^{m(2,\varepsilon)} > \ldots > \mu_\varepsilon^{m(j,\varepsilon)} > \mu_\varepsilon^{m(j+1,\varepsilon)}$$

при всех ε, меньших некоторого δ_j. Поскольку $\mu_\varepsilon^j \geqslant \mu_\varepsilon^{m(j,\varepsilon)}$ и $\mu_\varepsilon^{m(j+1,\varepsilon)} \to \tilde{\mu}_0^{j+1}$, то имеет место неравенство (1.24).

Так как $\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon^j = \mu_\varepsilon^j u_\varepsilon^j$ и выполнены условия (1.24), то с помощью диагонального процесса, пользуясь условием С4, устанавливаем существование векторов $u_*^j \in \mathscr{V}$ и чисел μ_*^j, таких, что

$$\| \mathcal{A}_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}^j - R_{\varepsilon'} u_*^j \|_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}} \to 0, \tag{1.25}$$

$$\mu_{\varepsilon'}^j \to \mu_*^j > 0 \tag{1.26}$$

по некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$, $j=1, 2, \ldots$.

Из (1.25), (1.26) следует, что

$$\left\| u_{\varepsilon'}^j - R_{\varepsilon'} \frac{1}{\mu_*} u_*^j \right\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}} \to 0, \quad j=1, 2, \ldots, \quad \text{при } \varepsilon' \to 0. \tag{1.27}$$

По лемме 1.10 u_*^j является собственным вектором оператора $\mathcal{A}_0$, отвечающим собственному значению μ_*^j, т. е.

$$\mathcal{A}_0 u_*^j = \mu_*^j u_*^j, \quad u_*^j \neq 0.$$

Полагая в (1.15) $f^\varepsilon = u_\varepsilon^j$, $f^0 = \frac{1}{\mu_*^j} u_*^j$, $g^\varepsilon = u_\varepsilon^k$, $g^0 = \frac{1}{\mu_*^k} u_*^k$, получим в силу (1.16), (1.27), что при $\varepsilon' \to 0$

$$(u_{\varepsilon'}^j,\ u_{\varepsilon'}^k)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to \frac{\gamma}{\mu_*^k \mu_*^j} (u_*^j,\ u_*^k)_{\mathcal{H}_0} = \delta_{kj}. \tag{1.28}$$

Покажем, что векторы $U^j = (\mu_*^j)^{-1} \gamma^{1/2} u_*^j$, $j = 1, 2, \ldots$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_0$. Предположим противное Тогда существует вектор $U \in \mathcal{V}$, такой, что при некотором μ_0^k

$$\mathcal{A}_0 U = \mu_0^k U, \quad (U,\ U^j)_{\mathcal{H}_0} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \| U \|_{\mathcal{H}_0} = 1. \tag{1.29}$$

Положим в условии С3 $f^0 = U$. Тогда

$$\| \mathcal{A}_{\varepsilon'} R_{\varepsilon'} U - R_{\varepsilon'} \mathcal{A}_0 U \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon' \to 0.$$

Это означает, что

$$\| \mathcal{A}_{\varepsilon'} U_{\varepsilon'} - \mu_0^k U_{\varepsilon'} \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \alpha(\varepsilon') \to 0 \quad \text{при } \varepsilon' \to 0, \quad \| U_{\varepsilon'} \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} = 1, \tag{1.30}$$

где $U_{\varepsilon'} = \| R_{\varepsilon'} U \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}}^{-1} R_{\varepsilon'} U$, поскольку

$$\| R_{\varepsilon'} U \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \to \gamma^{1/2} \| U \|_{\mathcal{H}_0} = \gamma^{1/2}.$$

Воспользуемся теперь леммой 1.1 при

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\varepsilon'}, \quad H = \mathcal{H}_{\varepsilon'}, \quad \alpha = \alpha(\varepsilon'), \quad u = U_{\varepsilon'}, \quad \mu = \mu_0^k.$$

По лемме 1.1 из (1.30) следует существование последовательности $\mu_{\varepsilon'}$ собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\varepsilon'}$, стремящихся к μ_0^k при $\varepsilon' \to 0$. Поэтому в силу (1.26) среди μ_*^j, $j = 1, 2, \ldots$, найдется $\mu_*^{m_k} = \mu_0^k$. Положим в лемме 1.1 $d = \frac{1}{2} \inf\limits_{\substack{j \\ \mu_*^j \neq \mu_0^k}} |\mu_0^k - \mu_*^j|$ и допустим, что кратность $\mu_*^{m_k}$ равна l, $\mu_*^{m_k} = \ldots = \mu_*^{m_k + l - 1}$. Тогда на отрезке $[\mu_0^k - d,\ \mu_0^k + d]$ лежат только собственные значения оператора $\mathcal{A}_0$, равные $\mu_*^{m_k}$, и, значит, в силу (1.26) при достаточно малых ε' на $[\mu_0^k - d,\ \mu_0^k + d]$ могут лежать только собственные значения $\mu_{\varepsilon'}^{m_k}, \ldots, \mu_{\varepsilon'}^{m_k + l - 1}$ оператора $\mathcal{A}_{\varepsilon'}$, отвечающие собственным векторам $u_{\varepsilon'}^{m_k}, \ldots, u_{\varepsilon'}^{m_k + l - 1}$. Сог-

.ласно (1.30) и лемме 1.1 при достаточно малых ε' существует вектор $\overline{u}_{\varepsilon'}=\sum_{i=0}^{l-1} c^i_{\varepsilon'} u^{m_k+i}_{\varepsilon'}$, $\|\overline{u}_{\varepsilon'}\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}}=1$, такой, что

$$\|U_{\varepsilon'}-\overline{u}_{\varepsilon'}\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}}\leqslant 2\alpha(\varepsilon')\, d^{-1} \tag{1.31}$$

Выбирая последовательность $\varepsilon''\to 0$, для которой $c^i_{\varepsilon''}\to c^i_*$ при $\varepsilon''\to 0$, получим в силу (1.27), что $\|\overline{u}_{\varepsilon''}-R_{\varepsilon''}\overline{u}_*\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon''}}\to 0$ при $\varepsilon''\to 0$, где $\overline{u}_*=$ $=(\mu^k_0)^{-1}\sum_{i=0}^{l-1} c^i_* u^{m_k+i}_*$ Поэтому согласно (1.31)

$$\left\| \|R_{\varepsilon''}U\|^{-1}_{\mathscr{H}_{\varepsilon''}} R_{\varepsilon''}U-R_{\varepsilon''}\overline{u}_*\right\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon''}}\to 0 \quad \text{при } \varepsilon''\to 0,$$

и, значит, U является линейной комбинацией векторов $u^{m_k+j}_*$, $j=$ $=0, \ldots, l-1$, что противоречит (1 29).

Таким образом, установлено, что векторы U^j, $j=1, 2, \ldots$ образуют ортонормированный базис в $\mathscr{H}_0$ Поскольку U^j соответствует собственному значению μ^j_* и $\mu^1_*\geqslant\mu^2_*\geqslant\ldots$, то можем считать, что в (1.20) $\mu^j_0=\mu^j_*$ и $U^j=u^j_0$, $j=1, 2, \ldots$ Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.9 Фиксируем k и рассмотрим последовательность векторов $\mu^k_\varepsilon u^k_\varepsilon=\mathscr{A}_\varepsilon u^k_\varepsilon$. Поскольку по лемме 1.11 $\mu^k_\varepsilon\to\mu^k_0$ при $\varepsilon\to 0$, то, как установлено в доказательстве леммы 1 11 (см (1 27)), существуют последовательность $\varepsilon'\to$ $\to 0$ и вектор $u^k_*\in N(\mu^k_0, \mathscr{A}_0)\subset\mathscr{V}$, такие, что

$$\|\mu^k_0 u^k_{\varepsilon'}-R_{\varepsilon'}u^k_*\|_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}}\to 0 \quad \text{при } \varepsilon'\to 0, \quad \|u^k_*\|^2_{\mathscr{H}_0}=|\mu^k_0|^2\gamma^{-1}. \tag{1.32}$$

В силу самосопряженности операторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ имеем

$$\mu^k_\varepsilon(u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}=(\mathscr{A}_\varepsilon u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}=(u^k_\varepsilon, \mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}.$$

Поэтому

$$0=\mu^k_\varepsilon(u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}-\mu^k_0(u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}+\mu^k_0(u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}-(u^k_\varepsilon, \mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$(\mu^k_\varepsilon-\mu^k_0)(u^k_\varepsilon, R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}=(u^k_\varepsilon, \mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon u^k_*-\mu^k_0 R_\varepsilon u^k_*)_{\mathscr{H}_\varepsilon}. \tag{1.33}$$

Из (1.32) и (1.16) вытекает, что

$$(u^k_{\varepsilon'}, R_{\varepsilon'}u^k_*)_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}}=\mu^k_0\left(u^k_{\varepsilon'}, R_{\varepsilon'}\frac{1}{\mu^k_0}u^k_*\right)_{\mathscr{H}_{\varepsilon'}}\to$$

$$\to\frac{\gamma}{\mu^k_0}\|u^k_*\|^2_{\mathscr{H}_0}=\mu^k_0>0 \quad \text{при } \varepsilon'\to 0.$$

Полагая $(u^k_{\varepsilon'}, R_{\varepsilon'} u^k_*)_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} = \mu^k_0 + \alpha_{\varepsilon'}$, где $\alpha_{\varepsilon'} \to 0$ при $\varepsilon' \to 0$, из (1.33), (1.32) получаем

$$|\mu^k_{\varepsilon'} - \mu^k_0| \leqslant |\mu^k_0 + \alpha_{\varepsilon'}|^{-1} |(u^k_{\varepsilon'}, \mathcal{A}_{\varepsilon'} R_{\varepsilon'} u^k_* - R_{\varepsilon'} \mathcal{A}_0 u^k_*)_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}}| \leqslant$$

$$\leqslant \mu^k_0 \gamma^{-1/2} |\mu^k_0 + \alpha_{\varepsilon'}|^{-1} \left\| \mathcal{A}_{\varepsilon'} R_{\varepsilon'} \frac{\gamma^{1/2}}{\mu^k_0} u^k_* - R_{\varepsilon'} \mathcal{A}_0 \frac{\gamma^{1/2}}{\mu^k_0} u^k_* \right\|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \leqslant$$

$$\leqslant \mu^k_0 \gamma^{-1/2} (\mu^k_0 - |\alpha_{\varepsilon'}|)^{-1} \sup_{\substack{u \in N(\mu^k_0, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \| \mathcal{A}_{\varepsilon'} R_{\varepsilon'} u - R_{\varepsilon'} \mathcal{A}_0 u \|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}}.$$

Таким образом, оценка (1.21) выполняется для подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ при $\beta^k_{\varepsilon'} = |\alpha_{\varepsilon'}|$. Докажем, что она выполняется при $\varepsilon \to 0$.

При каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ обозначим через σ_ε нижнюю грань чисел $\beta^k_\varepsilon \geqslant 0$, для которых справедлива оценка (1.21). Легко видеть, что $0 \leqslant \sigma_\varepsilon < \mu^k_0$ и оценка (1.21) выполнена при $\beta^k_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$. Покажем, что $\sigma_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Допустим противное. Тогда существует последовательность $\varepsilon'' \to 0$, такая, что $\sigma_{\varepsilon''} > c > 0$. По доказанному найдется подпоследовательность ε' последовательности ε'', для которой имеет место оценка (1.21), причем $\beta^k_{\varepsilon'} \to 0$. По определению $\sigma_{\varepsilon'}$ имеем $\sigma_{\varepsilon'} \leqslant \beta^k_{\varepsilon'}$, но это противоречит неравенству $\sigma_{\varepsilon''} > c > 0$. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает близость собственных векторов задач (1.19), (1.20).

Теорема 1.12. *Пусть $k \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ — целые числа и $\mu^k_0 > \mu^{k+1}_0 = \ldots = \mu^{k+m}_0 > \mu^{k+m+1}_0$, т. е. кратность собственного значения μ^{k+1}_0 задачи* (1.20) *равна m, $\mu^0_0 = \infty$. Тогда для любого $w \in N(\mu^{k+1}_0, \mathcal{A}_0)$, $\|w\|_{\mathcal{H}_0} = 1$, существует линейная комбинация $\bar{u}^\varepsilon$ собственных векторов $u^{k+1}_\varepsilon, \ldots, u^{k+m}_\varepsilon$ задачи* (1.19), *такая, что*

$$\| \bar{u}^\varepsilon - R_\varepsilon w \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant M_k \| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon w - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 w \|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \tag{1.34}$$

где постоянная M_k не зависит от ε.

Доказательство. Положим в лемме 1.1 $H = \mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varepsilon$, $u = \|R_\varepsilon w\|^{-1}_{\mathcal{H}_\varepsilon} R_\varepsilon w$, $\mu = \mu^{k+1}_0$ и d выберем столь малым, чтобы на отрезке $[\mu^{k+1}_0 - d, \mu^{k+1}_0 + d]$ не содержалось точек спектра оператора $\mathcal{A}_0$, отличных от $\mu^{k+1}_0 = \ldots = \mu^{k+m}_0$. Поскольку $\|R_\varepsilon w\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to \gamma \|w\|^2_{\mathcal{H}_0} = \gamma$ при $\varepsilon \to 0$, то существование $\bar{u}^\varepsilon$ и оценка (1.34) вытекают непосредственно из леммы 1.1. Теорема доказана.

§ 2. УСРЕДНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

2.1. Задача Дирихле для сильно G-сходящихся операторов

Пусть $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — операторы теории упругости в области Ω, рассмотренные в § 9 гл. I, и пусть $\mathscr{L}_\varepsilon$ сильно G-сходится к $\widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon \to 0$ $(\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}})$.

Рассмотрим следующие задачи на собственные значения для операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathscr{L}}$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^k) = -\lambda_\varepsilon^k \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \text{ в } \Omega, \quad u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \partial\Omega,\\ &0 < \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varepsilon^k \leqslant \ldots,\\ &\int_\Omega \rho_\varepsilon(x)(u_\varepsilon^l, u_\varepsilon^m)\,dx = \delta_{lm}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\mathscr{L}}(u_0^k) = -\lambda_0^k \rho_0(x) u_0^k \text{ в } \Omega, \quad u_0^k = 0 \text{ на } \partial\Omega,\\ &0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_0^k \leqslant \ldots,\\ &\int_\Omega \rho_0(x)(u_0^l, u_0^m)\,dx = \delta_{lm}, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, собственные значения задач (2.1) и (2.2) занумерованы в порядке неубывания, и каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Предполагается, что функции $\rho_\varepsilon(x)$, $\rho_0(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &0 < c_0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant c_1; \quad 0 < c_2 \leqslant \rho_\varepsilon(x) \leqslant c_3;\\ &\rho_\varepsilon \to \rho_0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от ε.

Теорема 2.1. *Если* $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$ *при* $\varepsilon \to 0$ *и выполнены условия* (2.3), *то*

$$\lambda_\varepsilon^k \to \lambda_0^k \text{ при } \varepsilon \to 0, \; k = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, если кратность собственного значения $\lambda_0 = \lambda_0^{l+1}$ *равна* m, *т. е.*

$$\lambda_0^l < \lambda_0^{l+1} = \ldots = \lambda_0^{l+m} < \lambda_0^{l+m+1}, \quad \lambda_0^0 = 0,$$

и $u(x)$ *является собственной функцией задачи* (2.2), *отвечающей собственному значению* λ_0, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, *то существует последовательность* $\bar{u}_\varepsilon \to u$ *в* $L^2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $\bar{u}_\varepsilon$ *— линейная комбина-*

ция собственных функций задачи (2.1), *отвечающих собственным значениям* $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$.

Доказательство этой теоремы сведем к применению абстрактных теорем, изложенных в § 1, введя подходящим образом пространства $\mathscr{H}_\varepsilon$, $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{V}$ и операторы $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0$.

Обозначим через $\mathscr{H}_\varepsilon$ гильбертово пространство, состоящее из вектор-функций $u \in L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x)(u, v)\,dx.$$

Через $\mathscr{H}_0 = \mathscr{V}$ обозначим пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathscr{H}_0} = \int_\Omega \rho_0(x)(u, v)\,dx.$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.3). *Тогда*

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\,dx \to \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.4}$$

если $v^\varepsilon \to v^0$, $u^\varepsilon \to u^0$ *по норме* $L^2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Из условия (2.3) следует, что

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \varphi\,dx \to \int_\Omega \rho_0 \varphi\,dx \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{2.5}$$

для любой функции φ, непрерывной в $\bar{\Omega}$. Пользуясь равномерной по ε ограниченностью функций ρ_ε и плотностью непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций в пространстве $L^1(\Omega)$, легко показать, что (2.5) справедливо для $\varphi \in L^1(\Omega)$. Пусть теперь $v^\varepsilon \to v^0$, $u^\varepsilon \to u^0$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon(v^\varepsilon, u^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx = \int_\Omega \rho_\varepsilon(u^0, v^0)\,dx - \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx +$$
$$+ \int_\Omega \rho_\varepsilon(v^\varepsilon - v^0, u^0)\,dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon(v^\varepsilon, u^\varepsilon - u^0)\,dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим соотношение (2.4), поскольку последние два интеграла в правой части этого равенства стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу сходимости u^ε, v^ε по норме $L^2(\Omega)$ и равномерной по ε ограниченности ρ_ε, а разность первых двух интегралов в правой части стремится к нулю в силу (2.5) при $\varphi = (u^0, v^0)$. Лемма доказана.

Из леммы 2.2 вытекает, что условие C1 выполняется, если $\mathscr{V} = \mathscr{H}_0$ и за R_ε взять тождественный оператор $R_\varepsilon u = u$, при этом $\gamma = 1$.

Определим операторы $\mathscr{A}_\varepsilon : \mathscr{H}_\varepsilon \to \mathscr{H}_\varepsilon$. Положим $\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon = u^\varepsilon$, где u^ε является решением задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) = -\rho_\varepsilon f^\varepsilon \text{ в } \Omega, \; u^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \; f^\varepsilon \in L^2(\Omega). \tag{2.6}$$

Из теоремы 3.3 гл. I вытекает, что $\|\mathscr{A}_\varepsilon\|$ ограничены постоянной, не зависящей от ε. Компактность $\mathcal{A}_\varepsilon$ есть следствие компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и теоремы 3 3 гл. I Пользуясь интегральным тождеством для решения задачи (2.6) и равенством $(A^{hk})^*=A^{kh}$, получаем при

$$w^\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon g^\varepsilon$$

$$(g^\varepsilon,\ \mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon}=\int\limits_\Omega \rho_\varepsilon (g^\varepsilon,\ u^\varepsilon)\,dx=\int\limits_\Omega \left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_h},\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega (w^\varepsilon,\ \rho_\varepsilon f^\varepsilon)\,dx=(\mathcal{A}_\varepsilon g^\varepsilon,\ f^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon}$$

для любых f^ε, $g^\varepsilon\in L^2(\Omega)$. Поэтому $\mathcal{A}_\varepsilon$ является положительным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}_\varepsilon$

За $\mathcal{A}_0:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_0$ возьмем оператор, который ставит в соответствие $f^0\in\mathcal{H}_0$ вектор-функцию u^0, которая является решением задачи

$$\hat{\mathcal{L}}(u^0)=-\rho_0 f^0 \text{ в } \Omega,\ u^0=0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2.7}$$

т е. $\mathcal{A}_0 f^0=u^0$. Так же, как для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, устанавливаются положительность, компактность и самосопряженность $\mathcal{A}_0$. Таким образом, выполнено условие С2 § 1

Проверим теперь справедливость условия С3 Пусть $f^0\in\mathcal{V}$. Определим w^ε как решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon(w^\varepsilon)=-\rho_0 f^0 \text{ в } \Omega,\ w^\varepsilon=0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Поскольку $u^0=\mathcal{A}_0 f^0$ является решением задачи (2.7), то из G-сходимости $\mathcal{L}_\varepsilon$ к $\hat{\mathcal{L}}$ при $\varepsilon\to 0$ следует, что

$$w^\varepsilon-u^0\to 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega). \tag{2.8}$$

Так как $u^\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon f^0$ является решением задачи (2 6) при $f^\varepsilon=f^0$, то вектор-функция $v^\varepsilon=u^\varepsilon-w^\varepsilon$ — решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v^\varepsilon)=(\rho_0-\rho_\varepsilon)f^0 \text{ в } \Omega,\ v^\varepsilon=0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{2.9}$$

Из интегрального тождества для v^ε вытекает, что

$$\| v^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant c\left|\int\limits_\Omega (\rho_0-\rho_\varepsilon)(f^0,\ v^\varepsilon)\,dx\right| \tag{2.10}$$

Нормы v^ε в $H^1(\Omega)$ ограничены постоянной, не зависящей от ε, так как $v^\varepsilon=u^\varepsilon-w^\varepsilon$. Поэтому

$$v^{\varepsilon'}\to v^0 \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^2(\Omega)$$

по некоторой подпоследовательности $\varepsilon'\to 0$

Из леммы 2 2 следует, что интеграл в правой части (2.10) стремится к нулю при $\varepsilon'\to 0$ и, значит, $v^{\varepsilon'}\to 0$ сильно в $H^1(\Omega)$.

Поскольку из любой последовательности v^ε можно выбрать такую подпоследовательность $v^{\varepsilon'}\to 0$ в $H^1(\Omega)$, то $v_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ в $H^1(\Omega)$. Отсюда, пользуясь (2 8), получаем $\|u^0-u^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}\to 0$. Это означает, что выполнено условие С3.

Условие С4 имеет место в силу компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и того факта, что $\|\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$, где постоянная c не зависит от ε. Это неравенство есть следствие теоремы 3.3 гл. I.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае собственные значения задач (2.1), (1.19) и задач (2.2), (1.20) связаны соотношениями

$$\mu_\varepsilon^k=(\lambda_\varepsilon^k)^{-1},\quad \mu_0^k=(\lambda_0^k)^{-1}. \tag{2.11}$$

Таким образом, выполнены все условия теорем 1.9 и 1.12. Поэтому теорема 2.1 является простым следствием теорем 1.9, 1.12 и соотношений (2 11), поскольку в силу С3 имеем

$$\|\mathscr{A}_\varepsilon u-\mathscr{A}_0 u\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Отметим, в частности, что из теоремы 2.1 следует сходимость спектров и собственных функций для операторов теории упругости с почти-периодическими коэффициентами, рассмотренных в § 6 гл. II

В случае периодических быстро осциллирующих коэффициентов возможно получить оценки отклонения собственных значений и собственных функций задач (2.1), (2.2). Такие оценки в более общем случае перфорированных областей будут получены в разд. 2.3.

2.2. Задача Неймана для операторов теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами в перфорированной области

В этом разделе изучим спектральные свойства операторов, отвечающих краевым задачам (2.22) и (2.23) гл. II. Здесь Ω^ε — перфорированная область типа II, $\mathscr{L}_\varepsilon$ — оператор теории упругости вида (1.1) гл. II с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами, $\widehat{\mathscr{L}}$ — соответствующий ему усредненный оператор, коэффициенты которого заданы формулами (1.3) гл. II.

Для упрощения доказательства отклонения собственных значений задач (2.22), (2.23) гл. II удобно сдвинуть на единицу спектры соответствующих операторов. Поэтому будем рассматривать следующие задачи на собственные значения для операторов вида (2.60), (2.61) гл. II:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^k)-\rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon^k=-\lambda_\varepsilon^k\rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon^k \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\
&\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon^k)=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon,\\
&0<\lambda_\varepsilon^1\leqslant\lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_\varepsilon^k\leqslant\ldots,\\
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\rho_\varepsilon(x)(u_\varepsilon^l,\ u_\varepsilon^m)\,dx=\delta_{lm},
\end{aligned}\right\}\tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{\mathscr{L}}(u_0^k)-\rho_0(x)u_0^k=-\lambda_0^k\rho_0(x)u_0^k \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\
&\widehat{\sigma}(u_0^k)=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon,\\
&0<\lambda_0^1\leqslant\lambda_0^2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_0^k\leqslant\ldots,\\
&\int\limits_{\Omega}\rho_0(x)(u_0^l,\ u_0^m)\,dx=\delta_{lm},
\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, собственные значения занумерованы в порядке неубывания и каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Как показано в теореме 2.4 гл. II, операторы $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathscr{L}}$ близки в том смысле, что для решений задач (2.22), (2.23) гл. II имеют место оценки (2.26) гл. II В этом разделе по сравнению с п. 2.1 сделаем дополнительные предположения относительно функций ρ_ε, ρ_0, а именно будем требовать, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned}
&0<c_0\leqslant\rho_0(x)\leqslant c_1,\ 0<c_2\leqslant\rho_\varepsilon(x)\leqslant c_0,\\
&\rho_0\in C^1(\Omega),\quad \rho_\varepsilon\in L^\infty(\Omega^\varepsilon),\\
&|||\rho_0-\rho_\varepsilon|||\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,
\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от ε, норма $|||\cdot|||$ определена в (2.64) гл. II и $|||\rho_0-\rho_\varepsilon|||$ характеризует близость функций ρ_0 и ρ_ε.

Аналогично тому, как это сделано в § 2.1 для G-сходящихся операторов, сведем изучение близости спектров задач (2.12), (2.13) к теоремам 1.9, 1.12 для абстрактных операторов в гильбертовом пространстве. Основным результатом настоящего раздела является

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (2.14). *Тогда для собственных значений задач* (2.12), (2.13) *справедливы оценки*

$$|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k(\varepsilon^{1/2}+|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||),\tag{2.15}$$

где постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность собственного значения $\lambda_0=\lambda_0^{l+1}$ равна m, т. е.

$$\lambda_0^l<\lambda_0^{l+1}=\ldots=\lambda_0^{l+m}<\lambda_0^{l+m+1},\quad \lambda_0^0=0,$$

и $u_0(x)$ является собственной функцией задачи (2.13), *отвечающей собственному значению λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}=1$, то существует последовательность $\{\bar{u}_\varepsilon\}$, такая, что*

$$\|\bar{u}_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant M_l(\varepsilon^{1/2} + |||\rho_0 - \rho_\varepsilon|||), \tag{2.16}$$

где постоянная M_l не зависит от ε и u_0, причем $\bar{u}_\varepsilon$ является линейной комбинацией собственных функций задачи (2.12), *отвечающих $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, установим некоторые вспомогательные результаты.

Введем в пространстве $L^2(\Omega^\varepsilon)$ скалярное произведение по формуле

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\,dx \tag{2.17}$$

и обозначим полученное пространство через $\mathscr{H}_\varepsilon$. Пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u^0, v^0)_{\mathscr{H}_0} = \int_\Omega \rho_0(x)(u^0, v^0)\,dx \tag{2.18}$$

обозначим через $\mathscr{H}_0$. Положим $\mathscr{V}=\mathscr{H}_0$ и в качестве оператора R_ε в условии C1 § 1 возьмем оператор ограничения вектор-функции $f \in L^2(\Omega)$ на область Ω^ε, т. е.

$$R_\varepsilon f = f|_{\Omega^\varepsilon} \in L^2(\Omega^\varepsilon). \tag{2.19}$$

Чтобы проверить выполнение условия C1 для таким образом выбранных $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_\varepsilon$, $\mathscr{V}$, R_ε, нам потребуется

Лемма 2.4. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* II *и выполняются условия* (2.14). *Тогда если $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, то при* $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(u^0, v^0)\,dx \to (\operatorname{mes}(Q \cap \omega)) \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx. \tag{2.20}$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 1.7 гл. I, полагая в нем $f(\xi, x) = \chi_\omega(\xi)$, где χ_ω — характеристическая функция области ω, $\psi = \psi_\varepsilon = \rho_0 u^0$, $\varphi = \varphi_\varepsilon = v^0$. Тогда в силу (1.21), (1.22) гл. I имеем при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\Omega \cap \varepsilon\omega} \rho_0(u^0, v^0)\,dx \to (\operatorname{mes}(Q \cap \omega)) \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx. \tag{2.21}$$

Поскольку вследствие формул (4.2), (4.3) гл. I $\bar{\Omega}^\varepsilon = (\bar{\Omega} \setminus \Omega_1) \cup \overline{\Omega_1 \cap \cap \varepsilon\omega}$ и множество $\Omega \setminus \Omega_1$ имеет меру порядка ε, то из (2.21) вытекает, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \rho_0(u^0, v^0)\,dx \to (\operatorname{mes}(Q \cap \omega)) \int_\Omega \rho_0(u^0, v^0)\,dx \tag{2.22}$$

при $\varepsilon \to 0$. Из ограниченности ρ_ε, ρ_0, оценки (2.65) гл. II и условия $|||\rho_\varepsilon - \rho_0||| \to 0$ получаем, что для любых u^0, $v^0 \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega^C} (\rho_\varepsilon - \rho_0)(u^0, v^0)\, dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{2.23}$$

Сходимость (2.20) для u^0, $v^0 \in L^2(\Omega)$ вытекает из (2.22), (2.23), поскольку их можно приблизить в $L^2(\Omega)$ вектор-функциями из $H^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Из соотношений (2.19) и (2.20) заключаем, что при $R_\varepsilon f = f|_{\Omega^\varepsilon}$ для пространств $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_\varepsilon$ справедливо условие C1 при $\gamma = \operatorname{mes}(Q \cap \cap \omega)$.

Введем операторы $\mathscr{A}_\varepsilon : \mathscr{H}_\varepsilon \to \mathscr{H}_\varepsilon$, полагая $\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon = u^\varepsilon$, где u^ε — решение задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) - \rho_\varepsilon u^\varepsilon = -\rho_\varepsilon f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon. \tag{2.24}$$

Ограниченность норм $\|\mathscr{A}_\varepsilon\|$ постоянной, не зависящей от ε, есть следствие теоремы 5.4 гл. I, а компактность $\mathscr{A}_\varepsilon$ вытекает из компактности вложения $H^1(\Omega^\varepsilon)$ в $L^2(\Omega^\varepsilon)$. Покажем, что $\mathscr{A}_\varepsilon$ является положительным самосопряженным оператором в $\mathscr{H}_\varepsilon$.

Действительно, пользуясь интегральным тождеством для решения задачи (2.24) и полагая $w^\varepsilon = \mathscr{A}_\varepsilon g^\varepsilon$, находим

$$(g^\varepsilon, \mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon)_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon (g^\varepsilon, u^\varepsilon)\, dx =$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} \left[\left(A^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_h}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} \right) + \rho_\varepsilon (w^\varepsilon, u^\varepsilon) \right] dx =$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} (w^\varepsilon, \rho_\varepsilon f^\varepsilon)\, dx = (\mathscr{A}_\varepsilon g^\varepsilon, f^\varepsilon)_{\mathscr{H}_\varepsilon}$$

для любых f^ε и g^ε из пространства $\mathscr{H}_\varepsilon$, так как $(A^{hk})^* = A^{kh}$. Отсюда следуют положительность и самосопряженность оператора $\mathscr{A}_\varepsilon : \mathscr{H}_\varepsilon \to \mathscr{H}_\varepsilon$.

Обозначим через $\mathscr{A}_0$ оператор, ставящий в соответствие вектор-функции $f^0 \in \mathscr{H}_0$ вектор-функцию u^0, которая является решением задачи

$$\hat{\mathscr{L}}(u^0) - \rho_0 u^0 = -\rho_0 f^0 \text{ в } \Omega, \quad \hat{\sigma}(u^0) = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{2.25}$$

Очевидно, что $\mathscr{A}_0$ — положительный самосопряженный, компактный оператор из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае справедливо условие C2 § 1.

Докажем, что условие C3 также имеет место.

Пусть $f^0 \in \mathscr{H}_0$. Покажем, что

$$\| u^\varepsilon - R_\varepsilon u^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2.26}$$

где $u^\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon f^0$, $u^0 = \mathcal{A}_0 f^0$. Пусть $\tilde{f} \in H^1(\Omega)$. Тогда

$$\| u^\varepsilon - u^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \| \mathcal{A}_\varepsilon f^0 - \mathcal{A}_0 f^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} =$$

$$= \| \mathcal{A}_\varepsilon (f^0 - \tilde{f}) + \mathcal{A}_\varepsilon \tilde{f} - \mathcal{A}_0 \tilde{f} + \mathcal{A}_0 \tilde{f} - \mathcal{A}_0 f^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathcal{A}_\varepsilon (f^0 - \tilde{f}) \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \| \mathcal{A}_0 (\tilde{f} - f^0) \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \| \mathcal{A}_\varepsilon \tilde{f} - \mathcal{A}_0 \tilde{f} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \quad (2.27)$$

В силу равномерной ограниченности норм $\|\mathcal{A}_\varepsilon\|$ отсюда следует, что

$$\| u^\varepsilon - u^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c\,[\| f^0 - \tilde{f} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \| \mathcal{A}_\varepsilon \tilde{f} - \mathcal{A}_0 \tilde{f} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}], \quad (2.28)$$

где постоянная c не зависит от ε. По определению операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}_0$ вектор-функции $w^\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \tilde{f}$, $w^0 = \mathcal{A}_0 \tilde{f}$ являются решениями задач

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_\varepsilon (w^\varepsilon) - \rho_\varepsilon w^\varepsilon = -\rho_\varepsilon \tilde{f} \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon (w^\varepsilon) = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \\ \hat{\mathcal{L}} (w^0) - \rho_0 w^0 = -\rho_0 \tilde{f} \text{ в } \Omega\,, \quad \hat{\sigma}(w^0) = 0 \text{ на } \partial\Omega\,. \end{gathered} \quad (2.29)$$

Согласно оценке (2.67) теоремы 2.13 гл. II имеет место неравенство

$$\| w^\varepsilon - w^0 \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1' [(\varepsilon^{1/2} + |\!|\!| \rho_0 - \rho_\varepsilon |\!|\!|) \| \rho_0 \tilde{f} \|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \| (\rho_\varepsilon - \rho_0) \tilde{f} \|_{H^{1*}}],$$

$$c_1 = \text{const}. \quad (2.30)$$

По определению в § 2.2 гл. II нормы $\|\cdot\|_{H^{1*}}$ имеем

$$\| (\rho_\varepsilon - \rho_0) \tilde{f} \|_{H^{1*}} \leqslant |\!|\!| \rho_\varepsilon - \rho_0 |\!|\!| \, \| \tilde{f} \|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \quad (2.31)$$

так как

$$\| (\rho_\varepsilon - \rho_0) \tilde{f} \|_{H^{1*}} = \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega^\varepsilon), \\ \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = 1}} \left| \int_{\Omega^\varepsilon} (\rho_\varepsilon - \rho_0)(\tilde{f}, v)\, dx \right| \leqslant |\!|\!| \rho_\varepsilon - \rho_0 |\!|\!| \, \| \tilde{f} \|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Поэтому из (2.28)—(2.31) заключаем, что

$$\| u^\varepsilon - u^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_2 \; [\| f^0 - \tilde{f} \|_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon^{1/2} + |\!|\!| \rho_\varepsilon - \rho_0 |\!|\!|) \, \| \tilde{f} \|_{H^1(\Omega)}].$$

Выбирая $\tilde{f}$ так, чтобы первый член в правой части этого неравенства был меньше $\delta/3$, и выбирая ε_δ так, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_\delta$ второй член был меньше $\delta/3$, получим, что $\| u^\varepsilon - u^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c\delta$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\delta$, $c = \text{const}$. Отсюда следует соотношение (2.26), которое означает, что

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, условие C3 доказано.

Установим справедливость условия C4

Пусть P_ε — оператор продолжения из теоремы 4.2 гл. I и пусть $\|f^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \leqslant c$, где c — постоянная, не зависящая от ε. Тогда в силу теоремы 5.4 гл I

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_1 \|f^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \leqslant c_2.$$

Поэтому $\|P_\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3$ и постоянная c_3 не зависит от ε. Ввиду компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ существует вектор-функция $w^0 \in H^1(\Omega)$, такая, что $\|P_{\varepsilon'} \mathcal{A}_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - w^0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ по некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$. Это означает, что $\|\mathcal{A}_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} w^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \to 0$ и, следовательно, имеет место условие C4.

Обратимся теперь к задачам на собственные значения (1.19) и (1.20). Легко видеть, что

$$\mu_\varepsilon^k = (\lambda_\varepsilon^k)^{-1}, \quad \mu_0^k = (\lambda_0^k)^{-1}. \tag{2.32}$$

Как показано в § 1,

$$c_0 > \mu_\varepsilon^k \geqslant c(k) > 0, \tag{2.33}$$

где постоянные c_0, $c(k)$ не зависят от ε. Если $f \in H^1(\Omega)$, то в силу (2.14)

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f\|_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \|u^\varepsilon - R_\varepsilon u^0\|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \leqslant c\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},$$

где u^ε, u^0 — решения задач (2.24), (2.25) при $f^\varepsilon = f$, $f^0 = f$ соответственно. Пользуясь оценкой (2.67) теоремы 2.13 гл. II, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f\|_{\mathscr{H}_\varepsilon} &\leqslant c[(\varepsilon^{1/2} + |||\rho_\varepsilon - \rho_0|||)\|\rho_0 f\|_{H^1(\Omega)} + \\ &+ \|(\rho_0 - \rho_\varepsilon) f\|_{H^{1*}}] \leqslant c_1(\varepsilon^{1/2} + |||\rho_\varepsilon - \rho_0|||)\|f\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от ε. При выводе последнего неравенства мы воспользовались оценкой (2.31) при $\tilde{f} = f$. Таким образом, теорема 2.3 есть следствие теорем 1 9, 1.12 и оценок (2.33), (2.34).

Следствие 2 5. *Если $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon, x)$, $\rho(\xi, x)$ 1-периодична по ξ в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица по $x \in \Omega$ равномерно по ξ, то согласно лемме 2 12 гл.* II $|||\rho_\varepsilon - \rho_0||| \leqslant c\varepsilon$. *В этом случае из* (2.15) *вытекает оценка*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \leqslant c_k^1 \varepsilon^{1/2}, \tag{2.35}$$

где постоянная c_k^1 не зависит от ε

Замечание 2.6. Оценка (1.21) позволяет уточнить вид постоянной c_k в неравенстве (2.15). Действительно, согласно (1 21) вместо c_k в оценке (2.15) можно поставить величину

$$c_k' = \frac{c\lambda_\varepsilon^k (\lambda_0^k)^2}{1 - \lambda_0^k \beta_\varepsilon^k}, \quad 0 \leqslant \beta_\varepsilon^k < (\lambda_0^k)^{-1}, \tag{2.36}$$

где $\beta_\varepsilon^k \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и постоянная c не зависит от k. Отметим, что при доказательстве леммы 1.11 установлено, в частности, что $\lambda_\varepsilon^k \leqslant \gamma_k$, где γ_k — не зависящая от ε постоянная

2.3. Смешанная краевая задача теории упругости в перфорированной области

Здесь мы рассмотрим свободные колебания упругих перфорированных тел с периодической структурой, внешняя часть границы которых закреплена, а граница полостей является свободной от нагрузок.

Соответствующая краевая задача теории упругости изучена в § 1 гл. II. Напомним, что в этом случае Ω^ε — перфорированная область типа I, $\mathscr{L}_\varepsilon$ — оператор теории упругости вида (1.1) гл. II с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами, $\widehat{\mathscr{L}}$ — усредненный оператор, коэффициенты которого имеют вид (1.3) гл. II. Для таких операторов рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^k) = -\lambda_\varepsilon^k \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\
&\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon^k) = 0 \text{ на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon,\\
&0 < \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varepsilon^k \leqslant \ldots,\\
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)(u_\varepsilon^l, u_\varepsilon^m)\,dx = \delta_{lm},
\end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{\mathscr{L}}(u_0^k) = -\lambda_0^k \rho_0(x) u_0^k \text{ в } \Omega,\\
&u_0^k = 0 \text{ на } \partial\Omega,\\
&0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_0^k \leqslant \ldots,\\
&\int\limits_{\Omega} \rho_0(x)(u_0^l, u_0^m)\,dx = \delta_{lm},
\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, собственные значения занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности, как и в задачах (2.12), (2.13).

В разд. 2 1, в частности, рассмотрен случай задач (2.37), (2.38), когда $\Omega^\varepsilon = \Omega$, т. е. область Ω^ε не является перфорированной. В предположениях (2.3) на ρ_ε, ρ_0 доказана сходимость собственных значений задачи (2.37) к соответствующим собственным значениям задачи (2 38). Если Ω^ε — перфорированная область и коэффициенты системы являются ε-периодическими, оказывается возможным получить более точные результаты по сравнению с § 2.1. При этом существенную роль играет близость операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathscr{L}}$, которая выражается оценкой (1.15) гл. II для решений соответствующих краевых задач. Как и в случае задачи Неймана, рассмотренной в п. 2.2, для получения оценок отклонения собственных значений задач (2.37), (2.38) необходимо охарактеризовать близость функций ρ_ε и ρ_0. Если $\rho_\varepsilon(x)=\rho(x/\varepsilon, x)$ и $\rho(\xi, x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n\times\bar\Omega)$ 1-периодична по ξ и удовлетворяет условию Липшица по $x\in\bar\Omega$ равномерно по ξ, то мы покажем, в частности, что собственные значения задачи (2.37) стремятся к собственным значениям задачи (2.38) при

$$\rho_0(x)=(\operatorname{mes}(Q\cap\omega))^{-1}\int\limits_{Q\cap\omega}\rho(\xi, x)\,d\xi\equiv\langle\rho(\cdot, x)\rangle.$$

В этом разделе близость ρ_ε и ρ_0 характеризуем посредством нормы $|||\rho|||_0$, которая определяется равенством (2.64) гл. II, где верхняя грань берется по всем u, $v\in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$.

Легко видеть, что при любых u, $v\in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ имеем

$$|(\rho u, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}|\leqslant|||\rho|||_0\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.39}$$

Лемма 2.7. *Пусть* $\rho(\xi, x)\in\hat L(\mathrm{R}^n, \Omega)$ (*см.* (1.13) *гл.* I) $\rho_\varepsilon(x)=\rho(x/\varepsilon, x)$, $\rho_0(x)=\langle\rho(\cdot, x)\rangle$. *Тогда*

$$|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||_0\leqslant c\varepsilon, \tag{2.40}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство этой леммы вытекает из оценки вида (2.63) гл. II для вектор-функций u, $v\in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, которая с соответствующими упрощениями доказывается аналогично оценке (2.63) гл. II для u, $v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Будем предполагать, что функции ρ_ε, ρ_0 в (2.37), (2.38) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}&0<c_0\leqslant\rho_0(x)\leqslant c_1,\ 0<c_2\leqslant\rho_\varepsilon(x)\leqslant c_3,\\&\rho_0\in C^1(\bar\Omega),\ \rho_\varepsilon\in L^\infty(\Omega^\varepsilon),\ c_0,\ c_1=\text{const},\\&|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||_0\to0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0,\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от ε.

Близость собственных значений и собственных векторов задач (2.37), (2.38) устанавливает

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия* (2.41). *Тогда для собственных значений задач* (2.37), (2.38) *имеют место оценки*

$$|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k(\varepsilon^{1/2}+|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||_0),\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.42}$$

где постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность собственного значения $\lambda_0=\lambda_0^{l+1}$ *равна* m, *т. е.*

$$\lambda_0^l<\lambda_0^{l+1}=\ldots=\lambda_0^{l+m}<\lambda_0^{l+m+1}\quad(\lambda_0^0=0)$$

и $u_0(x)$ является собственной функцией задачи (2.37), *отвечающей собственному значению λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}=1$, то существует последовательность $\bar{u}_\varepsilon$, такая, что*

$$\|\bar{u}_\varepsilon-u_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_k(\varepsilon^{1/2}+|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||_0), \tag{2.43}$$

где постоянная M_k не зависит от ε, u_0, а $\bar{u}_\varepsilon$ является линейной комбинацией собственных векторов задачи (2.37), *отвечающих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$.*

Доказательство этой теоремы, как и доказательство теоремы 2 3, сводится к простой проверке условий C1—C4. При этом в качестве $\mathscr{H}_\varepsilon$ также берется пространство $L^2(\Omega^\varepsilon)$ со скалярным произведением, заданным формулой (2.17), а за $\mathscr{H}_0$ берется $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением (2.18), $\mathscr{V}=\mathscr{H}_0$. Оператор R_ε определяется как ограничение вектор-функций из $L^2(\Omega)$ на Ω^ε. Операторы $\mathscr{A}_\varepsilon:\mathscr{H}_\varepsilon\to\mathscr{H}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0:\mathscr{H}_0\to\mathscr{H}_0$ определяются по формулам:

$$\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon=u^\varepsilon,\quad \mathscr{A}_0 f^0=u^0, \tag{2.44}$$

где u^ε, u^0 являются решениями краевых задач

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)=-\rho_\varepsilon f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon,\\ &\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)=0 \text{ на } S_\varepsilon,\quad u^\varepsilon=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon,\end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0)=-\rho_0 f^0 \text{ в } \Omega,\ u^0=0 \text{ ни } \partial\Omega. \tag{2.46}$$

Проверка условия C1 опирается на следующую лемму.

Лемма 29. *Пусть Ω^ε — перфорированная область типа* I *и выполнены условия* (2.41). *Тогда при u^0, $v^0\in L^2(\Omega)$ имеет место сходимость* (2.20).

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.4, при этом сходимость (2.22) следует из (2.21), поскольку $\Omega^\varepsilon=\Omega\cap\varepsilon\omega$.

Выполнение условий C1—C4 проверяется так же, как и в § 2.2. При этом задачи типа (2.24), (2 25) следует заменить на задачи типа (2.45), (2.46) и вместо теоремы 2.5 гл. II воспользоваться теоремой 1.2 гл. II. При доказательстве условия C4 нужно рассмотреть продолжение $P_\varepsilon u$, построенное в теореме 4.2 гл. I, и воспользоваться компактностью вложения $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$.

Как и в следствии 2.5, если $\rho_\varepsilon=\rho(x/\varepsilon, x)$ и $\rho_0=\langle\rho(\cdot, x)\rangle$, $\rho(\xi, x)\in\widehat{L}(\mathbf{R}^n\times\overline{\Omega})$, то имеет место оценка (2.35).

Неравенство (1.21) позволяет уточнить постоянную c_k в (2.42). Так, в качестве c_k можно взять величину (2.36), где λ_ε^k, λ_0^k— собственные значения задач (2.37), (2.38).

2.4. Собственные колебания сильно неоднородных слоистых тел

Рассмотрим задачи (2.1) и (2.2), где $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — операторы теории упругости, изученные в § 7 гл II. Как установлено в § 7 гл II, $\mathscr{L}_\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$ при $\varepsilon \to 0$, если выполнены условия (7.32) Поэтому при условиях (7 32) гл II имеет место общая теорема 2.1.

Для получения оценок отклонения собственных значений задач (2.1), (2 2) для слоистых сред предположим, что коэффициенты G-предельного оператора $\widehat{\mathscr{L}}$ являются гладкими в $\overline{\Omega}$ и что помимо условий (2.3) для ρ_ε, ρ_0 имеем

$$|||\rho_\varepsilon - \rho_0|||_0 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.47}$$

где $|||\rho|||_0$ определена формулой (2.64) гл. II, причем

$$\Omega^\varepsilon = \Omega, \quad u, \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Теорема 2.10. *Пусть $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — операторы вида (7.1), (7.2) гл. II, причем коэффициенты $\widehat{\mathscr{L}}$ — гладкие функции в $\overline{\Omega}$ и выполнены условия (7.32) гл. II. Тогда для собственных значений задач (2.1), (2 2) выполняется оценка*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \leqslant c_k (\delta_\varepsilon^{1/2} + |||\rho_\varepsilon - \rho_0|||_0), \tag{2.48}$$

где δ_ε определено формулой (7.6) гл. II, постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность $\lambda_0 = \lambda_0^{l+1}$ равна m, т. е.

$$\lambda_0^l < \lambda_0^{l+1} = \ldots = \lambda_0^{l+m} < \lambda_0^{l+m+1}, \quad \lambda_0^0 = 0,$$

и $u_0(x)$ — собственная функция задачи (2.2), соответствующая λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, то существует $\bar{u}_\varepsilon$ — линейная комбинация собственных функций задачи (2.1), соответствующих $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$, такая, что

$$\|\bar{u}_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c (\delta_\varepsilon^{1/2} + |||\rho_\varepsilon - \rho_0|||_0), \tag{2.49}$$

где постоянная c не зависит от ε, u_0.

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как доказательство теорем 2.3, 2.8. При этом вместо оценок (2.67), (1.15) гл. II следует использовать оценку

$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - N_s^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 [\|f^\varepsilon - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \delta_\varepsilon^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}] \tag{2.50}$$

для решений задач

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon) = f^\varepsilon \text{ в } \Omega, \ u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$\widehat{\mathscr{L}}(u^0) = f \text{ в } \Omega, \ u^0 \in H_0^1(\Omega),$$

где f^ε, $f \in L^2(\Omega)$.

Докажем неравенство (2.50). Обозначим через $\tilde{u}^\varepsilon$ решение задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon)=f \text{ в } \Omega, \quad \tilde{u}^\varepsilon\in H_0^1(\Omega).$$

Тогда для $\tilde{u}^\varepsilon-u^0$ справедлива оценка (7.7) гл. II при $\Phi\equiv 0$. Вектор-функция $u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon$ является решением задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon)=f^\varepsilon-f \text{ в } \Omega, \quad u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon\in H_0^1(\Omega).$$

Поэтому согласно неравенству (3.25) гл. I имеем $\|u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c\|f^\varepsilon-f\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Отсюда вытекает (2.50).

Рассмотрим некоторые примеры функций ρ_ε, ρ_0, когда выполнены условия (2.47).

Пусть $\rho_\varepsilon(x)=\rho(\varphi(x)/\varepsilon, x)$, $\varphi(x)$ определена в § 7.1 гл. II, $\rho(t, y)$ принадлежит классу $\mathscr{A}_\sigma$, $\sigma\in(0, 1)$, $\rho_0(x)=\langle\rho(\cdot, x)\rangle$ (см. § 7.2 гл. II). Покажем, что в этом случае

$$|||\rho_\varepsilon-\rho_0|||_0\leqslant c\varepsilon^\sigma, \quad c=\text{const}. \tag{2.51}$$

Очевидно, что

$$\rho\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, x\right)-\rho_0(x)=\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{\varphi(x)}\left(\rho\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right)-\rho_0(x)\right)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\varphi(x)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right)-\rho_0(x)\right)d\tau\right\}=$$

$$=\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}g_\varepsilon^1(x)-\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}f_\varepsilon^i(x),$$

где через g_ε^1, f_ε^i обозначаются соответствующие интегралы в правой части первого равенства. Поскольку $\langle\rho(\cdot, y)-\rho_0(y)\rangle=0$, то по лемме 7.12 гл. II имеем

$$|g_\varepsilon^1(x)|+\sum_{i=1}^n|f_\varepsilon^i(x)|\leqslant c\varepsilon^\sigma, \tag{2.52}$$

причем постоянная c не зависит от ε. Для любых $u, v\in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$\left|\int_\Omega(\rho_\varepsilon-\rho_0)uv\,dx\right|=\left|\int_\Omega\left(\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}g_\varepsilon^1-\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}f_\varepsilon^i\right)uv\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi_i g_\varepsilon^1}{|\nabla\varphi|^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}\right)g_\varepsilon^1-\frac{\varphi_i}{|\nabla\varphi|^2}f_\varepsilon^i\right]uv\,dx\right|. \tag{2.53}$$

Так как $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $|\nabla\varphi| > c = \mathrm{const} > 0$, то в силу неравенства (2.52) отсюда следует, что правая часть (2.53) оценивается через $c_1\varepsilon^\sigma \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$, причем постоянная c_1 не зависит от ε. Этим устанавливается (2.51).

Таким образом, если коэффициенты операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\widehat{\mathscr{L}}$ удовлетворяют условиям теоремы 7.13 гл. II и $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\varphi(x)/\varepsilon, x)$, $\rho(t, y) \in \mathscr{A}_\sigma$, то оценки (2.48), (2.49) можно записать в виде

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \leqslant c_k^1 \varepsilon^{\sigma/2}, \quad \|\overline{u}_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant M\varepsilon^{\sigma/2}, \quad c_k^1, \ M = \mathrm{const} > 0.$$

Как и в замечании 2.6, исходя из (1.21) и равенств (2.32), можно уточнить вид постоянных c_k в неравенстве (2.48). Для слоистых сред также имеет место формула (2.36), где λ_ε^k, λ_0^k — собственные значения задач (2.1), (2.2) соответственно.

§ 3. О ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

3.1. Постановка задачи. Формальные построения

Здесь рассмотрим вопрос о собственных колебаниях перфорированной мембраны, закрепленной по всей границе.

В § 4 гл. II мы построили полное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для системы теории упругости в перфорированной области. Тем же методом можно построить асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка. В последнем случае наличие принципа максимума и известные свойства первой собственной функции позволяют исследовать спектральные свойства соответствующих операторов.

Рассмотрим семейство эллиптических операторов второго порядка:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u, \tag{3.1}$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$, $a_{ij}(\xi)$, $b(\xi)$ — 1-периодические по ξ гладкие функции в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \varkappa_1|\eta|^2 \leqslant a_{ij}(\xi)\eta_i\eta_j \leqslant \varkappa_2|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbf{R}^n, \ \varkappa_1, \ \varkappa_2 = \mathrm{const} > 0, \\ a_{ij}(\xi) = a_{ji}(\xi), \quad b(\xi) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что Ω^ε — перфорированная область типа I (см. § 4 гл. I), $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, причем границы областей Ω и ω являются гладкими.

В этом параграфе мы изучаем собственные значения следующей задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon(U_\varepsilon^k)+\Lambda_\varepsilon^k\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)U_\varepsilon^k=0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad U_\varepsilon^k\in H_0^1(\Omega^\varepsilon),\\ &0<\Lambda_\varepsilon^1\leqslant\Lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots\leqslant\Lambda_\varepsilon^k\leqslant\ldots,\\ &\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)U_\varepsilon^kU_\varepsilon^j\,dx=\delta_{kj}, \end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

где $\rho(\varepsilon)$ — гладкая 1-периодическая функция в $\mathbf{R}^n$, $\rho(\xi)\geqslant c_0=\mathrm{const}>0$, и собственные значения занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности, как и в задачах, рассмотренных в § 2.

Вопрос о поведении Λ_ε^k при $\varepsilon\to 0$ изучался ранее в работах [155; 156; 128]. В них доказано, что $\Lambda_\varepsilon^k=\varepsilon^{-2}\Lambda_0+\lambda_\varepsilon^k$, где $\Lambda_0>0$ — не зависящая от k постоянная, а $\lambda_\varepsilon^k\to\lambda_0^k$ при $\varepsilon\to 0$, причем λ_0^k является собственным значением задачи Дирихле для эллиптического оператора второго порядка с постоянными коэффициентами в области Ω. Здесь покажем, в частности, что $|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k\varepsilon$, $c_k=\mathrm{const}$, а также изучим поведение собственных функций задачи (3.3) при $\varepsilon\to 0$.

Пусть $\Phi(\xi)$ — собственная функция, соответствующая первому собственному значению Λ_0 следующей краевой задачи в области ω с 1-периодической структурой:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Phi(\xi)\right)+\Lambda_0\rho(\xi)\Phi(\xi)=0 \text{ в } \omega,\\ &\Phi=0 \text{ на } \partial\omega, \ \Phi(\xi) \text{ 1-периодична по } \xi,\\ &\int\limits_{Q\cap\omega}\rho(\xi)\Phi^2(\xi)\,d\xi=1. \end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

Граничное условие в (3.4) понимается в смысле принадлежности $\Phi(\xi)$ пространству $\overset{0}{W}(\omega)$ (см. § 1 гл. I).

Как известно [42; 62], Φ — гладкая функция в ω, $\Phi(\xi)\neq 0$ в ω и $|\nabla_\xi\Phi|\neq 0$ в окрестности $\partial\omega$.

Формально представим собственную функцию U_ε^k задачи (3.3) в виде

$$U_\varepsilon^k(x)=\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_\varepsilon^k(x).\tag{3.5}$$

Нетрудно проверить, что для $v_\varepsilon^k(x)$ должны выполняться равенства

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial v_\varepsilon^k}{\partial x_j}\right)-b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_\varepsilon^k+\\&+\lambda_\varepsilon^k\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_\varepsilon^k=0 \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ v_\varepsilon^k=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon,\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)$$

причем $\lambda_\varepsilon^k=\Lambda_\varepsilon^k-\Lambda_0\varepsilon^{-2}$, $\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|v_\varepsilon^k(x)|^2\,dx=1.$

Таким образом, получаем задачу на собственные значения для эллиптического уравнения второго порядка, вырождающегося на границе области. Подходящим образом вводя пространства обобщенных решений для соответствующей вырожденной краевой задачи, сведем задачу (3.6) к задаче на собственные значения для положительного компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве, покажем, что задача (3.6) имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений:

$$0<\lambda_\varepsilon^1\leqslant\lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_\varepsilon^k\leqslant\ldots,$$

где λ_ε^j занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности. Если v_ε^k—собственная функция задачи (3.6), соответствующая λ_ε^k, то функция $\Phi(x/\varepsilon)v_\varepsilon^k$ принадлежит $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$, является собственной для задачи (3.3) и отвечает собственному значению

$$\Lambda_\varepsilon^k=\lambda_\varepsilon^k+\varepsilon^{-2}\Lambda_0.$$

Применяя к вырожденным операторам вида

$$M_\varepsilon(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\qquad(3.7)$$

методы теории усреднения решений и собственных значений, изложенные в гл II и в § 1 и 2 гл. III, получим оценки вида

$$|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k\varepsilon,$$

где λ_0^k—$k=e$ собственное значение некоторой задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами Эти коэффициенты определяются через коэффициенты операторов (3.7) с помощью процедуры усреднения, описанной в гл II.

3.2. Пространства Соболева с весом. Обобщенные решения уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой

В дальнейшем нам потребуются следующие пространства периодических функций:

$\widehat{V}^1(\omega)$ — пополнение $\widehat{C}_0^\infty(\omega)$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{V}^1(\omega)} = \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 (|u|^2 + |\nabla_\xi u|^2)\, d\xi,$$

$\widehat{V}^0(\omega)$ — пополнение $\widehat{C}_0^\infty(\omega)$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{V}^0(\omega)} = \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 |u|^2\, d\xi,$$

$\widehat{V}(\omega)$ — пополнение $\widehat{C}_0^\infty(\omega)$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{V}(\omega)} = \int\limits_{Q\cap\omega} |\nabla_\xi \Phi(\xi)|^2 |u|^2\, d\xi; \ Q = \{\xi\colon\ 0 < \xi_j < 1,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Легко видеть, что если u гладкая и $\|u\|_{\widehat{V}(\omega)} = 0$, то $u \equiv 0$ в ω, так как если $u \neq 0$ в точке x_0, то $u > a_0 > 0$ в некоторой окрестности ω_0 этой точки, но тогда $\int\limits_{\omega_0} |\nabla\Phi|^2\, d\xi = 0$. Из уравнения (3 4) следует, что $\Phi \equiv 0$ в ω_0, что противоречит неравенству $\Phi > 0$ в $\omega \cap Q$. Для доказательства этого нужно умножить (3.4) на $\psi(\xi)\Phi(\xi)$ и проинтегрировать по $Q\cap\omega$, где $\psi(\xi) \in C_0^\infty(\omega_0)$, $\psi(\xi) \geqslant 0$ в ω.

Рассмотрим также пространства $\overset{0}{W}(\omega)$, $\widehat{W}_2^1(\omega)$, определенные в § 1 гл. I.

Лемма 3.1. *Имеют место непрерывные вложения*

$$\overset{0}{W}(\omega) \subset \widehat{W}_2^1(\omega) \subset \widehat{V}^1(\omega), \tag{3.8}$$

$$\widehat{V}^1(\omega) \subset \widehat{V}^0(\omega), \tag{3.9}$$

$$\widehat{V}^1(\omega) \subset \widehat{V}(\omega), \tag{3.10}$$

причем вложение (3.9) *компактно, и для любой* $v \in \widehat{V}^1(\omega)$ *имеем* $\Phi(\xi)\, v(\xi) \in \overset{0}{W}(\omega)$.

Доказательство. Пусть $u \in \widehat{W}_2^1(\omega)$. Рассмотрим функцию $\varphi_\delta \in \widehat{C}_0^\infty(\omega)$, такую, что $\varphi_\delta(\xi) = 1$, если $\rho(\xi, \partial\omega) > 2\delta$, $\varphi_\delta(\xi) = 0$, если $\rho(\xi, \partial\omega) \leqslant \delta$, $0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1$, $|\nabla_\xi \varphi_\delta| \leqslant c\delta^{-1}$. Тогда

$$\int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 (|u - \varphi_\delta u|^2 + |\nabla_\xi (u - \varphi_\delta u)|^2)\, d\xi \leqslant \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 |u|^2 (1 - \varphi_\delta)^2\, d\xi +$$

$$+ 2 \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |\nabla_\xi u|^2 (1 - \varphi_\delta)^2\, d\xi + 2 \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |\nabla_\xi \varphi_\delta|^2 |u|^2\, d\xi.$$

Отсюда следует (3.8), поскольку в 2δ-окрестности $\partial\omega$ имеем $|\Phi| \leqslant c_1\delta$, и потому правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Покажем теперь, что для любой $u \in \widehat{C}_0^\infty(\omega)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{Q\cap\omega} |\nabla_\xi \Phi(\xi)|^2 |u|^2 \, d\xi \leqslant c_0 \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 (|u|^2 + |\nabla_\xi u|^2) \, d\xi, \qquad (3.11)$$

$$\int\limits_{Q\cap\omega} (|\Phi(\xi)\, u(\xi)|^2 + |\nabla_\xi (\Phi(\xi)\, u(\xi))|^2) \, d\xi \leqslant c_1 \int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi(\xi)|^2 (|u|^2 + |\nabla_\xi u|^2) \, d\xi. \qquad (3.12)$$

Умножая уравнение (3.4) на Φu^2, $u \in \widehat{C}_0^\infty(\omega)$, получим

$$-\int\limits_{Q\cap\omega} a_{hk} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_h} |u|^2 \, d\xi - 2 \int\limits_{Q\cap\omega} a_{hk} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k} \Phi \frac{\partial u}{\partial\xi_h} u \, d\xi + {}$$
$$+ \int\limits_{Q\cap\omega} \Lambda_0 \rho \Phi^2 u^2 \, d\xi = 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{Q\cap\omega} |\nabla_\xi \Phi|^2 u^2 \, d\xi \leqslant c_1 \Big(\int\limits_{Q\cap\omega} |\nabla_\xi \Phi|^2 u^2 \, d\xi \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |\nabla_\xi u|^2 \, d\xi \Big)^{1/2} + {}$$
$$+ c^2 \int\limits_{Q\cap\omega} \Phi^2 u^2 \, d\xi.$$

Отсюда следует (3.11). Неравенство (3.12) вытекает из (3.11), поскольку

$$|\nabla_\xi (\Phi u)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} u + \Phi \frac{\partial u}{\partial\xi_i} \Big)^2 \leqslant 2 (|\nabla_\xi \Phi|^2 u^2 + \Phi^2 |\nabla_\xi u|^2).$$

Легко видеть, что для любой $u \in \widehat{V}^1(\omega)$ неравенства (3.11), (3.12) также справедливы и, кроме того, $\Phi u \in \overset{0}{W}(\omega)$. Непрерывность вложения (3.9) очевидна. Докажем его компактность.

Пусть $\{u^m\}$ — последовательность элементов $\widehat{V}^1(\omega)$, такая, что $\sup\limits_m \| u^m \|_{\widehat{V}^1(\omega)} < c < \infty$. Из (3.12) вытекает, что $\| \Phi u^m \|_{H^1(Q\cap\omega)} < c_1$, где постоянная c_1 не зависит от m. В силу компактности вложения $H^1(Q\cap\omega)$ в $L^2(Q\cap\omega)$ существует подпоследовательность $m' \to \infty$, такая, что $\Phi u^{m'} \to w \in H^1(Q\cap\omega)$ по норме $L^2(Q\cap\omega)$. Следовательно, $\Phi u^{m'}$ является последовательностью Коши в $L^2(Q\cap\omega)$ и, значит, $u^{m'}$ — последовательность Коши в $\widehat{V}^0(\omega)$. Поэтому $u^{m'} \to u^0 \in \widehat{V}^0(\omega)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2 (неравенство Пуанкаре). *Для любой $u \in \widehat{V}^1(\omega)$, такой, что*

$$\int\limits_{Q\cap\omega} \Phi^2 u \, d\xi = 0, \qquad (3.13)$$

справедливо неравенство

$$\|u\|^2_{\hat{V}^1(\omega)} \leqslant c \int_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |\nabla_\xi u|^2 \, d\xi, \tag{3.14}$$

где постоянная с не зависит от u.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $u^N \in \hat{V}^1(\omega)$, такая, что

$$\int_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |\nabla_\xi u^N|^2 \, d\xi \leqslant \frac{1}{N}, \quad \|u^N\|_{\hat{V}^1(\omega)} = 1. \tag{3.15}$$

В силу компактности вложения $\hat{V}^1(\omega)$ в $\hat{V}^0(\omega)$ можем считать, что

$$\int_{Q\cap\omega} |\Phi|^2 |u^N - u^{N+t}|^2 \, d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Поэтому $\|u^N - u^{N+t}\|^2_{\hat{V}^1(\omega)} \to 0$, и, значит, существует $u \in \hat{V}^1(\omega)$, такая, что $\|u^N - u\|_{\hat{V}^1(\omega)} \to 0$ при $N \to \infty$. Принимая во внимание (3.15), отсюда заключаем, что $\Phi|\nabla_\xi u| = 0$ почти всюду в $Q \cap \omega$. Поскольку Φ обращается в нуль только на $\partial\omega$, то $u = \mathrm{const}$ в $Q \cap \omega$ и $\|u\|_{\hat{V}^1(\omega)} = 1$. Это противоречит (3.13). Лемма доказана.

Пусть Ω^ε — перфорированная область типа I, рассмотренная в § 4 гл. I. Введем пространства $V_0^1(\Omega^\varepsilon)$, $V^0(\Omega^\varepsilon)$, $V(\Omega^\varepsilon)$ как пополнения $C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$ по соответствующим нормам:

$$\|u\|_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)} = \left\| \left| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| (|u| + |\nabla_x u|) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.16}$$

$$\|u\|_{V^0(\Omega^\varepsilon)} = \left\| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |u| \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.17}$$

$$\|u\|_{V(\Omega^\varepsilon)} = \left\| \left| \nabla_\xi \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| |u| \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.18}$$

Лемма 3.3. *Для любой* $u \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$ *справедливы неравенства*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left| \nabla_\xi \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 |u|^2 \, dx \leqslant c_0 \int_{\Omega^\varepsilon} \left| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 (|u|^2 + |\nabla_x u|^2) \, dx, \tag{3.19}$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left[\left| \nabla_x \left(\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u \right) \right|^2 + \left| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u \right|^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_{\Omega^\varepsilon} \left| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 \left(|\nabla_x u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |u|^2 \right) dx. \tag{3.20}$$

Если $u \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$, то $\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$. Вложение $V_0^1(\Omega^\varepsilon) \subset V^0(\Omega^\varepsilon)$ компактно, $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \subset V_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

Доказательство. Функция $\Phi(x/\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)+\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=0 \text{ в } \varepsilon\omega \quad (3.21)$$

и граничному условию $\Phi(x/\varepsilon)=0$ на $\partial\varepsilon\omega$. Умножая (3.21) на $\Phi(x/\varepsilon)u^2$, где $u \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$, и интегрируя по Ω^ε, получим

$$0=-\int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi u^2}{\partial x_j}dx+\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2}\int_{\Omega^\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|u|^2\Phi^2\,dx=$$

$$=-\int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}|u|^2\,dx-2\int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Phi u\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2}\int_{\Omega^\varepsilon}|u|^2\rho\Phi^2\,dx.$$

Отсюда выводим, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla_x\Phi|^2|u|^2\,dx \leqslant c_2\left(\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla_x\Phi|^2|u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega^\varepsilon}|\Phi|^2|\nabla_x u|^2\,dx\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{c^3}{\varepsilon^2}\int_{\Omega^\varepsilon}u^2\Phi^2\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla_x\Phi|^2|u|^2\,dx \leqslant c_4\int_{\Omega^\varepsilon}|\Phi|^2\left(|\nabla_x u|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}|u|^2\right)dx. \quad (3.22)$$

Учитывая, что $|\nabla_x\Phi(x/\varepsilon)|^2=\varepsilon^{-2}|\nabla_\xi\Phi(x/\varepsilon)|^2$, отсюда получаем неравенство (3.19). Неравенство (3.20) вытекает из (3.22), поскольку $|\nabla_x(\Phi u)|^2 \leqslant 2(|u\nabla_x\Phi|^2+\Phi^2|\nabla_x u|^2)$.

Из (3.20) следует, что если для фиксированного ε $u^j \to u$ по норме $V_0^1(\Omega^\varepsilon)$ при $j \to \infty$, $u^j \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$, то $\{\Phi(x/\varepsilon)u^j\}$ является последовательностью Коши в пространстве $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ и, следовательно, $\Phi(x/\varepsilon)u^j \to w$ в $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ при $j \to \infty$. Из сходимости u^j к u в $V_0^1(\Omega^\varepsilon)$ следует сходимость Φu^j к Φu в $L^2(\Omega^\varepsilon)$. Поэтому $u\Phi=w$. Это означает, что для любого $u \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$, $\Phi(x/\varepsilon)u \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

Компактность вложения $V_0^1(\Omega^\varepsilon) \subset V^0(\Omega^\varepsilon)$ при фиксированном ε доказывается аналогично компактности вложения $\widehat{V}^1(\omega) \subset \widehat{V}^0(\omega)$ в лемме 3.1, а вложение $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \subset V_0^1(\Omega^\varepsilon)$ аналогично вложению $\widehat{W}_2^1(\omega) \subset \widehat{V}^1(\omega)$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Предположим, что*

$$\sup_{\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)} < \infty \tag{3.23}$$

для последовательности функций $u^\varepsilon \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$. *Тогда существуют подпоследовательность* $\varepsilon' \to 0$ *и функция* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, *такие, что* $\|u_0 - u^{\varepsilon'}\|_{V^0(\Omega^{\varepsilon'})} \to 0$ *при* $\varepsilon' \to 0$.

Доказательство. Заметим, что область Ω^ε имеет вид $\Omega \cap \varepsilon\omega$, где ω — гладкая область с 1-периодической структурой, удовлетворяющая условиям B1—B3 § 4 гл. I. В силу этих условий при любом $\delta < \delta_0$ (δ_0 достаточно мало) существует гладкая область $\omega_\delta \subset \omega$ с 1-периодической структурой, такая, что ω_δ удовлетворяет условиям B1—B3 и $0 < c_1\delta < \rho(x, \partial\omega) < c_2\delta$ для $x \in \partial\omega_\delta$, c_1, c_2 не зависящие от δ постоянные.

Положим $\Omega_\delta^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega_\delta, \Gamma_\varepsilon^\delta = \partial\Omega \cap \partial\Omega_\delta^\varepsilon$, $S_\varepsilon^\delta = \partial\Omega_\delta^\varepsilon \cap \Omega$.
Легко видеть, что $\Omega_\delta^\varepsilon \subset \Omega^\varepsilon$ также является перфорированной областью типа I, $\mathbf{E}_\varepsilon^\delta \subset \mathbf{\Gamma}_\varepsilon$.

Поскольку $\Phi(\xi) > 0$ в ω, то из условия (3.23) вытекает, что

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\delta^\varepsilon)} < c_\delta, \tag{3.24}$$

где постоянная c_δ не зависит от ε; $\delta \in (0, \delta_0)$, причем $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\delta^\varepsilon, \Gamma_\varepsilon^\delta)$. При фиксированном $\delta \in (0, \delta_0)$, пользуясь теоремой 4 3 гл. I, построим продолжения $P_\varepsilon^\delta u^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ функций u^ε на область $\tilde{\Omega}$, содержащую $\bar{\Omega}$. Согласно теореме 4.3 гл. I из (3 24) следует, что

$$\sup_{\varepsilon} \|P_\varepsilon^\delta u^\varepsilon\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leqslant c_\delta^1 < \infty.$$

В силу компактности вложения $H_0^1(\tilde{\Omega}) \subset L^2(\tilde{\Omega})$ выберем последовательность $\varepsilon' \to 0$, такую, что

$$P_{\varepsilon'}^\delta u^{\varepsilon'} \to u_\delta(x) \text{ слабо в } H_0^1(\tilde{\Omega}) \text{ и сильно в } L^2(\tilde{\Omega}). \tag{3.25}$$

По теореме 4.3 гл. I $u_\delta \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом,

$$\|u^{\varepsilon'} - u_\delta\|_{L^2(\Omega \cap \varepsilon'\omega_\delta)} \to 0 \text{ при } \varepsilon' \to 0.$$

Совершенно аналогично, при любом $\delta_1 \in (0, \delta)$ из последовательности ε' можем выбрать подпоследовательность $\varepsilon'' \to 0$ и построить функцию $u_{\delta_1} \in H_0^1(\Omega)$, такую, что

$$\|u^{\varepsilon''} - u_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega \cap \varepsilon''\omega_{\delta_1})} \to 0 \text{ при } \varepsilon'' \to 0.$$

Покажем, что $u_{\delta_1} = u_\delta$. Действительно,

$$\|u_{\delta_1} - u_\delta\|_{L^2(\Omega \cap \varepsilon''\omega_\delta)} \leqslant \|u_{\delta_1} - u^{\varepsilon''}\|_{L^2(\Omega \cap \varepsilon''\omega_\delta)} + \|u_\delta - u^{\varepsilon''}\|_{L^2(\Omega \cap \varepsilon''\omega_\delta)}. \tag{3.26}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\varepsilon''\to 0$. Полагая в следствии 1.7 гл. I $f\equiv 1$, $\psi^\varepsilon=\psi=\varphi^\varepsilon=\varphi=u_{\delta_1}-u_\delta$, получим, что левая часть (3.26) стремится к $(\operatorname{mes} Q\cap\omega_\delta)^{1/2}\| u_{\delta_1}-u_\delta\|_{L^2(\Omega)}$. Поэтому $u_{\delta_1}-u_\delta=0$.

Таким образом, установлено, что существует функция $u_0=u_\delta\in H_0^1(\Omega)$, такая, что для любого $\delta\in(0,\delta_0)$ имеет место сходимость

$$\|u^{\varepsilon'}-u_0\|_{L^2(\Omega\cap\varepsilon'\omega_\delta)}\to 0 \text{ при } \varepsilon'\to 0. \tag{3.27}$$

Из неравенства (3.19) и равномерной ограниченности по ε норм $\| u^\varepsilon\|_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)}$ вытекает, что

$$\sup_\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\left|\nabla_\xi\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2dx\leqslant c_2<\infty$$

и, значит,

$$\sup_\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon\setminus\Omega^\varepsilon_\delta}|u^\varepsilon|^2\,dx\leqslant c_3<\infty, \tag{3.28}$$

где постоянная c_3 не зависит от ε, δ, если $\delta\leqslant\delta_0$ и δ_0 достаточно мало, поскольку $|\nabla_\xi\Phi(\xi)|\neq 0$ на $\partial\omega$. Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Omega^{\varepsilon'}}|\Phi|^2|u^{\varepsilon'}-u_0|^2\,dx=\int\limits_{\Omega^{\varepsilon'}_\delta}|\Phi|^2|u^{\varepsilon'}-u_0|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^{\varepsilon'}\setminus\Omega^{\varepsilon'}_\delta}|\Phi|^2|u^{\varepsilon'}-u_0|^2\,dx=I_1^{\varepsilon'}+I_2^{\varepsilon'}. \tag{3.29}$$

Поскольку $\Phi(\xi)=0$ на $\partial\omega$, то для любого $\sigma>0$ в силу (3.28) существует такое δ, что $I_2^{\varepsilon'}<\sigma/2$ при всех ε'. Пользуясь (3.27), выберем ε^0 таким, что при всех $\varepsilon'<\varepsilon_0$ выполняется неравенство $I_1^{\varepsilon'}<\sigma/2$. Отсюда вытекает сходимость к нулю левой части (3.29) при $\varepsilon'\to 0$. Лемма доказана.

В качестве следствия из леммы 3.4 получим неравенство типа Фридрихса для функций из $V_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

Лемма 3.5. *Для любой функции $u\in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$\| u\|^2_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left|\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2|\nabla_x u|^2\,dx, \tag{3.30}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\varepsilon \to 0$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left| \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 |\nabla_x u^\varepsilon| \, dx \leqslant \alpha_\varepsilon, \tag{3.31}$$

$$\| u^\varepsilon \|_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)} = 1, \tag{3.32}$$

где $\alpha_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Согласно лемме 3 4 найдутся последовательность $\varepsilon' \to 0$ и функция $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, такие, что

$$\| u^{\varepsilon'} - u_0 \|_{V^0(\Omega^{\varepsilon'})} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon' \to 0. \tag{3.33}$$

Пусть, как и в доказательстве леммы 3.4, $\Omega_\delta^\varepsilon$ — подобласть области Ω^ε, $\delta \in (0, \delta_0)$ фиксировано и $P_\varepsilon^\delta u^\varepsilon$ — продолжение функции u^ε с области $\Omega_\delta^\varepsilon$ на область $\tilde{\Omega}$, содержащую Ω. Поскольку $\Phi(x/\varepsilon) \geqslant c_\delta = \mathrm{const} > 0$ при $x \in \overline{\Omega}_\delta^\varepsilon$, где c_δ не зависит от ε, то из теоремы 4 3 гл I и соотношений (3.31) имеем

$$\| \nabla_x P_{\varepsilon'}^\delta u^{\varepsilon'} \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \| \nabla_x u^{\varepsilon'} \|_{L^2(\Omega_\delta^{\varepsilon'})} \leqslant c_1 \alpha_{\varepsilon'}, \tag{3.34}$$

где постоянные c, c_1 не зависят от ε. На основании (3.25) можем считать, что $P_{\varepsilon'}^\delta u^{\varepsilon'} \to u_0(x)$ слабо в $H_0^1(\tilde{\Omega})$ при $\varepsilon' \to 0$. Поэтому в силу (3.34) и (3.31) $u_0 = \mathrm{const} \in H_0^1(\Omega)$ и, значит, $u_0 \equiv 0$. Из (3.33) вытекает, что $\| u^{\varepsilon'} \|_{V^0(\Omega^{\varepsilon'})} \to 0$ при $\varepsilon' \to 0$. С другой стороны, ввиду (3.31), (3.32) $\| u^{\varepsilon'} \|_{V^0(\Omega^{\varepsilon'})} \to 1$ при $\varepsilon' \to 0$. Полученное противоречие устанавливает справедливость неравенства (3.30). Лемма доказана.

Введем также пространство $V^1(\Omega^\varepsilon)$ как пополнение $C^\infty(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ по норме (3.16). Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, которое является эллиптическим в области Ω^ε и вырождается на части границы S_ε области Ω^ε:

$$\left.\begin{aligned} M_\varepsilon(u) = \Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f^0(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f^i(x)\right) \ \text{в } \Omega^\varepsilon, \\ u = \psi \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

где $f^j \in V^0(\Omega^\varepsilon)$, $j = 0, \ldots, n$, $\psi \in V^1(\Omega^\varepsilon)$, оператор M_ε имеет вид (3.7).

Обобщенным решением этой задачи называется функция $u \in V^1(\Omega^\varepsilon)$, такая, что $u - \psi \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$ и справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left[a_{ij}\Phi^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \Phi^2 b u w \right] dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left[\Phi^2 f^i \frac{\partial w}{\partial x_i} - \Phi^2 f^0 w \right] dx$$

для любой $w \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

Теорема 3.6. *Существует единственное обобщенное решение* $u \in V^1(\Omega^\varepsilon)$ *задачи* (3.35), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\| u \|_{V^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c \left[\sum_{i=0}^{n} \| f^i \|_{V^0(\Omega^\varepsilon)} + \| \psi \|_{V^1(\Omega^\varepsilon)} \right], \tag{3.36}$$

где постоянная c *не зависит от* ε, f^i, ψ.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 8 гл. I. При этом нужно воспользоваться теоремой 1.3 гл. I, взяв $H = V^1(\Omega^\varepsilon)$, и неравенством Фридрихса (3 30).

Далее нам понадобится принцип максимума для обобщенных решений задачи (3.35).

Лемма 3.7 (принцип максимума). *Пусть* $u(x)$ *является обобщенным решением задачи*

$$M_\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega^\varepsilon, \qquad u = \psi \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \tag{3.37}$$

причем $\psi \in V^1(\Omega^\varepsilon) \cap C^0(\bar{\Omega}^\varepsilon)$, $|\psi| \leqslant M = \mathrm{const}$. *Тогда* $|u(x)| \leqslant M$ *почти всюду в* Ω^ε.

Доказательство. Рассмотрим области $\Omega_\delta^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega_\delta$, построенные при доказательстве леммы 3.4. Обозначим через v_δ решение задачи Дирихле

$$M_\varepsilon(v_\delta) = 0 \quad \text{в } \Omega_\delta^\varepsilon, \qquad v_\delta = \psi \quad \text{на } \partial\Omega_\delta^\varepsilon. \tag{3.38}$$

Поскольку функция $\Phi(\xi)$ обращается в нуль только в точках $\partial\omega$, то уравнение (3.38) является эллиптическим и, значит,

$$|v_\delta(x)| \leqslant M, \quad x \in \Omega_\delta^\varepsilon. \tag{3.39}$$

Из интегрального тождества для решения задачи (3.38) получаем

$$\int_{\Omega_\delta^\varepsilon} \left[\Phi^2 a_{ij} \frac{\partial w_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \Phi^2 b w_\delta v \right] dx = -\int_{\Omega_\delta^\varepsilon} \left[\Phi^2 a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + b\Phi^2 \psi v \right] dx \tag{3.40}$$

для любой $v \in H_0^1(\Omega_\delta^\varepsilon)$, где $w_\delta \equiv v_\delta - \psi \in H_0^1(\Omega_\delta^\varepsilon)$.

Положим $v = w_\delta$ и продолжим ее нулем на $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_\delta^\varepsilon$. Тогда из (3.40) при помощи неравенства Фридрихса (3.30) устанавливаем, что

$$\int_{\Omega_\delta^\varepsilon} \Phi^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (|w_\delta|^2 + |\nabla_x w_\delta|^2)\, dx \leqslant c \| \psi \|_{V_1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.41}$$

где постоянная c не зависит от δ. Поскольку $w_\delta = 0$ на $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_\delta^\varepsilon$, то в силу (3.41) при $\delta \to 0$ имеем последовательность функций $\{w_\delta\}$, такую, что $\sup\limits_{\delta}\|w_\delta\|_{V_0^1(\Omega^\varepsilon)} < \infty$. В силу компактности вложения $V_0^1(\Omega^\varepsilon) \subset V^0(\Omega^\varepsilon)$ и слабой компактности шара в гильбертовом пространстве существуют последовательность $\delta \to 0$ и функция $w_0 \in V_0^1(\Omega^\varepsilon)$, такие, что

$$w_\delta \to w_0 \text{ слабо в } V_0^1(\Omega^\varepsilon) \text{ и сильно в } V^0(\Omega^\varepsilon). \tag{3.42}$$

При фиксированном $v \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$ интегральное тождество (3.40) справедливо для всех достаточно малых δ, так как $\Omega_\delta^\varepsilon \subset \Omega_{\delta_1}^\varepsilon$, если $\delta_1 < \delta$. Переходя в (3.40) к пределу при $\delta \to 0$ и пользуясь единственностью решения задачи (3.37), получим, что $w_0 + \psi = u$, где u — решение задачи (3.37). Легко видеть, что в силу (3.42)

$$\int\limits_{\Omega_\delta^\varepsilon} \Phi^2 |v_\delta - u|^2\, dx = \int\limits_{\Omega_\delta^\varepsilon} |w_\delta - w_0|^2 \Phi^2 dx \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0,$$

и, значит, $\|u - v_\delta\|_{L^2(G)} \to 0$ для любого открытого множества G, такого, что $\bar G \subset \Omega^\varepsilon$. Поэтому $|u(x)| \leqslant M$, так как $|v_\delta| \leqslant M$. Лемма доказана

Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\Phi^2(\xi)\, a_{ij}(\xi) \frac{\partial N}{\partial \xi_j}\right) = \Phi^2(\xi) F^0(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\Phi^2(\xi) F^i(\xi)) \text{ в } \omega, \\ &N(\xi) \text{ 1-периодична по } \xi,\ F^j \in \widehat{V}^0(\omega), \quad j = 0, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

Обобщенным решением этой задачи называется функция $N \in \widehat{V}^1(\omega)$, такая, что

$$\int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2 a_{ij} \frac{\partial N}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}\, d\xi = \int\limits_{Q \cap \omega} \left[\Phi^2 F^i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} - \Phi^2 F^0 \psi\right] d\xi \tag{3.44}$$

для любой $\psi \in \widehat{V}^1(\omega)$.

Положим в теореме 1.3 гл. I $H = \left\{ v \in \widehat{V}(\omega),\ \int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2 v\, d\xi = 0 \right\}$ и возьмем в качестве билинейной формы $a(\varphi, \psi)$ левую часть (3.44), а в качестве $l(\psi)$ — его правую часть. Тогда с помощью оценки (3.14) аналогично теореме 6.1 гл. I доказывается

Теорема 3.8. *Предположим, что*

$$\int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2(\xi) F^0(\xi)\, d\xi = 0. \tag{3.45}$$

Тогда существует единственное (с точностью до аддитивной по-

стоянной) обобщенное решение задачи (3.43) и для этого решения справедлива оценка

$$\| N+\eta \|_{\widehat{V}^1(\omega)} \leqslant c \sum_{i=0}^{n} \| F^i \|_{\widehat{V}^0(\omega)}, \tag{3.46}$$

где η — некоторая постоянная, постоянная c не зависит от N, F^i.

3.3. Усреднение эллиптического уравнения второго порядка, вырождающегося на границе области

Определим теперь коэффициенты усредненного уравнения, соответствующего задаче (3.35). Обозначим через $N_q(\xi)$, $q=1, \ldots$ $\ldots, n$, решения задач

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\Phi^2(\xi)\, a_{kj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_q(\xi)\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(a_{kq}(\xi)\, \Phi^2(\xi)\right) \text{ в } \omega, \\ &N_q \in \widehat{V}^1(\omega), \quad \int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2 N_q\, d\xi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

Положим

$$\widehat{a}_{pq} = \theta \int\limits_{Q \cap \omega} \left[a_{pj}(\xi)\, \Phi^2(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_q(\xi) + a_{pq}(\xi)\, \Phi^2(\xi) \right] d\xi, \tag{3.48}$$

где

$$\theta = \Big(\int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2(\xi)\, d\xi \Big)^{-1}. \tag{3.49}$$

Покажем, что $\widehat{a}_{pq}\eta_p\eta_q \geqslant c|\eta|^2$, $c=\text{const}>0$.

Исходя из (3.47), нетрудно проверить, что $\hat{a}_{pq}$ имеют вид

$$\widehat{a}_{pq} = \theta \int\limits_{Q \cap \omega} \frac{\partial (N_p + \xi_p)}{\partial \xi_j} \Phi^2(\xi)\, a_{ji}(\xi) \frac{\partial (N_q + \xi_q)}{\partial \xi_i}\, d\xi. \tag{3.50}$$

Поэтому $\hat{a}_{pq} = \hat{a}_{qp}$. Полагая $w_\eta = (N_p + \xi_p)\eta_p$, получим в силу (3.50)

$$\widehat{a}_{pq}\eta_p\eta_q = \theta \int\limits_{Q \cap \omega} \frac{\partial w_\eta}{\partial \xi_i} \Phi^2 a_{ij} \frac{\partial w_\eta}{\partial \xi_j}\, d\xi \geqslant 0.$$

Если при каком-то $\eta \neq 0$ имеем $a_{pq}\eta_p\eta_q = 0$, то $w_\eta \equiv (N_p + \xi_p)\eta_p = \text{const}$ при почти всех $\xi \in Q \cap \omega$. Отсюда в силу периодичности $N_p(\xi)$ следует, что $\eta = 0$.

Положим $\widehat{b} = \theta \int\limits_{Q \cap \omega} \Phi^2(\xi)\, b(\xi)\, d\xi$. Таким образом, определен эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{M}(u) \equiv \widehat{a}^{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q} - \widehat{b}u. \tag{3.51}$$

Следующая теорема устанавливает близость решения краевой задачи для оператора M_ε к решению соответствующей краевой задачи для усредненного оператора $\widehat{M}$. Введем обозначение

$$\widehat{\rho}=\theta\int\limits_{Q\cap\omega}\Phi^2(\xi)\rho(\xi)\,d\xi\,(\widehat{\rho}=\theta \text{ в силу } (3.4)). \tag{3.52}$$

Теорема 3.9. *Пусть u^ε, u^0—решения задач*

$$M_\varepsilon(u^\varepsilon)=-\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon,\quad u^\varepsilon\in V_0^1(\Omega^\varepsilon), \tag{3.53}$$

$$\widehat{M}(u^0)=-\widehat{\rho}f^0 \text{ в } \Omega,\quad u^0\in H_0^1(\Omega), \tag{3.54}$$

причем $f^0\in C^2(\overline{\Omega})$, $f^\varepsilon\in V^0(\Omega^\varepsilon)$. Тогда имеют место оценки

$$\|u^\varepsilon-u^0\|_{V^0(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c\,[\varepsilon\|f^0\|_{C^2(\overline{\Omega})}+\|f^\varepsilon-f^0\|_{V^0(\Omega^\varepsilon)}], \tag{3.55}$$

$$\left\|u^\varepsilon-u^0-\varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\right\|_{V^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant c_1\,[\varepsilon^{1/2}\|f^0\|_{C^2(\overline{\Omega})}+\|f^\varepsilon-f^0\|_{V^0(\overline{\Omega})}], \tag{3.56}$$

где постоянные c, c_1 не зависят от ε.

Доказательство. Положим

$$\widetilde{u}=u^0+\varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_j}-v, \tag{3.57}$$

где $v\in V^1(\Omega^\varepsilon)$ и является решением задачи

$$M_\varepsilon(v)=0 \text{ в } \Omega^\varepsilon,\quad v=\varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_j} \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon. \tag{3.58}$$

Таким образом, функция $\widetilde{u}$ принадлежит пространству $V_0^1(\Omega^\varepsilon)$. Применяя оператор M_ε к функции $u^\varepsilon-\widetilde{u}$, аналогично соотношениям (1.16) гл. II получим следующие равенства, которые понимаются в смысле теории обобщенных функций:

$$\begin{aligned}
M_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})&=M_\varepsilon(u^\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{hk}\Phi^2\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u^0+\varepsilon N_s\frac{\partial u^0}{\partial x_s}\right)\right)+\Phi^2 bu^0+\\
&+\varepsilon b\Phi^2 N_j\frac{\partial u^0}{\partial x_j}=M_\varepsilon(u^\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\Phi^2\widehat{a}_{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)+\\
&+\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\Phi^2\widehat{a}_{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-\Phi^2 a_{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)-\\
&-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\Phi^2 a_{hk}\left(\varepsilon\frac{\partial N_s}{\partial x_k}\frac{\partial u^0}{\partial x_s}+\varepsilon N_s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)\right]+\Phi^2 bu^0+\varepsilon b\Phi^2 N_j\frac{\partial u^0}{\partial x_j}=\\
&=M_\varepsilon(u^\varepsilon)-\Phi^2\widehat{M}(u^0)+\Phi^2(b-\widehat{b})u^0-\widehat{a}_{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^2}{\partial x_h}+\\
&+\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\left(\Phi^2\widehat{a}_{hk}-\Phi^2 a_{hk}-\varepsilon\Phi^2 a_{hj}\frac{\partial N_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right]-
\end{aligned}$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{hk}\Phi^2N_s\frac{\partial^2u^0}{\partial x_k\partial x_s}\right)+\varepsilon bN_j\Phi^2\frac{\partial u^0}{\partial x_j}=M_\varepsilon(u^\varepsilon)-\Phi^2\widehat{M}(u^0)+$$

$$+\Phi^2(b-\widehat{b})u^0-\widehat{a}_{hk}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^2}{\partial x_h}+\widehat{a}_{hk}\frac{\partial\Phi^2}{\partial x_h}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\Phi^2a_{hk}+\Phi^2a_{hj}\frac{\partial N_k}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u^0}{\partial x_k}+$$

$$+\left(\Phi^2\widehat{a}_{hk}-\Phi^2a_{hk}-\varepsilon\Phi^2a_{hj}\frac{\partial N_k}{\partial x_j}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{jh}\Phi^2N_k)\right)\frac{\partial^2u^0}{\partial x_h\partial x_k}-$$

$$-\varepsilon\Phi^2a_{hk}N_s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}+\varepsilon bN_j\Phi^2\frac{\partial u^0}{\partial x_j}=$$

$$=\rho\Phi^2(f^0-f^\varepsilon)+(\widehat{\rho}-\rho)\Phi^2f^0+\Phi^2(b-\widehat{b})u^0+$$

$$+\left(\Phi^2\widehat{a}_{hk}-\Phi^2a_{hk}-\Phi^2a_{hj}\frac{\partial N_k}{\partial\xi_j}-\frac{\partial(\Phi a_{ih}N_k)}{\partial\xi_i}\right)\frac{\partial^2u^0}{\partial x_h\partial x_k}+$$

$$+\varepsilon\Phi^2a_{hk}N_s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}+\varepsilon bN_j\Phi^2\frac{\partial u^0}{\partial x_j}.$$

Определим функции $N_{pq}(\xi)$, $B(\xi)$ и $R(\xi)$ как 1-периодические решения следующих краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial}{\partial\xi_l}N_{hk}\right)=\Phi^2\widehat{a}_{hk}-\Phi^2a_{hk}-\Phi^2a_{hj}\frac{\partial N_k}{\partial\xi_j}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\Phi^2a_{ih}N_k)\ \text{в}\ \omega,\quad N_{hk}\in\widehat{V}^1(\omega);$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial}{\partial\xi_l}B\right)=(b(\xi)-\widehat{b})\Phi^2\ \text{в}\ \omega,\quad B\in\widehat{V}^1(\omega);$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial}{\partial\xi_l}R\right)=(\rho(\xi)-\widehat{\rho})\Phi^2\ \text{в}\ \omega,\quad R\in\widehat{V}^1(\omega),$$

$$k,\ h=1,\ \dots,\ n.$$

Эти задачи разрешимы, так как согласно (3.48), (3.49), (3.52) применима теорема 3.8.

Таким образом,

$$M_\varepsilon(u^\varepsilon-\widetilde{u})=\rho\Phi^2(f^0-f^\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial R}{\partial\xi_l}\right)f^0+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial B}{\partial\xi_l}\right)u^0+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\Phi^2a_{il}\frac{\partial}{\partial\xi_l}N_{hk}\right)\frac{\partial^2u^0}{\partial x_k\partial x_h}+$$

$$+\varepsilon\Phi^2a_{hk}N_s\frac{\partial^3u^0}{\partial x_k\partial x_h\partial x_s}+\varepsilon bN_j\Phi^2\frac{\partial u^0}{\partial x_j}.$$

Отсюда следует, что $u^\varepsilon - \tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$M_\varepsilon (u^\varepsilon - \tilde{u}) = \varepsilon \Phi^2 F^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi^2 F^i) + \rho \Phi^2 (f^0 - f^\varepsilon), \tag{3.59}$$

где

$$\Phi^2 F^0 = -\Phi^2 a_{il} \frac{\partial R}{\partial \xi_l} \frac{\partial f^0}{\partial x_i} - \Phi^2 a_{il} \frac{\partial B}{\partial \xi_l} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} -$$

$$-\Phi^2 a_{il} \frac{\partial}{\partial \xi_l} N_{hk} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_h \partial x_k \partial x_i} + \Phi^2 a_{hk} N_s \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_k \partial x_h \partial x_s} + b \Phi^2 N_j \frac{\partial u^0}{\partial x_j},$$

$$\Phi^2 F^i = \Phi^2 a_{il} \frac{\partial R}{\partial \xi_l} f^0 + \Phi^2 a_{il} \frac{\partial B}{\partial \xi_l} u^0 + \Phi^2 a_{il} \frac{\partial N_{hk}}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_h \partial x_k}.$$

В силу периодичности функций R, B, N_{hk}, N_s имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \| F^i \|_{V^0(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon (\| f^0 \|_{C^1(\bar{\Omega})} + \| u^0 \|_{C^3(\bar{\Omega})}).$$

Отсюда по теореме 3.6 при $\psi \equiv 0$ заключаем, что

$$\| u^\varepsilon - \tilde{u} \|_{\overset{0}{V}{}^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_1 [\varepsilon (\| f^0 \|_{C^1(\bar{\Omega})} + \| u^0 \|_{C^3(\bar{\Omega})}) + \| f^\varepsilon - f^0 \|_{V^0(\Omega^\varepsilon)}], \tag{3.60}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от ε.

Поскольку $\tilde{u}$ имеет вид (3.57), то для доказательства (3.55), (3.56) осталось проверить, что

$$\| v \|_{V^0(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_2 \varepsilon \| u^0 \|_{C^1(\bar{\Omega})}, \tag{3.61}$$

$$\| v \|_{V^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_3 \varepsilon^{1/2} \| u^0 \|_{C^2(\bar{\Omega})}, \tag{3.62}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от ε.

Доказательство оценки (3.61) опирается на принцип максимума для решения задачи (3.58), установленный в лемме 3.7. Покажем, что функции $N_j(x/\varepsilon)$, $j=1, \ldots, n$, непрерывны в Ω^ε и ограничены постоянной, не зависящей от ε.

Как следует из леммы 3.1, $\Phi(\xi) N_q(\xi) \in \overset{0}{W}(\omega)$. Поскольку N_q является решением задачи (3.47), то

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\Phi^2 a_{kq}) = -\Phi^2 \frac{\partial a_{kq}}{\partial \xi_k} - 2\Phi a_{kq} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj}(\xi) \Phi^2(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_q \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj} \Phi \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\Phi N_q) - a_{kj} \Phi N_q \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right) = \Phi \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj} \frac{\partial (\Phi N_q)}{\partial \xi_j} \right) +$$

$$+ a_{kj} \frac{\partial (\Phi N_q)}{\partial \xi_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \Phi N_q \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right) - \frac{\partial (\Phi N_q)}{\partial \xi_k} a_{kj} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} =$$

$$= \Phi \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj} \frac{\partial (\Phi N_q)}{\partial \xi_j} \right) + \Phi \Lambda_0 \rho \Phi N_q.$$

Следовательно, функция $\Phi N_q = w \in \overset{0}{W}(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(a_{kj}(\xi)\frac{\partial w}{\partial \xi_j}\right) + \Lambda_0 \rho w = -\frac{\partial a_{kq}}{\partial \xi_k} - 2a_{kq}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k},$$

так как $\Phi \neq 0$ в ω. В силу гладкости решений эллиптических краевых задач и предположений относительно гладкости ω и a_{kj} $w(\xi)$ — гладкая функция в $\bar{\omega}$. Кроме того, $w=0$ на $\partial\omega$. Поскольку $\Phi(\xi)$ имеет нуль первого порядка на $\partial\omega$, то $N_q \equiv w/\Phi$ непрерывна в $\bar{\omega}$.

Таким образом, по лемме 3.7 имеем $|v| \leqslant c_4 \varepsilon \| u^0 \|_{C^1(\bar{\Omega})}$, и, значит, справедлива оценка (3.61).

Докажем оценку (3.62). Пусть $\varphi_\varepsilon(x)$ — срезающая функция, определенная непосредственно после формулы (1.23) гл. II. Положим $\Psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \varepsilon N_s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_s}$. Тогда $\Psi_\varepsilon \in V^1(\Omega^\varepsilon)$.

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}N_s\frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \varepsilon\varphi_\varepsilon\frac{\partial N_s}{\partial x_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_s} + \varepsilon\varphi_\varepsilon N_s\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_j \partial x_s}.$$

Учитывая гладкость u^0 и периодичность N_s, отсюда получаем, что

$$\| \Psi_\varepsilon \|_{V^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_5 \varepsilon^{1/2} \| u^0 \|_{C^2(\bar{\Omega})},$$

где постоянная c_5 не зависит от ε. Пользуясь интегральным тождеством для $v - \Psi_\varepsilon$, получим оценку (3.62). Теорема доказана.

3.4. Усреднение собственных значений и собственных функций задачи Дирихле в перфорированной области

Рассмотрим теперь вопрос об отклонении собственных значений и собственных функций задач

$$\left.\begin{aligned} &M_\varepsilon(v_\varepsilon^k) + \lambda_\varepsilon^k \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в } \Omega^\varepsilon, \quad v_\varepsilon^k \in V^1(\Omega^\varepsilon),\\ &0 < \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varepsilon^k \leqslant \ldots,\\ &\int_{\Omega^\varepsilon} \Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_\varepsilon^l v_\varepsilon^m dx = \delta_{lm}; \end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{M}(v_0^k) + \lambda_0^k \hat{\rho} v_0^k = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v_0^k \in H_0^1(\Omega),\\ &0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_0^k \leqslant \ldots,\\ &\int_{\Omega} \hat{\rho} v_0^l v_0^m dx = \delta_{lm}, \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

где постоянная $\hat{\rho}$ задана равенством $\hat{\rho} = \left(\int_{Q\cap\omega} \Phi^2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}$.

Теорема 3.10. *Пусть λ_ε^k и λ_0^k — k-е собственные значения задач* (3.63) *и* (3.64) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k\varepsilon, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

где постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность собственного значения $\lambda_0=\lambda_0^{l+1}$ равна m, т. е.

$$\lambda_0^l<\lambda_0^{l+1}=\ldots=\lambda_0^{l+m}<\lambda_0^{l+m+1}, \quad \lambda_0^0=0,$$

и $v_0(x)$ — собственная функция задачи (3.64), *соответствующая собственному значению λ_0, $\|v_0\|_{L^2(\Omega)}=1$, то при всех $\varepsilon\in(0,\ 1)$ существует функция $\bar v^\varepsilon$, такая, что $\|\bar v^\varepsilon-v_0\|_{V^0(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_l\varepsilon$, $M_l=\mathrm{const}$ и не зависит от ε, v_0; $\bar v^\varepsilon$ — линейная комбинация собственных функций задачи* (3.63), *отвечающих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots, \ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$.*

Доказательство. Применим абстрактную схему, изложенную в § 1 гл. III. Обозначим через $\mathscr{H}_\varepsilon$ пространство $V^0(\Omega^\varepsilon)$ со скалярным произведением

$$(u,\ v)_{\mathscr{H}_\varepsilon}=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)uv\,dx.$$

Через $\mathscr{H}_0$ обозначим пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u,\ v)_{\mathscr{H}_0}=\int\limits_\Omega\hat\rho uv\,dx$$

и положим $\mathscr{V}=\mathscr{H}_0$.

Обозначим через R_ε оператор ограничения функции $u\in L^2(\Omega)$ на область Ω^ε.

Проверим выполнение соотношения (1.12). Имеем согласно лемме 1.6 гл. I и равенствам (3.49), (3.52)

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|u^0|^2\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Phi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\to\int\limits_\Omega|u^0|^2\,dx=$$
$$=\theta^{-1}\int\limits_\Omega\theta\,|u^0|^2\,dx=\theta^{-1}(u^0,\ u^0)_{\mathscr{H}_0}\ \text{при}\ \varepsilon\to0.$$

Таким образом, условие C1 § 1 выполнено.

Введем операторы $\mathscr{A}_\varepsilon:\mathscr{H}_\varepsilon\to\mathscr{H}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0:\mathscr{H}_0\to\mathscr{H}_0$, полагая $\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon=u^\varepsilon$, $\mathscr{A}_0f^0=u^0$, где u^ε и u^0 — решения задач (3.53) и (3.54) соответственно. Пользуясь интегральным тождеством, устанавливаем, что эти операторы являются положительными и самосопряженными. Компактность $\mathscr{A}_\varepsilon$ и $\mathscr{A}_0$ вытекает из компактности вложений $V_0^1(\Omega^\varepsilon)\subset V^0(\Omega^\varepsilon)$ и $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ соответственно. Равномерная по

ε ограниченность норм операторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ есть следствие оценки (3.36). Поэтому условие C2 § 1 также имеет место.

Справедливость условия C3 обеспечивается оценкой (3.55) теоремы 3.9 и плотностью функций из $C^1(\overline{\Omega})$ в $L^2(\Omega)$.

Проверим выполнение условия C4. Если $\sup\limits_{\varepsilon}\|f^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}<\infty$, то согласно оценке (3.36) $\sup\limits_{\varepsilon}\|\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon\|_{V^1(\Omega^\varepsilon)}<\infty$, и, значит, по лемме 3.4 существуют подпоследовательность ε' и функция $w^0\in H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, для которых имеет место сходимость (1.14).

Собственные функции задачи (3.64) являются гладкими, поэтому для любой v_0^k согласно оценке (3.55) имеем

$$\|\mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon v_0^k-R_\varepsilon\mathscr{A}_0 v_0^k\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}<c_k\varepsilon.$$

Поскольку собственные значения задач (3.63), (3.64) и (1.19), (1.20) связаны соотношениями (2.11), то справедливость утверждения теоремы 3.10 вытекает непосредственно из теорем 1.9, 1.12.

Исходя из доказанных результатов, можем сравнить собственные значения и собственные функции задач (3.3), (3.63), (3.64). Легко видеть, что справедлива

Теорема 3.11. *Пусть* Λ_ε^k, λ_ε^k, λ_0^k—k-*е собственные значения задач* (3.3), (3.63), (3.64) *соответственно. Тогда*

$$\Lambda_\varepsilon^k=\varepsilon^{-2}\Lambda_0+\lambda_\varepsilon^k,\quad |\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k\varepsilon,$$

где Λ_0—1=е собственное значение задачи (3.4), постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность собственного значения $\lambda_0=\lambda_0^{l+1}$ равна m

$$\lambda_0^l<\lambda_0^{l+1}=\ldots=\lambda_0^{l+m}<\lambda_0^{l+m+1},\ \lambda_0^0=0,$$

и $v_0(x)$ — собственная функция задачи (3.64), соответствующая собственному значению λ_0, $\|v_0\|_{L^2(\Omega)}=1$, то существует функция U^ε, такая, что

$$\left\|U^\varepsilon-\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0(x)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant M_l^1\varepsilon,$$

где постоянная M_l^1 не зависит от ε, v_0, и U^ε является линейной комбинацией собственных функций задачи (3.3), отвечающих собственным значениям $\Lambda_\varepsilon^{l+1},\ldots,\Lambda_\varepsilon^{l+m}$.

§ 4. ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

4.1. Оценки решений

Пусть Ω — односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и s — натуральный параметр, т. е. длина кривой $\partial\Omega$, отсчитываемая от фиксированной точки на $\partial\Omega$. Будем считать, что s меняется от 0 до 1. В окрестности $\partial\Omega$ введем координаты (s, t), где t — расстояние от данной точки до кривой $\partial\Omega$ по нормали к $\partial\Omega$, проходящей через эту точку.

Рассмотрим область $\Omega^\varepsilon\subset\mathbf{R}^2$, содержащую Ω и ограниченную кривой:

$$\partial\Omega^\varepsilon=\left\{(s, t):0\leqslant s\leqslant 1,\ t=\varepsilon\psi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right\},$$

где $\varepsilon=1/m$, $m>0$ — целое число, $\psi(\xi)$ — 1-периодическая гладкая функция, $\xi\in\mathbf{R}^1$, $\psi(\xi)\geqslant 0$. Таким образом, при малых ε область Ω^ε имеет быстро осциллирующую границу.

Пусть $\mathscr{L}(u)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ — эллиптический оператор второго порядка, $a_{ij}(x)$ — гладкие функции в $\mathbf{R}^2$,

$$a_{ij}=a_{ji},\ a_{ij}(x)\eta_i\eta_j\geqslant \varkappa_0\,|\eta|^2,$$
$$\varkappa_0=\text{const}>0,\ \eta\in\mathbf{R}^2.$$

Через $\sigma(u)$ на $\partial\Omega$ или на $\partial\Omega^\varepsilon$ обозначается конормальная производная $\sigma(u)=a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j$, где $\nu=(\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе существующей области.

Рассмотрим краевые задачи

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}(u^\varepsilon)=-f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon,\ f^\varepsilon\in L^2(\Omega^\varepsilon),\\ &\sigma(u^\varepsilon)+a(x)\,u^\varepsilon=0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon,\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}(u^0)=-f^0 \text{ в } \Omega,\ f^0\in L^2(\Omega),\\ &\sigma(u^0)+\Gamma a(x)\,u=0 \text{ на } \partial\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

где $\Gamma=\int\limits_0^1(1+|\psi'(s)|^2)^{1/2}ds$, $a(x)$ — гладкая функция в $\mathbf{R}^2$, $a(x)\geqslant a_0=$ $=\text{const}>0$.

Наша цель — оценить разность решений задач (4.1) и (4.2) через правые части f^0, f^ε и далее на основе полученной оценки и результатов, изложенных в § 1.2, установить близость собственных значений и собственных функций операторов, соответствующих задачам (4.1), (4.2).

Положим

$$a_\varepsilon(u, v)=\int\limits_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon} a(x)uv\,ds_\varepsilon,$$

$$a_0(u, v)=\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int\limits_{\partial\Omega} \Gamma a(x)uv\,ds,$$

где ds_ε — элемент длины дуги $\partial\Omega^\varepsilon$.

Обобщенные решения задач (4.1) и (4.2) определяются как функции $u^\varepsilon\in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $u^0\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющие соответственно интегральным тождествам

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v)=(f^\varepsilon, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\quad a_0(u^0, w)=(f^0, w)_{L^2(\Omega)}$$

для любых $v\in H(\Omega^\varepsilon)$, $w\in H^1(\Omega)$.

Теорема 4.1. *Пусть u^ε, u^0 — обобщенные решения задач (4.1), (4.2) соответственно. Тогда имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon-u^0\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c[\varepsilon^{1/2}\|f^0\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^{1/2}\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}+\|f^\varepsilon-f^0\|_{L^2(\Omega)}], \tag{4.3}$$

где постоянная c не зависит от ε, f^0, f^ε.

Приведем вначале некоторые вспомогательные результаты, которые будут использованы при доказательстве этой теоремы.

Заметим, что существование, единственность и равномерные по ε оценки в $H^1(\Omega^\varepsilon)$ решений задачи (4.1) через $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$ вытекают из теоремы 1.3 гл. I и следующей леммы.

Лемма 4.2. *Существует постоянная M, не зависящая от ε и такая, что для любой $u\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$a_\varepsilon(u, u)\geqslant M\|u\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу ограниченности Ω^ε существует не зависящая от ε постоянная b, такая, что $1\leqslant 2-e^{bx_1}\leqslant 2$ при всех $x\in\Omega^\varepsilon$. Положим $u=(2-e^{bx_1})v$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla u|^2dx=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2(2-e^{bx_1})^2dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}v^2b^2e^{2bx_1}dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}b(2-e^{bx_1})e^{bx_1}\frac{\partial v^2}{\partial x_1}dx=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2(2-e^{bx_1})^2dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}v^2b^2e^{2bx_1}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}[b^2(2-e^{bx_1})e^{bx_1}-b^2e^{2bx_1}]v^2dx-\int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon}b(2-e^{bx_1})e^{bx_1}v^2\nu_1ds_\varepsilon.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} b^2(2-e^{bx_1})\,e^{bx_1}v^2dx \leqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon} b\,(2-e^{bx_1})\,e^{bx_1}v^2\nu_1 ds_\varepsilon.$$

Отсюда и из условий на $a_{ij}(x)$, $a(x)$, b вытекает неравенство (4 4). Лемма доказана.

Обозначим через G_δ δ-окрестность $\partial\Omega$, а через $\Omega_{(\delta)}$ — δ-окрестность области Ω. В приграничных координатах $(s,\ t)$ имеем

$$G_\delta=\{(s,\ t): 0\leqslant s\leqslant 1,\ -\delta<t<\delta\},\ \Omega_{(\delta)}=\Omega\cup G_\delta.$$

Считаем параметр ε настолько малым, что при $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ имеем $0< <\varepsilon\psi(s/\varepsilon)<\delta/2$. Поэтому $\partial\Omega^\varepsilon\subset\overline{G}_{\delta/2}$.

Лемма 4.3. *Для любой $v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ существует продолжение $P_\varepsilon v\in H^1(\Omega_{(\delta)})$, такое, что справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega_{(\delta)})}\leqslant c_0\,\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.5}$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}\leqslant c_1\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.6}$$

где постоянные c_0, c_1 не зависят от ε, v.

Доказательство. Функция v определена на множестве $G_\delta\cap\Omega^\varepsilon$. Продолжим ее на G_δ следующим образом. В G_δ перейдем от координат s, t к координатам $s'=s$, $t'=t-\varepsilon\psi(s/\varepsilon)$. В переменных s', t' множества $G_\delta\cap\Omega^\varepsilon$, $G_\delta\setminus\Omega^\varepsilon$ имеют вид

$$(G_\delta\cap\Omega^\varepsilon)'=\left\{(s'\ t'): 0\leqslant s'\leqslant 1,\ -\delta-\varepsilon\psi\left(\frac{s'}{\varepsilon}\right)<t'<0\right\},$$

$$(G_\delta\setminus\Omega^\varepsilon)'=\{(s',\ t'): 0\leqslant s'\leqslant 1,\ 0\leqslant t'<\delta-\varepsilon\psi(s/\varepsilon)\}.$$

Положим

$$w(s',\ t')=v(s(s',\ t'),\ t(s',\ t'))=v(s,\ t)\ \text{при}\ t\leqslant\varepsilon\psi(s/\varepsilon),\ t'\leqslant 0.$$

Согласно утверждению 2 теоремы 1.2 гл. II функцию $w(s',\ t')$ можно продолжить с множества $\{(s',\ t'): 0\leqslant s'\leqslant 1,\ -2\delta\leqslant t'\leqslant 0\}=\overline{G}_0$ на множество $\widetilde{G}=\{(s',\ t'): 0\leqslant s'\leqslant 1,\ -2\delta\leqslant t'\leqslant 2\delta\}$ до 1-периодической по s' функции Pw из $H^1(\widetilde{G})$, такой, что справедлива оценка $\|Pw\|_{H^1(\widetilde{G})}\leqslant c\|w\|_{H^1(G_0)}$, где c не зависит от w. Полагая $(P_\varepsilon v)(s,\ t)= =v(s,\ t)$ при $(s,\ t)\in\Omega^\varepsilon$, $(P_\varepsilon v)(s,\ t)=Pw(s,\ t-\varepsilon\psi(s/\varepsilon))$ при $\varepsilon\psi(s/\varepsilon)\leqslant \leqslant t\leqslant\delta$, получаем искомое продолжение.

Докажем оценку (4.6). Множество $\Omega^\varepsilon\setminus\Omega$ лежит в δ-окрестности $\partial\Omega$, δ имеет порядок ε. Поэтому, применяя лемму 1.5 гл. I к области $\Omega_{(\delta)}\setminus\Omega$, получим

$$\|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}\leqslant c_2\varepsilon^{1/2}\|P_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega_{(\delta)}\setminus\Omega)}\leqslant c_3\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H_1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть $\gamma(\eta)$ — гладкая 1-периодическая функция в $\mathbf{R}^1$, $\int\limits_0^1 \gamma(\eta)\,d\eta=0$.* Тогда для любых $u\in H^2(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_0^1 \gamma\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) u(s, 0)\, v(s, 0)\, ds\right| \leqslant c\varepsilon^{1/2}\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.7}$$

где постоянная c не зависит от ε, u, v.

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 2.9 гл. II. При этом на Ω_1 нужно взять область $G=\{(s, t): 0\leqslant s\leqslant 1,\ -\delta<t<0\}$ и вместо множеств σ_h^m рассмотреть множества $\sigma_m=\{(s, t): t=0,\ \varepsilon(m-1)\leqslant s\leqslant\varepsilon m\}$, $m=1, \ldots, \varepsilon^{-1}$.

Доказательство теоремы 4.1. Считаем, что функция u^0 продолжена в область $\Omega_{(\delta)}$ так, что

$$\|u^0\|_{H^2(\Omega_{(\delta)})} \leqslant M_2\|u^0\|_{H^2(\Omega)}.$$

Возможность такого продолжения обеспечивается гладкостью $\partial\Omega$.

Запишем интегральные тождества для u^ε, u^0:

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon} a u^\varepsilon v\, ds_\varepsilon = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma a u^0 v\, ds = \int\limits_{\Omega} f^0 v\, dx$$

при $v=u^\varepsilon-u^0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon-u^0, v) = -\int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon} a u^0 v\, ds_\varepsilon + \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma a u^0 v\, ds -$$

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon\setminus\Omega} a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\Omega}(f^\varepsilon-f^0)\,v\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon\setminus\Omega} f^\varepsilon v\, dx. \tag{4.8}$$

Переходя от координат x к s, t в δ-окрестности $\partial\Omega$ и полагая

$$w(s, t) \equiv a(s, t)\, u^0(s, t)\, v(s, t);\quad g\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \left(1+\left|\psi'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|^2\right)^{1/2},$$

имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega^\varepsilon} a u^0 v\, ds_\varepsilon - \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma a u^0 v\, ds = \int\limits_0^1 g\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) w\left(s, \varepsilon\psi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) ds -$$

$$-\int_0^1 \Gamma w(s, 0)\, ds=\int_0^1 \left(g\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)-\Gamma\right) w(s, 0)\, ds+$$

$$+\int_0^1 g\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\left(w\left(s, \varepsilon\psi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)-w(s, 0)\right) ds=I_1+I_2. \qquad (4.9)$$

Применяя лемму 4.4 в случае $u=a(s, t)\,u^0(s, t)$, $v=v(s, t)$, $\gamma(\eta)=$ $=g(\eta)-\Gamma$, получаем

$$|I_1| \leqslant c\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \qquad (4.10)$$

Легко видеть, что

$$w(s, \varepsilon\psi(s/\varepsilon))-w(s, 0)=\int_0^{\varepsilon\psi(s/\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t)\, dt=$$

$$=\int_0^{\varepsilon\psi(s/\varepsilon)} \left[\frac{\partial a(s, t)\, u^0(s, t)}{\partial t}\, v(s, t)+a(s, t)\, u^0(s, t)\,\frac{\partial v(s, t)}{\partial t}\right] dt.$$

Поэтому

$$|I_2| \leqslant \left|\int_0^1 \int_0^{\varepsilon\psi(s/\varepsilon)} g\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w(s, t)}{\partial t}\, dt\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|u^0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}.$$

В силу оценки (4.6) имеем $\|u^0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)} \leqslant c_2\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega^\varepsilon)}$. Следовательно,

$$|I_2| \leqslant c_3\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}. \qquad (4.11)$$

Таким образом, из (4.9)—(4.11) получаем

$$\left|\int_{\partial\Omega^\varepsilon} a u^0 v\, ds_\varepsilon-\int_{\partial\Omega} \Gamma a u^0 v\, ds\right| \leqslant c_4\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \qquad (4.12)$$

Оценим оставшиеся члены в правой части равенства (4.8). Пользуясь оценкой (4.6), находим

$$\left|\int_{\Omega^\varepsilon\setminus\Omega} a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\right|+\left|\int_\Omega (f^\varepsilon-f^0)\, v\, dx\right|+\left|\int_{\Omega^\varepsilon\setminus\Omega} f^\varepsilon v\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_5 [\|u^0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}+\|f^\varepsilon-f^0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}+$$

$$+\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}] \leqslant c_6 [\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}+$$

$$+\|f^\varepsilon-f^0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}+\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon\setminus\Omega)}\, \varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}]. \qquad (4.13)$$

Из (4.8) согласно лемме 4.2, учитывая (4.12), (4.13), выводим

$$\|u^\varepsilon - u^0\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant c_5 [\varepsilon \|u^0\|^2_{H^2(\Omega)} + \varepsilon \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega)} + \|f^\varepsilon - f^0\|^2_{L^2(\Omega)}].$$

Отсюда следует оценка (4.3). Теорема доказана.

4.2. Оценка собственных значений и собственных функций

Рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$\left. \begin{aligned} &\mathscr{L}(u_\varepsilon^k) + \lambda_\varepsilon^k u_\varepsilon^k = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \ u_\varepsilon^k \in H^1(\Omega^\varepsilon), \\ &\sigma(u_\varepsilon^k) + a(x) u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \\ &\int\limits_{\Omega^\varepsilon} u_\varepsilon^k u_\varepsilon^l dx = \delta_{kl}, \ 0 < \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots; \end{aligned} \right\} \tag{4.14}$$

$$\left. \begin{aligned} &\mathscr{L}(u_0^k) + \lambda_0^k u_0^k = 0 \text{ в } \Omega, \ u_0^k \in H^1(\Omega), \\ &\sigma(u_0^k) + \Gamma a(x) u_0^k = 0 \text{ на } \partial\Omega, \\ &\int\limits_{\Omega} u_0^k u_0^l dx = \delta_{kl}, \ 0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots, \end{aligned} \right\} \tag{4.15}$$

где собственные значения, как и в § 2, занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности.

Для исследования близости λ_ε^k, λ_0^k применим общую схему, изложенную в п. 1.2.

Положим $\mathscr{H}_\varepsilon = L^2(\Omega^\varepsilon)$, $\mathscr{H}_0 = L^2(\Omega) = \mathscr{V}$,

$$(u, v)_{\mathscr{H}_\varepsilon} = (u, v)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \quad (u, v)_{\mathscr{H}_0} = (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Определим оператор $R_\varepsilon : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega^\varepsilon)$, полагая $R_\varepsilon f = f(x)$ при $x \in \Omega$, $R_\varepsilon f = 0$ при $x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega$. Очевидно, что условие C1 выполнено при $\gamma = 1$.

Введем операторы $\mathscr{A}_\varepsilon : \mathscr{H}_\varepsilon \to \mathscr{H}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$, полагая $\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon = u^\varepsilon$, $\mathscr{A}_0 f^0 = u^0$, где u^ε, u^0 — решения задач (4.1), (4.2) соответственно. Легко убедиться в том, что $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0$ — положительные самосопряженные компактные операторы, причем нормы $\|\mathscr{A}_\varepsilon\|$ ограничены постоянной, не зависящей от ε, в силу леммы 4.2.

Докажем справедливость условия C3. Пусть $f^0 \in L^2(\Omega)$. Тогда $\mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 = u^\varepsilon$ — решение задачи (4.1) при $f^\varepsilon = f^0$ в Ω, $f^\varepsilon = 0$ в $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega$. Очевидно, что

$$\|\mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathscr{A}_0 f^0\|^2_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \|u^\varepsilon - u^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega)}.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу оценки (4.3), а второе слагаемое стремится к нулю, поскольку $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$ ограничены постоянной, не зависящей от ε, и $\operatorname{mes}\Omega^\varepsilon\setminus\Omega\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Покажем теперь, что условие $C4$ также имеет место. Пусть $\sup_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}<\infty$. Тогда $\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}<\infty$, $u^\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon$. Рассмотрим продолжения $P_\varepsilon u^\varepsilon\in H^1(\Omega_{(\delta)})$ функций u^ε, построенные в лемме 4.3. В силу компактности вложения $H^1(\Omega_{(\delta)})\subset L^2(\Omega_{(\delta)})$ существуют $U\in H^1(\Omega_{(\delta)})$ и подпоследовательность $\varepsilon'\to 0$, такие, что

$$\|P_{\varepsilon'}u^{\varepsilon'}-U\|_{L^2(\Omega_{(\delta)})}\to 0 \text{ при } \varepsilon'\to 0. \tag{4.16}$$

Тогда

$$\|\mathcal{A}_{\varepsilon'}f^{\varepsilon'}-R_{\varepsilon'}U\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon'})}=\|P_{\varepsilon'}u^{\varepsilon'}-U\|^2_{L^2(\Omega)}+\|P_{\varepsilon'}u^{\varepsilon'}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon'}\setminus\Omega)}.$$

Отсюда, из (4.16) и леммы 1.5 гл. I следует C4.

Таким образом, мы установили выполнение условий C1—C4 § 1 и можем применить теоремы 1.9, 1.12 для оценки близости собственных значений и собственных функций задач (4.1), (4.2) точно так же, как это было сделано в § 2 для краевых задач теории упругости.

Теорема 4.5. *Пусть λ_ε^k, λ_0^k — k-е собственные значения задач* (4.14), (4.15) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_\varepsilon^k-\lambda_0^k|\leqslant c_k\varepsilon^{1/2},\quad k=1,2,\ldots,$$

где постоянные c_k не зависят от ε

Если кратность собственного значения $\lambda_0^{l+1}=\lambda_0$ равна m, т. е. $\lambda_0^l<\lambda_0^{l+1}=\ldots=\lambda_0^{l+m}<\lambda^{l+m+1}$, $\lambda_0^0=0$, и u_0 — собственная функция задачи (4.15), *соответствующая λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}=1$, то существует последовательность $\{\bar u_\varepsilon\}$, такая, что*

$$\|\bar u_\varepsilon-u_0\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M_l\varepsilon^{1/2},$$

где M_l — постоянная, не зависящая от ε, u_0; $\bar u_\varepsilon$ — линейная комбинация собственных функций задачи (4.14), *отвечающих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{l+1},\ldots,\lambda_\varepsilon^{l+m}$.*

Замечание 4.6. Случай $\psi(\eta)>0$, т. е. $\Omega\subset\Omega^\varepsilon$, рассмотрен лишь ради простоты. Аналогично, проведя несколько более сложные вычисления, можно доказать теоремы о близости решений и собственных значений задач (4.14), (4.15), если $\psi(\eta)$ знакопеременна

Замечание 4.7. Построив пограничные слои, можно также получить оценки отклонения решений задач (4.1), (4.2) порядка ε.

Замечание 4.8. Методы, использованные в этом параграфе, применимы и в случае n независимых переменных, когда граница $\partial\Omega$ в локальных координатах имеет вид $\{x: x_n=\psi(\hat x)\}$, а граница $\partial\Omega^\varepsilon$ имеет вид $\left\{x: x_n=\psi(\hat x)+\varepsilon g(\hat x)\varphi\left(\frac{\hat x}{\varepsilon}\right)\right\}$, где $\hat x=(x_1,\ldots,$

x_{n-1}) пробегает ограниченное открытое множество $G\subset\mathbf{R}^{n-1}, g(\hat{x})\in$ $\in C_0^\infty(G)$, $\varphi(\hat{\eta})=1$- периодическая по η гладкая функция.

Замечание 4.9. Аналогичная задача может быть рассмотрена для системы теории упругости.

Основные результаты этого параграфа другим путем получены в работе [4] (см. также [91]).

§ 5. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛ С КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и с плотностью, постоянной всюду в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, кроме малой окрестности некоторой ее внутренней точки $\mathcal{O}$. Предполагаем, что точка $\mathcal{O}$ является началом координат в $\mathbf{R}^n$, Ω — ограниченная гладкая область.

Пусть задача на собственные значения имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u_\varepsilon^k=-\lambda_\varepsilon^k\left(1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)u_\varepsilon^k \text{ в } \Omega,\\
&u_\varepsilon^k=0 \text{ на } \partial\Omega,\\
&\int\limits_\Omega\left[1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]u_\varepsilon^k u_\varepsilon^l dx=\delta_{kl},\quad 0<\lambda_\varepsilon^1\leqslant\lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots,
\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

где $\varepsilon>0$, λ_ε^j занумерованы в неубывающем порядке и с учетом кратности, $\chi(\xi)$ — ограниченная измеримая функция, $\chi(\xi)>M=$ $=\mathrm{const}>0$, если $\xi\in G$, $\chi(\xi)=0$ при $\xi\notin G$, G — открытое множество положительной меры, такое, что $\bar{G}\subset\Omega$, $\mathcal{O}\in G$.

Изучим поведение собственных значений и собственных функций задачи (5.1) при $\varepsilon\to 0$, $n\geqslant 3$ и различных действительных m.

Возможны три качественно различных случая.

1) $-\infty<m<2$. При таком m собственное значение задачи (5.1) с номером k стремится при $\varepsilon\to 0$ к k-му собственному значению задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω.

2) $m>2$. В этом случае $\lambda_\varepsilon^k\varepsilon^{2-m}$, где λ_ε^k — k-е собственное значение задачи (5.1), стремится к k-му собственному значению задачи для оператора Лапласа в $\mathbf{R}^n$ вида

$$\Delta_\xi u^k=-\Lambda_0^k\chi(\xi)u^k,\quad \xi\in\mathbf{R}^n,\quad \|\nabla_\xi u^k\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}<\infty.\tag{5.2}$$

3) $m=2$. Множество предельных при $\varepsilon\to 0$ точек спектра задачи (5.1) состоит из точек спектра задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω и точек спектра задачи (5.2).

Поведение собственных значений задачи (5.1) будет изучено на основе общей схемы, описанной в § 1 гл. III. Для этого при каждом m нужно подходящим образом ввести пространства $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\varepsilon, \mathcal{V}$, операторы $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon, R_\varepsilon$ и проверить выполнение условий С1—С4

Задача о собственных колебаниях тел с присоединенными массами другими методами изучалась в работах [146; 133; 67—69; 83; 14—18] (см. также [147; 97; 96]).

Нам потребуются следующие вспомогательные сведения.

Для любой $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ $(n \geqslant 3)$ справедливо неравенство Харди

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^2 |x|^{-2} dx \leqslant c \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla_x u|^2 dx, \tag{5.3}$$

где постоянная c не зависит от u (см. [45; 47]).

Лемма 5.1. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любой* $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \int_{\varepsilon G} |u|^2 dx = 0 \tag{5.4}$$

и справедливо неравенство

$$\int_{\varepsilon G} |u|^2 dx \leqslant c\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla_x u|^2 dx, \tag{5.5}$$

где постоянная c не зависит от ε, u; множества G, Ω те же, что и в (5.1).

Доказательство. Оценка (5.5) вытекает непосредственно из неравенства Харди. Установим соотношение (5.4).

Для любого $\delta > 0$ рассмотрим функцию $v_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$, такую, что $c^{1/2} \|u - v_\delta\|_{H_0^1(\Omega)} < \delta$, где c — постоянная в неравенстве (5.5). Тогда, пользуясь оценкой (5 5) для $u - v_\delta$, имеем

$$\left(\int_{\varepsilon G} \varepsilon^{-2} |u|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\varepsilon G} \varepsilon^{-2} |u - v_\delta|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\varepsilon G} \varepsilon^{-2} |v_\delta|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla (u - v_\delta)|^2 dx\right)^{1/2} + c_\delta \varepsilon^{n/2-1} \leqslant \delta + c_\delta \varepsilon^{n/2-1}.$$

Поскольку $n > 2$, отсюда следует сходимость (5.4). Лемма доказана.

Лемма 5.2 *Пусть $u^\varepsilon(x)$ — решение задачи*

$$\Delta_x u^\varepsilon(x) = -\left(\alpha + \beta \varepsilon^{-m} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) f^\varepsilon(x) \text{ в } \Omega,$$

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \ \alpha, \beta \in [0, 1], \ m > -\infty, \ n \geqslant 3.$$

Тогда имеет место оценка

$$\int_\Omega |\nabla_x u^\varepsilon|^2\,dx \leqslant c\left[\alpha^2\int_\Omega |f^\varepsilon|^2\,dx + \beta^2\varepsilon^{2-m}\int_{\varepsilon G}\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|f^\varepsilon|^2\,dx\right], \quad (5.6)$$

где постоянная c не зависит от α, β, m.

Доказательство. Из интегрального тождества, учитывая (5.5) и неравенство Фридрихса, получаем

$$\int_\Omega |\nabla_x u^\varepsilon|^2\,dx = \alpha\int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dx + \beta\varepsilon^{-m}\int_{\varepsilon G}\chi f^\varepsilon u^\varepsilon dx \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\Big(\int_\Omega |f^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2} + \beta\varepsilon^{-m}\Big(\int_{\varepsilon G}\chi\,|f^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int_{\varepsilon G}\chi\,|u^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant c_1\alpha\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla_x u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\beta c_2\varepsilon^{-m+1}\Big(\int_{\varepsilon G}\chi\,|f^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает неравенство (5.6). Лемма доказана.

5.2. Случай $-\infty<m<2$, $n\geqslant 3$

Обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int_\Omega\left(1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)f^\varepsilon g^\varepsilon dx, \quad (5.7)$$

$$(f^0, g^0)_{\mathcal{H}_0} = \int_\Omega f^0 g^0 dx \quad (5.8)$$

соответственно. В качестве $\mathcal{V}$ возьмем пространство $H_0^1(\Omega)$. Положим $R_\varepsilon f^0 = f^0$ для любой $f^0\in\mathcal{H}_0$. Если $f^0\in\mathcal{V}$, то

$$(R_\varepsilon f^0, R_\varepsilon f^0)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int_\Omega |f^0|^2\,dx + \varepsilon^{2-m}\int_{\varepsilon G}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-2}|f^0|^2\,dx \to$$

$$\to (f^0, f^0)_{\mathcal{H}_0} \text{ при } \varepsilon\to 0$$

в силу леммы 5.1. Это означает, что справедливо условие C1 при $\gamma=1$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\varepsilon:\mathcal{H}_\varepsilon\to\mathcal{H}_\varepsilon$ оператор, ставящий в соответствие функции $f^\varepsilon\in\mathcal{H}_\varepsilon$ решение u^ε задачи Дирихле

$$\Delta_x u^\varepsilon = -\left(1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)f^\varepsilon \text{ в } \Omega,\quad u^\varepsilon\in H_0^1(\Omega). \quad (5.9)$$

Через $\mathcal{A}_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ обозначим оператор, переводящий $f^0 \in \mathcal{H}_0$ в решение u^0 задачи Дирихле

$$\Delta_x u^0 = -f^0(x) \text{ в } \Omega, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega). \tag{5.10}$$

Легко проверить, что операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}_0$ являются положительными компактными и самосопряженными в пространствах $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно. Неравенство $\sup\limits_\varepsilon \|\mathcal{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon)} < \infty$ следует из (5.6), поскольку при $m<2$ в силу (5.5), (5.6) и неравенства Фридрихса

$$\int\limits_\Omega (1+\varepsilon^{-m}\chi)\,|u^\varepsilon|^2\,dx \leqslant c \int\limits_\Omega (1+\varepsilon^{-2}\chi)\,|u^\varepsilon|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \leqslant c_2 \int\limits_\Omega (1+\varepsilon^{-m}\chi)\,|f^\varepsilon|^2\,dx.$$

Таким образом, условие C2 имеет место.

Докажем выполнение условия C3. Пусть $f^0 \in \mathcal{H}_0$. Тогда

$$\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 = u^\varepsilon, \quad R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 = u^0,$$

где

$$\Delta u^\varepsilon = -\left(1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) f^0 \text{ в } \Omega, \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$\Delta u^0 = -f^0 \text{ в } \Omega, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega).$$

Согласно лемме 5.2 при $\alpha=0$ имеем

$$\int\limits_\Omega |\nabla_x (u^\varepsilon - u^0)|^2\,dx \leqslant c\varepsilon^{2-2m} \int\limits_{\varepsilon G} |f^0|^2\,dx. \tag{5.11}$$

Пользуясь оценкой (5.5) и неравенством Фридрихса, устанавливаем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int\limits_\Omega (1+\varepsilon^{-m}\chi)\,|u^\varepsilon - u^0|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \int\limits_\Omega |\nabla (u^\varepsilon - u^0)|^2\,dx + c_1\varepsilon^{2-m} \int\limits_\Omega |\nabla (u^\varepsilon - u^0)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int\limits_\Omega |\nabla (u^\varepsilon - u^0)|^2\,dx.$$

Отсюда и из (5.11) заключаем, что

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant c_3 \varepsilon^{2-2m} \int\limits_{\varepsilon G} |f^0|^2\,dx \tag{5.12}$$

для любой $f^0 \in \mathcal{H}_0$, где c_3 — не зависящая от ε и f^0 постоянная.

Если $f^0 \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, то по лемме 5.1 при $\varepsilon \to 0$ имеем $\varepsilon^{-1}\|f^0\|_{L^2(\varepsilon G)} \to 0$. Поэтому из (5.12) в силу того, что $m<2$, следует сходимость (1.13).

Докажем справедливость условия С4.

Если $\sup\limits_{\varepsilon} \|f^{\varepsilon}\|_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} < \infty$, то из (5.6) вытекает, что $\sup\limits_{\varepsilon} \|u^{\varepsilon}\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$, где u^{ε} — решение задачи (5.9). Следовательно, существуют $w^0 \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{V}$ и подпоследовательность $\varepsilon' \to 0$, такие, что

$$u^{\varepsilon'} \to w^0 \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^2(\Omega). \tag{5.13}$$

Поэтому, пользуясь неравенством (5.5), выводим

$$\|\mathcal{A}_{\varepsilon} f^{\varepsilon} - R_{\varepsilon} w^0\|^2_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} = \int\limits_{\Omega} \left(1 + \varepsilon^{-m} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) |u^{\varepsilon} - w^0|^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon} - w^0|^2 \, dx + c_1 \varepsilon^{-m} \int\limits_{\varepsilon G} |u^{\varepsilon} - w^0|^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon} - w^0|^2 \, dx + c_1 \varepsilon^{2-m} \int\limits_{\Omega} |\nabla (u^{\varepsilon} - w^0)|^2 \, dx,$$

где $u^{\varepsilon} = \mathcal{A}_{\varepsilon} f^{\varepsilon}$ и постоянная c_1 не зависит от ε. Отсюда получаем соотношение (1.14), так как $m < 2$ и имеет место сходимость (5.13).

Таким образом, условие С4 выполнено и, значит, можем применить теоремы 1.9, 1.12.

Задача на собственные значения для оператора $\mathcal{A}_0$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u_0^k = -\lambda_0^k u_0^k \text{ в } \Omega, \quad u_0^k \in H_0^1(\Omega), \\ &\int\limits_{\Omega} u_0^k u_0^l \, dx = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots, \\ &\mu_0^k = \frac{1}{\lambda_0^k}, \quad \mathcal{A}_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Теорема 5.3. *Пусть $m < 2$, $n \geqslant 3$ и λ_0^k, λ_{ε}^k являются собственными значениями задач* (5.14), (5.1) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_0^k - \lambda_{\varepsilon}^k| \leqslant c_k \varepsilon^{1 + \frac{n}{2} - m}, \tag{5.15}$$

где постоянная c_k не зависит от ε.

Если кратность собственного значения λ_0 задачи (5.14) *равна r, т. е. $\lambda_0 = \lambda_0^{l+1} = \ldots = \lambda_0^{l+r}$, то для любой собственной функции u_0 задачи* (5.14), *соответствующей собственному значению λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\bar{u}^{\varepsilon}$ собственных функций задачи* (5.1), *соответствующих собственным значениям $\lambda_{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon}^{l+r}$, такая, что*

$$\left[\int\limits_G \left(1+\varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)|\overline{u}^{\varepsilon}|-u_0|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant c_l\varepsilon^{1+\frac{n}{2}-m}, \qquad (5.16)$$

где постоянная c_l не зависит от ε и u_0.

Доказательство. Как было показано, для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_0$ справедливы условия C1—C4, и поэтому имеют место теоремы 1.9, 1.12. Для вывода оценок (5.15), (5.16) из (1.21), (1.34) достаточно заметить, что $\mu_\varepsilon^k=(\lambda_\varepsilon^k)^{-1}$, $\mu_0^k=(\lambda_0^k)^{-1}$ и, кроме того, любая собственная функция оператора $\mathcal{A}_0$ является гладкой, поэтому, как следует из (5.12) при $f^0\in N(\mu_0^k,\ \mathcal{A}_0)$, имеем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0-R_\varepsilon\mathcal{A}_0 f^0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}\leqslant c_1\varepsilon^{1+\frac{n}{2}-m}.$$

5.3. Случай $m>2,\ n\geqslant 3$

Перейдем в задаче (5.1) к переменным $\xi=\varepsilon^{-1}x$. Положим

$$\begin{gathered}\lambda_\varepsilon^k\varepsilon^{2-m}=\Lambda_\varepsilon^k,\quad \Omega^\varepsilon=\varepsilon^{-1}\Omega,\\ v_\varepsilon^k(\xi)=\varepsilon^{\frac{n-m}{2}}u_\varepsilon^k(\varepsilon\xi).\end{gathered}\qquad (5.17)$$

Тогда задачу (5.1) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_\xi v_\varepsilon^k=-\Lambda_\varepsilon^k(\varepsilon^m+\chi(\xi))v_\varepsilon^k \quad \text{в } \Omega^\varepsilon,\quad v_\varepsilon^k\in H_0^1(\Omega^\varepsilon),\\ &\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\varepsilon^m+\chi(\xi))v_\varepsilon^k v_\varepsilon^j\,d\xi=\delta_{kj},\\ &0<\Lambda_\varepsilon^1\leqslant\Lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots\leqslant\Lambda_\varepsilon^k\leqslant\ldots\ .\end{aligned}\right\}\qquad (5.18)$$

Изучим поведение собственных значений и собственных функций этой задачи при $\varepsilon\to 0$.

Введем сначала оператор, спектр которого является предельным при $\varepsilon\to 0$ для собственных значений задач (5.18).

Обозначим через H пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_H^2=\int\limits_{\mathbf{R}^n}(|u|^2|\xi|^{-2}+|\nabla_\xi u|^2)\,d\xi. \qquad (5.19)$$

В силу неравенства Харди (5.3) для любой $u\in H$ имеем $\|u\|_H\leqslant c_0\|\nabla_\xi u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$. Поэтому норма (5.19) в H эквивалентна норме $\|\nabla_\xi u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$.

Рассмотрим задачу

$$\Delta_\xi u^0=-\chi(\xi)f^0 \quad \text{в } \mathbf{R}^n,\quad u^0\in H,\quad f^0\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n). \qquad (5.20)$$

Определим обобщенное решение задачи (5.20) как функцию $u^0 \in H$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi_i} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi = \int\limits_G \chi(\xi) f^0 v \, d\xi \quad \forall v \in H. \tag{5.21}$$

В силу теоремы 1.3 гл. I это обобщенное решение существует и для него справедлива оценка

$$\| u^0 \|_H \leqslant c \| f^0 \|_{L^2(G)}. \tag{5.22}$$

Это неравенство вытекает из (5.21) при $v = u^0$ и неравенства Харди.

Определим пространство $\mathcal{H}_0$ в $L^2(G)$ со скалярным произведением

$$(f^0, g^0)_{\mathcal{H}_0} = \int\limits_G \chi(\xi) f^0 g^0 \, d\xi.$$

Всюду далее считаем, что функции из $\mathcal{H}_0$ продолжены нулем на $\mathbf{R}^n \setminus G$. Поэтому можем считать, что любая функция из $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, обращающаяся в нуль вне G, принадлежит пространству $\mathcal{H}_0$.

Зададим оператор $\mathcal{A}_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, полагая $\mathcal{A}_0 f^0 = \varkappa_G(\xi) u^0$, где $\varkappa_G$ — характеристическая функция множества G, $u^0 \in H$ — решение задачи (5.20).

Покажем, что $\mathcal{A}_0$ — положительный самосопряженный оператор. Действительно, пусть $\mathcal{A}_0 f^0 = \varkappa_G(\xi) u^0$, $\mathcal{A}_0 g^0 = \varkappa_G(\xi) v^0$, где u^0 — решение задачи (5.20), а v^0 — решение задачи (5.20) при $f^0 = g^0$. Пользуясь интегральным тождеством (5.21), получаем

$$(\mathcal{A}_0 f^0, g^0)_{\mathcal{H}_0} = \int\limits_G \chi(\xi) u^0 g^0 \, d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi_i} \frac{\partial v^0}{\partial \xi_i} d\xi,$$

$$(f^0, \mathcal{A}_0 g^0)_{\mathcal{H}_0} = \int\limits_G \chi(\xi) v^0 f^0 d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial v^0}{\partial \xi_i} \frac{\partial u^0}{\partial \xi_i} d\xi.$$

Из этих равенств вытекают положительность и самосопряженность оператора $\mathcal{A}_0$. Докажем его компактность. Пусть $\sup\limits_s \| f^s \|_{\mathcal{H}_0} < \infty$, $f^s = 0$ вне G. Пусть u^s — решения задач $\Delta_\xi u^s = -\chi(\xi) f^s$ в $\mathbf{R}^n$, $u^s \in H$. По определению $\mathcal{A}_0 f^s = \varkappa_G(\xi) u^s$. Из оценки (5.22) и неравенства Харди следует, что $\sup\limits_s \| u^s \|_{H^1(G_1)} < \infty$ для любого ограниченного измеримого множества G_1, содержащего G. Поэтому существует подпоследовательность $s' \to 0$ и $u^0 \in L^2(G)$, такие, что $u^{s'} \to u^0$ по норме $L^2(G)$ и, значит, $\mathcal{A}_0 f^{s'} \to \varkappa_G(\xi) u^0$ по норме $\mathcal{H}_0$ при $s' \to 0$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_\xi u^\varepsilon = -(\alpha \varepsilon^m + \chi(\xi)) f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon), \quad f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon), \quad \alpha = \text{const} \in [0, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Лемма 5.4. *Пусть $m \geqslant 2$. Тогда для решения u^ε задачи* (5.23) *справедлива оценка*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_\xi u^\varepsilon|^2 d\xi \leqslant c \int_{\Omega^\varepsilon} (\alpha\varepsilon^m + \chi(\xi)) |f^\varepsilon|^2 d\xi, \tag{5.24}$$

где постоянная c не зависит от ε, α.

Доказательство. Из интегрального тождества для u^ε имеем

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_\xi u^\varepsilon|^2 d\xi = \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha\varepsilon^m f^\varepsilon u^\varepsilon d\xi + \int_G \chi(\xi) f^\varepsilon u^\varepsilon d\xi \leqslant \frac{\alpha\varepsilon^m}{2\delta} \int_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 d\xi +$$

$$+ \frac{\delta}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha\varepsilon^m |u^\varepsilon|^2 d\xi + \frac{1}{2\delta} \int_G \chi(\xi) |f^\varepsilon|^2 d\xi + \frac{\delta}{2} \int_G \chi(\xi) |u^\varepsilon|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega^\varepsilon} (\alpha\varepsilon^m + \chi(\xi)) |f^\varepsilon|^2 d\xi + \frac{\delta}{2} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \alpha\varepsilon^m |u^\varepsilon|^2 d\xi + \int_G \chi(\xi) |u^\varepsilon|^2 d\xi \right).$$

Выбирая δ достаточно малым и учитывая неравенства Харди и Фридрихса, отсюда выводим (5.24). Лемма доказана.

Определим пространство $\mathscr{H}_\varepsilon$ как $L^2(\Omega^\varepsilon)$ со скалярным произведением

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon)_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} (\varepsilon^m + \chi(\xi)) f^\varepsilon g^\varepsilon d\xi.$$

Через $R_\varepsilon : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_\varepsilon$ обозначим оператор продолжения $f^0 \in L^2(G)$ нулем на $\Omega^\varepsilon \setminus G$. Положим $\mathscr{V} = \mathscr{H}_0$. Проверим, что выполнено условие C1.

Легко видеть, что

$$\| R_\varepsilon f^0 \|^2_{\mathscr{H}_\varepsilon} = \int_G (\varepsilon^m + \chi(\xi)) |f^0|^2 d\xi \leqslant c \| f^0 \|_{\mathscr{H}_0},$$

причем $\| R_\varepsilon f^0 \|_{\mathscr{H}_\varepsilon} \to \| f^0 \|_{\mathscr{H}_0}$ при $\varepsilon \to 0$.

Введем операторы $\mathscr{A}_\varepsilon : \mathscr{H}_\varepsilon \to \mathscr{H}_\varepsilon$, полагая $\mathscr{A}_\alpha f^\varepsilon = u^\varepsilon$, где u^ε—решение задачи

$$\Delta_\xi u^\varepsilon = -(\varepsilon^m + \chi(\xi)) f^\varepsilon \text{ в } \Omega^\varepsilon \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \tag{5.25}$$

Нетрудно показать, что $\mathscr{A}_\varepsilon$ — положительный самосопряженный компактный оператор в $\mathscr{H}_\varepsilon$. Из оценки (5.24) вытекает, что $\sup_\varepsilon \| \mathscr{A}_\varepsilon \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_\varepsilon)} < \infty$, поскольку в силу неравенств Харди и Фридрихса

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \varepsilon^m |u^\varepsilon|^2 d\xi + \int_G |u^\varepsilon|^2 d\xi \leqslant c(\varepsilon^{m-2} + 1) \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_\xi u^\varepsilon|^2 d\xi, \quad m > 2.$$

Докажем выполнение условия С3. Пусть $f^0 \in \mathcal{H}_0$. Тогда $\mathcal{A}_0 f^0 = \varkappa_G(\xi) u^0$, где u^0—решение задачи (5.20); $R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 = \varkappa_G u^0$, $\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 = u^\varepsilon$, где u^ε является решением задачи

$$\Delta_\xi u^\varepsilon = -(\varepsilon^m + \chi(\xi))\, \chi_G(\xi) f^0, \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \tag{5.26}$$

Тогда

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\varepsilon^m + \chi) | u^\varepsilon - u^0 \varkappa_G(\xi)|^2 d\xi. \tag{5.27}$$

Для $u^0 - u^\varepsilon$ имеем

$$\Delta_\xi (u^0 - u^\varepsilon) = \varepsilon^m \varkappa_G f^0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad u^0 - u^\varepsilon = u^0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon. \tag{5.28}$$

Обозначим через w^ε решение задачи

$$\Delta_\xi w^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad w^\varepsilon = u^0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon. \tag{5.29}$$

Функция u^0 является гармонической в $R^n \setminus G$ и $u^0 \in H$, поэтому, как известно [47; 124], при достаточно больших $|\xi|$ имеем

$$|u^0(\xi)| \leqslant c \| f^0 \|_{L^2(G)} |\xi|^{2-n}. \tag{5.30}$$

Это неравенство вытекает из представления решения $u^0(\xi)$ в виде

$$u^0(\xi) = C_n \int\limits_G f^0(\eta) |\xi - \eta|^{2-n} d\eta, \quad C_n = \text{const}.$$

В силу принципа максимума

$$|w^\varepsilon(\xi)| \leqslant c_1 \varepsilon^{n-2} \| f^0 \|_{L^2(G)}, \quad \xi \in \Omega^\varepsilon. \tag{5.31}$$

Тогда $v^\varepsilon = u^0 - u^\varepsilon - w^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$,

$$\Delta_\xi v^\varepsilon = \varepsilon^m \varkappa_G(\xi) f^0 \text{ в } \Omega^\varepsilon.$$

Пользуясь леммой 5.4 при $u^\varepsilon = v^\varepsilon$, $\alpha = 0$, $\varkappa_G = \chi$, $f^\varepsilon = f^0 \varepsilon^m$, а также неравенствами Харди и Фридрихса, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varepsilon^2 |u^0 - u^\varepsilon - w^\varepsilon|^2 d\xi + \int\limits_G |u^0 - u^\varepsilon - w^\varepsilon|^2 d\xi \leqslant c \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla_\xi v^\varepsilon|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \varepsilon^{2m} \int\limits_G |f^0|^2 d\xi. \tag{5.32}$$

Из (5.32) выводим, учитывая (5.30), (5.31), что

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon \mathcal{A}_0 f^0 \|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\varepsilon^m + \chi) |u^\varepsilon - u^0 + u^0(1 - \varkappa_G)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_G (\varepsilon^m + \chi) |u^\varepsilon - u^0|^2 d\xi + 2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon \setminus G} \varepsilon^m |u^\varepsilon - u^0|^2 d\xi + 2\varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon \setminus G} |u^0|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_3\Big[\int_G |u^\varepsilon-u^0-w^\varepsilon|^2\,d\xi+\int_G |w^\varepsilon|^2\,d\xi+\int_{\Omega^\varepsilon\setminus G}\varepsilon^m|u^\varepsilon-u^0-w^\varepsilon|^2\,d\xi+$$

$$+\int_{\Omega^\varepsilon\setminus G}\varepsilon^m|w^\varepsilon|^2\,d\xi+2\int_{\Omega^\varepsilon\setminus G}\varepsilon^m|u^0|^2\,d\xi\Big]\leqslant$$

$$\leqslant c_4[\varepsilon^{2m}+\varepsilon^{2n-4}+\varepsilon^{3m-2}+\varepsilon^{m+n-4}]\,\|f^0\|^2_{L^2(G)}+c_5\varepsilon^m\int_{\Omega^\varepsilon\setminus G}|u^0|^2\,d\xi.$$

В силу (5.30) имеем

$$\varepsilon^m\int_{\Omega^\varepsilon\setminus G}|u^0|^2\,d\xi\leqslant c_6\varepsilon^m\,\|f^0\|^2_{L^2(G)}\int_1^{K\varepsilon^{-1}} r^{4-2n}r^{n-1}\,dr.$$

Легко видеть, что

$$\alpha_n(\varepsilon)\equiv\int_1^{K\varepsilon^{-1}} r^{3-n}\,dr\leqslant\begin{cases} M_1\varepsilon^{-1} & \text{при}\quad n=3;\\ M_2|\ln\varepsilon^{-1}| & \text{при}\quad n=4;\\ M_3 & \text{при}\quad n>4,\end{cases}\tag{5.33}$$

где постоянные M_1, M_2, M_3 не зависят от ε. Поэтому

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0-R_\varepsilon\mathcal{A}_0 f^0\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon}\leqslant c\,[\varepsilon^{2n-4}+\varepsilon^{m-\gamma_n}]\,\|f^0\|^2_{L^2(\Omega)},\tag{5.34}$$

где

$$\gamma_3=1,\quad \gamma_4=\mathrm{const}\in(0,\ 1],\quad \gamma_n=0\ \text{при}\ n>4.\tag{5.35}$$

Отсюда следует выполнение условия С3.

Проверим равномерную компактность операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ (условие С4). Пусть $\sup\limits_\varepsilon\|f^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}<\infty$. Из неравенства (5.24) и неравенства Харди (5.3) следует, что $\sup\limits_\varepsilon\|u^\varepsilon\|_{H^1(Q_1)}<\infty$, где Q_1—шар, содержащий G, $u^\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon$. В силу компактности вложения $H^1(Q_1)\subset L^2(Q_1)$ существуют подпоследовательность $\varepsilon'\to 0$ и функция $\tilde{w}$, такие, что $\|u^{\varepsilon'}-\tilde{w}\|_{L^2(Q_1)}\to\to 0$ при $\varepsilon'\to 0$. Полагая $w^0(\xi)=\tilde{w}(\xi)$ при $\xi\in G$, $w^0(\xi)=0$ при $\xi\in\in\mathbb{R}^n\setminus G$, получим, что

$$\|u^{\varepsilon'}-w^0\|_{L^2(G)}\to 0\ \text{при}\ \varepsilon'\to 0.\tag{5.36}$$

Пользуясь неравенством Фридрихса, получаем

$$\|\mathcal{A}_{\varepsilon'}f^{\varepsilon'}-R_{\varepsilon'}w^0\|^2_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}}=\int_{\Omega^{\varepsilon'}}((\varepsilon')^m+\chi)\,|u^{\varepsilon'}-\varkappa_G w^0|^2\,d\xi=$$

$$=\int_G((\varepsilon')^m+\chi)\,|u^{\varepsilon'}-w^0|^2d\xi+\int_{\Omega^{\varepsilon'}\setminus G}(\varepsilon')^m|u^{\varepsilon'}|^2\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\int_G((\varepsilon')^m+\chi)\,|u^{\varepsilon'}-w^0|^2\,d\xi+(\varepsilon')^{m-2}\int_{\Omega^{\varepsilon'}}|\nabla_\xi u^{\varepsilon'}|^2\,d\xi\Big).$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к нулю вследствие (5.36), а второе стремится к нулю в силу (5.24). Это означает, что условие С4 также имеет место.

Аналогично теореме 5.3 на основе оценки (5.34) и теорем 1.9, 1.12 устанавливается теорема об асимптотике собственных значений и собственных функций задачи (5.18). Предельная задача на собственные значения имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_\xi U^k = -\Lambda_0^k \chi(\xi) U^k \text{ в } \mathbf{R}^n,\ U^k \in H,\\ &\int_G \chi(\xi) U^k(\xi) U^l(\xi)\, d\xi = \delta_{kl},\\ &0 < \Lambda_0^1 \leqslant \Lambda_0^2 \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_0^k \leqslant \ldots .\end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Как следует из оценки (5.34) и теоремы 1.9, для собственных значений задач (5.18) и (5.37) справедливы неравенства

$$|(\Lambda_\varepsilon^k)^{-1} - (\Lambda_0^k)^{-1}| \leqslant c_k(\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{(m-\gamma_n)/2}), \tag{5.38}$$

где постоянная c_k не зависит от ε.

Из теоремы 1.12 вытекает, что для любой собственной функции U задачи (5.37), такой, что $\int_G \chi(\xi)|U|^2 d\xi = 1$, отвечающей собственному значению Λ_0 кратности $r\,(\Lambda_0 = \Lambda_0^{s+1} = \ldots = \Lambda_0^{s+r})$, существует последовательность V^ε, такая, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |V^\varepsilon(\xi) - \varkappa_G(\xi) U(\xi)|^2 (\chi(\xi) + \varepsilon^m)\, d\xi \leqslant c_s(\varepsilon^{2n-4} + \varepsilon^{m-\gamma_n}), \tag{5.39}$$

где V^ε — линейная комбинация собственных функций задачи (5.18), отвечающих собственным значениям $\Lambda_\varepsilon^{s+1}, \ldots, \Lambda_\varepsilon^{s+r}$, причем постоянная c_s не зависит от ε и U.

Таким образом, поскольку собственные значения и собственные функции задач (5.18) и (5.1) при $m>2$ связаны соотношениями (5.17), доказана

Теорема 5.5. *При $m>2$, $n\geqslant 3$ собственные значения задачи (5.1) имеют вид*

$$\lambda_\varepsilon^k = \Lambda_0^k \varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{m-2}\beta_\varepsilon^k,$$

где $\beta_\varepsilon^k \leqslant c_k(\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{(m-\gamma_n)/2})$, Λ_0^k — *собственное значение задачи* (5.37), γ_n *определено в* (5.35).

Для любой собственной функции U задачи (5.37), *такой, что* $\|\sqrt{\chi}\, U\|_{L^2(G)} = 1$, *отвечающей собственному значению Λ_0 кратности* r $(\Lambda_0 = \Lambda_0^{s+1} = \ldots = \Lambda_0^{s+r})$, *существует последовательность функций $\bar{u}^\varepsilon(x)$, являющихся линейными комбинациями собственных функций задачи* (5.1), *отвечающих собственным значениям* $\lambda_\varepsilon^{s+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{s+r}$, *такая, что для* $V^\varepsilon(\xi) = \bar{u}^\varepsilon(\varepsilon\xi)$ *имеет место оценка* (5.39).

5.4. Случай m=2, n⩾3

Рассмотрим задачу (5.1) при $m=2$, $n\geqslant 3$. Асимптотика собственных значений этой задачи при $\varepsilon\to 0$ определяется собственными значениями задач (5.37) и (5.14), точнее, собственными значениями следующей системы:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_\xi U_k^\infty(\xi)=-\Lambda_k\chi(\xi)U_k^\infty(\xi),\quad U_k^\infty\in H,\\
&\Delta_x u_0^k=-\Lambda_k u_0^k(x),\quad u_0^k\in H_0^1(\Omega),\\
&\int_G \chi(\xi)U_k^\infty U_l^\infty\,d\xi+\int_\Omega u_0^k(x)u_0^l(x)\,dx=\delta_{kl},\\
&0<\Lambda_1\leqslant\Lambda_2\leqslant\ldots.
\end{aligned}\right\}\tag{5.40}$$

Легко видеть, что мы имеем задачу на собственные значения в пространстве $\mathscr{H}_0=L^2(G)\times L^2(\Omega)$, элементами которого являются пары функций $(U(\xi),\ u(x))$ и скалярное произведение задано билинейной формой

$$\int_G \chi(\xi)U(\xi)V(\xi)\,d\xi+\int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Введем оператор $\mathscr{A}_0:\mathscr{H}_0\to\mathscr{H}_0$, соответствующий задаче (5.40) и переводящий элемент $(U(\xi),\ u(x))\in\mathscr{H}_0$ в элемент $(\varkappa_G(\xi)V(\xi),\ v(x))$, где $V(\xi)$, $v(x)$ являются решениями задач

$$\Delta_\xi V(\xi)=-\chi(\xi)U(\xi),\quad V\in H,$$
$$\Delta_x v(x)=-u(x),\quad v\in H_0^1(\Omega),$$

где $\varkappa_G(\xi)$ — характеристическая функция множества G.

Нетрудно проверить, что $\mathscr{A}_0$ — положительный, компактный самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_0$.

Определим пространство $\mathscr{H}_\varepsilon$ как $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением (5.7) при $m=2$. За $\mathscr{V}\subset\mathscr{H}_0$ возьмем пространство $L^2(G)\times\times H_0^1(\Omega)$.

Пусть $\bar U\in\mathscr{H}_0$, $\bar U=(U(\xi),\ u(x))$. Введем оператор $R_\varepsilon:\mathscr{H}_0\to\to\mathscr{H}_\varepsilon$ с помощью равенства

$$R_\varepsilon\bar U=u(x)+\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$\|R_\varepsilon\bar U\|^2_{\mathscr{H}_\varepsilon}=\int_\Omega\left(1+\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(u(x)+\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2dx=$$
$$=\int_\Omega(1+\varepsilon^{-2}\chi)|u|^2\,dx+\int_{\varepsilon G}(1+\varepsilon^{-2}\chi)\,\varepsilon^{2-n}\left|U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2dx+$$
$$+2\int_{\varepsilon G}(1+\varepsilon^{-2}\chi)\,u(x)\,\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx.$$

Если $\overline{U}\in\mathscr{V}$, то $u(x)\in H_0^1(\Omega)$. Поэтому по лемме 5.1 первый интеграл в правой части последнего равенства стремится к $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$. Очевидно, что второй интеграл при $\varepsilon\to 0$ стремится к $\int\limits_G \chi(\xi)|U(\xi)|^2\,d\xi$, а третий интеграл стремится к нулю. Поэтому $\|R_\varepsilon\overline{U}\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}\to\|\overline{U}\|_{\mathscr{H}_0}$ для любой $\overline{U}\in\mathscr{V}$ и, значит, справедливо условие C1.

Операторы $\mathscr{A}_\varepsilon:\mathscr{H}_\varepsilon\to\mathscr{H}_\varepsilon$ зададим равенством $\mathscr{A}_\varepsilon f^\varepsilon=u^\varepsilon$, где u^ε решение задачи (5.9) при $m=2$. Легко видеть, что $\mathscr{A}_\varepsilon$ — положительные, компактные и самосопряженные. Если $\sup\limits_\varepsilon\|f^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}<\infty$, то, как следует из леммы 5.2 при $m=2$, имеем

$$\sup_\varepsilon\|\nabla_x u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\leqslant c\sup_\varepsilon\|f^\varepsilon\|_{\mathscr{H}_\varepsilon}<\infty. \tag{5.41}$$

Из неравенства Фридрихса и оценки (5.5) заключаем, что

$$\|u^\varepsilon\|^2_{\mathscr{H}_\varepsilon}\leqslant\int\limits_\Omega(1+\varepsilon^{-2}\chi)|u^\varepsilon|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\int\limits_\Omega|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon G}|u^\varepsilon|^2\,dx\Big)\leqslant c_1\int\limits_\Omega|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx.$$

Поэтому в силу (5.41) $\sup\limits_\varepsilon\|\mathscr{A}_\varepsilon\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_\varepsilon)}<\infty$ и, следовательно, имеет место условие C2.

Докажем выполнение условия C3.

Пусть $f^0\in\mathscr{H}_0$, $f^0=(\Psi^0(\xi),\ \psi^0(x))$. Тогда $\mathscr{A}_0 f^0=(\varkappa_G(\xi)U(\xi),\ u(x))$, где

$$\Delta_x u=-\psi^0(x)\ \text{в}\ \Omega,\quad u\in H_0^1(\Omega),$$

$$\Delta_\xi U(\xi)=-\chi(\xi)\Psi^0(\xi),\quad U\in H,$$

$$R_\varepsilon\mathscr{A}_0 f^0=u(x)+\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{5.42}$$

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned}&R_\varepsilon f^0=\psi^0(x)+\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}\Psi^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad \mathscr{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0=w^\varepsilon,\\ &\Delta_x w^\varepsilon=-\left(1+\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left[\psi^0(x)+\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}\Psi^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right],\\ &w^\varepsilon\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

Обозначим через v^ε решение задачи Дирихле

$$\Delta_x v^\varepsilon=0\ \text{в}\ \Omega,\quad v^\varepsilon=\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\ \text{на}\ \partial\Omega. \tag{5.44}$$

Так как $U(\xi)$ — гармоническая функция вне G, то аналогично (5.30) имеем

$$|U(\xi)| \leqslant c\,\|\Psi^0\|_{L^2(G)} |\xi|^{2-n} \quad \text{при} \quad |\xi| > 1$$

и, значит,

$$\left|U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant c\varepsilon^{n-2}\|\Psi^0\|_{L^2(G)} \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega.$$

По принципу максимума отсюда следует, что

$$|v^{\varepsilon}(x)| \leqslant c_1 \varepsilon^{n/2-1}\|\Psi^0\|_{L^2(G)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{5.45}$$

где постоянная c_1 не зависит от ε. Функция $W^{\varepsilon}(x) = u(x) + \varepsilon^{1-n/2} \times U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - v^{\varepsilon}$ является решением задачи

$$\Delta_x W^{\varepsilon}(x) = -\psi^0(x) - \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}\Psi^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ в } \Omega, \; W^{\varepsilon} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{5.46}$$

Вычитая уравнение (5.43) из (5.46), получаем

$$\Delta_x(W^{\varepsilon} - w^{\varepsilon}) = \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi^0(x) + \varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}\Psi^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$
$$W^{\varepsilon} - w^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega). \tag{5.47}$$

Применим лемму 5.2 при $\alpha = 0$, $\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla_x(W^{\varepsilon} - w^{\varepsilon})|^2\,dx \leqslant c\left[\int_{\varepsilon G} \varepsilon^{-2}|\psi^0(x)|^2\,dx + \varepsilon^4 \int_{\varepsilon G} \varepsilon^{-n}\left|\Psi^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right]. \tag{5.48}$$

Учитывая (5.42), (5.43), имеем

$$\|\mathcal{A}_0 R_{\varepsilon} f^0 - R_{\varepsilon}\mathcal{A}_0 f^0\|^2_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} = \left\|w^{\varepsilon} - u(x) - \varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} =$$
$$= \left\|w^{\varepsilon} - u(x) - \varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v^{\varepsilon} + \left(1 - \varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^{1-n/2}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - v^{\varepsilon}\right\|^2_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int_{\Omega}\left(1 + \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)|w^{\varepsilon} - W^{\varepsilon}|^2\,dx + \int_{\Omega}\left(1 + \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)|v^{\varepsilon}|^2\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_{\Omega}\left(1 - \varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(1 + \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^{2-n}\left|U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla_x(W^\varepsilon-w^\varepsilon)|^2\,dx+\varepsilon^{n-2}\,\|\Psi^0\|^2_{L^2(G)}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-2}\cdot\varepsilon^n\cdot\varepsilon^{n-2}\,\|\Psi^0\|^2_{L^2(G)}+\int\limits_{\Omega\setminus\varepsilon G}\varepsilon^{2-n}\left|U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2dx\right). \qquad (5.49)$$

При выводе последнего неравенства мы воспользовались оценками (5.5) и (5.45). Поскольку $U(\xi)$ — гармоническая функция вне G, то, как показано в разделе 5.3,

$$\int\limits_{\Omega\setminus\varepsilon G}\varepsilon^{-n}\left|U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2dx\leqslant\alpha_n(\varepsilon)\,\|\Psi^0\|^2_{L^2(G)}, \qquad (5.50)$$

где $\alpha_n(\varepsilon)$ определяется соотношениями (5.33).

Таким образом, из (5.48) — (5.50) выводим

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0-R_\varepsilon\mathcal{A}_0 f^0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}\leqslant c\,[\varepsilon^{-1}\,\|\psi^0\|_{L^2(\varepsilon G)}+\varepsilon^2\,\|\Psi^0\|_{L^2(G)}+$$

$$+\varepsilon^{n/2-1}\,\|\Psi^0\|_{L^2(G)}+\varepsilon\alpha_n^{1/2}(\varepsilon)\,\|\Psi^0\|_{L^2(G)}]\quad\forall f^0=(\Psi^0(\xi),\ \psi^0(x))\in\mathcal{H}_0. \qquad (5.51)$$

Если $f^0\in\mathcal{V}$, то $\psi^0\in H^1_0(\Omega)$ и в силу леммы 5.1 первое слагаемое в правой части (5.51) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Поэтому из (5.51) следует, что справедливо условие С3, т. е. имеет место соотношение (1.13).

Заметим, что если $\psi^0(x)$ — гладкая функция, то из (5.51) получаем неравенство

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon R_\varepsilon f^0-R_\varepsilon\mathcal{A}_0 f^0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}\leqslant c_1\,[\varepsilon^2+\varepsilon^{n/2-1}+\varepsilon\alpha_n^{1/2}(\varepsilon)]\leqslant c_2\varepsilon^{(2-\gamma_n)/2}, \qquad (5.52)$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от ε, но зависят от f^0, γ_n — то же, что и в (5.35).

Установим теперь выполнение условия С4. Пусть

$$\left.\begin{aligned}
&\sup_\varepsilon\|f^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}<\infty,\\
&\Delta_x u^\varepsilon=-(1+\varepsilon^{-2}\chi)f^\varepsilon \text{ в } \Omega,\quad u^\varepsilon\in H^1_0(\Omega),\quad u^\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon,\\
&\Delta_x v^\varepsilon=-f^\varepsilon \text{ в } \Omega,\quad v^\varepsilon\in H^1_0(\Omega),\\
&\Delta_x w^\varepsilon=-\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f^\varepsilon \text{ в } \Omega,\quad w^\varepsilon\in H^1_0(\Omega).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.53)$$

В силу (5.53), компактности вложений $H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, $H^2(\Omega)\subset\subset H^1(\Omega)$, а также оценки $\|v^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ с постоянной c, не зависящей от ε (см. [10]), существуют подпоследовательность $\varepsilon'\to 0$ и функции u^0, $v^0\in H^1_0(\Omega)$, такие, что

$$\left.\begin{aligned}
&u^{\varepsilon'}\to u^0 \text{ слабо в } H^1_0(\Omega) \text{ и сильно в } L^2(\Omega),\\
&v^{\varepsilon'}\to v^0 \text{ сильно в } H^1_0(\Omega)
\end{aligned}\right\} \qquad (5.54)$$

при $\varepsilon'\to 0$.

Взяв в интегральном тождестве для w^ε пробную функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$\int_\Omega \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \varepsilon^{-2}\int_\Omega \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f^\varepsilon v\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon G}\chi|f^\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon G}\chi|v|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Первый сомножитель в правой части этого неравенства ограничен равномерно по ε, а второй стремится к нулю в силу соотношения (5.4). Поэтому $w^{\varepsilon'} \equiv u^{\varepsilon'} - v^{\varepsilon'} \to 0$ при $\varepsilon' \to 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и, значит, $v^0 = u^0$.

Функция $W^\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{n/2-1} w^\varepsilon(\varepsilon\xi)$ является решением задачи

$$\Delta_\xi W^\varepsilon(\xi) = -\chi(\xi)\,\varepsilon^{n/2-1} f^\varepsilon(\varepsilon\xi), \qquad W^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon),$$

причем $\int_G |\varepsilon^{n/2-1} f^\varepsilon(\varepsilon\xi)|^2\,d\xi = \varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon G}|f^\varepsilon|^2\,dx$. Поэтому $\sup_\varepsilon \|W^\varepsilon\|_H < \infty$ и существуют подпоследовательность $\varepsilon' \to 0$ и функция $W \in H$, такие, что

$$W^{\varepsilon'}(\xi) \to W(\xi) \text{ слабо в } H \text{ и сильно в } L^2(G_1) \tag{5.55}$$

для любого ограниченного измеримого $G_1 \subset \mathbf{R}^n$. Очевидно, что можно считать последовательность $\varepsilon' \to 0$ в (5.54), (5.55) одной и той же.

Обозначим через w^0 в условии C4 пару $(\varkappa_G(\xi) W(\xi),\ u^0(x))$. Тогда, учитывая равенство $u^\varepsilon = v^\varepsilon + w^\varepsilon$ и пользуясь леммой 5.1 для $v^\varepsilon - u^0$, получаем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon f^\varepsilon - R_\varepsilon w^0\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int_\Omega (1+\varepsilon^{-2}\chi)\left|u^\varepsilon - u^0 - \varkappa_G \varepsilon^{1-n/2} W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega\setminus\varepsilon G}|u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \int_{\varepsilon G}(1+\varepsilon^{-2}\chi)\left|v^\varepsilon - u^0 + w^\varepsilon - \varepsilon^{1-n/2} W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\int_\Omega |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \int_{\varepsilon G}(1+\varepsilon^{-2}\chi)|v^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon G}\left|w^\varepsilon - \varepsilon^{1-n/2} W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right] \leqslant c_1\left[\int_\Omega |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega |\nabla(v^\varepsilon - u^0)|^2\,dx + \int_{\varepsilon G}\varepsilon^{-n}\left|\varepsilon^{n/2-1} w^\varepsilon(x) - W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right].$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ в силу (5.54), (5.55), получаем соотношение (1.14).

Это означает, что справедливо условие С4, и мы можем применить теоремы 1.9, 1.12 для сравнения собственных значений и собственных функций задач (5.40), (5.1) при $m=2$.

Теорема 5.6. *Пусть* λ_ε^k *и* Λ^k — *собственные значения задач* (5.1) *и* (5.40) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_\varepsilon^k-\Lambda^k|\leqslant c_k\varepsilon^{(2-\gamma_n)/2}, \tag{5.56}$$

где γ_n *определено в* (5.35), *постоянная* c_k *не зависит от* ε.

Если Λ^0 — *собственное значение задачи* (5.40) *кратности* r, $\Lambda^{s+1}=\ldots=\Lambda^{s+r}=\Lambda^0$ и $\bar{U}=(U(\xi), u(x))$ — *соответствующая ему собственная функция*, $\|\bar{U}\|_{\mathscr{H}_0}=1$, *то при любом* ε *существует линейная комбинация* $\bar{u}^\varepsilon$ *собственных функций задачи* (5.1) *при* $m=2$, *отвечающих* $\lambda_\varepsilon^{s+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{s+r}$, *такая, что*

$$\int\limits_\Omega \left(1+\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left|\bar{u}^\varepsilon-u(x)-\varepsilon^{1-n/2}\varkappa_G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\leqslant M_s\varepsilon^{2-\gamma_n},$$

где постоянная M_s *не зависит от* ε, $\bar{U}$.

Отметим, что для получения неравенства (5.56) из (1.21) мы воспользовались гладкостью собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа и неравенством (5.52).

Замечание 5.7. Аналогично могут быть рассмотрены случаи $n=2$, $m\in\mathbf{R}^1$ и $n=1$, $m\in\mathbf{R}^1$. Другим путем эти задачи были рассмотрены в работах [67; 68; 133] и [83; 16—18].

§ 6. ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ МАЛОЙ СУММАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА ГРАНИЦЕ

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$ с гладкой границей, $G_0=\{x : |x|<1\}$ — единичный шар в $\mathbf{R}^3$. Положим $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\bigcup\limits_{z\in Z^3}(\varepsilon^3G_0+2\varepsilon z)$. Таким образом, Ω_ε — область с шарообразными полостями радиуса ε^3, расположенными периодически с периодом 2ε.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u_\varepsilon=f \text{ в } \Omega_\varepsilon,\\ &u_\varepsilon\in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\Delta+\mu)u=f \text{ в } \Omega,\\ &u\in H_0^1(\Omega),\ \mu=-\pi/2.\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Оценим разность $\|u_\varepsilon-u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$. Для этого, следуя [108], определим вспомогательную функцию $w_\varepsilon(x)$, $x\in\mathbf{R}^3$, следующим образом: $w_\varepsilon\in H_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$,

$$w_\varepsilon(x)=0 \text{ на } \bigcup_{z\in Z^3} (\varepsilon^3 G_0+2\varepsilon z),$$

$$w_\varepsilon(x)=1 \text{ на } \mathbf{R}^3\setminus \bigcup_{z\in Z^3} \varepsilon(G_0+2z),$$

$$\Delta w_\varepsilon=0 \text{ в } \bigcup_{z\in Z^3} (\varepsilon G_0\setminus \varepsilon^3 G_0)+2\varepsilon z.$$

Теорема 6.1. *Для решений задач* (6.1), (6.2) *имеют место оценки*

$$\| u_\varepsilon - w_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)},$$

$$\| u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)},$$

где C, $\alpha=\mathrm{const}>0$, *C не зависит от* ε *и* $f(x)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в области $\varepsilon G_0\setminus\varepsilon^3 G_0$ функция w_ε имеет вид $w_\varepsilon(x)=(r^{-1}-\varepsilon^{-3})/(\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-3})$, где $r(x)$ — расстояние от x до начала координат. Покажем, что

$$\| w_\varepsilon - 1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_0\varepsilon^2, \tag{6.3}$$

где постоянная $C_0>0$ не зависит от ε. Имеем

$$\| w_\varepsilon - 1\|^2_{L^2(\varepsilon G_0\setminus\varepsilon^3 G_0)} = \int\limits_{\varepsilon G_0\setminus\varepsilon^3 G_0} (1-(r^{-1}-\varepsilon^{-3})/(\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-3}))^2\,dx=$$

$$=C|\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-3}|^{-2}\int\limits_{\varepsilon^3}^{\varepsilon}\left(1-2\frac{r}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}r^2\right)dr\leqslant C_1\varepsilon^7,$$

где постоянная C_1 не зависит от ε. Учитывая, что количество областей вида $(\varepsilon G_0\setminus\varepsilon^3 G^0)+2\varepsilon z$, $z\in Z^3$, принадлежащих Ω_ε, пропорционально ε^{-3}, получаем оценку (6.3).

Принимая во внимание (6.1), (6.2), имеем

$$\begin{aligned}\Delta(u_\varepsilon-uw_\varepsilon)&=f-\Delta u w_\varepsilon-2(\nabla u,\ \nabla w_\varepsilon)-u\,\Delta w_\varepsilon=\\ &=f(1-w_\varepsilon)-(\Delta w_\varepsilon-\mu)u+\mu(w_\varepsilon-1)u-2(\nabla u,\ \nabla w_\varepsilon)=\\ &=A_1+A_2+A_3+A_4.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) понимается в смысле обобщенных функций.

В силу (6.3) и согласно оценке Шаудера

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar\Omega)}\leqslant C_2\|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)},$$

имеющей место для решения задачи (6.2), где $C_2>0$ не зависит от u, получим

$$\|A_1\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}\leqslant \|A_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant \varepsilon^2 C_3\|f\|_{C^0(\bar\Omega)}, \tag{6.5}$$

$$\|A_3\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}\leqslant \|A_3\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant \varepsilon^2 C_4\|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}. \tag{6.6}$$

Оценим слагаемое A_4 в норме пространства $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ Имеем

$$\|A_4\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}=1} 2\left|\int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla u,\ \nabla(w_\varepsilon-1))\varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ |\alpha|\leqslant 2}} |D^\alpha u|\,\|w_\varepsilon-1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_6 \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ |\alpha|\leqslant 2}} |D^\alpha u|\varepsilon^2.$$

Используя оценку Шаудера, получаем

$$\|A_4\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_7\varepsilon^2\|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}. \tag{6.7}$$

Для оценки величины $\|A_2\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}$ введем вспомогательную функцию q_ε, которая в шаре εG_0 является решением задачи

$$-\Delta q_\varepsilon = -3 \text{ в } \varepsilon G_0,$$

$$\left.\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\varepsilon\partial G_0} = \varepsilon,$$

ν — внешняя нормаль к $\varepsilon\partial G_0$. Решение этой задачи определено с точностью до постоянного слагаемого. Выберем это слагаемое так, чтобы $q_\varepsilon=0$ на $\varepsilon\partial G_0$, и продолжим q_ε сначала нулем на куб $\varepsilon Q_0=\{x: -\varepsilon<x_j<\varepsilon,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$, а затем на все пространство $\mathbf{R}^3$ по 2ε — периодичности. Тогда $q_\varepsilon=\frac{r^2(x)}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}$ в $\varepsilon(G_0+2z)$, $z\in\mathbf{Z}^3$, $r(x)$ — расстояние от x до центра шара $\varepsilon(G_0+2z)$ и $|\nabla q_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$,

$$-\Delta q_\varepsilon = -3\chi_\varepsilon + \sum_{z\in Z^3}\varepsilon\delta_z^\varepsilon \text{ в } \mathbf{R}^3,$$

где $\chi_\varepsilon=1$ при $x\in\bigcup_{z\in Z^3}\varepsilon(G_0+2z)$ и $\chi_\varepsilon=0$, если $x\overline{\in}\bigcup_{z\in Z^3}\varepsilon(G_0+2z)$, δ_z^ε—δ-функция, сосредоточенная на поверхности шара $\varepsilon(G_0+2z)$,

$$(\delta_z^\varepsilon,\ \psi)\equiv\int_{\varepsilon\partial(G_0+2z)}\psi\,dS_\varepsilon^z,\quad \psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3).$$

В самом деле, полагая $T_\varepsilon=\bigcup_{z\in Z^3}\varepsilon(G_0+2z)$, имеем для любой $\varphi\in$ $\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\langle\Delta q_\varepsilon,\ \varphi\rangle=\langle q_\varepsilon,\ \Delta\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^3} q_\varepsilon\Delta\varphi\,dx=\int_{T_\varepsilon} q_\varepsilon\Delta\varphi\,dx=$$

$$=\int_{T_\varepsilon}\Delta q_\varepsilon\varphi\,dx-\int_{\partial T_\varepsilon}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\nu_1}\varphi-q_\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_1}\right)dS,$$

где ν_1 — внешняя нормаль к ∂T_ε.

Поскольку $\Delta q_\varepsilon = 3$ в T_ε, $\Delta q_\varepsilon = 0$ в $\mathbf{R}^3 \setminus T_\varepsilon$, $\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \nu_1} = \varepsilon$, $q_\varepsilon = 0$ на ∂T_ε, имеем

$$\langle \Delta q_\varepsilon, \varphi \rangle = 3 \int_{T_\varepsilon} \varphi \, dx - \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} \varphi \, dS_\varepsilon = \langle 3\chi_\varepsilon, \varphi \rangle - \varepsilon \sum_{z \in \mathbf{Z}^3} \langle \delta_z^\varepsilon, \varphi \rangle.$$

Таким образом,

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}^3} \varepsilon \delta_z^\varepsilon + \mu = -\Delta q^\varepsilon + (3\chi_\varepsilon + \mu).$$

С другой стороны,

$$\Delta w_\varepsilon = -\sum_{z \in \mathbf{Z}^3} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} \Big|_{\partial \varepsilon (G_0 + 2z)} \delta_z^\varepsilon + \gamma_\varepsilon = -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{z \in \mathbf{Z}^3} \varepsilon \delta_z^\varepsilon + \gamma^\varepsilon,$$

где γ^ε—обобщенная функция с носителем, принадлежащим множеству $\bigcup_{z \in \mathbf{Z}^3} \varepsilon^3 (\overline{G}_0 + 2z)$, т. е. $\langle \gamma^\varepsilon, \psi \rangle = 0$, если $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ и обращается в нуль на множестве $\bigcup_{z \in \mathbf{Z}^3} \varepsilon^3 (\overline{G}_0 + 2z)$. Конкретный вид γ^ε для дальнейшего не имеет значения.

Следовательно,

$$(\Delta w_\varepsilon - \mu) u = \left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} \left(\sum_{z \in \mathbf{Z}^3} -\varepsilon \delta_z^\varepsilon - \mu \right) + \gamma^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \mu \right] u =$$

$$= \left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} (\Delta q_\varepsilon - (3\chi_\varepsilon + \mu)) + \gamma^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} \mu \right] u.$$

Поскольку среднее функции $3\chi_\varepsilon + \mu$ по кубу εQ_0 равно нулю, ее можно представить в виде

$$3\chi_\varepsilon + \mu = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

где $f_i(\xi)$ — некоторые ограниченные в $\mathbf{R}^3$ функции (см. лемму 1.8 гл. I).

Поскольку $|\nabla q_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$, имеем

$$-\Delta q_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} q_i^\varepsilon,$$

где q_i^ε—равномерно по ε ограниченные функции в $\mathbf{R}^3$.

Следовательно,

$$V_\varepsilon = (\Delta w_\varepsilon - \mu) u = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x_i} h_i^\varepsilon(x) \right) u + \gamma^\varepsilon u + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \mu u,$$

где $|h_i^\varepsilon| \leqslant C_7$, C_7 не зависит от ε. Тогда

$$\|V_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\\ \|\varphi\|_{H_0^1}=1}} \left| \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} h_i^\varepsilon(x) \right) u + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \mu u \right] \varphi \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (6.8)$$

Из неравенств (6 5)—(6.8) и оценки

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_8 \|f\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)},$$

имеющей место для решения задачи $\Delta u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, получаем неравенство $\|u_\varepsilon - w_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}$. Отсюда в силу (6.3) следуют неравенства теоремы 6.1. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об отклонении собственных значений задач, отвечающих (6 1), (6.2).

Положим $\mathscr{H}_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon)$, $\mathscr{H}_0 = \mathscr{V} = L^2(\Omega)$. За R_ε возьмем оператор ограничения $f \in L^2(\Omega)$ на область Ω_ε. Определим операторы $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0$ по формулам $\mathscr{A}_\varepsilon f = -u_\varepsilon$, $\mathscr{A}_0 f = -u$, где u^ε, u — решения задач (6.1), (6.2) соответственно. Пользуясь методами § 2.2 и теоремой 6.1, легко проверить, что выполняются условия C1—C4 § 1.2. Поэтому, как и в § 2.2, можем применить теоремы 1.9 и 1.12 для оценки отклонения собственных значений и собственных функций задач:

$$\left. \begin{aligned} &\Delta u_\varepsilon^k + \lambda_\varepsilon^k u_\varepsilon^k = 0 \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon^k \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ &\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^m u_\varepsilon^l \, dx = \delta_{lm}, \end{aligned} \right\} \qquad (6.9)$$

$$\left. \begin{aligned} &\Delta u_0^k + (\mu + \lambda^k) u_0^k = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_0^k \in H_0^1(\Omega), \\ &\int\limits_{\Omega} u_0^m u_0^l \, dx = \delta_{lm}, \end{aligned} \right\} \qquad (6.10)$$

где собственные значения λ_ε^k, λ^k занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности.

Теорема 6.2. *Пусть* λ_ε^k, λ^k—k-е *собственные значения задач* (6.9), (6.10) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda^k| \leqslant c(k)\varepsilon,$$

где постоянная $c(k)$ *не зависит от* ε.

Кроме того, если кратность собственного значения $\lambda^{l+1} = \lambda_0$ *равна* m, $\lambda^{l+1} = \ldots = \lambda^{l+m}$, *и* u_0 — *собственная функция* (6.10), *соответствующая* λ_0, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, *то существует последовательность* $\{\bar u_\varepsilon\}$, *такая, что*

$$\|\bar u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant M_l \varepsilon,$$

где M_l — постоянная, не зависящая от ε, u_0; $\bar{u}_\varepsilon$ — линейная комбинация собственных функций задачи (6.9), отвечающих $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \ldots$ $\ldots, \lambda_\varepsilon^{l+m}$.

Аналогично может быть изучен случай $n \geqslant 3$, а также задача такого рода для общих эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости, и случай, когда G_0 — произвольное открытое множество, такое, что $\bar{G}_0 \subset Q_0$.

§ 7. УСРЕДНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathscr{L}_k \overset{G}{\Rightarrow} \widehat{\mathscr{L}}$ при $k \to \infty$ и $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$ — обыкновенные дифференциальные операторы вида (8.32), (8.33) гл. II, для которых выполнено условие N' § 8.1 гл. II. В настоящем параграфе также предполагаем, что

$$a_k^{pq}(x) = a_k^{qp}(x), \quad \widehat{a}^{pq}(x) = \widehat{a}^{qp}(x) \tag{7.1}$$

и что задачи

$$\mathscr{L}_k(u_k) = f \text{ на } (0, 1), \; u_k \in H_0^m(0, 1),$$

$$\widehat{\mathscr{L}}(u) = f \text{ на } (0, 1), \; u \in H_0^m(0, 1)$$

однозначно разрешимы, причем выполнены оценки

$$\|u_k\|_{H^m} \leqslant c_0 \|f\|_{H^{-m}}, \quad \|u\|_{H^{2m}} \leqslant c_1 \|f\|_{L^2}$$

с постоянными c_0, c_1, не зависящими от k, f. Эти условия означают, что в теореме 8.1 гл. II можно считать $\mu = 0$.

Рассмотрим задачи на собственные значения для операторов $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_k(u_k^l) = \lambda_k^l \rho_k(x) u_k^l \text{ на } (0, 1), \; u_k^l \in H_0^m(0, 1), \\ &0 < \lambda_k^1 \leqslant \lambda_k^2 \leqslant \ldots, \; \int_0^1 u_k^l u_k^j \rho_k(x)\, dx = \delta_{lj}, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\mathscr{L}}(u^l) = \lambda^l \widehat{\rho}(x) u^l \text{ на } (0, 1), \; u^l \in H_0^m(0, 1), \\ &0 < \lambda^1 \leqslant \lambda^2 \leqslant \ldots, \; \int_0^1 u^l u^j \widehat{\rho}(x)\, dx = \delta_{lj}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

где λ_k^l, λ^l занумерованы в порядке неубывания и с учетом кратности. Предполагается также, что

$$\left.\begin{aligned} &\rho_k, \; \widehat{\rho} \in L^\infty(0, 1); \; 0 < c_0 < \widehat{\rho} < c_1, \; 0 < c_2 < \rho_k < c_3; \\ &\|\widehat{\rho} - \rho_k\|_{H^{-m,\infty}(0,1)} \to 0 \text{ при } k \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

где постоянные c_2, c_3 не зависят от k, норма $H^{-m,\infty}$ определена в § 9.2 гл. I.

Теорема 7.1. *Пусть* λ_k^l, λ^l — *собственные значения задач* (7.2), (7.3) *соответственно. Тогда*

$$|\lambda_k^l-\lambda^l|\leqslant c_l\,(\Delta_k+\|\rho_k-\widehat{\rho}\|_{H^{-m,\infty}}), \tag{7.5}$$

где постоянная c_l *не зависит от* k, Δ_k *определены формулой* (8.37) *гл.* II.

Если u — *собственная функция задачи* (7.3), $\|u\|_{L^2}=1$, *отвечающая* λ^0, *и кратность* λ^0 *равна* r $(\lambda^{s+1}=\ldots=\lambda^{s+r}=\lambda^0)$, *то при любом* k *существует функция* $\bar{u}_k$, *такая, что*

$$\|\bar{u}_k-u\|_{L^2(0,1)}\leqslant c_s\,(\Delta_k+\|\rho_k-\widehat{\rho}\|_{H^{-m,\infty}}),\quad c_s=\mathrm{const},$$

причем $\bar{u}_k$ *является линейной комбинацией собственных функций задачи* (7.2), *отвечающих собственным значениям* $\lambda_k^{s+1},\ldots,\lambda_k^{s+r}$, c_s *не зависит от* k *и* u.

Доказательство этой теоремы основано на абстрактных результатах, изложенных в § 1.2, и проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 2.3. При этом за пространства $\mathscr{H}_0$, $(\mathscr{H}_\varepsilon=\mathscr{H}_{1/k})$ нужно взять $L^2(0,1)$ со скалярным произведением $\int_0^1 fg\widehat{\rho}\,dx$, $\left(\int_0^1 fg\rho_k\,dx\right)$ соответственно, $\mathscr{V}=\mathscr{H}_0$, R_ε — тождественный оператор, $\mathcal{A}_0f^0=u^0$, где u^0 — решение задачи Дирихле $\widehat{\mathscr{L}}(u^0)=\widehat{\rho}f^0$ на $(0,1)$, $u^0\in H_0^m(0,1)$, $\mathcal{A}_kf_k=u_k$, где u_k — решение задачи Дирихле $\mathscr{L}_ku_k=\rho_kf_k$ на $(0,1)$, $u_k\in H_0^m(0,1)$.

В силу условий (7.1) на коэффициенты операторов $\mathscr{L}_k$, $\widehat{\mathscr{L}}$ операторы $\mathscr{A}_k$, $\mathscr{A}_0$ удовлетворяют условиям С1—С4 § 1, и потому к ним применимы теоремы 1.9, 1.12.

§ 8. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим теперь вопрос о построении полного асимптотического разложения собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля [35]

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon^k}{\partial x}\right)+b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^k+\lambda^k(\varepsilon)\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^k=0,\quad x\in[0,1],\\
u_\varepsilon^k(0)=u_\varepsilon^k(1)=0,\quad \|u_\varepsilon^k\|_{L^2(0,1)}=1,\quad k=1,2,\ldots,\\
0<\lambda^1(\varepsilon)<\lambda^2(\varepsilon)<\ldots<\lambda^k(\varepsilon)<\ldots,\\
a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqslant a_0=\mathrm{const}>0,\ \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqslant\rho_0=\mathrm{const}>0,\ b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\leqslant 0.
\end{gathered}\tag{8.1}$$

Предположим, что $a(\xi)$, $b(\xi)$, $\rho(\xi)$, $a^{-1}(\xi)$, $a'(\xi) \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — множество ограниченных непрерывных функций переменного $\xi \in \mathbf{R}^1$, удовлетворяющих условиям:

1. $\mathcal{K}$ — кольцо функций, содержащее все константы;
2. для любой $f \in \mathcal{K}$ существует постоянная c_f, такая, что функция $g(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + c_f x$ принадлежит $\mathcal{K}$.

Приведем примеры колец, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

I. Непрерывные периодические функции на $\mathbf{R}^1$ с периодом T.

II. Непрерывные функции, представимые в виде $M + \varphi(x)$, где $M = \mathrm{const}$, $|\varphi(x)| \leqslant C_N(1 + |x|)^{-N}$ для любого натурального N.

III. Функции, являющиеся ограничениями на прямую $x_i = \mu_i t$ $(i = 1, \ldots, n)$ гладких 2π-периодических по $x_1, \ldots, x_n$ функций $F(x_1, \ldots, x_n)$, где числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ удовлетворяют условию

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \mu_i m_i \Big| \geqslant c \Big(\sum_{i=1}^{n} |m_i| \Big)^{-s}, \tag{8.2}$$

$C > 0$, $s > 0$ — постоянные, не зависящие от $m_1, \ldots, m_n$, m_i — любые целые числа, $m_1^2 + \ldots + m_n^2 \neq 0$.

Очевидно, что для классов I, II условия 1 и 2 выполнены. Проверим, что класс III также удовлетворяет этим условиям. Для этого разложим функцию F в ряд Фурье

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_m C_m e^{i(m,x)}, \quad m = (m_1, \ldots, m_n), \quad (m, x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Ограничение этой функции на прямую $x_i = \mu_i t$, $i = 1, \ldots, n$, равно $F(\mu_1 t, \ldots, \mu_n t)$ и имеет первообразную вида

$$C_0 t + \sum_{|m| \neq 0} \frac{C_m}{i(m, \mu)} \left(e^{i(m,\mu)t} - 1\right), \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n). \tag{8.3}$$

Гладкость функции F и условие (8.2) обеспечивают сходимость ряда (8.3) и, следовательно, выполнение условия 2.

Для построения асимптотики собственных значений и собственных функций нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 8.1. *Для каждой $f \in \mathcal{K}$ существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t)\,dt \equiv \langle f \rangle = -c_f.$$

Доказательство. Согласно свойству 2 функция $h(x) = \int\limits_{-x}^{x} f(t)\,dt + 2c_f x$ принадлежит $\mathcal{K}$ и, следовательно, ограничена.

Лемма 8.2. *Пусть $M(\xi)\in\mathscr{K}$ и $\langle M\rangle=0$. Тогда уравнение*

$$\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN}{d\xi}\right)=M(\xi)$$

имеет решение $N(\xi)$, принадлежащее $\mathscr{K}$ и представимое в виде

$$N(\xi)=\int_0^\xi a^{-1}(s)\left(\int_0^s M(t)\,dt\right)ds-C\int_0^\xi a^{-1}(s)\,ds, \tag{8.4}$$

где постоянная C определяется по формуле

$$C=\langle a^{-1}(s)\rangle^{-1}\left\langle a^{-1}(s)\int_0^s M(t)\,dt\right\rangle. \tag{8.5}$$

При этом $dN/d\xi$ также принадлежит $\mathscr{K}$.

Доказательство. Поскольку $\langle M\rangle=0$, первообразная $L(\xi)$ функции $M(\xi)$ принадлежит $\mathscr{K}$. Так как $\mathscr{K}$ — кольцо и $a^{-1}(\xi)\in\mathscr{K}$, то $L(\xi)a^{-1}(\xi)\in\mathscr{K}$. Первообразная функции $L(\xi)a^{-1}(\xi)$ имеет вид $P(\xi)+\langle L(\xi)a^{-1}(\xi)\rangle\xi$, где $P(\xi)\in\mathscr{K}$. Первообразная функции $a^{-1}(\xi)$ имеет вид $Q(\xi)+\langle a^{-1}(\xi)\rangle\xi$, где $Q\in\mathscr{K}$. Подбирая множитель C согласно (8.5), получим, что линейные компоненты интегралов, входящих в (8.4), сократятся и $N(\xi)\in\mathscr{K}$. Лемма доказана.

Прямые вычисления показывают, что справедлива

Лемма 8.3. *Краевая задача*

$$h\frac{d^2u}{dx^2}+\Lambda u=w(x)+\lambda w_0(x) \text{ на } [0,\ 1],\quad u(0)=\alpha,\quad u(1)=\beta,$$

где $\Lambda=(\pi k)^2h$, $w_0(x)=\sin\pi kx$, $h>0$, λ, α, β — постоянные, разрешима, если

$$\lambda=2\pi kh\left[(-1)^{k+1}\beta+\alpha\right]-2\int_0^1\sin\pi kyw(y)\,dy.$$

При этом

$$u(x)=\alpha\cos\pi kx+\int_0^x\frac{\sin\pi k(x-y)}{\pi kh}\left[w(y)+\lambda w_0(y)\right]dy+C\sin\pi kx,$$

$$C=\text{const}.$$

Будем искать (пока формальное) асимптотическое разложение собственного значения $\lambda^k(\varepsilon)$ и соответствующей ему собственной функции $u_\varepsilon^k(x)$ задачи (8.1) в виде (индекс k для упрощения записи опускаем)

$$\lambda^{(M)}(\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1(\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^M\lambda_M(\varepsilon), \tag{8.6}$$

$$u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{i=0}^{M}\varepsilon^i\left(\sum_{s=0}^{i}N^{i,s}(\xi)\frac{d^s v_\varepsilon(x)}{dx^s}\right),\quad \xi=\frac{x}{\varepsilon}, \tag{8.7}$$

где $M\geqslant 2$ — целое число, $N^{(i,s)}(\xi)$, $v_\varepsilon(x)$ — подлежащие определению функции, $\lambda_i(\varepsilon)$ — некоторые числа. В дальнейшем считаем, что функции $N^{(i,s)}$ определены для всех целых значений индексов i, s, причем $N^{(i,s)}=0$, если $i<0$ или $s<0$, а также $N^{(i,s)}=0$, если $s>i$. Там, где пределы суммирования по индексам s, i не указаны, предполагаем, что суммирование проводится по всем тем индексам s, i, при которых функция $N^{(i,s)}$ не равна нулю тождественно.

Подставим выражения (8.6), (8.7) в уравнение (8.1). Получим

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon^{(M)}}{dx}\right)+b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(0,0)}}{d\xi}\right)v_\varepsilon+\varepsilon^{-1}\left\{\left[\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(1,1)}}{d\xi}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(0,0)})+a(\xi)\frac{dN^{(0,0)}}{d\xi}\right]\frac{dv_\varepsilon}{dx}+\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(1,0)}}{d\xi}\right)v_\varepsilon\right\}+$$

$$+\varepsilon^0\left\{\left[\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(2,2)}}{d\xi}\right)+\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(1,1)})+a(\xi)\frac{dN^{(1,1)}}{d\xi}+a(\xi)N^{(0,0)}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{d^2v_\varepsilon}{dx^2}+\left[\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(2,1)}}{d\xi}\right)+\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(1,0)})+a(\xi)\frac{dN^{(1,0)}}{d\xi}\right]\frac{dv_\varepsilon}{dx}+$$

$$\left.+\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(2,0)}}{d\xi}\right)v_\varepsilon\right\}+\sum_{i=1}^{M-2}\varepsilon^i\sum_s\left[a(\xi)N^{(i,s-2)}+a(\xi)\frac{dN^{(i+1,s-1)}}{d\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(i+1,s-1)})+\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\left(\frac{dN^{(i+2,s)}}{d\xi}\right)\right)\right]\frac{d^sv}{dx^s}+$$

$$+\varepsilon^0[b(\xi)N^{(0,0)}+\lambda_0\rho(\xi)N^{(0,0)}]v_\varepsilon+b(\xi)\sum_{i=1}^{M-2}\varepsilon^i\sum_{s=0}^{i}N^{(i,s)}\frac{d^sv_\varepsilon}{dx^s}+$$

$$+\sum_{i=1}^{M-2}\varepsilon^i\sum_s\sum_{r=0}^{i}\lambda_rN^{(i-r,s)}\rho(\xi)\frac{d^sv_\varepsilon}{dx^s}+\varepsilon^{M-1}F_\varepsilon^0(x),$$

где $F_\varepsilon^0(x)$ есть сумма слагаемых вида $\varepsilon^t\varphi(\xi)\dfrac{d^lv_\varepsilon}{dx^l}$, $l\leqslant M+2$, $t\geqslant 0$; $\varphi(\xi)$ ограничена.

Пусть $N^{(0,0)}\equiv 1$, $N^{(1,0)}\equiv N^{(2,1)}\equiv 0$ и функция $N^{(1,1)}(\xi)$ есть решение задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(1,1)}}{d\xi}\right)=-\frac{da(\xi)}{d\xi},\quad \xi\in\mathbf{R}^1,\quad N^{(1,1)}\in\mathcal{K},\quad \langle N^{(1,1)}(\xi)\rho(\xi)\rangle=0.$$

Существование $N^{(1,1)}$ вытекает из леммы 8.2.

Функцию $N^{(2,2)}(\xi)$ определим как решение задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(2,2)}}{d\xi}\right)=-\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(1,1)}(\xi))-a(\xi)\frac{dN^{(1,1)}}{d\xi}-a(\xi)+h^{(2,2)},$$

$$\langle N^{(2,2)}(\xi)\rho(\xi)\rangle=0,\quad N^{(2,2)}\in\mathcal{K},\tag{8.8}$$

где постоянная $h^{(2,2)}$ задается формулой

$$h^{(2,2)}=\left\langle a(\xi)+a(\xi)\frac{dN^{(1,1)}}{d\xi}\right\rangle.\tag{8.9}$$

Заметим, что правая часть уравнения (8.8) принадлежит классу $\mathcal{K}$ в силу леммы 8.2. Далее определим функцию $N^{(2,0)}(\xi)$ как решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(2,0)}}{d\xi}\right)=-\rho(\xi)\lambda_0-b(\xi)+h^{(2,0)},\quad \xi\in\mathbf{R}^1,\\ \langle N^{(2,0)}(\xi)\rho(\xi)\rangle=0,\quad N^{(2,0)}\in\mathcal{K},\end{gathered}\tag{8.10}$$

где постоянная $h^{(2,0)}$ задана равенством

$$h^{(2,0)}=\lambda_0\langle\rho(\xi)\rangle+\langle b(\xi)\rangle.\tag{8.11}$$

Для значений индекса l, больших двух, определим функции $N^{(l,s)}(\xi)$ как решения задач

$$\frac{d}{d\xi}\left(a(\xi)\frac{dN^{(i+2,s)}}{d\xi}\right)=-a(\xi)N^{(i,s-2)}(\xi)-a(\xi)\frac{dN^{(i+1,s-1)}}{d\xi}-$$

$$-\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N^{(i+1,s-1)})-\sum_{j=0}^{i}\lambda_jN^{(i-j,s)}(\xi)\rho(\xi)-b(\xi)N^{(i,s)}(\xi)+h^{(i+2,s)},\tag{8.12}$$

$$\xi\in\mathbf{R}^1,\quad \langle N^{(i+2,s)}\rho(\xi)\rangle=0,\quad N^{(i+2,s)}\in\mathcal{K},\quad l=1,\ \ldots,\ M-2,$$

где

$$h^{(i+2,s)}=\langle b(\xi)N^{(i,s)}\rangle+\langle\rho\rangle\lambda_i,\quad s=0,$$

$$h^{(i+2,s)}=\left\langle a(\xi)N^{(i,s-2)}+b(\xi)N^{(i,s)}+a(\xi)\frac{dN^{(i+1,s-1)}}{d\xi}\right\rangle,\quad s>0.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{h}^{(i+2,s)}\equiv\left\langle a(\xi)N^{(i,s-2)}+b(\xi)N^{(i,s)}+a(\xi)\frac{dN^{(i+1,s-1)}}{d\xi}\right\rangle,\quad \tilde{h}^{(2,0)}\equiv\langle b\rangle.\tag{8.13}$$

Функции $N^{(i,s)}$ определим из (8.12) последовательно с помощью индукции по i, s. При этом в качестве базиса возьмем функции $N^{(0,0)}$, $N^{(1,0)}$, $N^{(1,1)}$, $N^{(2,0)}$, $N^{(2,1)}$, $N^{(2,2)}$, заданные выше. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon^{(M)}}{dx}\right)+b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{M-2}\varepsilon^i\left(\sum_{s=0}^{i+2}\tilde{h}^{(i+2,s)}\frac{d^s v_\varepsilon}{dx^s}+\lambda_i(\varepsilon)\langle\rho\rangle v_\varepsilon(x)\right)+\varepsilon^{M-1}F_\varepsilon^1(x),\quad x\in[0,\ 1], \tag{8.14}$$

где $F_\varepsilon^1(x)$ имеет вид, аналогичный $F_\varepsilon^0(x)$. Будем искать $v_\varepsilon(x)$ в виде

$$v_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\ldots+\varepsilon^{M-2}v_{M-2}(x).$$

Подставив это выражение для $v_\varepsilon(x)$ в (8.14), получим

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon^{(M)}}{dx}\right)+b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{M-2}\varepsilon^i\left(\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p+2}\tilde{h}^{(i-p+2,s)}\frac{d^s v_p}{dx^s}+\sum_{p=0}^{i}\lambda_{i-p}\langle p\rangle v_p(x)\right)+\varepsilon^{M-1}F_\varepsilon^2(x).$$

Определим теперь $v_p(x)$, $p=0,\ \ldots,\ M-2$, как функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p+2}\tilde{h}^{(i-p+2,s)}\frac{d^s v_p}{dx^s}+\sum_{p=0}^{i}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ M-2, \tag{8.15}$$

и краевым условиям

$$\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p}N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s}=\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p}N^{(i-p,s)}(\varepsilon^{-1})\frac{d^s v(1)}{dx^s}=0,$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ M-2. \tag{8.16}$$

Перепишем равенства (8.15), (8.16), выделив в отдельные слагаемые члены, содержащие v_i. Для $i=0$

$$h^{(2,2)}\frac{d^2v_0}{dx^2}+\langle b\rangle v_0+\lambda_0\langle\rho\rangle v_0=0,\ v_0(0)=v_0(1)=0. \tag{8.17}$$

При $i=1,2,\ldots,M-2$ имеем краевые задачи

$$h^{(2,2)}\frac{d^2v_i}{dx^2}+\langle b\rangle v_i+\lambda_0\langle\rho\rangle v_i=$$

$$= -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p+2} \tilde{h}^{(i-p+2,s)} \frac{d^s v_p(x)}{dx^s} - \sum_{p=1}^{i-1} \lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p(x) - \lambda_i\langle\rho\rangle v_0(x), \quad (8.18)$$

$$v_i(0) = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s};$$

$$v_i(1) = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(\varepsilon^{-1})\frac{d^s v_p(1)}{dx^s}. \quad (8.19)$$

Считая найденными $\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}, N^{(0,0)}, \ldots, N^{(i+1,s)}$, подберем теперь постоянную $\lambda_i(\varepsilon)$ так, чтобы задача (8.18), (8.19) была разрешима. Пусть $\lambda_0 = \lambda_0{}^k$ является k-м собственным значением задачи (8.17). Тогда $\lambda_0 = \langle\rho\rangle^{-1}((\pi k)^2 h^{(2,2)} - \langle b\rangle)$. Положим в лемме 8.3

$$\left.\begin{aligned} &h = h^{(2,2)},\quad \Lambda = (\pi k)^2 h^{(2,2)},\quad w_0 = v_0 = \sin\pi kx,\quad \lambda = -\lambda_i\langle\rho\rangle,\\ &w(x) = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=2}^{i-p+2} \hat{h}^{(i-p+2,s)}\frac{d^s v_p(x)}{dx^s} - \sum_{p=1}^{i-1}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p(x),\\ &\alpha = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s},\\ &\beta = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(\varepsilon^{-1})\frac{d^s v_p(1)}{dx^s}. \end{aligned}\right\} \quad (8.20)$$

Согласно лемме 8.3 получаем

$$-\lambda_i\langle\rho\rangle = 2\pi k h^{(2,2)}\left[(-1)^{k+2}\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(\varepsilon^{-1})\frac{d^s v_p(1)}{dx^s} - \right.$$

$$\left. - \sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s}\right] +$$

$$+ 2\int_0^1 \sin\pi ky\left[\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p+2}\tilde{h}^{(i-p+2,s)}\frac{d^s v_p(y)}{dx^s} + \sum_{p=1}^{i-1}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p(y)\right]dy, \quad (8.21)$$

$$v_i(x) = -\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p} N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s}\cos\pi kx -$$

$$-\int_0^x \frac{\sin\pi k(x-y)}{\pi k h^{(2,2)}}\left[\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{i-p+2}\tilde{h}^{(i-p+2,s)}\frac{d^s v_p(y)}{dx^s} + \sum_{p=0}^{i-1}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p(y)\right]dy. \quad (8.22)$$

С помощью формул (8.21), (8.22), а также (8.18)—(8.20) можно построить по индукции величины $\lambda_i(\varepsilon)$ и функции $v_i(x)$, $N^{(i+2,s)}$, если ранее определены $\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}$, $N^{(0,0)}, \ldots, N^{(i+1,s)}$. Таким образом, мы построили формальное асимптотическое разложение собственного значения $\lambda^k(\varepsilon)$ задачи Штурма—Лиувилля (8.1) и соответствующей ему собственной функции $u_\varepsilon^k(x)$.

Замечание 8.4. Для λ_1 из равенства (8.21) получаем

$$-\lambda_1\langle\rho\rangle = 2\pi k h^{(2,2)}\left[(-1)^{k+2}N^{(1,1)}(\varepsilon^{-1})\frac{dv_0(1)}{ds} - N^{(1,1)}(0)\frac{dv_0(0)}{ds}\right] - $$

$$-2\int_0^1 \sin\pi k y\left[\sum_{s=0}^{3}\tilde{h}^{(3,s)}\frac{d^s v_0(y)}{dx^s}\right]dy,$$

где $v_0(y)=\sin\pi k y$. Так как $\tilde{h}^{(3,0)}=\tilde{h}^{(3,2)}=0$ в силу (8.13), то $\lambda_1=0$ при любом k, если ε^{-1} — целое число и функция $a(\xi)$ 1-периодична по ξ.

Отметим, что согласно § 7 гл. II операторы

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}\right)+b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{8.23}$$

сильно G-сходятся к оператору

$$h^{(2,2)}\frac{d^2}{dx^2}+\langle b\rangle.$$

Как доказано в § 7, для собственных значений задач (8.1), (8.17) имеют место оценки

$$|(\lambda_\varepsilon^n)^{-1}-(\lambda^n)^{-1}| \leqslant C(\Delta_\varepsilon + \|\rho_\varepsilon(x)-\langle\rho\rangle\|_{H^{-1,\infty}}),\quad C=\text{const}, \tag{8.24}$$

$$\lambda_\varepsilon^n = \lambda^n(\varepsilon),$$

где

$$\Delta_\varepsilon = \max_{x\in[0,1]}\left(\left|\int_0^x\left(\frac{h^{(2,2)}(t)}{a(t/\varepsilon)}-1\right)dt\right| + \left|\int_0^x\left(\langle b\rangle - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx\right|\right),$$

и по определению нормы в $H^{-1,\infty}$

$$\left\|\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\langle\rho\rangle\right\|_{H^{-1,\infty}} \leqslant \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\langle\rho\rangle\right)dx\right|. \tag{8.25}$$

В силу предположений на коэффициенты уравнения (8.1) правая часть неравенства (8.24) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Из (8.24) следует, что $\lambda_\varepsilon^n \to \lambda_0^n$ при $\varepsilon\to 0$ для любого n.

С другой стороны, на основании леммы 1.1 гл. III, поскольку формальное асимптотическое разложение удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{L}_\varepsilon (u_\varepsilon^{(M)}(x)) + \lambda^{(M)}(\varepsilon)\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon^{(M)}(x) = \varepsilon^{M-1} F_\varepsilon(x),$$

$$u_\varepsilon^{(M)}(0) = \varepsilon^{M-1}\psi_0(\varepsilon),\ u_\varepsilon^{(M)}(1) = \varepsilon^{M-1}\psi_1(\varepsilon),$$

где

$$\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leqslant c_0,\quad |\psi_0(\varepsilon)| + |\psi_1(\varepsilon)| \leqslant c_1,\ c_0, c_1 = \mathrm{const},$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon \equiv \frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}\right) + b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

получаем, что существует собственное значение $\lambda^l(\varepsilon)$ задачи (8.1), такое, что $|\lambda^l(\varepsilon) - \lambda^{(M)}(\varepsilon)| \leqslant c\varepsilon^{M-1}$. В самом деле, пусть $\psi_\varepsilon(x)$ — гладкая функция, такая, что $\mathcal{L}_\varepsilon(\psi_\varepsilon(x)) = 0$ на $(0, 1)$, $\psi_\varepsilon(0) = \psi_0(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon(1) = \psi_1(\varepsilon)$. Тогда $|\psi_\varepsilon(x)| \leqslant c_2$, где c_2 не зависит от ε, в силу принципа максимума. Поэтому к функции $u_\varepsilon^{(M)}(x) - \varepsilon^M\psi_\varepsilon(x)$ и оператору A_ε, действующему в пространстве $L^2(0, 1)$ со скалярным произведением $(u, v) = \int\limits_0^1 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) uv\,dx$ и заданному формулой $A_\varepsilon f = u^\varepsilon$, где u^ε — решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon = -\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f \text{ на } (0, 1),\quad u^\varepsilon \in H_0^1(0, 1),$$

применима лемма 1.1 гл. III.

Таким образом, $l = k$ при достаточно малом ε, поскольку $\lambda^k(\varepsilon) \to \lambda_0^k$, $\lambda^{(M)}(\varepsilon) \to \lambda_0^k$ и λ_0^k — однократное собственное значение, и потому в его окрестности при достаточно малом ε лежит только одно собственное значение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ с однородными граничными условиями Дирихле. Приведенные рассуждения обосновывают формальное асимптотическое разложение (8.6). Доказана

Теорема 8.5. *Для собственных значений и собственных функций задачи* (8.1) *имеют место неравенства*

$$|\lambda^{(M)}(\varepsilon) - \lambda^k(\varepsilon)| \leqslant c_1(k)\,\varepsilon^{M+1},$$

$$\|u_\varepsilon^{(M)}(x) - u_\varepsilon^k(x)\|_{L^2(0,1)} \leqslant c_2(k)\,\varepsilon^{M+1},$$

где постоянные $c_1(k)$, $c_2(k)$ не зависят от ε.

§ 9. О ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ G-СХОДЯЩЕЙСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В § 8 гл. II было введено понятие G-сходимости операторов вида $\mathcal{L}(u) = \sum\limits_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u)$, принадлежащих классу $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. При этом операторы G-сходящейся последовательности могут быть, вообще говоря, несамосопряженными. В § 2 гл. III мы исследовали вопрос о поведении собственных значений и собственных функций G-сходящейся последовательности операторов теории упругости, которые являются самосопряженными. Покажем, как можно распространить некоторые результаты § 1, 2 гл. III на случай G-сходящейся последовательности несамосопряженных эллиптических операторов.

Нам потребуются некоторые известные [11] утверждения о сходимости собственных значений и собственных векторов последовательности компактных операторов. Мы даем формулировки соответствующих теорем в меньшей общности, чем в [11], в том виде, как это понадобится в дальнейшем, и приводим их доказательства.

Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$ — ограниченный линейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H над полем комплексных чисел.

Через $\sigma(A)$ обозначим спектр оператора A, т. е. множество точек μ комплексной плоскости, таких, что оператор $A-\mu I$ не имеет ограниченного обратного. Здесь I — тождественный оператор.

Если для $\mu_0 \in \sigma(A)$ существует такой элемент $x \in H$, $x \neq 0$, что $(A-\mu_0 I)x=0$, то μ_0 называется собственным значением, а x — собственным элементом, соответствующим собственному значению μ_0. Если при некотором целом $m>1$ имеем $(A-\mu_0 I)x \neq 0$, $(A-\mu_0 I)^m x=0$, то вектор x называется присоединенным.

Через $\operatorname{Ker} A$ обозначим множество $\{u \in H,\ Au=0\}$, через $\operatorname{Im} A$ — множество таких $u \in H$, что уравнение $Aw=u$ имеет решение $w \in H$.

Пусть $R(\mu)$ — голоморфная в некоторой области $\omega \subset \mathbf{C}^1$ операторнозначная функция, Γ — замкнутый контур, ограничивающий подобласть ω_1, $\bar{\omega}_1 \subset \omega$. Тогда имеет место принцип максимума для голоморфных операторнозначных функций: норма $R(\mu)$ в ω_1 не превосходит максимума нормы $R(\mu)$ на контуре $\Gamma=\partial\omega_1$.

Далее используем следующие хорошо известные результаты.

Теорема 9.1. *Пусть $T \in \mathscr{L}(H)$ — компактный оператор. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1 *Сопряженный оператор T^* компактен.*

2. $\sigma(T)$ — *дискретное множество, предельной точкой которого может быть только* 0, *причем каждая точка спектра, отличная от нуля, является собственным значением.*

3. $\sigma(T^*)$ *состоит из точек, комплексно сопряженных точкам* $\sigma(T)$.

4. *Для любого* $\mu \in \sigma(T)$, $\mu \neq 0$, *такого, что у оператора T нет присоединенных векторов, отвечающих* μ, *пространство H допускает разложения*

$$\begin{gathered} H=\operatorname{Im}(T-\mu I) \dot{\oplus} \operatorname{Ker}(T^*-\bar{\mu} I), \\ H=\operatorname{Im}(T-\mu I) \oplus \operatorname{Ker}(T-\mu I), \end{gathered} \tag{9.1}$$

причем размерности $\mathrm{Ker}(T^*-\bar{\mu}I)$ *и* $\mathrm{Ker}(T-\mu I)$ *конечны и совпадают.*

5. *Для любого* $\mu\neq 0$ *оператор* $T-\mu I$ *является фредгольмовым.*

Знак $\oplus$ обозначает прямую сумму подпространств, знак $\oplus$ — прямую сумму ортогональных подпространств. Оператор $B\in\mathscr{L}(H)$ называем фредгольмовым, если размерности пространства $\mathrm{Ker}\,B$ и ортогонального дополнения $\mathrm{Im}\,B$ до H конечны и совпадают.

Пусть $\{A_m\}$ — последовательность компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и $A\in\mathscr{L}(H)$ также компактный оператор.

Определение 9.2. Последовательность $\{A_m\}$ называется *компактно сходящейся* к оператору A при $m\to\infty$, если выполнены следующие условия:

1. $A_m u\to Au$ сильно в H для любого $u\in H$;

2. Для любой последовательности $\{u_m\}$, такой, что $u_m\in H$, $\|u_m\|\leqslant 1$ последовательность $\{A_m u_m\}$ компактна.

Определение 9.3. Последовательность операторов $\{B_m\}$ (не обязательно компактных) *собственно сходится* к оператору $B\in\mathscr{L}(H)$ при $m\to\infty$, если выполнены следующие условия:

1. $B_m u\to Bu$ сильно в H для любого $u\in H$;

2. если $\|u_m\|=1$ и последовательность $\{B_m u_m\}$ компактна, то и последовательность $\{u_m\}$ компактна.

Лемма 9.4. *Пусть последовательность операторов* $A_m\in\mathscr{L}(H)$ *сходятся сильно к оператору* $A\in\mathscr{L}(H)$, *т. е.* $A_m u\to Au$ *сильно в* H *для любого* $u\in H$ *при* $m\to\infty$. *Тогда*

$$\|A_m\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant C=\mathrm{const},$$

где постоянная C *не зависит от* m.

Доказательство. Лемма является следствием принципа равномерной ограниченности Банаха—Штейнгауза [26; 89], согласно которому $\sup\limits_m\|A_m\|_{\mathscr{L}(H)}<\infty$, если $\sup\limits_m\|A_m u\|<\infty$ для любого $u\in H$.

Лемма 9.5. *Пусть последовательность фредгольмовых операторов* B_m *собственно сходится к оператору* $B\in\mathscr{L}(H)$ *при* $m\to\infty$, *и* B *обратим. Тогда для достаточно больших* m *существуют обратные операторы* B_m^{-1} *и* $\|B_m^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant C$, *где постоянная* C *не зависит от* m.

Доказательство. Покажем сначала, что для достаточно больших m существуют обратные операторы B_m^{-1}. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $m'\to\infty$, такая, что операторы $B_{m'}$ не имеют ограниченных обратных. Поскольку операторы B_m фредгольмовы, существует последовательность векторов $\{x_{m'}\}$, $\|x_{m'}\|=1$, такая, что $B_{m'}x_{m'}=0$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{x_{m''}\}$, сильно сходящуюся к элементу x, $\|x\|=1$, в силу собственной сходимости B_m к B. Но тогда $Bx=0$, поскольку $Bx=B_{m'}(x-x_{m'})+(B-B_{m'})x$ и

$\|B_m\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant C$ на основании леммы 9.4. Это противоречит обратимости оператора B.

Докажем теперь неравенство $\|B_m^{-1}\| \leqslant C$. Если это неравенство не выполнено, то существует такая подпоследовательность $\{x_{m'}\}$, что $\|x_{m'}\|=1$, но $B_{m'}x_{m'} \to 0$ сильно в H при $m' \to \infty$. В самом деле, если $\|B_{m'}^{-1}\| > C(m')$, где $C(m') \to \infty$, то существует такая последовательность векторов $\{y_{m'}\}$, что $\|y_{m'}\|=1$, но $\|B_{m'}^{-1}y_{m'}\| \geqslant C(m')$. Положим $z_{m'}=B_{m'}^{-1}y_{m'}$. Тогда $B_{m'}(\|z_{m'}\|^{-1} z_{m'}) = \|z_{m'}\|^{-1} y_{m'} \to 0$ при $m' \to \infty$, и в качестве элементов $x_{m'}$ можно взять векторы $\|z_{m'}\|^{-1} z_{m'}$. В силу собственной сходимости B_m к B существует подпоследовательность m'', такая, что $x_{m''} \to x$ сильно в H при $m'' \to \infty$. Тогда $B_{m''}x_{m''} \to Bx$, так как $Bx - B_{m''}x_{m''} = B_{m''}(x - x_{m''}) + (B - B_{m''})x$ и, следовательно, $Bx=0$, а это противоречит обратимости оператора B. Лемма доказана.

Пусть $\omega \subset \mathbf{C}^1$ — подмножество комплексной плоскости. Обозначим через $N(\omega, A)$ линейную оболочку множества всех собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям A, принадлежащим ω. В частности, если $\omega=\{\mu_0\}$, где μ_0 — собственное значение оператора A, то $N(\mu_0, A)$ является линейной оболочкой всех собственных векторов оператора A, отвечающих μ_0.

Теорема 9.6. *Пусть $A_m \to A$ компактно при $m \to \infty$, операторы A_m, A — компактные и фредгольмовы. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Если $\mu_0 \in \sigma(A)$, $\mu_0 \neq 0$, то существует последовательность $\{\mu_m\}$, $\mu_m \in \sigma(A_m)$, такая, что $\mu_m \to \mu_0$ при $m \to \infty$.*

2. *Если $\mu_m \in \sigma(A_m)$ и $\mu_m \to \mu \neq 0$, то $\mu \in \sigma(A)$.*

3. *Если $u_m \in N(\mu_m, A_m)$ и $\mu_m \to \mu \neq 0$, $u_m \to u$ в H при $m \to \infty$, то $u \in N(\mu, A)$.*

Доказательство. Установим справедливость утверждения 1. Предположим противное. Тогда найдется $\delta>0$ и последовательность $m' \to \infty$, такие, что в δ-окрестности точки μ_0 нет точек спектра операторов $A_{m'}$. Пусть $\Gamma_\delta=\{\mu \in \mathbf{C}^1, |\mu-\mu_0|=\delta\}$ — окружность, такая, что в круге $|\mu-\mu_0| \leqslant \delta$ лежит только одна точка спектра μ_0 оператора A и нет точек спектра операторов $A_{m'}$.

Пользуясь рассуждениями, аналогичными тем, которые проведены при доказательстве леммы 9.5, и компактностью множества Γ_δ, нетрудно проверить, что для достаточно больших m' существуют обратные операторы $(A_{m'}\mu - I)^{-1}$, $\mu \in \Gamma_\delta$, причем

$$\|(A_{m'}\mu - I)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant C, \tag{9.2}$$

где постоянная C не зависит от m' и $\mu \in \Gamma_\delta$.

Поскольку внутри контура Γ_δ не содержится точек спектра операторов $A_{m'}$, то согласно принципу максимума для голоморфных операторнозначных функций неравенство (9.2) имеет место и внутри контура Γ_δ, в частности

$$\|(A_{m'} - \mu_0 I)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant C. \tag{9.3}$$

С другой стороны, поскольку $\mu_0 \in \sigma(A)$, существует элемент u_0, $\|u_0\|=1$, такой, что $(A-\mu_0 I)u_0=0$. Тогда $(A_{m'}-\mu_0 I)u_0 \to 0$ сильно в H, что противоречит неравенству (9.3). Следовательно, при всяком достаточно малом δ существует N, такое, что при всех $m>N$ внутри контура Γ_δ содержится точка спектра μ_m оператора A_m и $|\mu_m-\mu_0|\leqslant\delta$. Поэтому $\mu_m\to\mu_0$ при $m\to\infty$.

Докажем утверждения 2 и 3. Пусть теперь $\mu_m\to\mu$ и $\mu\neq0$. Тогда существуют такие элементы u_m, $\|u_m\|=1$, что $(A_m-\mu_m I)u_m=0$. Перейдем в последнем равенстве к пределу по некоторой подпоследовательности $m'\to\infty$, такой, что $u_{m'}\to u$ сильно в H. Такая подпоследовательность существует в силу собственной сходимости $A_m-\mu_m I$ к $A-\mu I$. Кроме того, $A_{m'}u_{m'}\to Au$, поскольку $A_m u_m = A_m(u_m-u)+A_m u$ и $\|A_m\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant C$ в силу леммы 9.4. Поэтому $(A-\mu I)u=0$ и, значит, $\mu\in\sigma(A)$, $u\in N(\mu, A)$. Теорема доказана.

Для оценки отклонения собственных значений и собственных векторов операторов A_m и A нам потребуется

Лемма 9.7. *Пусть $A_m\to A$ компактно при $m\to\infty$ и $\mu_m\to\mu_0$, где μ_m, μ_0 собственные значения компактных операторов A_m, A соответственно, причем $\mu_m\neq0$, $\mu_0\neq0$. Тогда:*

1. *если $P: H\to H$ — ортогональный проектор на конечномерное подпространство $V\subset H$, то последовательность $B_m=A_m+P-\mu_m I\to B=A+P-\mu_0 I$ собственно при $m\to\infty$; операторы B_m фредгольмовы;*

2. *если у оператора A нет присоединенных векторов, отвечающих μ_0, и последовательность $\{g_m\}$ такова, что $g_m\in H$, $g_m\to0$ слабо в H и $\|(A_m^*-\bar{\mu}_m I)g_m\|\to0$ при $m\to\infty$, то $g_m\to0$ сильно в H при $m\to\infty$.*

Доказательство. Сходимость $B_m u\to Bu$ при $m\to\infty$ вытекает из определения компактной сходимости $A_m\to A$. Очевидно, что

$$B_m u_m = A_m u_m + \sum_{i=1}^{s}(u_m, f^i)f^i - \mu_m u_m, \tag{9.4}$$

где $f^1, \ldots, f^s$ — ортонормированный базис пространства $V=\operatorname{Im}P$. Если последовательность $\{B_m u_m\}$ компактна и $\|u_m\|=1$, то в силу равномерной компактности операторов A_m и сходимости $\mu_m\to\mu_0\neq0$ из (9.4) следует, что последовательность $\{u_m\}$ компактна. Фредгольмовость оператора B_m вытекает из утверждения 5 теоремы 9.1, поскольку $B_m=(A_m+P)-\mu_m I$ и операторы A_m, P компактны.

Докажем утверждение 2. Обозначим через $P\in\mathscr{L}(H)$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $\operatorname{Ker}(A^*-\bar{\mu}_0 I)$. Тогда согласно утверждению 1 имеем

$$B_m = A_m - \mu_m I + P \to A - \mu_0 I + P = B$$

собственно при $m\to\infty$, причем операторы B_m фредгольмовы. Пользуясь утверждением 4 теоремы 9.1, покажем, что оператор B обратим. Действительно, если

$$Bx=0, \text{ то } x\in \operatorname{Im}(A-\mu_0 I)\cap \operatorname{Ker}(A-\mu_0 I)=\{0\}.$$

Если x ортогонален $\operatorname{Im} B$, то $x\in \operatorname{Ker} B^*=\operatorname{Ker}((A^*-\bar{\mu}_0 I)+P^*)$. Заметим, что P — самосопряженный оператор. Поэтому $(A^*-\bar{\mu}_0 I)x+Px=0$ и, значит, $x\in \operatorname{Ker}(A^*-\bar{\mu}_0 I)\cap \operatorname{Im}(A-\mu_0 I)=\{0\}$. Поскольку $\operatorname{Im} B$ замкнуто в H, то $\operatorname{Im} B=H$. Таким образом, оператор B инъективен и, значит, в силу теоремы Банаха [26] является обратимым.

Из леммы 9.5 заключаем, что при достаточно большом m существуют обратные операторы B_m^{-1} и $\|B_m^{*-1}\|_{\mathscr{L}(H)}=\|B_m^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant C$, где постоянная C не зависит от m.

Установим теперь сильную сходимость g_m к нулю при $m\to\infty$. Имеем

$$\|g_m\|=\|B_m^{*-1}B_m^* g_m\|\leqslant C\|B_m^* g_m\|=C\|(A_m^*-\bar{\mu}_m I)g_m+Pg_m\|\leqslant$$
$$\leqslant C\|(A_m^*-\bar{\mu}_m I)g_m\|+C\|Pg_m\|\to 0$$

при $m\to\infty$, поскольку $\|(A_m^*-\bar{\mu}_m I)g_m\|\to 0$ по условию леммы, а $Pg_m=\sum_{i=1}^{s}(g_m, f^i)f^i$, где $f^1, \ldots, f^s$ — ортонормированный базис в пространстве $\operatorname{Ker}(A^*-\bar{\mu}_0 I)$, и, значит, $Pg_m\to 0$ в силу слабой сходимости к нулю последовательности $\{g_m\}$. Лемма доказана.

Пусть $u\in H$ и M — подпространство в H. Положим

$$\rho(u, M)=\inf_{v\in M}\|u-v\|.$$

Теорема 9.8. *Пусть A_m, A — компактные операторы и последовательность $\{A_m\}$ компактно сходится к оператору A при $m\to\infty$. Пусть также $\mu_m\to\mu_0$, $\mu_m\neq 0$, $\mu_0\neq 0$, $\mu_m\in\sigma(A_m)$, $\mu_0\in\sigma(A)$, точке спектра μ_0 отвечают только собственные векторы (но не присоединенные) оператора A, и $u_m\in N(\mu_m, A_m)$, $\|u_m\|=1$, $m=1, 2, \ldots$. Тогда имеют место оценки*

$$|\mu_m-\mu_0|\leqslant C_1 \sup_{\substack{u\in N(\mu_0, A),\\ \|u\|=1}}\|(A_m-A)u\|, \tag{9.5}$$

$$\rho(u_m, N(\mu_0, A))\leqslant C_2 \sup_{\substack{u\in N(\mu_0, A),\\ \|u\|=1}}\|(A_m-A)u\|, \tag{9.6}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от m.

Доказательство. Пусть $\mu_0\in\sigma(A)$, $\mu_0\neq 0$ и $\{e^1, \ldots, e^s\}$ — базис собственного подпространства $N(\mu_0, A)$. Очевидно, что $((A_m-\mu_m I)e^i, g_m)=0$ для любой последовательности $g_m\in N(\bar{\mu}_m, A_m^*)$, $\|g_m\|=1$. Фиксируем любую такую последовательность $\{g_m\}$. Имеем $((A-\mu_m I)e^i, g_m)=((A-A_m)e^i, g_m)$. Отсюда получаем

$$(\mu_0-\mu_m)(e^i, g_m)=((A-A_m)e^i, g_m). \tag{9.7}$$

Покажем, что можно так выбрать элементы $e^{i(m)} \in N(\mu_0, A)$, что для достаточно больших m имеет место неравенство

$$(e^{i(m)}, g_m) > \alpha = \text{const} > 0, \qquad (9.8)$$

где постоянная α не зависит от m. Допустим, что такой выбор невозможен. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{g_{m'}\}$ имеем

$$(e^i, g_{m'}) \to 0 \text{ при } m' \to \infty, \ i = 1, \dots, s. \qquad (9.9)$$

В силу слабой компактности шара в гильбертовом пространстве H можем считать, что $g_{m'} \to g$ слабо в H. Докажем, что $g \in N(\bar{\mu}_0, A^*)$. Имеем $((A^*_{m'} - \bar{\mu}_{m'} I) g_{m'}, x) = 0$ для любого $x \in H$. Поэтому $(g_{m'}, (A_{m'} - \mu_{m'} I) x) = 0$. Переходя к пределу при $m' \to \infty$ в последнем равенстве, получаем $(g, (A - \mu_0 I) x) = 0$ для любого $x \in H$ и, значит, $g \in N(\bar{\mu}_0, A^*)$.

Покажем, что $g \neq 0$. Пусть $g = 0$. Поскольку $(A^*_m - \bar{\mu}_m I) g_m = 0$, то согласно утверждению 2 леммы 9.7 $g_{m'} \to 0$ сильно в H при $m' \to \infty$, но это противоречит равенству $\|g_m\| = 1$. Поэтому $g \neq 0$.

В силу соотношений (9.9) имеем

$$(e^i, g) = 0, \ i = 1, \dots, s; \ g \neq 0. \qquad (9.10)$$

Ввиду отсутствия у A^* присоединенных векторов, отвечающих $\bar{\mu}_0$, имеют место разложения (9.1) при $T = A^*$. Поэтому из (9.10) имеем $g \in \operatorname{Im}(A^* - \bar{\mu}_0 I)$. Как установлено ранее, $g \in N(\bar{\mu}_0, A^*) = \operatorname{Ker}(A^* - \bar{\mu}_0 I)$ и, значит, $g \in \operatorname{Im}(A^* - \bar{\mu}_0 I) \cap \operatorname{Ker}(A^* - \bar{\mu}_0 I)$. Это противоречит отсутствию у A^* присоединенных векторов, соответствующих $\bar{\mu}_0$. Таким образом, соотношение (9.8) установлено.

Из (9.7) и (9.8) следует оценка (9.5).

Рассмотрим теперь вопрос о близости собственных векторов u_m операторов A_m к собственным векторам оператора A. Пусть

$$u_m \in N(\mu_m, A_m), \ \|u_m\| = 1, \ \rho_m = \inf_{u \in N(\mu_0, A)} \|u_m - u\|.$$

Покажем, что

$$\|(A_m - \mu_m I)(u_m^0 - u_m)\| \geq \alpha \|u_m^0 - u_m\|, \qquad (9.11)$$

где u_m^0 — собственные векторы оператора A, на которых достигается нижняя грань в определении ρ_m, $\alpha = \text{const}$ и не зависит от m.

Очевидно, что

$$(A_m - \mu_m I)(u_m^0 - u_m) = (A_m - \mu_m I) u_m^0 =$$
$$= [(A_m - A) - (\mu_m - \mu_0) I] u_m^0, \ u_m^0 \in N(\mu_0, A). \qquad (9.12)$$

Допустим, что (9.11) не выполнено. Тогда для некоторой подпоследовательности $m' \to \infty$ $(A_{m'} - \mu_{m'} I)[\|u_{m'}^0 - u_{m'}\|^{-1}(u_{m'}^0 - u_{m'})] \to 0$ сильно в H.

В силу собственной сходимости последовательности операторов $\{A_m-\mu_m I\}$ имеем $\|u^0_{m'}-u_{m'}\|^{-1}(u^0_{m'}-u_{m'})\to u$ в H, причем легко видеть, что $u\in N(\mu_0, A)$. Так как $u^0_m-\|u^0_m-u_m\|\,u\in N(\mu_0, A)$, имеем

$$\rho_m\leqslant\|u^0_m-u_m-\|u^0_m-u_m\|\,u\|=$$
$$=\|u^0_m-u_m\|\,\|\|u^0_m-u_m\|^{-1}(u^0_m-u_m)-u\|=\rho_m\varepsilon(m),$$

где $\varepsilon(m)\to 0$ при $m=m'\to\infty$.

Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (9.11). Поскольку $\|u^0_m\|\leqslant\|u_m\|=1$, то из (9.11) и (9.12) получаем

$$\rho(u_m, N(\mu_0, A))\leqslant C\,|\mu_m-\mu_0|+C\sup_{\substack{u\in N(\mu_0,A),\\ \|u\|=1}}\|(A_m-A)\,u\|,$$

где постоянная $C>0$ не зависит от m. Теорема доказана.

Пусть $\{\mathscr{L}_\varepsilon\}$ — последовательность дифференциальных операторов вида

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u)\equiv\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(a_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\beta u\right),\quad \mathscr{L}_\varepsilon\in E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

($a_{\alpha\beta}(\xi)$ — гладкие 1-периодические по ξ функции), сильно G-сходящаяся к оператору

$$\hat{\mathscr{L}}(u)\equiv\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\hat{a}_{\alpha\beta}D^\beta u).$$

Отметим, что все результаты § 8 гл. II очевидным образом распространяются на операторы с комплексными коэффициентами.

Относительно операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\hat{\mathscr{L}}$ предполагаем дополнительно, что для любой $u\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)D^\beta u D^\alpha\bar{u}\,dx\geqslant C\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u|^2\,dx, \qquad (9.13)$$

где постоянная C не зависит от u, и аналогичное неравенство имеет место для оператора $\hat{\mathscr{L}}$. Это условие, как легко видеть, будет выполняться, если к рассмотренным в § 8 гл. II операторам $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\hat{\mathscr{L}}$ добавить член μu, где действительная постоянная μ достаточно велика. Неравенства (9.13) гарантируют однозначную разрешимость задач

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u^\varepsilon)=f,\ u^\varepsilon\in H_0^m(\Omega);\ \hat{\mathscr{L}}(u)=f,\ u\in H_0^m(\Omega),$$

и справедливость оценок

$$\|u^\varepsilon\|_{H^m(\Omega)}\leqslant c_1\|f\|_{H^{-m}(\Omega)},$$
$$\|u\|_{H^m(\Omega)}\leqslant c_2\|f\|_{H^{-m}(\Omega)},$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от f, ε.

Будем также предполагать, что для решений задачи $\widehat{\mathscr{L}}(u)=f$, $u\in H_0^m(\Omega)$, выполнена оценка

$$\|u\|_{H^{2m}(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{9.14}$$

где $C=\mathrm{const}$ и не зависит от f. Оценка (9.14) всегда имеет место, если коэффициенты оператора $\widehat{\mathscr{L}}$ и граница области Ω — достаточно гладкие.

Определим $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\mathscr{A}: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ как операторы, ставящие в соответствие функции $f(x)\in L^2(\Omega)$ решения задач Дирихле

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon)=\rho_\varepsilon(x)f(x),\quad u_\varepsilon\in H_0^m(\Omega),$$
$$\widehat{\mathscr{L}}(u)=\widehat{\rho}(x)f(x),\quad u\in H_0^m(\Omega),$$

где $\rho_\varepsilon(x)$, $\widehat{\rho}(x)$ — измеримые ограниченные равномерно по ε функции.

Оценим норму в $L^2(\Omega)$ разности $u_\varepsilon-u\equiv(\mathscr{A}_\varepsilon-\mathscr{A})f$. Обозначим через B_ε, B операторы, ставящие в соответствие функции $f(x)\in\in L^2(\Omega)$ решения задач Дирихле:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon)=f(x),\quad u_\varepsilon\in H_0^m(\Omega),$$
$$\widehat{\mathscr{L}}(u)=f(x),\quad u\in H_0^m(\Omega).$$

Тогда

$$(\mathscr{A}_\varepsilon-\mathscr{A})f=B_\varepsilon\rho_\varepsilon(x)f(x)-B\widehat{\rho}f(x)=$$
$$=B_\varepsilon((\rho_\varepsilon(x)-\widehat{\rho}(x))f(x))+(B_\varepsilon-B)\widehat{\rho}f(x).$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Имеем

$$\|B_\varepsilon((\rho_\varepsilon(x)-\widehat{\rho}(x))f(x)\|_{H^m(\Omega)}\leqslant C_1\|(\rho_\varepsilon(x)-\widehat{\rho}(x))f(x)\|_{H^{-m}(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant C_2\|\rho_\varepsilon(x)-\widehat{\rho}(x)\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)}\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Для оценки величины $(B_\varepsilon-B)\widehat{\rho f}(x)$ воспользуемся теоремой 8.1 гл. II. Для того чтобы применить эту теорему, нужно проверить сформулированное в § 8.1 гл. II условие N'. Определим функции $N_\gamma^k(x)$ следующим образом:

$$N_\gamma^k(x)=\frac{1}{k^m}N_\gamma(kx),\quad k=\frac{1}{\varepsilon},\quad |\gamma|\leqslant m,$$

где $N_\gamma(\xi)$ — решения в классе 1-периодических функций из пространства $H^m(Q)$ уравнений

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(\xi)D^\beta N_\gamma(\xi))=-\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha a_{\alpha\gamma}(\xi)\ \text{в}\ \mathbf{R}^n.$$

Разрешимость этих уравнений в указанном классе доказывается стандартным способом с помощью теоремы Лакса—Мильграма. Проверим выполнение условия N' из § 8.1 гл. II. Имеем

$$D_x^\alpha N_\gamma^k(x)=\frac{1}{k^{m-|\alpha|}}D_\xi^\alpha N_\gamma|_{\xi=kx},\quad |\alpha|\leqslant m,$$

$D^\alpha N_\gamma(\xi)$ — гладкие 1-периодические функции. Значит,

$$\|D^\beta N_\gamma(\xi)\|_{C(\mathbf{R}^n)}\leqslant \text{const},\quad |\beta|\leqslant m.$$

Поэтому $\|D^\delta N_\gamma^k\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C/k$ при $|\delta|\leqslant m-1$. Следовательно, условие $N'1$ выполнено, причем $\alpha_k=C/k$.

Далее,

$$\widehat{a}^k_{\alpha\beta}\equiv a_{\alpha\beta}(kx)+\sum_{|\gamma|=m}a_{\alpha\gamma}(kx)\,D_\xi^\gamma N_\beta(\xi)|_{\xi=kx}\to$$

$$\to\left\langle a_{\alpha\beta}(\xi)+\sum_{|\gamma|=m}a_{\alpha\gamma}(\xi)\,D_\xi^\gamma N_\beta(\xi)\right\rangle\equiv\widehat{a}_{\alpha\beta}\ \text{слабо в}\ L^2(\Omega),$$

где $\langle f\rangle=\int\limits_Q f(\xi)\,d\xi$, $f(\xi)\in L^1(Q)$ — 1-периодическая по ξ функция. Значит, $\widehat{a}^k_{\alpha\beta}(x)-\widehat{a}_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}(\xi)|_{\xi=kx}$, где $f_{\alpha\beta}(\xi)$ — 1-периодические по ξ функции и $\langle f_{\alpha\beta}\rangle=0$. В силу леммы 1.8 гл. I имеем $f_{\alpha\beta}(\xi)=\sum\limits_{i=1}^n\partial f^i_{\alpha\beta}/\partial\xi_i$, где $f^i_{\alpha\beta}$ — ограниченные 1-периодические по ξ функции. Поэтому

$$\widehat{a}^k_{\alpha\beta}(x)-\widehat{a}_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{k}f^i_{\alpha\beta}(kx)\right).$$

Поскольку $|k^{-1}f^i_{\alpha\beta}(kx)|\leqslant k^{-1}C$, на основании определения нормы в пространстве $H^{-1,\infty}(\Omega)$ имеем $\|\widehat{a}^k_{\alpha\beta}|-\widehat{a}_{\alpha\beta}\|_{H^{-1,\infty}}\leqslant Ck^{-1}$. Следовательно, $\beta_k^{(1)}$, $\beta_k^{(2)}\leqslant Ck^{-1}$. Таким образом, мы проверили выполнение условия $N'2$. Условие $N'3$ вытекает из уравнений для функций $N_\gamma(\xi)$. При этом $\gamma_k\equiv 0$.

Оценим величину $\|v_k\|_0$ в неравенстве (8.10) гл. II. Имеем

$$\|v_k\|_0\leqslant\|v_k\|_m\leqslant C_1\Big\|\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^kD^\gamma u\Big\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big\|\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^kD^\gamma u\Big\|^{1/2}_{H^{m-1}(\partial\Omega)}\Big\|\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^kD^\gamma u\Big\|^{1/2}_{H^m(\partial\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_3k^{-1/2}\|u\|^{1/2}_{H^{2m-1}(\partial\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^{2m}(\partial\Omega)}\leqslant C_4k^{-1/2}\|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_5k^{-1/2}\|f\|_{H^1(\Omega)}=C_6\varepsilon^{1/2}\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

В проведенных выкладках мы последовательно воспользовались априорной оценкой для решения задачи Дирихле

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C \|\varphi\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)},$$

где $\varphi - w \in H_0^m(\Omega)$, неравенством

$$\|\varphi\|^2_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C \|\varphi\|_{H^{m-1}(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{H^m(\partial\Omega)},$$

теоремой об оценке следа функции из $H^s(\Omega)$ на границе области Ω [93], а также априорной оценкой $\|u\|_{H^{2m+1}(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{H^1(\Omega)}$. Таким образом, доказана

Теорема 9.9. *Для операторов $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\mathscr{A}$ имеет место оценка*

$$\|(\mathscr{A}_\varepsilon - \mathscr{A}) f\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant C \{\|\rho_\varepsilon(x) - \hat{\rho}(x)\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)} + \varepsilon^{1/2}\} \|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

где постоянная C не зависит от ε.

Рассмотрим теперь задачи на собственные значения:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u_\varepsilon) + \rho_\varepsilon(x) \lambda_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \ u_\varepsilon \in H_0^m(\Omega), \ \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1, \qquad (9.15)$$

$$\hat{\mathscr{L}}(u) + \hat{\rho}(x) \lambda u = 0, \ u \in H_0^m(\Omega), \ u \not\equiv 0, \qquad (9.16)$$

где $\rho_\varepsilon(x)$, $\hat{\rho}(x)$ — равномерно ограниченные по ε функции,

$$\rho_\varepsilon(x) \geqslant \rho_0 = \mathrm{const} > 0, \ \hat{\rho}(x) \geqslant \rho_0, \ \|\rho_\varepsilon - \hat{\rho}\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Будем говорить, что собственному значению λ_0 задачи (9.16) соответствуют только собственные функции, если у оператора $\mathscr{A}$ нет присоединенных векторов, отвечающих собственному значению $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$.

Теорема 9.10. *Для каждого собственного значения λ_0 задачи* (9.16), *которому соответствуют только собственные функции, существует последовательность $\{\lambda_{\varepsilon_k}\}$ собственных значений задач Дирихле* (9.15) *для операторов $\mathscr{L}_{\varepsilon_k}$, такая, что $\lambda_{\varepsilon_k} \to \lambda_0$ при $k \to \infty$. Имеет место оценка*

$$|\lambda_{\varepsilon_k} - \lambda_0| \leqslant C \{\|\rho_{\varepsilon_k} - \hat{\rho}\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)} + \varepsilon^{1/2}\}, \qquad (9.17)$$

где постоянная C не зависит от ε.

Для собственных функций $u_{\varepsilon_k}(x)$ задач Дирихле (9.15) *для операторов $\mathscr{L}_{\varepsilon_k}$, отвечающих собственным значениям λ_{ε_k}, имеет место оценка*

$$\rho(u_{\varepsilon_k}, M(\lambda_0, \hat{\mathscr{L}})) \leqslant C_1 \{\|\rho_{\varepsilon_k}(x) - \hat{\rho}(x)\|_{H^{-1,\infty}(\Omega)} + \varepsilon_k^{1/2}\}, \qquad (9.18)$$

где C_1 постоянная, не зависящая от ε, $M(\lambda_0, \hat{\mathscr{L}})$ — пространство собственных функций задачи (9.16), *отвечающих собственному значению λ_0. Если $\lambda_{\varepsilon_k} \to \lambda_0 \neq 0$ и λ_{ε_k} — собственные значения задач* (9.15) *для $\mathscr{L}_{\varepsilon_k}$, то λ_0 — собственное значение задачи* (9.16).

Доказательство. Поскольку последовательность операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ сильно G-сходится к оператору $\hat{\mathcal{L}}$, то $\mathcal{A}_\varepsilon \to \mathcal{A}$ компактно. В самом деле, пусть $f(x) \in L^2(\Omega)$. Существует такая функция $g \in H^1(\Omega)$, что $\|f-g\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \alpha$, α — произвольно малое положительное число. Очевидно, что

$$(\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}) f = (\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}) g + (\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A})(f-g).$$

Отсюда

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}) f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|(\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}) g\|_{L^2(\Omega)} + C\alpha, \quad C = \text{const}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу теоремы 9.9, а число α может быть выбрано произвольно малым. Значит, $\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}) f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любой $f \in L^2(\Omega)$. Если $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$, то последовательность $\{\mathcal{A}_\varepsilon f_\varepsilon\}$ компактна в $L^2(\Omega)$, поскольку $\|\mathcal{A}_\varepsilon f_\varepsilon\|_{H^m_s(\Omega)} \leqslant C$, где постоянная C не зависит от ε. Итак, $\mathcal{A}_\varepsilon \to \mathcal{A}$ компактно при $\varepsilon \to 0$. Теперь оценки (9.17) и (9.18) вытекают непосредственно из теорем 9.9, 9.8.

Литература

1. Агмон С, Дуглис А, Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы М ИЛ, 1962.
2. Бахвалов Н С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой//ДАН 1974 Т 218, № 5. С 1046—1048
3 Бахвалов Н С, Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М · Наука, 1984
4. Беляев А. Г. Усреднение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в области с быстро осциллирующей границей//Вестник МГУ, Сер. 1, Математика, механика 1988 № 6 С 63—66
5. Бердичевский В Л Вариационные принципы механики сплошной среды. М. Наука, 1983.
6. Бердичевский В Л. Пространственное осреднение периодических структур//ДАН 1975 Т 222, № 3. С. 106—111
7. Берлянд Л. В Асимптотика решений первой краевой задачи теории упругости в областях с мелкозернистой границей//УМН. 1983. Т. 38, № 6. С 107—108
8. Берлянд Л. В Осреднение уравнений линейной теории упругости в областях с мелкозернистой границей//Теория функций, функциональный анализ и их приложения Харьков· Изд-во Харьк. гос ун-та, 1983. Т. 39 С. 16—25.
9. Берлянд Л. В, Охоцимский А Д. Осредненное описание упругой среды с большим числом мелких абсолютно твердых включений//ДАН 1983. Т. 268, № 2. С 317—320.
10 Берс Л, Джон Ф, Шехтер М Уравнения с частными производными. М: Мир, 1972
11. Вайникко Г. М Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений//Итоги науки и техники Сер. Математический анализ. Т 16 ВИНИТИ АН СССР 1979. С 5—44
12. Вайникко Г. М, Карма О О. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра//ЖВМ и МФ. 1974. Т. 14, № 4. С. 1393—1408.
13. Вишик М И, Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// //УМН 1957 Т 12, № 6 С 3—122
14. Головатый Ю. Д О собственных частотах и собственных колебаниях упругого стержня с присоединенной массой//УМН 1988. Т. 43, № 4 С 173—174
15. Головатый Ю Д О собственных частотах закрепленной пластинки с присоединенной массой//УМН 1988. Т 43, № 5 С 185—186
16. Головатый Ю Д., Назаров С А, Олейник О. А Асимптотика собственных значений и собственных функций в задачах о колебаниях среды с сингулярным возмущением плотности//УМН. 1988 Т. 43, № 5 С. 189—190.
17. Головатый Ю Д, Назаров С А, Олейник О А Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями//Труды Математического института им. В. А Стеклова 1990. Т. 192. С. 42—60

18. Головатый Ю Д., Назаров С. А, Олейник О А, Соболева Т С О собственных колебаниях струны с присоединенной массой//Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 71—91.
19. Григолюк Э И, Фильштинский Л. А Перфорированные пластины и оболочки М: Наука, 1970.
20 Дыхне А М. Проводимость двумерной двухфазиой системы//ЖЭТФ 1970. № 7. С. 110—116
21. Дюво Г, Лионс Ж. Л Неравенства в механике и физике. М· Наука, 1980
22. Жиков В В, Козлов С. М, Олейник О А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов//УМН 1979. Т 34, № 5. С 65—133.
23. Жиков В В, Козлов С М., Олейник О. А О G-сходимости параболических операторов//УМН 1981 Т 36, № 1. С. 11—58.
24. Жиков В В, Олейник О А Об усреднении системы теории упругости с почти периодическими коэффициентами//Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика 1982. № 6 С 62—70.
25. Злотник А. А Коэффициентная устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Дифференц. уравнения. 1984 Т. 20, № 2. С 220—229.
26. Иосида К Функциональный аиализ М Мир, 1967.
27. Иосифьян Г А, Олейник О А О существовании и асимптотическом поведеиии решений системы теории упругости в бесконечной области//УМН. 1982. Т 37, № 4 С. 157—158
28 Иосифьян Г. А, Олейник О А. О поведении на бесконечиости решений эллиптнческого уравнения второго порядка в областях с некомпактной границей//Мат. сб 1980 Т 112, № 4 С 588—610.
29. Иосифьян Г А, Олейник О А, Шамаев А С. Об усредиении слоистых композитов//Механика твердого тела. 1988. № 1. С. 118—125.
30. Иосифьян Г. А., Олейник О А, Шамаев А. С. Об усреднении задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированной области//УМН. 1987. Т. 42, № 6 С. 195—196.
31. Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С. Усреднение собствениых значений краевой задачи теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами//Сиб. мат. журн 1983 Т 24, № 5 С. 50—58
32. Иосифьян Г. А, Олейник О А, Шамаев А. С. Об асимптотическом разложении решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений и системы теории упругости в перфорнроваиной области//ДАН 1985. Т. 284, № 5. С 1062—1066.
33. Иосифьян Г А, Олейник О А, Шамаев А С. О сходимости энергии, тензоров напряжений и частот собственных колебаний в задачах усреднения, возникающих в теории упругости//ДАН 1984. Т. 274, № 6. С. 1329—1333.
34. Иосифьян Г. А, Олейник О А, Шамаев А. С. Об усредиеиии эллиптических уравнений, описывающих процессы в слоистых средах//УМН. 1986. Т 41, № 3 С. 185—186
35. Иосифьян Г А, Олейник О А., Шамаев А С. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами//Вестник МГУ. Сер 1, Математика, механика 1985. № 6. С. 37—46.
36. Иосифьян Г. А., Олейник О А, Шамаев А С. О собственных значениях краевых задач для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорнрованных областях//Мат. сб. 1987. Т. 32, № 4 С. 517—531.
37. Иосифьян Г. А, Олейник О. А, Шамаев А. С Усреднение собственных значений и собственных функций краевой задачи теории упругости в перфорированной области//Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1983. № 4. С. 53—63

38. Иосифьян Г. А, Олейник О А, Шамаев А. С. О предельном поведении спектра последовательности операторов, заданных в различных пространствах//УМН. 1989 Т. 44, № 3. С. 157—158
39. Каламкаров А Л, Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры//Механика деформируемого твердого тела. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. 1988 Т. 19. С 78—147.
40 Канторович Л В, Акилов Г. П. Функциональный анализ. М · Наука, 1976.
41, Козлов С М Осреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстро осциллирующими коэффициентами//Мат. сб. 1978. Т 107, № 2 С 199—217.
42. Курант Р, Гильберт Д Методы математической физики Т. 1. М Гостехиздат, 1957.
43 Колмогоров А Н, Фомин С В Элементы теории функций и функционального анализа М.· Наука, 1972
44. Кондратьев В А О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений//Труды Моск. мат о-ва 1967. Т. 16. С. 293—318.
45. Кондратьев В. А, Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна//УМН. 1988. Т. 43, № 5 С 55—98.
46. Кондратьев В. А., Олейник О А О неравенствах Корна и единственности решений классических краевых задач в неограниченных областях для системы теории упругости//Современные проблемы математической физики. Труды Всесоюзного симпозиума. Т. 1. Тбилиси· Изд-во Тбилис. ун-та, 1987. С 35—62.
47. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об асимптотике в окрестности бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка//Труды семинара имени И. Г. Петровского М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. Вып. 12. С. 149—163.
48. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М: Мир, 1982
49. Ладыженская О А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа М.: Наука, 1973.
50. Ландис Е. М, Олейник О. А К теории уравнений эллиптического типа//И. Г. Петровский. Избранные труды Дифференциальные уравнения Теория вероятностей М.: Наука, 1987 С. 307—324.
51. Левитан Б М. Почти-периодические функции. М.· Гостехиздат, 1953.
52. Левитан Б. М, Жиков В. А Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения М.: Изд-во МГУ, 1978.
53. Лионс Ж Л, Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. Мир, 1971.
54. Лурье К А, Черкаев А. В. G-замыкание множества анизотропных проводящих сред в случае двух измерений//ДАН. 1981. Т. 259, № 2. С. 271—275.
55. Лурье К. А., Черкаев А В. Точные оценки проводимости смесей, образованных двумя материалами, взятыми в заданной пропорции//ДАН. 1982. Т 264, № 5 С 1128—1130
56 Мазья В Г Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986
57 Марков В Г, Олейник О А О распределении тепла в однородных дисперсных средах//ПММ 1975 Т. 39, № 6 С. 1073—1081
58 Марченко В А, Хруслов Е Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей Киев· Наукова думка, 1974.
59. Мельник Т. А Об асимптотических разложениях собственных значений и собственных функций эллиптических краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами//УМН 1987. Т 42, № 4 С 167
60 Мельник Т. А Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптических краевых задач в перфорированном кубе. Деп ВИНИТИ 24 7 87 № 5375—В87
61. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными М.: Мир, 1977.

62 Михайлов В П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М Наука, 1976
63. Михлин С Г. Проблема минимума квадратичного функционала М.· Гостехиздат, 1952.
64. Михлин С Г. Вариационные методы в математической физике М· Наука, 1970
65. Мосолов П П, Мясников П. В Доказательство неравенства Корна// //ДАН 1971 Т 201, № 1 С 36—39
66. Назаров С. А Асимптотические разложения собственных чисел Л Изд-во ЛГУ, 1987
67. Олейник О А О собственных колебаниях тел с концентрированными массами//Современные проблемы прикладной математики и математической физики М· Наука, 1988 С 101—128
68. Олейник О А О частотах собственных колебаний тел с концентрированными массами//Функциональные и численные методы математической физики Киев Наукова думка, 1988. С 165—171.
69. Олейник О А О спектрах некоторых сингулярно возмущенных операторов//УМН. 1987. Т. 42, № 3 С 221—222
70. Олейник О. А. О распределении тепла в миогомерных дисперсиых средах// //Задачи механики и математической физики М Наука, 1976. С 224—236
71. Олейник О. А О сходимости решений эллиптических и параболических уравнений при слабой сходимости коэффициентов//УМН. 1975 Т. 30, № 4. С 259—260.
72. Олейник О А О некоторых математических задачах механики сильно неоднородных сред//Математические методы механики деформируемого твердого тела М· Наука, 1986 С. 105—112
73. Олейиик О А. О поведении решений системы уравнений теории упругости на бесконечности//Общая теория граничных задач: Киев. Наукова думка, 1983 С 168—174.
74. Олейник О. А О задачах усреднения для уравнений с частными производными//УМН. 1986. Т 41, № 4 С 149—152
75. Олейник О А Об усредиении дифференциальных операторов//Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск Наука, 1986. С. 150—159.
76. Олейник О. А. Об усреднении дифференциальных уравиений с быстро колеблющимися коэффициентами//IX Международная конференция по нелинейным колебаниям Киев, 1981. Т. 1 Киев· Наукова думка, 1984. С. 286—289
77. Олейник О А, Иосифьян Г. А. Оценка отклонения решения системы теории упругости в перфорированной области от решения усредненной системы//УМН. 1982 Т. 37, № 5 С. 195—196.
78 Олейник О А, Иосифьян Г. А Об усреднении системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированной области//Н Е Кочин и развитие механики М.· Наука, 1984. С 237—249
79. Олейник О А, Иосифьян Г А, Панасенко Г П Асимптотическое разложение решений системы теории упругости в перфорированных областях//Мат сб 1983 Т. 120, № 1 С 22—41
80. Олейник О А., Иосифьян Г А, Шамаев А С. О задачах усреднения для слоистых сред//Асимптотические методы математической физики. Киев· Наукова думка, 1988 С 73—93
81. Олейник О А, Иосифьян Г А, Шамаев А С Усреднение первой краевой задачи и задачи на собственные значения для системы теории упругости с разрывными периодическими быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированной области//Труды Тбилис. ун-та, Математика, механика, астрономия 1986 № 259. С. 77—92
82 Олейник О. А., Радкевич Е В Уравнения второго порядка с иеотрицательной характеристической формой//Итоги науки. Сер Математический анализ. 1969 ВИНИТИ АН СССР, 1971.

83. Олейник О. А, Соболева Т С О собственных колебаниях неоднородной струны с конечным числом присоединенных масс//УМН. 1988 Т. 43, № 4. С. 187—188
84. Олейник О А, Шамаев А С. Некоторые задачи усреднения в механике композиционных материалов и пористых сред//Механика неоднородных структур Киев Наукова думка, 1986 С 185—190
85 Панасенко Г П Асимптотика высших порядков решений задач о контакте периодических структур//Мат. сб 1979 Т 101, № 4 С. 505—538
86. Панков А. А Усреднение нелинейных почти-периодических эллиптнческих операторов//ДАН УССР, серия А. 1985 № 5 С 19—22
87. Победря Б Е Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984
88. Рид М, Саймон Б Методы современной математической физики Т 1. Функциональный анализ. М. Мир, 1977.
89. Рисс Ф, Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М. Мир, 1979
90. Рудин У Функциональный анализ. М Мир, 1975.
91. Санчес-Паленсия Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М: Мир, 1984
92. Скрипник И В. О сходимости решений нелинейной задачи Дирихле при измельчении границы области//Записки научных семинаров ЛОМИ 1982. Т 115 С 236—250
93 Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике М. Наука, 1988
94 Сукретный В И Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях//УМН 1984 Т. 39, № 4 С 120—121.
95. Сукретный В И Усреднение краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях//УМН 1983 Т 38, № 6 С. 125—126.
96. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций М.: Наука, 1972.
97. Тихонов А Н, Самарский А А Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
98. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье М. Мир, 1984
99 Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М: Мир, 1974
100. Хермандер Л Линейные дифференциальные операторы с частными производными М Мир, 1965.
101. Хилл Р Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы//Механика (сб переводов) 1964. Т. 87, № 5 С 127—143.
102 Хруслов Е Я Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области//Мат сб. 1987. Т. 106, № 4 С. 604—621
103 Шамаев А С Спектральные задачи в теории усреднения и G-сходимости//ДАН 1981 Т 259, № 2 С 294—299
104 Шамаев А С Осреднение решений и собственных значений краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях//УМН. 1982. Т 37, № 2. С 243—244
105 Шапошникова Т А О сильной G-сходимости последовательности систем уравнений теории упругости//Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика 1984 № 5 С 29—33.
106. Шермергор Т. Д Теория упругостн микронеоднородных сред М. Наука, 1977
107 Bensoussan A, Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures Amsterdam North Holland, 1978.
108 Cioranescu D, Saint Jean Paulin J Homogenization in open sets with holes//Journ. Math. Anal. Appl 1979. V 71 P. 590—607
109 Dacorogna B. Weak continuity and weak lower semicontinuity of nonlinear functionals//Lecture Notes in Math N 922. Berlin. Springer Verlag, 1982.

110. Duvaut G Comportement macroscopique d'une plaque perforée periodiquement//Lecture Notes in Math. N 594. Berlin· Springer Verlag, 1977. P. 131—145
111 Ene H J, Pasa G. I Metoda omogenizarii Aplicatii la teoria materialelor compozite. Bucuresti Editura Academici Republicii socialiste Romania, 1987.
112. Fichera G Remarks on Saint-Venant's Principle//Комплексный анализ и его приложения М· Наука, 1977. С. 543—554
113. Francfort G. A., Murat F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity//Arch. Rat. Mech. Anal. 1986. V 94. P. 307—334.
114. Francfort G. A, Murat F. Optimal bounds for conduction in two-dimensional, two-phase anisotropic media//Non-classical mechanics. London Math. Society. Lecture Note Series 122, Cambridge University Press, 1987. P. 197—212
115. Friedrichs K. O. On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn'sinequality//Ann. Math 1947. V. 48, N 2. P. 441—471.
116. De Giorgi E. G-operators and Г-convergence//Proc. Intern. Congr. Math. Warszawa PWN and North Holland. 1984 V. 2. P. 1175—1191.
117. De Giorgi E. Convergence problems for functionals and operators//Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis/Ed. by De Giorgi, Magenes, Mosco. Bologna Pitagora, 1979. P. 133—188.
118. De Giorgi E, Spagnolo S. Sulla convergenza degli integrali dell' energia per operatori ellittici del secondo ordine//Boll. Unione Mat. Ital. 1973. V 8. P 391—411
119 Kesavan S. Homogenization of elliptic eigenvalue problems//Appl. Math. and Optim P. I. 1979. V. 5 P 153—167; P. II. 1979. V 5. P. 197—216
120. Knops R. J, Payne L E. Uniqueness theorems in Linear Elasticity. Berlin: Springer Verlag, 1971.
121. Knowles J. R. On Saint-Venent's Principle in the two-dimensional theory of elasticity//Arch. Rat. Mech. Anal. 1966. V. 21. P. 1—22.
122. Kohn R, Milton G. On bounding the effective conductivity of anisotripic composites//Homogenization and effective moduli of materials and media/ /J. L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R Kohn, J. L Lions ed., Springer Verlag, 1986. P. 97—128.
123. Kohn R. V., Strang G Structural design optimization, homogenization /and relaxation of variational problems//Macroscopic Properties of Disordered Media/R. Burridge, G. Papanicolaou and S. Childress ed. Lecture Notes in Physics. N 154. Berlin: Springer Verlag, 1982 P 131—147.
124. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Asymptotic properties of the elasticity system//Application of multiple scaling in mechanics. Proceedings Intern. Conf. Paris· Masson, 1987. P. 188—205.
125 Kondratiev V. A., Oleinik O A On Korn's inequalities//C. R. Acad. Sci. Paris, 1989. T. 308. Ser. 1 P. 483—487.
126. Lions J. L. Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure//The Rocky Mountain Journ. of Math. 1980. V. 10, N 1. P. 125—144.
127. Lions J L. Some methods in the Mathematical Analysis of systems and their control. Science Press Beijing 1981. China, Gordon and Breach. New York
128 Lions J. L. Remarques sur l'homogénéisation//Computing methods in Applied Sciences and Engineering. VI, INRIA. Amsterdam· North Holland, 1984. P. 299—315
129 Marcellini P. Convergence in energy for elliptic operators//Boll Unione Mat Ital 1979 V 16—B, Ser V, N 1 P. 278—290
130. Maxwell J C A Treatise on Electricity and Magnetism. 3-ed. Oxford: Clarendon Press, 1981.
131. Murat F. Compacité par compensation//Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1978. V 5. P. 489—507
132. Murat F. H-convergence//Seminaire d'analyse fonctionelle et numerique de l'Universite d'Alger. 1978.
133 Oleinik O. A. Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators//Non-classical Continuum Mechanics. Lecture Note series. N 122. Cambridge University Press, 1987. P. 188—205.

134. Oleinik O. A. On homogenization problems//Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics Lecture Notes in Phys. N 195. Berlin Springer Verlag, 1984. P. 248—272
135. Oleinik O. A. Homogenization of differential operators//Equadiff 5 Proceeding of Conference in Bratislava. Teubner-Texte zur Mathematik Leipzig. 1982 V 47 P 284—287
136. Oleinik O A. Asymptotic expansion and boundary layers in homogenization problems for differential operators//BALL IV. Proc. of the 4 Intern. Conf. on boundary and interior layers. Dublin: Boole Press, 1987. P. 145—156.
137. Oleinik O A, Panasenko G. P, Yosifian G. A. Homogenization and asymptotic expansions for solutions of the elasticity system with rapidly oscillating periodic coefficients//Applicable Analysis. 1983. V. 15, N 1—4. P 15—32.
138. Oleinik O. A., Shamaev A. S., Yosifian G. A. On homogenization problems for the elasticity system with non-uniformly oscillating coefficients// //Math Analysis. 1985 B79. Leipzig Teubner-Texte sur Mathematik. P. 192—202.
139. Oleinik O. A., Shamaev A. S., Yosifian G A. On the homogenization of stratified structures//Analyse Mathématique et Applications. Paris. Gauthier-Villars. 1988 P 401—419.
140. Oleinik O. A, Shamaev A. S, Yosifian G. A. On he convergence of the energy, stress tensors and eigenvalues in homogenization problems of elasticity//Z. angev. Math Mech 1985 V. 65, N 1. P. 13—17.
141. Oleinik O. A., Shamaev A. S., Yosifian G. A. Problems d'homogenezation pour le systeme de l'elasticite a coefficients oscillant non-uniformement//C R. Acad. Sci Paris. 1984. V. 298, N 12. P. 273—276.
142. Oleinik O. A, Shamaev A S., Yosifian G. A. Homogenization of eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value problems in perforated domains for elliptic equations with non-uniformly oscillating coefficients// //Current Topics in Partial Differential equations. Tokyo: Kinokuniya Co, 1986. P. 187—216.
143. Oleinik O. A, Yosifian G A On the asymptotic behaviour at infinity of solutions in linear elasticity//Arch Rat. Mech. Anal. 1982. V. 78, N 1. P 29—53
144 Papanicolaou G C, Varadhan S R. S Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients//Seria Coll. Janos Bolyai, N 27. Amsterdam North Holland, 1981. P. 835—873
145. Rayleigh J. W. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium//Phys. Mag. 1892. V. 32, N 241. P. 481—491.
146 Sanchez-Palencia E. Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses//Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Lecture Notes in Phys. N 155 Berlin Springer Verlag, 1984. P 346—368.
147. Sanches-Palencia E., Tchatat H. Vibration de system elastiques avec des masses concentrees//Rend Sem. Mat. Univers. Politech. Torino 1984. V. 42, N 3. P. 43—63.
148. Spagnolo S. Sul limite dell soluzioni di problemi di Cauchy relative all'equazione del calore//Ann Scuola Norm. Sup. Pisa 1967. V. 21. P. 637—699.
149. Spagnolo S Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche//Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1968. V. 22. P 577—597.
150 Tartar L. Estimations fines de coefficients homogénéisés//Ennio de Giorgi Colloquium Research Notes in Mathematics, N 125. Boston. Pitman, 1985. P. 168—187.
151. Tartar L. Homogenization Cours Peccot. College de France Paris, 1977.
152. Tartar L. Estimation des coefficients homogénéisés//Lecture Notes in Math. N 704. Berlin: Springer Verlag, 1977. P. 364—373.
153. Tartar L Compensated compactness and applications to partial differential equations//Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot—Watt Symp. V. IV, R. J. Knops ed., Pitman Press, 1979. P. 136—212.

154. Toupin R. A. Saint-Venant's Principle//Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 1, N 2 P. 83—96.
155. Vanninathan M. Homogénéisation des valeurs propers dans les milieux perfores//C. r. Acad. Sci Paris. 1978. V. 287. P. 403—406.
156. Vanninathan M. Homogénéisation des problemes des valeurs propers dans les milieux perfores. Probleme de Dirichlet//C. r. Acad. Sci Paris. 1978. V 287. P 823—825.
157. Weck N. An explicit Saint-Venant Principle in threedimensional elasticity// //Lecture Notes in Math. N 564. Berlin· Springer Verlag, 1976.
158. Кондратьев В. А, Олейник О. А О зависимости констант в неравенстве Корна от параметров, характеризующих геометрию области//УМН. 1989. Т. 44, № 6. С. 157—158.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Олейник Ольга Арсеньевна
Иосифьян Григорий Андроникович
Шамаев Алексей Станиславович

Зав редакцией *Н. М. Глазкова*
Редактор *Л. А. Николова*
Художественный редактор *Л. В. Мухина*
Технический редактор *О. В. Андреева*
Корректоры *И. А Мушникова, М. А. Мерецкова*

ИБ № 3658

Сдано в набор 7 03 90 Подписано в печать 12 10 90 Формат 60×90/16
Бумага офс. № 2 Гарнитура литературная Высокая печать. Усл печ. л. 19,5
Уч изд. л. 19,9 Тираж 1200 экз Заказ 269 Изд № 1200 Цена 4 р. 30 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы