

Д. ПАЙНС • Ф. НОЗЬЕР

ТЕОРИЯ
КВАНТОВЫХ
ЖИДКОСТЕЙ

THE THEORY
of
QUANTUM LIQUIDS

Volume I: Normal Fermi Liquids

DAVID PINES
University of Illinois

PHILIPPE NOZIÈRES
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

W. A. BENJAMIN, INC.
NEW YORK AMSTERDAM
1966

Д. Пайнс, Ф. Нозьер

ТЕОРИЯ КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Нормальные ферми-жидкости



Перевод с английского

Н. В. Волковой и Л. А. Фальковского

Под редакцией

А. А. Абрикосова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1967

К числу квантовых жидкостей относят систему электронов проводимости в металлах и вырожденных полупроводниках, а также жидкий гелий. Оба типа квантовых жидкостей при определенных условиях обнаруживают свойство сверхтекучести, которая проявляется в гелии именно как сверхтекучесть, а в металлах — как сверхпроводимость.

Настоящая книга содержит изложение теории квантовых жидкостей, не обладающих сверхтекучестью — нормальных ферми-жидкостей. Сверхтекучим ферми- и бозе-жидкостям авторы предполагают посвятить следующую книгу.

Книга написана на современном уровне, но от читателя не требуется знаний, выходящих за рамки обычной электродинамики и теории кинетического уравнения. В этом смысле ее можно рассматривать как дополнительные главы статистической физики; значительное внимание уделено физическому анализу каждой задачи как при ее постановке, так и в ходе решения и при обсуждении результатов.

Обсуждаемые в книге вопросы относятся к числу актуальных и имеющих важное научное и прикладное значение.

Книга рассчитана на научных работников — физиков, работающих в области теории твердого тела, квантовой теории поля и общих вопросов теории систем многих частиц.

Она будет полезна преподавателям университетов и физико-технических вузов в качестве дополнительного пособия к лекциям и семинарам, а также аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в указанных областях физики.

Редакция литературы по физике

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая читателям монография Д. Пайнса и Ф. Нозьера «Теория квантовых жидкостей» представляет собой первый том задуманного авторами двухтомного руководства. Он посвящен теории так называемых «нормальных» ферми-жидкостей, не обладающих сверхтекучестью. Сверхтекучим жидкостям, т. е. бозе-системам и сверхпроводникам, будет посвящена вторая часть, пока еще не написанная.

Авторы книги профессор Иллинойского университета (Урбана, США) Дэвид Пайнс и профессор Парижского университета (Франция) Филипп Нозьер являются известными специалистами по физике систем многих частиц, в особенности систем с кулоновским взаимодействием.

В последнее время написано много книг по теории квантовых систем многих частиц. Большинство из них посвящено главным образом изложению различных вариантов так называемых методов квантовой теории поля, которые применяются для расчета таких систем. Д. Пайнс и Ф. Нозьер в этой книге ставили себе совсем иную задачу. В отношении математического аппарата они не вышли за рамки кинетического уравнения и обычной электродинамики. Немного особняком стоит глава 5, в которой применяется вторичное квантование. Однако и она в математическом отношении очень проста, тем более, что читатель, не знающий метода вторичного квантования, может познакомиться с ним, прочитав приложение.

Основное внимание авторы уделили физике различных процессов, происходящих в ферми-системах под влиянием внешнего возмущения. Авторы не просто находят так называемые функции реакции или диэлектрическую проницаемость (когда речь идет о заряженных системах), а тщательно анализируют роль различных типов возбуждений системы.

Следует отметить оригинальность такого подхода. Обычно формулируется постановка задачи, излагается метод решения и производятся математические операции, после чего в лучшем случае анализируется ответ. Авторы данной книги дают физический анализ почти на всех этапах. Можно иметь разные мнения о разумности такого подхода при решении новых задач, но для человека, который впервые знакомится с данной областью, это, несомненно, чрезвычайно полезно.

Я не буду останавливаться на содержании книги (это сделано в авторском предисловии). В книге есть ряд недостатков, но почти все они не очень существенны. В тех случаях, когда это было нужно, я делал подстрочные примечания. Единственное более общее замечание, которое, по-моему, необходимо сделать, относится не только к данной книге, но и ко многим другим обзорам и руководствам. Систему с кулоновским взаимодействием можно рассматривать по теории Ландау с самосогласованным электрическим полем. В таком виде теория описывает систему с сильным взаимодействием, хотя, конечно, многие величины выражаются через коэффициенты разложения по углам неизвестной функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Для того чтобы перейти к реальному металлу, нужно чрезвычайно сильно изменить теорию. Общей теории такого рода в настоящее время не существует. Для изучения различных характеристик металла применяются модели, причем различные в разных случаях. Вполне понятно, что авторы ограничились описанием изотропной электронной жидкости.

Однако есть случай, когда взаимодействие между частицами является слабым и может рассматриваться как возмущение. Это случай сильно сжатого вещества, когда среднее расстояние между частицами меньше радиуса первой боровской орбиты. Хотя это и не имеет места в реальных металлах при обычных условиях, но тем не менее изучение такого вещества может дать много интересных качественных результатов, имеющих отношение и к обычным металлам.

По сути дела, именно к сильно сжатому веществу относится глава 5. Но почему-то авторы, идя по проторенному пути, рассматривают вместо реального случая, при котором ионы обязательно образуют кристаллическую решетку, модель Гелл-Манна и Бракнера, в которой ионы заменены однородным положительным зарядом. Это не только обедняет результаты, но и не может быть никак оправдано, ибо учет ионов почти не усложняет расчеты.

Но это замечание касается, как я уже отметил, главы 5, которая несколько выпадает из общего содержания книги. А в целом книга, безусловно, хорошая и будет очень полезна всем физикам, которые начинают знакомиться с современной теорией сильно взаимодействующих квантовых систем.

Я хотел бы выразить благодарность авторам книги Д. Пайнсу и Ф. Нозьеру, приславшим предисловие и поправки для русского издания.

Член-корреспондент АН СССР
А. А. АБРИКОСОВ

Предисловие авторов к русскому изданию

Нам доставляет особое удовольствие тот факт, что перевод нашей книги на русский язык выполнен под редакцией А. Абрикосова. В течение многих лет мы знакомимся с работами советских физиков-теоретиков, касающимися квантовых жидкостей. В последние годы нам удалось с многими познакомиться лично, обсудить ряд проблем, представляющих взаимный интерес, воспользоваться их теплым гостеприимством не только в Москве и Ленинграде, но и в Новосибирске. Мы не можем перечислять здесь все многочисленные достижения советских физиков в области теории многих тел, однако нам хотелось бы отдать должное Л. Ландау. С его работы по He II берет начало теория квантовых жидкостей, а работы по ферми-жидкости и фазовым переходам заложили основу всех последующих исследований в этих областях. Мы хотели бы также отметить важную основополагающую работу Боголюбова о неидеальном бозе-газе, его работы по кинетической теории и сверхпроводимости, работы Ландау и Халатникова по кинетике He II, Гинзбурга, Абрикосова, Ландау и Горькова по сверхпроводимости, Зубарева и Климонтовича о коллективных координатах, Мигдала, Галицкого и Беляева о теоретико-полевой формулировке многочастичных задач и ее применениях к электрон-фононному взаимодействию и разреженным ферми- и бозе-газам и т. д. (все эти работы выполнены до 1959 г.).

Когда мы начинали работать над этой книгой, мы предполагали включить в нее довольно детальное описание диаграммной техники Фейнмана. Однако появление книги Абрикосова, Горькова и Дзялошинского («Методы квантовой теории поля в статистической физике») заставило нас несколько изменить планы. Мы решили не дублировать превосходное изложение применений фейнмановских диаграмм и метода функций Грина к задачам многих тел, содержащееся в этой книге, а сконцентрировать внимание на введении основных физических понятий с помощью

метода уравнений движения и широкого использования функций реакции (или корреляции).

За время, прошедшее с момента публикации нашей книги на английском языке, теория ферми-жидкостей получила дальнейшее развитие: Эдвардс, Уитли, Андерсон и их сотрудники открыли новый класс ферми-жидкостей — разбавленные растворы ^3He в ^4He . Мы предполагали добавить некоторый материал, касающийся этих новых интересных жидкостей, которые являются уникальными, поскольку эффективное взаимодействие между атомами ^3He оказывается настолько слабым, что его можно рассматривать с помощью теории возмущений. Однако мы решили не делать этого в основном по той причине, что для полного изложения теории необходимо знать свойства He II , который будет обсуждаться только в следующей книге. Мы отсылаем читателя, интересующегося теорией смесей ^3He — ^4He , к оригинальной литературе [J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, Phys. Rev. Letter, 17, 372 (1966)]

Декабрь 1966 г.

*ДЭВИД ПАЙНС
ФИЛИПП НОЗЬЕР*

Предисловие

В этой книге мы хотели последовательно и по возможности просто изложить теорию квантовой жидкости. Строго говоря, квантовая жидкость — это пространственно однородная система сильно взаимодействующих частиц, рассматриваемая при настолько низких температурах, что необходимо учитывать квантостатистические эффекты; примером таких систем являются жидкие ^3He и ^4He . Практически термин «квантовая жидкость» используется шире. Например, его применяют, когда говорят о тех особенностях поведения электронов проводимости в металлах и вырожденных полупроводниках, на которые не влияет периодическая структура ионного потенциала. Электроны проводимости металлов могут образовывать как нормальную, так и сверхтекучую ферми-жидкость. В первом случае речь идет о нормальном металле, во втором — о сверхпроводнике.

Несмотря на то, что основы теории квантовой жидкости были заложены четверть века тому назад в ставшей классической работе Ландау о ^4He , лишь в последнее десятилетие она сформировалась как отдельная область физики. Благодаря усилиям многих ученых, работавших в этой области, сложилась единая точка зрения и создана методика, пригодная для описания систем многих частиц. Мы понимаем, когда можно пользоваться понятием элементарных возбуждений (основным в теории) и когда оно непригодно. Мы знаем связь квазичастичных возбуждений с коллективными модами, можем вывести и те и другие из фундаментальных взаимодействий между частицами систем. В настоящее время существует и несколько решений модельных задач теории многих тел. Можно показать, что эти решения справедливы для данного класса взаимодействий частиц и определенных плотностей системы; в качестве примера можно назвать электронную систему при большой плотности и низкой температуре и разреженный бозе-газ при низкой температуре. Кроме того, мы располагаем созданной Ландау полуфеноменологической теорией, которая описывает макроскопическое пове-

дение произвольной нормальной ферми-жидкости при низких температурах. Наконец (что наиболее важно) Бардином, Купером и Шриффером успешно развита микроскопическая теория сверхпроводимости.

Эти достижения коренным образом изменили главные направления исследований в квантовой статистической механике: вместо изучения разреженных слабо взаимодействующих газов ею рассматриваются теперь квантовые жидкости, в которых взаимодействие между частицами играет существенную роль. Теория квантовой жидкости в настоящее время доведена до такого уровня, что она может быть последовательно объяснена даже неспециалисту, что мы и стремились сделать в настоящей книге.

При этом мы имели в виду три категории читателей:

- 1) студенты последних курсов, прослушавшие полный курс общей физики и годовой курс квантовой механики;
- 2) физики-экспериментаторы, работающие в области физики низких температур или физики твердого тела.
- 3) теоретики, физики или химики, не занимающиеся проблемой многих тел.

Нашу книгу можно считать как учебником по курсу квантовой статистики или теоретической физики низких температур, так и монографией для справок и самостоятельного изучения. Читатель, вероятно, будет удивлен тем, что мы называем эту книгу учебником по квантовой статистике. Действительно, в оглавлении содержится мало тем, которые обычно включаются в такие курсы. Однако мы считаем, что пора включить в изучаемый студентами курс статистической механики все достижения последнего десятилетия. Мы надеемся, что эта книга может оказаться полезной в этом отношении и стать вместе с тем дополнительным пособием по современному курсу физики твердого тела.

Основные физические понятия мы по возможности пытались вводить без излишних математических сложностей, поэтому не пользовались ни гриновскими функциями, ни фейнмановскими диаграммами. Мы считали, что благодаря этому книга будет более доступна для экспериментаторов и неспециалистов. Опи-

сание методов теории поля в применении к проблеме многих тел можно найти, например, в книгах Пайнса и Нозьера, Каданова и Бейма, а также Абрикосова, Горькова и Дзялошинского¹⁾.

Наше решение разделить книгу на две отдельные части продиктовано как соображениями об ее объеме, так и тем, что квантовые жидкости естественным образом разделяются на нормальные и сверхтекучие. Еще одно и, возможно, решающее обстоятельство заключается в том, что издание всего материала в одной книге привело бы к задержке в публикации уже написанного текста по меньшей мере на год.

Хотя объем книги довольно велик, мы не нашли возможным описать все квантовые жидкости или все аспекты поведения какой-нибудь одной жидкости. Например, мы не включили описание ядерной материи, фазовых переходов и вариационных методов вычисления энергии основного состояния различных систем многих частиц. С другой стороны, мы довольно часто сравниваем теорию с экспериментом и, когда это уместно, указываем на сходство и различие в поведении разных квантовых жидкостей.

Мы начали книгу с теории нейтральной ферми-жидкости, предложенной Ландау, с тем чтобы сравнительно элементарным способом показать, каким образом квантовая статистика и взаимодействие частиц определяют поведение системы. Затем мы рассматриваем произвольную квантовую жидкость, обсуждаем математическую теорию линейной реакции (response); этот аппарат оказывается очень удобным при описании квантовой жидкости. Далее мы рассматриваем заряженную ферми-жидкость. Сверхтекучей бозе-жидкости и сверхпроводникам будет посвящена следующая книга.

Авторы начали работать над этой книгой осенью 1962 г. в Париже в лаборатории физики Высшей нормальной школы,

¹⁾ D. Pines, *The Many-Body Problem*, New York, 1962. (Имеется перевод: Д. Пайнс, *Проблема многих тел*, ИЛ, 1963.) P. Nozières, *The Theory of Interacting Fermi Systems*, New York, 1963. L. P. Kadanoff, G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, New York, 1962. (Имеется перевод: Л. Каданов, Г. Бейм, *Квантовая статистическая механика*, изд-во «Мир», 1964.) А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М., 1962.

куда Д. Пайнс был командирован университетом штата Иллинойс. С этого времени мы писали книгу как в Париже, так и в Иллинойском университете. Нам хотелось бы поблагодарить профессора Парижского университета И Рокара и профессора Дж. М. Алми, декана физического факультета Иллинойского университета за их поддержку и поощрение. Один из нас (Д. Пайнс) хотел бы также поблагодарить за финансовую поддержку фонд Дж. Гугенгейма (в 1962 и 1963 гг.) и Исследовательский центр армии (в 1963 и 1964 гг.).

Мы хотели бы выразить признательность за советы и дискуссии многим друзьям и коллегам, в особенности проф. Дж. Бардину. Мы глубоко благодарны д-ру К. Херрингу за внимательное чтение предварительного варианта гл. 1 и проф. Г. Бейму, который внимательно прочел всю рукопись и сделал много ценных замечаний. Мы приносим благодарность д-ру О. Бетбедер-Матибе за помощь в правке корректуры и мадам М. Одуэн, которая помогла нам в составлении указателя.

*Д. ПАЙНС
Ф. НОЗЬЕР*

Введение

Рассмотрим газ нейтральных атомов, взаимодействующих посредством короткодействующих парных сил. При достаточно высоких температурах и достаточно низких давлениях газ будет разреженным. Каждый атом движется так, как если бы он был совершенно свободным, если не считать редких столкновений с другими атомами или стенками сосуда. Система хорошо описывается элементарной кинетической теорией газов. Она обнаруживает обычные свойства классического газа; теплоемкость C_v не зависит от температуры; в случае фермионов (частиц со спином) спиновая восприимчивость обратно пропорциональна температуре в соответствии с законом Кюри.

Когда давление увеличивается и температура уменьшается, картина меняется по двум различным причинам. С одной стороны, взаимодействие частиц усиливается вследствие увеличения плотности. С другой стороны, понижение температуры уменьшает роль кинетической энергии по сравнению с энергией «взаимодействия» частиц. При определенных условиях газ испытывает фазовый переход первого рода в жидкое состояние. Это состояние характеризуется сильной корреляцией частиц, которая обуславливает сцепление в жидкости. По своему характеру фазовый переход является динамическим, так как он возникает именно благодаря взаимодействию частиц. Этот чисто классический эффект приводит к появлению *классической жидкости*.

При дальнейшем понижении температуры кинетическая энергия жидкости также уменьшается, а взаимодействие частиц соответственно начинает играть более важную роль. Вследствие этого почти во всех случаях наблюдается фазовый переход первого рода из жидкого состояния в твердое. Единственным исключением являются изотопы гелия ^3He и ^4He , которые остаются жидкими вплоть до самых низких достижимых температур. Особое поведение гелия объясняется тем, что в нем относительно малы силы взаимодействия атомов, а нулевые колебания отдельных атомов велики, так как их масса мала.

Таким образом, гелий остается жидким в области температур, где должны быть приняты во внимание квантовые эффекты. Они становятся существенными, когда средняя дебройлевская длина волны частиц $(h^2/2MkT)^{1/2}$ оказывается сравнимой со средним расстоянием между частицами. Для гелия это происходит приблизительно при 3—4° К. Квантовые эффекты можно рассматривать как следствие свойств симметрии многочастичной волновой функции, и они являются существенно *статистическими* по своей природе. Можно полагать, что при достаточно низких температурах, когда проявляется квантовая природа жидкости, ^3He , подчиняющийся статистике Ферми — Дирака, и ^4He , подчиняющийся статистике Бозе — Эйнштейна, должны обнаруживать совершенно различное поведение. Это подтверждается на опыте. Таким образом мы приходим к рассмотрению теории *квантовых жидкостей*, в которой важную роль играет как вырождение квантовой многочастичной системы, так и взаимодействие между частицами.

Единственные «настоящие» квантовые жидкости, обнаруженные в природе, — это ^3He (ферми-жидкость) и ^4He (бозе-жидкость). Однако квантовой жидкостью можно считать и электроны проводимости в металлах, полуметаллах и вырожденных полупроводниках. Эта электронная «жидкость» неоднородна, поскольку электроны в твердом теле движутся в периодическом поле ионных остовов. Но во многих случаях можно пренебречь влиянием этого периодического потенциала. Для электронов проводимости в металлах температура вырождения (при которой становятся существенными квантовые эффекты) имеет порядок 50 000° К; для полуметаллов она составляет около 100° К, а для типичных полупроводников с плотностью электронов проводимости 10^{16} см^{-3} — примерно 3° К.

Как это ни удивительно, но несмотря на значительное взаимодействие частиц и несмотря на тот факт, что мы имеем дело с квантовомеханической многочастичной системой, квантовые жидкости при достаточно низких температурах изучены лучше, чем их классические аналоги. Основную роль здесь сыграло использование понятия *элементарных возбуждений*, которое при подходящих обстоятельствах позволяет полностью описать низколежащие возбужденные состояния квантовой жидкости. При очень низких температурах число таких возбуждений мало; возбуждения являются долгоживущими и слабо взаимодействуют друг с другом; большинство свойств системы можно объяснить с этой точки зрения.

В настоящей книге мы рассмотрим одну группу квантовых жидкостей — *нормальные ферми-жидкости*. Нормальную ферми-жидкость можно грубо определить как вырожденную ферми-

жидкость, в которой взаимодействие частиц вне зависимости от силы не меняет *коренным* образом свойства системы. Другими словами, жидкость сохраняет существенные свойства системы невзаимодействующих фермионов. Она имеет вполне определенную ферми-поверхность, ее теплоемкость меняется линейно с температурой и т. д. Примером нормальной ферми-жидкости являются ${}^3\text{He}$ выше $4 \cdot 10^{-3}^\circ\text{K}$ и электроны проводимости в сверхпроводящих металлах.

В 1956 г. Ландау построил изящную полуфеноменологическую теорию макроскопического поведения нормальной ферми-жидкости в низкотемпературном пределе. Мы изложим теорию Ландау для нейтральной ферми-жидкости в гл. 1 и применим ее к ${}^3\text{He}$.

Теория Ландау имеет недостатки. Она неприменима к тем микроскопическим явлениям, для которых характерны длины порядка расстояния между частицами или энергии, сравнимые с энергией частицы на ферми-поверхности. Кроме того, она в некотором смысле слишком полна, потому что содержит гораздо больше информации, чем когда-нибудь сможет дать любой эксперимент. Поэтому представляет интерес развить прямое описание величин, измеряемых в экспериментах с системами многих частиц. Строгий формализм можно построить в том случае, если реакция системы *пропорциональна* воздействию измерительного прибора. Общая теория линейной реакции, применимая как к микро-, так и к макроскопическим явлениям, изложена в гл. 2. В этой теории устанавливается соотношение между реакцией и корреляционными функциями системы и их связь со спектром элементарных возбуждений. Теория позволяет получить несколько точных результатов большой практической важности. Кроме того, — и это более важно — она устанавливает *способ описания*, которым следует пользоваться при рассмотрении свойств квантовой жидкости как в микро-, так и в макроскопических ситуациях, что позволяет выявить физические свойства, общие для всех квантовых жидкостей. Эта общность часто затушевывается разнообразием способов математического описания.

Гл. 3 и 4 посвящены заряженным ферми-жидкостям. В силу большого радиуса кулоновского взаимодействия заряженная ферми-жидкость заметно отличается от нейтральной. В гл. 3 вводятся и детально описываются новые физические явления, возникающие из-за кулоновского взаимодействия, — экранирование и плазменные колебания. Далее дается обобщение теории Ландау, которая затем применяется для описания некоторых макроскопических явлений в электронных жидкостях. По своему содержанию гл. 3 аналогична гл. 1; в ней изложены важные

физические идеи, которые описываются в макроскопическом пределе. Точно так же гл. 4 аналогична гл. 2; она содержит формальное описание экспериментов с системами заряженных частиц и касается как микроскопических, так и макроскопических явлений. В ней определяются различные характеристики заряженных систем, которые затем применяются к задачам, представляющим физический интерес.

В гл. 1—4 обсуждаются определенные точные соотношения между различными физическими величинами или макроскопические теории, которые применимы к различным макроскопическим явлениям. В противоположность этому детальные микроскопические теории справедливы лишь в ограниченных пределах. Они представляют собой либо решение модельных задач (описание физической системы в ограниченном интервале значений плотности или величины взаимодействия, которые редко соответствуют физической реальности), либо дают приближенное описание реальных физических систем, достоверность которого трудно точно оценить. Оба типа микроскопических теорий обсуждаются в гл. 5. Рассматривается приближение хаотических фаз, которое применяется к электронному газу большой плотности; эта модельная задача может быть решена точно. Для систем заряженных и нейтральных частиц описано обобщенное приближение хаотических фаз; в макроскопическом пределе выяснена его связь с теорией Ландау. Развита и применена к описанию простых металлов приближенные микроскопические теории, касающиеся электронной жидкости при плотностях, соответствующих металлическому состоянию.

Следующая книга будет посвящена теории сверхтекучих квантовых жидкостей. Математически сверхтекучесть характеризуется макроскопическим заполнением одного квантового состояния — «конденсата». Физически сверхтекучесть наиболее ярко проявляется как связанное с этим квантовым состоянием движение, которому не оказывается сопротивление. Бозе-жидкости, в частности ^4He , можно считать простейшими сверхтекучими системами, так как уже в первом порядке теории возмущений расчет приводит к результату, отвечающему существованию конденсата. Наоборот, сверхтекучесть ферми-жидкости — гораздо более тонкое явление. Поэтому не удивительно, что многие годы отделяют экспериментальное открытие сверхпроводимости (Камерлинг-Оннес, 1911 г.) от создания успешной микроскопической теории (Бардин, Купер, Шриффер, 1957 г.).

В начале следующей книги развита теория бозе-жидкости, которая затем применена к ^4He . Далее развита теория сверхтекучей ферми-жидкости; она используется при анализе сверхпроводимости. Затем подробно описана сверхтекучесть ферми- и

бозе-жидкостей. Насколько возможно, мы пытались вести изложение параллельно, чтобы подчеркнуть сходство в поведении этих двух типов сверхтекучести. Однако имеется и одно важное различие. Для сверхтекучей ферми-жидкости существует прекрасная микроскопическая теория, а именно теория Бардина, Купера, Шриффера, которая хорошо согласуется со всеми основными экспериментами по сверхпроводимости. Наоборот, для единственной найденной в природе бозе-жидкости ⁴Не удовлетворительной микроскопической теории не существует. По этой причине в развитии теории бозе-жидкости мы опираемся в основном на феноменологическое рассмотрение и на макроскопическую теорию, в создание которой важный вклад внесли Ландау и его сотрудники.

В заключение сделаем следующее замечание: хотя заглавие книги показывает, что мы ограничиваемся рассмотрением квантовых жидкостей, фактически это не совсем так. Поскольку из возможных систем взаимодействующих фермионов основной интерес представляет система, образованная электронами проводимости в металле, мы пытались в соответствующих местах указать на обобщения, которые необходимы для учета периодического потенциала ионов. Эти «твердотельные» эффекты обсуждаются в гл. 1, § 3; гл. 3, § 8; гл. 4, § 5; гл. 5, § 6.

Нейтральные ферми-жидкости

Рассмотрим невзаимодействующий ферми-газ, находящийся в равновесии при температуре T . Вероятность того, что одна частица имеет энергию ε , определяется формулой

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp[(\varepsilon - \mu)/kT]},$$

где k — постоянная Больцмана. Величина μ , называемая химическим потенциалом, подбирается таким образом, чтобы дать правильное полное число частиц. При высоких температурах химический потенциал μ отрицателен и много меньше, чем $-kT$; при этом функция $f(\varepsilon)$ сводится к обычному выражению Максвелла — Больцмана: газ становится классическим. В другом предельном случае $T \rightarrow 0$ функция $f(\varepsilon)$ переходит в ступенчатую функцию Ферми — Дирака, которая скачком меняется от 1 до 0 при некотором положительном значении μ_0 химического потенциала; говорят, что газ *полностью вырожден*. Переход от первого случая ко второму происходит в окрестности температуры вырождения

$$T_F = \frac{\mu_0}{k}.$$

В области вырождения число возбужденных состояний, в которых может находиться система, мало в силу принципа Паули, который «замораживает» распределение. При температуре T изменение температуры влияет только на те частицы, энергия которых находится в интервале kT вблизи энергии Ферми. Уменьшение числа возбужденных состояний имеет удивительные физические последствия: теплоемкость становится пропорциональной T , вместо того чтобы быть постоянной, спиновая восприимчивость перестает зависеть от температуры, вместо того чтобы меняться по закону $1/T$.

В реальных системах фермионов взаимодействие частиц и принцип Паули действуют одновременно; таким образом, мы приходим к изучению *вырожденной ферми-жидкости*, в которой

важны оба эффекта. В некоторых системах взаимодействие частиц резко меняет природу вырожденного газа. Это происходит, например, в сверхтекучем электронном газе. Часто взаимодействующая жидкость сохраняет многие свойства газа; тогда ее называют *нормальной* (определение будет уточнено дальше). Нормальная ферми-жидкость при $T=0$ характеризуется строго определенной ферми-поверхностью S_F ; элементарные возбуждения в ней можно представлять как *квазичастицы* вне S_F и *квазидырки* внутри S_F по аналогии с одночастичными возбуждениями невзаимодействующего ферми-газа. Именно благодаря этому сходству многие свойства жидкости можно интерпретировать в рамках одночастичного приближения. Другой пример: одноэлектронная теория твердого тела правильно объясняет большое число тонких явлений в металлах (эффект де Гааза — ван Альфена, кинетические свойства и т. д.), несмотря на то, что она игнорирует взаимодействие частиц, не являющееся слабым. И опять такой успех теории связан с использованием представления о квазичастичных возбуждениях. Следует подчеркнуть, что такие одночастичные теории не являются полиыми; существуют многочастичные эффекты, которые обусловлены взаимодействием частиц и характерны для жидкого состояния.

В настоящее время не существует теории, полностью описывающей свойства взаимодействующей ферми-жидкости при произвольной температуре. Задачу можно сформулировать, обращаясь к сложным методам теории поля. Однако общие решения (см., например, [1]) носят несколько формальный характер и не позволяют получить явных результатов, которые можно было бы сравнить с экспериментом. К счастью, в пределе *низких температур* ($T \ll T_F$) можно получить некоторые простые результаты для *макроскопических* явлений. Соответствующая теория создана Ландау [2] на полуфеноменологической основе. В дальнейшем предположения Ландау были обоснованы детальным микроскопическим анализом [3, 4]. В этой главе мы примем полуфеноменологическую точку зрения Ландау и исследуем применение теории к таким нейтральным системам, как вырожденный жидкий ${}^3\text{He}$.

Как отмечалось во введении, ${}^3\text{He}$ — единственная вырожденная ферми-жидкость, обнаруженная в природе. С небольшими изменениями теорию ферми-жидкости можно применить к электронам в металлах и полуметаллах (и к ядерному веществу). При распространении теории Ландау на заряженные системы (например, электроны в металлах) возникают определенные трудности, обусловленные дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия. Поэтому мы отложим подробное обсуждение заряженных ферми-жидкостей до гл. 3.

В § 1 настоящей главы мы введем понятие квазичастиц с помощью тщательного сопоставления взаимодействующей и не взаимодействующей систем. В реальной ферми-жидкости квазичастицы не вполне независимы; существует определенная *энергия взаимодействия* возбужденных квазичастиц. Эта физическая особенность является главной в теории Ландау, основы которой изложены в § 2. В § 3 теория применяется к различным равновесным свойствам; кратко обсуждается также ее распространение на случай электронов в металлах. Затем мы переходим к изучению неравновесных свойств. В § 4 вводится кинетическое уравнение для квазичастиц, с помощью которого в § 5 вычисляется плотность тока. Подробному обсуждению «локализованных» квазичастичных возбуждений и их взаимодействию с окружающей средой посвящен § 6; мы подготовимся к построению формального решения кинетического уравнения, что понадобится нам в дальнейшем. Важное понятие коллективных мод введено в § 7; здесь подробно обсуждается затухание коллективных мод, а также со статической и динамической точек зрения изучается устойчивость основного состояния относительно коллективных возбуждений. В § 8 анализируется влияние реальных столкновений между квазичастицами; обсуждаются физические явления, связанные с временем жизни квазичастиц, обычные кинетические коэффициенты и затухание коллективных мод, вызванное столкновениями квазичастиц. В § 9 проводится сравнение нулевого звука с первым звуком. Наконец, в § 10 теория применяется к вырожденному ${}^3\text{He}$.

Вся эта глава основана на теории Ландау, в которой выявлены все важные особенности, обусловленные взаимодействием. Эта теория является строгой только в известных пределах. При обсуждении теории мы отметим условия ее применимости.

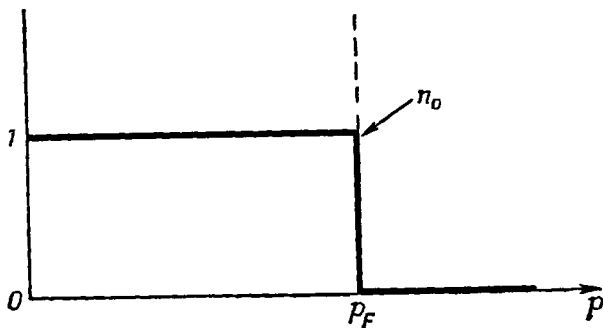
§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О КВАЗИЧАСТИЦАХ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ ФЕРМИ-ГАЗЕ

Рассмотрим сначала систему N невзаимодействующих фермионов массы m , заключенную в объеме Ω . Любое собственное состояние всей системы представляет собой антисимметризованную сумму произведений N различных одночастичных состояний. Каждая частица характеризуется двумя квантовыми числами: импульсом \mathbf{p} и спином $\sigma = \pm 1/2$; ее нормированная волновая функция в конфигурационном пространстве представляет собой плоскую волну

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Волновая функция системы в целом есть детерминант Слейтера, составленный из N таких плоских волн. Все собственные состояния системы можно характеризовать функцией распределения $n_{\mathbf{p}\sigma}$, которая равна 1, если состояние \mathbf{p}, σ занято, и нулю, если оно свободно. (В дальнейшем мы, как правило, опускаем спиновый индекс σ и включаем его в \mathbf{p})



Фиг. 1. Распределение квазичастиц для системы в основном состоянии.

Частица с импульсом \mathbf{p} обладает кинетической энергией $p^2/2m$. В отсутствие взаимодействия энергии частиц складываются: общая энергия E системы дается выражением

$$E = \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m}. \quad (1.2)$$

Основное состояние соответствует заполнению N одночастичных состояний с наименьшей энергией. Функция распределения для системы в основном состоянии показана на фиг. 1. Фермиевский импульс p_F определяется соотношением

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{p_F}{\hbar} \right)^3. \quad (1.3)$$

В основном состоянии все одночастичные состояния, лежащие внутри ферми-поверхности S_F (которая в данном случае представляет собой сферу радиусом p_F), заняты, состояния вне S_F свободны.

Добавим к системе одну частицу. Основное состояние системы из $N+1$ частицы можно получить, если добавленную частицу поместить в состояние с наименьшей допустимой энергией, т. е. в состояние на ферми-поверхности. Химический потенциал μ , определяемый как

$$\mu = E_0(N+1) - E_0(N) = \frac{\partial E_0}{\partial N}, \quad (1.4a)$$

выражается при этом формулой

$$\mu = \frac{p_F^2}{2m}. \quad (1.46)$$

Химический потенциал равен энергии частицы на *ферми-поверхности*. Мы увидим, что этот результат справедлив и при наличии взаимодействия между частицами.

Возбужденные состояния системы лучше определять по отношению к основному состоянию. Данное возбужденное состояние получается путем переноса определенного числа частиц из области внутри ферми-поверхности наружу. Эта процедура эквивалентна возникновению *частиц* вне S_F и равного числа *дырок* внутри S_F . Частицы и дырки являются в данном случае элементарными возбуждениями; различные наборы этих возбуждений описывают все возбужденные состояния. Степень возбуждения характеризуется отклонением функции распределения от ее значения в основном состоянии

$$\delta n_p = n_p - n_p^0. \quad (1.5)$$

Частице с импульсом $p' > p_F$ соответствует $\delta n_p = \delta_{pp'}$, а дырке с импульсом $p' < p_F$ соответствует $\delta n_p = -\delta_{pp'}$. При отсутствии взаимодействия энергия возбуждения системы равна

$$E - E_0 = \sum_p \frac{p^2}{2m} \delta n_p. \quad (1.6)$$

При низких температурах частицы и дырки возбуждены только вблизи ферми-поверхности; величина δn_p имеет порядок единицы в малой окрестности вблизи S_F и пренебрежимо мала за пределами этой области.

В изолированной системе сохраняется полное число частиц; поэтому число возбужденных частиц должно равняться числу дырок. Это ограничение иногда несколько неудобно. Предпочтительнее работать с системой, которая эквивалентна большому каноническому ансамблю статистической механики, т. е. характеризуется не числом частиц N , а химическим потенциалом μ . К этому мы придем, если будем рассматривать систему, которая находится в контакте с резервуаром частиц. В этом случае интерес представляет не энергия E , а *свободная энергия*, которая при $T=0$ определяется равенством $F = E - \mu N$. Как следует из (1.6), свободная энергия возбуждений, описываемых отклонением δn_p функции распределения, дается выражением

$$F - F_0 = \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) \delta n_p. \quad (1.7)$$

Когда число частиц сохраняется, т. е. когда $\sum_p \delta n_p = 0$, соотношение (1.7), очевидно, сводится к (1.6).

Как следует из (1.7), свободная энергия частицы с импульсом p равна $p^2/2m - \mu$; это соответствует свободной энергии элементарного возбуждения *вне* ферми-поверхности. Внутри S_F возбуждениями являются *дырки*, для которых $\delta n_p = -1$. Свободная энергия, связанная с этими возбуждениями, равна $\mu - p^2/2m$, а не $p^2/2m - \mu$. Поскольку химический потенциал μ равен $p^2/2m$ на ферми-поверхности, свободная энергия *элементарного возбуждения* с импульсом p (не путать со свободной энергией частицы) может быть записана в виде $|p^2/2m - \mu|$; этот результат справедлив как внутри, так и вне S_F . Заметим, что свободная энергия возбуждения всегда положительна; это необходимо для обеспечения устойчивости основного состояния.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИЧАСТИЦ И КВАЗИДЫРОК

Обратимся теперь к случаю взаимодействующей ферми-жидкости. Нас интересует природа ее элементарных возбуждений. Чтобы решить эту проблему «в лоб», необходимо вводить функции Грина и использовать математический аппарат теории возмущений для системы многих частиц. Такой подход выходит за рамки настоящей книги. Поэтому мы воспользуемся другим методом, заключающимся в сравнении взаимодействующей «реальной» жидкости с невзаимодействующим «идеальным» газом, и установим однозначное соответствие между собственными состояниями этих двух систем. Этот метод позволяет качественно понять спектр возбуждений взаимодействующей системы.

Рассмотрим собственное состояние идеальной системы, характеризующееся функцией распределения n_p . Чтобы установить связь с реальной системой, представим себе, что взаимодействие между частицами включается бесконечно медленно. При таких «адиабатических» условиях идеальные собственные состояния переходят в собственные состояния реальной взаимодействующей системы. Однако априори неясно, почему в результате этой процедуры должны возникнуть *все* реальные собственные состояния. Например, вполне может случиться, что реальное основное состояние вообще не может быть получено таким путем (в качестве примера достаточно вспомнить о сверхпроводниках). Поэтому мы должны *предположить*, что реальное основное состояние можно адиабатически получить из некоторого собственного состояния идеальной системы, описываемого функцией распределения n_p^0 . Это утверждение можно рассматривать как определение *нормальной* системы фермионов.

Из соображений симметрии вытекает, что распределение n_p^0 изотропной системы обладает сферической симметрией. Вследствие этого сферическая ферми-поверхность не искажается при включении взаимодействия между частицами; реальное состояние адиабатически возникает из идеального основного состояния. Иначе обстоит дело в том случае, когда ферми-поверхность невзаимодействующей системы анизотропна (как в случае металлов). При этих обстоятельствах при включении взаимодействия ферми-поверхность обязательно деформируется. Можно показать, что в таких случаях реальное основное состояние возникает адиабатически из некоторого *возбужденного* состояния невзаимодействующей системы. Эта ситуация не создает фундаментальных трудностей для теории.

Добавим теперь частицу с импульсом p к системе с идеальным распределением n_p^0 и опять адиабатически включим взаимодействие между частицами. Мы создадим возбужденное состояние реальной жидкости с импульсом p , так как импульс сохраняется при столкновениях частиц. Когда взаимодействие увеличивается, можно представить себе, что эта «голая» частица начинает постепенно воздействовать на окружающие ее частицы. Если изменение взаимодействия происходит достаточно медленно, полная система из $N+1$ частицы останется в равновесии. Наконец, когда взаимодействие будет включено полностью, мы обнаружим, что наша частица движется вместе с тем возмущением окружающих частиц, которое возникло вследствие взаимодействия. В терминах теории поля следовало бы сказать, что частица «одета» собственнoэнергетическим облаком. Мы будем считать «одетую» частицу совершенно независимой частицей и называть ее *квазичастицей*. Описанное выше возбужденное состояние соответствует реальному основному состоянию плюс квазичастица с импульсом p .

Пусть S_F — ферми-поверхность, характеризующая систему в невозмущенном состоянии с распределением n_p^0 , из которого строится реальное основное состояние. В силу принципа Паули квазичастичные возбуждения могут возникать только в том случае, когда их импульс p лежит *вне* S_F . Тогда распределение квазичастиц в p -пространстве резко ограничено ферми-поверхностью S_F .

Используя ту же процедуру адиабатического включения, мы можем определить *квазидырку* с импульсом p , лежащим *внутри* ферми-поверхности S_F . То же самое мы можем сделать и для вышележащих возбужденных конфигураций, соответствующих нескольким квазичастицам и квазидыркам. Таким образом, квазичастицы и квазидырки появляются как *элементарные возбу-*

ждения в реальной системе. Комбинируя их, можно получить большое число возбужденных состояний. Мы установили желаемое взаимно однозначное соответствие между собственными состояниями идеальной и реальной систем.

В действительности наш метод адиабатического включения, вероятно, приведет к трудностям при изучении затухания волновой функции реального состояния вследствие взаимодействия частиц. Если время, в течение которого включается взаимодействие, больше времени жизни состояния, которое мы хотим получить, то включение взаимодействия *необратимо*, так как состояние распадается задолго до того, как взаимодействие достигнет номинальной величины. Если же взаимодействие включается слишком быстро, то процесс *не адиабатичен*, и мы не создадим собственное состояние взаимодействующей системы. Это ограничение не связано с недостатками математического описания; оно вытекает из физической неопределенности, возникающей вследствие конечного времени жизни рассматриваемого состояния.

Для основного состояния, которое стабильно, а потому определяется точно, этих трудностей не возникает. Вместе с тем любое определение элементарных возбуждений несколько неточно, так как квазичастицы и квазидырки подвержены реальным столкновениям. К счастью, непосредственно вблизи ферми-поверхности время жизни квазичастиц становится достаточно большим, так что концепция квазичастиц в этой области имеет смысл. Если рассматривать взаимодействие частиц только друг с другом, то при $T=0$ время жизни квазичастиц обратно пропорционально квадрату расстояния по энергии до ферми-поверхности S_F . Так как квазичастица определяется все лучше и лучше по мере приближения к ферми-поверхности, эта поверхность остается вполне определенной. Надо иметь в виду, что квазичастица строго определена, только когда она находится непосредственно на ферми-поверхности. Чтобы наша теория имела смысл, мы должны быть осторожны и вводить квазичастицы только в окрестности S_F .

Рассмотрим собственное состояние невзаимодействующей системы, описываемое некоторой функцией распределения n_p для обычных «голых» частиц. Адиабатически включив взаимодействие, мы получим собственное состояние реальной системы, которому можно приписать ту же функцию распределения n_p . Во взаимодействующей системе n_p описывает *распределение квазичастиц*. Степень возбуждения системы характеризуется отклонением δn_p от функции распределения основного состояния

$$\delta n_p = n_p - n_p^0. \quad (1.8)$$

При низких температурах существенны только низколежащие возбужденные состояния, для которых δn_p лежит в непосредственной окрестности ферми-поверхности. В этих условиях затухание квазичастиц незначительно, и наше описание имеет смысл.

Подчеркнем, что физический смысл имеет δn_p , а не n_p . (Определять равновесное распределение n_p^0 в области, где квазичастицы неустойчивы, бессмысленно.) Поэтому мы проявим осторожность и сформулируем теорию в терминах отклонения от равновесия δn_p ; распределение n_p^0 будет использоваться только на промежуточной стадии. Фактически наши результаты всегда содержат градиент ∇n_p^0 , т. е. величину, которая отлична от нуля лишь вблизи ферми-поверхности.

ЭНЕРГИЯ КВАЗИЧАСТИЦ

Для идеальной системы существует простая линейная связь между энергией данного состояния и соответствующей функцией распределения. Если принять во внимание взаимодействие частиц, связь между энергией состояния E и функцией распределения квазичастиц n_p становится гораздо более сложной. Она может быть записана как функционал $E[n_p]$, вид которого в общем случае найти не удастся. Однако если функция распределения n_p достаточно близка к функции распределения основного состояния n_p^0 , этот функционал можно разложить в ряд Тейлора. Записывая n_p в виде (1.8) и считая малым либо само отклонение δn_p , либо область импульсного пространства, где оно отлично от нуля, мы получим

$$E[n_p] = E_0 + \sum_p \varepsilon_p \delta n_p + O(\delta n^2), \quad (1.9)$$

где ε_p — первая функциональная производная от E . Так как каждое суммирование по p вносит множитель Ω , величина ε_p имеет порядок $\Omega^0 = 1$, т. е. не зависит от объема.

Если δn_p описывает состояние с одной дополнительной квазичастицей, имеющей импульс p , то энергия состояния равна $E_0 + \varepsilon_p$ (ε_p — энергия квазичастицы). В соответствии с (1.9) энергия нескольких возбужденных квазичастиц просто аддитивна с точностью до членов порядка $(\delta n)^2$. Предположим, что энергия ε_p изменяется непрерывно вблизи $p = p_F$. Это утверждение неочевидно, его надо рассматривать как характеристику «нормальных» систем.

На ферми-поверхности энергия ε_p должна быть равна постоянной ε_F (энергия Ферми): иначе мы могли бы уменьшить энергию основного состояния, переводя частицу из состояния внутри

ферми-поверхности в состояние с меньшей энергией вне S_F . Так как основное состояние системы $N+1$ частиц получается добавлением квазичастицы на ферми-поверхность, ϵ_F есть просто *химический потенциал* $\mu = dE_0/dN$ при $T=0$. Это очень важное свойство впервые было установлено Гугенгольцем и ван Ховом [5].

Практически нам нужны значения v_p только вблизи ферми-поверхности, где можно использовать разложение в ряд. Градиент v_p

$$\mathbf{v}_p = \nabla_p \epsilon_p \quad (1.10)$$

играет роль групповой скорости квазичастиц. Мы увидим позже, что \mathbf{v}_p — это скорость волнового пакета, соответствующего квазичастице. В отсутствие магнитного поля для системы с центром инверсии ϵ_p и \mathbf{v}_p не зависят от спина σ . Для изотропной системы энергия ϵ_p зависит только от p , и ее можно обозначить как ϵ_p . Скорость \mathbf{v}_p тогда параллельна p , и мы можем написать (на ферми-поверхности)

$$v_{pF} = \frac{p_F}{m^*}; \quad (1.11)$$

величина m^* называется *эффективной массой* квазичастицы. Заметим, что это определение эффективной массы отличается от принятого для описания движения независимых частиц в периодической решетке: в последнем случае $1/m^*$ определяется как вторая производная ϵ_p по p .

В анизотропной системе скорость $|\mathbf{v}_p|$ изменяется на ферми-поверхности; в этом случае понятие эффективной массы становится несколько искусственным. Тогда удобно ввести плотность состояний $\nu(\epsilon)$ для квазичастиц, имеющих энергию $\mu + \epsilon$,

$$\nu(\epsilon) = \sum_p \delta(\epsilon_p - \mu - \epsilon). \quad (1.12)$$

При низких температурах все физические свойства зависят от плотности состояний на ферми-поверхности $\nu(0)$.

Это рассуждение демонстрирует сходство между свободными частицами в ферми-газе и квазичастицами в ферми-жидкости. Они обладают в импульсном пространстве одинаковым распределением, ограниченным при $T=0$ строго определенной ферми-поверхностью; кроме того, как те, так и другие подчиняются статистике Ферми — Дирака. Главное отличие, которое мы отметили, — это зависимость энергии и скорости квазичастиц от состояния окружающей среды. Вследствие этого квазичастицы обладают особыми свойствами, которых нет у невзаимодействующих систем. Эти свойства рассмотрены в следующем параграфе.

§ 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КВАЗИЧАСТИЦАМИ. ТЕОРИЯ ЛАНДАУ

РАЗЛОЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Как уже отмечалось выше, физический интерес представляет не энергия E , а свободная энергия $F = E - \mu N$. «Свободная энергия возбуждения», отсчитываемая от основного состояния, описывается формулой

$$F - F_0 = E - E_0 - \mu (N - N_0), \quad (1.13)$$

где N_0 — число частиц в основном состоянии. Для того чтобы обобщить разложение (1.9), необходимо вычислить $(N - N_0)$. Для этого заметим, что добавление одной квазичастицы к основному состоянию соответствует добавлению *точно одной* голой частицы к системе. Это сразу же следует из нашего «адиабатического» определения квазичастиц: состояние с одной добавочной квазичастицей получается из состояния идеальной системы, содержащей $(N+1)$ частиц, а полное число частиц сохраняется при адиабатическом включении взаимодействия. Разность $(N - N_0)$ можно записать в виде

$$N - N_0 = \sum_p \delta n_p. \quad (1.14)$$

Используя соотношения (1.9) и (1.14), мы получим с точностью до членов порядка $(\delta n)^2$

$$F - F_0 = \sum_p (e_p - \mu) \delta n_p. \quad (1.15)$$

Если число частиц в системе не меняется, разность (1.14) обращается в нуль; разность $(E - E_0)$ тогда равна $(F - F_0)$ и может быть записана как в виде (1.15), так и в виде (1.9).

Большая часть свойств, которые мы будем рассматривать, связана со смещением ферми-поверхности на небольшую величину δ . Соответствующее значение δn_p равно ± 1 в тонком слое толщиной δ у ферми-поверхности. Здесь $e_p - \mu$ имеет порядок δ . За пределами этого слоя величина δn_p равна нулю. Разность $F - F_0$, описываемая соотношением (1.15), имеет, таким образом, порядок δ^2 . Разложение (1.15), которое на первый взгляд начинается с члена первого порядка, в действительности имеет второй порядок. Поэтому наше приближение будет последовательным только в том случае, если мы продолжим тейлоровское разложение функционала $F - F_0$ и напишем все члены второго

порядка по смещению ферми-поверхности. Мы приходим тогда к выражению

$$F - F_0 = \sum_{\mathbf{p}} (\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \delta n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}'} + O(\delta n^3). \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) лежит в основе феноменологической теории ферми-жидкости, предложенной Ландау [2]. Его наиболее важная особенность — наличие дополнительного квадратичного члена, описывающего взаимодействие между квазичастицами. Такого члена нет в приближенной теории Зоммерфельда. Мы увидим позже, что это существенно меняет целый ряд физических свойств системы.

Правая часть (1.16) представляет собой основные члены разложения $F - F_0$ по степеням относительного числа возбужденных квазичастиц, которое определяется отношением

$$\alpha = \frac{\sum_{\mathbf{p}} |\delta n_{\mathbf{p}}|}{N}. \quad (1.17)$$

Приближение Ландау справедливо при малых α . Мы должны быть внимательны и сохранять соответствующее приближение в любом вычислении, удерживая в результатах только главные члены по параметру α .

Функция $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ представляет собой вторую вариационную производную от E (или F) по $n_{\mathbf{p}}$. Вследствие этого она не меняется при перестановке \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Так как каждое суммирование по импульсам дает множитель Ω , функция $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ имеет порядок $1/\Omega$. Это легко понять, если заметить, что $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ представляет собой энергию взаимодействия квазичастиц \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Поскольку объем системы равен Ω , вероятность того, что квазичастицы взаимодействуют друг с другом, имеет порядок a^3/Ω , где a — радиус взаимодействия.

Пусть функция $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ непрерывна при \mathbf{p} и \mathbf{p}' , близких к \mathbf{p}_F . Как и раньше, это можно считать характеристикой «нормальной системы». Практически нам потребуется значение $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ только на ферми-поверхности в точках, где $\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}'} = \mu$. Тогда $\hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ зависит только от направления \mathbf{p} и \mathbf{p}' и от спинов σ и σ' .

В отсутствие магнитного поля система инвариантна относительно обращения времени, так что

$$\hat{f}_{\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma'} = \hat{f}_{-\mathbf{p}-\sigma, -\mathbf{p}'-\sigma'} \quad (1.18)$$

(мы явно ввели спиновые индексы). Если, кроме того, ферми-поверхность инвариантна относительно инверсии $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, соотношение (1.18) принимает вид

$$\hat{f}_{\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma'} = \hat{f}_{\mathbf{p}-\sigma, \mathbf{p}'-\sigma'}. \quad (1.19)$$

В этом случае $f_{p\sigma, p'\sigma'}$ зависит только от относительной ориентации спинов σ и σ' и имеет лишь две независимые компоненты, соответствующие параллельной и антипараллельной ориентации спинов. Удобно записывать их в виде

$$\begin{aligned} f_{pp'}^{\uparrow\uparrow} &= f_{pp'}^s + f_{pp'}^a, \\ f_{pp'}^{\uparrow\downarrow} &= f_{pp'}^s - f_{pp'}^a, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $f_{pp'}^s$ и $f_{pp'}^a$ — симметричная и антисимметричная по спинам части взаимодействия квазичастиц. Можно считать, что антисимметричный член $f_{pp'}^a$ обусловлен некоторой энергией обменного взаимодействия $2f_{pp'}^a$, которая появляется только в том случае, когда спины параллельны. В русской литературе соотношения (1.20) обычно заменяются соотношением

$$f_{p\sigma, p'\sigma'} = \varphi_{pp'} + \sigma \cdot \sigma' \psi_{pp'}, \quad (1.21)$$

где σ и σ' — спиновые матрицы. Коэффициент ψ в 4 раза больше нашей функции f^a . Мы предпочитаем использовать более симметричное представление (1.20).

Если система изотропна, соотношения (1.20) можно еще упростить. В этом случае для p и p' , лежащих на ферми-поверхности, функции $f_{pp'}^a$ и $f_{pp'}^s$ зависят только от угла ξ между p и p' . Их можно разложить в ряды по полиномам Лежандра

$$f_{pp'}^{s(a)} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{s(a)} P_l(\cos \xi). \quad (1.22)$$

Функция f полностью определяется набором коэффициентов f_l^s и f_l^a . Последние удобно выражать в приведенных величинах, полагая

$$v(0) f_l^{s(a)} = \frac{\Omega m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} f_l^{s(a)} = F_l^{s(a)}. \quad (1.23)$$

Безразмерные коэффициенты F_l^s и F_l^a дают представление о величине энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией.

ЛОКАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ КВАЗИЧАСТИЦЫ

Рассмотрим состояние системы с определенным распределением квазичастиц $\delta n_{p'}$. Добавим теперь к этой системе еще одну квазичастицу p . В соответствии с (1.16) свободная энергия добавленной квазичастицы равна

$$\tilde{\epsilon}_p - \mu = \epsilon_p - \mu + \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}. \quad (1.24)$$

Если импульс p достаточно близок к ферми-поверхности, оба члена в (1.24) имеют один порядок. Таким образом, вследствие наличия энергии взаимодействия данной квазичастицы с остальными возбужденными квазичастицами ее свободная энергия зависит от состояния системы. Этот физический эффект, который отсутствует в невзаимодействующих системах, обусловлен квадратичным членом в (1.16).

Величина $\tilde{\epsilon}_p$ играет центральную роль при построении теории Ландау. Для выяснения ее физического смысла предположим, что система слабо неоднородна. Отклонение от равновесия можно характеризовать зависящим от координат распределением возбужденных квазичастиц $\delta n_{p'}(\mathbf{r})$ (см. § 4). В результате оказывается, что величина $\tilde{\epsilon}_p$ зависит от \mathbf{r} . Ее можно рассматривать как *локальную энергию*, зависящую от искажения окружающей среды. Градиент $\tilde{\epsilon}_p$ по координатам

$$\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\epsilon}_p = \nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} \right\} \quad (1.25)$$

представляет собой, как мы увидим, среднюю силу, с которой окружающая среда действует на квазичастицу p .

Математически удобно ввести функцию распределения

$$\bar{n}_p^0 = n^0(\tilde{\epsilon}_p - \mu), \quad (1.26)$$

где n^0 — обычная ступенчатая функция Ферми — Дирака, определяемая следующим образом:

$$n^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Легко видеть, что для слабонеоднородной системы распределение \bar{n}_p^0 соответствует «локальному равновесию» квазичастиц точно так же, как $n_p^0 = n^0(\epsilon_p - \mu)$ описывает действительное равновесие.

Отклонение от состояния локального равновесия характеризуется разностью

$$\delta \bar{n}_p = n_p - \bar{n}_p^0. \quad (1.28)$$

Сравнивая определения δn_p и $\delta \bar{n}_p$, мы видим, что

$$\delta n_p = \delta \bar{n}_p + \frac{\partial n_p^0(\epsilon_p - \mu)}{\partial \epsilon_p} (\tilde{\epsilon}_p - \epsilon_p). \quad (1.29)$$

Используя формулу (1.24), получаем

$$\delta \bar{n}_p = \delta n_p - \frac{\partial n_p^0}{\partial \epsilon_p} \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}. \quad (1.30)$$

Как правило, δn_p всегда содержит множитель $\partial n^0 / \partial \varepsilon_p$. При $T=0$ имеем

$$\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} = -\delta(\varepsilon_p - \mu); \quad (1.31)$$

поэтому δn и $\delta \bar{n}$ отличны от нуля только на ферми-поверхности S_F .

Для изотропной системы при $T=0$ связь между δn_p и $\delta \bar{n}_p$ заметно упрощается. Разобьем δn_p и $\delta \bar{n}_p$ на две части — симметричную и антисимметричную по спинам, для чего положим

$$\delta n_{p, \pm} = \delta n_p^s \pm \delta n_p^a; \quad (1.32)$$

аналогично представим $\delta \bar{n}_p$. Разложим, далее, эти величины в ряды по нормированным сферическим функциям

$$\delta n_p^s = \sum_{lm} \delta(\varepsilon_p - \mu) \delta n_{lm}^s Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.33)$$

где (θ, φ) — полярные углы вектора p . Подставляя эти разложения для δn_p и $\delta \bar{n}_p$ в (1.30) и используя разложение (1.22) для $f_{pp'}$, а также теорему сложения для сферических функций, получаем

$$\begin{aligned} \delta \bar{n}_{lm}^s &= \left(1 + \frac{F_l^s}{2l+1}\right) \delta n_{lm}^s, \\ \delta \bar{n}_{lm}^a &= \left(1 + \frac{F_l^a}{2l+1}\right) \delta n_{lm}^a, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где коэффициенты F_l^s и F_l^a даются формулой (1.23). Таким образом, переход от δn_p к $\delta \bar{n}_p$ действительно осуществляется весьма просто.

Величина $\delta \bar{n}_p$ чрезвычайно полезна, как мы увидим ниже. Многие свойства выводятся заметно проще с помощью $\delta \bar{n}_p$, а не δn_p . Связь между этими величинами играет важную роль, так что в дальнейшем мы часто будем обращаться к соотношениям (1.30) и (1.34).

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИЧАСТИЦ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Рассмотрим систему при температуре T с химическим потенциалом μ . Последний можно определить как адиабатическую производную

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_S. \quad (1.35)$$

С помощью элементарной термодинамики можно показать, что

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_T - T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_T. \quad (1.36)$$

При очень низкой температуре последний член в (1.36) пренебрежимо мал по сравнению с предыдущим; химический потенциал тогда равен изотермической производной E по N , которая легко вычисляется.

Равновесное распределение квазичастиц $n_p^0(T, \mu)$ мы получим с помощью известной процедуры. Взяв некоторое распределение n_p , подсчитаем, каким числом способов W квазичастицы могут быть распределены по различным занятым состояниям, затем выберем то распределение n_p , для которого при заданной полной свободной энергии число W максимально. При этом получаем

$$n_p^0(T, \mu) = \frac{1}{1 + \exp[(\tilde{\epsilon}_p - \mu)/kT]}, \quad (1.37)$$

где $\tilde{\epsilon}_p$ — локальная энергия квазичастиц, соответствующая распределению $n_p^0(T, \mu)$. Зная максимальное значение $W_{\text{макс}}$, мы можем получить энтропию $S = k \ln W_{\text{макс}}$.

Локальная энергия $\tilde{\epsilon}_p$ описывается соотношением (1.24), где δn_p определяется равенством

$$\delta n_p = n_p^0(T, \mu) - n_p^0(0, \mu). \quad (1.38)$$

При очень низких температурах интеграл $\int \delta n_p p^2 dp$ имеет порядок T^2 для любого направления в импульсном пространстве. Энергия взаимодействия между возбужденными квазичастицами имеет тот же порядок, поэтому ею можно пренебречь по сравнению с разностью $\epsilon_p - \mu$, имеющей порядок T . Следовательно, в низкотемпературном пределе мы можем заменить $\tilde{\epsilon}_p$ на ϵ_p в равновесном распределении (1.37). Кроме того, мы еще раз убедились в том, что число частиц при постоянном μ (или химический потенциал при постоянном N) остается неизменным с точностью до членов порядка T^2 .

Тепловое движение возбуждает квазичастицы только на расстоянии не более kT от ферми-поверхности. Доля возбужденных квазичастиц равна kT/μ . Последняя величина фактически и является параметром разложения в (1.16). Пренебрегая членами порядка δn^3 , мы допускаем ошибку в энергии порядка $(kT/\mu)^3$. Из-за этой неопределенности бессмысленно вычислять с высокой точностью температурную зависимость любой другой величины, встречающейся в теории. Действуя в духе теории Ландау, мы

должны оставлять только главные члены по T (обычно нулевого или первого порядка). Нет нужды рассматривать поправки порядка тех членов, которыми мы пренебрегаем в (1.16).

§ 3. РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА

Применим теперь теорию Ландау к изучению ряда макроскопических свойств, характеризующих систему в равновесии. Мы увидим, что на некоторые из этих свойств влияет взаимодействие между квазичастицами, а на другие нет.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Рассмотрим сначала теплоемкость, определяемую равенством

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N. \quad (1.39)$$

Предоставляем читателю в качестве упражнения показать, что при низкой температуре C_v можно представить в более удобной форме:

$$C_v = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\mu. \quad (1.40)$$

Для вычисления C_v запишем свободную энергию в виде (1.16), где δn_p определяется соотношением (1.38). Мы видели, что интеграл от δn_p для любого направления в импульсном пространстве стремится к нулю как T^2 . Энергия взаимодействия в (1.16) имеет поэтому порядок T^4 , т. е. пренебрежимо мала по сравнению с главным членом, имеющим порядок T^2 . Следовательно, «тепловая» свободная энергия $[F(T) - F_0]$ описывается выражением того же типа, что и для невзаимодействующей системы. Путем прямых вычислений приходим к выражению

$$F(T) - F_0 = \frac{\pi^2}{6} v(0) (kT)^2, \quad (1.41)$$

где плотность состояний $v(0)$ определяется соотношением (1.12). Для изотропной системы

$$v(0) = \frac{\Omega m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3}; \quad (1.42)$$

с помощью этого равенства находим теплоемкость

$$C_v = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} k^2 T. \quad (1.43)$$

Таким образом, по наклону кривой температурной зависимости

теплоемкости в линейной области мы можем определить *эффективную массу* квазичастиц. Отметим еще раз, что на C_v не влияет взаимодействие между квазичастицами.

СЖИМАЕМОСТЬ И СКОРОСТЬ ЗВУКА

Пусть $E_0(\Omega)$ — энергия основного состояния системы, рассматриваемая как функция объема Ω . Давление P можно определить следующим образом:

$$P = - \frac{\partial E_0}{\partial \Omega}. \quad (1.44)$$

[При произвольной температуре в (1.44) следует брать адиабатическую производную, однако мы видели, что вблизи $T=0$ различие между адиабатическим и изотермическим процессами отсутствует.] Сжимаемость κ определяется равенством

$$\frac{1}{\kappa} = - \Omega \frac{\partial P}{\partial \Omega}. \quad (1.45)$$

Для большой системы энергия E_0 является экстенсивной величиной (т. е. пропорциональной объему), если плотность $\rho = N/\Omega$ считать постоянной. Следовательно, мы можем написать

$$E_0 = \Omega f(\rho). \quad (1.46)$$

Из соотношений (1.44) и (1.46) непосредственно находим

$$\frac{1}{\kappa} = \rho^2 f''(\rho). \quad (1.47)$$

Эти величины можно связать с химическим потенциалом $\mu = \partial E_0 / \partial N$. Действительно, прямым вычислением можно показать, что

$$\frac{1}{\kappa} = N \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_\Omega. \quad (1.48)$$

Сжимаемость связана со скоростью звука обычным образом

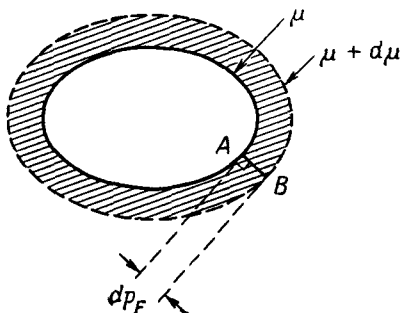
$$s^2 = \frac{1}{\kappa m \rho} = \frac{N}{m} \frac{\partial \mu}{\partial N}. \quad (1.49)$$

Вычислим теперь $\partial \mu / \partial N$, или, лучше, обратную величину $\partial N / \partial \mu$. Увеличим μ на бесконечно малую величину $d\mu$. Ферми-поверхность слегка увеличится. (Система предполагается инвариантной относительно инверсии, так что мы имеем одну ферми-поверхность для обеих ориентаций спинов.) Произволь-

ная точка A исходной ферми-поверхности сместится по нормали на величину

$$dp_F = \left(\frac{\partial p_F}{\partial \mu} \right) d\mu \quad (1.50)$$

и перейдет в положение B (фиг. 2). На новой ферми-поверхности энергия квазичастиц должна быть равна $\mu + d\mu$, откуда



Фиг. 2. Изменение ферми-поверхности при увеличении химического потенциала от значения μ до $\mu + d\mu$.

определяется величина dp_F . Точнее говоря, положение точки B должно быть таким, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_B(\mu + d\mu) - \varepsilon_A(\mu) = d\mu. \quad (1.51)$$

Левая часть равенства (1.51) содержит два члена:

1) при переходе от A к B изменяется импульс \mathbf{p} , что приводит к изменению энергии $v_p dp_F$;

2) увеличение μ на величину $d\mu$ соответствует появлению новых квазичастиц в заштрихованной области на фиг. 2. При этом ε_p возрастает на величину, равную энергии взаимодействия с этими добавочными квазичастицами.

Пусть δn_p — изменение функции распределения, обусловленное смещением ферми-поверхности. Величина δn_p равна $+1$ в заштрихованной области на фиг. 2 и нулю вне ее. Объединяя оба вклада в равенстве (1.51), мы получаем

$$v_p dp_F + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} = d\mu. \quad (1.52)$$

Так как $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ — гладкая функция \mathbf{p} и \mathbf{p}' , мы можем заменить здесь δn_p соответствующим образом нормированной δ -функцией. Нормировку легко найти, поскольку при $T=0$

$$\delta n_p = - \frac{dn^0}{d\varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} dp_F = \delta(\varepsilon_p - \mu) v_p dp_F. \quad (1.53)$$

Подставляя это в (1.52) и деля на $d\mu$, получаем

$$v_p \left(\frac{\partial p_F}{\partial \mu} \right) + \sum_{p'} f_{pp'} v_{p'} \left(\frac{\partial p'_F}{\partial \mu} \right) \delta(\epsilon_{p'} - \mu) = 1. \quad (1.54)$$

Это интегральное уравнение определяет производную $\partial p_F / \partial \mu$ в любом направлении. Таким образом, мы нашли изменение ферми-поверхности при изменении μ . Чтобы получить $\partial N / \partial \mu$, заметим, что

$$dN = \sum_p \delta n_p = \sum_p \delta(\epsilon_p - \mu) v_p dp_F. \quad (1.55)$$

Скорость звука определяется соотношением

$$\frac{N}{ms^2} = \frac{\partial N}{\partial \mu} = \sum_p \delta(\epsilon_p - \mu) v_p \left(\frac{\partial p_F}{\partial \mu} \right). \quad (1.56)$$

Для изотропной системы производная $\partial p_F / \partial \mu$ не зависит от направления. В этом случае в (1.54) вносит вклад только тот член разложения функции $f_{pp'}$, который не зависит от спина и отвечает $l=0$. Используя определение (1.23), находим

$$v_p \left(\frac{\partial p_F}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{1 + F_0^s}. \quad (1.57)$$

Подставляя это выражение в (1.56), получаем окончательно

$$\frac{N}{ms^2} = \frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{v(0)}{1 + F_0^s}. \quad (1.58)$$

Соотношение (1.58) отличается от обычного результата для независимых частиц (с массой m^*) лишь множителем $(1 + F_0^s)^{-1}$, появление которого непосредственно связано с наличием взаимодействия между квазичастицами.

Мы специально провели это длинное рассуждение, чтобы показать, к каким новым особенностям приводит взаимодействие частиц. Результат (1.58) легко получить, замечая, что *локальная энергия* квазичастиц на ферми-поверхности всегда равна химическому потенциалу μ . Когда μ увеличивается на величину $d\mu$, локальная ферми-энергия увеличивается на ту же величину. Новое распределение можно записать в виде $n^0(\tilde{\epsilon}_p - \mu - d\mu)$. Отклонение от локального равновесного распределения $n^0(\tilde{\epsilon}_p - \mu)$ равно

$$\delta \bar{n}_p = -d\mu \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \right). \quad (1.59)$$

Для изотропной системы отклонение $\delta\bar{n}_p$ изотропно и не зависит от спина. Используя (1 34), получаем

$$\delta n_p = \frac{\delta\bar{n}_p}{1 + F_0^s} = - \frac{\partial n^0 / \partial \varepsilon_p}{1 + F_0^s} d\mu, \quad (1.60)$$

откуда непосредственно следуют соотношения (1 57) и (1 58). Этот вывод наглядно показывает, что для практических расчетов удобнее пользоваться величиной $\delta\bar{n}_p$.

Вернемся теперь к результату (1 58). Заменяя величину $v(0)$ ее значением в соответствии с (1 42), находим скорость звука

$$s^2 = \left(\frac{P_F^2}{3mm^*} \right) (1 + F_0^s). \quad (1.61)$$

Так как величину m^* можно определить по экспериментальным значениям теплоемкости, измерение s позволяет вычислить величину F_0^s . В пределе слабых взаимодействий $m^* \rightarrow m$, а $F_0^s \rightarrow 0$. Скорость звука стремится при этом к $v_F / \sqrt{3}$. Заметим, что соотношение (1 61) имеет смысл только при $(1 + F_0^s) > 0$. В противоположном случае система неустойчива. Комплексное значение скорости звука означает, что флуктуации плотности экспоненциально нарастают.

СПИНОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Приложим к ферми-жидкости однородное постоянное магнитное поле \mathcal{H} . При этом, как обычно, в системе возникнут парамагнитный спиновый момент и диамагнитный орбитальный момент. Орбитальными эффектами, хотя они и играют важную роль, мы сейчас заниматься не будем, так как их рассмотрение сопряжено с гораздо большими трудностями, к ним мы вернемся в гл. 4, § 7 и в гл 5, § 4

В поле \mathcal{H} частица со спином $\sigma = \pm 1/2$ обладает магнитной энергией $-g\beta\sigma\mathcal{H}$, где $g=2$ есть g -фактор Ланде и $\beta = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора. Двум разным спиновым ориентациям соответствуют теперь различные химические потенциалы ($\mu \pm g\beta\mathcal{H}/2$), т. е. равновесие нарушается. Чтобы восстановилось равновесие и соответствующие химические потенциалы стали одинаковыми, ферми-поверхности для спинов $\pm 1/2$ должны быть различными. В слабых полях две ферми-поверхности смещаются в противоположных направлениях на одинаковое расстояние, причем химический потенциал остается равным μ с точностью до членов порядка \mathcal{H}^2 .

Смещение ферми-поверхности, соответствующей спину σ , должно быть таким, чтобы химический потенциал был бы равен μ ,

а не $\mu - g\beta\sigma \mathcal{H}$. Так как химический потенциал равен локальной энергии квазичастиц на ферми-поверхности, равновесное распределение в присутствии магнитного поля можно записать как

$$n_{p\sigma}(\mathcal{H}) = n^0(\tilde{\epsilon}_p - \mu - g\beta\sigma \mathcal{H}). \quad (1.62)$$

Повторяя рассуждения, которые применялись при выводе формулы (1.59), получаем отклонение

$$\delta \bar{n}_{p\sigma} = -g\beta\sigma \mathcal{H} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p}. \quad (1.63)$$

Чтобы рассчитать полную намагниченность

$$\mathfrak{M} = \sum_p g\beta\sigma \delta n_{p\sigma}, \quad (1.64)$$

необходимо перейти от $\delta \bar{n}_{p\sigma}$ к $\delta n_{p\sigma}$. Это легко сделать для изотропной системы. В этом случае отклонение $\delta \bar{n}_{p\sigma}$ изотропно и *антисимметрично* по спину. Используя (1.34), находим

$$\delta n_{p\sigma} = \frac{\delta \bar{n}_{p\sigma}}{1 + F_0^a} = -\frac{g\beta\sigma \mathcal{H}}{1 + F_0^a} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p}. \quad (1.65)$$

Теперь легко вычислить \mathfrak{M} . Положив $g=2$, находим

$$\mathfrak{M} = \beta^2 \frac{v(0)}{1 + F_0^a} \mathcal{H}. \quad (1.66)$$

Для спиновой восприимчивости χ_P получаем

$$\chi_P = \frac{\mathfrak{M}}{\Omega \mathcal{H}} = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\beta^2}{1 + F_0^a}. \quad (1.67)$$

Мы видим, что в выражении (1.67) для спиновой восприимчивости появилось обменное взаимодействие F_0^a . Мы не можем вычислить χ_P , зная только плотность состояний, как в случае не взаимодействующей системы. Сравнивая экспериментальные значения теплоемкости (т. е. эффективной массы m^*) и восприимчивости, можно определить коэффициент F_0^a . Соотношение (1.67) опять имеет смысл только в том случае, когда

$$1 + F_0^a > 0. \quad (1.68)$$

В противоположном случае длинноволновые флуктуации магнитного момента становятся неустойчивыми: система оказывается ферромагнитной.

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ

В какой степени теория Ландау применима к электронам в металлах? Здесь мы ответим на этот вопрос в общих чертах, отложив до гл. 3 рассмотрение особенностей, связанных с дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия.

Прежде всего, дадим сводку основных свойств системы *не-взаимодействующих* электронов, находящихся в периодическом потенциале кристаллической решетки твердого тела. Одночастичными собственными состояниями являются блоховские волны, т. е. волновые функции вида

$$\psi_{p_n}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} u_{p_n}(\mathbf{r}), \quad (1.69)$$

где функция u_{p_n} периодична с периодом решетки. Собственные состояния характеризуются двумя квантовыми числами: номером зоны n и волновым вектором \mathbf{p} , лежащим в первой зоне Бриллюэна кристалла. Блоховские волны (1.69) можно рассматривать как смесь плоских волн, каждая из которых имеет волновой вектор $\mathbf{p} + \mathbf{K}$, где \mathbf{K} — вектор обратной решетки. Если волновые векторы лежат в первой зоне Бриллюэна, то волновой вектор (или импульс) остается хорошим квантовым числом, несмотря на наличие периодического потенциала.

Основное состояние системы N электронов получается путем заполнения N нижних блоховских состояний. Если при этом остаются незаполненные зоны, то твердое тело является металлом. В этом случае распределение, отвечающее основному состоянию, обрывается на некоторой поверхности в импульсном пространстве, лежащей в первой зоне Бриллюэна и называемой ферми-поверхностью S_F . Отметим, что незаполненными могут оставаться несколько зон; тогда ферми-поверхность состоит из нескольких листов, по одному на каждую незаполненную зону.

Ферми-поверхность имеет симметрию кристаллической решетки, она обязательно анизотропна. В силу инвариантности относительно обращения времени ферми-поверхность переходит сама в себя при инверсии спина и одновременном пространственном отражении относительно начала координат. Если кристалл не обладает центром инверсии, то ферми-поверхности, отвечающие двум направлениям спина, различны.

После этого очень краткого обзора основ одноэлектронного приближения в металлах выясним, каким образом в рамках теории Ландау может быть учтено кулоновское взаимодействие между электронами. Применяя процедуру адиабатического включения, введенную в § 2, мы снова установим взаимно однозначное соответствие между собственными состояниями реальной системы и состояниями невзаимодействующей системы. Для *нормального* металла основное состояние получается адиабатически

из некоторого «идеального» состояния, характеризуемого ферми-поверхностью S_F (как мы упоминали, наиболее вероятно, что S_F соответствует возбужденному состоянию невзаимодействующей системы). Как и раньше, мы можем определить квазичастицу, вводя одну частицу с квантовыми числами (n, p) в невзаимодействующую систему, а затем очень медленно включая взаимодействие. Так как полный импульс сохраняется и при наличии взаимодействия, получившаяся квазичастица имеет те же квантовые числа, что и исходная блоховская волна, а именно импульс p , лежащий в первой зоне Бриллюэна, и индекс зоны. Поэтому квазичастица имеет те же характеристики, что и блоховская волна, т. е. мы можем определить ферми-поверхность и т. д.¹⁾

Из-за наличия затухания, вызванного столкновениями, понятие квазичастицы имеет смысл только непосредственно вблизи ферми-поверхности, где затухание пренебрежимо мало. В этом состоит главное отличие от одноэлектронного приближения, в котором блоховские волны определены во всей зоне Бриллюэна. Однако для практических приложений это ограничение обычно несущественно. Для кинетических свойств, циклотронного резонанса и большинства других физических эффектов существенны лишь термически возбужденные электроны, энергия которых лежит в интервале kT вблизи ферми-поверхности. Обычно kT имеет величину порядка 10^{-4} — 10^{-2} эв, что много меньше энергии Ферми (~ 10 эв). Доля возбужденных квазичастиц остается всегда очень малой, так что мы можем пренебречь их затуханием²⁾.

¹⁾ Приведенное здесь рассуждение страдает некоторой неясностью, потому что не очень понятно, как определить исходное состояние «идеальной системы». Проще было бы сказать, что качественно спектр элементарных возбуждений электронов в металле соответствует спектру идеального ферми-газа, помещенного в периодическое поле

Можно определить некоторую ферми-поверхность, состоящую из нескольких участков, которые аналогичны «незаполненным зонам», причем спектр возбуждений состоит из квазичастиц «вне» этих поверхностей и «квазидырок» внутри них. Очень важно (и это доказывается в строгой теории), что суммарный объем, ограниченный всеми ферми-поверхностями в пределах одной зоны Бриллюэна, соответствует распределению частиц идеального ферми-газа по «зонам» в периодическом потенциале. Это значит, что суммарный объем внутри ферми-поверхностей может равняться либо целому, либо полужелому кратному от объема зоны Бриллюэна — *Прим ред*

²⁾ Это не совсем точно. Если энергия возбуждения имеет величину порядка дебаевской энергии (обычно $\sim 10^{-2}$ эв), то благодаря возможности испускания квантов колебаний решетки — фононов — затухание является большим и в том смысле, что обусловленная этим неопределенность энергии возбуждения сравнима с самой энергией возбуждения. В большинстве задач, однако, это несущественно, ибо основную роль играет не энергия, а импульс квазичастиц, который имеет порядок p_F и поэтому малую относительную неопределенность ($\sim 1\%$). — *Прим ред*.

В отсутствие взаимодействия блоховская волна обладает энергией $\epsilon_{n\mathbf{p}}^0$, которая зависит от \mathbf{p} довольно сложным образом. Всюду на ферми-поверхности можно определить скорость $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0$, которая равна градиенту $\epsilon_{n\mathbf{p}}^0$. Вследствие наличия периодического потенциала $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0$ будет отличаться от скорости $\hbar\mathbf{p}/m$ свободной частицы. Теперь пусть взаимодействие включено. Квазичастицы имеют энергию $\epsilon_{n\mathbf{p}}$, равную первой производной энергетического функционала. Энергия $\epsilon_{n\mathbf{p}}$ постоянна на ферми-поверхности и равна химическому потенциалу μ . В каждой точке S_F можно снова определить скорость $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, которая не равна $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0$. Отличие $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ от $\hbar\mathbf{p}/m$ обусловлено двумя различными причинами:

- а) влиянием периодической решетки на каждый электрон;
- б) «многочастичными» эффектами, возникающими вследствие кулоновского взаимодействия.

В случае почти изотропной ферми-поверхности, какой обладают щелочные металлы, мы можем написать

$$v_{pF} = \frac{\hbar p_F}{m^*}, \quad (1.69a)$$

где эффективная масса m^* учитывает влияние как периодического поля, так и взаимодействия электронов. Обычно эти два эффекта так тесно связаны, что разделить их невозможно. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 3, § 8 и в гл. 5, § 6.

Как и в случае ферми-жидкости, рассмотрение второй вариационной производной энергии по $n_{\mathbf{p}}$ позволяет определить энергию взаимодействия квазичастиц $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. Однако, поскольку ферми-поверхность в металлах, вообще говоря, не изотропна, $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ зависит от направления как \mathbf{p} , так и \mathbf{p}' . Поэтому рассмотрение свойств квазичастиц очень сильно усложняется. Обратимся, например, к приведенному выше вычислению парамагнитной восприимчивости, которое в принципе справедливо и для металлов. При наличии анизотропии смещение ферми-поверхности $dp_F/d\mathcal{H}$ изменяется вдоль поверхности S_F и удовлетворяет интегральному уравнению, которое нужно решить, чтобы получить χ_p . При этом полностью теряется простота результата (1.67) и может возникнуть так много параметров, что сравнение теории с экспериментом становится не очень плодотворным. Мы приходим к выводу, что такое сравнение равновесных свойств, по-видимому, полезно только в том случае, когда ферми-поверхность изотропна.

Другая сложность, возникающая при рассмотрении электронов в металлах, связана с большим радиусом кулоновского взаимодействия. Мы обсудим этот вопрос в гл. 3; здесь же заметим просто, что вышеприведенное рассмотрение формально справедливо

ливо, если считать, что $f_{pp'}$ соответствует экранированному взаимодействию квазичастиц. Итак, если надлежащим образом принять во внимание экранировку, можно определить электронную сжимаемость, которая для металлов с изотропной ферми-поверхностью связана с плотностью состояний и F_0^s соотношениями (1.48) и (1.58):

$$N_{pp'} = \frac{\nu(0)}{1 + F_0^s}. \quad (1.696)$$

Отметим снова, что простая формула типа (1.696) применима только в том случае, когда электронная ферми-поверхность практически изотропна.

Из-за трудностей с анизотропией одно из наиболее интересных применений теории Ландау к физике металлов заключается в выявлении тех случаев, когда взаимодействие частиц несущественно. Явления, в которых взаимодействие $f_{pp'}$ не играет роли, могут быть использованы для надежного определения вида ферми-поверхности и других свойств. Мы вернемся к этому вопросу, когда будем рассматривать электронные явления переноса в гл. 3.

Упомянем, наконец, дополнительную сложность, возникающую при рассмотрении электронов в металлах. Электроны взаимодействуют не только друг с другом, но и с колебаниями решетки, или *фононами* кристалла. Поэтому нужно подробно изучить явления, в которых проявляется это дополнительное электрон-фононное взаимодействие. Если говорить о рассматриваемых здесь равновесных свойствах, то, как недавно было показано [6, 7], электрон-фононное взаимодействие не влияет на спиновую восприимчивость и сжимаемость, но влияет на теплоемкость. Таким образом, соотношения (1.67) и (1.696) можно непосредственно применять к случаю изотропной электронной системы, тогда как значение m^* , полученное из экспериментальных данных по теплоемкости, будет отличаться от величины, найденной с помощью (1.69а), т. е. при учете только электрон-электронных взаимодействий. Теория и эксперимент, в котором изучались равновесные свойства некоторых простых изотропных металлов, сравниваются в гл. 5, § 6.

§ 4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИЧАСТИЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали устойчивые однородные распределения, для которых функция n_p не зависела от координат и времени. Перейдем теперь к более общей задаче, когда на си-

стему действует неоднородное слабое возмущение, зависящее от времени. Такое возмущение может быть обусловлено либо внешним полем, либо внутренними флуктуациями в системе. Возмущение предполагается достаточно слабым, так что реакция системы линейна. Формальная теория линейной реакции развита в гл. 2.

Возьмем функцию распределения $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$, которая явно зависит от координат \mathbf{r} и времени t . Такое описание, очевидно, не согласуется с принципом неопределенности: нельзя определить одновременно импульс \mathbf{p} квазичастицы и ее координаты \mathbf{r} или ее энергию $\epsilon_{\mathbf{p}}$ и время t . Это главная трудность, которая, к счастью, снимается, если мы ограничиваемся рассмотрением *макроскопических* явлений, когда характерные волновые векторы и частоты много меньше соответствующих атомных параметров.

Рассмотрим фурье-преобразование функции $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ по пространственным и временной переменным. В предположении линейности реакции каждую фурье-компоненту можно рассматривать независимо. Итак, достаточно рассмотреть возмущение в виде плоской волны с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω . Запишем функцию распределения в виде

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.70)$$

В силу принципа неопределенности импульс \mathbf{p} и энергия $\epsilon_{\mathbf{p}}$ обладают неопределенностью, равной соответственно $\hbar\mathbf{q}$ и $\hbar\omega$. Это несущественно, если функция распределения $n_{\mathbf{p}}$ мало меняется при изменении \mathbf{p} и $\epsilon_{\mathbf{p}}$ на величину порядка $\hbar\mathbf{q}$ и $\hbar\omega$ соответственно. При температуре T характерная ширина размытия ферми-поверхности имеет величину порядка kT для энергии и kT/v_F для импульса. Тогда можно ожидать, что функция распределения $\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет смысл, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \hbar q v_F &\ll kT, \\ \hbar\omega &\ll kT. \end{aligned} \quad (1.71)$$

При этих условиях мы находимся в *классическом* режиме, по крайней мере, если говорить о принципе неопределенности.

Условия (1.71) являются слишком сильными. Фактически теория Ландау применима в гораздо более широком интервале

$$\begin{aligned} \hbar q v_F &\ll \mu, \\ \hbar\omega &\ll \mu, \end{aligned} \quad (1.72)$$

но при другом толковании функции распределения $\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega)$. До сих пор мы определяли $\delta n_{\mathbf{p}}$ как *вероятность* найти квазичастицу с волновым вектором \mathbf{p} . Чтобы теория Ландау была применима в интервале (1.72), мы должны рассматривать $\delta n_{\mathbf{p}}$ как вероят-

ность найти пару, состоящую из квазичастицы с импульсом $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}/2$ и квазидырки с импульсом $\mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}/2$. (Очевидно, это не противоречит принципу неопределенности, так как импульс не равен точно \mathbf{p} .) Такое описание эквивалентно полуклассическому приближению Вигнера в статистической механике. Мы обсудим эту точку зрения подробнее в гл. 5. Здесь же мы просто предположим, что принцип неопределенности можно не учитывать, когда выполняются условия (1.72).

В соответствии с (1.72) теорию Ландау можно применять к *макроскопическим* возмущениям, масштабы которых велики по сравнению с атомными. Иначе говоря, длина волны возмущения должна быть много больше межатомного расстояния, а частота много меньше характерных атомных частот. Другими словами, любой результат в теории Ландау является главным членом разложения реакции системы по q/k_F и ω/μ . Это ограничение следует всегда иметь в виду.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим состояние, характеризуемое функцией распределения

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.73)$$

Предполагается, что отклонение $\delta n_{\mathbf{p}}$ от основного состояния мало. Далее предположим, что $\delta n_{\mathbf{p}}$ содержит только длинноволновые флуктуации и ограничимся окрестностью ферми-поверхности, где квазичастицы хорошо определены. Заметим, что $n_{\mathbf{p}}$ представляет собой распределение для *единичного* объема около точки \mathbf{r} ; соответственно импульс квантован в объеме $\Omega = 1$.

Как и раньше, полная энергия есть функционал $E[n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)]$ функции распределения. Если отклонение $\delta n_{\mathbf{p}}$ мало, мы можем написать тейлоровское разложение этого функционала:

$$E = E_0 + \sum_{\mathbf{p}} \int d^3\mathbf{r} \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \int \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}') \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}') + \dots \quad (1.74)$$

Предположим, что система инвариантна относительно пространственной трансляции. В этом случае энергия $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ не зависит от \mathbf{r} и равна $\varepsilon_{\mathbf{p}}$. Кроме того, $f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}')$ зависит только от разности $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Теперь надо принять во внимание характер взаимодействия. В этой главе нас будут интересовать только *короткодействующие* силы, которые существенны лишь на расстояниях порядка

атомных размеров, как это имеет место в ${}^3\text{He}$. Если возмущение медленно изменяется в пространстве и времени (т. е. имеет макроскопический масштаб), то величину $\delta n_{\mathbf{p}}$ можно считать постоянной на расстояниях порядка радиуса взаимодействия. В выражении (1.74) отклонение $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')$ можно заменить на $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r})$. Тогда энергию можно записать в виде

$$E = E_0 + \int d^3\mathbf{r} \delta E(\mathbf{r}),$$

$$\delta E(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}), \quad (1.75)$$

где энергия взаимодействия определяется равенством

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}'). \quad (1.76)$$

Таким образом, энергия является *локальной* функцией распределения $\delta n_{\mathbf{p}}$: во всех точках связь между ними оказывается одной и той же, как и для однородной системы. Функция $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, определяемая соотношением (1.76), совпадает с использованной нами ранее функцией, вычисленной для $\Omega=1$. (Подчеркнем снова, что этот вывод справедлив лишь для *макроскопических* возмущений.) Физически ясно, что *локальность* энергии является прямым следствием *малого радиуса* взаимодействия.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИЧАСТИЦ

В соответствии с (1.75) локальная энергия квазичастицы с импульсом \mathbf{p} равна

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}). \quad (1.77)$$

Заметим, что эта энергия зависит от \mathbf{p} и \mathbf{r} . Градиент $\nabla_{\mathbf{p}} \tilde{\varepsilon}$ определяет, как обычно, скорость квазичастицы. С другой стороны, величина $-\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\varepsilon}$ эквивалентна своего рода диффузионной силе, которая «толкает» квазичастицы в область минимальной энергии.

Чтобы найти кинетические свойства, Ландау рассматривал квазичастицы как независимые и описываемые классическим гамильтонианом $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. Задача тогда сводится к созданию соответствующей кинетической теории для газа квазичастиц. Физический смысл этого предположения мы обсудим несколько позже, а сначала получим кинетическое уравнение.

Воспользуемся известной процедурой, применяемой в кинетической теории. Рассмотрим малый элемент объема фазового

пространства $d^3p d^3r$ и вычислим поток квазичастиц через каждую сторону этого элемента. Установив баланс входящих и выходящих потоков, получим уравнение

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} = 0. \quad (1.78)$$

Этот известный результат описывает движение квазичастиц в фазовом пространстве в отсутствие столкновений и внешних сил.

Уравнение (1.78) относится к полной функции распределения для всех квазичастиц. Но мы знаем, что функция $n_{\mathbf{p}}$ определена только вблизи ферми-поверхности. Далее предложенное Ландау представление о независимых квазичастицах не может быть применимым при всех значениях импульса \mathbf{p} ; физически ясно, что независимыми можно считать только *возбужденные* квазичастицы в непосредственной близости от ферми-поверхности. Поэтому мы должны выделить из (1.78) кинетическое уравнение, описывающее движение только возбужденных квазичастиц. Это легко сделать, записывая $n_{\mathbf{p}}$ в виде (1.73). Сохраняя члены только первого порядка по $\delta n_{\mathbf{p}}$ и используя (1.77), получаем

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.79)$$

Благодаря наличию множителя $\nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 = -\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)$ это линейзованное кинетическое уравнение описывает только квазичастицы с импульсами \mathbf{p} , лежащие вблизи ферми-поверхности. Рассмотрим несколько более подробно физический смысл уравнения (1.79). Первые два члена (которые входят в обычное кинетическое уравнение для невзаимодействующей системы) описывают движение совершенно независимых возбужденных квазичастиц. Последний член, обусловленный наличием их взаимодействия, можно интерпретировать как поток частиц, находящихся в основном состоянии и увлекаемых неоднородностями распределения возбуждений. Итак, мы приходим к следующей картине. Элементарные возбуждения, число которых невелико, совершенно независимы. В однородных системах они не взаимодействуют с невозбужденными частицами. Однако если распределение $\delta n_{\mathbf{p}}$ неоднородно, возбужденные квазичастицы создают силовое поле, которое влияет на распределение системы в основном состоянии и разрушает его; это эффект первого порядка по $\delta n_{\mathbf{p}}$. Он играет весьма существенную роль.

Пренебрежение взаимодействием двух *возбужденных* квазичастиц полностью оправдано при низких температурах, когда их плотность мала; это несправедливо лишь для низкочастотных

явлений (см. § 9). Вместе с тем предположение о том, что взаимодействие между возбужденными и невозбужденными частицами можно заменить некоторой *средней* макроскопической силой, является довольно смелым. Казалось бы, микроскопические корреляции должны играть заметную роль, но согласно теории Ландау, они не имеют никакого значения. Такое предположение действительно справедливо и может быть доказано в рамках теории возмущений. Можно полагать, что это положение вещей объясняется принципом Паули, который делает весьма устойчивым распределение частиц в основном состоянии.

Линеаризованное кинетическое уравнение можно записать в очень простой форме, используя отклонение от локального равновесия $\delta\bar{n}_p$. Сравнивая определение (1.30) с уравнением (1.79), мы можем написать последнее в виде

$$\frac{\partial \delta n_p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta \bar{n}_p(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.80)$$

Этот компактный результат можно получить непосредственно из (1.78), если записать n_p в виде (1.28), т. е.

$$n_p(\mathbf{r}, t) = n^0(\tilde{\epsilon}_p) + \delta \bar{n}_p(\mathbf{r}, t). \quad (1.81)$$

При подстановке функции $n^0(\tilde{\epsilon}_p)$ в члены с градиентами мы получаем

$$\left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\epsilon}_p \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \tilde{\epsilon}_p - \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \nabla_{\mathbf{p}} \tilde{\epsilon}_p \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\epsilon}_p.$$

Это выражение, очевидно, равно нулю. Остается градиент только от $\delta \bar{n}_p$. Сохраняя лишь члены первого порядка, мы приходим к (1.80).

Как видно из (1.80), кинетическое уравнение содержит производную по времени от δn_p и производные по координатам от $\delta \bar{n}_p$. Это различие можно понять, если заметить, что градиентные члены описывают *диффузию* квазичастиц, которая, несомненно, определяется локальной энергией. В этом смысле отклонение от равновесия измеряется величиной $\delta \bar{n}_p$, а не δn_p .

Записывая кинетическое уравнение в форме (1.80), мы упускаем два важных эффекта — влияние внешних сил и столкновений возбужденных квазичастиц. Рассмотрим сначала столкновения, которые представляют собой «диссипативное», необратимое взаимодействие возбужденных квазичастиц (наоборот, взаимодействие f_{pp} — реактивное обратимое взаимодействие). По своей природе столкновения квазичастиц подобны столкновениям молекул в обычной кинетической теории газов. Их роль можно качественно охарактеризовать некоторой частотой столкновений ν .

В интересующей нас области низких температур столкновения происходят сравнительно редко (в силу принципа Паули) и частота ν мала. Поэтому столкновения играют роль лишь в низкочастотных явлениях, когда $\omega \leq \nu$ (вязкость, теплопроводность и т. д.), ограничивая реакцию на внешнюю силу. Мы обсудим эти явления более подробно в § 8, где будет показано, что столкновения можно учесть, добавляя в правую часть кинетического уравнения интеграл столкновений $I(\delta n_p)$, который характеризует скорость изменения δn_p вследствие столкновений. Если частота ω много больше частоты столкновений ν , можно ожидать, что столкновения не играют роли. Мы можем тогда опустить интеграл столкновений.

Наконец, пусть на квазичастицу p действует сила \mathfrak{F}_p . Тогда распределение смещается в импульсном пространстве. Это приведет к появлению дополнительного члена в левой части уравнения (1.80), равного

$$\mathfrak{F}_p \cdot \nabla_p n_p(\mathbf{r}, t). \quad (1.82)$$

Обычно отклонение δn_p пропорционально приложенной силе \mathfrak{F} . Тогда в выражении (1.82) можно заменить n_p равновесным распределением n_p^0 , поскольку нас интересуют добавки к n_p первого порядка.

В большинстве случаев нам известна из общих соображений сила, действующая на голую частицу. Чтобы найти силу \mathfrak{F}_p , действующую на квазичастицу, нам, вообще говоря, необходимо иметь более подробные сведения о структуре собственнoэнергетического облака. Эта задача выходит за рамки теории Ландау. Практически при рассмотрении нейтральной системы прежде всего нужно знать реакцию на скалярное поле, создающее силу, пропорциональную плотности системы. Так как число квазичастиц равно числу голых частиц, то сила \mathfrak{F}_p , действующая на квазичастицу, равна силе, действующей на голую частицу. В этом случае мы можем получить точное кинетическое уравнение (мы увидим в гл. 3, что подобное же заключение справедливо и в том случае, когда к заряженной системе приложено векторное поле).

Собирая все новые члены, запишем кинетическое уравнение (1.80) в окончательной форме:

$$\frac{\partial \delta n_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_r \delta \bar{n}_p + \mathfrak{F}_p \cdot \mathbf{v}_p \frac{\partial n_p^0}{\partial \epsilon_p} = I(\delta n_p). \quad (1.83)$$

Учитывая связь (1.30) между δn_p и $\delta \bar{n}_p$, мы приходим к выводу, что кинетическое уравнение является интегральным уравнением для δn_p даже в отсутствие столкновений. Оно значительно слож-

нее соответствующего уравнения для не взаимодействующей системы, где $\delta n_p = \delta \bar{n}_p$.

Кинетическое уравнение (1.83) играет очень важную роль. С его помощью мы получим все кинетические свойства фермижидкости, а также спектр флуктуаций системы (макроскопического масштаба). Последующие параграфы этой главы посвящены описанию следствий уравнения (1.83).

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЧАСТИЦ

ВЫВОД С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ — плотность потока частиц в точке \mathbf{r} в момент t . Соблазнительно было бы считать, что данная квазичастица вносит в поток вклад \mathbf{v}_p , а полный поток частиц равен

$$\mathbf{J} = \sum_p \mathbf{v}_p \delta n_p. \quad (?) \quad (1.84)$$

Этот результат ошибочен, и мы сейчас это покажем.

Чтобы вычислить \mathbf{J} , заметим, что эта величина связана с плотностью частиц ρ уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (1.85)$$

которое обеспечивает сохранение числа частиц. Флуктуации плотности можно записать в виде

$$\delta \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_p \delta n_p(\mathbf{r}, t) \quad (1.86)$$

(так как числа частиц и квазичастиц равны). Мы хотим выразить $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ через распределение $\delta n_p(\mathbf{r}, t)$ так, чтобы уравнение (1.85) удовлетворялось при любых изменениях δn_p в пространстве.

Для этой цели напишем кинетическое уравнение в отсутствие внешних сил

$$\frac{\partial \delta n_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta \bar{n}_p = I(\delta n_p). \quad (1.87)$$

Тросуммируем теперь (1.87) по всем p . Вклад интеграла столкновений равен нулю, так как общее число частиц сохраняется при столкновениях. Тогда получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \sum_p \delta \bar{n}_p \mathbf{v}_p = 0. \quad (1.88)$$

Сравнивая уравнения (1.85) и (1.88), приходим к требуемому выражению для плотности тока

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}. \quad (1.89)$$

Таким образом, наше наивное предположение (1.84) неправильно: $\delta n_{\mathbf{p}}$ заменяется отклонением от *локального* равновесия $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}}$.

Мы часто будем использовать уравнение (1.89) в этом виде. Однако иногда желательно выразить \mathbf{J} через обычное распределение $\delta n_{\mathbf{p}}$. Подставляя в (1.89) выражение (1.30) для $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}}$, можно записать \mathbf{J} в виде

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \mathbf{j}_{\mathbf{p}}, \quad (1.90)$$

где

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}'} \hat{f}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}'}, \quad (1.91)$$

Итак, $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$ играет роль *потока*, переносимого квазичастицей \mathbf{p} .

Согласно (1.91), *поток* $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$ отличается от *скорости* $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Эта очень важная особенность характерна для взаимодействующей системы. Когда к системе добавляется квазичастица \mathbf{p} , появляется одна дополнительная частица с групповой скоростью $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$; соответствующий вклад в поток, очевидно, равен $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Но это еще не все. Из-за взаимодействия частиц движущаяся квазичастица увлекает за собой часть своего окружения, создавая дополнительный поток. Поэтому $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$ отличается от $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$; разность $(\mathbf{j}_{\mathbf{p}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ можно назвать *потоком увлечения*.

Эта картина верна только для квазичастиц, которые можно представить в виде плоских волн. Предположим, что вместо этого мы рассматриваем локализованный волновой пакет, движущийся с групповой скоростью $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. В той мере, в какой можно считать, что волновой пакет в целом содержит *одну* дополнительную частицу, полный поток равен, очевидно, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, а не $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$. Таким образом, поток значительно изменяется из-за *локализации* квазичастицы. Различие между $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$ удобно теперь объяснить несколько иначе: можно считать, что локализованной квазичастице соответствует поток $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$, который изменен обратным потоком других частиц, окружающих движущееся возмущение. Разность $(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \mathbf{j}_{\mathbf{p}})$ является тогда *обратным потоком*, возникающим вследствие взаимодействия движущегося волнового пакета с окружающей жидкостью. Это объяснение дополняет проведенное ранее рассмотрение возбуждения типа плоской волны. Заметим, что обратный поток противоположен «потоку увлечения».

Подобный анализ можно использовать для вычисления потоков импульса и энергии в жидкости. Умножая кинетическое

уравнение соответственно на \mathbf{p} и ϵ_p и замечая, что при столкновениях сохраняются полный импульс и энергия, находим следующие выражения для тензора потока импульса $\Pi_{\alpha\beta}$ и потока энергии \mathbf{Q}

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta} &= \sum_p \delta \bar{n}_p p_\alpha v_{p\beta}, \\ \mathbf{Q} &= \sum_p \delta \bar{n}_p \epsilon_p \mathbf{v}_p.\end{aligned}\quad (1.92)$$

Соотношения (1.92), очевидно, аналогичны выражению (1.89). Опять можно вычислить потоки импульса и энергии, обусловленные данной квазичастицей p . Они отличаются от простых значений $p_\alpha v_{p\beta}$ и $\epsilon_p v_p$; разность представляет собой поток импульса и энергии, уносимый потоком увлечения. Подробное вычисление мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

ПОТОК КВАЗИЧАСТИЦ В ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНОЙ СИСТЕМЕ

Оператор полного потока \mathbf{J} дается выражением

$$\mathbf{J} = \sum_l \frac{\mathbf{p}_l}{m}, \quad (1.93)$$

где \mathbf{p}_l — импульс l -й частицы и m — ее «голая» масса. Если система инвариантна относительно *любой* трансляции, полный импульс \mathbf{P} системы является хорошим квантовым числом. Тогда мы имеем

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \quad (1.94)$$

[Выражение (1.94) несправедливо для реальных металлов, так как в системах, не обладающих полной трансляционной инвариантностью, к которым относятся металлы, решетка тоже может вносить в импульс вклад, равный любому вектору обратной решетки $\hbar\mathbf{K}$] Рассмотрим состояние, содержащее одну возбужденную квазичастицу с импульсом \mathbf{p} , которая создает поток \mathbf{j}_p . Применяя (1.94) к этому частному случаю, находим

$$\mathbf{j}_p = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (1.95)$$

Таким образом, для трансляционно-инвариантной системы поток \mathbf{j}_p имеет такую же величину и направление, как и в отсутствие взаимодействия; соотношение (1.95) опять не выполняется для электронов в металле.

Для трансляционно-инвариантной системы мы можем получить выражение (1.91) для потока \mathbf{j}_p с помощью метода, который ясно демонстрирует физическое происхождение потока увлечения. Запишем сначала полный поток \mathbf{J} как среднее от оператора потока:

$$\mathbf{J} = \langle \varphi \left| \sum_l \frac{\mathbf{p}_l}{m} \right| \varphi \rangle.$$

Теперь рассмотрим, что произойдет, если вся система вместе с ферми-поверхностью и возбужденными квазичастицами сместится на постоянный вектор \mathbf{q} . Такое перемещение эквивалентно переходу к системе координат, движущейся с постоянной скоростью $(-\mathbf{q}/m)$. В этой движущейся системе энергия взаимодействия остается неизменной, тогда как оператор кинетической энергии увеличивается на величину

$$\sum_l \left\{ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_l}{m} + \frac{q^2}{2m} \right\}.$$

Предположим далее, что смещение \mathbf{q} мало, и воспользуемся теорией возмущений, чтобы получить поправку первого порядка к энергии E

$$\delta E = \langle \varphi \left| \sum_l \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_l}{m} \right| \varphi \rangle + O(q^2) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J} + O(q^2).$$

Таким образом, \mathbf{J} является первой производной энергии по \mathbf{q} , так что произвольная компонента J_α равна

$$J_\alpha = \frac{dE}{dq_\alpha}. \quad (1.96a)$$

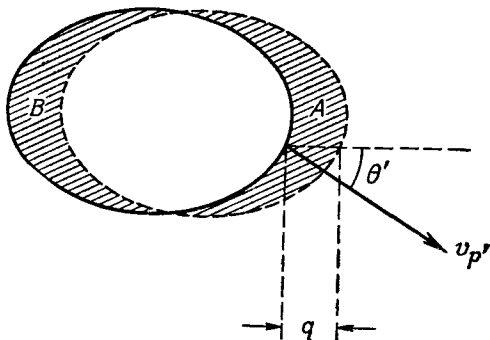
(Мы используем значок полной производной, чтобы подчеркнуть, что производная соответствует смещению *всей* системы.) Уравнение (1.96a) — прямое следствие галилеевской инвариантности относительно трансляций.

Из соображений симметрии следует, что в основном состоянии $|\varphi_0\rangle$ поток равен нулю; поэтому dE_0/dq_α обращается в нуль. Рассмотрим возбужденное состояние $|\varphi_p\rangle$, содержащее одну возбужденную квазичастицу p . Как следует из (1.96a), соответствующий поток можно записать в виде

$$j_{p\alpha} = \frac{d\varepsilon_p}{dq_\alpha}. \quad (1.96б)$$

Другими словами, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_p$ представляет собой изменение ε_p при смещении квазичастицы p и ферми-поверхности на величину \mathbf{q} .

Рассмотрим смещение квазичастицы p , считая, что ферми-поверхность остается на месте. Энергия ϵ_p изменяется на величину $\mathbf{q} \cdot \nabla \epsilon_p = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p$. Соответствующий вклад в поток точно равен \mathbf{v}_p , как и следовало ожидать в отсутствие взаимодействия. Сместим теперь ферми-поверхность, что приведет к изменению



Фиг. 3 К вычислению потока квазичастиц.

При смещении ферми-поверхности на величину q в заштрихованной области A появляются квазичастицы, в заштрихованной области B они исчезают

$\delta n_{p'}$ функции распределения. Вследствие взаимодействия квазичастицы p с остальными квазичастицами появится дополнительное изменение энергии. Мы можем написать

$$\delta E = \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_p = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p + \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}. \quad (1.97)$$

Отсюда непосредственно видно, что поток увлечения ($\mathbf{j}_p - \mathbf{v}_p$) является следствием взаимодействия квазичастицы p со средой.

Приведенные соображения иллюстрируются схемой на фиг. 3. Исходная ферми-поверхность (сплошная линия) смещается на величину q . Смещение приводит к появлению квазичастиц в области A и квазидырок в области B . Соответствующее отклонение $\delta n_{p'}$ можно записать в виде

$$\delta n_{p'} = -\mathbf{q} \cdot \nabla_{p'} n_p^0 = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{p'}} \right). \quad (1.98)$$

Подставляя (1.98) в (1.97), мы снова получаем выражение (1.91) для $\mathbf{j}_p - \mathbf{v}_p$. Сравнивая (1.91) и (1.95), мы видим, что для трансляционно-инвариантной системы имеет место равенство

$$\mathbf{j}_p = \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v}_p - \sum_{p'} f_{pp'} \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{p'}} \right) \mathbf{v}_{p'}. \quad (1.99)$$

Соотношение (1.99) представляет собой условие, *налагаемое* на $f_{pp'}$ требованием галилеевской инвариантности. В изотропной системе, например ${}^3\text{He}$, как \mathbf{j}_p , так и \mathbf{v}_p параллельны вектору \mathbf{p} ; соотношение (1.99) содержит только симметричную по спину компоненту $f_{pp'}$, отвечающую $l=1$. Используя теорему сложения сферических функций и определения (1.11) и (1.23), получаем из (1.99) соотношение

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{F_1^s}{3}. \quad (1.100)$$

Так как m^* можно получить из данных по теплоемкости, соотношение (1.100) дает дополнительную информацию о взаимодействии $f_{pp'}$. Заметим, что величина F_1^s должна быть больше -3 . В противном случае система будет неустойчивой, так как при отрицательной эффективной массе энергетически выгодно возбуждать квазичастицы.

§ 6. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КВАЗИЧАСТИЧНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассмотрим теперь кинетическое уравнение Ландау в отсутствие внешнего поля и столкновений. Мы попытаемся найти самосогласованные зависящие от координат решения полученного таким образом однородного уравнения. Эти решения соответствуют собственным (резонансным) частотам ферми-жидкости. Возможны два типа возбуждений: локализованные квазичастицы и коллективные моды. Соответствующие решения заметно отличаются по своей структуре. В этом параграфе мы обратимся к локализованным квазичастицам, а в следующем обсудим коллективные моды.

КАЧЕСТВЕННАЯ СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Предположим, что к системе, находящейся в основном состоянии, добавлена квазичастица с импульсом \mathbf{p}_0 . Реакция системы зависит от того, будет ли квазичастица «размазана» по системе или локализована. В первом случае состояние системы остается однородным: энергия взаимодействия добавленной частицы с системой однородна. Отсутствуют силы, стремящиеся возбудить другие квазичастицы. Наоборот, если добавленная квазичастица локализована, то локальная энергия ϵ_p других квазичастиц изменяется в пространстве. Это в свою очередь приводит к возникновению «поляризационных сил», которые стремятся возбудить другие квазичастицы. Чтобы построить *локализованный волновой пакет*, соответствующий квазичастице \mathbf{p}_0 , мы дол-

жны найти равновесное распределение других квазичастиц вокруг нее.

Рассмотрим сначала отклонение функции распределения, которое периодически в пространстве и времени и характеризуется волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω :

$$\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{Компл. сопр.} \quad (1.101)$$

Ниже мы установим связь между \mathbf{q} и ω ; пока же будем рассматривать эти величины как независимые. Предположим, что ω много больше частоты столкновений, т. е. будем изучать движение квазичастиц в промежутке времени, малом по сравнению со временем между столкновениями τ . Поэтому можно не учитывать столкновения.

Свободный поток квазичастиц удовлетворяет кинетическому уравнению (1.80), которое в рассматриваемом случае возмущений типа плоских волн может быть записано в виде

$$-\omega \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) = 0. \quad (1.102)$$

Заменим отклонение $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}}$ его выражением (1.30). Тогда уравнение (1.102) становится интегральным уравнением для $\delta n_{\mathbf{p}}$:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) \delta n_{\mathbf{p}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} \right) \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} = 0. \quad (1.103)$$

Полученное однородное уравнение имеет решение только для определенных собственных значений частоты ω . Эти решения описывают элементарные возмущения с волновым вектором \mathbf{q} . [Уравнение (1.103) применимо как к рассматриваемым здесь «одетым» квазичастицам, так и к коллективным модам, которые мы обсудим в § 7.]

Рассмотрим возмущение типа (1.101), которое связано с одной дополнительной квазичастицей с импульсом \mathbf{p}_0 . Соответствующая функция распределения есть

$$\delta n_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_0}$$

Фактически, как мы видели, такое состояние не является реальным возмущением в системе. Соответствующее возмущение поляризует среду, в результате голая квазичастица «одевается» индуцированным поляризационным облаком из других квазичастиц. Равновесное решение этой задачи соответствует некоторой функции распределения $\delta n_{\mathbf{p}}$, которая определяется уравнением (1.103) и имеет вид

$$\delta n_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_0} + \xi_{\mathbf{p}}. \quad (1.104)$$

Величина $\xi_{\mathbf{p}}$, описывающая поляризационное облако, имеет порядок $1/N$. Тем не менее поляризационный эффект может быть

существенным, поскольку число значений \mathbf{p} имеет величину порядка N . Назовем решение типа (1.104), в котором только одна компонента \mathbf{p}_0 играет главную роль, *индивидуальным возбуждением* в системе.

Применим кинетическое уравнение (1.103) к частному случаю $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0$. Так как $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ имеет порядок $1/N$, с точностью до членов этого порядка получаем

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}_0} - \omega = 0. \quad (1.105)$$

Соотношение (1.105) связывает частоту ω с волновым вектором \mathbf{q} . Мы видим, что плоская волна движется вдоль \mathbf{q} со скоростью $v_{\mathbf{p}_0} \cos \theta$, где θ — угол между \mathbf{q} и \mathbf{p}_0 . Скорость $\mathbf{v}_{\mathbf{p}_0}$ является *групповой скоростью* квазичастицы в соответствии со сделанным ранее замечанием.

Рассмотрим теперь уравнение (1.103) для $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$. Собирая члены порядка $1/N$, получаем следующее уравнение для $\xi_{\mathbf{p}}$:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) \xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \right) \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \xi_{\mathbf{p}'} = + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \right) f_{\mathbf{p}\mathbf{p}_0}. \quad (1.106)$$

При $q \equiv 0$ уравнение (1.106) имеет тривиальное решение $\xi_{\mathbf{p}} = 0$: возбуждение соответствует одной голой квазичастице \mathbf{p}_0 , определение которой было дано в § 1. Соответствующее состояние однородно. Однако если волновой вектор \mathbf{q} имеет конечную величину, взаимодействие с голой частицей \mathbf{p}_0 играет роль *вынуждающей силы* в правой части кинетического уравнения (1.106), и в результате значение $\xi_{\mathbf{p}}$ будет отлично от нуля.

Заметим, что распределение $\xi_{\mathbf{p}}$ имеет тот же волновой вектор \mathbf{q} и частоту $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}_0}$, что и голая квазичастица \mathbf{p}_0 : оно распространяется в системе со скоростью $\mathbf{v}_{\mathbf{p}_0}$, а не $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Другими словами, компонента \mathbf{p}_0 испытывает *свободные* колебания, тогда как движение других компонент *вызвано* голой квазичастицей \mathbf{p}_0 . Эта важная особенность характерна для индивидуального возбуждения.

Было бы очень хорошо, если бы нам удалось решить уравнение (1.106) для $\xi_{\mathbf{p}}$, так как тогда мы могли бы получить подробное описание квазичастицы, одетой поляризационным облаком. К сожалению, непосредственно решить уравнение (1.106) не удастся, за исключением тривиальных случаев, когда в $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ можно разделить переменные. Действительно, хотя формальное решение для $\xi_{\mathbf{p}}$ и можно получить с помощью надлежащим образом определенной амплитуды рассеяния (мы сделаем это ниже), оно не пригодно для получения явного выражения для $\xi_{\mathbf{p}}$.

Вернемся поэтому к «грубым» свойствам одетой квазичастицы \mathbf{p}_0 , именно к полной плотности частиц $\rho_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{q}, \omega)$ и потоку

$\mathbf{J}_{p_0}(\mathbf{q}, \omega)$, который она переносит. Используя (1.104), можно записать:

$$\begin{aligned}\rho_{p_0}(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}}, \\ \mathbf{J}_{p_0}(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{j}_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{j}_{p_0} + \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{j}_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}}.\end{aligned}\quad (1.107)$$

Последние члены в правых частях этих двух выражений соответствуют заряду и потоку, обусловленным поляризационным облаком, переносимым одетой квазичастицей p_0 . Они являются заметными поправками к первым членам, 1 и \mathbf{j}_{p_0} , которые отвечают заряду и потоку, обусловленным *голой* квазичастицей.

Поток \mathbf{J}_{p_0} можно записать также в виде

$$\mathbf{J}_{p_0} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (1.108)$$

Просуммируем исходное кинетическое уравнение (1.102) по \mathbf{p} и сравним результат с уравнением (1.107) и (1.108). Мы сразу же видим, что

$$\omega \rho_{p_0} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{p_0}. \quad (1.109)$$

Соотношение (1.109) выражает закон сохранения числа частиц, который должен выполняться при движении одетой квазичастицы. Так как $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p_0}$, нетрудно видеть, что компонента потока \mathbf{J}_{p_0} , параллельная \mathbf{q} , равна плотности ρ_{p_0} , умноженной на компоненту \mathbf{v}_{p_0} , параллельную \mathbf{q} . Тогда полный поток в направлении \mathbf{q} равен плотности частиц, умноженной на групповую скорость. Этот результат, вообще говоря, очевиден. Заметим, что теория, в которой поток $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$, переносимый квазичастицей, отличается от групповой скорости $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, не содержит внутренних противоречий. Поток $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$ переносится *голой* квазичастицей, однородно распределенной в пространстве. В этом однородном случае законы сохранения не играют роли. Если мы сталкиваемся с неоднородным случаем, т. е. рассматриваем локализованную квазичастицу, то последняя должна быть *одета*. При этом продольная (параллельная \mathbf{q}) компонента потока (которая определяется законом сохранения) равна полной плотности частиц, умноженной на групповую скорость (эти соображения неприменимы к компоненте \mathbf{J}_{p_0} , перпендикулярной \mathbf{q} ; для последней не существует простого выражения).

Предыдущее обсуждение носит несколько академический характер, поскольку физический интерес представляет локализованный волновой пакет, а не плоская волна. Чтобы перейти от одного описания к другому, необходимо выполнить преобразование Фурье. Практически это трудно сделать. Из-за обратного

потока структура волнового пакета становится очень сложной. Единственный простой результат, заключающийся в том, что полный поток равен полной плотности частиц, умноженной на дрейфовую скорость V_{p_0} волнового пакета, достаточно очевиден. Можно считать, что около голой квазичастицы существует обратный поток возбужденных квазичастиц, вследствие чего поток не равен первоначальному значению \mathbf{j}_p , а имеет величину \mathbf{v}_p , характерную для локализованного возбуждения.

По-видимому, наиболее важный вывод, вытекающий из предыдущего обсуждения, заключается в том, что голая локализованная квазичастица p_0 не является собственным состоянием системы. Необходимо окружить ее облаком других квазичастиц, распределение которых зависит от геометрии волнового пакета. С движением облака связан перенос частиц; вследствие этого свойства одетой квазичастицы отличны от свойств голой квазичастицы, которые мы изучали в § 1. Наше обсуждение проливает новый свет на различие между *скоростью* квазичастиц и ее вкладом в *поток*; оно показывает, как это различие связано с сохранением частиц.

Это обсуждение можно распространить и на конфигурацию из нескольких возбужденных одетых квазичастиц. Если их число остается малым, возбуждения одеваются независимо и движутся каждое со своей собственной групповой скоростью. Однако они продолжают взаимодействовать между собой, причем энергия взаимодействия имеет величину того же порядка, что и f_{pp} — энергия взаимодействия голых квазичастиц. При этом картина носит очень сложный характер как из-за взаимодействия квазичастиц с облаками, так и самих облаков между собой. В задаче о большом числе квазичастиц, движущихся с данной частотой ω и волновым вектором \mathbf{q} , понятие одетой квазичастицы теряет смысл, и гораздо проще работать прямо с голыми квазичастицами, поскольку полное описание системы с помощью одетых квазичастиц получить нельзя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ

Получим теперь формальное решение уравнения (1.106) с помощью так называемых «амплитуд рассеяния». Само по себе уравнение (1.106) едва ли заслуживает того, чтобы решать его столь элегантно способом. Однако мы используем понятие амплитуд рассеяния в § 8, поэтому удобнее ввести их здесь.

Начнем с замены переменных в кинетическом уравнении, а именно вместо ξ_p введем x_p :

$$\xi_p = - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} x_p. \quad (1.110)$$

Уравнение (1.106) приобретает форму линейного интегрального уравнения типа Фредгольма:

$$x_p - \sum_{p'} f_{pp'} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{p'}} x_{p'} = -f_{pp_0} \quad (1.111)$$

Чтобы решить его, введем так называемый резольвентный оператор $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$, определяемый соотношением

$$A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) - \sum_{p''} f_{pp''} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p''}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p''} - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{p''}} A_{p''p'}(\mathbf{q}, \omega) = f_{pp'} \quad (1.112)$$

Из определения (1.112), очевидно, следует, что

$$A_{pp'}(0, \omega) = f_{pp'}$$

Поэтому при $q=0$ оператор $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ не зависит от направления \mathbf{q} . Сравнивая (1.111) с (1.112), мы видим, что x_p и ξ_p просто выражаются через A_{pp_0} :

$$x_p = -A_{pp_0}(\mathbf{q}, \omega), \quad (1.113)$$

$$\xi_p = + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} A_{pp_0}(\mathbf{q}, \omega). \quad (1.114)$$

Итак, мы получили формальное решение для поляризации, создаваемой локализованной голый квазичастицей. Заметим, что ξ_p зависит только от $A_{pp_0}(\mathbf{q}, \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p_0})$, поскольку частота ω одетой квазичастицы равна $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p_0}$.

В рамках микроскопической теории можно показать, что $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ представляет собой *амплитуду рассеяния* для процесса, в котором две квазичастицы с импульсами p и p' обмениваются импульсом $\hbar \mathbf{q}$ и энергией $\hbar \omega$. Так как \mathbf{q} и ω очень малы, рассеяние происходит *почти точно вперед*. Другими словами, $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ можно рассматривать как амплитуду рассеяния для процесса, в котором пара квазичастица — квазидырка с импульсами $p + \hbar \mathbf{q}/2$ и $p - \hbar \mathbf{q}/2$ переходит в состояния $p' + \hbar \mathbf{q}/2$ и $p' - \hbar \mathbf{q}/2$. Найденное уравнение (1.112) тесно связано с уравнением Бете—Солпитера, которое описывает множественное рассеяние пар квазичастица—квазидырка [8].

В любом реальном акте рассеяния начальные и конечные состояния сталкивающихся частиц в силу принципа Паули должны лежать в интервале kT у ферми-поверхности. Тогда должно выполняться условие $\hbar \omega \lesssim kT$. Рассмотрим не очень большие значения q , так что

$$kT \ll qv_F \ll \mu. \quad (1.115)$$

Тогда мы можем пренебречь ω по сравнению с $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p''}$ в знаменателе (1.112). Соответствующая амплитуда рассеяния определяется уравнением

$$A_{pp'}(\mathbf{q}, 0) = f_{pp'} = f_{pp'} + \sum_{p''} f_{pp''} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{p''}} f_{p''p'} \quad (1.116)$$

(Заметим, что $f_{pp'}$ не зависит от направления \mathbf{q}) Мы увидим в § 9, что величина q пропорциональна углу рассеяния квазичастиц. Согласно (1.116), $f_{pp'}$ представляет собой амплитуду рассеяния квазичастиц p и p' , если сначала устремить к нулю температуру, а затем угол рассеяния. Если

температура T остается конечной, предел $A_{pp'}(q, 0)$ при $q \rightarrow 0$ неопределен, так как q/ω может принимать любое значение.

Амплитуду рассеяния $f_{pp'}$, которая очень полезна при нахождении интеграла столкновений для квазичастиц, можно найти в явном виде, если система изотропна. В этом случае она зависит только от угла ξ между \mathbf{p} и \mathbf{p}' . По аналогии с (1.20) и (1.23) можно написать

$$f_{pp'} = \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} \sum_l \{F_l^s \pm F_l^a\} P_l(\cos \xi), \quad (1.117)$$

где коэффициенты F_l^s и F_l^a безразмерны. Подставляя разложение (1.117) в (1.116) и применяя еще раз теорему сложения сферических функций, находим

$$F_l^s = \frac{F_l^s}{1 + F_l^s/(2l+1)}, \quad (1.118)$$

$$F_l^a = \frac{F_l^a}{1 + F_l^a/(2l+1)}. \quad (1.119)$$

Таким образом, между $f_{pp'}$ и $\bar{n}_{pp'}$ имеется простая связь¹⁾.

Сравнивая (1.116) с определением (1.30) величины $\delta \bar{n}_{pp'}$, можно далее показать, что

$$\sum_{p'} f_{pp'} \delta \bar{n}_{p'} = \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}. \quad (1.120)$$

¹⁾ Уравнение (1.116) может быть использовано для получения дополнительных сведений о функции $f_{pp'}$. Поскольку функция $f_{pp'}$ есть амплитуда рассеяния на нулевой угол, то вследствие антисимметрии волновой функции двух ферми-частиц она должна обращаться в нуль при $\mathbf{p}=\mathbf{p}'$ и $\sigma=\sigma'$. Так как $P_l(\cos \xi) = 1$ при $\xi=0$, то отсюда следует

$$\sum_l (F_l^s + F_l^a) = 0.$$

Как было указано выше, из экспериментальных данных для функций $f_{pp'}$ можно определить коэффициенты F_0^s , F_1^s и F_0^a . Ввиду этого часто ограничиваются предположением, что $F = F_0 + F_1 \cos \xi$. При этом коэффициент F_1^a может быть определен из написанного выше соотношения и формул (1.118) и (1.119):

$$F_1^a = -\frac{Q}{1 + \frac{Q}{3}},$$

где

$$Q = \frac{F_0^s}{1 + F_0^s} + \frac{F_0^a}{1 + F_0^a} + \frac{F_1^s}{1 + F_1^s/3}.$$

— Прим. ред.

С помощью (1.120) мы можем обратить соотношение (1.30), выразив $\bar{\delta n}_p$ через δn_p ; при этом получаем

$$\delta n_p = \bar{\delta n}_p + \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \sum_{p'} f_{pp'} \delta \bar{n}_{p'}. \quad (1.121)$$

Соотношение (1.121) полезно при получении разложения кинетического уравнения вблизи $\omega=0$.

В заключение вернемся к вопросу о структуре одетой квазичастицы, характеризуемой выражением (1.114). Для волновых векторов q , перпендикулярных p_0 , легко получить явное решение, так как в этом случае $q \cdot v_{p_0} = 0$ и A_{pp_0} сводится к f_{pp_0} . Нетрудно найти полную плотность частиц и поток, связанный с этим решением; подробное вычисление мы предоставляем читателям в качестве упражнения.

§ 7. КОЛЛЕКТИВНЫЕ МОДЫ

Коллективные моды представляют собой второй возможный тип элементарных возбуждений в ферми-жидкости. Физически они описывают когерентное движение всей системы в целом; как мы видели, на любую квазичастицу в среде действует поле окружающих ее частиц. В равновесии в однородных условиях средняя сила, действующая на частицу, равна нулю. Если, однако, в результате какой-либо внутренней флуктуации в системе равновесие нарушается, то средняя сила уже не будет равна нулю. Она стремится восстановить равновесное распределение, играя роль возвращающей силы при коллективных колебаниях системы вблизи равновесного состояния. Другими словами, коллективные моды связаны с *кооперированным* движением в системе, которое определяется взаимодействием между всеми частицами. Можно считать, что система движется в собственном самосогласованном поле; при этом отдельные частицы теряют свою индивидуальность.

В настоящем параграфе предполагается, что ферми-жидкость находится в основном состоянии. Это несколько специальный случай, поскольку тогда мы автоматически рассматриваем *бесстолкновительный* режим. При конечных температурах столкновения приводят к затуханию волн. Мы обсудим роль столкновений в § 9; здесь же заметим просто, что если частота столкновений квазичастиц ν удовлетворяет условию

$$\omega \gg \nu,$$

то имеет место бесстолкновительный режим, для которого справедливы выводы этого параграфа.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Коллективные моды, подобно индивидуальным возбуждениям, рассмотренным выше, являются свободными колебаниями жидкости и характеризуются отличной от нуля флуктуацией $\delta n_p(\mathbf{q}, \omega)$ функции распределения. При малых значениях \mathbf{q} и ω , для которых применима теория Ландау, структура коллективных мод определяется однородным кинетическим уравнением (1.103), которое мы приведем здесь для удобства еще раз:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} = 0. \quad (1.103)$$

Коллективные решения уравнения (1.103) отличаются по характеру от индивидуальных возбуждений, описанных выше. В случае индивидуальных возбуждений одна компонента, скажем p_0 , вызывает движение всех других частиц. Источником возбуждения является одна квазичастица; она окружена поляризационным облаком. В противоположность этому в коллективной моде все частицы играют одинаковую роль; функция распределения представляет собой гладкую функцию, определенную на всей ферми-поверхности. Такие гладкие решения кинетического уравнения (1.103) соответствуют только определенным дискретным собственным значениям, поэтому частота ω_q данной коллективной моды является определенной функцией ее волнового вектора \mathbf{q} . Соответствующие собственные векторы описывают детали структуры коллективной моды. Заметим, что уравнение (1.103) зависит только от отношения q/ω . Таким образом, собственные значения пропорциональны q , так что коллективные моды имеют определенную фазовую скорость, которая, конечно, различна для разных мод. Это свойство характерно для нейтральной ферми-жидкости; мы увидим в гл. 3, что в заряженной ферми-жидкости дело обстоит иначе.

При $T=0$ коллективные моды связаны с колебаниями ферми-поверхности. Вместо того чтобы характеризовать моду функцией распределения δn_p , мы используем величину, имеющую более ясный физический смысл, а именно нормальное смещение u_p ферми-поверхности в точке p : Предположим для простоты, что система изотропна; мы можем тогда записать

$$\delta n_p = \delta(\varepsilon_p - \mu) v_F u_p. \quad (1.122)$$

Для величины u_p кинетическое уравнение (1.103) принимает вид

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) u_p + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \sum_{p'} f_{pp'} \delta(\varepsilon_{p'} - \mu) u_{p'} = 0. \quad (1.123)$$

Введем полярные координаты (θ, φ) с осью q ; пусть $u(\theta, \varphi, \sigma)$ — смещение ферми-поверхности (соответствующей спину σ) в направлении (θ, φ) . Используя приведенное взаимодействие F , определенное соотношением (1.23), мы можем записать (1.123) в виде

$$(\cos \theta - \lambda) u(\theta, \varphi, \sigma) + \left(\frac{\cos \theta}{8\pi} \right) \sum_{\sigma} \int dY' F(\xi, \sigma, \sigma') u(\theta', \varphi', \sigma') = 0, \quad (1.124)$$

где ξ — угол между направлениями (θ, φ) и (θ', φ') . Безразмерная величина

$$\lambda = \frac{\omega}{qv_F} \quad (1.125)$$

есть отношение фазовой скорости волны к скорости на поверхности Ферми. Ясно, что собственные значения уравнения (1.124) соответствуют дискретным значениям λ ; коллективные моды в нормальной жидкости имеют *постоянную скорость*, как и говорилось выше.

Коллективные моды, в которых спины колеблются в фазе, не связаны с модами, в которых спины движутся не в фазе. Тогда смещение $u(\theta, \varphi, \sigma)$ можно представить как

$$u(\theta, \varphi, \pm) = u^s(\theta, \varphi) \pm u^a(\theta, \varphi), \quad (1.126)$$

где u^s и u^a — соответственно симметричная и антисимметричная по спину амплитуды колебаний. Эти амплитуды удовлетворяют независимым уравнениям:

$$(\cos \theta - \lambda) u^s(\theta, \varphi) + \frac{\cos \theta}{4\pi} \int dY' F^s(\xi) u^s(\theta', \varphi') = 0, \quad (1.127)$$

$$(\cos \theta - \lambda) u^a(\theta, \varphi) + \frac{\cos \theta}{4\pi} \int dY' F^a(\xi) u^a(\theta', \varphi') = 0.$$

Формальное решение уравнений (1.127) можно получить, разложив u в ряды по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. При этом мы сразу же видим, что m является хорошим квантовым числом: различные значения m совершенно независимы. Поэтому мы можем классифицировать решения как продольные ($m=0$), поперечные ($m=1$), квадрупольные ($m=2$) и т. д. К сожалению, различные значения l в уравнении (1.127) связаны. Коллективной моде соответствует единственное значение m и набор значений l . Это существенно затрудняет нахождение явного решения уравнения (1.127).

Среди коллективных мод наиболее важной, возможно, является *продольная симметричная мода*. Это единственная мода,

описывающая флуктуации плотности. Она представляет собой высокочастотный ($\omega \gg v$) аналог обычного звука. По этой причине Ландау назвал ее нулевым звуком. Другой важной модой является продольная антисимметричная мода, которая описывает флуктуации спиновой плотности. Подобные спиновые волны используются при описании магнитных явлений.

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ НУЛЕВОГО ЗВУКА

Проиллюстрируем общее рассмотрение простым примером, для которого уравнение (1.127) можно решить точно. Предположим, что взаимодействие $f_{pp'}$ постоянно, т. е. не зависит от p и p' . В этом случае отлична от нуля только одна компонента F , а именно F_0^s , которую мы обозначим просто F_0 . Единственное решение уравнения (1.127) является нулевым звуком. Вид решения легко находится

$$u(\theta, \varphi) = C \frac{\cos \theta}{\lambda - \cos \theta}, \quad (1.128a)$$

где C — некоторая постоянная. Уравнение (1.128a) описывает смещение ферми-поверхности вследствие колебаний. Спектр нулевого звука получаем, подставляя (1.128a) в (1.127) и выполняя интегрирование по углам. Предоставляем читателю показать, что в результате можно прийти к уравнению

$$\frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \quad (1.128b)$$

Зная величину $\lambda = \lambda_0$, являющуюся решением уравнения (1.128b), можно найти скорость нулевого звука. Если $F_0 > 0$ (что соответствует отталкиванию между квазичастицами), имеется только один действительный корень $\lambda > 1$. В этом случае имеется незатухающая нуль-звуковая мода, фазовая скорость которой больше скорости частицы на ферми-поверхности v_F . Если же между квазичастицами существует слабое притяжение, так что

$$-1 < F_0 < 0,$$

то корень уравнения (1.128b) будет комплексным. В этом случае решение описывает затухающие нуль-звуковые колебания. Наконец, если притяжение между квазичастицами велико

$$F_0 < -1,$$

то нуль-звуковая мода оказывается неустойчивой. Последние две возможности обсуждаются ниже.

Уравнение (1.128b) легко решить в предельных случаях сильного и слабого отталкивания между квазичастицами. Если

связь очень велика ($F_0 \gg 1$), то $\lambda \sim \sqrt{F_0/3}$, а движение ферми-поверхности сводится к трансляции вдоль \mathbf{q} . В пределе слабой связи ($F_0 \ll 1$) величина λ стремится к единице и смещение u сводится к малой выпуклости на ферми-поверхности в направлении \mathbf{q} ; коллективная мода захватывает только малое число квазичастиц и распространяется практически с их скоростью.

С помощью этой простой модели можно также найти явное выражение для амплитуды рассеяния $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$, определяемой интегральным уравнением (1.112), так как данное уравнение становится алгебраическим. Будем выражать $A_{pp'}$ в приведенных единицах, положив

$$A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} F(\mathbf{q}, \omega). \quad (1.129)$$

Тогда решение (1.112) можно записать в виде

$$F(\mathbf{q}, \omega) = \frac{F_0}{1 + F_0 \{1 - (\lambda/2) \ln [(\lambda + 1)/(\lambda - 1)]\}}. \quad (1.130)$$

Сравнивая (1.130) с дисперсионным уравнением (1.128), видим, что функция $F(\mathbf{q}, \omega)$ бесконечна, когда величина λ равна скорости нулевого звука λ_0 . Другими словами, амплитуда $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет *полюс* при частоте ω , равной частоте нулевого звука с данным волновым вектором \mathbf{q} .

Это заключение справедливо не только для нашей простой модели. Вообще любая коллективная мода связана с *полюсом в амплитуде рассеяния* $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$. Это непосредственно следует из свойств линейных интегральных уравнений. Запишем δn_p следующим образом:

$$\delta n_p = - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} x_p. \quad (1.131)$$

Кинетическое уравнение (1.103) принимает вид

$$x_p - \sum_{p'} f_{pp'} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{p'}} x_{p'} = 0 \quad (1.132)$$

[ср. с (1.111)]. Ядро уравнения (1.132) совпадает с ядром уравнения (1.112), которое является определением амплитуды рассеяния $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$. Коллективная мода соответствует *собственному значению* однородного уравнения (1.132). Решение *неоднородного* уравнения (1.112) обращается тогда в бесконечность.

Так как амплитуда рассеяния обладает сингулярностью при частотах коллективных мод, ясно, что последние соответствуют *резонансу* в системе. Действительно, можно считать, что полюс у $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ возникает вследствие резонансного обмена квантом коллективной моды между сталкивающимися квазичастицами

ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ

Наше точное решение для амплитуды нулевого звука (1.128a), очевидно, расходится, если $\lambda = \cos \theta$, т. е. когда $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p$. Вообще из кинетического уравнения (1.124) следует, что для любой коллективной моды u_p обращается в бесконечность, если разность $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega)$ равна нулю. Как мы сейчас покажем, эта сингулярность приводит к затуханию коллективных мод.

Рассмотрим квазичастицу p , для которой $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p = \omega$, т. е. скорость в направлении \mathbf{q} равна фазовой скорости ω/q коллективной моды. Фаза, которую «видит» движущаяся квазичастица, не меняется, вследствие чего *передача энергии* между квазичастицей и бегущей волной постоянна. Если квазичастица движется немного быстрее волны, она, как будет показано ниже, замедляется и отдает энергию коллективной моде. В другом случае, когда частица движется медленнее, энергию теряет волна. В равновесных условиях распределение квазичастиц является убывающей функцией их скорости. В итоге энергия передается от коллективной моды к отдельным квазичастицам, что и приводит к *затуханию* коллективной моды.

Этот механизм затухания похож на механизм, впервые предложенный Ландау [9] для объяснения затухания классических плазменных колебаний, и известен под названием *затухания Ландау*. Оно соответствует *когерентному* взаимодействию коллективной моды с теми частицами, которые держатся на гребне бегущей волны (это явление возможно, если фазовая скорость меньше v_F , т. е. $\lambda < 1$). Такое резонансное взаимодействие можно представить как реальный переход, сопровождающийся распадом коллективной моды с возбуждением *одной* пары квазичастица — квазидырка. Вообще, если затухание Ландау возможно, время жизни коллективной моды столь мало, что она не представляет собой определенного возбуждения в системе.

Затухание Ландау отличается от механизма затухания, обусловленного столкновениями квазичастиц. Затухание вследствие столкновений, как мы упоминали раньше, соответствует существенно некогерентному рассеянию коллективных мод; оно имеет место при любом λ , оказываясь малым при низких температурах, когда $\lambda > 1$ и $\omega \gg v$. Если $\lambda < 1$, затухание вследствие столкновений пренебрежимо мало по сравнению с затуханием Ландау.

Вычисление частоты затухающих коллективных мод $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ непросто. Прежде всего необходимо определенным образом условиться, как обходиться с сингулярностями кинетического уравнения. Для этого нужно обратиться к граничным ус-

ловиям, которым удовлетворяет кинетическое уравнение типа (1.123). Как мы увидим в гл. 2, надлежащие граничные условия соответствуют адиабатическому включению флуктуаций, обуславливающих коллективные моды. При этом будет показано, что частоту ω в уравнении (1.123) нужно заменить на $\omega + i\eta$, где η — бесконечно малая положительная величина. Теперь решим уравнение (1.123), предполагая частоту ω действительной, и найдем дисперсионное уравнение для ω . Чтобы определить частоту затухающих коллективных мод, выполним аналитическое продолжение дисперсионного уравнения, полученного для действительных ω , в нижнюю полуплоскость, где лежат его корни.

Чтобы показать, как выполняется эта процедура, заменим ω на $\omega + i\eta$ и положим

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega - i\eta) u_p = y_p. \quad (1.133)$$

Используя y_p , приведем кинетическое уравнение к виду

$$y_p + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \sum_{p'} \frac{f_{pp'} \delta(\epsilon_{p'} - \mu) y_{p'}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega - i\eta} = 0. \quad (1.134)$$

Так как величина η бесконечно мала, для действительных значений ω можно написать

$$\frac{1}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega - i\eta} = P \left(\frac{1}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega} \right) + i\pi \delta(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'} - \omega) \quad (1.135)$$

(где символ P обозначает главное значение). Чтобы найти затухающую моду, подставим (1.135) в (1.134) и выполним интегрирование по p' ; затем окончательный результат продолжим в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω .

В качестве примера вернемся к простой модели, в которой $f_{pp'}$ постоянно. В дисперсионном уравнении (1.1286) заменим λ на $(\lambda + i\eta)$. Для $\lambda > 1$ изменений не произойдет; если же $\lambda < 1$, то логарифмическая функция заменится на

$$\ln \left[\frac{\lambda + i\eta + 1}{\lambda + i\eta - 1} \right]. \quad (1.136)$$

Для действительных λ величина (1.136) равна

$$\ln \left[\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right] - i\pi.$$

Заметим, что теперь мнимая часть в (1.136) играет существенную роль, будучи сравнимой с действительной.

Заменяя λ на $\lambda + i\eta$ в (1.1286), мы определяем ветвь логарифма. Для отрицательных не слишком больших по абсолютной

величине значений F_0 дисперсионное уравнение, как можно показать, обладает одним корнем ($\omega_1 - i\omega_2$), который соответствует затухающей коллективной моде (если F_0 — большая по модулю отрицательная величина, то появляются неустойчивые решения, которые мы рассмотрим позже в этом параграфе). Так как на действительной оси мнимая часть функции (1.136) велика, ω_2 сравнимо с ω_1 . В этом случае затухание существенно, коллективные моды едва ли существуют как таковые, «расплываясь» на фоне одночастичных возбуждений.

Точно так же можно вычислить амплитуду рассеяния $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ для действительных значений частоты ω . Мы найдем, что затухание Ландау приводит к сглаживанию полюсов, связанных с коллективными модами. Этот эффект проще всего увидеть, рассматривая мнимую часть амплитуды $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$. В отсутствие затухания Ландау ($\lambda > 1$) коллективная мода проявляется как отдельный пик. Если затухание Ландау существует ($\lambda < 1$), пик заметно сглаживается и превращается в широкий максимум на квазичастичном спектре. (Это можно легко проверить с помощью простой модели нулевого звука. Соответствующие вычисления рекомендуем провести читателю в качестве упражнения.) В последнем случае не имеет смысла говорить об отдельной коллективной моде, лучше считать этот максимум слабым резонансом.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛЛЕКТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В некоторых случаях кинетическое уравнение (1.123) может иметь два чисто мнимых комплексно сопряженных корня. Один из них обязательно соответствует экспоненциально нарастающим волнам. Система тогда становится *неустойчивой*. При этом состояние, которое мы считаем основным, самопроизвольно переходит в другое состояние, характеризующееся *постоянными флуктуациями величины*, связанной с неустойчивой коллективной модой.

Чтобы описать эти явления, рассмотрим еще раз простую модель нулевого звука, описываемую дисперсионным уравнением (1.1286). Возьмем чисто мнимый корень $\lambda = i\alpha$, где α — действительное число. Вспоминая определение логарифма, мы можем записать уравнение (1.1286) в виде

$$\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{F_0}. \quad (1.137)$$

Легко убедиться, что уравнение (1.137) имеет два действительных решения противоположного знака, если $1/F_0$ лежит в интер-

вале $(-1, 0)$. Таким образом, условие неустойчивости нулевого звука имеет вид

$$F_0 < -1. \quad (1.138)$$

Другими словами, если притягивающее взаимодействие слишком велико, затухающий нулевой звук сменяется неустойчивой модой; в системе возникают постоянные колебания плотности, амплитуда которых ограничивается лишь нелинейными эффектами.

Такие неустойчивости возникают и в общем случае, описываемом уравнением (1.123). Они могут подавить любую коллективную моду. Появится бесконечное число критериев устойчивости типа (1.138), по одному для каждого типа коллективных мод.

Чтобы найти условия устойчивости, заметим, что неустойчивость возникает впервые, когда частота ω обращается в нуль, так как для порогового значения $f_{pp'}$ два комплексно сопряженных корня сливаются в начале координат. Поэтому условия существования порога можно получить, положив $\omega=0$ в общем уравнении (1.123). Мы находим

$$u_p + \sum_p f_{pp'} \delta(\epsilon_{p'} - \mu) u_{p'} = 0. \quad (1.139)$$

Уравнение (1.139) легко решить, если считать, что система изотропна. Представим u в виде суммы симметричной и антисимметричной по спину волн в соответствии с (1.126), а затем разложим $u^s(\theta, \varphi)$ и $u^a(\theta, \varphi)$ в ряды по сферическим функциям. Используя теорему сложения сферических функций, найдем, что уравнение (1.139) имеет решение, если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} F_l^s &= -(2l + 1), \\ F_l^a &= -(2l + 1). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Чтобы система была устойчивой относительно самопроизвольного нарастания любой коллективной моды, должна выполняться вся совокупность условий

$$\begin{aligned} F_l^s &> -(2l + 1), \\ F_l^a &> -(2l + 1). \end{aligned} \quad (1.141)$$

Слишком сильное притяжение всегда приводит к неустойчивости нормального состояния.

Несколько первых условий (1.141) допускают простую физическую интерпретацию. Как нетрудно видеть, обращаясь к соотношениям (1.58) и (1.67), из условий устойчивости для $l=0$

следует, что сжимаемость и спиновая восприимчивость положительны. Именно эти условия необходимы, чтобы помешать нарастанию флуктуаций плотности и спина в системе (например, если бы восприимчивость χ_p была отрицательной, система не оставалась бы парамагнитной, а перешла бы в ферромагнитное состояние). Точно так же условие $F_1^s > -3$ означает, что эффективная масса m^* , определяемая соотношением (1.100), положительна. Другими словами, условия устойчивости (1.141), которые мы только что вывели с помощью динамических соображений, можно получить также путем рассмотрения равновесных свойств.

Статический вывод условий устойчивости можно последовательно провести, если заметить, что условия (1.141) не зависят от волнового вектора q (до тех пор, пока последний остается малым). Следовательно, соответствующая неустойчивость проявится и при $q=0$, т. е. в случае *однородной деформации* в системе. Эта неустойчивость приводит к *самопроизвольной деформации* ферми-поверхности S_F , что возможно только в том случае, если при этом уменьшается полная свободная энергия. Для исключения таких однородных неустойчивостей потребуем, чтобы свободная энергия основного состояния обладала *минимумом* по деформациям ферми-поверхности. Используя это вариационное требование, мы можем вывести условие устойчивости (1.141) [10].

Сместим ферми поверхность, соответствующую спину σ , в направлении (θ, φ) на малую величину $u(\theta, \varphi, \sigma)$ (мы рассматриваем изотропную систему). Соответствующее изменение свободной энергии с точностью до членов второго порядка по u можно записать в виде

$$(F - F_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\sigma} \int d\Upsilon \int_{P_F}^{P_F+u} (\epsilon_p - \mu) p^2 dp + \\ + \frac{1}{2(2\pi\hbar)^6} P_F^4 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d\Upsilon d\Upsilon' u(\theta, \varphi, \sigma) u(\theta', \varphi', \sigma') f(\xi, \sigma, \sigma'). \quad (1.142)$$

где $d\Upsilon = \sin\theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла, а ξ — угол между направлениями (θ, φ) и (θ', φ') . В последнем члене уравнения (1.142) мы выполнили интегрирование по p и p' , пренебрегая членами порядка u^3 и выше.

Член первого порядка в уравнении (1.142) обращается в нуль, если всюду на ферми-поверхности $\epsilon_p = \mu$. Мы знаем, что это условие удовлетворяется всегда — оно запрещает самопроизвольное рождение пар квазичастица — квазидырка. Вернемся к членам второго порядка. Путем простого интегрирования получаем

$$(F - F_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{P_F^3}{2m^*} \sum_{\sigma} \int d\Upsilon u^2(\theta, \varphi, \sigma) + \\ + \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \frac{P_F^4}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d\Upsilon d\Upsilon' u(\theta, \varphi, \sigma) u(\theta', \varphi', \sigma') f(\xi, \sigma, \sigma'). \quad (1.143)$$

Эта форма квадратична по u . Система будет устойчива, если форма остается положительной при любом выборе $u(\theta, \varphi, \sigma)$.

Для диагонализации квадратичной формы (1.143) запишем $u(\theta, \varphi, \sigma)$ в виде (1.126) и разложим u^s и u^a в ряды по нормированным сферическим функциям

$$\begin{aligned} u^s(\theta, \varphi) &= \sum_{lm} u_{lm}^s Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ u^a(\theta, \varphi) &= \sum_{lm} u_{lm}^a Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.144)$$

Используя теорему сложения и приведенное выражение (1.23) для энергии взаимодействия, можно представить (1.143) в виде

$$(F - F_0) = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \frac{P_F^3}{m^*} \sum_{lm} \left\{ |u_{lm}^s|^2 \left(1 + \frac{F_l^s}{2l+1}\right) + |u_{lm}^a|^2 \left(1 + \frac{F_l^a}{2l+1}\right) \right\}. \quad (1.145)$$

Так как u_{lm}^s и u_{lm}^a — независимые переменные, $(F - F_0)$ будет положительно определенной, если выполнены все неравенства (1.141). Таким образом, руководствуясь другими соображениями, мы получили наши прежние условия устойчивости.

ОБЗОР ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ ТИПА КОЛЛЕКТИВНЫХ МОД

Как уже указывалось, при рассмотрении любой коллективной моды возможны три случая.

1. *Отсутствие затухания.* Если имеется достаточно сильное отталкивательное взаимодействие, то фазовая скорость коллективной моды больше ферми-скорости частиц. Затухание Ландау отсутствует, существует лишь небольшое затухание вследствие столкновений, которое несущественно всегда, за исключением случая очень низких частот.

2. *Сильное затухание Ландау.* В случае слабого отталкивания или слабого притяжения мода слабо проявляется на фоне одночастичных возбуждений. Такая коллективная мода подвержена очень сильному затуханию Ландау и не является более независимым четко определенным возбуждением системы.

3. *Неустойчивость.* В случае сильного притяжения мода становится неустойчивой, приводя к приблизительно экспоненциальному нарастанию флуктуаций в системе.

Порог области неустойчивости определяется условиями (1.140). В то же время условия перехода от случая 1 к 2 определить точно нельзя, так как это требует точного решения интегрального уравнения (1.103). Это решение можно найти только для простых моделей, когда переменные в $f_{pp'}$ можно разделить.

Следует подчеркнуть, что настоящее обсуждение относится к *макроскопическим* (т. е. длинноволновым) коллективным модам в соответствии с общими условиями применимости теории Ландау. Очевидно, могут также существовать «микроскопические» коллективные моды с длиной волны порядка атомных размеров. Последние не охватываются теорией Ландау и должны изучаться с помощью соответствующей приближенной теории, например приближения хаотических фаз, обсуждаемого в гл. 5. Здесь мы кратко рассмотрим свойства этих мод.

Микроскопические коллективные моды заметно сложнее рассматриваемых здесь макроскопических мод. Во-первых, частота ω_q коллективной моды не является более линейной функцией q (фазовая скорость изменяется с q). Во-вторых, затухание Ландау становится более существенным при переходе к значениям q и ω , соответствующим макроскопическим модам. Наконец, появляется новый механизм затухания.

Затухание Ландау можно рассматривать как результат распада коллективной моды на индивидуальные квазичастичные возбуждения. При малых q представляет интерес распад только на одну пару квазичастица — квазидырка с импульсами, равными соответственно $p \pm \hbar q/2$. В первом порядке по q соответствующая энергия возбуждения есть просто $q \cdot v_p$, что и объясняет, почему затухание Ландау отсутствует при $\omega > qv_F$. Для конечных q это линейное приближение несправедливо. Энергия возбуждения одной пары растет скорее, чем $q \cdot v_p$. При некотором достаточно большом значении q она становится равной $\hbar\omega$, где ω — частота коллективной моды. При больших q последняя сильно затухает.

Кроме того, при конечных q важную роль начинают играть распады на *несколько* возбужденных пар квазичастица — квазидырка (это обсуждается в гл. 2). Такие многопарные конфигурации могут иметь сколь угодно большую энергию, что приводит к слабому затуханию даже длинноволновых коллективных мод. Многопарное затухание увеличивается с ростом q . Граница области существования коллективной моды определяется либо затуханием Ландау, либо многопарным затуханием в зависимости от конкретной рассматриваемой ситуации.

Микроскопические коллективные моды могут также приводить к неустойчивости при некотором конечном значении q . Примером такой неустойчивости является гигантская флуктуация спиновой плотности, рассмотренная Оверхаузером [11]. Длина волны, при которой впервые возникает данная неустойчивость, зависит, очевидно, от свойств системы.

Мы видим, таким образом, что полный анализ коллективных мод взаимодействующей системы весьма труден. Надо считать

счастливым обстоятельством то, что теория Ландау позволяет провести простое рассмотрение этих возбуждений в макроскопическом пределе.

§ 8. СТОЛКНОВЕНИЯ КВАЗИЧАСТИЦ

До сих пор мы игнорировали столкновения между квазичастицами, поскольку опускали интеграл столкновений в кинетическом уравнении. Такое упрощение допустимо только при частоте, превышающей частоту столкновений ν , или при длине волны, малой по сравнению со средней длиной свободного пробега. Обратимся теперь к изучению интеграла столкновений $I(n)$; мы тогда сможем распространить кинетическое уравнение на область частот ниже ν .

Детальный расчет интеграла столкновений для квазичастиц довольно труден. Так как наша цель состоит в том, чтобы изложить основные физические понятия, мы часто не будем подробно останавливаться на математических выкладках, а иногда просто будем приводить результат. Следует, однако, иметь в виду, что соответствующие вычисления, хотя и длинные, но не представляют принципиальной трудности.

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИИ

При конечных температурах квазичастицы испытывают реальные столкновения, подобные описываемым в обычной кинетической теории газов. Простейший процесс — *парное* столкновение, обозначаемое следующим образом:

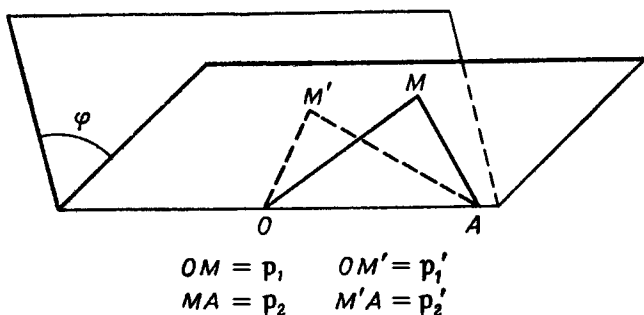
$$(p_1) + (p_2) \rightarrow (p'_1) + (p'_2). \quad (1.146)$$

Предположим, что p_1 — термически возбужденная квазичастица со свободной энергией порядка kT . Чтобы выполнялся принцип Паули и закон сохранения энергии, p_2 , p'_1 и p'_2 должны также находиться в интервале kT вблизи ферми-поверхности. Поэтому при $T \rightarrow 0$ вероятность перехода обращается в нуль, так как разрешенные конечные состояния отсутствуют. Позже мы увидим, что соответствующая частота столкновений имеет порядок T^2 . Наряду с парными столкновениями (1.146) могут происходить и более сложные процессы с одновременным участием трех, четырех и большего числа квазичастиц. Так как все частицы, участвующие в этих процессах, должны находиться в интервале kT вблизи ферми-поверхности, соответствующая вероятность перехода будет более высокого порядка по T и ею можно пренебречь. Поэтому мы должны рассмотреть только простейший процесс (1.146).

Соответствующий интеграл столкновений можно записать в виде

$$I(n_1) = - \sum W(p_1 \sigma_1 \dots p'_2 \sigma'_2) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \delta_{\sigma_1 + \sigma_2, \sigma'_1 + \sigma'_2} \delta(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2 - \tilde{\epsilon}'_1 - \tilde{\epsilon}'_2) \{n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - \\ - (1 - n_1)(1 - n_2) n'_1 n'_2\}, \quad (1.147)$$

где сумма берется по конечным состояниям, а через $\tilde{\epsilon}_i$, n_i обозначены $\tilde{\epsilon}_p$, $n_{p\sigma}$. (Для ясности спиновые переменные указаны явно.) Величина $I(n_i)$ представляет собой скорость изменения $n_{p\sigma}$ вследствие столкновений, а $W(p_1\sigma_1 \dots p_2'\sigma_2')$ есть вероятность перехода для процесса (1.146), из которой мы выделили три δ -функции, выражающие сохранение спина, импульса и энергии. Заметим, что величиной, которая должна сохраняться, является полная энергия системы. Поэтому в закон сохранения должна входить точная энергия квазичастиц в возбужденной среде, т. е. локальная энергия $\tilde{\epsilon}_p$, а не равновесная энергия ϵ_p . Это замечание, которое было учтено при записи выражения (1.147), как мы увидим, играет очень важную роль при рассмотрении кинетических свойств. Наконец, в скобках в уравнении (1.147) стоят обычные числа заполнения, соответствующие переходу в состояние $(p_1\sigma_1)$ и из него и учитывающие принцип Паули.



Фиг. 4. Относительное расположение импульсов двух квазичастиц до и после столкновения.

При вычислении суммы по конечным состояниям в (1.147) необходимо тщательно следить за тем, чтобы каждое состояние учитывалось только один раз. Предположим сначала, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$; тогда из сохранения спина следует, что $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma$, т. е. все спины фиксированы. В этом случае конечное состояние не меняется при перестановке p_1' и p_2' . Мы учтем это, добавив множитель $1/2$ в выражение (1.147), после чего суммирование по импульсам p_1' и p_2' можно проводить независимо. Обратимся теперь к случаю $\sigma_2 = -\sigma_1$, откуда следует, что $\sigma_2' = -\sigma_1'$; мы можем тогда считать, что $\sigma_1 = \sigma_1'$, $\sigma_2 = \sigma_2'$, и суммировать по p_1' и p_2' без ограничений, поскольку ни одно конечное состояние не может встретиться дважды.

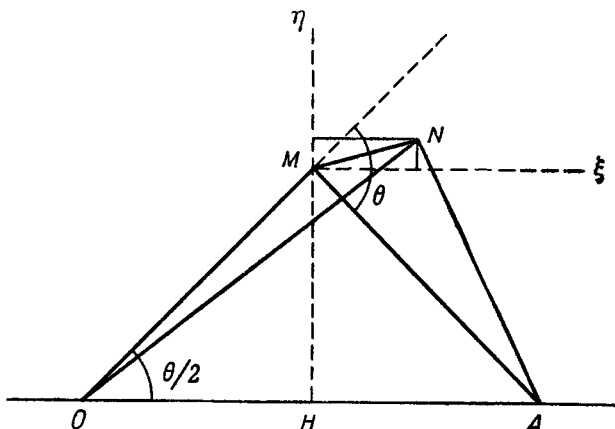
Перейдем теперь к «геометрии» столкновения. Мы рассмотрим только изотропную систему и будем следовать анализу Абрикосова и Халатникова [12]. Из закона сохранения импульса следует, что

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = OA. \quad (1.148)$$

Расположение различных импульсов, а также угол ϕ между плоскостями $(p_1 p_2)$ и $(p_1' p_2')$ показаны на фиг. 4. Упростим схему, повернув плоскость $OM'A$ так, чтобы она совместилась с плоскостью OMA . Тогда получаем схе-

му, представленную на фиг 5, где через N обозначено новое положение точки M' . Чтобы вернуться к фиг. 4, нужно просто повернуть N на угол $-\varphi$ вокруг OA .

В силу принципа Паули все четыре импульса ($p_1 p_2 p'_1 p'_2$) должны лежать в интервале kT вблизи ферми-поверхности. Так как мы работаем с вырожденным газом ($kT \ll \mu$), величина этих импульсов примерно равна p_F . Треугольники OMA и ONA тогда будут почти равнобедренными, а смещение $MN = \lambda$ — очень малым. Другими словами, углы между p_1 и p_2 и между p'_1 и p'_2 практически равны одному и тому же значению θ и, в сущности, не зависят от



Фиг. 5. Геометрия столкновения двух частиц.

энергий, отвечающих четырем импульсам ($p_1 \dots p'_2$). Эта *несвязанность* угловых и энергетических переменных, заметно упрощающая вычисления, характерна для *вырожденной* системы. Это связано с принципом Паули, в силу которого сталкивающиеся частицы остаются на поверхности Ферми.

Пусть $W_{\uparrow\uparrow}(p_1 \dots p'_2)$ и $W_{\uparrow\downarrow}(p_1 \dots p'_2)$ — вероятности для случая, когда сталкивающиеся частицы имеют соответственно параллельные и антипараллельные спины. Эти вероятности практически не зависят от *длины* векторов ($p_1 \dots p'_2$), которая очень близка к p_F , а зависят лишь от их *взаимной ориентации*, т. е. от двух углов (θ, φ) . Интеграл столкновений тогда полностью определяется двумя функциями $W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi)$ и $W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi)$.

Чтобы явно вычислить интеграл столкновений, нужно выбрать подходящую систему координат, в которой задаются импульсы p_2 и p'_1 (p'_2 определяется законом сохранения импульса). Например, импульс p'_1 мы можем характеризовать переменными λ_{\parallel} , λ_{\perp} и φ (см. фиг. 4 и 5). Вектор p_2 удобно характеризовать полярными координатами с осью p_1 , т. е. длиной p_2 , углом θ и азимутальным углом φ_2 . Теперь нетрудно записать элемент объема фазового пространства. Практически удобнее заменить переменные λ_{\parallel} и λ_{\perp} длинами p'_1 и p'_2 , что легко сделать, если λ предполагается малым. В свою

очередь длины четырех векторов $(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_2)$ можно заменить соответствующими энергиями. Путем прямого вычисления находим следующее соотношение:

$$\int d^3 \mathbf{p}_2 \int d^3 \mathbf{p}'_1 \int d^3 \mathbf{p}'_2 \delta(\mathbf{p}_1 \dots - \mathbf{p}'_2) = \frac{(m^*)^3}{2} \int \frac{\sin \theta}{\cos(\theta/2)} d\theta d\varphi d\varphi_2 d\varepsilon'_1 d\varepsilon'_2 d\varepsilon_2. \quad (1.149)$$

Тогда интеграл столкновений можно записать явно. Предположим, например, что $n_{\mathbf{p}}$ не зависит от спина. Мы получаем

$$I(n_1) = \frac{(m^*)^3}{2(2\pi\hbar)^6} \int \left\{ W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi) \right\} \times \\ \times \{ n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2) \} \times \\ \times \delta(\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}'_1 - \tilde{\varepsilon}'_2) \frac{\sin \theta}{\cos(\theta/2)} d\theta d\varphi d\varphi_2 d\varepsilon'_1 d\varepsilon'_2 d\varepsilon_2. \quad (1.150)$$

Это довольно громоздкое выражение в действительности легко проинтегрировать.

Прежде чем закончить общее обсуждение интеграла столкновений, рассмотрим вероятности перехода $W_{\uparrow\uparrow}$ и $W_{\uparrow\downarrow}$. Следуя обычной теории рассеяния, мы можем написать

$$W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi)|^2, \\ W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi)|^2. \quad (1.151)$$

где $A_{\uparrow\uparrow}$ и $A_{\uparrow\downarrow}$ — соответствующие амплитуды рассеяния.

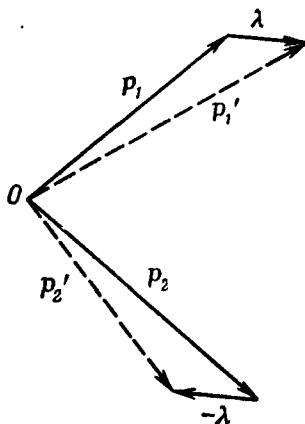
Рассмотрим случай $\varphi=0$. При этом вектор $\mathbf{MN}=\lambda=\hbar\mathbf{q}$, изображенный на фиг. 5, представляет собой просто переданный при столкновении импульс. Более наглядно этот процесс представлен на фиг. 6. Заметим, что $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2$ и так как вектор λ мал, рассеяние двух квазичастиц происходит почти точно *вперед*. Этому переходу отвечает также малая передача энергии $\hbar\omega = \hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1} = -\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}$. Тогда, согласно общим соображениям, изложенным в § 6, соответствующая амплитуда рассеяния $A_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}(\mathbf{q}, \omega)$ связана с взаимодействием $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ равенством (1.112).

Когда угол φ тождественно равен нулю, передаваемая энергия $\hbar\omega$ имеет порядок qv_F . Амплитуды рассеяния зависят тогда от отношения \mathbf{q}/ω , т. е. от направления \mathbf{q} , и их нельзя определить однозначно. Предположим, что угол φ очень мал, но больше, чем kT/μ . Передаваемая энергия $\hbar\omega$ остается порядка kT , тогда как передаваемый импульс $\hbar\mathbf{q}$, оставаясь малым, тем не менее превышает величину kT/v_F . В этом случае вектор \mathbf{q} практически перпендикулярен \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , а амплитуда рассеяния равна величине $f_{\mathbf{p}_1\sigma_1, \mathbf{p}_2\sigma_2}$ определенной

равенством (1.116). Используя определение (1.117), мы можем тогда написать

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi) &\rightarrow \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} [F^s(\theta) + F^a(\theta)], \\ A_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi) &\rightarrow \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} [F^s(\theta) - F^a(\theta)], \end{aligned} \quad \left(\frac{kT}{\mu} \ll \varphi \ll 1 \right), \quad (1.152)$$

где θ — угол между p_1 и p_2 . Соотношения (1.152) не выполняются при $\varphi \lesssim kT/\mu$, однако это ограничение несущественно, поскольку соответствующая область в фазовом пространстве пренебрежимо мала.



Фиг. 6. Рассеяние почти строго вперед ($\varphi = 0$).

С помощью (1.118) мы можем выразить f через энергию взаимодействия $f_{pp'}$. Таким образом амплитуду рассеяния для $\varphi \rightarrow 0$ можно связать с равновесными свойствами жидкости. Однако это принесет мало пользы, так как мы очень немного знаем о величине $f_{pp'}$. Кроме того, такое рассмотрение ничего не скажет о случае $\varphi \neq 0$. Тем не менее мы можем по порядку величины оценить $A_{\uparrow\uparrow}$ и $A_{\uparrow\downarrow}$, предполагая их постоянными, не зависящими от θ и φ . Используя (1.152), можно написать

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow} &\sim \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} \{F_0^s + F_0^a\}, \\ A_{\uparrow\downarrow} &\sim \frac{\pi^2 \hbar^3}{m^* p_F} \{F_0^s - F_0^a\}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Коэффициенты F_0^s и F_0^a , определяемые соотношением (1.117), можно найти, зная скорость звука и спиновую восприимчивость. Затем мы можем использовать соотношения (1.153) для вычисления средних вероятностей переходов $W_{\uparrow\uparrow}$ и $W_{\uparrow\downarrow}$.

ВРЕМЯ ЖИЗНИ КВАЗИЧАСТИЦ

Предположим, что в момент времени $t=0$ мы вносим одну дополнительную квазичастицу с импульсом p в вырожденную ферми-жидкость, находящуюся в равновесии при температуре T . При изучении скорости распада квазичастицы мы можем использовать кинетическое уравнение. Мы увидим, что распределение n_p распадается в соответствии с обычным законом

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = -\frac{n_p}{\tau_p}, \quad (1.154)$$

где τ_p — время жизни квазичастицы.

Простейший процесс распада также происходит по схеме (1.146): квазичастица p распадается на две квазичастицы p'_1 и p'_2 и квазидырку p_2 . Очевидно, мы можем представить себе и более сложный процесс, в котором возникают $(m+1)$ квазичастиц и m квазидырок. К счастью, последними процессами можно пренебречь, когда импульс p достаточно близок к ферми-поверхности. В силу принципа Паули свободная энергия элементарного возбуждения изменяется от $-kT$ до $+\infty$. Чтобы выполнялся закон сохранения энергии, каждое из $(2m+1)$ конечных элементарных возбуждений должно иметь свободную энергию в интервале $(-kT, +(\epsilon_p - \mu))$, где $\epsilon_p - \mu$ — свободная энергия начальной квазичастицы. Это приводит к тому, что вероятность перехода имеет порядок $(kT)^{2m}$, если $|\epsilon_p - \mu| \ll kT$, и порядок $(\epsilon_p - \mu)^{2m}$, если $|\epsilon_p - \mu| \gg kT$. Поэтому для низких температур ($kT \ll \mu$) и области, достаточно близкой к ферми-поверхности ($|\epsilon_p - \mu| \ll \mu$), процессами более высокого порядка можно пренебречь. Предположим, что имеет место как раз этот случай, и рассмотрим только процесс (1.146).

В момент $t=0$ скорость изменения n_p вследствие столкновений равна $1/\tau_p$. Система характеризуется распределением

$$n_{p'} = \begin{cases} 1, & \text{если } p' = p, \\ n_{p'}^0(T), & \text{если } p' \neq p, \end{cases} \quad (1.155)$$

где $n_p^0(T)$ описывается выражением (1.37). С точностью до членов порядка $1/N$ мы можем локальную энергию $\tilde{\epsilon}_p$ заменить ее равновесным значением ϵ_p . По аналогии с (1.147) напомним

$$\frac{1}{\tau_p} = \sum W(p\sigma \dots p'_2\sigma'_2) \delta(p \dots - p'_2) \delta_{\sigma+\sigma_2, \sigma'_1+\sigma'_2} \times \\ \times \delta(\epsilon_p \dots - \epsilon'_2) n_2^0 [1 - n_1^0] [1 - n_2^0], \quad (1.156)$$

где сумма берется по конечным состояниям. Выражение (1.156) имеет ту же структуру, что и интеграл столкновений (1.147), и сводится к виду, аналогичному (1.150). Напишем

$$2W(\theta, \varphi) = W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi) \quad (1.157)$$

и введем безразмерную свободную энергию

$$x = \frac{\varepsilon_p - \mu}{kT}. \quad (1.158)$$

С помощью величины x равновесное распределение можно представить в виде

$$n_p^0(T) = n^0(x) = \frac{1}{1 + e^x}. \quad (1.159)$$

По аналогии с (1.150) запишем выражение (1.156) для $1/\tau_p$ следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{(m^*)^3 (kT)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int \frac{\sin\theta W(\theta, \varphi)}{\cos\theta/2} d\theta d\varphi d\varphi_2 \int dx_2 dx'_1 dx'_2 \times \\ \times \delta(x + x_2 - x'_1 - x'_2) n_0(x_2) [1 - n_0(x'_1)] [1 - n_0(x'_2)]. \quad (1.160)$$

Интегрирование по энергетическим переменным можно выполнить точно [13]. Окончательно получаем

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{(m^*)^3 (kT)^2}{16\pi^4 \hbar^6} \left\langle \frac{W}{\cos\theta/2} \right\rangle (\pi^2 + x^2) [1 - n^0(x)], \quad (1.161)$$

где угловыми скобками $\langle \rangle$ обозначено усреднение по телесному углу. Чтобы сделать этот результат более наглядным, заменим x его значением (1.158). В итоге приходим к важному соотношению

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{(m^*)^3}{16\pi^4 \hbar^6} \left\langle \frac{W}{\cos\theta/2} \right\rangle \frac{(\pi kT)^2 + (\varepsilon_p - \mu)^2}{1 + \exp[(\mu - \varepsilon_p)/kT]}, \quad (1.162)$$

которое справедливо в пределе $|\varepsilon_p - \mu| \ll \mu$

Обсудим выражение (1.162). Следует различать три интересных случая.

1. $|\varepsilon_p - \mu| \ll kT$. Это случай *теплового* возбуждения системы; все элементарные возбуждения, представляющие интерес, находятся в слое толщиной kT у ферми-поверхности. Тогда время τ_p почти не зависит от p и пропорционально T^{-2} ; оно является качественной мерой *времени между столкновениями* для тепловых возбуждений.

2. $(\varepsilon_p - \mu) \ll -kT$. В этом случае мы имеем основное состояние; распределение квазичастиц эффективно «заморожено», так как в силу принципа Паули отсутствуют конечные состояния, в которые может перейти система. При этих обстоятельствах экспонента в (1.162) очень велика, так что величина $1/\tau_p$

исчезающе мала. Таким образом, в системе, находящейся в основном состоянии, частицы не испытывают реальных столкновений.

3. $(\epsilon_p - \mu) \gg kT$. Тепловое уширение распределения не играет роли; мы получаем тот же результат, что и при $T=0$. Мы можем написать выражение (1.162) в виде

$$\frac{\hbar}{\tau_p} = \frac{(\epsilon_p - \mu)^2}{\bar{\epsilon}}, \quad (1.163)$$

где $\bar{\epsilon}$ имеет размерность энергии и описывается выражением

$$\bar{\epsilon} = \frac{16\pi^4 \hbar^5}{(m^*)^3 \langle W / \cos \frac{\theta}{2} \rangle}. \quad (1.164)$$

Заметим, что величина \hbar/τ_p квадратично зависит от свободной энергии $(\epsilon_p - \mu)$. Этот результат также является следствием принципа Паули, т. е. ограниченности числа конечных состояний вблизи ферми-поверхности. Соотношение (1.163) не выполняется, когда разность $(\epsilon_p - \mu)$ становится сравнимой с μ . Тогда в величину $1/\tau_p$ заметный вклад порядка $(\epsilon_p - \mu)^{2m}$ вносят процессы высокого порядка.

Согласно (1.154), вероятность найти частицу p уменьшается пропорционально $\exp(-t/\tau_p)$. Соответствующая амплитуда вероятности изменяется как $\exp(-t/2\tau_p)$. Этот распад можно описать, добавляя к обычной действительной энергии ϵ_p мнимую часть

$$i\Gamma_p = \frac{i\hbar}{2\tau_p} = i \frac{(\epsilon_p - \mu)^2}{2\bar{\epsilon}}. \quad (1.165)$$

Это косвенным образом показывает, что конечное время жизни приводит к неопределенности в энергии. Непосредственно вблизи ферми-поверхности величина Γ_p пренебрежимо мала по сравнению со свободной энергией; понятие квазичастиц имеет смысл, и справедливость постулатов Ландау подтверждается апостериори. Наоборот, при $(\epsilon_p - \mu) \gtrsim 2\bar{\epsilon}$ величина Γ_p становится сравнимой с $(\epsilon_p - \mu)$. При этом квазичастицы настолько неустойчивы, что представление о них теряет физический смысл. Пороговое значение свободной энергии $2\bar{\epsilon}$ можно оценить с помощью (1.164), найдя из равновесных характеристик среднее значение W .

КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Зная интеграл столкновений, можно изучать обычные кинетические свойства системы, такие, как вязкость, теплопроводность, спиновая диффузия. Соответствующие вычисления прово-

дятся точно так же, как и в кинетической теории газов. Здесь мы кратко обсудим общий метод, выделяя новые особенности, связанные с взаимодействием квазичастиц. Детальное обсуждение можно найти в обзорной статье Абрикосова и Халатникова [12].

Пусть на систему действует неоднородное статическое возмущение, например градиент температуры, градиент скорости или градиент спиновой намагниченности. Приложенный градиент вызовет поток тепла, импульса или спина, нарастание которого ограничивается только столкновениями между квазичастицами. Индуцированный поток пропорционален приложенному градиенту, а коэффициент пропорциональности представляет собой соответственно теплопроводность K , вязкость η , коэффициент спиновой диффузии D_σ . Вычислим эти кинетические коэффициенты.

В равновесном состоянии система характеризуется *не зависящей от времени* функцией распределения $n_p(\mathbf{r})$, определяемой кинетическим уравнением, которое мы получаем, добавляя интеграл столкновений в (1.78):

$$\nabla_r n_p \cdot \nabla_p \tilde{\epsilon}_p - \nabla_p n_p \cdot \nabla_r \tilde{\epsilon}_p = I(n_p). \quad (1.166)$$

Здесь $\tilde{\epsilon}_p$ — локальная энергия, зависящая от координаты \mathbf{r} . Интересующий нас индуцированный поток мы получим, решив уравнение (1.166).

В качестве примера вычисления кинетических коэффициентов рассмотрим расчет теплопроводности. Другие кинетические коэффициенты фактически вычисляются также. Запишем n_p в виде

$$n_p(\mathbf{r}) = n^0[\tilde{\epsilon}_p, T(\mathbf{r})] + \delta \bar{n}_p(\mathbf{r}). \quad (1.167)$$

Первый член в (1.167) зависит от \mathbf{r} через T и $\tilde{\epsilon}_p$. Если бы градиент температуры ∇T отсутствовал, равновесное решение соответствовало бы просто $n_p = n^0$. Таким образом, второй член $\delta \bar{n}_p$ пропорционален градиенту ∇T и представляет отклонение от изотропии, что и приводит к возникновению потока тепла.

Подставим теперь выражение (1.167) в левую часть уравнения (1.166). Последнее содержит градиенты по \mathbf{r} . В этих членах мы можем с точностью до членов порядка $(\nabla T)^2$ пренебречь $\delta \bar{n}_p$. Таким образом, мы заменим n_p на $n^0(\tilde{\epsilon}_p, T)$. Левая часть уравнения (1.166) принимает вид

$$\frac{\partial n^0}{\partial T} \nabla_r T \cdot \nabla_p \tilde{\epsilon}_p + \frac{\partial n^0}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \nabla_r \tilde{\epsilon}_p \cdot \nabla_p \tilde{\epsilon}_p - \frac{\partial n^0}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \nabla_p \tilde{\epsilon}_p \cdot \nabla_r \tilde{\epsilon}_p. \quad (1.168)$$

Последние два члена в (1.168) взаимно сокращаются, как мы уже отмечали в § 4. Таким образом, левая часть кинетического уравнения сводится к одному члену

$$\frac{\partial n^0}{\partial T} \mathbf{v}_p \cdot \nabla T, \quad (1.169)$$

который для n_p играет роль вынуждающей силы.

Рассмотрим теперь интеграл столкновений (1.150), в который мы подставим n_p в виде (1.167). Произведение чисел заполнения можно разложить по степеням $\delta \bar{n}$. Член нулевого порядка обращается в нуль в силу закона сохранения локальной энергии. Считая $(\nabla T)^2$ малым, ограничимся членом первого порядка, поскольку члены второго и более высокого порядков содержат более высокие степени ∇T . Для его записи удобно ввести величину ζ_p , определяемую соотношением

$$\delta \bar{n}_p = \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \zeta_p = -\frac{n^0(1-n^0)}{kT} \zeta_p. \quad (1.170)$$

Прямым вычислением (1.150) приводится к следующему виду:

$$I(n_1) = -\frac{(m^*)^3}{2kT(2\pi\hbar)^6} \int \frac{W(\theta, \varphi) \sin \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \times \\ \times n_1^0 n_2^0 [1 - n_1^0] [1 - n_2^0] (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_1' - \zeta_2') \times \\ \times \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') d\theta d\varphi d\varphi_2 d\epsilon_1' d\epsilon_2' d\epsilon_2. \quad (1.171)$$

(Поскольку уравнение линеаризовано, мы можем $\tilde{\epsilon}_p$ заменить на ϵ_p .) Интеграл столкновений можно представить в виде (1.171) при рассмотрении любого не зависящего от спина явления (например, вязкости). В случае антисимметричных по спину эффектов (например, спиновой диффузии) в $I(n)$ входят различные комбинации $W_{\uparrow\uparrow}$ и $W_{\uparrow\downarrow}$. Подчеркнем, что интеграл столкновений содержит $\delta \bar{n}$, а не δn , так как сохраняется именно $\tilde{\epsilon}_p$, а не ϵ_p .

Теперь приравняем левую и правую части кинетического уравнения, т. е. (1.169) и (1.171). В результате мы получим интегральное уравнение, которое в принципе позволяет вычислить неизвестную величину ζ . Зная ζ , мы с помощью (1.170) получим $\delta \bar{n}_p$, а затем и поток свободной энергии, определяемый соотношением (1.92):

$$\mathbf{Q} = \sum_p \delta \bar{n}_p (\epsilon_p - \mu) \mathbf{v}_p. \quad (1.172)$$

Поток \mathbf{Q} пропорционален ∇T , их отношение есть теплопроводность K .

Кинетическое уравнение точно решить нельзя. Мы можем только постулировать какое-либо простое выражение для ζ , а затем найти соответствующее приближенное решение. Например, при вычислении теплопроводности можно взять ζ_p в виде

$$\zeta_p = \gamma \mathbf{v}_p \cdot \nabla T (\epsilon_p - \mu), \quad (1.173)$$

где γ — постоянная, которую нужно определить. Подставим (1.173) в (1.171) и возьмем соответствующие интегралы. Подставляя результат в кинетическое уравнение, мы получим γ и, наконец, теплопроводность,

Вычисления π и D_σ выполняются аналогично. Поскольку они довольно громоздки, мы приведем здесь только окончательные результаты

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{4\pi^2}{3} \frac{(\hbar v_F)^3}{m^* T \left\langle W \sin^2 \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\theta}{2} \right\rangle}, \\
 \pi &= \frac{16}{45} \frac{m^* \hbar^3 v_F^5}{(kT)^2 \left\langle W \sin^4 \frac{\theta}{2} \sin^2 \varphi / \cos \frac{\theta}{2} \right\rangle}, \\
 D_\sigma &= \frac{16\pi^2}{3} \frac{\hbar^6 v_F^2 (1 + F_0^a)}{(m^*)^3 (kT)^2 \left\langle W_{\uparrow\downarrow} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \cos \varphi) / \cos \frac{\theta}{2} \right\rangle},
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

точность которых, как показали Абрикосов и Халатников [12] составляет 10%. Заметим, что π и D_σ пропорциональны T^{-2} , а теплопроводность K пропорциональна T^{-1} . Это различие можно понять, если учесть, что квазичастица обладает конечными импульсом и спином и свободной энергией порядка T . Отметим также, что средние по угловым переменным различны, так что точной связи между π и K не существует.

§ 9. СРАВНЕНИЕ НУЛЕВОГО ЗВУКА С ПЕРВЫМ ЗВУКОМ

СРАВНЕНИЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО РЕЖИМА С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ

Рассмотрим теперь влияние столкновений квазичастиц на продольные коллективные моды в нейтральной ферми-жидкости. Пусть ω — частота рассматриваемой моды, а ν — частота столкновений. Как уже отмечалось, при

$$\omega \gg \nu \tag{1.175}$$

столкновения происходят достаточно редко, так что можно спокойно пренебречь вкладом интеграла столкновений в кинетическое уравнение. Это *бесстолкновительный* режим. В этом режиме и при условии $F_0 > 0$ нулевой звук является хорошо определенной коллективной модой. Роль соответствующей возвращающей силы играет среднее самосогласованное поле большого числа частиц. Столкновения между квазичастицами стремятся разрушить это поле и приводят, следовательно, к затуханию нулевого звука. Это затухание мало, если выполняется условие (1.175).

В противоположном пределе

$$\omega \ll \nu \tag{1.176}$$

за интересующий нас период времени ω^{-1} происходит много столкновений квазичастиц. Тогда имеет место столкновительный, или *гидродинамический режим*, когда решение полного кинетического уравнения (1.83) в значительной мере определяется интегралом столкновений (1.147). При этих условиях тоже возможны упорядоченные колебания плотности, а именно обычные гидродинамические волны, или волны *первого звука*. Благодаря частым столкновениям квазичастиц устанавливается локальное термодинамическое равновесие. Очевидно, что эти столкновения играют роль вынуждающей силы для волны первого звука и что они должны происходить достаточно часто, чтобы восстанавливать равновесие за время, малое по сравнению с периодом движения. Следовательно, (1.176) есть необходимое условие существования хорошо определенной гидродинамической моды — первого звука.

Переход от одного режима к другому происходит при

$$\omega \sim v. \quad (1.177)$$

В этой области частот столкновения происходят достаточно часто, чтобы полностью подавить нуль-звуковую моду, но не настолько часто, чтобы могла распространяться незатухающая волна первого звука — в веществе вообще не могут распространяться волны. Поэтому можно полагать, что в том случае, когда частота увеличивается при заданной температуре, переходу от первого звука к нулевому звуку должен соответствовать максимум в поглощении звуковой волны.

Перейдем теперь к обсуждению решений кинетического уравнения в гидродинамическом режиме, влияния столкновений на нулевой и первый звук и к анализу перехода от одной моды к другой.

ПЕРВЫЙ ЗВУК

Скорость первого звука, соответствующего частотам $\omega \ll v$, можно найти тем же путем, как и скорость нулевого звука. Будем опять исходить из кинетического уравнения (1.123), в которое нужно ввести надлежащий интеграл столкновений. Мы приведем здесь качественное описание вычислений, которое позволяет ясно представить себе отличие первого звука от нулевого звука. Более точные вычисления проводятся так же, как в § 8 и гл. 2, § 7; мы предоставляем читателю выполнить их самостоятельно.

Столкновения квазичастиц приводят к восстановлению равновесного распределения n^0 . При частотах $\omega \ll v$ они стремятся сделать смещение u ферми-поверхности пренебрежимо малым. Однако на некоторые величины столкновения повлиять не мо-

гут. Речь идет о локальной плотности и потоке, поскольку полное число частиц и полный импульс при столкновениях сохраняются. Другими словами, столкновения не влияют на компоненты с $l=0$ и $l=1$ разложения u по сферическим функциям. Поэтому мы можем считать, что при $\omega \ll v$, т. е. при очень низких частотах u содержит только члены с $l=0$ и $l=1$. Для продольной моды, для которой $m=0$, имеем

$$u(\theta) = a + b \cos \theta, \quad (1.178)$$

где a и b — постоянные. Результат (1.178) доказывается подробным вычислением. Физически он соответствует колебаниям плотности с одновременным переносом всей жидкости в целом. Именно это имеет место в обычной акустической волне.

Чтобы решить кинетическое уравнение (1.123), разложим его по полиномам Лежандра. Для $l > 1$ мы должны добавить столкновительный член, который определяет поведение системы при низких частотах и приводит к полному затуханию соответствующих смещений. Наоборот, для $l=0$ и $l=1$ столкновения вообще не эффективны, так как полная плотность и поток должны сохраняться. Поэтому мы выпишем только первые два члена разложения. Используя (1.178), получаем после некоторых простых преобразований

$$\begin{aligned} l=0, & \quad -\omega a + \frac{qv_F}{3} \left[1 + \frac{F_1^s}{3} \right] b = 0, \\ l=1, & \quad -\omega b + qv_F [1 + F_0^s] a = 0. \end{aligned} \quad (1.179)$$

Чтобы система уравнений (1.179) имела отличное от нуля решение, ω и q должны удовлетворять уравнению

$$\omega^2 = \frac{q^2 v_F^2}{3} [1 + F_0^s] \left[1 + \frac{F_1^s}{3} \right]. \quad (1.180)$$

Учитывая (1.61) и (1.100), мы видим, что уравнение (1.180) сводится к

$$\omega = sq, \quad (1.181)$$

где s — скорость звука, полученная ранее из макроскопических соображений. Итак, мы получили обычный *первый звук* как низкочастотную распространяющуюся моду.

Подчеркнем, что в пределе очень низких частот столкновения, так сказать, «*обрывают*» кинетическое уравнение (1.123). В то время как нулевой звук получается из полного уравнения, для первого звука существенны только компоненты с $l=0$ и $l=1$, а все другие компоненты оказываются подавленными из-за наличия столкновений. Эти рассуждения, очевидно, справедливы

только в предельных случаях $\omega \gg v$ или $\omega \ll v$. В переходной области ни одно из этих приближений неприменимо. Качественное описание этой области будет дано ниже.

Рассмотрим результат (1.180) применительно к нашей простой модели

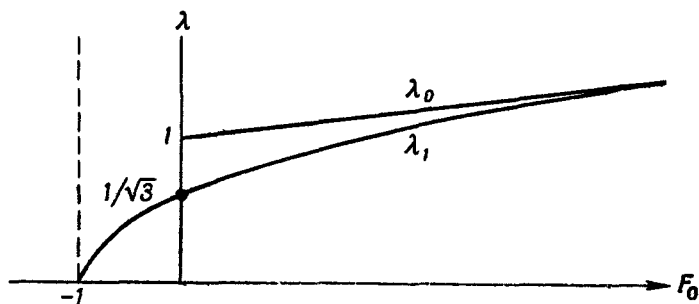
$$F_0^s = F_0,$$

$$F_1^s = 0.$$

Используя те же обозначения, как и для нулевого звука, мы находим, что первый звук обладает приведенной скоростью

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{qv_F} = \sqrt{\frac{1+F_0}{3}}. \quad (1.182)$$

На фиг. 7 изображена зависимость скоростей λ_1 и λ_0 , характеризующих соответственно первый и нулевой звук, от величины



Фиг. 7. Зависимость приведенных скоростей первого и нулевого звука от величины взаимодействия.

взаимодействия F_0 . Мы видим, что оба решения сливаются в пределе сильного взаимодействия. Для $F_0 \approx 0$ величина λ_0 больше λ_1 в $\sqrt{3}$ раз. В области $-1 < F_0 < 0$ нулевой звук затухает, тогда как первый звук еще существует.

ЗАТУХАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ МОД ПЕРЕХОД ОТ НУЛЕВОГО ЗВУКА К ПЕРВОМУ ЗВУКУ

Рассмотрим теперь обусловленное столкновениями затухание продольных волн в нейтральной ферми-жидкости при переходе от бесстолкновительного режима, когда частота удовлетворяет условию (1.175), к гидродинамическому режиму, которому соответствует условие (1.176). Эта область изучалась Абрикосовым и Халатниковым [12] при помощи упрощенного интеграла столк-

новений. С деталями вычислений интересующийся читатель может познакомиться по работе названных авторов.

В обычном эксперименте работают с *действительной* частотой ω и комплексным волновым вектором q . Аргумент q , т. е. отношение его мнимой части к действительной, является прямой мерой эффективности затухания. Предположим, что мы рассматриваем бесстолкновительный режим. Легко показать, что

$$\arg q \sim \frac{1}{\omega\tau_q}, \quad (1.183)$$

где τ_q — время между столкновениями для квазичастиц, эффективно участвующих в коллективной моде. В зависимости от частоты ω можно различать два режима, соответствующих различным механизмам столкновений.

1. Когда $\hbar\omega \ll kT$, имеет место классический, или *тепловой*, режим. Коллективная мода поддерживается термически возбужденными квазичастицами, находящимися в интервале kT вблизи ферми-поверхности. Согласно соотношению (1.162), время τ_q определяется столкновениями с другими тепловыми квазичастицами и обратно пропорционально T^2 .

2. Когда $\hbar\omega \gg kT$, мы имеем квантовый, или *многопарный*, режим. Тогда коллективная мода является когерентной суперпозицией пар квазичастица — квазидырка с общим импульсом q . Квазичастичное состояние, входящее в такую моду, может находиться с любой стороны от уровня Ферми на расстоянии, не превышающем $\hbar\omega$. Соответствующее время между столкновениями определяется соотношением (1.162). Оно не зависит от температуры. В этом режиме τ_q определяется теми столкновениями с частицами, находящимися внутри ферми-поверхности, при которых сталкивающиеся квазичастицы возбуждают *новые* пары квазичастица — квазидырка. Затухание нулевого звука происходит, когда любая частица когерентной пары испытывает такое столкновение. Поэтому соответствующий механизм затухания можно рассматривать как распад коллективной моды на *две* такие пары. По этой причине описанный режим и назван *многопарным*.

Когда частота, уменьшаясь, достигает значения

$$\omega\tau_q \sim 1;$$

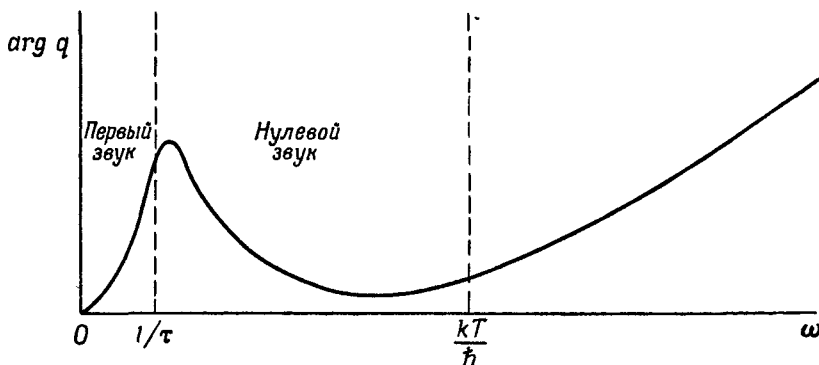
мы переходим от бесстолкновительного к гидродинамическому режиму. При *очень низких* частотах имеет место очень малое затухание первого звука. Это затухание соответствует известному вязкому затуханию первого звука, для которого

$$\text{Im } q = \frac{2\omega^2}{3Nms^3} \text{ и.} \quad (1.184)$$

Используя выражения (1.174) для n и (1.162) для τ_q (в этом тепловом режиме), легко найти, что

$$\arg q \approx \omega \tau_q. \quad (1.185)$$

В гидродинамическом режиме затухание пропорционально τ_q , а не $1/\tau_q$; таким образом, оно обратно пропорционально квадрату температуры.



Фиг. 8. Качественная зависимость затухания звуковых волн от частоты.

Результаты (1.183) и (1.185) можно свести к простой формуле

$$\arg q \approx \frac{\omega \tau_q}{1 + \omega^2 \tau_q^2} \quad (\omega \leq \mu), \quad (1.186)$$

которая является просто интерполяционной формулой, описывающей переход от бесстолкновительного режима к гидродинамическому. Качественно зависимость затухания от частоты показана на фиг. 8. Мы видим, что затухание велико в двух разных режимах: в области высоких частот, где имеет место многопарный распад, и в области низких частот, где происходят столкновения тепловых квазичастиц. В промежуточной области существует слабо затухающая нуль-звуковая волна (при $\omega \tau \gg 1$), а в области низких частот ($\omega \tau \ll 1$) может распространяться первый звук.

§ 10. СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННОГО ^3He

ПРИМЕНИМОСТЬ ТЕОРИИ ЛАНДАУ

Жидкий ^3He — единственная ферми-жидкость, обнаруженная в природе — становится вырожденным при очень низких температурах. Если бы между атомами ^3He не было взаимодействия,

температура, соответствующая энергии Ферми (для основного состояния) была бы равна

$$T_F = \frac{E_F^0}{k} = \frac{p_F^2}{2mk} \approx 5^\circ \text{K}. \quad (1.187)$$

Такая оценка получается, если положить m равной голой массе ^3He , т. е. примерно $5 \cdot 10^{-24}$ г, а p_F вычислить по измеренной плотности

$$p_F = \hbar (3\pi^2 \rho)^{1/3}. \quad (1.188)$$

Температура, при которой начинают проявляться типично квантовые эффекты (пропорциональность теплоемкости температуре, независимость восприимчивости от температуры), приблизительно равна $T_F/10$, т. е. $0,5^\circ \text{K}$. Фактически эти квантовые эффекты обнаруживаются экспериментально лишь при гораздо более низких температурах порядка $0,1^\circ \text{K}$. Уменьшение температуры вырождения является следствием взаимодействия между атомами, которое должно быть очень сильным, чтобы привести к такому большому эффекту.

Изложенная выше теория Ландау применима только к вырожденной жидкости, т. е. при температурах ниже $0,1^\circ \text{K}$. До недавнего времени в этой области было мало экспериментальных результатов. В настоящее время эксперименты производятся при температурах вплоть до нескольких тысячных градуса. Их результаты в основном согласуются с предсказаниями теории Ландау.

Конечно, было бы весьма желательно распространить теорию Ландау на более высокие температуры, скажем от $0,1$ до 1°K . Для этого необходимо разлагать свободную энергию до членов более высокого порядка по отклонению от равновесия $\delta\mu_p$. Мы видели, что такое разложение, не говоря о его математической сложности, приводит к принципиальным трудностям. Так, не ясно, в какой мере можно определять квазичастицы в той области импульсного пространства, в которой они заметно затухают. Формальное определение квазичастицы в этом температурном интервале было дано Бальяном и Доминиссом [1] с помощью методов теории поля. Однако связь введенных ими квазичастиц с реальными физическими возбуждениями еще не ясна. Ричардс [14] предположил, что такое разложение существует, и использовал члены следующего порядка по отношению к приближению Ландау. Его вычисление остается приближенным, хотя сравнение с экспериментом, возможно, позволит сделать какие-то выводы. В дальнейшем мы ограничимся температурным интервалом $T \leq 0,1^\circ \text{K}$, в котором теория Ландау заведомо справедлива.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что при понижении температуры жидкий ${}^3\text{He}$ остается *нормальной* ферми-жидкостью. В действительности жидкость может перейти в *сверхтекучее* состояние, которое похоже на сверхпроводящее состояние металла. Существование сверхтекучего состояния в настоящее время с полной достоверностью не доказано. Из теоретических соображений следует, что переход должен иметь место вблизи $0,02^\circ\text{K}$. В 1961 г. Андерсон и др. [15] не обнаружили перехода вплоть до $0,008^\circ\text{K}$. Недавно Пешков [16], основываясь на измерении теплоемкости, сообщил о наличии перехода в сверхтекучее состояние при $0,0055^\circ\text{K}$ в противоречии с экспериментальными результатами Уитли и др. [17]. Уитли и др. измеряли спиновую восприимчивость, причем температура определялась по величине коэффициента спиновой диффузии (такой способ очень чувствителен, ибо D_σ изменяется пропорционально T^{-2}). Никаких данных, указывающих на переход в сверхтекучее состояние, обнаружено не было до температуры $0,0036^\circ\text{K}$. По этой причине результат Пешкова представляется сомнительным, однако, возможно, его градуировка температуры не соответствует градуировке Уитли. В любом случае очевидно, что мы вполне можем считать ${}^3\text{He}$ нормальной ферми-жидкостью в интервале, скажем, от $0,005$ до $0,1^\circ\text{K}$.

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Измеряя различные макроскопические свойства, можно получить информацию об эффективной массе m^* и взаимодействии $f_{pp'}$. Кроме того, можно изучать зависимость этих коэффициентов от давления, действующего на систему. Дадим сначала сводку соответствующих результатов, полученных в настоящей главе. Теплоемкость C_v , скорость звука s и спиновая восприимчивость χ_p описываются формулами

$$C_v = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} k^2 T, \quad (1.43)$$

$$s^2 = \frac{p_F^2}{3m^*} (1 + F_0^s), \quad (1.61)$$

$$\chi_p = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\beta^2}{1 + F_0^a}. \quad (1.67)$$

Все эти величины измеряются экспериментально. Кроме того, из соотношения (1.188) можно определить p_F . Тогда из (1.43) мы можем получить m^* , а F_0^s и F_0^a — соответственно из (1.61) и

(1.67). Так как система обладает трансляционной инвариантностью, мы можем использовать соотношение

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{F_1^s}{3}, \quad (1.100)$$

чтобы найти коэффициент F_1^s .

На практике при таком подходе возникают трудности. Оказывается, что экспериментальное значение m^* возрастает при понижении температуры [18]. Андерсон [19] высказал предположение, что данные по теплоемкости лучше описываются законом $C_v \sim T \ln T$, а не законом $C_v \sim T$, предсказываемым теорией Ландау. Возможное объяснение этого удивительного результата было предложено Бальяном и Фредкиным [20]. Сингулярность в C_v могла бы возникнуть за счет вклада *длинноволнового нулевого звука* в собственноэнергетический оператор (по аналогии с инфракрасной расходимостью в квантовой электродинамике). В настоящий момент вопрос о ^3He остается спорным¹⁾. В дальнейшем мы обойдем эту трудность, предполагая, что m^* слабо меняется с температурой. В данном температурном интервале (вблизи $0,01^\circ \text{K}$) можно считать величину m^* постоянной. Тогда теория Ландау будет верна приближенно. В табл. 1 приведены последние экспериментальные значения m^*/m (и F_1^s), F_0^s , F_0^a , полученные Уитли [18]. Сделаем следующие замечания.

1. Все значения F велики; мы находимся в области сильной связи.

2. Значение F_0^s быстро возрастает при увеличении давления (гораздо быстрее плотности); это изменение можно приписать той части взаимодействия атомов ^3He , которая напоминает взаимодействие жестких шаров. Расположение атомов при этом мало отличается от плотной упаковки.

3. При большой эффективной массе величина T_F уменьшается в согласии с экспериментом.

4. $F_a^0 < 0$: среднее взаимодействие между частицами с антипараллельными спинами больше, чем между частицами с парал-

¹⁾ Работа Бальяна и Фредкина [20] является ошибочной. В ней сделано предположение, что взаимодействие частицы с нуль-звуковым квантом в пределе длинных волн стремится к постоянному значению. В действительности, поскольку звук с бесконечной длиной волны соответствует просто переносу всей системы, ясно, что в указанном пределе взаимодействие должно стремиться к нулю. Это получается и непосредственно в микроскопической теории, где соответствующее взаимодействие оказывается прямо пропорциональным волновому вектору нуль-звуковой волны. При этом закон $T \ln T$ для теплоемкости не получается. Что касается экспериментальной стороны дела, то, хотя вопрос еще не решен окончательно, все же последние данные говорят скорее в пользу того, что $C/T \rightarrow \text{const}$ при $T \rightarrow 0$ — Прим ред.

лельными спинами. Этот результат вытекает из принципа Паули, из которого следует, что параллельные спины «стремятся» расположиться дальше друг от друга.

ТАБЛИЦА 1

Параметры теории ферми-жидкости для ${}^3\text{He}$

Давление, атм	m^*/m	F_1^s	F_0^s	F_0^a
0,28	3,1	6,3	10,8	-0,67
27,0	5,8	14,4	75,6	-0,72

Вследствие этого для частицы с параллельными спинами короткодействующая часть взаимодействия играет менее важную роль. Однако изменение энергии мало, так как $|F_0^a| \ll |F_0^s|$.

Зная F_0^s и F_0^a , мы можем вычислить коэффициенты F_0^s и F_0^a , определяемые соотношениями (1.118) и (1.119). Для жидкого ${}^3\text{He}$ при нулевом давлении находим

$$\begin{aligned} F_0^s &= 0,91, \\ F_0^a &= -2,0. \end{aligned} \quad (1.189)$$

Согласно соотношениям (1.153), величины $F_0^s \pm F_0^a$ пропорциональны соответственно средним амплитудам рассеяния двух квазичастиц с параллельными и антипараллельными спинами. Учитывая (1.189), мы видим, что амплитуда рассеяния для параллельных спинов составляет примерно 40% ее значения для антипараллельных спинов. Это различие опять-таки является следствием обменного отталкивания, которое здесь сказывается гораздо более заметно, чем в энергии системы.

С помощью численных значений (1.189) можно получить грубую оценку кинетических коэффициентов. Для этого сначала заменим амплитуды рассеяния их значениями (1.153). Затем вычислим W и $W_{\uparrow\downarrow}$, согласно (1.151) и (1.157). Наконец, выполним интегрирование в (1.174). В табл. 2 результаты, полученные для низких давлений, сравниваются с экспериментальными значениями. Ввиду грубости теоретических оценок согласие можно считать превосходным (почти полное совпадение для теплопро-

¹⁾ В соответствии с примечанием на стр. 62 мы можем, оставляя в функциях F и \mathbf{F} по две гармоники, вычислить F_1^a . При нулевом давлении получается $F_1^a = -0,7$. — Прим. ред.

водности, вероятнее всего, случайно). Наблюдаемые расхождения можно использовать для получения информации о точном поведении функций $W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi)$ и $W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi)$.

ТАБЛИЦА 2

Сравнение вычисленных и измеренных кинетических коэффициентов для ${}^3\text{He}$

Величина	Вычисленная	Измеренная
KT , эрг/см·сек	59	50
ηT^2 , пуаз·град ²	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$
$D_{\sigma} T^2$, см ² ·град ² сек	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$1,52 \cdot 10^{-6}$

Средние значения амплитуд рассеяния можно использовать и для оценки времени между столкновениями квазичастиц, определяемого соотношением (1.162). В тепловой области $\epsilon_p - \mu \sim kT$ находим

$$\tau T^2 \sim 10^{-12}, \quad (1.190)$$

где время τ выражено в секундах, а температура T — в градусах Кельвина. Таким образом, в тепловой области время жизни квазичастиц очень мало, из-за чего коллективные моды довольно трудно наблюдать. Вдали от ферми-поверхности ($\epsilon_p - \mu \gg kT$) частота столкновений пропорциональна $(\epsilon_p - \mu)^2$. Энергия ϵ , при которой величина \hbar/τ_p равна $\epsilon_p - \mu$, определяется соотношением (1.164). Для ${}^3\text{He}$ при низком давлении получаем

$$\bar{\epsilon} \sim 1^\circ \text{K}. \quad (1.191)$$

Поэтому понятие хорошо определенных квазичастиц неприменимо ко всему ферми-заполнению. Необходимо проявлять большую внимательность и пользоваться представлением о квазичастицах лишь в области, непосредственно примыкающей к ферми-поверхности.

Приведенные выше результаты показывают, насколько полезна теория Ландау. Она дает сжатую согласованную картину, позволяющую *связать друг с другом* многие экспериментальные результаты. Сначала мы можем использовать теорию полуфермонологически, определив коэффициенты F_0^s и F_0^a экспериментально. Затем мы получаем теоретическую информацию о других явлениях, в частности о кинетических свойствах и т. п. Так мы приходим к описанию нормальной ферми-жидкости с единой точки зрения.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О НУЛЕВОМ ЗВУКЕ

Обсудим кратко существование коллективных мод в жидком ${}^3\text{He}$. Мы не можем надеяться получить точный результат, так как, во-первых, интегральное уравнение (1.124) не решается в замкнутой форме, и, во-вторых, мы слишком мало знаем о взаимодействии квазичастиц $f_{pp'}$. Вместе с тем мы можем решить задачу качественно, используя приближенную форму для приведенного взаимодействия $F_{pp'}$. Например, в § 7 мы изучали простую модель, в которой величина $F_{pp'}$ заменяется постоянной F_0^s . Оказалось, что *нулевой звук* существует, если

$$F_0^s > 0. \quad (1.192)$$

При $F_0^s < 0$ коллективная мода подавляется затуханием Ландау. Условие (1.192) *не является* точным, а скорее представляет собой разумное предположение об области существования нулевого звука. Подобным образом можно ожидать, что продольные спиновые волны существуют, если выполнено условие

$$F_0^a > 0. \quad (1.193)$$

Наконец, взяв взаимодействие в виде

$$F_0^s + F_1^s \cos \xi, \quad (1.193a)$$

можно показать, что поперечные ($m=1$) симметричные по спину моды существуют, когда

$$F_1^s > 6 \quad (1.194)$$

(см. задачу 5). Условия (1.193) и (1.194) тоже приближенные.

Применим теперь эти результаты к жидкому ${}^3\text{He}$, используя данные, приведенные в табл. 1. Так как значение F_0^s положительно и довольно велико, очевидно, что *нулевой звук* существует как хорошо определенная коллективная мода. С другой стороны, величина F_0^a отрицательна: спиновые волны, вероятно, подавляются затуханием Ландау. Наконец, величина F_1^s , определяемая соотношением (1.100), удовлетворяет неравенству (1.194) с небольшим запасом: поперечные, симметричные по спину волны, вероятно, существуют при достаточно низких давлениях. Конечно, все эти моды существуют только в том случае, когда частота ω больше тепловой частоты столкновений $1/\tau$, определяемой соотношением (1.190).

По-видимому, легче всего наблюдать нулевой звук, так как он связан с флуктуациями плотности, которые легко возбудить в эксперименте. Эксперименты, позволяющие обнаружить спи-

новые волны, а тем более поперечные коллективные моды, трудно придумать и еще труднее осуществить. Поэтому мы остановим наше внимание на нулевом звуке. Для взаимодействия типа (1.193а) его скорость при нулевом давлении примерно в 3,6 раза больше скорости Ферми. Таким образом, нулевой звук должен быть хорошо определенной коллективной модой в ^3He . Связь между квазичастицами настолько велика, что скорость нулевого звука отличается от скорости первого звука всего на несколько процентов (см. фиг. 7).

Наиболее прямой способ наблюдения нулевого звука состоит в изучении распространения ультразвука в ^3He . При увеличении ω должен наблюдаться максимум в поглощении волны, когда частота равна частоте столкновений $1/\tau$ (см. фиг. 8). При этом происходит переход от первого звука к нулевому. В окрестности максимума должно наблюдаться небольшое различие в скорости первого и нулевого звука.

Практически осуществить такой эксперимент крайне трудно, поскольку требуются высокие частоты: при $0,1^\circ\text{K}$ частота, которая соответствует максимуму поглощения, имеет порядок 10^{10} сек^{-1} . Это крайний предел для существующих сейчас ультразвуковых установок. До сих пор удавалось наблюдать только начало кривой, т. е. увеличение поглощения при приближении ω к $1/\tau$. Чтобы проследить весь переход от первого к нулевому звуку, необходимо еще больше понизить температуру (ниже 10^{-2°K), продолжая работать с предельно высокими ультразвуковыми частотами.

Тем не менее с помощью ультразвукового метода были получены косвенные доказательства существования нулевого звука. Кин, Мэтьюз и Уилкс [21] измерили акустический импеданс Z в ^3He как функцию температуры. Как показывает элементарный расчет, в гидродинамическом режиме

$$Z_1 = Nms, \quad (1.195)$$

где s — скорость первого звука. Бекаревич и Халатников [22] решили кинетическое уравнение для квазичастиц и получили Z для бесстолкновительного режима. Гаворэ [23] недавно показал, что, поскольку фактически в системе имеется сильная связь, бесстолкновительный акустический импеданс в основном определяется нулевым звуком и описывается выражением

$$Z_0 = Nms_0, \quad (1.196)$$

где s_0 — скорость нулевого звука. Поэтому можно ожидать, что при температурах, соответствующих бесстолкновительному режиму, будет наблюдаться рост акустического импеданса.

Такое увеличение наблюдали Кин и др., которые обнаружили, что вблизи $0,09^\circ \text{K}$ величина Z/mN резко возрастает примерно от 181 до 200 *м/сек*. Гаворэ [23] с помощью (1.196) получил для Z_0/mN значение около 191 *м/сек* в качественном согласии с экспериментом. Отсутствие количественного согласия связано с недостатком информации о величине $F_{pp'}$.

Другое косвенное доказательство существования нулевого звука было получено при детальном изучении теплосопrotивления на границе ^3He и металла (так называемый эффект Капицы). С этим явлением, обсуждение которого выходит за рамки нашей книги, читатель может познакомиться по оригинальной литературе [23, 24].

Ввиду трудности непосредственного наблюдения нулевого звука с помощью ультразвуковых методов были предложены различные другие способы, в которых используется неупругое рассеяние света, γ -лучей или нейтронов в жидком ^3He [25, 26]. Как мы увидим в гл. 2, такие эксперименты дали возможность непосредственно измерять спектр возбуждений типа флуктуаций плотности. Если температура и частота таковы, что нулевой звук является хорошо определенным возбуждением, то он должен проявляться в виде дискретного пика в спектре частиц, неупруго рассеянных под данным углом. Такие эксперименты обладают тем преимуществом, что позволяют непосредственно наблюдать кванты нулевого звука высокой энергии (соответствующие частотам $\omega \gg 10^{12} \text{сек}^{-1}$) и, следовательно, могут быть выполнены при «умеренных» температурах от $0,1$ до 1°K . Это позволяет обойти серьезные трудности, связанные со столкновениями квазичастиц.

На первый взгляд кажется, что удобнее всего использовать рассеяние нейтронов, т. е. метод, который, как мы увидим, оказался очень полезным при изучении возбуждений в ^4He . К сожалению, такие эксперименты едва ли возможны, так как сечение захвата нейтронов ядрами ^3He гораздо больше сечения рассеяния: расстояние, проходимое нейтронами в жидкости до поглощения, очень мало. Ахиезер и др. [26] предположили, что эту трудность можно обойти, изучая отражение нейтронов от поверхности жидкости при скользящем падении. Этот эксперимент крайне труден и пока не осуществлен. Если бы удалось выполнить его с поляризованными нейтронами, то путем изучения столкновений падающих нейтронов с атомами ^3He , сопровождающихся переворачиванием спина, можно было бы получить информацию о спиновых возбуждениях в ферми-жидкости.

Другой метод состоит в изучении рассеяния γ -лучей, возможно, с использованием узкой мессбауэровской линии. До сих пор в этом направлении экспериментов не проводилось. Поиски ну-

левого звука в жидком ${}^3\text{He}$ остаются одной из волнующих задач физики низких температур¹⁾.

§ 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы закончим эту длинную главу рассмотрением области применимости и кратким перечислением основных достижений теории Ландау. Теория применима к *нормальной* ферми-жидкости (если отбросить возможную логарифмическую особенность в C_v)²⁾. Она справедлива только в том случае, если выполнены следующие два условия: 1) система сильно вырождена, т. е. $kT \ll \mu$; 2) рассматриваются только макроскопические явления, характеризующиеся таким волновым вектором q и частотой ω , что $\hbar q \ll p_F$ и $\hbar \omega \ll \mu$. Из этих двух условий вытекает, что число рассматриваемых в задаче квазичастиц, независимо от того, возбуждаются ли они тепловым движением или внешним полем, остается малым по сравнению с полной плотностью N . Другими словами, теория Ландау соответствует разложению по степеням доли возбужденных частиц.

С учетом этих двух ограничений теория является строгой. Она позволяет решить большое число задач, касающихся равновесных свойств, кинетических свойств, реакций на длинноволновое внешнее возмущение. Вместе с тем она не позволяет рассматривать реакцию на микроскопическое возмущение. Например, задача о возмущении системы вблизи точечной примеси приводит к необходимости рассмотрения больших переданных импульсов и выходит за рамки теории Ландау. Точно так же рассеяние быстрых заряженных частиц электронным газом приводит к большим значениям переданной энергии, вследствие чего теория Ландау опять не может быть использована. Поэтому, несмотря на очень широкую область применения, теорию Ландау нельзя считать универсальной панацеей; нужно всегда помнить, в каких пределах можно ее использовать. Вместе с тем она использует

¹⁾ Недавно Уитли, Андерсон и Абель (не опубликовано) непосредственно получили нулевой звук в ${}^3\text{He}$. Его скорость оказалась на 3,5% выше скорости первого звука. Указанные авторы изучали также поглощение звука, изменяя температуру в пределах всей переходной области от бесстолкновительного до гидродинамического режима. Результат качественно описывается формулой (1.186), но количественное согласие отсутствует. В частности, значения τ_q , получаемые путем сравнения формулы (1.186) с экспериментом при $\tau\omega \ll 1$ (τ_0) и $\tau\omega \gg 1$ (τ_∞), отличаются численным множителем ($\tau_\infty = 0,7\tau_0$). Это и неудивительно, так как формула (1.186) является интерполяционной. Точный закон для затухания в зависимости от ω и T может быть в принципе найден из кинетического уравнения. В пределе малых частот он соответствует формуле (1.184). — *Прим ред*

²⁾ См. примечание на стр. 93 — *Прим ред*.

(и предоставляет) гораздо больше информации, чем можно получить в любом эксперименте. Например, никогда не удастся обнаружить экспериментально *одну* квазичастицу или *измерить* распределение квазичастиц δn_p . В эксперименте всегда измеряется какое-то *усредненное* свойство системы — поток, заряд, намагниченность и т. д. Такая детализированная теория, как теория Ландау, не всегда необходима для интерпретации эксперимента.

Из-за этих двух причин — недостатка общности и избытка информации — необходима другая формулировка, возможно менее претендующая на полноту, но позволяющая дать формальное описание соответствующих экспериментальных результатов для любой системы. Следующая глава посвящена построению этого формализма.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить спиновую восприимчивость (1.67) без помощи величины $\delta \bar{n}$, т. е. учитывая явно изменение энергии квазичастиц вследствие намагничивания.

2. Вычислить, начав с (1.92), импульс и энергию, переносимые одной квазичастицей с импульсом p .

3. Вычислить члены первого порядка в разложении амплитуды рассеяния $A_{pp'}$ (q, ω) по степеням qv_F/ω или ω/qv_F .

4. Вывести дисперсионное уравнение (1.128б) для нулевого звука.

5. Изучить поперечную коллективную моду ($m=1$), взяв приведенное взаимодействие $F_{pp'}$ в простейшей форме

$$F = F_0 + F_1 \cos \xi.$$

Найти спектр. Показать, что мода испытывает затухание Ландау, если условие $F_1 > 6$ не выполнено.

6. Вычислить с помощью простой модели, в которой величина $f_{pp'}$ постоянна, влияние затухания Ландау на амплитуду $A_{pp'}$ (q, ω).

7. Вывести по аналогии с вычислением теплопроводности выражение (1.174) для вязкости.

8. Вывести выражение (1.174) для коэффициента спиновой диффузии. Сначала получить вид интеграла столкновений для антисимметричных по спину явлений, который отличается от (1.150), затем вести расчет так же, как при нахождении теплопроводности.

9. Изучить переход от первого к нулевому звуку и затухание колебаний в двух предельных случаях. Для этого считать взаимодействие квазичастиц постоянным и равным F_0 и предположить, что интеграл столкновений можно записать в виде

$$I(n) = - \frac{[\delta \bar{n} - \delta \bar{n}_0 - \delta \bar{n}_1]}{\tau},$$

где n_0 и n_1 — компоненты n , соответствующие $l=0$ и $l=1$. Заметим, что этот вид автоматически обеспечивает выполнение законов сохранения числа и потока частиц при столкновениях. Тогда дисперсионное уравнение можно получить в замкнутой форме.

Литература

1. Balian R., de Dominicis C., *Physica*, **30**, 1927 (1964).
2. Ландау Л. Д., *ЖЭТФ*, **30**, 1058 (1956).
3. Пятаевский Л. П., *ЖЭТФ*, **37**, 1794 (1959).
4. Luttinger J. M., Nozières P., *Phys. Rev.*, **127**, 1423, 1431 (1962).
5. Hugenholtz N. M., Van Hove L., *Physica*, **24**, 363 (1958). (Имеется перевод в сб. «Вопросы квантовой теории многих тел», ИЛ, 1959.)
6. Simkin D., Ph D. Thesis, University of Illinois, 1963.
7. Kadanoﬀ L. P., Prange R. E., *Phys. Rev.*, **134**, A566 (1964).
8. Nozières P., *Theory of Interacting Fermi Systems*, New York, 1963.
9. Ландау Л. Д., *ЖЭТФ*, **16**, 574 (1946).
10. Померанчук Я. И., *ЖЭТФ*, **35**, 524 (1958).
11. Overhauser A., *Phys. Rev.*, **128**, 1437 (1962).
12. Абрикосов А. А., Халатников И. М., *УФН*, **66**, 177 (1958); *Rep. Progr. Phys.*, **22**, 329 (1959).
13. Morel P., Nozières P., *Phys. Rev.*, **126**, 1909 (1962).
14. Richards P. M., *Phys. Rev.*, **132**, 1867 (1963).
15. Anderson A. C., Salinger G. L., Steyert W. A., Wheatley J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **6**, 331 (1961).
16. Пешков В. П., *ЖЭТФ*, **48**, 997 (1965).
17. Abel W. R., Anderson A. C., Black W. L., Wheatley J. C., *Physics*, **1**, 337 (1965).
18. Wheatley J. C., *Proc. Sussex Symposium Quantum Fluids*, Amsterdam, 1966.
19. Anderson P. W., *Physics*, **2**, 1 (1965).
20. Balian R., Fredkin D. R., *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 480 (1965).
21. Кеоп В. Е., Matthews P. W., Wilks J., *Phys. Lett.*, **5**, 5 (1963).
22. Бекаревич И. Л., Халатников И. М., *ЖЭТФ*, **39**, 1699 (1960).
23. Gavoret J., *Phys. Rev.*, **137**, A721 (1965).
24. Anderson A. C., Coppolly J. I., Wheatley J. C., *Phys. Rev.*, **135**, A910 (1964).
25. Абрикосов А. А., Халатников И. М., *ЖЭТФ*, **41**, 544 (1961).
26. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Померанчук Я. И., *ЖЭТФ*, **41**, 644 (1961).

Реакция и корреляции в нейтральных системах

Любой эксперимент, проводимый с физической системой, заключается в возбуждении системы и последующем измерении ее реакции. Если взаимодействие с источником, возбуждения (внешняя сила или пробная частица) достаточно мало, реакция системы пропорциональна возмущению и полностью определяется свойствами самой системы. Следовательно, эксперименты со «слабым взаимодействием» являются идеальным методом изучения поведения многочастичной системы.

Реакция системы тесно связана с корреляциями, которые существуют между положениями и импульсами различных частиц, так что часто можно непосредственно измерить различные корреляционные функции. Кроме того, при определенных обстоятельствах корреляционные функции связаны со спектром элементарных возбуждений в многочастичной системе. Тогда от корреляционных функций можно перейти к определению спектра элементарных возбуждений и наоборот.

В настоящей главе мы изложим общую теорию линейной реакции и обсудим затем ее применения в различных физически интересных ситуациях. Такая теория по необходимости является несколько формальной. Тем не менее она чрезвычайно полезна, поскольку является точной и позволяет получить ряд точных результатов, имеющих большую практическую ценность. Еще более важно то обстоятельство, что теория развивает формализм, которым можно пользоваться при обсуждении как макро-, так и микросвойств квантовых жидкостей. В следующих главах мы часто будем использовать общую теорию, изложенную здесь, в основном потому, что этот формализм позволяет с единой точки зрения рассматривать все квантовые жидкости. Это единство часто затушевывается разнообразием математических методов.

Начнем с рассмотрения простого физического примера взаимодействия, а именно неупругого рассеяния пучка внешних частиц на нейтральной квантовой жидкости. В § 1 мы покажем, что таким образом измеряется динамический форм-фактор системы; в § 2 установим важное правило сумм, которому удовлетво-

рует эта величина. Общая теория линейной реакции излагается в § 3, где детально обсуждаются формальные особенности теории, лежащие в основе ее последующих применений. Все это рассмотрение относится к системе, находящейся в основном состоянии; в § 6 теория распространена на случай конечных температур.

В § 4 общая теория, развитая в § 1—3, применена к частному примеру, а именно к вопросу о корреляциях плотности в нейтральной ферми-жидкости. Качественно обсуждается динамический форм-фактор; для определения физически интересных длинноволновых возбуждений используется тесная связь, существующая между функциями реакции и спектром элементарных возбуждений в макроскопическом пределе при $T=0$. В § 5 с помощью теории Ландау вычисляется функция реакции, связанная с флуктуациями плотности; таким образом устанавливается связь с гл. 1.

Наконец, § 7 посвящен влиянию столкновений на реакцию системы. При конечных температурах, когда частота внешней силы уменьшается, имеет место переход от бесстолкновительного режима, при котором столкновения не играют роли, к гидродинамическому, при котором столкновения приводят к установлению локального равновесия. Общая теория линейной реакции, конечно, справедлива и в гидродинамическом режиме. Мы покажем, что в этом пределе функции реакции можно получить из чисто макроскопических соображений.

§ 1. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА РАССЕЯНИЯ

В качестве примера типично *микроскопического* исследования поведения системы рассмотрим сначала измерение *энергетического* и *углового* распределения в пучке неупруго рассеянных частиц. Примером может быть рассеяние медленных нейтронов в жидком ${}^4\text{He}$. В гл. 4 мы увидим, что подобные эксперименты можно выполнить и с заряженной электронной системой, изучая рассеяние быстрых электронов или неупругое рассеяние света.

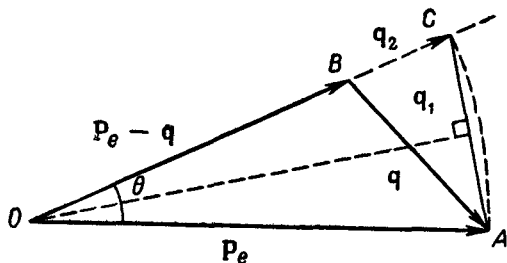
Рассмотрим падающую внешнюю частицу с массой M_e , импульсом \mathbf{P}_e и энергией $E_e = P_e^2/2M_e$. Частица рассеивается системой, которая по предположению первоначально находится в основном состоянии $|0\rangle$ с энергией E_0 . После столкновения внешняя частица имеет импульс $(\mathbf{P}_e - \mathbf{q})$, а система переходит в некоторое возбужденное состояние $|n\rangle$ с энергией E_n . Если система обладает трансляционной инвариантностью, то в силу закона

сохранения импульса состояние $|n\rangle$ имеет полный импульс \mathbf{q} . Кроме того, из закона сохранения энергии следует, что

$$\omega \equiv E_n - E_0 = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_e}{M_e} - \frac{q^2}{2M_e}. \quad (2.1)$$

Тогда столкновение можно характеризовать передачей от частицы к системе импульса \mathbf{q} и энергии ω ¹⁾.

Мы рассмотрим сначала геометрию процесса столкновения. Импульс внешней частицы до и после столкновения изображен



Фиг. 9. Связь между углом рассеяния, переданной энергией и переданным импульсом при неупругом рассеянии быстрой частицы с импульсом \mathbf{P}_e .

на фиг. 9. Мы видим, что переданный импульс $\mathbf{q} = \mathbf{BA}$ можно разбить на две части.

1) Часть $\mathbf{q}_1 = \mathbf{CA}$, которая отвечает упругому рассеянию и определяется углом рассеяния θ , согласно соотношению

$$\frac{q_1}{P_e} = 2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (2.2a)$$

2) Другая часть $\mathbf{q}_2 = \mathbf{BC}$, не связанная с углом рассеяния, определяет переданную энергию

$$\omega = q_2 \frac{P_e}{M_e} - \frac{q_2^2}{2M_e}. \quad (2.2b)$$

Эти соотношения упрощаются, если переданный импульс \mathbf{q} мал по сравнению с \mathbf{P}_e (при этом мал соответствующий угол рассеяния θ). В этом случае вектор \mathbf{q}_1 почти перпендикулярен импульсу \mathbf{P}_e , а вектор \mathbf{q}_2 почти параллелен ему. В первом порядке по \mathbf{q} имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{\perp} = P_e \theta, \\ q_2 &= q_{\parallel} = \frac{\omega M_e}{P_e}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

так что \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 совершенно не связаны.

¹⁾ В настоящей главе используется «атомная» система единиц, в которой $\hbar = 1$. Кроме того, предполагается, что система имеет единичный объем.

В эксперименте просто измерить угол отклонения θ . Гораздо сложнее получить переданную энергию ω . Последнюю можно определить, измеряя методом времени пролета скорость рассеянного нейтрона [1]. Измерив обе величины θ и ω , легко вычислить весь переданный импульс, модуль которого, как видно из фиг. 9, определяется соотношением

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (2.4)$$

В случае малого угла рассеяния, когда применимы соотношения (2.3), вместо (2.4) имеем

$$q = P_e \sqrt{\theta^2 + \left(\frac{\omega}{2E_e}\right)^2}. \quad (2.5)$$

ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМ-ФАКТОР

Предположим, что взаимодействие системы с пробной частицей описывается не зависящим от скорости потенциалом

$$H_{вз} = \sum_l \mathcal{V}(\mathbf{r}_l - \mathbf{R}_e), \quad (2.6)$$

где \mathbf{r}_l — координаты частиц системы, а \mathbf{R}_e — пробной частицы. В соотношении (2.6) удобно перейти к компонентам Фурье

$$H_{вз} = \sum_l \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{V}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_l - \mathbf{R}_e)} = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_e}, \quad (2.7)$$

где $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента потенциала $\mathcal{V}(\mathbf{r})$, а $\rho_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента плотности частиц

$$\rho_{\mathbf{q}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \sum_l \int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \sum_l e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_l}. \quad (2.8)$$

Величина $\rho_{\mathbf{q}}$ описывает флуктуации плотности частиц около среднего значения $\rho_0 = N$.

Перейдем теперь к теоретическому описанию процесса рассеяния, при котором пробная частица передает системе многих частиц импульс \mathbf{q} и энергию ω . Сделаем важное предположение, что пробная частица *слабо связана* с многочастичной системой, так что процесс рассеяния можно описывать в борновском приближении. Это приближение справедливо в упомянутых нами случаях, а именно при рассеянии медленных нейтронов или быстрых электронов. Вследствие слабости взаимодействия между пробной частицей и системой собственные функции пробной частицы до и после столкновения представляют собой просто плоские волны, соответствующие импульсам \mathbf{P}_e и $\mathbf{P}_e - \mathbf{q}$. Первона-

чальной волновой функцией многочастичной системы является точная волновая функция основного состояния $|0\rangle$. Матричный элемент перехода системы в точное возбужденное состояние $|n\rangle$ с импульсом \mathbf{q} есть [см. (2.7)]

$$\langle n, \mathbf{P}_e - \mathbf{q} | H_{\text{вз}} | 0, \mathbf{P}_e \rangle = \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \langle n | \rho_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle = \mathcal{V}_{\mathbf{q}} (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}. \quad (2.9)$$

Поскольку функция $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}$ предполагается известной, соотношение (2.9) зависит только от матричного элемента флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$, взятого по точным собственным состояниям многочастичной системы в отсутствие пробной частицы. Внешняя частица тогда играет роль зонда, позволяющего непосредственно измерить флуктуации плотности в системе.

Согласно теории возмущений, вероятность того, что в единицу времени частица передаст системе импульс \mathbf{q} и энергию ω , описывается выражением

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}), \quad (2.10)$$

где $\omega_{n0} = E_n - E_0$, а δ -функция выражает закон сохранения энергии. Суммирование проводится по всем состояниям $|n\rangle$, которые получаются при действии оператора флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$ на основное состояние $|0\rangle$. Применяя соотношение (2.10), важно помнить, что ω и \mathbf{q} не являются независимыми переменными, а связаны соотношением (2.1). Формально можно удовлетворить этому соотношению, умножая (2.10) на дополнительный множитель

$$\delta\left(\omega - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{P}_e}{M_e} + \frac{q^2}{2M_e}\right),$$

который обеспечивает сохранение энергии падающей частицы.

Вероятность перехода (2.10) можно записать в виде

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 S(\mathbf{q}, \omega), \quad (2.11)$$

где $S(\mathbf{q}, \omega)$ определяется соотношением

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}). \quad (2.12)$$

Функция $S(\mathbf{q}, \omega)$ отражает все свойства многочастичной системы, которые проявляются при рассеянии пробной частицы. Она называется динамическим форм-фактором системы. Форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ несет максимальную информацию о поведении системы, которую можно получить, изучая рассеяние частиц. Так как форм-фактор пропорционален квадрату матричного элемента для каждой возможной энергии возбуждения, то, зная его, мы можем определить спектр флуктуаций плотности. Заметим,

что функция $S(\mathbf{q}, \omega)$ действительна и положительна и обращается в нуль при $\omega < 0$, так как при $T=0$ все частоты возбуждений ω_{n0} положительны.

Динамический форм-фактор тесно связан с корреляциями плотности в многочастичной системе. Рассмотрим изменение во времени флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$. Их можно описать вектором состояния

$$\rho_{\mathbf{q}}^+(t)|0\rangle = e^{iHt}\rho_{\mathbf{q}}^+e^{-iHt}|0\rangle, \quad (2.13)$$

где H — полный гамильтониан системы. Динамическая корреляция между флуктуациями плотности в момент времени $t=0$ и в момент τ выражается корреляционной функцией

$$S(\mathbf{q}, \tau) = \langle 0|\rho_{\mathbf{q}}(\tau)\rho_{\mathbf{q}}^+(0)|0\rangle. \quad (2.14)$$

Используя (2.13) и вводя затем полный набор собственных состояний $|n\rangle$, мы можем записать (2.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \tau) &= \sum_n \langle 0|e^{iH\tau}\rho_{\mathbf{q}}e^{-iH\tau}|n\rangle \langle n|\rho_{\mathbf{q}}^+|0\rangle = \\ &= \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 e^{-i\omega_{n0}\tau}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Сравнивая (2.15) с (2.12), мы видим, что $S(\mathbf{q}, \omega)$ получается из $S(\mathbf{q}, \tau)$ в результате фурье-преобразования. Итак, динамический форм-фактор определяет корреляции между флуктуациями плотности в различные моменты времени, а также частотное распределение состояния $\rho_{\mathbf{q}}^+(t)|0\rangle$, т. е. его спектральную плотность.

СТАТИЧЕСКИЙ ФОРМ-ФАКТОР

В эксперименте по определению скорости рассеянных нейтронов методом времени пролета нельзя непосредственно измерить переданный импульс \mathbf{q} . Измеряемыми величинами являются угол отклонения θ и переданная энергия ω , по которым затем вычисляется \mathbf{q} . При этих условиях представляет интерес дифференциальное эффективное сечение $\mathcal{P}(\theta, \omega)d\Upsilon d\omega$ рассеяния частицы в телесный угол $d\Upsilon$ с потерей энергии в интервале $(\omega, \omega+d\omega)$:

$$\mathcal{P}(\theta, \omega)d\Upsilon = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)\delta\left(\omega - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_e}{M_e} + \frac{q^2}{2M_e}\right),$$

где суммирование проводится по тем значениям \mathbf{q} , для которых импульс рассеянной частицы лежит в пределах телесного угла

dY . Вычислить точно $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ довольно трудно. Однако если q много меньше P_e , то, используя (2.4), мы находим

$$\mathcal{P}(\theta, \omega) = \frac{P_e^2}{(2\pi)^3} \int dq_{\parallel} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\omega - q_{\parallel} V_e), \quad (2.16)$$

где V_e — скорость частицы. Переданный импульс \mathbf{q} есть функция θ и ω , определяемая в этом пределе выражением (2.5). Такой анализ был применен к рассмотрению рассеяния быстрых электронов в металлах (см. гл. 4, § 4).

В более общем случае, когда $q \sim P_e$, переход от $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ к $\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)$ несколько более сложен. Однако его можно осуществить, используя остроумную автоматическую процедуру, придуманную Брокхаузом [1]. Таким способом из экспериментов по рассеянию медленных нейтронов был найден динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ жидкого ${}^4\text{He}$.

Во многих случаях не удается определить энергию выходящих частиц — измеряется лишь дифференциальное сечение как функция угла рассеяния. Соответствующая вероятность есть

$$\mathcal{P}(\theta) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(\theta, \omega) d\omega.$$

Заменяя $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ выражением (2.16), можно найти $\mathcal{P}(\theta)$ интегрированием $\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)$ по частоте ω . В общем случае $\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)$ неявно зависит от ω через волновой вектор \mathbf{q} , что заметно усложняет это интегрирование. В наиболее общем случае нельзя разделить $\mathcal{P}(\theta)$ на два множителя, характеризующих соответственно пробную частицу и систему.

Ситуация значительно упрощается, когда переданный импульс \mathbf{q} фактически не зависит от переданной энергии ω в той области, где рассеяние наиболее значительно. В случае неупругого рассеяния это условие выполняется только при $q \ll P_e$, когда применимо соотношение (2.16). Используя (2.11) и (2.16), можно написать вероятность $\mathcal{P}(\theta)$ в виде

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{M_e P_e}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{M_e P_e}{(2\pi)^3} 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 N S_{\mathbf{q}}, \quad (2.17)$$

где $S_{\mathbf{q}}$ определяется равенством

$$S_{\mathbf{q}} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} d\omega S(\mathbf{q}, \omega). \quad (2.18)$$

Величина $S_{\mathbf{q}}$ называется *статическим форм-фактором* системы.

Рассмотрим более подробно условия применимости соотношения (2.17). Как мы уже отмечали, необходимым условием его

справедливости является $P_e \gg q$. Это условие будет выполняться для всех представляющих интерес переданных импульсов в том случае, если $P_e \gg p_F$. Как следует из (2.5), имеется и второе условие, состоящее в том, что $\theta \gg \omega/E_e$. Для трансляционно-инвариантной системы это условие легко удовлетворяется при малых q , так как соответствующая переданная энергия имеет порядок qv_F . При этих условиях последний член в (2.5) имеет порядок

$$\left[\frac{qv_F}{2E_e} \right]^2 = \left[\frac{q}{P_e} \frac{v_F}{V_e} \right]^2 \sim \theta^2 \left(\frac{v_F}{V_e} \right)^2. \quad (2.19)$$

Поскольку этот член мал по сравнению с θ^2 , величина q фактически не зависит от ω и равна $P_e\theta$; тогда форм-фактор S_q можно измерить непосредственно.

Если система не обладает трансляционной инвариантностью, переданная энергия может быть порядка химического потенциала μ даже при малых q . (Например, в реальных твердых телах падающая частица возбуждает междузонные переходы.) При этом последним членом в (2.5) можно пренебречь только в том случае, если θ много больше, чем $\mu/E_e \sim (p_F/P_e)^2$. Но, как мы видели, необходимо выполнение условия $p_F \ll P_e$. Таким образом, второе ограничение существенно только для самых малых значений θ .

Снова подчеркнем, что для любой системы простое соотношение (2.17) не выполняется, когда скорость частицы V_e сравнима с величиной v_F или меньше ее.

В соответствии с (2.18) величина NS_q равна фурье-компоненте $S(q, t)$, взятой при $t=0$. Действительно, непосредственно из соотношения (2.12) следует, что

$$NS_q = \langle 0 | \rho_q^+ \rho_q | 0 \rangle. \quad (2.20)$$

Следовательно, NS_q есть мера одновременных корреляций плотности в системе, т. е. среднего квадрата флуктуаций плотности. Не удивительно, что рассеяние *быстрой* частицы определяется только величиной S_q . Время, в течение которого быстрая частица проходит расстояние порядка радиуса взаимодействия, очень мало. С помощью такой частицы можно определять корреляции, временной масштаб которых мал по сравнению с характерным периодом системы.

§ 2. СОХРАНЕНИЕ ЧИСЛА ЧАСТИЦ. ПРАВИЛО f -СУММ

Законы сохранения играют чрезвычайно важную роль в теоретической физике, позволяя со всей строгостью проверить любое приближенное описание системы многих частиц. В этом

смысле наиболее простой и наиболее полезный закон — это закон сохранения числа частиц. Как мы увидим в гл. 4, § 6, закон сохранения числа частиц есть одновременно необходимое и достаточное условие градиентной инвариантности. Кроме того, он позволяет получить важное соотношение — правило f -сумм, которому должен удовлетворять динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$. В этом параграфе мы сначала установим закон сохранения числа частиц, а затем обсудим следующие из него выводы.

ФЛУКТУАЦИИ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЧАСТИЦ

Оператор, описывающий плотность потока частиц в точке \mathbf{r} , можно записать в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{p}_i}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{p}_i}{m} \right\}, \quad (2.21)$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{p}_i — координата и импульс i -й частицы в системе. Симметризация в (2.21) необходима, так как \mathbf{r}_i и \mathbf{p}_i не коммутируют. Фурье-преобразование $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ по \mathbf{r} дает

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{p}_i}{m} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \frac{\mathbf{p}_i}{m} \right\}. \quad (2.22)$$

Величина $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ представляет собой флуктуацию плотности потока с волновым вектором \mathbf{q} и является очевидным аналогом флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}$.

Ясно, что $\rho_{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ должны быть связаны уравнением непрерывности, которое выражает сохранение числа частиц в системе. Чтобы найти эту связь, вычислим коммутатор $[\rho_{\mathbf{q}}, H]$, где H — гамильтониан системы

$$H = \sum_i \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (2.23)$$

Здесь $U(\mathbf{r}_i)$ — внешний потенциал, в котором находятся частицы (например, периодический потенциал решетки металла), $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ — потенциал взаимодействия между парами частиц. Сделаем важное предположение, что U и V не зависят от скорости, а зависят только от координат \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j (и, возможно, от спина). Тогда плотность $\rho_{\mathbf{q}}$, которая зависит только от координат, коммутирует с потенциалом и с членами, описывающими взаимодействие. Единственный вклад в коммутатор вносит кинетическая энергия. Мы находим

$$[\rho_{\mathbf{q}}, H] = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_i}{m} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_i}{m} \right\} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}. \quad (2.24)$$

Соотношение (2.24) и выражает искомый закон сохранения. Подчеркнем, что оно справедливо, если U и V не зависят от скорости. Если это условие не выполнено, физический поток уже не описывается соотношением (2.21), а закон сохранения имеет другую форму.

Чтобы установить явную связь (2.24) с законом сохранения числа частиц, запишем $\rho_{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ в гейзенберговском представлении. Тогда мы получим уравнение

$$\frac{\partial \rho_{\mathbf{q}}}{\partial t} = i[\rho_{\mathbf{q}}, H] = -i\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}, \quad (2.25)$$

которое представляет собой результат фурье преобразования по координатам известного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) обеспечивает сохранение числа частиц. Операторное соотношение (2.24) принимает простую форму, если мы перейдем к матричным элементам по собственным состояниям реальной системы

$$\omega_{n0}(\rho_{\mathbf{q}})_{n0} = -[\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}]_{n0}. \quad (2.27)$$

Теперь мы используем (2.27) для получения правила f-сумм

ПРАВИЛО f СУММ

Динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ удовлетворяет следующему правилу сумм:

$$\int_0^{\infty} \omega S(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{Nq^2}{2m}, \quad (2.28)$$

где N — число частиц в системе и m — масса голой частицы. Используя определение (2.12) форм-фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$, мы можем переписать (2.28) в виде

$$\sum_n \omega_{n0} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 = \frac{Nq^2}{2m}. \quad (2.29)$$

Обычно для каждого перехода из основного состояния $|0\rangle$ в возбужденное $|n\rangle$ вводят «силу осциллятора»

$$f_{0n} = \frac{2m}{q^2} \omega_{n0} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2. \quad (2.30)$$

С помощью этого определения можно записать правило сумм (2.29) следующим образом:

$$\sum_n f_{0n} = N. \quad (2.31)$$

В этой форме оно известно под названием *правила f-сумм*.

Правило *f-сумм* эквивалентно известному правилу сумм для атомных спектров. В форме (2.31) оно впервые было получено Плачеком [2]. Мы следуем здесь выводу, данному авторами настоящей книги [3].

Вычислим двойной коммутатор

$$[[\rho_q, H], \rho_q^+]. \quad (2.32)$$

Используя (2.24), можно представить (2.32) в виде

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_q, \rho_q^+]. \quad (2.33)$$

Коммутатор (2.33) легко вычислить, обращаясь к выражениям (2.8) и (2.22) для ρ_q^+ и \mathbf{J}_q . Находим

$$[[\rho_q, H], \rho_q^+] = \frac{Nq^2}{m}. \quad (2.34)$$

С другой стороны, используя полный набор $|n\rangle$ собственных состояний гамильтониана H , можно найти среднее значение (2.33) в основном состоянии $|0\rangle$. С помощью (2.27) получаем

$$\langle 0 | [[\rho_q, H], \rho_q^+] | 0 \rangle = \sum_n \{ \omega_{n0} |(\rho_q^+)_{n0}|^2 + \omega_{n0} |(\rho_q)_{n0}|^2 \}. \quad (2.35)$$

Воспользуемся теперь инвариантностью относительно обращения времени, которая позволяет каждое состояние $|n\rangle$ с импульсом \mathbf{q} связать с другим состоянием $|m\rangle$, имеющим ту же энергию, что и $|n\rangle$, импульс — \mathbf{q} и комплексно сопряженную волновую функцию. Мы можем написать

$$\sum_n \omega_{n0} |(\rho_q^+)_{n0}|^2 = \sum_m \omega_{m0} |(\rho_q)_{m0}|^2. \quad (2.36)$$

Поэтому соотношение (2.35) принимает простой вид

$$\langle 0 | [[\rho_q, H], \rho_q^+] | 0 \rangle = \sum_n 2\omega_{n0} |(\rho_q^+)_{n0}|^2. \quad (2.37)$$

Сравнивая (2.34) и (2.37), сразу получаем правило *f-сумм*.

Согласно соотношению (2.28), правило *f-сумм* определяет первый момент динамического форм-фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$. В этом смысле оно дополняет определение статического форм-фактора

$$NS_q = \int_0^\infty S(\mathbf{q}, \omega) d\omega, \quad (2.18)$$

которое дает среднее значение $S(q, \omega)$. Заметим, что S_q можно выразить через силы осцилляторов

$$NS_q = \sum_n |(p_q^+)_{n0}|^2 = \frac{q^2}{2m} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{n0}}. \quad (2.38)$$

Подчеркнем, что правило f -сумм является прямым следствием закона сохранения числа частиц в системе и представляет собой формулировку этого закона. Выполнение правила сумм необходимо для градиентной инвариантности теории, о чем мы еще будем говорить подробно в гл. 4, § 6. Правило f -сумм — очень полезная проверка согласованности любой приближенной теории. Может случиться, что правило f -сумм выполняется уже для некоторого набора возбужденных состояний. Это означает, что другие возбужденные состояния имеют пренебрежимо малую силу осцилляторов. В гл. 4 мы увидим, что закон сохранения числа частиц и правила сумм позволяют иногда непосредственно вычислить частоты коллективной моды в длинноволновом пределе.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ БЫСТРОЙ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим снова в борновском приближении рассеяние внешней пробной частицы в системе. Такое рассеяние характеризуется вероятностью $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ того, что частица отклонится на угол θ и передаст системе энергию ω . Если переданный импульс q мал по сравнению с импульсом пробной частицы P_e , вероятность $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ описывается соотношением (2.16). Скорость передачи энергии от пробной частицы, рассеянной под углом θ , к системе равна

$$\frac{dE(\theta)}{dt} = \int_0^\infty \mathcal{P}(\theta, \omega) \omega d\omega = \frac{P_e M_e}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathcal{P}(q, \omega) \omega d\omega. \quad (2.39)$$

Как уже отмечалось в § 1, интеграл в (2.39) довольно сложен, поскольку q обычно зависит от θ и ω . Однако мы видели, что для достаточно быстрой частицы импульс q фактически не зависит от ω , будучи равен $P_e \theta$. Используя соотношение (2.11) и правило f -сумм (2.38), мы можем тогда написать

$$\frac{dE(\theta)}{dt} = \frac{P_e M_e}{(2\pi)^3} 2\pi |\mathcal{V}_q|^2 \frac{Nq^2}{2m}. \quad (2.40)$$

Соотношение (2.40) не зависит от деталей свойств рассматриваемой многочастичной системы. Этот, возможно, неожиданный результат показывает, насколько полезно правило f -сумм.

Интегрируя (2.40) по всем направлениям, находим полную энергию, теряемую пробной частицей в системе за единицу времени. Для малых углов рассеяния θ элемент телесного угла можно записать следующим образом:

$$d\Upsilon = 2\pi\theta d\theta.$$

Заменим θ через q с помощью соотношения $q = P_e\theta$. Используя (2.40), получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\pi V_e} \int_0^{\infty} \frac{Nq^3}{2m} |\mathcal{V}_q|^2 dq. \quad (2.41a)$$

Энергетические потери обычно относят к единице пути, пройденного частицей

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{V_e} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\pi V_e^2} \int_0^{\infty} \frac{Nq^3}{2m} |\mathcal{V}_q|^2 dq. \quad (2.41b)$$

Выражения (2.41a) и (2.41b) для энергетических потерь быстрых частиц много лет назад были получены Бете. Отметим, что взаимодействие между частицами не меняет их. Ввиду этого измерение энергетических потерь дает нам мало сведений о свойствах системы.

§ 3. ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕАКЦИИ

В § 1 мы изучали реальные переходы в многочастичной системе, вызванные посторонней пробной частицей, которая играла роль внешней силы. Такие переходы соответствуют *необратимым диссипативным* процессам. Кроме реальных процессов, внешняя сила может вызывать виртуальные переходы. Такие переходы представляют собой обратимую деформацию системы, соответствующую ее «поляризации» внешней силой. Ситуация аналогична той, которая имеет место в электрических контурах, где реакция на внешний потенциал складывается из диссипативной и реактивной частей. Полное описание реакции системы на внешнюю силу оказывается несложным, когда связь системы с внешней силой слаба. При этих условиях реакция системы линейна и ее можно вычислять последовательным применением завышающей от времени теории возмущений.

В наиболее общем случае сила действует на некоторую физическую величину A (плотность, ток, спиновая плотность и т. д.). Необходимо вычислить линейную реакцию некоторой другой величины B . Реакцию удобно описывать с помощью *функции реакции* $B - A$. Первая буква обозначает измеряемую величину,

вторая определяет форму связи между внешней силой и системой. В этом параграфе мы ограничимся одним частным примером, именно *функцией реакции плотность — плотность*, которая описывает флуктуации плотности, вызванные изменением плотности. Большая часть полученных здесь результатов легко переносится на другие функции реакции.

РЕАКЦИЯ НА СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$, который действует на плотность системы посредством гамильтониана взаимодействия

$$H_e = \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\mathbf{q}}^+ \varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.42)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{q}, \omega)$ — фурье-компонента $\varphi(\mathbf{r}, t)$ по координатам и времени. Так как возмущение действительно, то

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \varphi^*(-\mathbf{q}, -\omega). \quad (2.43)$$

Примером скалярного потенциала может быть взаимодействие с частицей со скоростью \mathbf{V}_e и координатами \mathbf{R}_e , рассеяние которой мы изучали в § 1. Если пренебречь отдачей рассеянных частиц, то соответствующий потенциал равен

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi \mathcal{V} \rho_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_e} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (2.44)$$

Будем считать внешний потенциал φ очень слабым, так что в хорошем приближении можно рассматривать только линейную реакцию системы на возмущение (2.42). При этих условиях каждая фурье-компонента возмущения (2.42) действует независимо. Данная компонента $\varphi(\mathbf{q}, \omega)$ вызывает в системе соответствующую флуктуацию плотности, характеризуемую волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω . Не теряя общности, мы можем ограничиться рассмотрением единственной компоненты в (2.42). Поскольку должно выполняться условие (2.43), рассмотрим возмущение вида

$$H_e = \rho_{\mathbf{q}}^+ \varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.}, \quad (2.45)$$

соответствующее бегущей волне с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω .

При использовании взаимодействия типа (2.45) возникают две трудности. Во-первых, оно существует от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ — ситуация, которая, конечно, нефизична. Во-вторых, возмущение с конечной частотой ω вызывает в системе реальные переходы, т. е. приводит к передаче энергии системе. Как бы ни было мало

возмущение, за достаточно большой интервал времени система «разогреется» в такой степени, что деформацию системы уже нельзя будет считать малой. В этом случае нелинейные эффекты будут играть существенную роль.

Эти трудности можно обойти правильным выбором граничных условий. Здесь мы примем «адиабатические» граничные условия, которые соответствуют *очень медленному* включению взаимодействия H_e . Математически это можно учесть, умножив H_e на $e^{\eta t}$, где η — очень малая положительная величина. Ясно, что эта процедура имеет смысл только в том случае, когда система *устойчива*. В противоположном случае системе нельзя предоставлять возможность эволюционировать в течение неограниченного интервала времени. Так, данное обсуждение неприменимо к изучению неустойчивых нарастающих волн (например, колебаний в лазерах).

Как мы увидим ниже, адиабатическое граничное условие обеспечивает *причинность* реакции: реакция системы следует (во времени) за возмущением. Качественно энергия, переданная системе, пропорциональна квадрату потенциала Φ_q^2 , а время установления возмущения есть $1/\eta$. Таким образом, энергия, передаваемая системе, пропорциональна Φ_q^2/η , где Φ_q и η — малые величины. Нагревания системы не происходит, если мы сначала устремим к нулю потенциал Φ , а затем скорость адиабатического включения η . Другими словами, при вычислении линейной реакции мы должны считать η конечной величиной и полагать $\eta \rightarrow 0$ только в самом конце вычислений.

Средняя флуктуация плотности в момент t , вызванная в системе возмущением (2.45), описывается соотношением

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \rho_{\mathbf{q}} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.46)$$

где $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ — точная волновая функция системы при наличии возмущения. Так как возмущение периодически во времени, мы можем написать

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle e^{-i\omega t} e^{\eta t}, \quad (2.47)$$

где фурье-компонента $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ вычисляется следующим образом:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \rho_{\mathbf{q}} e^{i\omega t} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle e^{-\eta t}. \quad (2.48)$$

Фурье-компоненту $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$, которая характеризует реакцию системы, можно выразить через величину

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{\Phi(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (2.49)$$

называемую *функцией реакции плотности* — *плотность*.

Мы увидим, что χ зависит только от свойств системы в отсутствие возмущения. Заметим, что если χ зависит от \mathbf{q} и ω , то реакция на возмущение не локализована в пространстве и времени. В этом случае потенциал, действующий в точке \mathbf{r} в момент t , приводит к изменению плотности в некоторой другой точке \mathbf{r}' в более поздний момент времени t' . Для трансляционно-инвариантных систем, которые мы рассматриваем, реакция зависит лишь от $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ и $t' - t$.

Вычислим теперь $\chi(\mathbf{q}, \omega)$. Так как нас интересует только линейная реакция системы, достаточно рассмотреть гамильтониан (2.45) в первом порядке теории возмущений. Волновая функция системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H + H_e) |\psi(t)\rangle, \quad (2.50)$$

где H — гамильтониан системы (2.23), H_e — взаимодействие (2.45). Уравнение (2.50) нужно решать со следующим граничным условием, обеспечивающим причинность: при $t \rightarrow -\infty$ система находится в своем основном состоянии $|0\rangle$.

В соответствии с обычным методом теории возмущений разложим $|\psi(t)\rangle$ по различным собственным состояниям $|n\rangle$ гамильтониана H , имеющим энергию E_n :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle. \quad (2.51)$$

Наше граничное условие соответствует требованию

$$a_n(-\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Подставляя (2.51) в (2.50) и сохраняя только члены первого порядка по φ , находим после простого интегрирования

$$a_n(t) = \begin{cases} (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} \varphi(\mathbf{q}, \omega) \\ \omega - \omega_{n0} + i\eta \end{cases} e^{(-i\omega + i\omega_{n0} + \eta)t} - \begin{cases} (\rho_{\mathbf{q}})_{n0} \varphi^+(\mathbf{q}, \omega) \\ \omega + \omega_{n0} - i\eta \end{cases} e^{(i\omega + i\omega_{n0} + \eta)t} \quad (n \neq 0), \quad (2.53)$$

где $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ и ω_{n0} имеют тот же смысл, что и в § 2 [см. (2.27)]. Среднее $\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle$ получается затем с помощью (2.46). В первом порядке по возмущению имеем

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \sum_n \{ (\rho_{\mathbf{q}})_{0n} a_n(t) e^{-i\omega_{n0} t} + a_n^+(t) (\rho_{\mathbf{q}})_{n0} e^{i\omega_{n0} t} \}, \quad (2.54)$$

так как величина $\langle 0 | \rho_{\mathbf{q}} | 0 \rangle$ обращается в нуль для трансляционно-инвариантной системы. Подставим (2.53) в (2.54). После-

дующее вычисление сильно упрощается, если заметить, что членов, содержащих произведения $(\rho_q)_{0n}(\rho_q)_{n0}$ или $(\rho_q^+)_{0n}(\rho_q^+)_{n0}$, быть не может, так как состоянию $|n\rangle$ в первом случае соответствует импульс $-q$, во втором — импульс $+q$. В результате находим

$$\langle \rho(q, t) \rangle = \varphi(q, \omega) e^{(-i\omega + \eta)t} \sum_n \left\{ \frac{|(\rho_q^+)_{n0}|^2}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{|(\rho_q)_{n0}|^2}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\}. \quad (2.55)$$

Используя (2.47) и инвариантность относительно обращения времени [см. (2.36)], можно написать

$$\langle \rho(q, \omega) \rangle = \varphi(q, \omega) \sum_n |(\rho_q^+)_{n0}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\}, \quad (2.56)$$

откуда получаем функцию реакции (2.49)

$$\chi(q, \omega) = \sum_n |(\rho_q^+)_{n0}|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2}. \quad (2.57)$$

Это и есть искомый результат.

Формулы, связывающие функцию линейной реакции с точными волновыми функциями системы, впервые были получены Кубо [4, 5]. Этот весьма общий метод позволяет найти не только функцию реакции плотность — плотность. Таким способом можно рассмотреть векторное возмущение, скажем, действие электромагнитного поля на систему заряженных частиц. В этом случае представляет интерес поток, вызванный возмущением, и по аналогии с (2.49) мы приходим к определению «тензора реакции поток — поток». Этот тензор мы рассмотрим в гл. 4.

СВЯЗЬ $\chi(q, \omega)$ С ДИНАМИЧЕСКИМ ФОРМ-ФАКТОРОМ

Сравним выражение (2.57) с определением (2.12) динамического форм-фактора $S(q, \omega)$. Мы видим, что χ можно записать в виде

$$\chi(q, \omega) = \int_0^\infty d\omega' S(q, \omega') \left\{ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega' + i\eta} \right\}. \quad (2.58)$$

Поэтому, зная $S(q, \omega)$, можно вычислить функцию реакции. Динамический форм-фактор является спектральной плотностью функции реакции плотность — плотность.

При $\omega \rightarrow \infty$ мы можем разложить выражение, стоящее в скобках в (2.58); тогда

$$\chi(q, \omega) \rightarrow \frac{2}{\omega^2} \int_0^\infty S(q, \omega') \omega' d\omega'. \quad (2.59)$$

Сравнивая (2.59) с правилом \hat{f} -сумм (2.28), мы видим, что

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow \frac{Nq^2}{m\omega^2} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (2.60)$$

Таким образом, взаимодействие между частицами системы не влияет на асимптотическую форму χ .

Выделим в χ действительную и мнимую части

$$\chi = \chi' + i\chi''.$$

Используя соотношение

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - a + i\eta} = P \frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a), \quad (2.61)$$

где P — символ главного значения, находим

$$\chi'(\mathbf{q}, \omega) = \int_0^{\infty} d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') P\left(\frac{2\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}\right), \quad (2.62)$$

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi \{S(\mathbf{q}, \omega) - S(\mathbf{q}, -\omega)\}. \quad (2.63)$$

Таким образом χ' — четная функция ω , а χ'' — нечетная.

Полученные соотношения не вызывают удивления. Мы знаем, что форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ характеризует *реальные* переходы, происходящие в системе под действием внешней силы, т. е. определяет энергию, переданную системе. Такие диссипативные процессы описываются мнимой частью функции реакции, подобно тому как диэлектрические потери описываются мнимой частью диэлектрической проницаемости (действительная часть χ соответствует обратимой «реактивной» реакции). Вместе с тем совершенно не очевидно, что связь между S и χ'' должна описываться таким простым соотношением, как (2.63). В действительности соотношение (2.63) справедливо только при $T=0$. Мы увидим в § 6, что при конечных температурах связь между S и χ'' оказывается более сложной.

Чтобы показать связь между χ'' и диссипацией энергии, вычислим энергию, переданную системе за единицу времени. Скалярный потенциал (2.45) порождает силовое поле

$$\mathfrak{F}(t) = -i\mathbf{q}\varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \text{Компл. сопр.} \quad (2.64)$$

Это силовое поле вызывает средний поток частиц, фурье-компонента которого равна $\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$. Энергия, полученная системой за единицу времени, определяется соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{F} \cdot \langle \mathbf{J} \rangle = \{-i\mathbf{q}\varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \text{Компл. сопр.}\} \times \\ \times \{\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \text{Компл. сопр.}\}, \quad (2.65)$$

где член, осциллирующий с частотой 2ω , соответствует обратимой деформации системы. Другой член

$$-i\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{J}^+(\mathbf{q}, \omega) \rangle \varphi(\mathbf{q}, \omega) + \text{Компл. сопр.}$$

соответствует стационарной передаче энергии. Вместо того, чтобы вычислять $\langle J(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ явно, воспользуемся законом сохранения числа частиц (2.26), перейдя к фурье-компонентам

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)) = \omega (\rho(\mathbf{q}, \omega)). \quad (2.67)$$

Используя (2.67) и определение (2.49) величины χ , приведем (2.66) к виду

$$-i\omega |\varphi(\mathbf{q}, \omega)|^2 \chi^+(\mathbf{q}, \omega) + \text{Компл. сопр.} = -2\omega |\varphi(\mathbf{q}, \omega)|^2 \chi''(\mathbf{q}, \omega). \quad (2.68)$$

Как мы и предполагали, энергия, стационарно передающаяся системе, связана только с χ'' . Заменяя величину χ'' ее выражением (2.63) (и предполагая $\omega > 0$), находим

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi\omega |\varphi(\mathbf{q}, \omega)|^2 S(\mathbf{q}, \omega). \quad (2.69)$$

Уравнение (2.69) эквивалентно нашему прежнему результату (2.11), к которому оно сводится, если заменить потенциал φ его значением (2.44), соответствующим одной падающей частице.

Поскольку между $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ и $S(\mathbf{q}, \omega)$ существует связь, величина χ , очевидно, не может содержать больше физической информации, чем S . Зная одну величину, мы можем вычислить другую. Можно ли считать одну из них более важной, чем другая? При $T=0$ физическую информацию в более компактном виде дает форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$. Он определяет спектр возбуждений флуктуации плотности в виде функции, положительно определенной на действительной положительной полуоси. С помощью (2.63) мы можем перейти от S к χ'' . Таким образом, выбор между S и χ'' является фактически делом вкуса. Вместе с тем мы увидим в § 6, что при конечных температурах удобнее пользоваться величиной χ'' (в основном потому, что она меньше зависит от температуры). Поэтому при обсуждении поведения системы при конечных температурах мы будем чаще применять $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$.

ПРИЧИННОСТЬ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Адиабатическое граничное условие, использованное при определении функции реакции, эквивалентно замене действительной частоты ω комплексной частотой $(\omega + i\eta)$. Тогда частота, описывающая точную временную зависимость внешней силы, лежит в верхней полуплоскости комплексной переменной ω бесконечно близко к действительной оси. Другими словами, действительную ось надо рассматривать как часть верхней полуплоскости.

На практике часто представляет интерес самопроизвольный распад возбужденного состояния, характеризуемого частотой $(\omega_q - i\Gamma_q)$, которая лежит в нижней полуплоскости комплексной переменной ω . На первый взгляд функция реакции, которая

определена в верхней полуплоскости ω , не слишком полезна в этом отношении. Чтобы достичь удовлетворительного понимания явления затухания, нам надо поэтому распространить определение $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ и на нижнюю полуплоскость ω . Следовательно, нужно изучить аналитическую структуру $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ как функцию комплексной переменной ω .

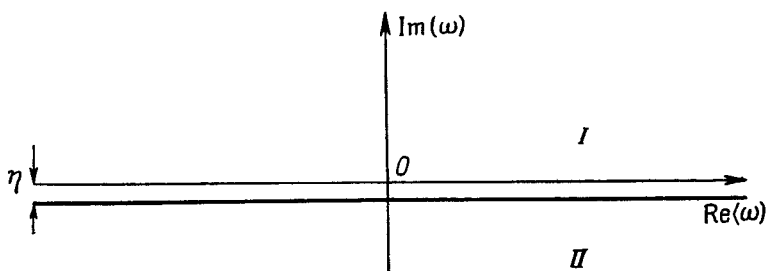
Из соотношения (2.57) видно, что $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ имеет бесконечное число полюсов, расположенных в комплексной плоскости ω при

$$\omega = \pm \omega_{n0} - i\eta. \quad (2.70)$$

Обычно спектр возбужденных состояний $|n\rangle$, в которые переходит система из основного состояния $|0\rangle$ под действием внешней силы, состоит из двух частей:

1) континуум, получаемый возбуждением индивидуальных частиц;

2) дискретное состояние, получаемое возбуждением коллективной моды с волновым вектором \mathbf{q} .



Фиг. 10. Разрез в комплексной плоскости ω для функции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$.

Непрерывная часть спектра возбуждений обуславливает разрез, проведенный с любой стороны от начала немного ниже действительной оси, как показано на фиг. 10. Долгоживущим коллективным модам соответствуют дискретные полюсы, также расположенные ниже действительной оси.

Функция $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ аналитична по отдельности в двух областях (обозначенных через I и II на фиг. 10) комплексной плоскости ω , расположенных с той и другой стороны от разреза. В частности, функция χ аналитична в верхней полуплоскости ω , включая действительную ось, которая полностью содержится в области I. Как мы вскоре увидим, это свойство тесно связано с причинностью. Функции χ_I и χ_{II} не равны на разрезе, где они удовлетворяют соотношению

$$\chi_I(\omega) = [\chi_{II}(\omega)]^*, \quad (2.71)$$

которое можно проверить, используя (2.57). Согласно (2.71), функция реакции имеет на разрезе скачок

$$\chi_I - \chi_{II} = 2i \operatorname{Im} \chi_I. \quad (2.72)$$

Сравнивая (2.72) с (2.63), мы видим, что скачок χ связан с динамическим форм-фактором S .

Как уже отмечалось выше, изучая поведение $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ в нижней полуплоскости, можно получить информацию о затухании возбудений. Этого нельзя сделать с помощью $\chi_{II}(\omega)$, так как здесь эта функция аналитична. Наоборот, функция, полученная аналитическим продолжением χ_I в нижнюю полуплоскость, отличается от χ_{II} и здесь неаналитична. Так как функция χ_{II} аналитична, χ_I имеет те же полюсы, что и разность $\chi_I - \chi_{II}$, т. е. что и $S(\mathbf{q}, \omega)$. Затухающая коллективная мода обуславливает появление широкого пика в S , расположенного при $\omega = \omega_q$ и имеющего ширину Γ_q . Соответственно этому действительная функция $S(\mathbf{q}, \omega)$ имеет два комплексно сопряженных полюса при $\omega = \omega_q \pm \pm i\Gamma_q$. Следовательно, при продолжении χ_I в нижнюю полуплоскость надо ожидать возникновения полюса при $\omega = \omega_q - i\Gamma_q$. Таким образом, мы доказали законность процедуры, использованной в гл. 1, § 7 для изучения затухания Ландау коллективных мод.

Применим метод контурного интегрирования для вычисления фурье-компоненты от $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ по времени

$$\chi(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.73)$$

При $t < 0$ мы можем замкнуть контур интегрирования на бесконечности полуокружностью C , лежащей *выше* действительной оси, как показано на фиг. 11. Так как функция χ аналитична в верхней полуплоскости и стремится к нулю на бесконечности, интеграл (2.73) обращается в нуль. Тогда мы имеем

$$\chi(\mathbf{q}, t) = 0, \text{ если } t < 0. \quad (2.74)$$

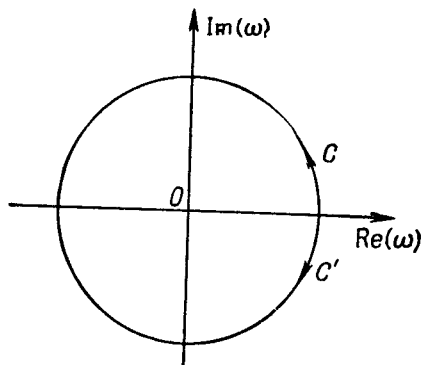
Если $t > 0$, необходимо замкнуть контур полуокружностью C' , лежащей *ниже* действительной оси (см. фиг. 11). В этом случае контур интегрирования пересекает разрез, так что теорема Коши неприменима — функция χ уже не равна нулю.

Согласно определению (2.49), $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ представляет реакцию на скалярный потенциал, который не зависит от \mathbf{q} или ω ¹⁾:

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \text{const.} \quad (2.75)$$

¹⁾ Во избежание путаницы отметим, что $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ авторы называют реакцией (response), а $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ — функцией реакции (response function). — *Прим. ред.*

Выполняя фурье-преобразование по времени, можно видеть, что возмущение (2.75) соответствует импульсу в виде δ -функции, приложенному при $t=0$. Тогда $\chi(\mathbf{q}, t)$ представляет реакцию системы на этот импульс. Наш результат (2.74) поэтому означает, что реакция системы *следует* за возбуждением, приложенным при $t=0$. Другими словами, наша система удовлетворяет *требованию причинности* — искажения возникают только *после* приложения возмущения. Свойство причинности, очевидно, непосредственно вытекает из аналитичности χ в верхней полуплоскости ω ; иначе говоря, эти два утверждения эквивалентны. С физической точки зрения ясно, что требование причинности должно



Фиг. 11. Контуры интегрирования, используемые при нахождении фурье-компоненты функции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$.

выполняться. Именно для того, чтобы получить «причинную теорию», мы выбрали те адиабатические граничные условия, которые используются в настоящем параграфе

Обратимся теперь к другому следствию аналитичности функции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$. Рассмотрим интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{\chi(\mathbf{q}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = 0. \quad (2.76)$$

Контур Γ показан на фиг. 12. Интеграл (2.76) равен нулю, так как функция χ аналитична внутри Γ . Мы можем выделить вклады от трех участков контура Γ . Прежде всего, интеграл по большой полуокружности обращается в нуль, так как на бесконечности функция χ пропорциональна $1/\omega^2$. Остаются два члена: интеграл по двум отрезкам действительной оси (который по определению представляет собой главное значение интеграла от $-\infty$ до $+\infty$) и интеграл по малой полуокружности вокруг точки ω ,

который равен $i\pi\chi(\mathbf{q}, \omega)$. Таким образом, мы приходим к соотношению

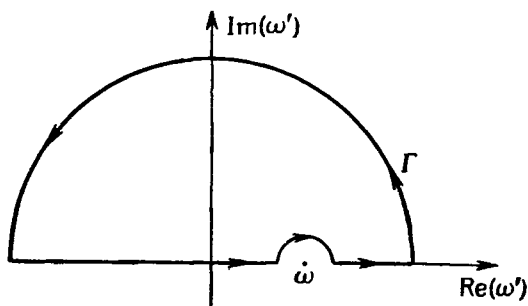
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\mathbf{q}, \omega') P\left(\frac{1}{\omega - \omega'}\right) d\omega' + i\pi\chi(\mathbf{q}, \omega) = 0. \quad (2.77)$$

Снова выделим в χ действительную χ' и мнимую χ'' части. Взяв действительную и мнимую части соотношения (2.77), получим

$$\chi'(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi''(\mathbf{q}, \omega') P\left(\frac{1}{\omega - \omega'}\right) d\omega', \quad (2.78a)$$

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi'(\mathbf{q}, \omega') P\left(\frac{1}{\omega - \omega'}\right) d\omega'. \quad (2.78b)$$

Это известные соотношения Крамерса — Кронига [6, 7]. Мы видим, что они являются прямым следствием причинного характера реакции системы. Их можно было бы вывести непосредственно, используя явное выражение (2.57) для χ . [Действительно,



Ф и г. 12. Контур интегрирования, используемый при доказательстве соотношений Крамерса — Кронига.

соотношение (2.78a) можно сразу же получить, сравнивая соотношения (2.62) и (2.63).] Вообще все свойства функции линейной реакции содержатся в выражении (2.57) и могут быть получены без какого-либо дополнительного сложного математического анализа.

Соотношения (2.78) связывают $\chi'(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Если мы можем измерить при всех частотах одну из этих величин, то затем можно вычислить другую. Такое соотношение выполняется для любой функции реакции. Поэтому соотношения Крамер-

са — Кронига имеют очень большую практическую ценность (особенно в оптике). В дальнейшем мы будем часто ими пользоваться.

ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ СЖИМАЕМОСТИ

В *длинноволновом пределе* функция статической реакции $\chi(\mathbf{q}, 0)$ характеризует реакцию плотности системы на статическое силовое поле, которое слабо меняется в пространстве. Поэтому она должна быть связана с *сжимаемостью* системы. Связь легко установить, рассматривая *макроскопическое* описание реакции системы на скалярный потенциал, определяемый соотношением (2.42).

Поле сил, соответствующее потенциалу, описывается соотношением (2.64). При нулевой частоте оно принимает вид

$$\mathfrak{F}(\mathbf{r}) = -i\mathbf{q}\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{Компл. сопр.}, \quad (2.79)$$

где $\mathfrak{F}(\mathbf{r})$ — сила, испытываемая *одной* частицей. Если эта сила очень мало изменяется на атомных расстояниях (т. е. если $qr_0 \ll 1$, где r_0 — межатомное расстояние), то мы можем определить среднюю силу, действующую на единицу объема системы. Последняя равна $\rho\mathfrak{F}(\mathbf{r})$; ее можно заменить на $N\mathfrak{F}(\mathbf{r})$ с точностью до членов более высокого порядка по q . Эта сила, продольная по своей природе, стремится деформировать систему, создавая в ней флуктуации плотности $\delta\rho(\mathbf{r})$.

Флуктуация плотности $\delta\rho(\mathbf{r})$ вызывает дополнительное давление

$$\delta P(\mathbf{r}) = \frac{1}{\kappa N} \delta\rho(\mathbf{r}), \quad (2.80)$$

где κ — макроскопическая сжимаемость. Величина $\delta P(\mathbf{r})$ такова, что соответствующая сила $-\nabla P$ компенсирует внешнюю силу. Поэтому при равновесии имеем

$$N\mathfrak{F} - \nabla P = 0. \quad (2.81)$$

Используя (2.79) — (2.81), получаем

$$\delta\rho = -N^2\kappa\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{Компл. сопр.} \quad (2.82)$$

Соотношение (2.82) устанавливает требуемую связь между макроскопическим и микроскопическим описаниями реакции системы. Сравнивая (2.82) с (2.49), мы видим, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\mathbf{q}, 0) = -N^2\kappa. \quad (2.83)$$

В соотношении (2.83) величину χ можно заменить (изотермической) скоростью первого звука s . Используя соотношение (1.49), находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{ms^2}. \quad (2.84)$$

С помощью (2.62) мы можем записать (2.84) в виде правила сумм, которому удовлетворяет динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$. Имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{N}{2ms^2}. \quad (2.85)$$

Соотношение (2.85) известно под названием *правила сумм для сжимаемости*. Оно определяет еще один момент форм-фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$ в длинноволновом пределе.

Правило сумм для сжимаемости (2.85) справедливо лишь в тех случаях, когда $\chi(\mathbf{q}, 0)$ не обнаруживает заметной зависимости от \mathbf{q} , т. е. когда связь между наведенной плотностью и внешним потенциалом остается чисто локальной. Чтобы оценить значение \mathbf{q} , при котором это условие нарушается, мы должны знать зависимость χ от \mathbf{q} , которая различна для разных систем. Для нейтральной ферми-жидкости функция $\chi(\mathbf{q}, 0)$ остается постоянной для значений \mathbf{q} порядка фермиевского импульса p_F . Правило сумм для сжимаемости остается справедливым при $q \ll p_F$, т. е. для длин волн, много больших расстояния между частицами. В противоположность этому, правило f -сумм справедливо для всех волновых векторов.

Соотношения (2.84) и (2.85) в записанной выше форме справедливы только для *нейтральной* системы. Для заряженной системы возникает сложность, связанная с дальнедействующим характером кулоновских сил. Правило сумм для сжимаемости существует и в этом случае, однако вместо $S(\mathbf{q}, \omega)$ в него входит «экранированный» динамический форм-фактор. Этот вопрос обсуждается в гл. 4, § 2.

КОРРЕЛЯЦИЯ И СПЕКТР ВОЗБУЖДЕНИИ

Развитый нами формализм, основанный на использовании функции реакции, носит весьма общий характер; он применим к любой квантовой жидкости — Бозе или Ферми, заряженной или нейтральной, нормальной или сверхтекучей. Он дает компактный (и точный) способ описания экспериментов, в которых на систему действует слабое внешнее возмущение.

Соотношение (2.57) представляет собой пример связи, которая может существовать между функцией реакции (или корреля-

ляции) квантовой жидкости и соответствующим спектром элементарных возбуждений. Очевидно, для определения $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ достаточно точно знать матричные элементы $|\rho_{\mathbf{q}}^+|_{n_0}$ и частоты возбуждений ω_{n_0} . Когда все возбуждения, вносящие вклад в выражение типа (2.57), являются долгоживущими, мы можем непосредственно перейти от соответствующего спектра возбуждений (здесь спектр возбуждений флуктуаций плотности) к интересующей нас корреляционной функции. Мы увидим, что при $T=0$ это можно сделать для любой квантовой жидкости в длинноволновом пределе. Кроме того, правило сумм для сжимаемости (2.85) и правило f -сумм (2.28) оказывают большую помощь при отборе важных возбуждений. При конечных температурах подобные связи существуют в бесстолкновительном режиме, когда средняя длина пробега рассматриваемых возбуждений велика по сравнению с длиной волны. В противоположном, гидродинамическом пределе корреляционные функции можно получить макроскопическим рассмотрением, и они не связаны простым образом с элементарными возбуждениями.

В следующих двух параграфах мы применим общую теорию к частному примеру, а именно к функции реакции плотности — плотности (и спектру возбуждений флуктуаций плотности) нейтральной ферми-жидкости. Сначала мы обсудим качественное поведение динамического форм-фактора, обращая особое внимание на вклад, вносимый различными типами возбуждений в правила сумм при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Затем применим теорию Ландау для прямого вычисления $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ в этом пределе и выясним детальное поведение этой корреляционной функции. Соответствующее вычисление для гидродинамического режима выполнено в § 7.

§ 4. КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ФОРМ-ФАКТОРА НЕЙТРАЛЬНОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

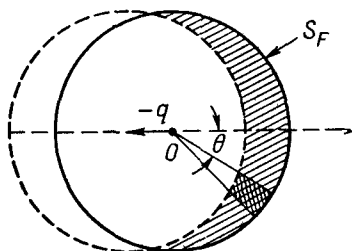
НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ ФЕРМИ-ГАЗ

В качестве примера рассмотрим сначала простейший случай — вычисление $S(\mathbf{q}, \omega)$ для невзаимодействующего ферми-газа. Основное состояние $|0\rangle$ этой системы получается заполнением всех состояний типа плоских волн внутри ферми-сферы радиусом p_F . Оператор $\rho_{\mathbf{q}}^+$, действуя на $|0\rangle$, вызывает переход данной частицы из некоторого состояния \mathbf{p} в состояние $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Это видно из (2.8) и еще более ясно из выражения для $\rho_{\mathbf{q}}^+$ в представлении вторичного квантования

$$\rho_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}\sigma} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma}^+ c_{\mathbf{p},\sigma} \quad (2.86)$$

где $c_{p\sigma}^+$ и $c_{p\sigma}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частицы с волновым вектором \mathbf{p} и спином σ . (Далее мы опускаем спиновый индекс σ ; подразумевается, что суммирование по \mathbf{p} включает и суммирование по σ .) Мы можем рассматривать ρ_q^+ как суперпозицию пар частица — дырка с полным импульсом \mathbf{q} (поскольку рассеяние можно представлять и как рождение пары частица — дырка).

Если система находится в основном состоянии, то в силу принципа Паули данная пара может возбуждаться только в том



Фиг. 13. Область импульсного пространства, соответствующая разрешенным значениям p (заштрихованный полумесяц).

В этой области, определяемой неравенствами $p < p_F$, $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F$, могут возникать однопарные возбуждения с полным импульсом \mathbf{q} .

случае, когда состояние \mathbf{p} занято, а состояние $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ свободно. Разрешенным значениям p соответствует на фиг. 13 заштрихованная площадь в виде полумесяца. Они лежат между ферми-сферой S_F и сферой, полученной переносом S_F на отрезок $-\mathbf{q}$. Мы видим, что для $q < 2p_F$ принцип Паули значительно уменьшает число возможных конечных состояний.

Матричный элемент $(\rho_q^+)_{n0}$, взятый по двум плоским волнам, равен единице. Энергия возбуждения ω_{n0} , соответствующая переходу $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}$, равна

$$\omega_{p\mathbf{q}}^0 = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{q^2}{2m}. \quad (2.87)$$

Динамический форм фактор для свободного ферми-газа можно записать в виде

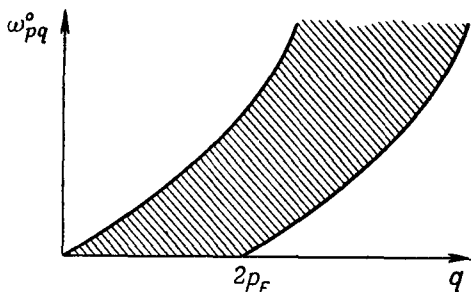
$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\substack{p < p_F \\ |\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F}} \delta(\omega - \omega_{p\mathbf{q}}^0). \quad (2.88)$$

Вычисление $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ сводится тогда к простому интегрированию.

Без каких-либо вычислений ясно, что спектр возбуждений пар частица — дырка с полным импульсом q образует континуум, лежащий в следующих пределах:

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega_{pq}^0 &\leq \frac{qp_F}{m} + \frac{q^2}{2m}, \text{ если } q < 2p_F, \\ -\frac{qp_F}{m} + \frac{q^2}{2m} &\leq \omega_{pq}^0 \leq \frac{qp_F}{m} + \frac{q^2}{2m}, \text{ если } q > 2p_F. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Энергии, которые может иметь возбужденная пара, лежат в заштрихованной области на фиг. 14. Вне конечного интервала



Фиг. 14. Энергетический спектр однопарных возбуждений.

частот, определяемого условиями (2.89), форм-фактор $S^0(q, \omega)$ равен нулю. Эта особенность характерна для невзаимодействующей системы и не имеет места для реальной ферми-жидкости.

Вычисление $S^0(q, \omega)$ в явном виде не представляет труда, но несколько длинно. Мы предоставляем читателю выполнить интегрирование в качестве упражнения и приведем лишь результат:

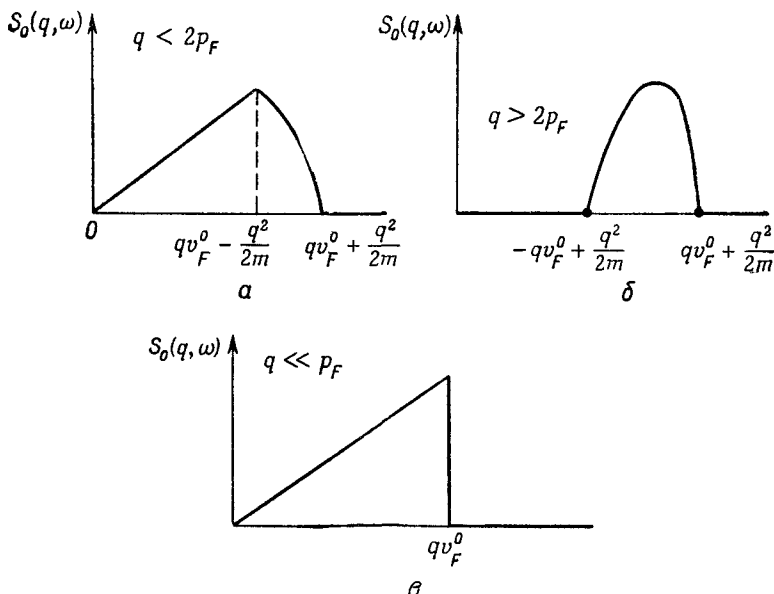
$$S^0(q, \omega) = \begin{cases} \frac{v(0)}{2} \frac{\omega}{qv_F^0}, & \text{если } 0 \leq \omega \leq qv_F^0 - \frac{q^2}{2m}, \\ \frac{v(0)}{2} \frac{p_F}{2q} \left\{ 1 - \left[\frac{\omega}{qv_F^0} - \frac{q}{2p_F} \right]^2 \right\}, & \text{если } qv_F^0 - \frac{q^2}{2m} \leq \omega \leq qv_F^0 + \frac{q^2}{2m}, \\ 0, & \text{если } qv_F^0 + \frac{q^2}{2m} \leq \omega. \end{cases} \quad (2.90)$$

Здесь $v_F^0 = p_F/m$ — ферми-скорость свободной частицы, а

$$v(0) = \frac{3N}{2\varepsilon_F^0} = \frac{3mN}{p_F^2} \quad (2.91)$$

— плотность одночастичных состояний на единицу энергии (и на единицу объема) на ферми-поверхности. На фиг. 15 приведен график $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ для $q < 2p_F$ и для $q > 2p_F$.

Когда q много меньше p_F , выражения (2.90) можно упростить. В этом пределе вторая область в (2.90) чрезвычайно узка, и ею можно пренебречь. Для практических применений можно считать форм-фактор $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ линейным в интервале $0 < \omega < qv_F^0$



Фиг. 15. Динамический форм-фактор системы невзаимодействующих частиц для $q < 2p_F$ (а), для $q > 2p_F$ (б) и для $q \ll p_F$ (в).

и равным нулю вне этой области (см. фиг. 15, в). Фактически в этом пределе результаты можно получить непосредственно, замечая, что тогда полумесяц на фиг. 13 становится очень узким. Используем полярные координаты с осью, параллельной \mathbf{q} . Число состояний в области, ограниченной полярными углами $(\theta, \theta + d\theta)$ внутри полумесяца, есть

$$dn = \frac{2}{(2\pi)^3} 2\pi p_F^2 \sin \theta q \cos \theta d\theta \quad (2.92)$$

(с точностью до членов более высокого порядка по q/p_F). Вместе с тем энергия возбуждения пары приблизительно равна

$$\omega = qv_F^0 \cos \theta. \quad (2.93)$$

Заменяя суммирование в (2.88) интегрированием по θ , легко находим

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = \begin{cases} \frac{m^2 \omega}{2\pi^2 q}, & \omega < qv_F^0, \\ 0, & \omega > qv_F^0, \end{cases} \quad (2.94)$$

что эквивалентно, как можно видеть, строгому результату (2.90) в пределе $q \ll p_F$.

Заметим, что для всех значений q форм-фактор $S^0(\mathbf{q}, \omega)$, будучи пропорционален ω , стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$ (это соответствует исчезающе малой ширине полумесяца). Такое поведение является прямым следствием принципа Паули, в силу которого число возбуждений с малой энергией невелико. Указанное свойство сохраняется поэтому и в случае реальной взаимодействующей ферми-жидкости, как мы увидим ниже.

Наконец, вычислим статический форм-фактор для невзаимодействующего газа. Согласно (2.18) и (2.88), статический форм-фактор определяется соотношением

$$NS_{\mathbf{q}}^0 = \sum_{\substack{p < p_F \\ |\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F}} 1 \quad (2.95)$$

и пропорционален площади полумесяца на фиг. 13. Простое вычисление дает

$$S_{\mathbf{q}}^0 = \begin{cases} \frac{3q}{4p_F} - \frac{q^3}{16p_F^3}, & \text{если } 0 < q \leq 2p_F, \\ 1, & \text{если } q \geq 2p_F. \end{cases} \quad (2.96)$$

Результат (2.96) неверен при $q \equiv 0$. Так как $\rho_0 = N$, то из (2.20) следует, что при этом $S_{\mathbf{q}}^0 = N$. Однако если в (2.96) переходить к пределу $q \rightarrow 0$, то $S_{\mathbf{q}}^0$ обращается в нуль, что снова является следствием принципа Паули.

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ

Рассмотрим матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ для нейтральной ферми-жидкости. Что представляет собой возбужденное состояние $|n\rangle$ реальной жидкости, которое получается при действии оператора $\rho_{\mathbf{q}}^+$ (описывающего флуктуации плотности) на основное состояние $|0\rangle$? Заметим прежде всего, что состояние $|n\rangle$ должно иметь то же число частиц, что и $|0\rangle$, и полный импульс \mathbf{q} . Состояние $|n\rangle$ может соответствовать конфигурациям одинакового числа индивидуально возбужденных квазичастиц и квазидырок с полным импульсом \mathbf{q} . Мы должны различать *однопарные* и

многопарные возбуждения. В первом случае система содержит одну пару квазичастица — квазидырка, во втором — две или более таких пар.

Следует отметить, что этими индивидуальными возбуждениями, вообще говоря, могут быть квазичастицы и квазидырки, находящиеся далеко от ферми-поверхности, т. е. соответствующие сильно затухающим возбужденным состояниям системы. Тем не менее представление о квазичастицах остается плодотворным и его можно использовать для выяснения свойств $S(\mathbf{q}, \omega)$.

Помимо индивидуально возбужденных квазичастиц и квазидырок, флуктуации плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$ могут быть также связаны с коллективными колебаниями. Фактически может возбуждаться только нулевой звук, так как в изотропной системе никакие другие коллективные моды не приводят к колебаниям плотности. Нулевой звук с достаточно большим волновым вектором \mathbf{q} тоже заметно затухает. В тех случаях, когда нулевой звук не представляет хорошо определенного возбуждения, он может тем не менее оказаться полезным при качественном описании поведения $S(\mathbf{q}, \omega)$.

Изучим теперь более детально каждый из этих трех типов возбужденных состояний.

1. *Однопарные возбуждения.* Такие возбуждения возникают при переходе квазичастицы с импульсом $p < p_F$ в состояние $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. В силу принципа Паули (который справедлив для квазичастиц так же, как и для голых частиц) величина $|\mathbf{p} + \mathbf{q}|$ должна быть больше p_F . Разрешенные значения \mathbf{p} ограничены заштрихованным полумесяцем на фиг. 13 точно так же, как и для невзаимодействующего ферми-газа. Поэтому спектр однопарных возбуждений весьма похож на соответствующий спектр невзаимодействующей системы.

Энергия возбуждения пары квазичастица — квазидырка равна

$$\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}. \quad (2.97)$$

При $q < 2p_F$ соответствующий спектр занимает, по-видимому, конечный интервал энергии от 0 (когда \mathbf{p} лежит на концах полумесяца) до некоторого максимального значения (получаемого, когда \mathbf{p} и \mathbf{q} параллельны). Если импульс q сравним с импульсом Ферми p_F , то для большинства значений \mathbf{p} энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и $\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ из-за затухания точно не определены. Спектр однопарных возбуждений уже не имеет резкой границы. Если же $q \ll p_F$, то описанные возбуждения представляют собой хорошо определенные квазичастицы, расположенные вблизи ферми-поверхности. Тогда спектр одночастичных возбуждений занимает конечный интервал $0 < \omega < qv_F$, где v_F — фермиевская скорость квазичастицы.

В этом пределе спектр имеет резкую границу, характерную для не взаимодействующей системы

Дальнейшую информацию о поведении $S(q, \omega)$ можно получить в пределе $\omega \ll qv_F$ (q — любое). В этом пределе при $q < 2p_F$ вклад однопарных возбуждений связан с концами полумесяца на фиг. 13. Заметим, что соответствующие квазичастицы находятся вблизи ферми-поверхности и, следовательно, хорошо определены даже при конечных q . Как видно из фиг. 13, при $\omega \rightarrow 0$ ширина полумесяца обращается в нуль; таким образом, в этом пределе плотность однопарных возбуждений на единицу энергии пропорциональна ω (Подробное вычисление представляется читателю в качестве упражнения). Опять это свойство является следствием принципа Паули. Итак, при $q < 2p_F$ форм-фактор $S(q, \omega)$ вблизи $\omega = 0$ пропорционален ω . Для $q > 2p_F$ однопарный спектр начинается не от значения $\omega = 0$, а от некоторого конечного значения ω .

Мы уже отмечали сходство между спектром однопарных возбуждений и аналогичным спектром не взаимодействующей системы. Однако между ними имеется и важное различие, связанное с вкладами, вносимыми в величину $S(q, \omega)$. Для взаимодействующей системы матричный элемент $(\rho_q^+)_{n0}$ уже не равен единице. Он заведомо зависит от рассматриваемого состояния $|n\rangle$, а потому и от энергии ω . Следует поэтому ожидать, что однопарный вклад $S^{(1)}(q, \omega)$ в динамический форм-фактор будет довольно сложной функцией ω . Например, в отличие от не взаимодействующей системы фермионов линейное поведение, которое имеет место при очень малых ω , не сохранится при переходе к конечным ω . Более того, при $q \ll p_F$ мы не можем выполнить точное вычисление $S^{(1)}(q, \omega)$, несмотря на то, что нам известен интервал ($0 < \omega < qv_F$). Эту трудность, о которой часто забывают, следует иметь в виду.

2. *Многопарные возбуждения* Теперь рассмотрим вклад $S^{(n)}(q, \omega)$, обусловленный возбуждением нескольких пар квазичастица—квазидырка. Во взаимодействующей системе фермионов оператор флуктуации плотности ρ_q^+ может связывать основное состояние с этими более высокими конфигурациями (в не взаимодействующем газе такая связь отсутствует). Поскольку сохраняться должен лишь полный импульс, на импульс каждой отдельной квазичастицы или квазидырки из этих конфигураций не налагается никаких ограничений. Поэтому энергия многопарного возбуждения изменяется в очень широком интервале от нуля до бесконечности; при этом число многопарных конфигураций (в интервале $d\omega$), отвечающих энергии ω , максимально при ω порядка нескольких μ . Соответствующий вклад $S^{(n)}(q, \omega)$

в динамический форм-фактор не имеет особой структуры и проявляется в виде широкого фона.

Для оценки $S^{(n)}(\mathbf{q}, \omega)$ при очень малых частотах $\omega \ll \mu$ можно воспользоваться принципом Паули. Так как энергия сохраняется, каждая из $2n$ квазичастиц или квазидырок многопарной конфигурации должна лежать в интервале ω вблизи ферми-поверхности. Тогда число n -парных конфигураций (в интервале $d\omega$) вблизи $\omega=0$ пропорционально ω^{2n-1} . Соответствующий вклад в $S^{(n)}$ пропорционален той же степени ω , т. е. имеет величину по крайней мере порядка ω^3 . В этом пределе им можно пренебречь по сравнению с однопарным вкладом, который имеет порядок ω . Таким образом, многопарные возбуждения играют пренебрежимо малую роль в низкочастотных явлениях, что напоминает ту малую роль, которую играют процессы затухания высокого порядка при определении времени жизни квазичастицы (ср. гл. 1, § 8). Оба вклада малы в силу принципа Паули.

Заметим также, что многопарные возбуждения играют малую роль и в длинноволновом пределе $q \ll p_F$. Ниже мы покажем, что их вклад в $S(\mathbf{q}, \omega)$ имеет по крайней мере порядок q^2 .

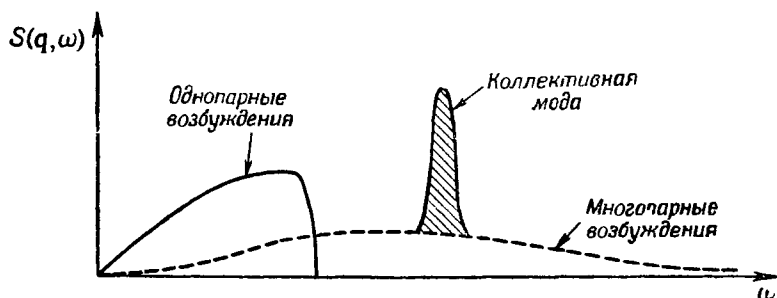
3. *Коллективные возбуждения* В нуль-звуковой моде основное состояние $|0\rangle$ связано посредством $\rho_{\mathbf{q}}^+$ с единственным состоянием, содержащим один квант нулевого звука с волновым вектором \mathbf{q} и энергией $\omega_{\mathbf{q}}$. На первый взгляд кажется удивительным, что это единственное состояние вносит в $S(\mathbf{q}, \omega)$ такой же по величине вклад, как и возбуждение многих индивидуальных пар (число которых порядка N). Это легко понять, если вспомнить, что коллективная мода связана с *когерентным* движением всех квазичастиц. Матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ с возбуждением кванта нулевого звука соответствует сумме членов (по одному на каждую квазичастицу, участвующую в нулевом звуке). Эти члены интерферируют, так что в результате $|(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2$ оказывается в N раз больше, чем соответствующая вероятность любого индивидуального возбуждения пары. Дополнительный множитель N возникает из-за того, что имеется одно, а не N конечных состояний.

Вклад, вносимый незатухающей нуль-звуковой модой в динамический форм-фактор, представляет собой одиночный *дискретный пик*

$$Z_{\mathbf{q}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}), \quad (2.98)$$

где $Z_{\mathbf{q}}$ — весовой множитель, который требуется определить. Как мы уже упоминали в гл. 1, фактически нуль-звуковая мода всегда несколько затухает. Соответственно этому пик уширится, причем степень уширения зависит от конкретной системы и ве-

личины q . Если спектр нулевого звука перекрывается со спектром однопарных возбуждений, возникает очень сильное затухание Ландау и соответствующий пик $S(q, \omega)$ оказывается очень широким. При тех значениях q , при которых затухание Ландау невозможно, нуль-звуковой пик накладывается на спектр многопарных возбуждений (так как последний распространяется от 0 до ∞). Тогда энергетически возможна связь нулевого звука с многопарными возбуждениями. Это приводит к затуханию нуль-звуковой моды и уширению «коллективного» пика в $S(q, \omega)$. Уширение мало, если $q \ll p_F$, и заметно увеличивается, когда q становится сравнимым с p_F .



Фиг. 16. Схематическое изображение различных вкладов в $S(q, \omega)$ для взаимодействующей ферми-жидкости

Когда коллективная мода сильно затухает, нет смысла рассматривать нулевой звук как отдельное возбуждение в системе. Широкий пик в $S(q, \omega)$ лучше интерпретировать как резонансный пик в спектре однопарных возбуждений. Если коллективная мода «разрешается» достаточно хорошо, то дело вкуса рассматривать ее отдельно или нет.

На фиг. 16 для взаимодействующей ферми-жидкости схематически изображены три типа вкладов в $S(q, \omega)$. Снова подчеркнем основное различие между непрерывным спектром индивидуальных возбуждений и дискретным спектром коллективной моды. Первый соответствует некогерентной реакции на флуктуацию плотности ρ_q^+ , тогда как второй обусловлен когерентной резонансной реакцией на то же возбуждение в согласии с общими представлениями о коллективной моде, развитыми в гл. 1, § 7.

СТРУКТУРА $S(q, \omega)$ ПРИ $q \rightarrow 0$

В длинноволновом пределе $q \rightarrow 0$ можно оценить порядок величины различных вкладов в $S(q, \omega)$, что позволяет их различать. Здесь мы качественно обсудим длинноволновую реакцию

нейтральной системы. Более детальные результаты можно получить, используя теорию Ландау. Этот подход мы обсудим в § 5, подтвердив с его помощью наши качественные результаты.

Ниже мы будем рассматривать *бесстолкновительный* режим. Это означает, что столкновениями между термически возбужденными квазичастицами можно пренебречь. Такое приближение оправдано, когда частота ω много больше тепловой частоты столкновений ν . В свою очередь это означает, что время жизни всех физически интересных возбуждений велико по сравнению с периодом приложенного поля. Последнее требование удовлетворяется для однопарных возбуждений в длинноволновом пределе. Оно не выполняется для многопарных возбуждений, однако, как мы увидим, в большинстве случаев это несущественно.

Бесстолкновительный режим реализуется при $T=0$, когда столкновения отсутствуют. При конечных температурах частота столкновений ν конечна и при $\omega \ll \nu$ бесстолкновительный режим сменяется гидродинамическим. Чтобы избежать усложнений, мы обсудим случай нулевой температуры. Бесстолкновительный режим при конечных температурах и переход к гидродинамическому режиму обсуждаются в § 7.

Рассмотрим относительную величину перечисленных выше различных вкладов в $S(\mathbf{q}, \omega)$ в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$ при $T=0$. Сначала мы обсудим однопарные возбуждения, возникающие при переходе одной квазичастицы с импульсом \mathbf{p} в состояние $\mathbf{p}+\mathbf{q}$. Заметим, что при $\mathbf{q} \rightarrow 0$:

1) энергия возбуждения $\omega_{n0} \approx \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p$, т. е. пропорциональна q и изменяется от 0 до максимального значения qv_F ;

2) в силу принципа Паули волновой вектор \mathbf{p} лежит в пределах заштрихованного полумесяца на фиг. 13. Число состояний в этом полумесяце имеет порядок Nq/p_F ; тогда суммирование по промежуточным состояниям $|n\rangle$ приводит к множителю q/p_F ;

3) наконец, матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$, вероятно, имеет порядок единицы, по аналогии с невзаимодействующим газом (несмотря на то, что он может зависеть от рассматриваемого состояния $|n\rangle$).

В определении (2.12) множитель $\delta(\omega - \omega_{n0})$ имеет размерность $1/\omega_{n0} \sim 1/qv_F$. Поэтому можно ожидать, что однопарный вклад в $S(\mathbf{q}, \omega)$ имеет порядок единицы в узкой области частот шириной qv_F . Его точная зависимость от ω довольно сложна; исключение составляет случай $\omega \ll qv_F$, когда форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ пропорционален ω .

Изучим теперь *многопарные* возбуждения. Заметим прежде всего, что в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$ многопарная конфигурация представляет собой хорошо определенное *возбужденное состояние* систе-

мы с некоторым числом возбужденных квазичастиц и квазидырок, полный импульс которых стремится к нулю. Соответствующая энергия возбуждения конечна. Отсюда следует:

1) Средняя энергия возбуждения $\omega_{n0} = \bar{\omega}$ не обращается в нуль при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, а остается конечной величиной, в несколько раз превышающей химический потенциал μ . Соответствующий спектр очень широк.

2) Принцип Паули не налагает никаких ограничений на число возможных состояний $|n\rangle$. Тогда порядок величины соответствующего вклада в $S(\mathbf{q}, \omega)$ зависит от поведения матричного элемента $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$. Мы должны найти его в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$.

Для этой цели используем тот факт, что многопарному возбуждению при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ соответствует возбужденное состояние $|n\rangle$, ортогональное основному состоянию. Следовательно, если мы разложим $\rho_{\mathbf{q}}^+$ по степеням \mathbf{q} , то первый член разложения, равный константе, не дает вклада в матричный элемент. Таким образом, соответствующий матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ имеет, по крайней мере, порядок q при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Это заключение справедливо всегда, когда состояние $|n\rangle$, получающееся при предельном переходе, ортогонально $|0\rangle$ (например, для междузонного перехода в реальном твердом теле). Ясно, что это соображение неприменимо к однопарным внутризонным переходам, так как в этом случае предельное состояние $|n\rangle$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ есть само основное состояние.

Для трансляционно-инвариантной системы матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ имеет еще меньшую величину

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} \sim q^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (2.99)$$

Чтобы доказать соотношение (2.99), необходимо явно использовать и закон сохранения числа частиц, и трансляционную инвариантность. Уравнение непрерывности (2.27) связывает $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ с матричным элементом потока $(\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$. При $\mathbf{q} \rightarrow 0$ флуктуация плотности потока $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ становится равной *полному потоку* \mathbf{J} . Для трансляционно-инвариантной системы \mathbf{J} — хорошее квантовое число, коммутирующее с гамильтонианом. Следовательно, в этом случае мы имеем

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} (\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^+)_{n0} = (\mathbf{J})_{n0} = 0. \quad (2.100)$$

Итак, матричный элемент $(\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ имеет порядок q^α , где α — некоторое положительное число. С другой стороны, энергия многопарного возбуждения ω_{n0} остается конечной при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Исполни-

зую (2.27), получаем результат (2.99). Отметим простоту этого рассуждения, которое мы часто будем использовать в дальнейшем.

Если J_q можно разложить в степенной ряд по q , то матричный элемент $(J_q^+)_{n0}$ должен быть порядка q , чему соответствует $\alpha=1$. Следовательно, в случае трансляционно-инвариантной системы $(\rho_q^+)_{n0}$ имеет порядок q^2 при $q \rightarrow 0$. Если система не обладает трансляционной инвариантностью, $(J)_{n0}$ не обращается в нуль, и матричный элемент $(\rho_q^+)_{n0}$ имеет порядок q , а не q^2 .

Резюмируя, можно сказать, что многопарный вклад в $S(q, \omega)$, занимающий широкий интервал частот, имеет порядок q^4 , если система инвариантна относительно трансляций (например, жидкий ^3He), и порядок q^2 , если она неинвариантна (например, реальные металлы). Кроме того, раньше мы получили, что в силу принципа Паули при $\omega \rightarrow 0$ этот вклад имеет порядок ω^3 .

Наконец, обратимся к вкладу нулевого звука в $S(q, \omega)$. В пределе малых q и при $T=0$ можно пренебречь как затуханием коллективных мод вследствие столкновений, так и их распадом на многопарные конфигурации [соответствующую вероятность распада нуль-звуковой моды можно оценить, используя проведенное выше определение многопарного вклада в $S(q, \omega)$]. Единственным эффективным механизмом затухания является затухание Ландау, возникающее при наложении коллективной моды на однопарный спектр.

Пусть s_0 — скорость нулевого звука (не путать со скоростью s обычного «акустического» звука!). При $s_0 < v_F$ затухание Ландау очень велико; коллективная мода проявляется только как широкий резонанс во вкладе однопарных возбуждений и ее не нужно рассматривать отдельно. Если же $s_0 > v_F$, то затухание Ландау отсутствует. Тогда вклад коллективной моды в $S(q, \omega)$ представляет собой очень узкий пик, который при $q \rightarrow 0$ хорошо описывается δ -функцией (2.98).

Энергия возбуждения $\omega_{n0} = s_0 q$, очевидно, имеет порядок q . С другой стороны, матричный элемент $(\rho_q^+)_{n0}$ вычислить довольно трудно. С помощью правила f -сумм (2.29) или правила сумм для сжимаемости (2.85) можно установить его верхнюю границу. Сразу видно, что $(\rho_q^+)_{n0}$ не может иметь меньший порядок, чем $q^{1/2}$. Точный расчет показывает, что $(\rho_q^+)_{n0} \sim q^{1/2}$.

Проведенные выше рассуждения дают удовлетворительное представление об общем поведении $S(q, \omega)$ при $q \rightarrow 0$. Мы видим, что основную роль играют вклады однопарных и коллективных возбуждений. Для длинных волн эти возбужденные со-

стояния описываются теорией Ландау. Следовательно, с помощью этой теории можно вычислить $S(q, \omega)$, что и сделано в § 5.

ДЛИННОВОЛНОВЫЙ ПРЕДЕЛ ПРАВИЛ СУММ

Изучим теперь различные вклады в правила сумм при $q \rightarrow 0$. В пределе длинных волн мы нашли два таких правила, именно правило f -сумм (2.29) и правило сумм для сжимаемости (2.85). К ним можно добавить определение (2.18) статического форм-фактора S_q , которое хотя и не является настоящим правилом сумм, но имеет подобную структуру. Запишем снова три соотношения:

$$\sum_n \frac{|(\rho_q^+)_{n0}|^2}{\omega_{n0}} = \frac{N}{2ms^2}, \quad (2.101a)$$

$$\sum_n |(\rho_q^+)_{n0}|^2 = NS_q, \quad (2.101б)$$

$$\sum_n |(\rho_q^+)_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Nq^2}{2m}. \quad (2.101в)$$

Рассмотрим сначала вклад однопарных возбуждений, для которых как ω_{n0} , так и число состояний $|n\rangle$ имеют порядок q . Мы сразу видим, что такие возбуждения дают вклад порядка единицы в (2.101a) и порядка q^2 в (2.101в). Это составляет значительную часть всей суммы при $q \rightarrow 0$. Вклад однопарных возбуждений в (2.101б) имеет порядок q и фактически определяет порядок величины S_q при $q \rightarrow 0$. Вклад нулевого звука сравним с вкладом однопарных возбуждений. Он опять составляет заметную часть трех сумм (2.101).

Рассмотрим теперь многопарные возбуждения. Так как частота ω_{n0} конечна, соответствующие вклады в три соотношения (2.101) имеют порядок q^4 , если система обладает трансляционной инвариантностью, и порядок q^2 , если не обладает. Отсюда следует, что при $q \rightarrow 0$ многопарные переходы не вносят вклада в (2.101a) и (2.101б); они вносят вклад только в правило f -сумм (2.101в), если система неинвариантна относительно трансляций. Эти выводы суммированы в табл. 3.

Эти результаты имеют большую практическую ценность, так как они подтверждают справедливость теории ферми-жидкости, предложенной Ландау. В последней принимаются во внимание однопарные и коллективные возбуждения и совершенно игнорируются многопарные возбуждения. Поэтому теория Ландау должна приводить к точным результатам в тех случаях, когда

вкладом многопарных возбуждений можно пренебречь. Мы уже видели, что эти возбуждения не вносят вклада в $N/2ms^2$ и NS_q (при $q \rightarrow 0$). Поэтому эти две величины могут быть точно вычислены в рамках теории Ландау. Априори это не очевидно, особенно в отношении S_q .

ТАБЛИЦА 3

Матричные элементы, энергии возбуждений и вклады в правила сумм различных возбуждений флуктуации плотности в длинноволновом пределе

	Однопарные	Нулевой звук	Многопарные	
			транс инвариантность имеется	транс инвариантность отсутствует
$(\rho_q^+)_{n0}$	1	$q^{1/2}$	q^2	q
ω_{n0}	qv_F	qs_0	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$
Уменьшение числа возбужденных состояний в силу принципа Паули	$q p_F$	—	—	—
$\sum_n (\rho_q)_{n0} ^2 / \omega_{n0}$	1	1	q^4	q^2
$\sum_n (\rho_q^+)_{n0} ^2$	q	q	q^4	q^2
$\sum (\rho_q)_{n0} ^2 \omega_{n0}$	q^2	q^2	q^4	q^2

Заметим, что для трансляционно-инвариантной системы правило f -сумм удовлетворяется, если учесть *только* однопарные и нуль-звуковые возбуждения (при $q \rightarrow 0$). Силы осцилляторов, соответствующие высокоэнергетическим переходам, могут иметь заметную величину только в неоднородной системе.

Следует, далее, отметить, что эти выводы относятся только к нейтральным системам. Вследствие экранировки правила сумм для заряженной системы имеют гораздо более сложный вид, чем (2.101). Тем не менее подобный подход можно использовать и при обсуждении длинноволнового предела соответствующих правил сумм, что будет сделано в гл. 4, § 2.

В § 3 мы упоминали, что правило f -сумм дает возможность определить высокочастотный предел функции реакции $\chi(q, \omega)$, описываемой соотношением (2.57). Точнее говоря, если ω много больше характерной частоты возбуждений ω_{n0} , мы можем пре-

небрежь ω_{n0} в знаменателе (2.57). В этом пределе $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ имеет вид

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{m\omega^2}. \quad (2.60)$$

Если система инвариантна относительно трансляций, соотношение (2.60) справедливо только в том случае, когда ω много больше энергий многопарных возбуждений, т. е. когда $\omega \gg \mu$. Для трансляционно-инвариантной системы многопарные возбуждения не вносят вклада в (2.57) при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Для того чтобы соотношение (2.60) было справедливо в этом случае, частота ω должна быть больше типичных энергий однопарных и нуль-звуковых возбуждений, т. е. должно выполняться условие

$$qv_F \ll \omega. \quad (2.102)$$

В следующем параграфе мы вычислим $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ с помощью теории Ландау и убедимся, что для трансляционно-инвариантной системы функция реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ действительно равна (2.60), если частота удовлетворяет неравенствам

$$qv_F \ll \omega \ll \mu. \quad (2.103)$$

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ ПЛОТНОСТЬ — ПЛОТНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ЛАНДАУ

РЕАКЦИЯ НА МАКРОСКОПИЧЕСКУЮ ПРОБНУЮ ЧАСТИЦУ

Если $q \ll p_F$ и $\omega \ll \mu$, пробная частица является *макроскопическим* анализатором поведения системы. Реакцию можно рассматривать в рамках теории Ландау. Пробная частица действует на каждую частицу с силой \mathfrak{F} , описываемой соотношением (2.64). Так как взаимодействие с пробной частицей зависит только от *плотности* системы, \mathfrak{F} представляет собой также силу, испытываемую *квазичастицей* (см. гл. 1, § 4). Тогда реакцию системы можно рассматривать как поток квазичастиц в фазовом пространстве, вызванный силой \mathfrak{F} . Этот поток описывается общим кинетическим уравнением (1.83) для квазичастиц. Так как нас интересует только *линейная* реакция системы, мы можем от (1.83) перейти к кинетическому уравнению для данной фурье-компоненты $\delta n_p(\mathbf{q}, \omega)$. Заменяя силу \mathfrak{F} ее явным выражением (2.64), получаем

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta \bar{n}_p - \omega \delta n_p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \varphi(\mathbf{q}, \omega) = -iI(\delta n_p). \quad (2.104)$$

Различные величины, входящие в (2.104), были определены в гл. 1. Мы только напомним читателю, что δn_p характеризует отклонение распределения квазичастиц от *истинного* равновесия,

тогда как $\delta \bar{n}_p$ соответствует отклонению от локального равновесия [ср. (1.28)]

Здесь, как и раньше, мы ограничимся *бесстолкновительным режимом*, когда частота ω и волновой вектор q удовлетворяют условиям

$$v \ll \omega \text{ или } v \ll qv_F, \quad \omega \ll \mu, \quad qv_F \ll \mu, \quad (2.105)$$

где v — частота столкновений и μ — химический потенциал. Тогда мы можем пренебречь в (2.104) интегралом столкновений $I(\delta n_p)$. Вычисление $\chi(q, \omega)$ в противоположном пределе ($\omega, qv_F \ll v$), соответствующем гидродинамическому режиму, кратко обсуждается в § 7.

В (2.104) заменим отклонение $\delta \bar{n}_p$ его выражением (1.30). Мы получим интегральное уравнение для δn_p

$$(q \cdot v_p - \omega) \delta n_p - q \cdot v_p \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} - q \cdot v_p \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \varphi(q, \omega) = 0. \quad (2.106)$$

Решив уравнение (2.106), мы можем вычислить флуктуацию плотности квазичастиц, вызванную пробной частицей

$$\langle \rho(q, \omega) \rangle = \sum_p \delta n_p(q, \omega). \quad (2.107)$$

Так как плотности квазичастиц и частиц равны, мы получим тогда функцию реакции плотность — плотность $\chi(q, \omega)$, определяемую соотношением (2.49).

Мы можем записать формальное выражение для функции реакции с помощью амплитуд рассеяния $A_{pp'}(q, \omega)$, введенных в гл 1 и удовлетворяющих интегральному уравнению (1.112). Для этого по аналогии с (1.110) положим

$$\delta n_p = - \frac{q \cdot v_p}{q \cdot v_p - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} x_p. \quad (2.108)$$

(Заметим, что мы добавили к ω малую мнимую часть $i\eta$ в соответствии с нашими адиабатическими граничными условиями.) При подстановке новой неизвестной x_p кинетическое уравнение (2.106) принимает вид

$$x_p - \sum_{p'} f_{pp'} \frac{q \cdot v_{p'}}{q \cdot v_{p'} - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_{p'}} x_{p'} + \varphi(q, \omega) = 0 \quad (2.109)$$

[ср (1.111)]

Амплитуда рассеяния $A_{pp'}(q, \omega)$, определяемая уравнением (1.112), опять играет роль «резольвентного оператора» для интегрального уравнения (2.109). [Теперь мы видим, что уравнение (1.112) также должно содержать малую мнимую добавку $+i\eta$ к частоте ω , так как амплитуды рассеяния, вообще говоря, комплексные величины и граничное условие позволяет опре-

делить их мнимую часть] Легко убедиться, что решение уравнения (2109) можно представить в виде

$$x_p = -\varphi(q, \omega) \left\{ 1 + \sum_{p'} A_{pp'}(q, \omega) \frac{q \cdot v_{p'}}{q \cdot v_{p'} - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{p'}} \right\}. \quad (2.110)$$

От x_p мы с помощью (2108) возвращаемся к δn_p и с помощью (2107) к $\langle \rho(q, \omega) \rangle$. В конце концов, мы получаем следующее выражение для функции линейной реакции плотность — плотность $\chi(q, \omega)$, определяемой соотношением (249)

$$\chi(q, \omega) = \sum_p \frac{q \cdot v_p}{q \cdot v_p - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \times \left[1 + \sum_{p'} A_{pp'}(q, \omega) \frac{q \cdot v_{p'}}{q \cdot v_{p'} - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_{p'}} \right]. \quad (2.111)$$

Результат (2111) верен в бесстолкновительном пределе, т е если выполнены условия (2105)

Рассмотрим сначала предельную формулу для системы невзаимодействующих фермионов В этом случае второй член в скобках в (2111) исчезает Соответствующая функция реакции $\chi^0(q, \omega)$ совпадает с той, которую мы получили бы с помощью общего выражения (257), заменив матричные элементы и частоты возбуждений величинами, соответствующими невзаимодействующей системе Это легко проверить, заметив, что

$$-q \cdot v_p \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} = -q \cdot \frac{\partial n^0}{\partial p} = \lim_{q \rightarrow 0} [n_p^0 - n_{p+q}^0]. \quad (2.112)$$

Тогда можно считать, что множитель $-q \cdot v_p (\partial n^0 / \partial \varepsilon_p)$ соответствует ограничению области интегрирования по p двумя полумесяцами на фиг 13, так что интеграл умножается на $+1$ для заштрихованного полумесяца и на -1 для незаштрихованного Заменяя p на $-p$ в интеграле по незаштрихованному полумесяцу, мы можем записать функцию реакции для невзаимодействующей системы в виде

$$\chi^0(q, \omega) = - \sum_{\substack{p < p_F \\ |p+q| > p_F}} \left\{ \frac{1}{q \cdot v_p - \omega - i\eta} + \frac{1}{q \cdot v_p + \omega + i\eta} \right\}. \quad (2.113)$$

Эта форма $\chi^0(q, \omega)$, очевидно, согласуется с (257)

Для взаимодействующей системы χ зависит от ω гораздо более сложным образом, определяемым амплитудой рассеяния $A_{pp'}(q, \omega)$ Мы видели в гл. 1, § 7, что коллективные моды приводят к полюсам в амплитуде рассеяния В свою очередь последние обуславливают полюсы и в функции реакции Для изотропной системы, по соображениям симметрии, все полюсы, за исключением полюса, соответствующего нулевому звуку, исчезают при интегрировании по p и p' в (2111). Точно так же антисимметричные по спину волны проявляются как полюсы функции реакции спин — спин, поперечные симметричные волны — как полюсы поперечной функции реакции поток — поток и т п.

Динамический форм фактор $S(q, \omega)$ получается из мнимой части выражения (2111). Формальное решение для $S(q, \omega)$ снова можно получить

с помощью так называемой оптической теоремы, которая позволяет выразить его в явном виде через $A_{pp'}$. Однако вычисления длинны и не очень содержательны, так что мы ограничимся несколькими качественными замечаниями, касающимися общего случая. Во-первых, вклад в χ'' возникает, когда энергетические знаменатели в (2.111) обращаются в нуль, т. е. когда $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p$ или $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{p'}$. Эта часть $S(\mathbf{q}, \omega)$, занимающая интервал от 0 до qv_F , соответствует спектру однопарных возбуждений. Другой вклад в χ'' дает мнимая часть амплитуды рассеяния. Она изменяет непрерывный однопарный спектр и может приводить к дискретному пику, соответствующему нулевому звуку. Такое поведение согласуется с нашим качественным обсуждением, проведенным в § 4.

Чтобы более детально выяснить общий характер функции реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$, рассмотрим простую модель, в которой взаимодействие $f_{pp'}$ считается постоянным (см. гл. 1, § 7). Тогда амплитуду рассеяния $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ можно вычислить явно. Она определяется выражениями (1.129) и (1.130), записанными в приведенных величинах

$$\lambda = \frac{\omega}{qv_F},$$

$$F_0 = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} f_{pp'}.$$

Заметим, что $A_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ не зависит от \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Тогда суммирование в (2.111) выполняется очень просто. Как легко проверить,

$$\sum_p \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega - i\eta} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} = - \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} g(\lambda), \quad (2.114)$$

где мы ввели функцию

$$g(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} \ln \left[\frac{\lambda + i\eta + 1}{\lambda + i\eta - 1} \right]. \quad (2.115)$$

Тогда выражение (2.111) сводится к

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = - \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{g(\lambda)}{1 + F_0 g(\lambda)}. \quad (2.116)$$

Выражение (2.116) можно было бы получить путем прямого решения кинетического уравнения (2.106).

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения детально исследовать выражение (2.116) как функцию F_0 и отметим только несколько важных особенностей. Взяв мнимую часть (2.116), мы видим, что можно различить два типа вкладов в динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$:

1) однопарные вклады, возникающие за счет мнимой части логарифма в (2.115) (она равна $-i\pi$ в области $|\lambda| < 1$);

2) вклад нулевого звука, соответствующий значению λ_0 , при котором знаменатель $[1 + F_0 g(\lambda)]$ обращается в нуль. Предположим, что существует такое значение $\lambda_0 > 1$ (случай, который соответствует $F_0 > 0$). Вблизи λ_0 можно написать

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \sim - \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{g(\lambda_0)}{F_0 g'(\lambda_0)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + i\eta}. \quad (2.117)$$

Замечая, что $g(\lambda_0) = -1/F_0$, беря мнимую часть (2.117) и используя (2.63), находим вклад нулевого звука в $S(\mathbf{q}, \omega)$

$$[S(\mathbf{q}, \omega)]_{\text{нуль-звук}} = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{F_0^2 g'(\lambda_0)} \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (2.118)$$

Равенство (2.118) соответствует дискретному пику в согласии с нашими прежними утверждениями. Заметим далее, что

$$\delta(\lambda - \lambda_0) = \delta\left(\frac{\omega - s_0 q}{qv_F}\right) = qv_F \delta(\omega - s_0 q). \quad (2.119)$$

Таким образом, мы установили, что матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ для возбуждения нулевого звука имеет порядок $q^{1/2}$.

Если $-1 < F_0 < 0$, коллективная мода подвержена существенному затуханию Ландау и четко не определена. Из (2.116) ясно, что $S(\mathbf{q}, \omega)$ имеет максимум при частоте, близкой к тому значению, при котором действительная часть $[1 + F_0 g]$ обращается в нуль. Таким образом, следует ожидать широкого резонанса, характерного для затухающей коллективной моды.

Простую модель можно использовать для изучения предела сильной связи $F_0 \gg 1$. В этом пределе однопарный вклад в $S(\mathbf{q}, \omega)$ можно записать следующим образом:

$$-\pi [S(\mathbf{q}, \omega)]_{\text{однопар.}} \sim \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{F_0^2} \text{Im} \left(\frac{1}{g(\lambda)} \right) \quad (2.120)$$

[см. (2.63)]. Соответствующий вклад в правила сумм (2.101а) и (2.101в) имеет порядок F_0^{-2} . Вместе с тем легко проверить, что в правиле f -сумм учитываемые члены имеют порядок единицы, а в правиле сумм для сжимаемости — порядок F_0^{-1} [см. (1.58)]. Таким образом, мы приходим к выводу, что в случае очень сильной связи между квазичастицами эти два правила сумм удовлетворяются, если учитывать лишь нулевой звук. Другими словами, коллективное поведение доминирует, когда взаимодействие квазичастиц очень велико.

В определяющей роли коллективных мод можно убедиться проверкой, используя при этом (2.118) и предельное выражение для скорости нулевого звука $\lambda_0 \sim \sqrt{F_0/3}$. Доказательство, кото-

рое мы привели, справедливо только для нашей простой модели. Однако весьма возможно, что полученное заключение справедливо и в более общем случае (хотя простого доказательства еще нет).

ТОЧНЫЙ ВИД ФУНКЦИИ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

Кинетическое уравнение (2.106) можно решить точно в двух предельных случаях: $\omega \gg qv_F$ или $\omega \ll qv_F$. Мы рассмотрим эти два предела и сравним полученные результаты с правилами сумм, которые обсуждались в § 4. Для простоты будем рассматривать *изотропную* систему.

1. *Статический и квазистатический пределы* ($\omega \ll qv_F$). Рассмотрим сначала возмущение, не зависящее от времени при $T=0$, так что условия (2.105) выполнены. Используя (2.104), сразу же находим

$$\bar{\delta n}_p(\mathbf{q}, 0) = \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \varphi(\mathbf{q}, 0). \quad (2.121)$$

Согласно (2.121), функция δn_p изотропна. Тогда, используя (1.34), получаем

$$\delta n_p(\mathbf{q}, 0) = \frac{\bar{\delta n}_p(\mathbf{q}, 0)}{1 + F_0^s} = \frac{\varphi(\mathbf{q}, 0) \partial n^0}{1 + F_0^s \partial \varepsilon_p}. \quad (2.122)$$

Теперь можно вычислить наведенную флуктуацию плотности $\langle \rho(\mathbf{q}, 0) \rangle$, описываемую соотношением (2.107). Затем находим функцию реакции

$$\chi(\mathbf{q}, 0) = -\frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{1 + F_0^s} = \frac{-v(0)}{1 + F_0^s}, \quad (2.123)$$

где $v(0)$ — плотность состояний квазичастиц на ферми-поверхности. С помощью (1.58) можно записать (2.123) в виде

$$\chi(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{ms^2}, \quad (2.124)$$

где s — обычная скорость звука. Этот результат теории Ландау согласуется с правилом сумм для сжимаемости (2.84). Он, разумеется, справедлив только в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$.

Мы можем получить реакцию на квазистатическое возмущение ($\omega \ll qv_F$), разлагая решение уравнения (2.104) в степенной ряд по ω/qv_F . Первый член этого ряда $\delta n_p^{(0)}$ определяется соот-

ношениями (2.121) и (2.122). Подставляя этот член снова в (2.104), получаем следующий член разложения:

$$\bar{\delta n}_p^{(1)} = \frac{\omega}{q \cdot v_p - i\eta} \frac{\varphi(q, \omega)}{(1 + F_0^s)} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} = \frac{\omega}{q \cdot v_p - i\eta} \delta n_p^{(0)}. \quad (2.125)$$

(Добавка $i\eta$ появилась благодаря использованию граничных условий, обеспечивающих причинность реакции.) Хотя мы и не можем просто вычислить соответствующую величину $\delta n_p^{(1)}$, нетрудно получить полную плотность наведенных флуктуаций

$$\langle \rho^{(1)}(q, \omega) \rangle = \sum_p \delta n_p^{(1)} = \frac{\sum_p \bar{\delta n}_p^{(1)}}{1 + F_0^s}. \quad (2.126)$$

(При суммировании по p сохраняется только часть $\delta n_p^{(1)}$ и $\bar{\delta n}_p^{(1)}$, соответствующая $l=0$.) Как обычно, запишем

$$\frac{1}{q \cdot v_p - i\eta} = P \left(\frac{1}{q \cdot v_p} \right) + i\pi \delta(q \cdot v_p). \quad (2.127)$$

Из соображений симметрии следует, что главное значение не дает вклада в сумму (2.126). Остается только мнимая часть, возникающая от δ -функции. Выполняя суммирование, находим

$$\chi^{(1)}(q, \omega) = -\frac{i\pi}{2} \frac{\omega}{qv_F} \frac{v_0}{(1 + F_0^s)^2}. \quad (2.128)$$

Используя $\chi^{(1)}$, с помощью (2.63) получаем главный член $S(q, \omega)$. Заметим, что динамический форм-фактор имеет порядок ω , в соответствии с нашим прежним утверждением. Сравнивая с (2.90), мы видим, что в этой области частот все выражения, описывающие многочастичные эффекты, содержат множитель $(1 + F_0^s)^{-2}$.

2) *Квазиоднородный предел.* Рассмотрим теперь противоположный предел $qv_F \ll \omega$. (При этом предполагается, что значение ω остается малым по сравнению с μ .) Оставляя только главный член в (2.104), находим

$$\delta n_p = -\frac{q \cdot v_p}{\omega} \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \varphi(q, \omega). \quad (2.129)$$

Так как этот член нечетен, он не дает вклада в флуктуации плотности $\langle \rho(q, \omega) \rangle$. Поэтому найдем следующий член разложения по qv_F/ω . Воспользуемся таким искусственным приемом: вычислим наведенный поток

$$\langle J(q, \omega) \rangle = \sum_p \delta n_p(q, \omega) j_p, \quad (2.130)$$

откуда с помощью уравнения непрерывности

$$\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \omega \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle \quad (2.131)$$

получим наведенную плотность. Используя соотношения (2.129) — (2.131), прямым вычислением получим

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = - \sum_p \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_p)}{\omega^2} \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \quad (qv_F \ll \omega). \quad (2.132)$$

В случае произвольной системы мы не можем продвинуться дальше. Функция $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ имеет порядок q^2/ω^2 , причем коэффициент пропорциональности не выражается через простые величины.

Однако если система инвариантна относительно трансляций, то, как нам известно, $\mathbf{j}_p = \mathbf{p}/m$. Суммирование в (2.132) тогда выполняется легко и мы получаем

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{m\omega^2}. \quad (2.133)$$

Мы опять пришли к результату (2.60), найденному путем применения правила f -сумм. Эти результаты согласуются с качественными соображениями, приведенными в § 4. В интервале частот $qv_F \ll \omega \ll \mu$ предельная форма (2.133) имеет место *только* в случае трансляционно-инвариантной системы.

Чтобы более отчетливо показать связь этого обсуждения с теорией Ландау, заметим, что в указанном интервале частот функцию реакции (2.57) приближенно можно представить в виде

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \sim \sum |\langle \rho_{\mathbf{q}}^+ \rangle_{n^0}|^2 \frac{2\omega_{n^0}}{\omega^2}, \quad (2.134)$$

где суммирование проводится по однопарным и нуль-звуковым возбуждениям. Используем силы осцилляторов f_{0n} , определяемые соотношением (2.30). Мы видим, что коэффициент перед $q^2/m\omega^2$ в (2.134) есть просто *сумма* сил осцилляторов для *однопарных* и *нуль-звуковых* возбуждений. Эту сумму можно идентифицировать с соответствующим коэффициентом в формуле (2.132). Если система инвариантна относительно трансляций, можно пренебречь силами осцилляторов многопарных возбуждений; два других типа возбуждений обеспечивают выполнение правила сумм, причем сумма сил осцилляторов равна N , а функция реакции χ описывается формулой (2.133). Отклонение функции реакции от (2.133) является мерой того, насколько важную роль играют многопарные переходы.

Подчеркнем, что такое согласие априори не очевидно. Действительно, описанный в настоящей главе метод можно приме-

нять и при изучении функции реакции поток — поток. Оказалось, что для не инвариантной относительно трансляций системы многопарные возбуждения крайне важны. В этом случае теорию Ландау следует применять с большой осторожностью, так как она не позволяет явно учесть такие высокоэнергетические возбуждения.

ОБРАТНЫЙ ПОТОК ОКОЛО МЕДЛЕННО ДВИЖУЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ

Мы закончим этот параграф кратким обсуждением потока, наведенного в системе медленно движущейся внешней частицей. Рассмотрим точечную примесь, имеющую скорость \mathbf{V}_e и характеризующую плотностью

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t). \quad (2.135)$$

Фурье-компонента плотности (2.135) равна

$$\rho_e(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (2.136)$$

Предположим, что примесь гораздо тяжелее частиц системы, так что ее отдачи можно пренебречь. Тогда скорость \mathbf{V}_e можно считать постоянной. Эта примесь эквивалентна скалярному полю.

Пусть \mathcal{T}_q — фурье-компонента взаимодействия между плотностями примеси и системы. Примесь вызывает флуктуации плотности системы $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$, определяемые соотношением (2.49):

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \mathcal{T}_q \chi(\mathbf{q}, \omega) \rho_e(\mathbf{q}, \omega). \quad (2.137)$$

Зная $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$, с помощью закона сохранения (2.131) можно вычислить продольную часть потока $\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$. Фактически поток $\langle \mathbf{J} \rangle$, будучи вызван продольной силой, не может иметь поперечной части. Таким образом, величина $\langle \mathbf{J} \rangle$ полностью определена. Мы находим

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \frac{\omega}{q^2} \mathbf{q} \chi(\mathbf{q}, \omega) \rho_e(\mathbf{q}, \omega) \mathcal{T}_q. \quad (2.138)$$

Заменяя $\rho_e(\mathbf{q}, \omega)$ значением (2.136), получаем

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e}{q^2} \mathbf{q} \chi(\mathbf{q}, \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e) 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e) \mathcal{T}_q. \quad (2.139)$$

Соотношение (2.139) описывает поток, вызванный примесью. Он соответствует *обратному потоку* частиц системы около движущейся примеси.

Предположим сначала, что скорость примеси очень мала, так что

$$V_e \ll v_F. \quad (2.140)$$

Тогда в (2.139) мы можем заменить функцию реакции χ ее статическим значением $\chi(\mathbf{q}, 0)$. При малых значениях \mathbf{q} используем (2.84) и запишем распределение потока в виде

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e}{q^2} \mathbf{q} \mathcal{V}_q \frac{N}{ms^2} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (2.141)$$

Выполнив фурье-преобразование в соотношении (2.141) (справедливым для малых q), мы, по-видимому, получим правильное распределение потока *далеко* от примеси, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с атомными размерами.

Если взаимодействие между системой и примесью имеет малый радиус, функция \mathcal{V}_q регулярна при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ и в (2.141) мы можем заменить \mathcal{V}_q на \mathcal{V}_0 . Затем совершим фурье-преобразование соотношения (2.141) и таким образом получим асимптотический вид распределения потока в конфигурационном пространстве

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\mathcal{V}_0}{4\pi} \frac{N}{ms^2} \nabla (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \frac{1}{R}, \quad (2.142)$$

где мы ввели

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{V}_e t. \quad (2.143)$$

Формула (2.142) соответствует *дипольному* обратному потоку частиц системы около примеси.

То, что обратный поток на *больших расстояниях* от *медленно движущейся* примеси имеет дипольный характер, следует, по-видимому, из весьма общих геометрических соображений. С подобным результатом мы встречаемся и в элементарной гидродинамике при рассмотрении движения шарика в несжимаемой жидкости. Вероятно, при очень низких скоростях обратный поток фактически имеет гидродинамический характер. Динамические свойства системы определяют *величину* обратного потока, но не влияют на его вид на больших расстояниях.

Мы вернемся к этому вопросу снова при изучении свойств заряженной электронной системы. В этом случае в результате полного экранирования заряженной примеси обратный поток, который снова имеет дипольный характер, полностью компенсирует продольный поток, переносимый примесью. По этой причине в заряженной системе обратный поток играет гораздо более важную роль.

Предыдущие результаты несправедливы, если $V_e > v_F$. При этом условии функция реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ существенно зависит от угла между \mathbf{q} и \mathbf{V}_e . Обратный поток, вызванный примесью, не является более дипольным, а сложным образом зависит от угла. В пределе $V_e \gg v_F$ обратный поток становится второстепенным эффектом по сравнению с реальными переходами, индуцирован-

ными примесью (см. § 1). В этом случае вместо ламинарного течения, создаваемого медленно движущейся примесью, мы наблюдаем реакцию, напоминающую ударную волну.

§ 6. РЕАКЦИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Рассмотрим теперь формальное описание реакции и корреляции в системе многих частиц при конечных температурах. Мы увидим, что анализ реакции на слабое внешнее воздействие и определение различных корреляционных функций проводится точно так же, как и при $T=0$. Имеется, однако, несколько важных отличий, на которых мы кратко остановимся.

Во-первых, при конечных температурах нельзя ограничиться единственным состоянием с вполне определенной энергией. Необходимо статистическое описание. Будем определять состояния системы с помощью точных собственных состояний $|m\rangle$ гамильтониана системы, соответствующих энергии E_m . В настоящем параграфе везде будем предполагать, что система находится в равновесии при некоторой температуре T . При этих обстоятельствах удобно перейти к каноническому ансамблю статистической механики. Вероятность найти систему в состоянии $|m\rangle$ есть просто

$$W(m) = \frac{e^{-\beta E_m}}{Z}, \quad (2.144)$$

где Z — статистическая сумма:

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m}. \quad (2.145)$$

Во-вторых, рассматривая взаимодействие между зависящей от времени внешней силой и системой многих частиц, мы должны допустить возможность передачи энергии от внешнего источника к системе и обратно. В тепловом равновесии вероятности этих двух процессов не независимы; соотношение между ними, которое мы установим, представляет собой известный принцип *детального равновесия*.

Наконец, при конечных температурах существует важное физическое различие между динамическим форм-фактором $S(\mathbf{q}, \omega)$ и мнимой частью функции реакции плотность — плотность $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Первый является прямой мерой флуктуаций в системе (через статический форм-фактор $S_{\mathbf{q}}$), тогда как последняя описывает диссипативную часть реакции системы. Связь между $S(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ можно легко найти, воспользовавшись принципом *детального равновесия*. В интегральной форме — это хорошо известная *флуктуационно-диссипационная теорема*.

Мы начнем с динамического форм-фактора при конечной температуре и принципа детального равновесия, затем обсудим функцию реакции плотность — плотность как частный пример функции линейной реакции при конечных температурах, выведем флуктуационно-диссипационную теорему и обсудим различные правила сумм для корреляционных функций плотность — плотность.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМ-ФАКТОР

Рассмотрим опять неупругое рассеяние пучка внешних частиц в системе многих частиц. Этот процесс определяется взаимодействием (2.6). В борновском приближении отнесенная к единице времени вероятность того, что частица передаст системе импульс \mathbf{q} и энергию ω , есть

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm}). \quad (2.146)$$

Соотношение (2.146) получается путем применения теории возмущений к переходу из данного состояния $|m\rangle$ в другое состояние $|n\rangle$ с использованием статистического весового множителя (2.144); $\omega_{nm} = E_n - E_m$ — разность точных значений энергии. Свойства многочастичной системы описываются динамическим форм-фактором

$$S(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm}). \quad (2.147)$$

Мы можем также написать отнесенную к единице времени вероятность того, что частица получит импульс $-\mathbf{q}$ и энергию ω от системы. Она равна

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{q}, -\omega) &= 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 \sum_{mn} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}) = \\ &= 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 S(\mathbf{q}, -\omega). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Таким образом, $S(\mathbf{q}, -\omega)$ имеет вполне определенный физический смысл и при конечной температуре.

Существует простое термодинамическое соотношение между $S(\mathbf{q}, -\omega)$ и $S(\mathbf{q}, \omega)$. Чтобы получить его, поменяем местами индексы в (2.147), записав

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \omega) &= Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_n} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{mn}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}) = \\ &= Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta(E_n - E_m)} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}) = \\ &= e^{\beta\omega} S(-\mathbf{q}, -\omega). \end{aligned} \quad (2.149)$$

Затем используем инвариантность относительно обращения времени, которая приводит к равенству

$$S(\mathbf{q}, -\omega) = S(-\mathbf{q}, -\omega). \quad (2.150)$$

Таким образом, мы приходим к важному результату

$$S(\mathbf{q}, \omega) = e^{\beta\omega} S(\mathbf{q}, -\omega). \quad (2.151)$$

Это соотношение и представляет собой формулировку принципа детального равновесия. Чтобы увидеть это, рассмотрим составную систему, представляющую собой систему многих частиц плюс пробная частица, и предположим, что она находится в тепловом равновесии при температуре T . В этом случае из принципа детального равновесия следует

$$\frac{\mathcal{F}(\mathbf{q}, \omega)}{\mathcal{F}(-\mathbf{q}, -\omega)} = e^{\beta\omega}. \quad (2.152)$$

Учитывая (2.147) и (2.148), видим, что (2.152) является просто другой записью соотношения (2.151).

Мы видим, что форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ должен зависеть от температуры. Чтобы показать влияние различных статистических факторов, вычислим $S(\mathbf{q}, \omega)$ для некоторых простых систем. Начнем с системы невзаимодействующих фермионов. Запишем $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ в следующем виде:

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mnp} e^{-\beta E_m} \langle m | c_{\mathbf{p}'}^+ c_{-\mathbf{q}} c_{\mathbf{p}} | n \rangle \langle n | c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{p}} | m \rangle \delta(\omega - \omega_{nm}). \quad (2.153)$$

Начальное состояние $|m\rangle$ соответствует некоторой конфигурации занятых состояний в импульсном пространстве. Согласно (2.153), оператор $c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{p}}$ связывает эту конфигурацию с новой конфигурацией $|n\rangle$, которая отличается от $|m\rangle$ тем, что частица с импульсом \mathbf{p} перешла в возбужденное состояние $(\mathbf{p}+\mathbf{q})$. Отсюда сразу же следует, что для системы невзаимодействующих фермионов разность энергий этих двух конфигураций равна

$$\omega_{nm} = \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 = \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 = \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{q^2}{2m} \right). \quad (2.154)$$

Поэтому можно написать

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mnp} e^{-\beta E_m} \langle m | c_{\mathbf{p}'}^+ c_{-\mathbf{q}} c_{\mathbf{p}}^+ c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} | m \rangle \delta(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0). \quad (2.155)$$

Матричный элемент в скобках отличен от нуля только при $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. Поэтому для $\mathbf{q} \neq 0$ имеем

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{m\mathbf{p}} e^{-\beta E_m} \langle m | c_{\mathbf{p}}^+ c_{\mathbf{p}} (1 - c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) | m \rangle \delta(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0), \quad (2.156)$$

где мы использовали правила коммутации фермиевских операторов. Заметим, что по определению вероятность найти частицу p в начальном состоянии дается функцией распределения свободных фермионов при температуре T

$$Z^{-1} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | c_p^+ c_p | m \rangle = n_p^0 = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p^0} + 1}. \quad (2.157)$$

Кроме того, состояния p и $p+q$ статистически независимы. Это означает, что

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_p n_p^0 (1 - n_{p+q}^0) \delta(\omega - \omega_{p+q}^0) \quad (2.158)$$

Нетрудно убедиться, что соотношение (2.158) удовлетворяет принципу детального равновесия (2.151)

Рассмотрим другой пример. Предположим, что оператор ρ_q^+ описывает чисто коллективную моду, например нулевой звук с большой длиной волны в пределе сильной связи. В этом случае состояние $|m\rangle$ будет соответствовать данному числу квантов коллективной моды, а ρ_q^+ приводит к процессам поглощения или испускания

$$\rho_q^+ = \frac{d_q (A_q^+ + A_{-q})}{\sqrt{2}}, \quad (2.159)$$

где d_q — некоторая постоянная. Соотношение (2.159) — это обычный переход от координат гармонического осциллятора к «фононным» операторам рождения и уничтожения; A_q^+ приводит к рождению коллективной моды с импульсом \mathbf{q} и энергией ω_q , A_{-q} — к аннигиляции моды с импульсом $-\mathbf{q}$. Подставляя (2.159) в (2.147), сразу находим

$$S_{\text{колл}}(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_m e^{-\beta E_m} \{ \langle m | A_q A_q^+ | m \rangle \delta(\omega - \omega_q) + \langle m | A_{-q}^+ A_{-q} | m \rangle \delta(\omega + \omega_{-q}) \} d_q^2 \quad (2.160)$$

Распределение фононов определяется соотношением

$$n_q^0(T) = Z^{-1} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | A_q^+ A_q | m \rangle = \frac{1}{e^{\beta \omega_q} - 1}. \quad (2.161)$$

Таким образом, мы имеем

$$S_{\text{колл}}(\mathbf{q}, \omega) = d_q^2 \{ (n_q + 1) \delta(\omega - \omega_q) + n_{-q} \delta(\omega + \omega_{-q}) \} = d_q^2 [\delta(\omega - \omega_q) + n_q [\delta(\omega - \omega_q) + \delta(\omega + \omega_q)]]. \quad (2.162)$$

При переходе ко второму выражению мы использовали инвариантность относительно обращения времени. Первый член в

правой части последнего равенства соответствует спонтанному испусканию коллективных фононов, второй — индуцированному испусканию, третий — индуцированному поглощению.

Легко провести соответствующее обобщение на конечные температуры различных корреляционных функций, рассмотренных в § 1. Например, статический форм-фактор, очевидно, равен

$$NS_{\mathbf{q}} = Z^{-1} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | \rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_{\mathbf{q}} | m \rangle. \quad (2.163)$$

Точно так же статистически усредняются и другие представляющие интерес величины.

ФУНКЦИЯ РЕАКЦИИ ПЛОТНОСТЬ — ПЛОТНОСТЬ

Вычисление функции реакции плотность — плотность при конечных температурах проводится совершенно аналогично нашему вычислению во втором порядке теории возмущений при $T=0$. Различие заключается в том, что теперь имеется ансамбль начальных состояний $|m\rangle$ с вероятностью $W(m)$, как и при вычислении $\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)$ [см. (2.146)] Используя инверсию времени, находим

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \frac{2\omega_{nm}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{nm}^2}. \quad (2.164)$$

Снова выделим в χ действительную и мнимую части:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \chi'(\mathbf{q}, \omega) + i\chi''(\mathbf{q}, \omega)$$

и заметим, что функция χ' четна по ω , а χ'' — нечетна.

Как и при $T=0$, диссипативная часть $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ функции реакции плотность — плотность непосредственно определяет стационарную передачу энергии от внешнего источника с частотой ω к многочастичной системе [чтобы убедиться в этом, заметим, что переход от соотношения (2.64) к (2.68) не изменяется при конечных температурах] Как видно из (2.164), функцию $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ можно переписать в форме

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_m} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{nm}|^2 \{ \delta(\omega - \omega_{nm}) - \delta(\omega + \omega_{nm}) \}. \quad (2.165)$$

Эта величина играет роль спектральной плотности функции реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$, так как

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi''(\mathbf{q}, \omega')}{\omega' - \omega - i\eta}. \quad (2.166)$$

Причинность реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ учитывается уравнением (2.166), из которого можно непосредственно получить соотношения Крамера — Кронига (2.78).

При конечных температурах продолжает существовать тесная связь между тепловыми флуктуациями в системе [которые легко выводятся из $S(\mathbf{q}, \omega)$] и линейной реакцией на изменение плотности [описываемой функцией $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$]. Согласно определению (2.165), имеем

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi [S(\mathbf{q}, \omega) - S(\mathbf{q}, -\omega)]. \quad (2.167)$$

Используем теперь принцип детального равновесия (2.151); при этом получим следующее соотношение:

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi [1 - e^{-\beta\omega}] S(\mathbf{q}, \omega), \quad (2.168)$$

известное под названием флуктуационно-диссипационной теоремы [8, 9].

При конечных температурах для описания флуктуаций плотности более удобна величина $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$, а не $S(\mathbf{q}, \omega)$ по той причине, что первая не зависит от температуры. Например, из (2.162) можно непосредственно найти, что для чисто коллективной моды, рассмотренной выше,

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi d_q^2 \{\delta(\omega - \omega_q) - \delta(\omega + \omega_q)\}. \quad (2.169)$$

Поэтому в тех случаях, когда требуется описать только *характер* флуктуаций плотности при конечных температурах, мы будем по возможности использовать величину χ'' .

Соотношение (2.168) можно записать в несколько более симметричном виде, если ввести симметризованный динамический форм-фактор

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{S(\mathbf{q}, \omega) + S(\mathbf{q}, -\omega)}{2} = S(\mathbf{q}, \omega) \frac{[1 + e^{-\beta\omega}]}{2}. \quad (2.170)$$

Комбинируя (2.168) и (2.170), находим

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \chi''(\mathbf{q}, \omega) \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.171)$$

Поэтому средний квадрат тепловых флуктуаций можно представить в виде

$$\langle \rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_{\mathbf{q}} \rangle = NS_{\mathbf{q}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi''(\mathbf{q}, \omega) \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}; \quad (2.172)$$

мы получили одну из обычных форм записи флуктуационно-диссипационной теоремы.

Переходя к пространственно-временному описанию, нетрудно видеть, что реакция определяется (в гейзенберговском представлении) коммутатором операторов флуктуаций плотности в двух различных пространственно-временных точках, тогда как антикоммутатор является мерой средних флуктуаций в системе. (Мы оставляем доказательство этого в качестве упражнения для читателя, интересующегося математической стороной вопроса.) Как известно, в системе, находящейся в равновесии, тепловые флуктуации плотности полностью определяются диссипативным поведением системы. Это не так в неравновесном случае.

При конечных температурах χ'' и S удовлетворяют практически тем же правилам сумм, что и при $T=0$. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения показать, что правило \hat{f} -сумм можно записать в виде

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \chi''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{m} \quad (2.173)$$

Правило сумм для сжимаемости вытекает из определения

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\mathbf{q}, 0) = -N^2 \kappa_{\text{изо}} = -\frac{N}{ms_{\text{изо}}^2}, \quad (2.174)$$

где $\kappa_{\text{изо}}$ — *изотермическая* сжимаемость, $s_{\text{изо}}$ — *изотермическая* скорость звука, определяемая соотношением (2.174). Используя (2.166) и (2.167), находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{S(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} \right] = \lim_{q \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\chi''(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} \right] = \frac{N}{ms_{\text{изо}}^2}. \quad (2.175)$$

Соотношения (2.173) и (2.175) дают полезную информацию о функции реакции $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Мы используем их в следующем параграфе для описания структуры χ'' в гидродинамическом режиме.

§ 7. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

СРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО РЕЖИМОВ

Перейдем к рассмотрению макроскопического предела $(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow 0$ функций реакции при конечных температурах. Как и при $T=0$, этот предел представляет особый интерес, ибо он непосредственно дает полезную информацию о природе спектра низлежащих возбуждений. На первый взгляд кажется, что при достаточно низких температурах предел $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ в известной мере похож на соответствующий предел при $T=0$. Однако это предпо-

ложение неверно: как бы низка ни была температура, при конечном ее значении появляется новый физический эффект, а именно столкновения термически возбужденных квазичастиц. Соответствующая частота столкновений ν имеет порядок T^2 . Для любых конечных T поведение системы при достаточно малых q и ω всегда определяется столкновениями, поэтому при переходе к пределу $(q, \omega) \rightarrow 0$ следует проявлять значительную осторожность.

Мы уже встречались в гл. 1, § 8 с примером режима, в котором столкновения играют основную роль. Мы нашли, что, когда частота ω становится меньше частоты столкновений ν , нуль-звуковая мода нейтральной ферми-жидкости сменяется первым звуком. Подобный переход происходит в любой системе, в которой существуют беспорядочные столкновения. Следует четко различать:

1) бесстолкновительный режим, в котором столкновения не влияют на поведение системы;

2) гидродинамический режим, который можно описать с помощью обычных макроскопических законов гидродинамики и термодинамики.

Обсудим кратко основные физические особенности функций реакции в этих двух режимах.

Качественно беспорядочные столкновения приводят к разрушению когерентной реакции системы на внешнее поле. Их влияние будет определяющим, когда частота столкновений много больше частоты поля, действующего на данную частицу. Последняя частота изменяется из-за эффекта Допплера: для частицы, движущейся со скоростью v_p , она равна $(\omega - q \cdot v_p)$, а не ω [математически это отражается на форме энергетических знаменателей, которые в разложении по теории возмущений всегда содержат выражение $(\omega - q \cdot v_p + i/\tau)$]. Пусть $\gamma = v^{-1}$ — время между столкновениями и $l = \bar{v}\tau$ — средняя длина свободного пробега (\bar{v} — средняя скорость квазичастиц). Если

$$\omega\tau \gg 1 \quad \text{и (или)} \quad ql \gg 1, \quad (2.176)$$

то для большей части значений p величиной $1/\tau$ можно пренебречь по сравнению с $\omega - q \cdot v_p$, т. е. столкновения не играют заметной роли. Наоборот, столкновения существенны, когда

$$\omega\tau \ll 1 \quad \text{и} \quad ql \ll 1. \quad (2.177)$$

Условия (2.177) определяют гидродинамический предел.

В бесстолкновительном режиме квазичастица «ощущает» воздействие внешней силы в течение большого числа периодов (или длин волн), не испытывая столкновений. В выражение (2.164) для функции реакции входят практически те же возбуждения, что и при $T=0$; столкновения приводят лишь к неболь-

шому уширению энергетических уровней. Матричные элементы или энергия возбуждений могут зависеть от температуры, но структура $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ качественно остается той же. Например, реакцию нейтральной ферми-жидкости можно еще описывать в терминах однопарных или коллективных возбуждений, лишь энергия возбуждений несколько размазывается. Иначе говоря, если мы находимся в бесстолкновительном режиме, то можно непосредственно переходить к пределу $T \equiv 0$.

Иную ситуацию мы имеем в гидродинамическом режиме, когда выполняются условия (2.177). В этом случае в течение одного периода внешнего поля (или на одной длине волны) квазичастица испытывает много столкновений. Она успеет прийти в равновесие с окружающей средой, прежде чем почувствует периодичность поля.

В этом случае, очевидно, нельзя описывать реакцию системы с помощью представления об элементарных возбуждениях. Вместо этого мы должны предположить, что благодаря столкновениям повсюду устанавливается состояние *локального термодинамического равновесия* с учетом воздействия внешней силы. Состояние системы можно полностью описать макроскопическими «локальными» величинами (плотность, поток, давление и т. д.); реакцию на внешнее поле можно получить с помощью обычных законов термодинамики и гидродинамики. В этом режиме структура функций реакции позволяет судить о средних «равновесных» свойствах. Сингулярности, обусловленные особенностями микроскопического спектра возбуждений, размываются столкновениями.

Промежуточная область соответствует условию

$$\omega\tau + ql \sim 1.$$

Здесь ситуация, очевидно, очень сложна, в отличие от двух обсуждавшихся предельных случаев. Реакцию на внешнее поле можно рассматривать или как сильно затухающую когерентную реакцию, или как термодинамическую реакцию в состоянии, заметно отличающемся от равновесия. Мы видели в гл. 1, § 9, что эта переходная область соответствует максимальному затуханию звуковых колебаний. По аналогии можно ожидать, что диссипативная часть функции реакции наиболее важна в этой области.

Если температура T достаточно мала, то когда \mathbf{q} и ω стремятся к нулю, всегда происходит переход к гидродинамическому режиму. «Макроскопический предел» принципиально отличается от соответствующего предела при $T \equiv 0$. Поэтому нужно внимательно следить за тем, чтобы не менять местами пределы $T \rightarrow 0$ и $(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow 0$. Если сначала устремить к нулю температуру, то частота столкновений $\nu \sim T^2$ обратится в нуль, а предел $\chi(\mathbf{q}, \omega)$

будет соответствовать бесстолкновительному режиму. Если, наоборот, сначала к нулю устремить (\mathbf{q}, ω) , то мы получим гидродинамическое значение $\chi(\mathbf{q}, \omega)$. Математически можно сказать, что $\chi(\mathbf{q}, \omega, T)$ имеет в нуле существенно особую точку.

До сих пор мы рассматривали столкновения только между термически возбужденными квазичастицами. В действительности гидродинамический режим может возникать при любых беспорядочных столкновениях. Например, в гл. 3 мы подробно обсудим свойства заряженного электронного газа, взаимодействующего с беспорядочно расположенными примесями. При малых частотах и волновых векторах система проявляет характерное «диффузное» поведение, которое можно описать макроскопическими уравнениями. В металлах электроны могут также сталкиваться с фононами и т. д. Во всех этих случаях реально важны частота столкновений ν и природа величин, сохраняющихся при столкновениях (число частиц и, возможно, импульс).

Строго говоря, «макроскопического» предела функций реакции для бесстолкновительного режима не существует. Однако при достаточно низких температурах, когда $1/\tau \ll \mu$ (где μ — химический потенциал), могут выполняться следующие условия:

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega, \quad qv_F \ll \mu. \quad (2.178)$$

Тогда мы имеем бесстолкновительный режим, причем частота и волновой вектор много меньше атомных величин. Поэтому реакция имеет макроскопический масштаб. Соответствующие функции реакции очень похожи на те, которые имеют место при $T=0$ (см., например, § 4 и 5, где приведены функции реакции нейтральной ферми-жидкости). Этот предел не будет здесь обсуждаться.

Обратимся теперь к гидродинамическому пределу. Мы покажем, как можно вычислить функции реакции с помощью микроскопических соображений или из гидродинамических уравнений. Затем мы сравним наши результаты со значением $\chi(\mathbf{q}, \omega)$, полученным для бесстолкновительного режима.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ ПЛОТНОСТЬ — ПЛОТНОСТЬ ДЛЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Рассмотрим нейтральную ферми-жидкость при таких низких температурах ($kT \ll \mu$), что теория Ландау применима. Тогда частота столкновений $\nu \sim (kT)^2/\mu$ очень мала. К системе приложена внешняя сила, действующая на плотность и характеризующаяся скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{q}, \omega)$. Соответствующее кинетическое уравнение для квазичастиц имеет вид (2.104). В противо-

положность бесстолкновительному режиму, описанному в § 5, в гидродинамическом пределе интеграл столкновений играет существенную роль.

Ввиду сложности интеграла столкновений (см. гл. 1, § 8) попытка найти решение уравнения (2.104) представляется безнадежным делом. Фактически мы можем обойти эту трудность в *крайнем* гидродинамическом пределе ($\omega t \ll 1$, $ql \ll 1$), используя прием, введенный в гл. 1, § 9 при описании первого звука. Так как столкновения стремятся восстановить локальное термодинамическое равновесие, они подавляют любую флуктуацию δn_p в распределении квазичастиц. Однако при этом должны выполняться фундаментальные законы сохранения числа частиц и импульса. Если мы разложим δn_p в ряд по сферическим функциям

$$\delta n_p = \sum_{l=0}^{\infty} \delta n_l P_l(\cos \theta), \quad (2.179)$$

то компоненты с $l=0$ и $l=1$ не испытывают влияния столкновений. Можно полагать, что в крайнем гидродинамическом пределе δn_p содержит только эти две первые компоненты. Другие члены, соответствующие $l \geq 2$, затухают вследствие столкновений. Другими словами, основная роль столкновений заключается в том, что они «обрывают» разложение для δn_p , устраняя все «несохраняющиеся» компоненты.

Теперь уравнение (2.104) решается легко. Разложим уравнение по сферическим функциям (принимая q за полярную ось) и сохраним только компоненты с $l=0$ и $l=1$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{qv_F}{3} \delta \bar{n}_1 - \omega \delta n_0 &= 0, \\ qv_F \delta \bar{n}_0 - \omega \delta n_1 - qv_F \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \varphi(q, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (2.180)$$

В эти уравнения интеграл столкновений не входит в силу законов сохранения числа частиц и импульса [первое из уравнений (2.180) есть не что иное, как уравнение непрерывности (1.88)]. Используя связь (1.34) между δn_l и $\delta \bar{n}_l$, находим

$$\delta n_0 = \frac{\left(\frac{\partial n^0}{\partial \epsilon_p} \right) \varphi(q, \omega)}{1 + F_0^s - 3\omega^2/q^2 v_F^2 (1 + F_1^s/3)}. \quad (2.181)$$

Из (2.181) с помощью (2.107) получим наведенную плотность частиц, а затем функцию реакции. Учитывая (1.61) и (1.100), представим результат в виде

$$\chi(q, \omega) = - \frac{Nq^2/m}{s^2 q^2 - \omega^2}. \quad (2.182)$$

Функция реакции (2.182) для гидродинамического режима заметно отличается от функции (2.111), соответствующей бесстолкновительному режиму. Отметим, что соотношение (2.182) справедливо только при очень низких температурах $kT \ll \mu$.

Изучая более внимательно результат (2.182), мы обнаруживаем несколько важных особенностей.

1. Функция $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ имеет полюс при частоте первого звука. Этого и можно было ожидать, поскольку первый звук представляет собой коллективную моду, соответствующую колебаниям плотности. Пожалуй, более удивительно то, что $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ не имеет других сингулярностей. Спектральная плотность, определяемая соотношением (2.166), сводится к единственному дискретному пику

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} \frac{Nq}{ms} [\delta(\omega + sq) - \delta(\omega - sq)]. \quad (2.183)$$

Подчеркнем, что в отличие от этого в бесстолкновительном режиме $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ имеет дискретный пик при частоте нулевого звука и *континуум*, соответствующий однопарным возбуждениям. Столкновения приводят к исчезновению этого континуума. Отметим, что соотношение (2.183) справедливо только при очень низких T . При высоких температурах структура χ'' усложняется из-за тепловой диффузии, что кратко обсуждается ниже.

2. Функция $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$, определяемая соотношением (2.183), удовлетворяет правилу f -сумм (2.173). Замечая далее, что при низких температурах $s = s_{\text{изо}}$, мы видим, что $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ удовлетворяет также и правилу сумм для сжимаемости (2.174) (как это и должно быть). Действительно, если бы мы сразу угадали, что $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ сводится к единственному дискретному пику, то результат (2.183) можно было бы получить непосредственно путем применения двух правил сумм (вычисление предоставляем читателю в качестве упражнения). Заметим, что «однородный» предел функции реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$, соответствующий $\omega \gg qv_F$, одинаков в бесстолкновительном и гидродинамическом режимах:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \sim \frac{Nq^2}{m\omega^2}, \quad \text{если } \omega \gg qv_F \quad (2.184)$$

[ср. (2.133)]. Этот результат является прямым следствием правила f -сумм.

3. Наконец мы отметим, что *статическая* реакция ($\omega = 0$) имеет такую же величину, как и в бесстолкновительном режиме

$$\chi(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{ms^2} \quad (2.185)$$

[ср. (2.124)]. Этот результат очень важен, так как он отражает одну общую особенность всех взаимодействующих систем: столк-

новения не влияют на статическую реакцию (пока $1/\tau \ll \mu$). Это свойство легко понять, если учесть, что при наличии статической внешней силы система переходит в новое возмущенное *равновесное состояние*. Так как система остается в равновесии, столкновения не могут играть сколько-нибудь заметной роли.

Мы неявно использовали третью особенность функции реакции при выводе правила сумм для сжимаемости (2.84). Тогда бесстолкновительная реакция на статическое возмущение вычислялась с помощью гидродинамических соображений. Эта заранее не очевидная процедура в действительности законна, так как функция $\chi(\mathbf{q}, 0)$ одинакова в бесстолкновительном и гидродинамическом режимах. Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, который мог возникнуть у внимательного читателя в связи с гл. 1. Мы обсуждали там устойчивость основного состояния с двух точек зрения: во-первых, путем исследования неустойчивых коллективных мод, а во-вторых, исходя из условия минимальности свободной энергии. Последнее рассмотрение является типично термодинамическим, тогда как первое относится к бесстолкновительному режиму. Совершенно не очевидно, что эти два различных подхода должны приводить к одному критерию устойчивости. Чтобы разрешить этот парадокс, заметим, что коллективная мода становится неустойчивой, когда ее частота стремится к нулю. Таким образом, в бесстолкновительном режиме порог неустойчивости для нулевого звука соответствует $\chi(\mathbf{q}, 0) = \infty$. С другой стороны, свободная энергия имеет минимум по отношению к флуктуациям плотности, если сжимаемость $\kappa > 0$. Порог неустойчивости соответствует условию $1/\kappa = -(1/\Omega) (\partial P / \partial \Omega) = 0$; при этом снова $\chi(\mathbf{q}, 0) = \infty$, но теперь уже в гидродинамическом режиме [ср. (2.83)]. Так как $\chi(\mathbf{q}, 0)$ не зависит от ql , эти два критерия совпадают. Этот вывод легко распространить и на другие неустойчивости (спиновые волны и т. д.).

Следует подчеркнуть, что для нахождения гидродинамического предела функций реакции не нужно решать кинетическое уравнение. Этот предел можно получить проще, решая соответствующие гидродинамические уравнения. Например, линейную реакцию на скалярный потенциал ϕ можно получить, применяя следующие макроскопические уравнения:

$$N \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$Nm \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P - N \nabla \phi, \quad (2.186)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{\kappa} = ms^2,$$

где $v(\mathbf{r}, t)$ — средняя локальная скорость жидкости, ρ — плотность, P — давление [ср. (1.49)]. Выполнив фурье-преобразование уравнений (2.186), получим прежний результат (2.182).

Поэтому поведение системы в гидродинамическом пределе полностью описывается обычными макроскопическими уравнениями, которые можно вывести, взяв соответствующие моменты полного кинетического уравнения. Решая уравнение (2.104) для гидродинамического предела, мы главным образом стремились подчеркнуть отличие от более сложного решения в бесстолкновительном случае.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ

Полученные выше результаты справедливы только в пределе очень низких температур, когда тепловые и механические степени свободы можно рассматривать независимо. В этом пределе изотермический и адиабатический процессы практически эквивалентны. Именно по этой причине наш результат (2.182) так прост.

При более высоких температурах адиабатическая скорость звука s начинает отличаться от изотермической $s_{\text{изо}}$. Они связаны соотношением

$$\frac{s^2}{s_{\text{изо}}^2} = \gamma, \quad (2.187)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ — отношение теплоемкостей. Далее, вследствие наличия связи между механическими и тепловыми степенями свободы флуктуации плотности испытывают теперь влияние процессов тепловой диффузии. Эта связь характеризуется множителем порядка $(\gamma-1)$. В такой же мере тепловая диффузия должна изменять функцию реакции плотности — плотность $\chi(\mathbf{q}, \omega)$. Детальное вычисление корреляционных функций для этого случая выполнено Кадаиовым и Мартином [10]. Оно основано на обычных законах термодинамики. Не приводя громоздких алгебраических выкладок, мы ограничимся только несколькими наиболее значительными результатами.

Как и можно было ожидать, спектральная плотность $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ имеет пик при частоте первого звука $\omega = sq$. Кроме того, в $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ имеется непрерывный фон, соответствующий тепловой диффузии. Этот вклад занимает весь спектр частот и пропорционален

$$\text{Im} \left[\frac{D_T q^2}{i\omega + D_T q^2} \right] = \frac{D_T q^2 \omega}{\omega^2 + [D_T q^2]^2}, \quad (2.188)$$

где D_T — коэффициент тепловой диффузии. Как мы и предполагали, вклад имеет величину порядка $(\gamma-1)$. Заметим, что пик, соответствующий первому звуку, накладывается на непрерывный фон. Таким образом, тепловая диффузия приводит к *затуханию* первого звука и к уширению соответствующего пика функции $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Это уширение имеет порядок $(\gamma-1)$ и исчезает при $T \rightarrow 0$.

Используя правила сумм (2.173) и (2.174), можно оценить величину полюса функции $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$, связанного с тепловой диффузией (и затухание первого звука). Комбинируя два правила сумм, можно написать

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi''(\mathbf{q}, \omega) \left[\frac{s^2 q^2}{\omega} - \omega \right] d\omega = \frac{Nq^2}{m} \left[\frac{s^2}{s_{\text{изо}}^2} - 1 \right] = \frac{Nq^2}{m} (\gamma - 1). \quad (2.189)$$

Представим $\chi''(q, \omega)$ в виде

$$\chi''(q, \omega) = z_q \{ \delta(\omega + sq) - \delta(\omega - sq) \} + \chi_{\text{тепл.}} \quad (2.190)$$

где регулярный член $\chi_{\text{тепл.}}$ обусловлен тепловой диффузией. Интеграл (2.189), очевидно, содержит только $\chi_{\text{тепл.}}$. Так как $\chi_{\text{тепл.}}$ — гладкая функция ω , отсюда следует, что величина $\chi_{\text{тепл.}}$ имеет порядок $\gamma-1$, как мы и предполагали. (Это обсуждение является хорошим примером того, как можно использовать правила сумм для получения простых качественных результатов.)

В заключение подчеркнем, что формализм функции реакции одинаково применим как для бесстолкновительного, так и для гидродинамического режимов. Все общие теоремы, основанные на правилах сумм, условия причинности и т. д., можно применять в любом пределе. Переход от одного режима к другому не влияет на справедливость метода, а отражается лишь на структуре результатов. Мы еще раз убеждаемся в полезности метода функции реакции, который позволяет с единой точки зрения описать свойства системы в весьма различных условиях.

§ 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель настоящей главы состояла в том, чтобы познакомить читателя с формализмом, используемым для точного выражения теоретических и экспериментальных результатов относительно реакции системы многих частиц на макроскопическую и микроскопическую внешнюю пробную силу. Использование функций реакции позволяет выявить связи между макроскопическими корреляциями и микроскопическими возбуждениями. Этот формализм можно применять как при анализе поведения данной квантовой жидкости, так и при сравнении поведения различных жидкостей. Мы рассмотрели частный пример — скалярный потенциал, действующий на плотность, и проанализировали флуктуации плотности в нейтральной ферми-жидкости. Однако использованный подход носит совершенно общий характер, он в той же мере применим к векторному потенциалу и флуктуациям тока, потенциалу, зависящему от спина, и флуктуациям плотности спина и т. д.

Мы видели, что структуру форм-фактора $S(q, \omega)$ в длинноволновом пределе для нормальной ферми-жидкости при $T=0$ можно качественно понять на основе общих соображений. Грубая оценка матричных элементов и энергии возбуждения позволяет получить информацию об относительной важности различных типов возбуждений, порождаемых флуктуацией плотности, а именно однопарных, многопарных и коллективных возбуждений. Этот анализ возможен только при $q \rightarrow 0$ [фактически только в этой области можно четко выделить различные вклады в $S(q, \omega)$]. Такое же рассмотрение пригодно не только для нормальной ферми-жидкости, но и для других систем. Конечно, при этом получают другие результаты, зависящие от структуры соответствующего спектра возбуждений,

Чтобы проиллюстрировать формальную теорию линейной реакции, мы использовали теорию Ландау для вычисления функции макроскопической реакции плотность — плотность в нейтральной ферми-жидкости. Формальный подход, применяемый в настоящей главе, наглядно показывает, почему теория Ландау является строгой в длинноволновом пределе: как мы установили раньше, теория Ландау эквивалентна пренебрежению многопарными возбуждениями при вычислении функции реакции. (Многопарные возбуждения описать труднее; кроме того, при этом обязательно нужно применять микроскопическую теорию.) В свете общих результатов этой главы мы видим, что успех теории Ландау обусловлен тем, что в пределе малых q и ω обычно можно пренебречь вкладом многопарных возбуждений. Если это не так (например, для правила f -сумм в неоднородной системе), следует ожидать, что результаты теории Ландау будут ошибочными. В этих случаях, чтобы получить правильный результат, следует сочетать два приближения. Вообще изучение взаимосвязи двух методов всегда очень полезно¹⁾.

Наконец, изучая структуру функций линейной реакции, можно явно описать переход от бесстолкновительного высокочастотного режима (когда реакция системы существенно микроскопична) к низкочастотному гидродинамическому режиму (где реакция описывается макроскопическими усредненными законами). Этот переход — существенная особенность квантовых жидкостей при конечных температурах, с которой мы снова столкнемся при описании свойств бозе-жидкости.

¹⁾ Следует отметить, что динамический форм-фактор $S(q, \omega)$ в случае жидкого ^3He может быть использован не только для подстановки в правила сумм, но и непосредственно определен из эксперимента по рассеянию света. Можно показать, что так называемый дифференциальный коэффициент экстинкции dh представляет собой ту часть декремента затухания света, которая связана с излучением рассеянных фотонов в элемент телесного угла $d\Omega$ и изменением их частоты на $d\Delta\omega$, связан с $S(q, \omega)$ соотношением

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial N} \right)^2 S(q, \Delta\omega) \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \frac{d\Omega}{4\pi} d\Delta\omega.$$

Здесь ω — частота падающего света, ϵ — диэлектрическая проницаемость, N — число атомов в единице объема, θ — угол рассеяния, q — изменение волнового вектора света, равное по абсолютной величине $(2\omega/c) \sin(\theta/2)$. Здесь, конечно, предполагается $q \ll p_F$, $\Delta\omega \ll \mu$; кроме того, ясно, что в силу изотропии $S(q, \Delta\omega)$ не зависит от направления q . Вывод этой формулы, равно как вычисление функции $S(q, \Delta\omega)$ по теории Ландау в бесстолкновительной области, приведен в обзоре [11]. Для случая $T \ll \Delta\omega$ и постоянной функции f_{pp} результат приведен в § 5 настоящей главы. Решение аналогичной задачи для однородной электронной системы приведено в конце гл. 4, формула (4.217). — Прим. ред.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить реакцию системы на магнитное поле $\mathcal{H}(r, t)$, зависящее от координат и времени. Показать, что фурье-компоненту индуцированной намагнитченности можно записать в виде

$$\mathcal{M}(q, \omega) = \chi_{\sigma}(q, \omega) (g\beta\sigma)^2 \mathcal{H}(q, \omega),$$

где $\chi_{\sigma}(q, \omega)$ — корреляционная спин-спиновая функция. Вычислить χ_{σ} с помощью точных собственных состояний системы.

Показать, что предел $\lim_{q \rightarrow \infty} [\chi_{\sigma}(q, 0)]$ связан со спиновой восприимчивостью χ_{σ} . Вычислить функцию $\chi_{\sigma}''(q, \omega)$ и показать, что она удовлетворяет правилу f -сумм в отсутствие магнитного поля.

Вычислить различные пределы $\chi_{\sigma}(q, \omega)$ при $(q, \omega) \rightarrow 0$, используя теорию Ландау.

2. Вычислить тензор реакций поток — поток $\chi_{\alpha\beta}(q, \omega)$, выразив его через точные собственные состояния системы. Используя закон сохранения числа частиц (2.27) и правило f -сумм, показать, что

$$\sum_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(q, \omega) + \frac{Nq^2}{m} = \omega^2 \chi(q, \omega).$$

3. Вычислить $\chi''(q, \omega)$ для системы невзаимодействующих фермионов при конечной температуре.

Литература ¹⁾

1. Brockhouse B. N., Proc. Symp. Inelastic Scatt. Neutr. in Solids and Liquids, Vienna, 1960.
2. Płaczek G., Phys. Rev., **86**, 377 (1952). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 11, ИЛ, 1955.)
3. Nozières P., Pines D., Phys. Rev., **109**, 741 (1958).
4. Kubo R., Canad. Journ. Phys., **34**, 1274 (1956).
5. Kubo R., Journ. Phys. Soc. Japan., **12**, 570 (1957). (Имеется перевод в сб. «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», ИЛ, 1961.)
6. Kramerers H. C., Atti. Congr. Intern. Fisica, Como, **2**, 545 (1927); см. также Collected Scientific Papers, Amsterdam, 1927.
7. Kronig R., Journ. Opt. Soc. Am., **12**, 547 (1926).
8. Nyquist H., Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
9. Callen H. B., Welton T. R., Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
10. Kadanoff L. P., Martin P. C., Ann. Phys., **24**, 419 (1962).
- 11*. Абрикосов А. А., Халатников И. М., УФН, **66**, 177 (1958).

¹⁾ Здесь и в дальнейшем литература, отмеченная звездочкой, добавлена редактором перевода. — Прим. ред.

Заряженные ферми-жидкости

Перейдем теперь к изучению системы взаимодействующих электронов. Для простоты обратимся сначала к однородной системе. Чтобы обеспечить ее устойчивость, будем считать, что полный заряд электронов компенсируется однородным положительным зарядом, плотность которого равна средней электронной плотности. При высоких электронных плотностях и низких температурах, которые нас и будут интересовать, невзаимодействующие электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака. Систему можно рассматривать как *квантовую плазму* по аналогии с обычной классической плазмой, описываемой распределением Максвелла — Больцмана. Кроме того, квантовая плазма похожа на нейтральную ферми-жидкость, которую мы до сих пор рассматривали, — она отличается от последней только наличием заряда у частиц. Поэтому ее можно также считать заряженной ферми-жидкостью.

Квантовая плазма представляет интерес сама по себе. Кроме того, она может служить хорошей моделью поведения электронов проводимости в простых металлах. Во многих отношениях влияние периодически расположенных ионов в таких металлах с достаточной точностью можно учесть с помощью однородно заряженного фона.

Кулоновское взаимодействие двух электронов очень медленно спадает с расстоянием, т. е. является *дальнодействующим*. В результате заряженная ферми-жидкость значительно отличается от нейтральной. Настоящая глава в основном посвящена новым физическим особенностям, связанным с кулоновским взаимодействием, и их описанию при помощи обобщения теории ферми-жидкости Ландау, предложенного Силиным [1].

В § 1 кратко рассмотрены расходимости (в элементарном изложении), которые обусловлены дальнодействием кулоновских сил. Мы введем важные физические представления об экранировании плазменных колебаний. В § 2 будет показано, что естественное и компактное описание этих понятий можно дать с помощью функции диэлектрической реакции. В § 3 мы выведем

макроскопическое кинетическое уравнение для квантовой плазмы, сравним его с уравнением Ландау, обсуждавшимся в гл. 1, и установим связь плазменных колебаний с нулевым звуком.

В § 4 кинетическое уравнение используется для вычисления макроскопической диэлектрической реакции заряженной ферми-жидкости. В § 5 проводится исследование обратного потока, а в § 6 кинетическое уравнение обобщается на случай внешнего электромагнитного поля. Между продольной и поперечной реакцией квантовой плазмы существует определенное различие как в смысле происходящих физических процессов, так и (в меньшей степени) в математической трактовке. Это также рассматривается в § 6. В § 7 изучается рассеяние на примесях. В заключение в § 8 еще раз анализируется применимость теории Ландау для описания электронов в металлах.

Данную главу можно рассматривать как аналог гл. 1: в ней вводятся важные физические понятия, которые описываются в макроскопическом пределе без микроскопической трактовки. Микроскопическое рассмотрение заряженной ферми-жидкости, а также более строгое описание функций диэлектрической реакции и их применение к некоторым физически интересным проблемам будет проведено в гл. 4.

§ 1. ЭКРАНИРОВАНИЕ И ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ

РАСХОДИМОСТИ

Раньше при теоретическом рассмотрении квантовой плазмы часто приходилось сталкиваться с расходимостями. Например, логарифмическая расходимость появляется при вычислении во втором порядке теории возмущений энергии основного состояния квантовой плазмы. Подобная расходимость возникает при вычислении в приближении Хартри — Фока групповой скорости частицы на ферми-поверхности. Расходится также энергия взаимодействия $f_{pp'}$ квазичастиц в неоднородной заряженной ферми-жидкости. Поэтому кинетическое уравнение, очевидно, неприменимо для описания системы частиц с малым радиусом взаимодействия. Такая расходимость должна быть устранена, только тогда можно будет надеяться получить аналог теории Ландау для заряженной ферми-жидкости.

Вышеупомянутые расходимости обусловлены большим радиусом кулоновского взаимодействия между электронами. Данный электрон взаимодействует не только с несколькими ближайшими соседями, но и с *большим числом* других электронов, так что его движение нельзя сделать от движения остальных.

В импульсном пространстве трудности возникают при рассмотрении той части взаимодействия, которая отвечает малой передаче импульса. Найдем фурье-компоненту кулоновского взаимодействия

$$V_q = \int d^3r e^{-iq \cdot r} \frac{e^2}{r} = \frac{4\pi e^2}{q^2}.$$

Производя какое-либо вычисление по теории возмущений, можно непосредственно убедиться, что сочетание множителей $1/q^2$ приводит к логарифмической или более высокой особенности.

Как избежать таких расходимостей, стало известно лишь сравнительно недавно. Физически *эффективное* взаимодействие между электронами в плазме (квантовой или классической) не является дальнедействующим. Когда электрон движется, он стремится раздвинуть другие электроны, что является результатом их взаимного кулоновского отталкивания. Можно сказать, что движущийся электрон окружен «экранирующей дыркой» (область, в которой вероятность нахождения другого электрона очень мала). Экранирующая дырка соответствует распределению положительного заряда, который в целом стремится компенсировать отрицательный заряд рассматриваемого электрона. В результате электростатическое поле электрона экранируется на больших расстояниях.

Когда электрон движется, он стремится перенести экранирующую дырку. Заметим, что *динамическое* экранирование движущегося заряда заведомо отличается от *статического* экранирования неподвижного заряда. (Другими словами, экранирующая дырка обладает инерцией.) Действительно, центральная проблема при построении свободной от расходимостей теории электронных систем заключается в последовательном введении понятия динамического экранирования. Тем не менее полезно кратко изучить экранирование неподвижного заряда — вопрос, к которому мы теперь переходим.

СТАТИЧЕСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Первые теоретические работы об экранировании касались реакции классической и квантовой плазмы на неподвижный внешний заряд [2, 3]. Рассмотрим заряд z , находящийся в квантовой плазме в начале координат. Электростатический потенциал $\phi(r)$, действующий на электрон вдали от начала, создается не только одним зарядом z . Внешний заряд поляризует электроны в своей окрестности; поэтому отдаленный электрон реагирует как на внешний заряд, так и на индуцированный поляризационный за-

ряд $e\langle\rho(\mathbf{r})\rangle$, Эффективный потенциал и поляризационный заряд связаны уравнением Пуассона

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\{z\delta(\mathbf{r}) + e\langle\rho(\mathbf{r})\rangle\}. \quad (3.1)$$

Плотность индуцированного заряда $e\langle\rho(\mathbf{r})\rangle$ можно вычислить с помощью приближения Томаса — Ферми (см. [3]). В этом приближении принимается, что химический потенциал электронов равен сумме потенциальной энергии $e\varphi(\mathbf{r})$ и кинетической энергии ϵ_F^0 , определяемой тем же соотношением, что и для системы невзаимодействующих электронов

$$N = \frac{(2m\epsilon_F^0)^{3/2}}{3\pi^2}. \quad (3.2a)$$

При равновесии химический потенциал должен быть постоянным. Следовательно, ϵ_F^0 зависит от координат. В данной точке \mathbf{r} мы имеем

$$\epsilon_F^0(\mathbf{r}) = \epsilon_F^0 - e\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.2b)$$

Флуктуация $\epsilon_F^0(\mathbf{r})$ приводит к флуктуации плотности частиц N . В первом порядке по этой флуктуации имеем

$$\langle\rho(\mathbf{r})\rangle = \frac{3}{2} \frac{N e \varphi(\mathbf{r})}{\epsilon_F^0}. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1) и переходя к фурье-компонентам в получившемся уравнении, находим

$$(q^2 + q_{FT}^2)\varphi_q = 4\pi z \quad (3.4)$$

и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{z}{r} e^{-q_{FT}r}, \quad (3.5)$$

где q_{FT} — так называемый волновой вектор экранирования Томаса — Ферми,

$$q_{FT} = \left(\frac{6\pi N e^2}{\epsilon_F^0} \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) видно, что поле внешнего заряда эффективно экранируется на расстояниях порядка $\lambda_{FT} = q_{FT}^{-1}$. Заметим далее, что радиус экранирования определяется конкуренцией между влиянием потенциальной и кинетической энергий на движение электронов. Взаимодействие между электронами обуславливает появление экранирования; кинетическая энергия, которая связана с беспорядочным движением электронов, оказывает противоположное действие. Легко найти, что радиус экранирования λ_{FT} ,

измеренный в единицах расстояния между частицами r_0 , пропорционален квадратному корню из отношения средней кинетической и потенциальной энергии:

$$\frac{\lambda_{FT}}{r_0} = \left[\left(\frac{8\pi}{9} \right) \frac{\varepsilon_F^0}{e^2/r_0} \right]^{1/2}, \quad (3.7)$$

где r_0 определяется соотношением

$$N = \frac{3}{4\pi r_0^3}.$$

В электронном газе, плотность которого близка к значению, характерному для металлов, потенциальная энергия на частицу e^2/r_0 сравнима с кинетической энергией на частицу, так что радиус экранирования λ_{FT} сравним с r_0 . Таким образом, экранирование чрезвычайно эффективно в представляющей физической интерес квантовой плазме.

Следует подчеркнуть, что приближение Томаса — Ферми не является точным. Прежде всего, оно пригодно только в том случае, когда неоднородности задачи характеризуются расстояниями, которые велики по сравнению с расстоянием между частицами. В противоположном случае предположение о локальной связи (3.2а) между плотностью частиц и энергией Ферми несправедливо. Таким образом, приближение Томаса — Ферми применимо только для вычисления реакции электронов на ту часть внешнего потенциала, которая медленно изменяется в пространстве. Поэтому результат приближения Томаса — Ферми следует писать в виде

$$\Phi_q = \frac{4\pi z}{q^2 + q_{FT}^2} \quad (qr_0 \ll 1). \quad (3.8)$$

Однако и в этом пределе результат не вполне точен. Соотношение (3.2а) описывает невзаимодействующие электроны. Поэтому можно ожидать, что оно пригодно только в пределе электронной системы очень высокой плотности, в которой взаимодействие между электронами заведомо можно считать слабым (см. гл. 5).

ДИНАМИЧЕСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Произведенное выше вычисление, как это ни соблазнительно, нельзя непосредственно применить к экранированию электрон-электронного взаимодействия в плазме, поскольку движущийся электрон, вообще говоря, не создает почти статического распределения заряда в плазме. Нам необходим зависящий от времени вариант приведенного самосогласованного вычисления. Предположим, что введенный в плазму заряд z движется с некоторой

скоростью V_e . Плотность заряда, созданная им, равна

$$z\rho_e(\mathbf{r}, t) = z\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t) \quad (3.9)$$

(предполагается, что в момент $t=0$ заряд находится в начале координат). Снова можно ожидать, что внешний заряд будет поляризовать электроны в своей окрестности. Результирующий электронный поляризационный заряд $e\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle$ теперь зависит от времени. Эффективный потенциал и поляризационный заряд связаны зависящим от времени уравнением Пуассона

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi[z\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t) + e\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle]. \quad (3.10)$$

Выполняя в (3.10) преобразование Фурье по координатам и времени, находим

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi}{q^2} \{z2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e) + e\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle\}. \quad (3.11)$$

Задача свелась к определению поляризационной плотности $\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle$, зависящей от частоты и волнового вектора. Эта величина представляет меру динамического экранирования в электронном газе.

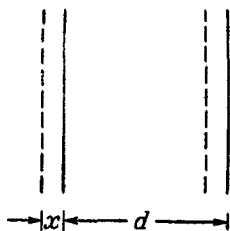
Рассмотренная задача является простым примером расчета экранированного электрон-электронного взаимодействия. Качественно каждый электрон в системе ведет себя подобно движущемуся пробному заряду и поляризует свое окружение. Другой электрон «видит» электрон и созданное им зависящее от времени поляризационное облако. Таким образом, эффективное взаимодействие между электронами динамически экранируется. Используя понятие динамического экранирования, нетрудно переформулировать кинетическое уравнение теории Ландау так, чтобы его можно было применять к квантовой плазме. Этим способом можно получить строгое выражение для реакции квантовой плазмы на электрическое поле, медленно меняющееся в пространстве и времени (это ограничение теории Ландау). Кроме того, оказывается, что учет динамического экранирования снимает расходимости в энергии основного состояния и в скорости квазичастиц, отмеченные выше.

ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Другим важным физическим явлением, характерным для однородной электронной системы, являются коллективные колебания электронов в целом, или плазменные колебания¹⁾. Упорядоченные колебания в классической плазме впервые изучали Ленгмюр и Тонкс [4, 5]. Первые исследования квантовой плазмы в металлах выполнены Пайнсом и Бомом [6, 7]. (Авторы не совсем точны. Впервые колебания в квантовой плазме были рассмотрены И. И. Гольдманом [18]. — Прим. ред.)

¹⁾ Упорядоченные колебания в классической плазме впервые изучали Ленгмюр и Тонкс [4, 5]. Первые исследования квантовой плазмы в металлах выполнены Пайнсом и Бомом [6, 7]. (Авторы не совсем точны. Впервые колебания в квантовой плазме были рассмотрены И. И. Гольдманом [18]. — Прим. ред.)

доченные колебания в плазме и экранирование — неразрывно связанные явления. Когда электроны движутся, стремясь экранировать распределение заряда в плазме, они, вообще говоря, сначала совершают перелет, затем возвращаются обратно, снова совершают перелет и т. д. Таким образом возникают колебания вблизи нейтрального состояния. Возвращающей силой, которая обуславливает эти колебания, является просто среднее



Фиг. 17. Смещение заряженного слоя.

самосогласованное поле всех электронов, т. е. точно такой же механизм, что и при возникновении колебаний типа нулевого звука. Вследствие большого радиуса действия кулоновских сил частота колебаний очень высока. Для длинных волн она почти постоянна и равна

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi N e^2}{m} \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Элементарно соотношение (3.12) можно вывести следующим образом. Предположим, что неравновесное распределение заряда в плазме создано смещением заряженного слоя толщиной d на малое расстояние x ($x \ll d$), как показано на фиг. 17. В этом случае слой ведет себя подобно конденсатору. Возникает постоянное поле \mathcal{E} , которое стремится восстановить нейтральность. Величина поля равна

$$\mathcal{E} = -4\pi N e x, \quad (3.13)$$

так как поверхностный заряд на каждой стороне конденсатора равен просто $N e x$. Движение электрона внутри слоя описывается уравнением

$$m \ddot{x} = e \mathcal{E} = -4\pi N e^2 x, \quad (3.14)$$

которое означает, что слой колеблется с частотой ω_p . В этом простом выводе мы полностью пренебрегли беспорядочным движением электронов, что можно сделать в случае колебаний с очень большой длиной волны.

Плазменные колебания, как и экранирование, являются типичным примером поляризационных явлений в плазме. Действи-

тельно, оба эффекта можно легко описать в рамках общего рассмотрения поляризационных или диэлектрических процессов в электронной системе. Поэтому мы перейдем к развитию такой теории, описав в деталях реакцию плазмы на внешнее продольное поле. Развитый формализм позволит нам непосредственно распространить теорию Ландау на случай заряженной фермижидкости.

§ 2. ФУНКЦИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

РЕАКЦИЯ НА ПРОДОЛЬНОЕ ПОЛЕ

Предположим, что электронная система помещена во внешнее продольное электрическое поле $\mathfrak{D}(\mathbf{r}, t)$. Вектор \mathfrak{D} представляет собой электрическую индукцию, определяемую в элементарной электростатике. Она удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi z\rho_e(\mathbf{r}, t), \quad (3.15)$$

где $z\rho_e(\mathbf{r}, t)$ — плотность стороннего заряда, введенного в газ в точке \mathbf{r} . Как мы видели, внешнее поле поляризует электронную систему. Можно считать, что флуктуации индуцированного заряда создают поле *пространственного заряда* \mathfrak{E}_p . Согласно законам электростатики, электрическое поле в системе равно

$$\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{D}(\mathbf{r}, t) + \mathfrak{E}_p(\mathbf{r}, t), \quad (3.16)$$

где $\mathfrak{E}_p(\mathbf{r}, t)$ можно связать с плотностью поляризационного заряда уравнением

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_p(\mathbf{r}, t) = 4\pi e \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.17)$$

Когда речь идет о диэлектриках, следует изменить уравнение (3.17), чтобы учесть поверхностный эффект, обусловленный появлением заряда на границах образца. Здесь это не делается, поскольку мы предполагаем, что система замкнута сама на себя (например, с помощью внешней идеально проводящей проволоки, которая соединяет стороны, перпендикулярные полю \mathfrak{E}).

Комбинируя (3.15) — (3.17), напомним

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \{z\rho_e(\mathbf{r}, t) + e \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle\}. \quad (3.18)$$

Это уравнение связывает электрическое поле со сторонним зарядом и флуктуациями индуцированного заряда. В (3.15) и (3.18) перейдем к фурье-компонентам по координатам и времени:

$$i\mathbf{q} \cdot \mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi z\rho_e(\mathbf{q}, \omega), \quad (3.19)$$

$$i\mathbf{q} \cdot \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi \{z\rho_e(\mathbf{q}, \omega) + e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle\}. \quad (3.20)$$

Для макроскопического внешнего поля эти уравнения выражают обычные законы электростатики применительно к диэлектрику. Мы воспользуемся ими для рассмотрения *микроскопических* явлений с любыми волновыми векторами \mathbf{q} и частотами ω , когда поля сколь угодно быстро изменяются в пространстве и времени. Уравнение (3.20) тогда является определением электрического поля $\mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega)$ в том случае, когда обычное макроскопическое определение непригодно.

Сделаем теперь основное предположение, а именно будем считать, что диэлектрическая реакция электронов $\langle \rho \rangle$ пропорциональна приложенному полю \mathfrak{D} . Это заведомо справедливо при достаточно слабом внешнем поле. Таким образом, мы предполагаем, что при вычислении реакции системы можно пренебречь членами, пропорциональными \mathfrak{D}^2 , и т. д. Отсюда сразу же следует, что поле \mathfrak{E} пропорционально \mathfrak{D} . Как \mathfrak{D} , так и \mathfrak{E} — чисто продольные поля. Поэтому по аналогии с обычной электростатикой можно написать

$$\mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (3.21)$$

где $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ — зависящая от частоты и волнового вектора диэлектрическая проницаемость. Эта величина является естественным обобщением (на случай полей, изменяющихся в пространстве и времени) статической однородной диэлектрической проницаемости, используемой в электростатике. Из (3.16) мы видим, что $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ представляет прямую меру диэлектрической реакции электронной системы. Она показывает, в какой мере внешнее поле \mathfrak{D} экранируется индуцируемой им электронной поляризацией.

Из (3.19) — (3.21) можно непосредственно получить два полезных выражения для $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{\mathbf{q} \cdot \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} - 1 = - \frac{4\pi i e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{\mathbf{q} \cdot \mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (3.23)$$

Они позволяют непосредственно определить ϵ , если установлено соответствующее соотношение между $\langle \rho \rangle$ и \mathfrak{E} или \mathfrak{D} .

ЭКРАНИРОВАНИЕ И ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Мы видим, что с помощью $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ можно естественным образом описать линейную реакцию плазмы на внешнее поле. В качестве примера рассмотрим случай, обсуждавшийся в предыдущем параграфе: статический заряд z , помещенный в начале ко-

ординат. Фурье-компонента по координатам истинного потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ равна

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi z}{q^2 \epsilon(\mathbf{q}, 0)}. \quad (3.24)$$

Статическая зависящая от волнового вектора диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\mathbf{q}, 0)$ описывает экранирующее действие электронной системы. В приближении Томаса — Ферми, сравнивая (3.24) и (3.8), находим

$$\epsilon_{FT}(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{FT}^2}{q^2} \quad (qr_0 \ll 1). \quad (3.25)$$

Предположим теперь, что заряд z движется с некоторой скоростью \mathbf{V}_e ; тогда вместо (3.11) для Фурье-компоненты истинного потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$ можем написать

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi z 2\pi \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e)}{q^2 \epsilon(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (3.26)$$

Динамическое экранирующее действие электронного газа описывается проницаемостью $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

Зная $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, можно также записать дисперсионное уравнение для плазменных колебаний. Рассмотрим уравнения (3.19) и (3.20) в отсутствие стороннего заряда. Их можно представить в виде

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{q} \cdot \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega) &= 0, \\ i\mathbf{q} \cdot \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega) &= 4\pi e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют следующее тривиальное решение:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \langle \mathbf{q} \cdot \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = 0,$$

которое соответствует отсутствию заряда и электрического поля в плазме. Однако для частоты ω_q , такой что

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0, \quad (3.27)$$

могут существовать отличные от нуля электрическое поле $\mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega)$ и плотность $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$. Другими словами, возникают свободные колебания плотности заряда (в отсутствие внешнего поля). Таким образом, соотношение (3.27) есть условие существования плазменных колебаний с частотой ω_q . При этом в плазме существует продольное электрическое поле. Мы увидим, что в пределе длинных волн ($\mathbf{q} \rightarrow 0$) диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.28)$$

Соответствующая частота плазменных колебаний равна ω_p , что согласуется с результатом простых вычислений, проведенных выше.

ПРОДОЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Реакция электронной системы на приложенное электрическое поле часто выражается через проводимость, т. е. отношение индуцированного в системе тока $e\langle \mathbf{J} \rangle$ ¹⁾ к эффективному электрическому полю \mathcal{E} . Для рассматриваемых полей, изменяющихся в пространстве и времени, можно написать

$$e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \sigma(\mathbf{q}, \omega) \mathcal{E}(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.29)$$

Здесь $e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ — фурье-компонента индуцированного тока, а $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$ — скалярная продольная проводимость. (Мы рассматриваем только продольное внешнее электрическое поле и, как всегда, предполагаем, что система изотропна.) Между σ и ϵ имеется простая связь. Чтобы получить ее, используем уравнение непрерывности для заряда и индуцированного тока в электронном газе:

$$\text{div} \langle \mathbf{J} \rangle + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} = 0. \quad (3.30)$$

Выполним в (3.30) преобразование Фурье:

$$\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \omega \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle. \quad (3.31)$$

Умножая (3.29) на \mathbf{q} и используя (3.22), находим

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}. \quad (3.32)$$

§ 3. МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ — СИЛИНА

Покажем теперь, каким образом с помощью представления о динамическом экранировании можно распространить теорию Ландау на электронную систему. Как и в гл. 1, рассмотрим состояние, характеризуемое функцией распределения

$$n_p(\mathbf{r}, t) = n_p^0 + \delta n_p(\mathbf{r}, t). \quad (3.33)$$

Предполагается, что отклонение δn_p от основного состояния мало, содержит только длинноволновые флуктуации и отлично от нуля лишь вблизи ферми-поверхности, где квазичастицы хорошо

¹⁾ Через $\langle \mathbf{J} \rangle$ авторы обозначают плотность потока частиц, а через $e\langle \mathbf{J} \rangle$ — плотность электрического тока. Однако для удобства первую величину мы, следуя авторам, будем иногда называть плотностью тока, — *Прим. ред.*

определены. Снова будем рассматривать полную энергию как функционал $E[n_p(\mathbf{r}, t)]$ функции распределения. При попытке непосредственно разложить этот функционал по степеням δn_p возникают трудности, связанные с энергией взаимодействия двух квазичастиц $f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}')$. Как мы отмечали, выражение типа (1.76) расходится, что является прямым следствием дальнедействующего характера кулоновского взаимодействия между электронами.

Как впервые показал Силин [1], эти трудности снимаются, если самосогласованным образом учесть динамическое экранирование при движении частиц. Выражение типа (1.76) имеет смысл, если его относить к взаимодействию между *экранированными* квазичастицами, т. е. к квазичастице вместе с экранирующим ее облаком. При построении теории необходимо с самого начала учитывать образование экранирующего облака. Это можно сделать следующим образом:

1. Рассмотрим сначала электростатическое взаимодействие возбужденной квазичастицы со *средним* полем, создаваемым остальными квазичастицами. Отклонение от равновесия приводит к средней флуктуации плотности

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_p \delta n_p(\mathbf{r}, t) \quad (3.34)$$

и, следовательно, к электрическому полю $\mathcal{E}_p(\mathbf{r}, t)$ пространственного заряда, которое определяется соотношением

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_p(\mathbf{r}, t) = 4\pi e \sum_p \delta n_p(\mathbf{r}, t). \quad (3.35)$$

Эту часть взаимодействия между квазичастицами можно учесть в кинетическом уравнении, рассматривая $\mathcal{E}_p(\mathbf{r}, t)$ как дополнительное приложенное поле, приводящее к экранированию поля, созданного любой данной квазичастицей

2. Вследствие этого каждая возбужденная квазичастица окружена поляризационным облаком других квазичастиц. Таким образом, взаимодействие между любыми двумя квазичастицами экранируется, причем радиус эффективного взаимодействия относительно мал (порядка атомных размеров). С этим экранированным взаимодействием связаны имеющие малый радиус корреляции между двумя квазичастицами (которые *не учитываются средним* поляризационным полем, обуславливающим диэлектрическое экранирование). Кроме того, когда данная частица приближается к другой, она стремится изменить поляризационное облако этой частицы, что приводит к отклонению от простого кулоновского взаимодействия. Оба эффекта проявляются как *флуктуационное* поле, связанное с каждой квазичастицей.

Поскольку среднее поляризационное поле уже учтено, мы имеем систему квазичастиц с малым радиусом взаимодействия которую, следуя Ландау, можно рассматривать, введя энергию взаимодействия $f_{pp'}$. Таким образом мы приходим к локальной энергии возбуждения квазичастицы

$$\tilde{\epsilon}_p(\mathbf{r}) = \epsilon_p + \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}(\mathbf{r}). \quad (3.36)$$

Вывод кинетического уравнения проводится точно так же, как и в гл. 1. В отсутствие внешнего поля и без учета столкновений мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta n_p + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_p + \\ + \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) \cdot \sum_{p'} f_{pp'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{p'} - e \mathcal{E}_p \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где поляризационное поле \mathcal{E}_p определяется уравнением (3.35). Если мы рассматриваем периодическое возмущение с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω , уравнение (3.37) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} - \\ - e \mathcal{E}_p \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где поляризационное поле \mathcal{E}_p равно

$$\mathcal{E}_p = -i\mathbf{q} \frac{4\pi e}{q^2} \sum_p \delta n_p. \quad (3.39)$$

Используя (3.38) и (3.39), представим кинетическое уравнение в отсутствие внешнего поля в виде однородного интегрального уравнения

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) \sum_{p'} \left(f_{pp'} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \delta n_{p'} = 0. \quad (3.40)$$

Это довольно удивительный результат. Он показывает, что *полное* взаимодействие между заряженными квазичастицами характеризуется коэффициентом Фурье

$$\frac{4\pi e^2}{q^2} + f_{pp'} \quad (3.41)$$

(по крайней мере при $\mathbf{q} \rightarrow 0$).

Сравнивая (3.40) с результатом (1.103), полученным для нейтральной системы, мы ясно видим особенности поведения электронного газа. Для нейтральной системы $f_{pp'}$ представляет *полное* взаимодействие между квазичастицами, которое остается регулярным при $q \rightarrow 0$. Наоборот, для заряженной системы полное взаимодействие (3.41) сингулярно вследствие большого радиуса кулоновского взаимодействия. Чтобы обойти эту трудность, мы выделили сингулярный член $4\pi e^2/q^2$ и рассмотрели его с помощью среднего поляризационного поля, действующего на электроны. Оставшаяся часть представляет собой *экранированное* взаимодействие $f_{pp'}$, которое регулярно при $q \rightarrow 0$.

В кинетическом уравнении (3.37) легко учесть внешнее продольное электрическое поле $\mathfrak{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t)$. Так как заряд квазичастицы равен e (заряд сохраняется при включении взаимодействия между частицами), сила, которую испытывает квазичастица со стороны поля $\mathfrak{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t)$, равна

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t). \quad (3.42)$$

Теперь в уравнение (3.37) мы можем добавить обусловленный этой силой член

$$-e\mathfrak{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu). \quad (3.43)$$

В зависимости от характера внешнего поля можно различать две ситуации.

1. *Неоднородное продольное поле.* В этом случае $\mathfrak{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{D}(\mathbf{r}, t)$. Возвращаясь к (3.43) и (3.37), мы видим, что на электроны действует эффективное электрическое поле $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$. Реакцию электронов мы получим с помощью уравнения (3.37) (в котором \mathfrak{E}_p следует заменить на \mathfrak{E}), учитывая также соотношение (3.21)

$$\mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega),$$

где $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, в свою очередь, определяется соотношением (3.22) или (3.23). Динамическое экранирование электронов играет существенную роль при определении реакции электронов и фактически делает возможным согласованное вычисление этой реакции.

2. *Однородное внешнее поле ($q \equiv 0$).* В этом случае экранирование отсутствует. Поляризационное поле могло бы создаваться только поверхностным зарядом на границах системы. Однако такой эффект исключается в силу наших граничных условий. Поэтому мы имеем

$$\mathfrak{E}(0, \omega) = \mathfrak{D}_{\text{стор}}(0, \omega). \quad (3.44)$$

И в том, и в другом случае следует пользоваться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_p + v_p \cdot \nabla_r \delta n_p + v_p \cdot \left\{ \sum_{p'} f_{pp'} \nabla_r \delta n_{p'} - e \mathcal{E} \right\} \delta(\epsilon_p - \mu) = 0. \quad (3.45)$$

Различие между однородным и неоднородным полем сказывается только на виде связи \mathcal{E} с \mathcal{D} .

СРАВНЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ И НЕЙТРАЛЬНОЙ СИСТЕМ

Как мы видели раньше, характерное отличие электронной системы проявляется в реакции на неоднородное продольное поле. Именно в этом случае возникают флуктуации заряда. Тогда дальнедействующий характер взаимодействия частиц приводит к необходимости ввести с самого начала поле пространственного заряда, ответственное за динамическое экранирование взаимодействия частиц.

Большую часть равновесных свойств электронного газа, связанных с *однородными* возмущениями, можно рассматривать в полной аналогии с нейтральной системой (см. гл. 1). Имеется, однако, одно важное исключение, а именно сжимаемость электронной системы. При вычислении сжимаемости предполагают, что равномерно распределенный положительный заряд сжимается вместе с электронами так, чтобы повсюду выполнялось условие нейтральности. Эта точка зрения противоположна лежащей в основе предыдущего обсуждения, где мы молчаливо предполагали, что положительный фон остается однородным. Поэтому обратимся еще раз к вычислению сжимаемости, проведенному в гл. 1.

Для нейтральной системы мы полагали, что сила $\mathfrak{F}(\mathbf{r})$, с которой продольное внешнее поле действует на единицу объема, уравновешивается распределением давления $\delta P(\mathbf{r})$, так что

$$\nabla \delta P = \mathfrak{F}(\mathbf{r}). \quad (3.46)$$

Дополнительное давление δP в свою очередь изменяет плотность на величину

$$\langle \delta \rho \rangle = \kappa N \delta P, \quad (3.47)$$

где κ — сжимаемость. Результаты (3.46) и (3.47) в равной мере применимы и к системе заряженных частиц, если надлежащим образом определить $\mathfrak{F}(\mathbf{r})$.

Пусть $e\rho(\mathbf{r})$ — флуктуация плотности заряда электронов, обусловленная отнесенной к единице объема силой

$$\mathfrak{F}(\mathbf{r}) = Ne\mathcal{D}(\mathbf{r}).$$

Электроны создают поляризационное поле \mathcal{E}_p . Так как мы хотим в каждой точке сохранить зарядовую нейтральность, мы должны изменить положительный фон тоже на величину $\rho(\mathbf{r})$. Это изменение приведет к появлению добавочного пространственного заряда $-\epsilon\rho(\mathbf{r})$, который в точности компенсирует электронный пространственный заряд. Таким образом, поляризационное поле, создаваемое положительным фоном, равно $-\mathcal{E}_p$. Полное поле $\mathcal{D}(\mathbf{r})$, действующее на электронную систему, складывается из поля $-\mathcal{E}_p(\mathbf{r})$ и поля «внешних», или сторонних, зарядов $\mathcal{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r})$:

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}) = \mathcal{D}_{\text{стор}}(\mathbf{r}) + [-\mathcal{E}_p(\mathbf{r})]. \quad (3.48)$$

При определении сжимаемости нас интересует реакция системы на силы, которые являются «внешними» по отношению к полной системе «электроны + фон», т. е. на поле $\mathcal{D}_{\text{стор}}$. Согласно (3.48), сжимаемость κ относится тогда к реакции на поле $(\mathcal{D} + \mathcal{E}_p)$, т. е. на экранированное электрическое поле $\mathcal{E}(\mathbf{r})$. Поэтому κ можно вычислить с помощью уравнения Ландау — Силина (3.45) при условии, что связь между наведенной плотностью и электрическим полем дается уравнением [см. (3.46) и (3.47)]

$$\nabla \langle \delta\rho \rangle = N^2 \epsilon \kappa \mathcal{E}. \quad (3.49)$$

Теперь легко видеть, что сжимаемость κ связана с энергией экранированного взаимодействия квазичастиц f_{pp} , так же, как и в случае нейтральной системы:

$$\kappa = \frac{1}{N^2} \frac{\rho_F m^*}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{1 + F_0^s}. \quad (3.50)$$

СРАВНЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С НУЛЕВЫМ ЗВУКОМ

Коллективная мода всегда соответствует возможным колебаниям системы в отсутствие *внешнего* поля. В нейтральной системе единственной силой, явно приложенной к частицам, является внешняя сила \mathfrak{F} . Поэтому коллективные моды описываются кинетическим уравнением (1.83), в котором мы должны положить $\mathfrak{F} = 0$. Такое уравнение неприменимо к продольным колебаниям заряженной ферми-жидкости. В этом случае флуктуации плотности приводят к появлению поля пространственного заряда \mathcal{E}_p , которое, в свою очередь, заставляет электроны двигаться. Иначе говоря, имеется «обратная связь» реакции электронов с электрическим полем \mathcal{E} , в котором находится система. Чтобы описать продольные колебания электронного газа, нужно решить совместно кинетическое уравнение (3.38) и уравнение

Пуассона (3.39). В этом заключается отличие продольных колебаний в заряженной и нейтральной ферми-жидкостях.

Особое поведение заряженных систем ярко проявляется, когда мы объединяем (3.38) и (3.39) в одно уравнение (3.40). Сингулярный член $4\pi e^2/q^2$ во взаимодействии, очевидно, заметно сказывается на длинноволновых продольных колебаниях. Действительно, при $q \rightarrow 0$ мы можем пренебречь величиной $f_{pp'}$ по сравнению с $4\pi e^2/q^2$. Решение уравнения (3.40) тогда получается сразу. Используя результаты гл. 1, можно показать, что в случае трансляционно-инвариантной системы продольная коллективная мода имеет частоту $\omega = \omega_p$. Это не что иное, как плазменные колебания, рассмотренные выше (см задачу 1). Вообще легко показать, применяя изложенный ниже способ (см. задачу 2), что дисперсионное уравнение для продольных коллективных мод, описываемых уравнением (3.40), идентично уравнению (3.27)

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0,$$

которое и определяет частоту плазменных колебаний.

Таким образом, плазменные колебания соответствуют своего рода «нуль-звуковой моде» в заряженной жидкости. В пределе длинных волн частота этой моды сильно смещается из-за большого радиуса кулоновского взаимодействия: линейный спектр $\omega = s_0 q$, характерный для нейтральной ферми-жидкости, заменяется постоянной частотой $\omega = \omega_p$, когда $q \rightarrow 0$. Математически это различие в поведении обусловлено сингулярным членом $4\pi e^2/q^2$ во взаимодействии в уравнении (3.40).

Если q увеличивается, в уравнении (3.40) нельзя более пренебрегать величиной $f_{pp'}$. Действительно, можно ожидать, что при достаточно больших значениях q величина $4\pi e^2/q^2$ станет малой по сравнению с $f_{pp'}$, и мы снова вернемся к характерному поведению нейтральной системы. Если взаимодействие $f_{pp'}$ отталкивательное, плазменные колебания сменяются нуль-звуковой модой (см. задачу 3). Практически этот переход невозможно наблюдать. Как мы увидим, $f_{pp'}$ всегда имеет величину порядка $4\pi e^2/p_F^2$. Переход от плазменных колебаний к нулевому звуку происходит при $q \sim p_F$, т. е. в области, где теория Ландау неприменима и где коллективные моды сильно затухают.

Внимательный читатель заметит, что фактически плазменные частоты даже при $q \rightarrow 0$ не могут быть вычислены с помощью теории Ландау, так как последняя применима только к макроскопическим частотам, много меньшим ω_p . В действительности, как мы увидим в гл. 4, значение плазменной частоты $\omega = \omega_p$ в теории Ландау оказывается правильным просто в силу правила сумм. С другой стороны, использование теории Ландау для вы-

числения поправок порядка q^2 к плазменным частотам незаконно и приводит, вообще говоря, к неправильному результату.

Для других коллективных мод (симметричных по спину или антисимметричных волн с квантовыми числами $m \geq 1$) трудностей, связанных с полем пространственного заряда \mathcal{E}_p , не возникает. В таких колебаниях флуктуации плотности отсутствуют и $\mathcal{E}_p = 0$. Тем не менее в случае *поперечных симметричных волн* появляются новые особенности. Такие волны обуславливают флуктуации поперечного тока, которые приводят к электромагнитному полю. Следовательно, поперечные моды связаны с электромагнитным полем совершенно так же, как продольные моды с электростатическим. Чтобы описать поперечные симметричные моды, нужно решить совместно кинетическое уравнение (3.38) и уравнения Максвелла. Эту проблему мы обсудим в § 6.

Все другие коллективные моды (симметричные моды с $m \geq 2$ и антисимметричные моды) не меняются от того, что частицы заряжены. В этом случае ответ на вопрос о том, существует ли коллективная мода, зависит от знака и величины соответствующей компоненты $f_{pp'}$. Например, в системах электронов проводимости (в металлах), вероятно, не распространяются продольные спиновые волны U всех подобных систем спиновая восприимчивость несколько больше значения, соответствующего парамагнетизму свободных электронов Паули, что отвечает отрицательным значениям F_0^a , т. е. эффективному слабому притяжению в синглетном спиновом состоянии. Поэтому продольные спиновые волны, как и в случае ${}^3\text{He}$, сильно затухают.

В заключение еще раз укажем условия применимости кинетического уравнения Ландау — Сирина (3.45). Во-первых, необходимо, чтобы волновые векторы и частоты, соответствующие любой неоднородности, имели «макроскопический» масштаб:

$$\omega \ll \mu, \quad qv_F \ll \mu. \quad (3.51)$$

Во-вторых, для того чтобы можно было пренебрегать столкновениями, должно выполняться по крайней мере одно из следующих условий:

$$v \ll \omega, \quad v \ll qv_F, \quad (3.52)$$

где v — частота столкновений.

§ 4. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЫ

Вычислим с помощью уравнения Ландау — Сирина (3.45) *макроскопическую* диэлектрическую реакцию. Так как мы ограничиваемся линейной реакцией, достаточно рассмотреть внешнее

поле \mathfrak{D} , представляющее собой плоскую волну с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω

$$\mathfrak{D}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathfrak{D} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{\eta t}. \quad (3.53)$$

Зависимость всех других интересующих нас величин от координат и времени описывается таким же экспоненциальным множителем. (В дальнейшем мы будем опускать эту экспоненту, обозначая все величины их амплитудами \mathfrak{E} , $\langle \rho \rangle$ и т. д. Амплитуды комплексны, их аргументы характеризуют фазу.) Удобно переписать уравнение (3.45), используя «локальное» распределение $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}}$, введенное в гл. 1. Мы видим, что отклонение функции распределения от локального основного состояния $\bar{n}_{\mathbf{p}}^0$ описывается соотношением

$$\delta \bar{n}_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}} - \bar{n}_{\mathbf{p}}^0 = \delta n_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \delta n_{\mathbf{p}'}. \quad (3.54)$$

Используя $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}}$, можно привести наше основное кинетическое уравнение к виду

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}} - \omega \delta n_{\mathbf{p}} + i e \mathfrak{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu) = 0. \quad (3.55)$$

Уравнения (3.54) и (3.55) соответствуют одному интегральному уравнению для величины $\delta n_{\mathbf{p}}$. Конечно, решать его гораздо сложнее, чем соответствующее уравнение для слабо взаимодействующей системы (где $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = 0$ и $\delta \bar{n}_{\mathbf{p}} = \delta n_{\mathbf{p}}$). Тем не менее в нескольких физически интересных случаях можно получить точное решение уравнения Ландау — Силина.

Вычисление диэлектрической реакции с помощью уравнения (3.55) похоже на вычисление корреляционной функции плотность — плотность для нейтральной системы. Последнюю величину мы будем обозначать через $\chi^n(\mathbf{q}, \omega)$, чтобы не путать ее с соответствующей корреляционной функцией для электронного газа (на которую заметно влияет экранирование, см. гл. 4). В макроскопическом бесстолкновительном режиме $\chi^n(\mathbf{q}, \omega)$ можно получить, решая кинетическое уравнение (2.104). Чтобы наглядно показать это соответствие, перепишем (2.104) в виде

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}} - \omega \delta n_{\mathbf{p}} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \varphi^n \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu) = 0, \quad (3.55a)$$

где $\varphi^n(\mathbf{q}, \omega)$ — фурье-компонента скалярного потенциала, приложенного к нейтральной системе. Сравнивая (3.55) и (3.55a), мы видим, что для электронной системы $e \mathfrak{E}$ играет ту же роль, что и $(-\nabla \varphi^n)$. Мы можем сконструировать функцию псевдо реакции электронной системы $\chi^n(\mathbf{q}, \omega)$, взяв реакцию нейтральной

системы с теми же N , ϵ_p и f_{pp} . С помощью определения в (3.22) сразу находим

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^n(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.56)$$

Используя (3.56) и результаты, полученные в гл. 2, § 5, легко найти различные асимптотические выражения для $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в пределе длинных волн. Мы, однако, поступим иначе и еще раз проследим за всеми деталями вычислений в рассматриваемом пределе. Мы надеемся, что благодаря этому читатель приобретет некоторый навык в решении основного в теории Ландау кинетического уравнения.

ЭКРАНИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЬНОГО ПОЛЯ ($\omega \equiv 0$)

Пусть статическое поле \mathcal{E} направлено параллельно \mathbf{q} . Вместо уравнения (3.55) сразу же получаем

$$\delta \bar{n}_p = -\frac{ie}{q} \mathcal{E} \delta(\epsilon_p - \mu). \quad (3.57)$$

Так как отклонение $\delta \bar{n}_p$ изотропно и не зависит от спина, (1.34) сводится к соотношению

$$\delta n_p = \frac{\delta \bar{n}_p}{1 + F_0^s}. \quad (3.58)$$

Зная $\delta \bar{n}_p$, можно вычислить величину

$$\langle \rho \rangle = \sum_p \delta n_p = -\frac{3iNem^*}{qp_F^2(1 + F_0^s)} \mathcal{E}. \quad (3.59a)$$

Используя значение (1.61) макроскопической скорости звука s , можно привести этот результат к виду

$$\langle \rho \rangle = -\frac{iNe}{qms^2} \mathcal{E}. \quad (3.59b)$$

Подставляя (3.59) в (3.22), находим

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{ms^2 q^2}. \quad (3.60)$$

Следует подчеркнуть, что этот результат справедлив только для малых q .

Интересно сравнить (3.60) с результатом (3.25), который получается в приближении Томаса — Ферми. Последний можно записать следующим образом:

$$\epsilon_{FT}(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{FT}^2}{q^2} = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{mq^2 (v_F^2/3)}. \quad (3.61)$$

Мы видим, что точный результат теории Ландау отличается от результата приближения Томаса — Ферми только тем, что макроскопическое значение скорости звука, входящее в выражение для ϵ в системе взаимодействующих частиц, для невзаимодействующей системы заменяется ее значением $v_F/\sqrt{3}$. После этого сравнения становится ясно, что в обоих случаях вычисляется самосогласованная реакция электронов на эффективное поле \mathcal{E} . Однако в теории Ландау принимается во внимание и взаимодействие частиц, которое описывается дополнительным силовым членом в (3.45), пропорциональным $f_{pp'}$ (т. е. разности между $\delta\bar{n}_p$ и δn_p).

С помощью (1.49) можно выразить статическую диэлектрическую проницаемость через сжимаемость κ (вспоминая, что $\Omega=1$):

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi N^2 e^2}{q^2} \kappa. \quad (3.62)$$

Результат (3.62) можно было бы получить непосредственно из макроскопических соображений, основанных на соотношении (3.49) и уравнении Пуассона. Для этого перейдем в (3.49) к электростатическому потенциалу $\phi(\mathbf{r})$:

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = -\kappa N^2 e \phi(\mathbf{r}). \quad (3.63)$$

Соотношение (3.63) заменяет результат (3.3), полученный в приближении Томаса — Ферми. Если ϕ медленно меняется в пространстве, это соотношение является точным.

Очень важен результат (3.60). Он показывает, что экранирование длинноволновых статических возмущений в распределении заряда является *характерным* свойством квантовой плазмы и что радиус экранирования λ_s простым образом связан с макроскопической скоростью звука:

$$\lambda_s = \frac{s}{\omega_p},$$

где ω_p — классическая плазменная частота (3.12).

ЭФФЕКТИВНОЕ ЭЛЕКТРОН-ИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Еще одна статическая задача, которую можно с успехом изучать с помощью теории Ландау, — это вычисление матричного элемента для рассеяния «одетого» электрона на ионе (примеси, введенной в систему, или на одном из ионов, образующих данный металл). Предположим, что точечная примесь с зарядом Ze находится в начале координат. Она создает «сторонний»

электростатический потенциал Ze/r , фурье-компонента которого равна

$$\varphi_q^{\text{стор}} = \frac{4\pi Ze}{q^2}.$$

В результате квазичастица с импульсом p приобретает дополнительную эффективную потенциальную энергию $\mathcal{V}_p^{\text{эфф}}(\mathbf{r})$ с фурье-компонентой $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$. (Строго говоря, фурье-компонента $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$ определена только в пределе длинных волн $q \ll p_F$, где понятие локальной энергии квазичастицы имеет смысл.) Величину $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$ можно рассматривать как матричный элемент для рассеяния квазичастицы на примеси, сопровождающегося переходом из состояния с импульсом p в состояние с импульсом $(p+q)$.

Эта интерпретация величины $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$, очевидно, справедлива при условии, что можно пренебречь кулоновским взаимодействием между электронами. В этом случае квазичастицы сводятся к голым электронам, а эффективная потенциальная энергия равна

$$\mathcal{V}_{qp} = e\varphi_q^{\text{стор}} = \frac{4\pi Ze^2}{q^2}.$$

С другой стороны, гамильтониан, который описывает взаимодействие электрона с примесью, можно записать в виде

$$\sum_i \frac{Ze^2}{r_i} = \sum_q \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \rho_q^+ = \sum_{qp} \frac{4\pi Ze^2}{q^2} c_{p+q}^+ c_p$$

(относительно перехода к представлению вторичного квантования см. приложение). Матричный элемент для перехода $p \rightarrow p+q$, очевидно, равен $4\pi Ze^2/q^2$, т. е. \mathcal{V}_{qp} , как мы и предполагали.

Вследствие кулоновского взаимодействия между электронами вокруг примеси возникает экранирующее облако, что приводит к отклонению $\delta n_p(\mathbf{r})$ в распределении квазичастиц [фурье-компонента этого отклонения равна $\delta n_p(\mathbf{q})$]. Эффективная потенциальная энергия $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$ изменяется по двум причинам:

1) электростатический потенциал примеси экранируется; ввиду этого $\varphi_q^{\text{стор}}$ надо разделить на диэлектрическую функцию $\epsilon(\mathbf{q}, 0)$;

2) рассеянная квазичастица с импульсом p взаимодействует с экранирующим облаком посредством экранированного взаимодействия квазичастиц f_{pp} .

Предположим, что величина Z достаточно мала, так что реакция электронов на примесь линейна. Тогда полный эффективный потенциал равен

$$\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}} = \frac{4\pi Ze^2}{q^2 \epsilon(q, 0)} + \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}(q). \quad (3.64a)$$

Положим $\omega=0$ в кинетическом уравнении (3.55) и заметим, что экранированное электрическое поле примеси равно

$$\mathcal{E}_q = -iq \frac{4\pi Ze}{q^2 \epsilon(q, 0)}.$$

Используя (3.54) и (3.64a), можно записать (3.55) в виде

$$\delta n_p(q) = -\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}} \delta(\epsilon_p - \mu). \quad (3.64b)$$

Соотношение (3.64b) можно рассматривать как определение эффективной потенциальной энергии $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$ квазичастицы p в поле примеси. Исходя из этого соотношения, можно явно показать, что $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$ является матричным элементом для перехода квазичастицы из состояния p в состояние $(p+q)$.

Так как ион создает продольное статическое поле, мы можем найти $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$, воспользовавшись полученными выше результатами. Отклонение $\delta n_p(q)$ от равновесного значения дается формулами (3.57) и (3.58). Подставляя их в (3.64a), находим

$$\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}} = \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \frac{1}{\epsilon(q, 0)} \frac{1}{1 + F_0^s}. \quad (3.65a)$$

[Отметим, что равенство (3.65a) справедливо только в пределе длинных волн.] Используя (3.60) и (1.61), можно переписать (3.65a) в виде

$$\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}} = Z \frac{p_F^2}{3m^*N} = \frac{Z}{\nu(0)}, \quad (3.65b)$$

где $\nu(0)$ — плотность состояний (на единичный интервал энергий) на ферми-поверхности. Этот результат был получен Хейне (неопубликованная работа).

Правая часть равенства (3.64a) помогает уяснить физическую природу двух поправок в $\mathcal{V}_{qp}^{\text{эфф}}$, возникающих из-за электрон-электронного взаимодействия. Первый член связан с кулоновским взаимодействием электрона со средним зарядом экранирующего облака (последнее приводит к диэлектрическому экранированию поля примеси). В первом порядке по электронному взаимодействию этот член соответствовал бы *прямым* процессам в приближении Хартри (см. гл. 5, § 1). Второй же член описывает экранированное взаимодействие с отдельными электронами

экранирующего облака; в первом порядке он учитывает вклад обменного рассеяния налетающего электрона с импульсом \mathbf{p} на электронах экранирующего облака. Две поправки, учитывающие экранирование и обменное рассеяние, стремятся компенсировать друг друга, поэтому коэффициент F_0^s выпадает из окончательного результата (3.65б). Взаимодействие электронов сказывается только на плотности состояний $\nu(0)$.

Такой компенсации не происходит в том случае, когда имеет место взаимное рассеяние двух внешних зарядов, скажем Ze и $Z'e$. Здесь обменный эффект отсутствует. Матричный элемент для рассеяния двух зарядов с передачей импульса \mathbf{q} равен

$$\gamma_q^{\text{эфф}} = \frac{4\pi ZZ'e^2}{q^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, 0)} = \frac{ZZ'}{\nu(0)} (1 + F_0^s), \quad (3.66)$$

где мы учли (3.60) и (1.61). Мы видим, что в противоположность матричному элементу для электронного рассеяния $\gamma_q^{\text{эфф}}$ зависит от коэффициента F_0^s . Отметим еще раз, что соотношение (3.66) справедливо только в линейном режиме, когда Z и Z' достаточно малы¹⁾.

Результат (3.65б) справедлив только для случая рассеяния на точечной статической примеси. В действительности любой ион в реальном металле окружен электронами внутренних оболочек, с которыми может взаимодействовать рассеянный электрон (как путем поляризации ионного остова, так и посредством обменной связи с глубоко лежащими электронами). Поэтому эффективное электрон-ионное взаимодействие уже не описывается выражением (3.65б). Несмотря на это, оно является полезным приближением и играет важную роль в теории псевдопотенциала, используемой для изучения металлов [11].

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ($0 < \omega \ll qv_F$)

Рассмотрим реакцию электронов на почти статическое продольное поле, частота которого ω мала по сравнению с характерной одиозлектронной

¹⁾ Если в электролитную жидкость внести смесь с зарядом Ze , то полное изменение заряда равно

$$\sum_p e \delta n_p = -e \sum_p \left[\frac{Z}{\nu(0)} \right] \delta(\varepsilon_p - \mu) = -Ze$$

[см. (3.64а) и (3.64б)]. Можно идти и обратным путем и получить $\gamma_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{эфф}}$, исходя из предположения о полном экранировании. Этот прием тесно связан с правилом сумм Фриделя, относящимся к рассеянию электронов на экранированном потенциале примеси [8]. Соотношение (3.65б) легко получить, используя представление псевдопотенциала через фазы рассеяния и правило сумм Фриделя (см., например, работу Грина и Копа [9]).

частотой qv_F . Электроны, движущиеся в фазе с волной, т. е. со скоростью v_p , удовлетворяющей условию

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p = \omega,$$

будут интенсивно поглощать энергию. Так как $\omega \ll qv_F$ и $v_p = v_F$, эти электроны движутся почти перпендикулярно \mathbf{q} .

Найдем решение уравнения (3.55) с точностью до членов первого порядка по ω/qv_F . Напишем разложение

$$\delta \bar{n}_p = \delta \bar{n}_p^{(0)} + \delta \bar{n}_p^{(1)} + \dots$$

Член нулевого порядка $\delta \bar{n}_p^{(0)}$ описывается соотношением (3.57). Член первого порядка равен

$$\delta \bar{n}_p^{(1)} = \frac{\omega \delta n_p^{(0)}}{q \cdot \mathbf{v}_p - i\eta}, \quad (3.67)$$

где величина $i\eta$ введена для учета наших адиабатических причинных граничных условий. Используя соотношения (3.57) и (3.58), которые справедливы в нулевом порядке по ω/qv_F , мы можем написать

$$\delta \bar{n}_p^{(1)} = - \frac{i\epsilon\omega \delta(\epsilon_p - \mu)}{q(q \cdot \mathbf{v}_p - i\eta)(1 + F_0^s)}. \quad (3.68)$$

Теперь легко вычислить изменение *локальной* плотности, вызванное внешним полем. Удерживая только члены первого порядка, найдем

$$\langle \bar{\rho} \rangle = \sum_p \delta \bar{n}_p = \frac{-ie\eta}{q} \left\{ \frac{N(1 + F_0^s)}{ms^2} + \sum_p \frac{\omega}{(q \cdot \mathbf{v}_p - i\eta)} \frac{\delta(\epsilon_p - \mu)}{1 + F_0^s} \right\}. \quad (3.69)$$

Найдем теперь связь $\langle \bar{\rho} \rangle$ с реальным изменением плотности $\langle \rho \rangle$. Так как мы вычисляем скалярную величину, можно показать, что

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle \bar{\rho} \rangle}{1 + F_0^s}. \quad (3.70)$$

(В сумму по p вносят вклад только члены с $l=0$, так что отношение соответствующих членов в $\delta \bar{n}_p$ и δn_p равно $1 + F_0^s$.) Заметим, что соотношение (3.70) является *интегральным*. Так, например, равенство $\delta \bar{n}_p^{(1)} = (1 + F_0^s) \delta n_p^{(1)}$ не имеет места. Мы предоставляем читателю показать, используя (3.70) и соотношение

$$\sum_p \frac{\delta(\epsilon_p - \mu)}{q \cdot \mathbf{v}_p - i\eta} = \pi i \sum_p \delta(\epsilon_p - \mu) \delta(q \cdot \mathbf{v}_p), \quad (3.71)$$

что вместо (3.60) имеет место соотношение

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2} \left\{ 1 + i \left(\frac{\pi}{6} \right) \frac{\omega}{q p_F} \left(\frac{p_F^2}{ms^2} \right) \right\} + \dots \quad (0 < \omega \ll qv_F). \quad (3.72)$$

Новый диссипативный член в диэлектрической проницаемости стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$, как это и должно быть. Его зависимость от истинной ско-

рости звука s отличается от зависимости соответствующей величины для свободного электронного газа.

Мы отметим, что таким простым способом нельзя получить реактивный член порядка ω^2 в $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Для этого нужно знать величину

$$\delta n_{\mathbf{p}}^{(2)} = \frac{\omega \delta n_{\mathbf{p}}^{(1)}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - i\eta},$$

а следовательно, и $\delta n_{\mathbf{p}}^{(1)}$. Однако простой связи между $\delta n_{\mathbf{p}}^{(1)}$ и $\delta n_{\mathbf{p}}^{(1)}$ нет, в чем читатель может легко убедиться с помощью (3.54) и (3.68).

СЛАБО НЕОДНОРОДНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ ПОЛЕ ($0 < qv_F \ll \omega$)

Пусть приложенное поле почти однородно и его фазовая скорость велика по сравнению с v_F . Из уравнения (3.55) сразу находим

$$\delta n_{\mathbf{p}}(0, \omega) = \frac{ie\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\omega} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu). \quad (3.73)$$

Затем с помощью выражения для плотности тока

$$e\mathbf{J} = e \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \mathbf{j}_{\mathbf{p}} \quad (3.74)$$

мы можем вычислить проводимость. Для трансляционно-инвариантной системы $\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m$, и прямое интегрирование приводит к выражению

$$\sigma(0, \omega) = \frac{iNe^2}{m\omega}. \quad (3.75)$$

Это известный результат, который можно вывести непосредственно. Подчеркнем, что σ зависит от голой массы m , а не от эффективной массы m^* .

С помощью (3.32) находим

$$\varepsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (0 < qv_F \ll \omega). \quad (3.76)$$

Строго говоря, этот результат доказан лишь для малых ω ($\omega \ll E_F$). Однако в гл. 4 с помощью двух «продольных» правил сумм мы увидим, что он справедлив для всех частот. Как мы знаем, нули $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ определяют частоты плазменных колебаний. Поэтому из соотношения (3.76) следует, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} \omega_q = \omega_p.$$

Этот результат согласуется с простым вычислением, приведенным в начале главы, и, как мы увидим, фактически является точным. Подчеркнем еще раз, что теорию Ландау нельзя использовать для определения поправок порядка q^2 к плазменной частоте.

ПОЛЮСЫ ФУНКЦИИ $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$

Мы видели в гл. 2, что функция реакции нейтральной системы $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ имеет полюс при частоте нулевого звука. Этот полюс существует, когда нулевой звук является хорошо определенной коллективной модой, т. е. для достаточно больших значений F_0^S . Исходя из соотношения (3.56) можно ожидать, что для электронной жидкости при подобных обстоятельствах функция $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ будет иметь полюс. Так, в пределе сильной связи $F_0^S \gg 1$ функция $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ принимает вид

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i\eta)^2 - s^2 q^2}, \quad (3.77)$$

где s — скорость первого и нулевого звуков (в этом пределе они совпадают). [Это выражение справедливо как в бесстолкновительном режиме с сильной связью, так и в «крайнем» гидродинамическом режиме, его применимость в последнем случае непосредственно следует из (2.182) и (3.56).] Вообще можно ожидать, что $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ будет иметь полюс нуль-звукового типа и дополнительную структуру, связанную с вкладом одипарных возбуждений. Этот полюс $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ наблюдать довольно трудно, как мы увидим в гл. 4, он соответствует обращению в нуль диссипативной части функции реакции плотность — плотность $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Другими словами, с помощью внешнего скалярного возмущения нельзя определить структуру $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Фактически в этом случае измеряется $\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$. Это вытекает из исходных соотношений (3.19) и (3.23). Связь между скалярным пробным возмущением и $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$, возможно, имеет место в случае анизотропной системы или вследствие граничных эффектов. Эта возможность заслуживает исследования. Вообще говоря, вопрос о полюсах функции $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ имеет в основном академический интерес.

§ 5. ОБРАТНЫЙ ПОТОК

До сих пор мы изучали экранирование неподвижной заряженной примеси в квантовой плазме. Обратимся теперь к реакции электронной системы на движущуюся примесь. Ограничимся рассмотрением медленно движущейся тяжелой примеси. В этом случае динамическое экранирование приводит к появлению потока около примеси, который экранирует длинноволновые флуктуации, связанные с движением примеси. Этот *обратный поток* электронов соответствует индуцированному поляризованному облаку, движущемуся вместе с примесью, и представляет собой чисто реактивный эффект. Существует и диссипативный эффект — передача энергии от примеси к плазме. Однако для медленно движущейся примеси, скорость которой $V_e \ll v_F$, эта диссипация мала.

Предположим, что примесь имеет заряд z и что в момент $t=0$ она находилась в начале координат. Если можно пренебречь отдачей примеси (именно для этого мы считаем ее тяжелой), то мы вправе рассматривать ее как внешний пробный заряд с плотностью

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t). \quad (3.78a)$$

Преобразование Фурье дает

$$\rho_e(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (3.78б)$$

С движением примеси связана флуктуация потока, фурье-компонента которого есть

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{V}_e 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (3.79)$$

Если заряд z достаточно мал, реакция электронного газа будет линейной и ее легко вычислить с помощью соотношения (3.23). Индуцированная плотность электронного заряда определяется соотношением

$$e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} - 1 \right\} z 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (3.80)$$

Чтобы найти индуцированный ток, заметим, что он содержит только продольную часть (так как он наводится *продольным* полем примеси). Тогда мы можем найти $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle$ с помощью уравнения непрерывности (3.31). Поскольку мы имеем дело с изотропной системой, преобразование Фурье дает

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \frac{q\omega}{q^2} \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \mathbf{q} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e}{q^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} - 1 \right\} \frac{z}{e} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (3.81)$$

До сих пор наши результаты были точными (в линейном приближении). Теперь предположим, что примесь движется медленно, т. е. что $V_e \ll v_F$, иначе говоря, будем рассматривать квазистатический предел. В первом приближении мы можем пренебречь передачей энергии от примеси к плазме и написать

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \mathbf{q} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e}{q^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, 0)} - 1 \right\} \frac{z}{e} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e). \quad (3.82)$$

Для длинных волн $q \ll p_F$ диэлектрическая проницаемость, описываемая выражением (3.60), имеет порядок $1/q^2$. С точностью до членов порядка q^2 можно пренебречь $1/\varepsilon$ по сравнению с единицей. Тогда

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = -\mathbf{q} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e}{q^2} \frac{z}{e} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e) \quad (q \ll p_F). \quad (3.83)$$

Это поразительный результат. Сравнивая (3.83) и (3.79), видим, что флуктуация *полного* электрического тока $z\mathbf{J}_e(\mathbf{q}, \omega) + e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{q} \cdot (z\mathbf{J}_e + e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle) = 0 \quad (q \ll p_F) \quad (3.84)$$

Это означает, что длинноволновые флуктуации тока, индуцированные в электронном газе, в точности компенсируют продольную часть флуктуаций тока, переносимого примесью. Мы можем говорить об индуцированном электронном токе как об *обратном потоке* электронов около примеси, который компенсирует продольную часть примесного тока.

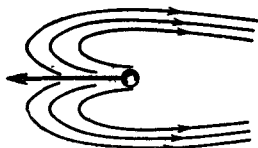
Чтобы получить качественное представление о пространственном распределении индуцированного тока, предположим, что соотношение (3.83) справедливо при всех q . Совершив фурье-преобразование, мы найдем

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{z}{4\pi e} \nabla (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \frac{1}{R} = \frac{z}{4\pi e} \left\{ \frac{3(\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{V}_e}{R^3} \right\}, \quad (3.85)$$

где мы ввели

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{V}_e t. \quad (3.86)$$

Соотношение (3.85) описывает *дипольный поток* около примеси типа изображенного на фиг. 18. Поток существует на больших расстояниях от движущейся примеси.



Фиг. 18. Дипольный обратный поток вблизи заряженного примесного атома.

На первый взгляд этот результат вызывает удивление, поскольку индуцированный заряд локализован в непосредственной близости от примеси. Если считать экранирование полным, то индуцированная электронная плотность есть

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{z}{e} \delta(\mathbf{R}). \quad (3.87)$$

Так как это распределение движется со скоростью \mathbf{V}_e , можно было бы думать, что электронный ток равен

$$e \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle = -z \mathbf{V}_e \delta(\mathbf{R}). \quad (3.88)$$

Причина, по которой (3.88) отличается от (3.85), лежит в характере поля заряженной примеси, которое может вызывать только продольные токи в электронной системе. Примесный ток можно разбить на продольную и поперечную части. Каждая из них за-

нимает весь объем, несмотря на то, что полный ток примеси сосредоточен при $\mathbf{R}=0$. Индуцированный ток (3.85) в точности компенсирует продольную часть тока, обусловленного примесью, тогда как поперечная часть остается неизменной. Фактически дипольную форму $\langle \mathbf{J}(\mathbf{R}) \rangle$ можно предсказать из чисто геометрических соображений: ротор $\langle \mathbf{J} \rangle$ должен быть равен нулю, как и для любого продольного вектора; дивергенция должна обращаться в нуль вместе с индуцированной плотностью. Тогда (3.85) является единственно возможной векторной функцией.

Существование чисто дипольного обратного потока непосредственно обусловлено полным «диэлектрическим» экранированием. Это очевидное следствие большого радиуса кулоновского взаимодействия. В рассматриваемом случае медленно движущейся примеси обратный поток представляет собой основной эффект. Однако это уже не так, если примесь движется быстро по сравнению с электронами ($V_e \gg v_F$) — в этом случае главным эффектом является передача энергии от примеси к плазме (см. гл. 4, § 4).

Дипольный поток (3.85) получен в предположении, что в соотношении (3.81) величиной $1/\epsilon$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Очевидно, это приближение справедливо только при малых q . Можно ожидать, что при этом правильно описывается характер потока на больших расстояниях от примеси (R много больше радиуса экранирования). Однако это не совсем так: мы увидим в гл. 5, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon(q, 0)$ имеет сингулярность при $q=2p_F$, где p_F — фермиевский импульс. Эта сингулярность приводит к осцилляциям электронной плотности типа $\cos(2p_F R)/R^3$. Продольный ток, связанный с этими осцилляциями, изменяется как $1/R^3$ и, таким образом, сравним с дипольным обратным потоком (3.85). Однако он осциллирует довольно быстро (на атомных расстояниях). Поэтому дипольный поток (3.85) описывает электронный ток на большом расстоянии от примеси, усредненный по объемам, большим по сравнению с атомными.

Подчеркнем, что обратный поток в заряженной ферми-жидкости отличается от такого же потока в нейтральной ферми-жидкости. Сравнивая результаты настоящего параграфа с результатами гл. 2, § 5 [например, (3.85) с (2.142)], мы видим, что в этих двух случаях продольная реакция имеет одинаковую структуру, но разную величину. В нейтральной системе продольная компонента обратного потока не компенсирует соответствующую компоненту потока, связанного с примесью. Особое поведение заряженной ферми-жидкости объясняется тем, что экранирующее действие электронов преобладает над их реакцией на любое квазистатическое продольное поле.

§ 6. РЕАКЦИЯ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕАКЦИИ

Рассмотрим реакцию электронной системы на поперечное электромагнитное поле, изменяющееся в пространстве и времени. Мы изложим обычное квазиклассическое решение этой задачи, когда электрическое и магнитное поля \mathcal{E} и \mathcal{H} определяются самосогласованным образом из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (3.89)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \langle \mathbf{J} \rangle. \quad (3.90)$$

В уравнении (3.90) $e \langle \mathbf{J} \rangle$ представляет ток, индуцированный в системе электромагнитным полем. Мы предположим, что поля достаточно малы, так что можно ограничиться линейной связью между наведенным током и напряженностью электрического поля (это условие выполняется везде, за исключением лазерных пучков). Поэтому напомним

$$e \langle J_{\mu} \rangle = \sigma_{\mu\nu} \mathcal{E}_{\nu}. \quad (3.91)$$

Это уравнение служит определением тензора проводимости $\sigma_{\mu\nu}$. Теперь следует найти самосогласованное решение системы уравнений, поскольку токи, наводимые полями, в свою очередь изменяют поля.

Снова рассмотрим изотропную электронную систему. В этом случае поперечное электрическое поле, т. е. поле, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{q} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad (3.92)$$

не может создать индуцированный заряд, поскольку отсутствует электростатическое поляризующее поле. Между \mathbf{J} и \mathcal{E} имеется скалярная связь

$$e \langle \mathbf{J}_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) \mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.93)$$

Соотношение (3.93) аналогично равенству (3.29), используемому при определении продольной проводимости.

Часто бывает удобно выражать реакцию системы с помощью поперечной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$, зависящей от частоты и волнового вектора. Мы определим $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$, введя в уравнение Максвелла (3.90) индукцию \mathcal{D} :

$$\operatorname{rot} \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}_{\perp}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.94)$$

Для изотропной системы индукция \mathfrak{D} пропорциональна полю \mathfrak{E} :

$$\mathfrak{D}_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) \mathfrak{E}_{\perp}(\mathbf{q}, \omega); \quad (3.95)$$

это соотношение определяет $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$. Переходя к фурье-компонентам в (3.94) и используя (3.93), находим

$$\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) \quad (3.96)$$

— соотношение, совершенно аналогичное соотношению (3.32).

Мы ввели обычное симметричное определение продольных и поперечных проводимостей и диэлектрических проницаемостей. В случае однородного переменного внешнего поля две функции реакции изотропной системы равны

$$\epsilon(0, \omega) = \epsilon_{\perp}(0, \omega) \quad (3.97)$$

[равны также $\sigma(0, \omega)$ и $\sigma_{\perp}(0, \omega)$]. Этот важный результат непосредственно следует из определений (3.29) и (3.93). При $\mathbf{q} = 0$, очевидно, нельзя различать продольное и поперечное поля.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Запишем теперь кинетическое уравнение для квазичастиц в присутствии поперечного поля. Оно, по-видимому, будет очень похоже на уравнение (3.45), полученное для случая продольного возмущения. На первый взгляд единственное изменение заключается в замене силы $e\mathfrak{E}$ силой Лоренца:

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v}_p \times \mathfrak{H}. \quad (3.98)$$

В действительности равенство (3.98) не вполне очевидно. Заранее нет оснований считать, что в выражение для магнитной силы должна входить скорость \mathbf{v}_p , а не ток \mathbf{j}_p . Кроме того, кинетическое уравнение (3.45) основано на предположении о том, что сила \mathfrak{F} мала, а именно имеет тот же порядок, что и δn_p . Однако на практике часто рассматривают реакцию электронного газа, находящегося в большом однородном магнитном поле (например, в экспериментах по циклотронному резонансу или при измерении магнитосопротивления). В этом случае магнитное поле надо учитывать точно и следует строго вывести кинетическое уравнение.

В силу этих причин мы выведем кинетическое уравнение в присутствии электромагнитного поля, исходя из общих соображений. Как обычно, введем векторный потенциал $\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \\ \mathfrak{H} &= \text{rot } \mathfrak{A}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Векторный потенциал $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ определяется с точностью до градиента некоторой функции. (Мы выбираем калибровку, в которой скалярный потенциал равен нулю.)

Сначала рассмотрим движение одной частицы в поле с векторным потенциалом $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$. Пусть \mathbf{p} — импульс частицы *в отсутствие* электромагнитного поля ($\mathcal{A}=0$). В присутствии поля величиной, канонически сопряженной с \mathbf{r} , будет не \mathbf{p} , а

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} + \frac{e\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{c}. \quad (3.100)$$

Функцию Гамильтона частицы можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{c} \right]^2. \quad (3.101)$$

Движение частицы описывается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dr_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{m} \left[p_\alpha - \frac{e\mathcal{A}_\alpha(\mathbf{r}, t)}{c} \right], \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r_\alpha} = -\frac{e}{mc} \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial r_\alpha} \left[p_\beta - \frac{e\mathcal{A}_\beta(\mathbf{r}, t)}{c} \right]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Заметим, что скорость частицы равна

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left[\mathbf{p} - \frac{e\mathcal{A}}{c} \right]. \quad (3.103)$$

Комбинируя (3.102) с определениями (3.99), легко найти обычное уравнение движения

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}. \quad (3.104)$$

Функция Гамильтона (3.101) [а также скорость (3.103)] получается просто заменой \mathbf{p} на $(\mathbf{p} - e\mathcal{A}/c)$ в соответствующем выражении в отсутствие поля. Векторный потенциал приводит только к смещению начала координат в \mathbf{p} -пространстве на величину $e\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)/c$. Канонически сопряженная к \mathbf{r} величина \mathbf{p} измеряется теперь от этого сдвинутого начала, а выражение для функции Гамильтона через \mathbf{r} и \mathbf{g} не меняется.

Все сказанное справедливо и для системы частиц, для которой функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \sum_l \left[p_l - \frac{e\mathcal{A}(\mathbf{r}_l, t)}{c} \right]^2 + V; \quad (3.105)$$

здесь V — кулоновское взаимодействие. Теперь ясно, как написать гамильтониан для возбужденных квазичастиц в ферми-жидкости, из которого мы сможем получить кинетическое уравнение.

Рассмотрим квазичастицу в точке \mathbf{r} и пусть *в присутствии поля* импульс \mathbf{p} будет канонически сопряжен с \mathbf{r} . Чтобы получить гамильтониан квазичастиц, введем величину

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \frac{e\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{c}. \quad (3.106)$$

Буквой \mathbf{p} обозначен обычный импульс. Согласно сказанному, гамильтониан, выраженный через \mathbf{p} и \mathbf{r} , имеет тот же вид, что и при $\mathcal{A}=0$. Тогда функция

Гамильтона равна локальной энергии $\tilde{\epsilon}_p$, которая зависит от распределения квазичастиц $n_p(\mathbf{r}, t)$ [см. гл. 1, соотношение (1.77)]. Дифференцируя, находим

$$d\tilde{\epsilon}_p = v_p \cdot dp + \sum_{p'} f_{pp'} [\nabla_{\mathbf{r}} n_{p'}]_{p'} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.107)$$

Используя (3.106), мы можем связать $d\mathbf{p}$ с $d\mathbf{r}$:

$$d p_\alpha = d r_\alpha - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial r_\beta} d r_\beta. \quad (3.108)$$

Комбинируя (3.107) и (3.108), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}_p}{\partial p_\alpha} \right)_r &= v_{p\alpha}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}_p}{\partial r_\alpha} \right)_p &= \sum_{p'} f_{pp'} \left(\frac{\partial n_{p'}}{\partial r_\alpha} \right)_{p'} - \frac{e}{c} v_{p\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial r_\alpha}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Эти два уравнения вместе с уравнениями Гамильтона полностью описывают движение квазичастицы.

Рассмотрим теперь поток квазичастиц в фазовом пространстве. Пусть $n_p(\mathbf{r}, t)$ — функция распределения, измеренная от сдвинутого начала координат \mathbf{p} -пространства. Она равна распределению n_p , измеренному от истинного начала $\mathbf{p}=0$. В отсутствие столкновений поток квазичастиц описывается уравнением Лиувилля.

$$\left(\frac{\partial n_p}{\partial t} \right)_{p, r} + \left(\frac{\partial n_p}{\partial r_\alpha} \right)_p \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}_p}{\partial p_\alpha} \right)_r - \left(\frac{\partial n_p}{\partial p_\alpha} \right)_r \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}_p}{\partial r_\alpha} \right)_p = 0. \quad (3.110)$$

Уравнение (3.110) является прямым следствием уравнений Гамильтона, записанных в канонически сопряженных величинах \mathbf{p} и \mathbf{r} . Оно приводит к кинетическому уравнению для квазичастиц.

Практически применять уравнение (3.110) неудобно, так как импульс \mathbf{p} зависит от векторного потенциала $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ поля, приложенного к системе. Гораздо удобнее выразить кинетическое уравнение через переменную \mathbf{p} , которая характеризует систему в отсутствие внешнего поля. Подставляя в (3.110) соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n_p}{\partial t} \right)_{p, r} &= \left(\frac{\partial n_p}{\partial t} \right)_{p, r} - \frac{e}{c} \frac{\partial n_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial t}, \\ \left(\frac{\partial n_p}{\partial r_\alpha} \right)_p &= \left(\frac{\partial n_p}{\partial r_\alpha} \right)_p - \frac{e}{c} \frac{\partial n_p}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial r_\alpha}, \\ \left(\frac{\partial n_p}{\partial p_\alpha} \right)_r &= \left(\frac{\partial n_p}{\partial p_\alpha} \right)_r, \end{aligned} \quad (3.111)$$

мы приходим к окончательной форме кинетического уравнения в переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n_p - \sum_{p'} \nabla_{\mathbf{p}} n_p \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n_{p'} f_{pp'} + \\ + e \mathcal{E} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} n_p + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_p \times \mathcal{H}] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} n_p = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

[где мы использовали определения (3.99) для \mathcal{E} и \mathcal{H}]. Итак, мы доказали предположение, сделанное в начале этого параграфа: квазичастицы движутся так, как если бы на них действовала сила Лоренца (3.98).

Плотность тока, связанного с квазичастицами, можно получить подобным образом. Если пользоваться импульсом p , то плотность тока описывается обычным выражением

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_p \mathbf{j}_p n_p(\mathbf{r}, t). \quad (3.113)$$

Рассмотрим теперь квазичастицу с обобщенным импульсом p , который определяется соотношением (3.106). Она переносит ток $\mathbf{j}_{p-e\mathcal{H}/c}$. Полный ток в переменных (p, \mathbf{r}, t) равен

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_p n_p(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}_{p-e\mathcal{H}/c} \quad (3.114)$$

В частном случае трансляционно-инвариантной системы мы приходим к известному результату

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_p n_p(\mathbf{r}, t) \left[\frac{p}{m} - \frac{e\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)}{mc} \right]. \quad (3.115)$$

Соотношения (3.113) и (3.115) — это два эквивалентных выражения для плотности тока, которые отличаются *определением* импульсной переменной.

Остается линеаризовать кинетическое уравнение (3.112). Предположим сначала, что постоянное магнитное поле отсутствует. Тогда \mathcal{H} сводится к переменному магнитному полю, связанному с распространяющейся электромагнитной волной. В этом случае \mathcal{H} и \mathcal{E} пропорциональны δn_p . Используя определение (3.54), мы можем записать кинетическое уравнение (3.112) в виде

$$\frac{\partial \delta n_p}{\partial t} + v_p \cdot \nabla_r \delta \bar{n}_p + e \left\{ \mathcal{E} + \frac{v_p}{c} \times \mathcal{H} \right\} \cdot \nabla_p n_p^0 = 0. \quad (3.116)$$

Уравнение (3.116) похоже на уравнение (3.55), полученное для случая продольного поля. Появился только дополнительный член, описывающий влияние магнитного поля. Обычно n_p^0 представляет собой распределение $n^0(\epsilon_p)$, соответствующее основному состоянию. Тогда вектор $\nabla_p n_p^0$ параллелен v_p и член с магнитным полем в (3.116) обращается в нуль (он важен только в том случае, когда в невозмущенном состоянии имеется постоянный ток). Для системы, находящейся в равновесии, уравнение (3.116) сводится к (3.55).

Предположим теперь, что система помещена в сильное постоянное магнитное поле \mathcal{H}_0 и что n_p^0 — распределение, соответствующее основному состоянию. Так как \mathcal{H}_0 нулевого порядка по δn_p , мы должны найти поправки первого порядка к v_p и $\nabla_p n_p^0$ (скорость v_p определяется как градиент ϵ_p по p , а потому

содержит поправки первого порядка). Нетрудно показать, что поправки первого порядка к уравнению (3.112) суть

$$\frac{e}{c} (\mathbf{v}_p \times \mathfrak{H}_0) \cdot \nabla_p \delta n_p + \frac{e}{c} \left\{ \nabla_p \left[\sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} \right] \times \mathfrak{H}_0 \right\} \cdot \nabla_p n_p^0 \quad (3.117)$$

Поэтому после некоторых преобразований мы можем записать кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial \delta n_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_r \delta \bar{n}_p + \frac{e}{c} (\mathbf{v}_p \times \mathfrak{H}_0) \cdot \nabla_p \delta \bar{n}_p + e \mathfrak{E} \cdot \nabla_p n_p^0 = 0 \quad (3.118)$$

(мы учли, что переменное магнитное поле не дает вклада в кинетическое уравнение). Из уравнения (3.118) следует нетривиальный вывод, что постоянное магнитное поле \mathfrak{H}_0 влияет не на δn_p , а на отклонение $\delta \bar{n}_p$ от локального равновесия. Мы хотели бы подчеркнуть важность уравнения (3.118). Оно крайне полезно при изучении циклотронного резонанса, магнитосопротивления и т. д. (см. задачу 8). Однако в дальнейшем мы с ним не столкнемся, так как ограничимся рассмотрением малых поперечных возмущений. Кинетическое уравнение тогда идентично соответствующему уравнению для продольных возмущений; лишь поле \mathfrak{E} теперь представляет собой поперечное электрическое поле.

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ РЕАКЦИЯ

Применим теперь кинетическое уравнение (3.55) для вычисления макроскопического тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega)$ в пределе малых \mathbf{q} и ω . Вычисления практически не отличаются от тех, которые были проделаны в случае продольного поля.

Рассмотрим сначала предел $\mathbf{q}=0$. Отклонение от равновесия δn_p описывается соотношением (3.73), которое можно записать как

$$\delta n_p(0, \omega) = -\frac{ie}{\omega} \mathfrak{E} \cdot \nabla_p n_p^0 \quad (3.119)$$

Мы видим, что δn_p не зависит от направления \mathbf{q} . Ток одинаков при поперечном и продольном поле \mathfrak{E} . Поперечная и продольная проводимости также равны в согласии с нашим прежним утверждением. Они определяются соотношением (3.75).

Обратимся теперь к противоположному пределу $\omega=0$. Мы хотим вычислить реакцию на квазистатическое поперечное поле. Используя кинетическое уравнение (3.55), находим

$$\bar{\delta n}_p = -\frac{ie \mathfrak{E} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - i\eta} \delta(\epsilon_p - \mu) \quad (3.120)$$

(где величина $i\eta$ отражает адиабатический характер включения поля). В нашем случае поле \mathcal{E} перпендикулярно \mathbf{q} , так что (3.120) не сводится к простому виду (3.57). Напишем ток \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \delta \bar{n}_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = -ie \sum_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu) (\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left\{ P \left(\frac{1}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}} \right) + i\pi \delta(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \right\}. \quad (3.121)$$

Из соображений симметрии следует, что единственный вклад возникает от δ -функции. Так мы находим поперечную проводимость:

$$\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, 0) = \frac{3\pi N e^2}{4q v_F}. \quad (3.122)$$

Величина σ_{\perp} действительна, что соответствует диссипативному процессу: электроны, движущиеся в направлении, перпендикулярном \mathbf{q} , получают энергию от электромагнитной волны.

Проводимость (3.122) зависит только от фермиевского импульса p_F , в нее не входят ни эффективная масса m^* , ни взаимодействие $f_{pp'}$. В этом случае статическая поперечная проводимость имеет такую же величину, как и для невзаимодействующей системы. Этот вывод остается справедливым и для неанізотропной системы, например электронов в реальном металле. Измерение $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$ можно использовать для определения формы реальной ферми-поверхности.

Экспериментально проводимость $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$ измеряется в условиях аномального скин-эффекта. Последний имеет место, когда длина волны q^{-1} электромагнитного поля много меньше средней длины свободного пробега, а также расстояния v_F/ω , которое электрон проходит за один период поля. Тогда отношение ω/qv_F очень мало, и проводимость электронного газа равна $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$. В этих условиях связь между электрическим полем и плотностью тока нелокальна, проводимость зависит от q , вследствие чего она и называется «аномальной».

Если частота ω конечна, вычислить σ_{\perp} гораздо труднее. Можно попытаться разложить σ_{\perp} в степенной ряд по ω/qv_F , как мы делали в продольном случае. Но и это довольно сложно. Первый член разложения (пропорциональный ω) чисто мнимый, он соответствует реактивной проводимости. Он не связан каким-либо простым способом с соответствующим членом в продольной проводимости. Его явное вычисление мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Укажем на существенное различие между продольной и поперечной проводимостями в пределе $\omega \ll qv_F$. Главный член σ чисто мнимый, имеет порядок ω , тогда как главный член σ_{\perp} дей-

ствителен и порядка единицы. В этой области поведение σ и σ_{\perp} совершенно различно, в противоположность тому, что имеет место при $\omega \gg qv_F$, когда σ и σ_{\perp} описываются одним и тем же соотношением (3.75).

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ МОДЫ

Как мы отмечали в § 3, поперечное движение системы приводит к появлению тока, который в свою очередь создает электромагнитное поле. Существует «обратная связь» реакции системы с полем, подобная той, которая обнаруживается при продольных колебаниях. Благодаря этой обратной связи поперечные коллективные моды в заряженной системе связаны с электромагнитными волнами. И те и другие получаются при совместном решении кинетического уравнения (3.55) и уравнений Максвелла (3.89) и (3.90).

Фактически дисперсионное уравнение связанных «электромагнитно-коллективных мод» можно получить сразу, если мы знаем поперечную проводимость $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$. Комбинируя (3.89) и (3.90), получаем, что частота поперечных волн удовлетворяет уравнению

$$c^2 q^2 = \omega^2 \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = \omega^2 + 4\pi i \omega \sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.123)$$

Корни уравнения (3.123) определяют все поперечные моды, которые могут распространяться в системе.

Рассмотрим сначала те корни уравнения (3.123), которые отвечают большим частотам: $\omega \gg qv_F$. В этом случае мы можем воспользоваться для $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ выражением (3.76). Тогда решение уравнения (3.123) получить легко:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 q^2 \quad (3.124)$$

(теперь мы можем убедиться в том, что $\omega > cq \gg qv_F$). Решение (3.124) соответствует распространению обычных электромагнитных волн. Интересны две области:

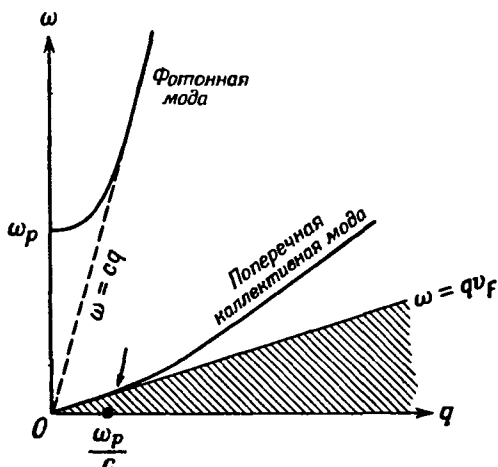
1) Область коротких волн ($cq \gg \omega_p$), для которых частота ω очень близка к cq . Тогда электромагнитное поле весьма слабо связано с системой и частота колебаний мало изменяется из-за наличия электронов.

2) Область длинных волн ($cq \ll \omega_p$), частота которых $\omega \approx \omega_p$. Электромагнитное поле сильно связано с электронами, о чем свидетельствует существенное изменение его естественной частоты cq .

Заметим, что частота (3.124) конечна и велика. Строго говоря, такое движение нельзя получить с помощью теории Ландау, которая применима только при очень низких частотах.

Фактически, как и в случае продольных плазменных колебаний, в справедливости соотношения (3.124) можно убедиться, используя правило сумм (см. гл. 4).

Кроме решения (3.124), соответствующего распространению фотонов, уравнение (3.123) может иметь другие, низкочастотные корни: $\omega \sim qv_F$. Эти корни соответствуют истинным поперечным коллективным модам. Их лучше изучать на примере простой модели, в которой взаимодействие $f_{pp'}$ имеет только компоненты с $l=0$ и $l=1$. Тогда можно явно решить кинетическое



Фиг. 19. Спектр поперечных коллективных мод заряженной ферми-жидкости в случае сильного взаимодействия квазичастиц ($F_1^s > 6$).

Заштрихованная область соответствует однопарным возбуждениям. Стрелкой показан волновой вектор, при котором поперечная мода исчезает.

уравнение, а затем найти дисперсионное уравнение для поперечных коллективных мод. Эту задачу мы предлагаем решить читателю (см. задачу 7), а здесь обсудим лишь результат.

1. В пределе слабой связи ($cq \gg \omega_p$) взаимодействие электромагнитных (чисто фотонных) колебаний и коллективной моды мало. В дисперсионном уравнении (3.123) можно устремить cq к бесконечности; коллективная мода остается такой же, как и в нейтральной системе. При частоте коллективной моды проводимость $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет полюс (полюс поперечной функции реакции ток — ток, по аналогии с гл. 2). Легко проверить, что поперечная коллективная мода существует только при сильном отталкивании между квазичастицами, когда $F_1^s > 6$.

2. В области сильной связи ($cq < \omega_p$) поперечная коллективная мода смещается под влиянием «почти фотонного» корня

(«отталкивается» им). Она сливается с континуумом однопарных возбуждений, как показано на фиг. 19. В этой области электромагнитная связь играет очень существенную роль.

Приведенное рассуждение носит несколько академический характер, поскольку взаимодействие F_1^s в электронном газе обычно слишком мало, для того чтобы могла существовать поперечная коллективная мода. Тем не менее эта проблема важна, так как она позволяет выявить влияние электромагнитной связи между электронами в зависимости от волнового вектора q . Кроме того, подобный метод можно использовать для описания поперечных коллективных мод в присутствии постоянного магнитного поля, этой важной для эксперимента задачи. (См. задачу 8.)

СРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ И ПРОДОЛЬНОЙ РЕАКЦИИ

Проведем несколько более детальное сравнение продольных и поперечных свойств электронного газа. Когда речь шла о продольной реакции, мы прежде всего рассматривали реакцию на *внешнее* поле, которое измеряется индукцией \mathcal{D} . Затем нам оказалось удобнее перейти к электрическому полю \mathcal{E} , которое описывает среднее экранирующее действие электронного газа. Наоборот, при описании поперечных свойств мы с самого начала пользуемся электрическим полем [индукция, определяемая соотношением (3.94), вводится лишь для удобства математических расчетов]. В чем физическая причина этого различия?

Рассмотрим сначала реакцию на внешний пробный заряд. С ним связана продольная индукция \mathcal{D} . В присутствии \mathcal{D} электронный газ поляризуется, возникают флуктуации плотности, что в свою очередь приводит к появлению поля пространственного заряда \mathcal{E}_p . Каждый электрон взаимодействует как с полем пространственного заряда, так и с \mathcal{D} . Однако взаимодействие с \mathcal{E}_p является прямым следствием кулоновского взаимодействия между электронами, и надо следить за тем, чтобы не учесть его дважды. У нас есть две возможности.

1. Можно рассматривать квантовые состояния всей системы, включая, разумеется, кулоновское взаимодействие электронов. В этом случае мы изучаем реакцию на *внешнее* поле \mathcal{D} . Тогда гамильтониан системы берется в виде

$$H = \sum_l \frac{p_l^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} \frac{e^2}{|r_l - r_j|}. \quad (3.125a)$$

Электростатическое экранирование *неявно* содержится в динамической реакции системы. В большей части квантовомеханических вычислений используется такой подход. Подробнее мы будем говорить об этом в гл. 4 и 5.

2. Можно *явно* учесть электростатическое экранирование, введя поляризационное поле \mathcal{E}_p . Таким образом, мы выделим ту часть кулоновского взаимодействия между электронами, которая связана со всеми процессами поляризации. Затем будем рассматривать реакцию системы на самосогласованное экранирующее поле

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} + \mathcal{E}_p$$

Однако при определении состояний системы в поле \mathcal{E} следует проявлять осмотрительность и заменить первоначальное кулоновское взаимодействие электронов экранированным взаимодействием, из которого исключено поле среднего пространственного заряда. В теории Ландау—Силина принят этот подход.

При рассмотрении поперечных свойств мы тоже можем выбрать любую из двух точек зрения.

1 Можно явно учесть поперечное магнитное взаимодействие между электронами и изучить реакцию на внешнее поле $\mathcal{D}_{\text{стор}}$. Поэтому мы рассматриваем квантовые состояния всей системы, которые определяются гамильтонианом

$$H = \sum_l \left[p_l - \frac{e}{c} \mathcal{A}(x_l) \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (3.1256)$$

где \mathcal{A} — поперечный векторный потенциал, обусловленный электронными токами в системе. Магнитное экранирование неявно содержится в динамической реакции системы. Этот подход совершенно необходим при рассмотрении релятивистского электронного газа, когда магнитное взаимодействие электронов играет такую же роль, как и кулоновское взаимодействие.

2 Можно изучать непосредственно реакцию на локальное поперечное поле \mathcal{E} , которое создается как внешними источниками, так и электронными токами

$$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{\text{стор}} + \mathcal{E}_p.$$

При этом магнитное экранирование учитывается явно введением соответствующего поперечного поляризованного поля \mathcal{E}_p . Правда, остается неучтенным эффективное экранированное магнитное взаимодействие электронов, которое приводит к поправкам порядка v^2/c^2 , т. е. малым для нерелятивистской системы электронов. Тогда можно приближенно вычислить реакцию на поле \mathcal{E} , используя состояния системы в отсутствие магнитных взаимодействий, т. е. с гамильтонианом (3.125а). Другими словами, для нерелятивистской системы магнитное взаимодействие электронов существенно влияет лишь на поляризационные процессы, которые можно рассматривать с помощью самосогласованного поля \mathcal{E}_p . Другими проявлениями магнитных взаимодействий можно пренебречь.

Ясно, что при рассмотрении поперечной и продольной реакции можно использовать один и тот же подход. Однако для нерелятивистской системы, с которой мы имеем дело, это не дает никаких преимуществ. В случае поперечной реакции предпочтительнее пользоваться вторым способом, основанным на вычислении реакции на экранированное поле \mathcal{E} . В случае продольной реакции оба способа имеют свои преимущества и недостатки. Каким из них пользоваться — зависит от рассматриваемой задачи.

§ 7. РАССЕЯНИЕ НА ПРИМЕСЯХ

До сих пор мы обсуждали кинетические явления в рамках уравнения Ландау—Силина, пренебрегая столкновениями. Такое уравнение, конечно, приближенное. Фактически возбужденные квазичастицы сталкиваются со «сторонними» дефектами (фононами или примесями в случае электронов в металлах) и друг с другом. Эти столкновения меняют реакцию электронов на внешнее поле и должны, вообще говоря, учитываться

при построении теории кинетических явлений в заряженной ферми-жидкости.

В гл. 1 мы уже рассматривали столкновения между квазичастицами, которые играют важную роль в жидком ${}^3\text{He}$ при не слишком низких температурах ($T \geq 0,01^\circ \text{K}$). Для электронов в металле все три механизма столкновений (электрон-фононный, электрон-примесный и электрон-электронный) в принципе важны. Мы оценим здесь по порядку величины время между столкновениями, чтобы получить представление о том, какой механизм играет основную роль при данной температуре. Имеются следующие приближенные результаты для различных механизмов столкновений в натрии [12]:

Электрон-фононные столкновения

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{e\text{-фон}} \approx kT \quad (\text{при комнатной температуре}),$$

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{e\text{-фон}} \approx T^5 \cdot 10^4 \quad (\text{при температуре жидкого гелия}).$$

Электрон-примесные столкновения

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{e\text{-прим}} \approx \left(\frac{N_I}{N}\right) \cdot 10^{15} \quad (\text{независимо от температуры}).$$

Электрон-электронные столкновения

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{e\text{-}e^-} \approx \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 \cdot 10^{15} \quad (kT \ll \varepsilon_F).$$

При комнатной температуре основную роль играют столкновения с фононами. При температуре жидкого гелия (4°K) электрон-фононные и электрон-электронные столкновения примерно одинаково важны; однако они происходят во много раз реже, чем столкновения электронов с примесями. Только при концентрациях примесей N_I/N порядка 10^{-8} или ниже столкновения электронов с примесями играют примерно такую же роль, как и два других процесса. Однако такие концентрации примесей не характерны для металлов. Поэтому электрон-электронные столкновения практически не играют роли в определении кинетических свойств большинства простых металлов. При достаточно низких температурах электрон-электронные столкновения происходят так же часто, как и электрон-фононные, но тогда основным является рассеяние электронов на примесях. В любом случае именно этот последний механизм определяет поведение металлов при температурах ниже гелиевых. Перейдем поэтому к его детальному изучению.

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ

Чтобы учесть реальные столкновения, надо модифицировать исходное кинетическое уравнение, добавив в правую часть интеграл столкновений $I(n)$, который описывает скорость изменения функции распределения n_p за счет столкновений. В гл. 1, § 8, мы детально обсуждали структуру интеграла столкновений в случае взаимного рассеяния квазичастиц. Мы увидим, что в рассеянии на примесях, более простом в математическом отношении, сохраняются многие черты, характерные для взаимного рассеяния квазичастиц.

Запишем интеграл столкновений в виде

$$I(n_p) = -\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{p'} W_{pp'} \delta(\tilde{\epsilon}_p - \tilde{\epsilon}_{p'}) \{n_p(1 - n_{p'}) - n_{p'}(1 - n_p)\}. \quad (3.126)$$

В этом выражении множитель $(2\pi/\hbar) W_{pp'} \delta(\tilde{\epsilon}_p - \tilde{\epsilon}_{p'})$ есть *вероятность перехода* квазичастицы из состояния p в состояние p' . Как и в гл. 1, § 8, отметим, что закону сохранения *должна удовлетворять локальная энергия* $\tilde{\epsilon}_p$, а не равновесная энергия ϵ_p , поскольку в реальных переходах должна сохраняться *полная энергия*, включающая энергию взаимодействия с другими возбужденными квазичастицами. Последний множитель в (3.126) отражает заполнение начального и конечного состояний (с учетом принципа Паули). Первый член в скобках соответствует переходу из состояния p , второй член — переходу в это состояние.

В выражении (3.126) величина $W_{pp'}$ представляет собой квадрат модуля *амплитуды рассеяния* квазичастицы. Если примеси распределены *хаотически*, $W_{pp'}$ не зависит от положений примесей в кристалле. В том случае, когда примесей мало, величина $W_{pp'}$ пропорциональна их концентрации (до тех пор, пока продолжительность столкновения мала по сравнению с временем между двумя последовательными столкновениями). Практически примеси всегда имеют размеры атомного порядка, так что углы рассеяния велики, а переданные импульсы имеют порядок p_F . Теоретическое описание таких процессов выходит за рамки теории Ландау. Поэтому мы должны рассматривать $W_{pp'}$ как феноменологический параметр, определяемый из эксперимента.

В интеграле столкновений (3.126) заменим функцию распределения выражением

$$n_p = n^0(\tilde{\epsilon}_p) + \delta\bar{n}_p. \quad (3.127)$$

В силу закона сохранения энергии функция n^0 не дает вклада. Итак, мы приходим к линейному интегралу столкновений:

$$I(\delta\bar{n}) = -\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{p'} W_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) [\delta\bar{n}_p - \delta\bar{n}_{p'}]. \quad (3.128)$$

Этот интеграл первого порядка по $\delta\bar{n}$. Следовательно, с этой точностью можно не различать ϵ_p и $\epsilon_{p'}$. Подчеркнем, что в интеграл столкновений входит локальное отклонение от равновесия $\delta\bar{n}$, а не δn . Это является непосредственным следствием того, что в (3.126) сохраняется $\bar{\epsilon}_p$, а не ϵ_p .

Интеграл столкновений (3.128) носит весьма общий характер. Он применим к различным кинетическим явлениям при низких температурах. При таких температурах представляют интерес электроны, лежащие вблизи ферми-поверхности. Мы можем пренебречь зависимостью $W_{pp'}$ от p и p' . Тогда для изотропной системы $W_{pp'}$ зависит только от угла между p и p' , что позволяет значительно упростить вычисление $I(\delta\bar{n})$. В дальнейшем нас всегда будет интересовать отклонение $\delta\bar{n}_p$ следующего вида:

$$\delta\bar{n}_p = f(\epsilon_p, \sigma) g(\theta, \varphi), \quad (3.129)$$

где для определения направления p используются полярные углы θ, φ . Мы рассмотрим только те столкновения, при которых сохраняется спин σ квазичастицы. В этом случае суммирование по p' в (3.128) проводится только по импульсным координатам. Так как при столкновениях всегда сохраняется энергия, мы можем записать (3.128) в виде

$$I(\delta\bar{n}) = -\frac{2\pi}{\hbar} f(\epsilon_p, \sigma) \sum_{p'} W_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) [g(\theta, \varphi) - g(\theta', \varphi')]. \quad (3.130)$$

Разложим теперь $W_{pp'}$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$W_{pp'} = \sum_l W_l P_l(\cos \xi), \quad (3.131)$$

где ξ — угол между направлениями (θ, φ) и (θ', φ') . Разложим также $g(\theta, \varphi)$ по нормированным сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Используя теорему сложения сферических функций, можно переписать (3.130) следующим образом:

$$I(\delta\bar{n}) = - \sum_{lm} \frac{\delta\bar{n}_{lm}}{\tau_l}, \quad (3.132)$$

где $\delta\bar{n}_{lm}$ — член с индексами (l, m) в разложении величины $\delta\bar{n}$ по сферическим гармоникам, а постоянные τ_l определяются соотношением

$$\frac{1}{\tau_l} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int p'^2 dp' \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) 4\pi \left[W_0 - \frac{W_l}{2l+1} \right]. \quad (3.133)$$

Обычно энергия ϵ_p очень близка к μ . Поэтому интегрирование по p' дает

$$\frac{1}{\tau_l} = \frac{3\pi}{\hbar} \frac{N}{m^* v_F^2} \left[W_0 - \frac{W_l}{2l+1} \right]. \quad (3.134)$$

Этот результат часто записывают в менее явном виде

$$\frac{1}{\tau_l} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{p'} W_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) [1 - P_l(\cos \xi)]. \quad (3.135)$$

(При $l=1$ мы получаем обычное выражение для частоты столкновений, определяющей проводимость.) Заметим, что $1/\tau_0=0$. Этот результат выражает закон сохранения числа частиц при столкновениях.

Введем интеграл столкновений (3.132) в кинетическое уравнение Ландау — Силина. Тогда вместо (3.55) получим

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta \bar{n}_p - \omega \delta n_p + ie \mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) = i \sum_{lm} \frac{\delta \bar{n}_{lm}}{\tau_l}. \quad (3.136)$$

Решим это уравнение в нескольких простых случаях.

РЕАКЦИЯ НА ОДНОРОДНОЕ ПОЛЕ ($\mathbf{q}=0$)

Мы знаем, что в случае однородного поля экранирование отсутствует, и потому $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. Из кинетического уравнения (3.136) видно, что как δn_p , так и $\delta \bar{n}_p$ имеют векторную симметрию. Если разложить их по сферическим функциям, то вклад дает только симметричная по спину компонента с $l=1$. Связь δn_{1m} и $\delta \bar{n}_{1m}$ описывается соотношением (1.34) и, используя (1.100), мы можем написать

$$\delta \bar{n}_p = \left(1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \delta n_p = \delta n_p \frac{m^*}{m}. \quad (3.137)$$

Подставляя (3.137) в (3.136), получаем

$$\delta \bar{n}_p = \frac{ie \mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu)}{(m\omega/m^*) + (i/\tau_1)}. \quad (3.138)$$

Ток \mathbf{J} дается равенством (1.89)

$$\mathbf{J} = \sum_p \delta \bar{n}_p \mathbf{v}_p,$$

откуда находим тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{Ne^2\tau}{m^*(1-i\omega\tau m/m^*)} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.139)$$

(для удобства мы обозначили τ_1 просто через τ). При нулевой частоте имеем $\sigma = Ne^2\tau/m^*$ в согласии с результатом Ланжера [13], полученным методом теории поля.

Когда частота ω увеличивается, проводимость изменяется от $Ne^2\tau/m^*$ до $iNe^2/m\omega$. Переход от m^* к m — это реальный, наблюдаемый многочастичный эффект. Фактически, поскольку τ — феноменологическая величина, с равным успехом мы могли бы ввести *эффективное* время между столкновениями

$$\tau_{эфф} = \frac{m\tau}{m^*}, \quad (3.140)$$

при использовании которого проводимость записывается следующим образом.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{iNe^2}{m} \frac{1}{\omega + i/\tau_{эфф}} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.141)$$

Соотношение (3.141) подобно результату, полученному для не взаимодействующей системы: мы не можем получить отношение m^*/m только из измерений $\sigma(\omega)$.

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЕСЯ ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ ($0 < qv_F\tau \ll 1$)

Рассмотрим случай $0 < qv_F\tau \ll 1$. Тогда мы находимся в нормальном режиме. длина волны приложенного поля много больше средней длины свободного пробега квазичастиц. Рассмотрим сначала продольное поле ($\mathcal{E} \parallel \mathbf{q}$). Если выбрать полярную ось в направлении \mathbf{q} , то оказывается, что $\delta\bar{n}_p$ имеет симметрию компоненты с $m=0$. В уравнении (3.136) для всех l , кроме $l=0$, можно пренебречь «диффузионным членом» $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta\bar{n}_p$ по сравнению с интегралом столкновений, тогда как при $l=0$ следует сохранить диффузионный член, поскольку интеграл столкновений обращается в нуль. С точностью до членов порядка $qv_F\tau$ величины $\delta\bar{n}$ и δn содержат компоненты $\delta\bar{n}_l$ и δn_l только с $l=0$ или $l=1$. Собирая соответствующие члены в (3.136), находим

$$\begin{aligned} -\omega \delta n_0 + \frac{1}{3} qv_F \delta\bar{n}_1 &= 0, \\ -\omega \delta n_1 + qv_F \delta\bar{n}_0 - \frac{i}{\tau} \delta\bar{n}_1 + ie\mathcal{E}v_F \delta(\epsilon_p - \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Согласно (1.34), мы имеем

$$\begin{aligned} \delta\bar{n}_0 &= (1 + F_0^s) \delta n_0, \\ \delta\bar{n}_1 &= \left(1 + \frac{F_1^s}{3}\right) \delta n_1. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Исключая δn_0 и $\bar{\delta n}_0$ и используя (3.137), находим

$$\bar{\delta n}_1 = \frac{i e \mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu)}{(m\omega/m^*) + (i/\tau) - (q^2 v_F^2 / 3\omega)(1 + F_0^s)}. \quad (3.144)$$

Зная $\bar{\delta n}_1$, легко получить проводимость. Введем скорость звука s , определяемую соотношением (1.61), и эффективное время между столкновениями $\tau_{\text{эфф}}$ [см. (3.140)]. Тогда продольную проводимость с точностью до членов порядка $qv_F\tau$ можно представить в виде

$$\sigma = \frac{iNe^2}{m} \frac{1}{\omega + (i/\tau_{\text{эфф}}) - (s^2 q^2 / \omega)}. \quad (3.145)$$

Сравнивая (3.145) и (3.141), мы обнаруживаем, каким образом влияние пространственного заряда приводит к изменению σ .

Поучительно выразить продольную реакцию через $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Находим

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega^2 - s^2 q^2 + (i\omega/\tau_{\text{эфф}})}. \quad (3.146)$$

Когда $\omega \rightarrow 0$, функция $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ стремится к статическому значению (3.60). В этом пределе столкновения с примесями не влияют на диэлектрическую проницаемость. Это не удивительно, поскольку этот предел связан с существованием пространственного заряда, когда квазичастицы экранируют внесенный заряд. Фактически мы имеем статический процесс, на который столкновения не влияют. (Это свойство непосредственно следует из того факта, что $1/\tau_0 = 0$, т. е. из сохранения числа частиц при столкновениях.) В противоположность этому при

$$\omega\tau_{\text{эфф}} \gg (qs\tau_{\text{эфф}})^2 \quad (3.147)$$

член $s^2 q^2$ в знаменателе (3.146) становится малым, и мы снова получаем результат (3.141), соответствующий случаю, когда определяющим является перенос частиц. Физически условие (3.147) означает, что изменение фазы, которую «видит» данная частица, определяется частотой ω , а не беспорядочными перемещениями частицы. Заметим, что в окончательный результат входит снова только $\tau_{\text{эфф}}$: многочастичные эффекты явно не обнаруживаются.

Рассмотрим теперь *поперечное* внешнее поле. В этом случае существенны только компоненты с $m = \pm 1$ (соответствующие чисто круговой поляризации). Компонента с $l=0$ отсутствует (т. е. нет пространственного заряда). С точностью до членов порядка $qv_F\tau$ в δn_p входит только член с $l=1$, и мы снова приходим к результату (3.141).

В пределе $\omega\tau \ll 1$ продольную проводимость можно записать в виде

$$\sigma = \frac{iNe^2}{m} \frac{\omega\tau_{эфф}}{i\omega - s^2\tau_{эфф}q^2}. \quad (3.148)$$

Так как мы, кроме того, предполагаем, что $qv_F\tau \ll 1$, этот результат соответствует *гидродинамическому режиму*, в котором столкновения приводят к установлению в каждой точке локального равновесия. В этом пределе поведение системы можно описать (и вычислить σ), используя только *макроскопические* соображения. Для этой цели заметим, что при столкновениях электрона с примесью импульс *не сохраняется* (о чем говорит тот факт, что $1/\tau_i \neq 0$). Вследствие этого движение электрона при низких частотах имеет диффузионный характер и определяется столкновениями с примесями. Под действием градиента плотности $\nabla\rho$ возникает *диффузионный ток*

$$\mathbf{J}_d = -D\nabla\rho, \quad (3.149)$$

где D — коэффициент диффузии.

Если к системе приложено поперечное электрическое поле \mathcal{E} , то плотность заряда равна нулю, и поэтому диффузионный ток отсутствует. Тогда плотность тока сводится к *току проводимости*

$$\mathbf{J}_c = \sigma_0\mathcal{E} = \frac{Ne^2\tau_{эфф}}{m}\mathcal{E}, \quad (3.150)$$

где σ_0 — статическая проводимость. Если же к системе приложено продольное поле \mathcal{E} , то возникает индуцированный ток \mathbf{J} , что приводит к плотности заряда, определяемой уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \quad (3.151)$$

При наличии диффузионного тока полный ток равен

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d. \quad (3.152)$$

Переходя в (3.149) и (3.152) к фурье-компонентам, легко найти

$$\sigma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)}{\mathcal{E}(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{Ne^2\tau_{эфф}}{m} \frac{i\omega}{i\omega - Dq^2}, \quad (3.153)$$

что совпадает с результатом (3.148), полученным в теории Ландау, причем коэффициент диффузии D равен

$$D = s^2\tau_{эфф}. \quad (3.154)$$

Коэффициент D можно получить прямым вычислением с помощью кинетического уравнения Ландау — Силина (применяя способ, похожий на использованный в гл. 1, § 8, при вычислении

теплопроводности; см. задачу 9). Таким образом можно проверить выражение (3.154).

Отметим, что коэффициент диффузии D связан со статической подвижностью

$$\mu = \frac{\sigma}{Ne} = \frac{e\tau_{эфф}}{m} \quad (3.155)$$

соотношением

$$\frac{\mu}{D} = \frac{e}{ms^2}, \quad (3.156)$$

которое является обобщением известного соотношения Эйнштейна.

Выражение (3.148) представляет собой частный пример функции реакции в гидродинамическом пределе, т. е. в случае, когда определяющим фактором оказывается диффузия. Оно имеет простой вид, поскольку рассматривается крайний гидродинамический предел. В противоположном предельном случае ($qv_{FT} \gg 1$) столкновения не играют заметной роли и мы снова приходим к результатам § 4 и 6. В промежуточной области, где $qv_{FT} \sim 1$, кинетическое уравнение (3.136) трудно решить. Заметим, однако, что само уравнение остается справедливым, пока q и ω имеют макроскопический масштаб. В этом случае можно получить приближенное решение, соответствующим образом оборвав разложение по сферическим функциям. Мы не будем рассматривать здесь это приближение.

§ 8. ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛАХ

В этой главе речь шла об идеализированной физической системе, *электронной жидкости*, в которой частицы движутся на фоне однородного положительного заряда, испытывая лишь кулоновское взаимодействие. Такая электронная жидкость не встречается в природе. На электроны проводимости в металле действует неоднородное распределение положительного заряда ионов, которое, разумеется, периодически, когда металл находится в твердом состоянии. Обсудим кратко применимость теории Ландау — Силина к электронам в металлах.

Мы видели в гл. 1, § 3, что основные предположения теории Ландау остаются справедливыми и при наличии периодического потенциала. Элементарные возбуждения по-прежнему представляют собой квазичастицы с энергией ϵ_p и взаимодействием $f_{pp'}$. Однако вследствие анизотропии кристаллической решетки ϵ_p зависит от направления p , а $f_{pp'}$ зависит как от p , так и от p' . Ферми-поверхность S_F определяется условием

$$\epsilon_p = \mu,$$

где μ — химический потенциал. В большинстве металлов S_F имеет довольно сложную геометрическую форму.

В некоторых случаях, например в щелочных металлах, ферми-поверхность почти сферична. Тогда система обладает почти *изотропными* свойствами. Как мы отмечали в гл. 1, § 3, построение теории по существу остается таким же, как и для электронной жидкости. Мы можем определить эффективную массу m^* на ферми-поверхности, разложить $f_{pp'}$ в ряд по полиномам Лежандра и т. д. Имеется, однако, важное отличие: ток \mathbf{j}_p , переносимый квазичастицей с (квази)импульсом \mathbf{p} , не равен теперь \mathbf{p}/m , как для случая трансляционно-инвариантной системы. Вместо этого мы должны представить \mathbf{j}_p в виде

$$\mathbf{j}_p = \frac{\mathbf{p}}{m_c}, \quad (3.157)$$

где m_c — кристаллическая масса, которая отличается от голой массы m электрона из-за действующего на электроны периодического потенциала. Это еще один параметр в теории Ландау — Сирина (для анизотропного металла их гораздо больше).

Реальная эффективная масса m^* выражается через скорость v_p квазичастиц на ферми-поверхности:

$$v_p = \frac{\mathbf{p}}{m^*}. \quad (3.158)$$

Зная m^* , можно найти плотность состояний на ферми-поверхности, а затем и теплоемкость. Различие между m^* и m_c отражает различие между v_p и \mathbf{j}_p и, следовательно, обусловлено взаимодействием квазичастиц. Чтобы найти связь m^* с m_c , заметим, что соотношение (1.91) между \mathbf{j}_p и v_p справедливо независимо от трансляционной инвариантности. Поэтому для изотропного металла мы можем написать

$$\mathbf{j}_p = v_p + \sum_{p'} f_{pp'} \delta(\varepsilon_{p'} - \mu) v_{p'} = v_p \left(1 + \frac{F_1^s}{3}\right), \quad (3.159)$$

откуда следует, что

$$m^* = m_c \left(1 + \frac{F_1^s}{3}\right). \quad (3.160)$$

Соотношение (3.160) похоже на (1.100), лишь голая масса m заменена кристаллической массой m_c .

Согласно (3.160), эффективная масса m^* равна произведению кристаллической массы m_c и множителя $(1 + F_1^s/3)$, описывающего влияние электронного взаимодействия. По существу различие между m_c и голой электронной массой m могло бы появиться вследствие влияния периодического потенциала ионов, а

не кулоновского взаимодействия электронов (последний эффект описывается теорией Ландау — Силина). В действительности провести такое разделение, вообще говоря, не удастся, так как в большинстве вычислений (например, в методе псевдопотенциала) в качестве периодического потенциала берется потенциал голых ионов, экранированный электронной реакцией. (Мы вычислили длинноволновую часть экранированного электрон-ионного потенциала в § 4.) Следовательно, взаимодействие электронов в определенной степени влияет на периодический потенциал (и m_c). Возможно и обратное влияние периодического потенциала на взаимодействие квазичастиц. В гл. 5, § 6, мы еще вернемся к обсуждению вопроса о том, в какой степени можно различать «твердотельные» и «многочастичные» эффекты.

С помощью метода, рассмотренного в гл. 1, § 3, легко показать, что электронная сжимаемость и спиновая восприимчивость изотропного твердого тела описываются выражениями того же вида, как и для электронной жидкости [ср. (1.58) и (1.67)]:

$$\kappa = \frac{\nu(0)}{\rho N(1 + F_0^s)}, \quad (3.161)$$

$$\chi_P = \frac{\beta^2 \nu(0)}{1 + F_0^a}. \quad (3.162)$$

Здесь $\nu(0)$ — плотность состояний (на единичный интервал энергии) для электронов, находящихся на ферми-поверхности в металле. Легко выразить κ и χ_P через соответствующие величины κ^0 и χ_P^0 для невзаимодействующего свободного электронного газа. Используя (3.160), можно записать эти соотношения в виде

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^s} = \frac{m_c}{m} \frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^s}, \quad (3.163)$$

$$\frac{\chi_P}{\chi_P^0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^a} = \frac{m_c}{m} \frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^a}. \quad (3.164)$$

В соотношениях (3.163) и (3.164) наглядно проявляется совместное влияние периодичности (через m_c/m) и взаимодействия квазичастиц (через f_{pp}). Заметим далее, что поскольку скорость звука s в данном случае не имеет физического смысла (обычные законы акустики неприменимы к электронам в металлах), можно ввести псевдоскорость звука [по аналогии с соотношением (3.160), которое можно рассматривать как определение псевдоголой массы]. Тогда мы можем написать

$$\kappa = \frac{1}{\rho m s^2}. \quad (3.165)$$

Практически в расчетах s всегда входит в сочетании ms^2 (иными словами, физические величины зависят от κ).

Надлежащим образом модифицированная теория Ландау — Силина позволяет, к удовольствию физика-теоретика, *формально* описать влияние кулоновского взаимодействия на движение электронов в металлах. Спрашивается, может ли это служить утешением экспериментатору, изучающему различные явления в металлах? В этом отношении наиболее важное применение теории Ландау заключается в том, что она позволяет оценить, в какой мере на то или иное интересное явление влияет взаимодействие электронов. Как мы видели, это взаимодействие сказывается двояко: во-первых, оно изменяет энергию и скорость квазичастиц, а во-вторых, приводит к взаимодействию возбужденных квазичастиц. Явления, на которые не влияет взаимодействие квазичастиц, можно описывать в одноэлектронном приближении, необходимо лишь перенормировать энергию электронов (т. е. учесть ее изменение из-за взаимодействия электронов). В противоположность этому явления, для которых существенно экранированное взаимодействие $f_{pp'}$ между возбужденными квазичастицами, нельзя рассматривать с помощью одноэлектронной схемы.

В последние годы было предложено несколько изящных методов изучения ферми-поверхности в металлах. Обзор экспериментов по определению ферми-поверхности имеется, например, в работе Пиппарда [14]. Интерпретация экспериментальных данных всегда проводится на основе одноэлектронного приближения. Следовательно, для получения *точной* информации о ферми-поверхности пригодны только те результаты, которые не зависят от взаимодействия $f_{pp'}$. Такие физические эффекты можно выделить с помощью теории Ландау в той области длин волн и частот, где она применима. Таким образом, теория позволяет установить законность данного экспериментального определения ферми-поверхности.

Важным примером величины, которая не меняется при включении взаимодействия $f_{pp'}$, является поперечная проводимость $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ в аномальной области ($0 < \omega \ll qv_F$) [см. (3.122)]. Как мы отмечали, аномальный скин-эффект можно использовать для прямого определения формы ферми-поверхности [15]. Другое явление, на котором не сказывается взаимодействие квазичастиц, — это циклотронный резонанс в так называемых условиях Азбеля — Канера (когда постоянное магнитное поле параллельно поверхности образца). Этот эксперимент можно описать теоретически, исходя из уравнения (3.118). Резонанс происходит на той же частоте, что и в отсутствие взаимодействия квазичастиц. В случае изотропной системы резонансная частота

выражается через ту же массу m^* , что и теплоемкость:

$$\omega_c^* = \frac{eH}{m^*c}. \quad (3.166)$$

Среди других эффектов, которые не зависят от $f_{pp'}$, назовем эффект де-Гааза — ван Альфена и низкочастотный эффект Холла в сильных магнитных полях. Все эти явления позволяют собрать ценные данные о ферми-поверхности в металлах.

Рассмотрим теперь явления, которые зависят от взаимодействия квазичастиц $f_{pp'}$.

Мы уже упоминали сжимаемость и спиновую восприимчивость, определяемые соотношениями (3.161) и (3.162). Основанное на теории Ландау вычисление различных кинетических величин можно распространить и на случай электронов проводимости в изотропном металле. Например, результат (3.62) для статической диэлектрической проницаемости в области длинных волн остается справедливым при условии, что χ описывается соотношением (3.161) или (3.163). Можно получить и общее выражение для проводимости $\sigma(0, \omega)$, если ω меньше частоты любого междузонного перехода. Предоставляем читателю показать, что соотношение (3.139) остается справедливым, если заменить m на m_c . Особое значение имеет один частный случай этого результата: когда частота ω настолько велика, что осуществляется бесстолкновительный режим, проводимость $\sigma(0, \omega)$ определяется модифицированным соотношением (3.75) (см. [16])

$$\sigma(0, \omega) = \frac{iNe^2}{m_c\omega} = \frac{iNe^2}{m^*\omega} \left(1 + \frac{F_1^s}{3}\right). \quad (3.167)$$

[Соотношение (3.167) непосредственно следует из (3.74) и выражения (3.157) для тока.] Поэтому, измеряя $\sigma(0, \omega)$, можно прямо определить кристаллическую массу m_c .

Было бы очень хорошо привести здесь таблицу экспериментальных значений F_0^s , F_2^s , F_1^s , m_c и т. д. для ряда металлов. К сожалению, по некоторым причинам это невозможно. Во-первых, данные по удельной теплоемкости имеют большой разброс, электронную сжимаемость χ непосредственно измерить нельзя, а величина χ_p определена только для лития и натрия. Во-вторых, как мы уже упоминали в гл. 1, § 3, значение m^* , полученное из измерений удельной теплоемкости, отражает влияние электрон-фононного и электрон-электронного взаимодействий, а также кристаллического поля. В-третьих, оптические эксперименты, которые позволяют определить величину m_c с помощью (3.167), трудно выполнимы. Соответствующая экспериментальная информация часто относится к частотам, сравнимым с плазменной частотой, для которых соотношение (3.167) неприменимо (в этой

области частот существенны междузонные переходы). Недавно Гинзбург, Мотулевич и Питаевский [17] использовали измерения коэффициента отражения в инфракрасной области для оценки F_1^s в различных переходных металлах. Это многообещающие результаты, хотя полученные значения F_1^s оказались неожиданно большими. В гл. 5, § 6, мы увидим, что для соответствующей электронной жидкости следует ожидать значений порядка нескольких десятых, тогда как в цитированной работе приведены значения $F_1^s > 1$. Такое большое взаимодействие квазичастиц, возможно, обусловлено твердотельными эффектами. В зоне Бриллюэна имеются точки, где ферми-поверхность касается границ зоны (в этих областях плотность состояний велика и соответственно велико взаимодействие квазичастиц). Сильное взаимодействие квазичастиц может быть обусловлено также увеличением плотности состояний из-за электрон-фононного взаимодействия.

В некотором смысле микроскопическое рассмотрение полезно для классификации всех этих эффектов. Мы обсудим это в гл. 5, § 6, и рассмотрим влияние электронного взаимодействия на спиновую восприимчивость и удельную теплоемкость

Наконец, возможно, что характерные многочастичные эффекты проявляются и в других кинетических свойствах и впоследствии будут обнаружены. В дальнейшем было бы интересно исследовать переход от нормального к аномальному скин-эффекту и распространение электромагнитных волн в очень сильных магнитных полях.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что при $q \rightarrow 0$ продольное решение уравнения (3.40) имеет частоту ω_p (для трансляционно-инвариантной системы).

2. Показать, что продольное решение уравнения (3.40) таково, что $\epsilon(q, \omega_q) = 0$.

3. Используя рассмотренную в гл. 1 простую модель, в которой взаимодействие $f_{pp'}$ постоянно, найти зависимость частоты продольных коллективных мод от q . Изучить переход от плазменных колебаний к нулевому звуку при $F_0 > 0$. Показать, что переход происходит при $q \sim \omega_p/v_F \sim q_{FT}$.

4. Вычислить с помощью теории Ландау — Силина диэлектрическую проницаемость $\epsilon(q, \omega)$ при условии, что взаимодействие не зависит от импульсов $F_{pp'} = F_0$. Построить графики зависимости $\text{Im} \epsilon$ и $\text{Re} \epsilon$ от ω/qv_F . Показать, что в пределе сильной связи ϵ имеет вид (3.77).

5. Убедиться, что кинетическое уравнение (3.116) инвариантно относительно преобразований Галлilea. Это показывает, что выражение для силы Лоренца должно содержать \mathbf{v}_p , а не \mathbf{j}_p .

6. Вычислить первый реактивный член в разложении σ_1 по степеням ω/qv_F .

7. Предполагая, что $F_{pp'} = F_0 + F_1 \cos \xi$, вычислить поперечную проводимость при произвольных qv_F/ω . Обсудить зависимость поперечных коллективных мод от cq/ω_p .

8. Вычислить поперечную проводимость в постоянном магнитном поле а) при $\omega=0$, б) при $q=0$, в) в общем случае с взаимодействием типа $F_0 + F_1 \cos \xi$.

Обсудить поведение σ (ее регулярную часть и дискретные полюсы) в зависимости от q .

Обсудить поведение поперечных коллективных мод а) при $\omega_p/c \ll \omega_c/v_F$, б) при $\omega_p/c \gg \omega_c/v_F$.

9. Вычислить коэффициент диффузии D для электроионной системы. Сравнить полученные результаты с результатами обычной кинетической теории и объяснить различие.

10. Вычислить теплопроводность K и, используя полученный результат, обсудить закон Видемана — Франца.

11. Изучить нейтральную систему со слабым рассеянием на примесях ($1/\tau_i$ мало) и сильным электрон-электронным рассеянием ($1/\tau_e$ велико, если $l \gg 2$). Изучить переход от диффузии к первому звуку, а затем к нулевому звуку. Вычислить диффузионное затухание первого звука

Литература

1. Сили В. П., ЖЭТФ, 33, 495 (1957); 35, 1243 (1958).
2. Debye P. P., Hückel E., Phys. Zs., 24, 185 (1923).
3. Mott N. F., Jones H., Theory of Metals and Alloys, New York, 1936.
4. Langmuir I., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 14, 627 (1928).
5. Tonks L., Langmuir I., Phys. Rev., 33, 195 (1929).
6. Pines D., Ph. D. Thesis, Princeton University, 1950
7. Pines D., Bohm D., Phys. Rev., 85, 338 (1952).
8. Friedel J., Adv. Phys., 3, 446 (1954).
9. Greene M. P., Kohn W., Phys. Rev., 137, A513 (1965).
10. Heine V., Abarenkov I., Phil. Mag., 9, 451 (1964)
11. Harrison W., Pseudopotentials in the Theory of Metals, New York, 1966. (Готовится русский перевод.)
12. Pines D., Elementary Excitations in Solids, New York, 1963. (Имеется перевод: Д. Пайис, Элементарные возбуждения в твердых телах, изд-во «Мир», 1965.)
13. Langer J., Phys. Rev., 127, 5 (1962).
14. Pippard A. B., Dynamics of Conduction Electrons, New York, 1962.
15. Сили В. П., ЖЭТФ, 33, 1282 (1957).
16. Сили В. П., ЖЭТФ, 34, 707 (1958).
17. Гиизбург В. Л., Мотулевич Г. П., Питаевский Л. П., ДАН СССР, 163, 1352 (1965).
- 18*. Гольдмай И. И., ЖЭТФ, 17, 68 (1947).

Реакция и корреляция в однородных электронных системах

В предыдущей главе мы использовали уравнение Пуассона для того; чтобы определить функцию диэлектрической реакции $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, зависящую от волнового вектора и частоты. Не удивительно, что между продольной реакцией и функцией реакции плотность — плотность, введенной в гл. 2, имеется тесная связь. Перейдем теперь к выяснению этой связи.

Данная глава преследует две цели: во-первых, установить формальные свойства диэлектрических функций реакции, во-вторых, показать, каким образом с их помощью можно дать краткую характеристику многих интересных явлений в электронных системах и понять их сущность. В частности, мы постараемся по возможности просто рассмотреть связь электронов друг с другом, их реакцию на быструю внешнюю заряженную частицу, на фононное поле, на внешнее фотонное поле.

Диэлектрическая реакция электронной жидкости характеризуется *тензором*, который связывает электрическую индукцию \mathfrak{D} с электрическим полем \mathfrak{E} . В изотропной системе независимы только две компоненты этого тензора — продольная диэлектрическая функция $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ и поперечная функция $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$. Поэтому продольные и поперечные явления не связаны, и их можно рассматривать по отдельности, как мы и будем делать на протяжении всей этой главы. Общие свойства функции $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ рассматриваются в § 1, а функции $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ — в § 6.

Мы видели в гл. 3, что величина $1/\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ является непосредственной мерой диэлектрической реакции электронов на внешнее *продольное* поле, которое меняется в пространстве и времени. В § 1 настоящей главы мы получим простое соотношение, связывающее продольную реакцию системы с функцией реакции плотность — плотность, введенной в гл. 2. Благодаря этому мы сможем непосредственно применить к электронной системе многие результаты, полученные в гл. 2. Например, можно сразу же записать спектральное представление для $1/\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, а

также правило сумм, которое непосредственно вытекает из продольного правила \hat{f} -сумм

В известном смысле электронная система «богаче» системы нейтральных частиц, поскольку здесь существуют две представляющие интерес функции реакции. Кроме функции $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ [или $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$], которая характеризует реакцию на продольное *внешнее* поле, можно определить другую функцию, а именно функцию *экранированной* реакции, связанную с $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ и характеризующую электронную реакцию на сумму внешнего поля и вызванную им поляризацию. Можно сказать, что $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ характеризует реакцию на $\mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega)$, а $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ — реакцию на эффективное экранированное поле $\mathfrak{E}(\mathbf{q}, \omega)$. Обе функции реакции удовлетворяют правилу сумм, мы увидим, что в пределе длинных волн фактически появляются четыре отдельных правила сумм для $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

Природа спектра возбуждений, связанных с флуктуациями плотности (а также $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$), обсуждается в § 2. С помощью правил сумм показано, что в пределе длинных волн в электронной жидкости при $T=0$ действительно существуют экранирование и плазменные колебания. В § 3 этот результат обобщается на конечные температуры, обсуждается влияние периодической решетки ионов твердого тела. Энергетические потери быстрых электронов (и плазменные колебания в твердом теле) описаны в § 4. Самосогласованное рассмотрение электрон-фононной системы дано в § 5. В § 6 проведено элементарное обсуждение эффективного электронного взаимодействия в простых металлах; учтены поляризационные процессы, связанные как с фононами, так и с электронами

В § 7 рассмотрен общий вопрос о реакции электронной жидкости на внешнее электромагнитное поле, показано, что в основном представляет интерес поперечная корреляционная функция ток — ток, вычисленная в пренебрежении магнитным взаимодействием электронов. Выведены соответствующие правила сумм; подробно обсуждается связь между градиентной инвариантностью, сохранением заряда и правилом \hat{f} -сумм. Намечено в общих чертах квантовомеханическое рассмотрение связанной электрон-фононной системы. В заключении главы рассмотрено комбинационное рассеяние света

§ 1. ФУНКЦИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

РЕАКЦИЯ НА ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$

Рассмотрим снова реакцию электронной системы на внешний заряд с плотностью $zr_e(\mathbf{r}, t)$. Взаимодействие электронной си-

стемы и пробного заряда можно записать в виде [ср. (2.42)]

$$H_{вз} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_e(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} e^{\eta t}, \quad (4.1)$$

где

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi z e}{q^2}. \quad (4.2)$$

Реакцию электронной системы можно описать с помощью величины $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Комбинируя (3.19) и (3.22), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{z \rho_e(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (4.3)$$

Используя (4.2), можно записать (4.3) в виде

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} \equiv 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{V_{\mathbf{q}} \rho_e(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (4.4)$$

Теперь нетрудно установить связь с функцией реакции плотность — плотность. Последняя определялась соотношением

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{V_{\mathbf{q}} \rho_e(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (4.5)$$

поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.6)$$

С помощью (4.6) и результатов гл. 2 мы можем прямо записать несколько полезных соотношений для $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Используя (2.57), можно выразить $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ через точные собственные состояния электронной системы:

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\}. \quad (4.7)$$

Мы видим, что функция $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , как это должно быть для причинной функции реакции. Таким образом, можно записать соотношения Крамерса — Кронига, связывающие действительную и мнимую части $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Подобным же образом можно вывести спектральное представление [ср. (2.58)]

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \int_0^{\infty} d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') \left\{ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega' + i\eta} \right\}. \quad (4.8)$$

Как мы видим, динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ играет роль спектральной плотности для $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Напишем ε в виде

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_1(\mathbf{q}, \omega) + i\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.9)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — действительные величины. Согласно (4.8), имеем

$$\frac{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2} = \frac{4\pi^2 e^2}{q^2} \{S(\mathbf{q}, \omega) - S(\mathbf{q}, -\omega)\}. \quad (4.10)$$

Для $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ существует продольное правило сумм, которое непосредственно следует из правила f -сумм (2.28). Используя (2.28) и (4.10), находим

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2} = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 = \frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \quad (4.11)$$

На первый взгляд кажется, что так же легко записать аналог правила сумм для сжимаемости [см. (2.85)]. Однако соотношение (2.85) неприменимо к динамическому форм-фактору электронной системы по той причине, что в этом случае, как обсуждалось в гл. 3, сжимаемость определяется длинноволновым пределом электронной реакции на экранированное внешнее поле, т. е. на \mathfrak{E} , а не на \mathfrak{D} .

РЕАКЦИЯ НА ЭКРАНИРОВАННОЕ ПОЛЕ $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$

Определим реакцию электронной жидкости на экранированное внешнее поле по аналогии с (4.5):

$$\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{V_q \{\rho_e(\mathbf{q}, \omega)/\epsilon(\mathbf{q}, \omega)\}} = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \chi(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.12)$$

Величина $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ является мерой флуктуаций плотности, индуцированных экранированным внешним зарядом $\rho_e(\mathbf{q}, \omega)/\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Учитывая (4.12) и (4.6), мы можем написать

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.13)$$

Сразу видно сходство между равенствами (4.13) и (4.6).

Диэлектрическую проницаемость можно записать так [см. (3.32)]:

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.14)$$

Таким образом, продольная проводимость $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$ просто связана с $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$:

$$\sigma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i\omega e^2}{q^2} \chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.15)$$

Поэтому функцию экранированной реакции можно вычислить элементарным образом, определив ток $e\mathbf{J}$, вызванный полным электрическим полем \mathfrak{E} . Указанную величину можно также получить с помощью кинетического уравнения для заряженной

ферми-жидкости, так как в этом случае определяется реакция именно на \mathfrak{E} , а не на \mathfrak{D} .

Сравнивая (4.13) с (3.56), мы видим, что $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ равна величине $\chi^n(\mathbf{q}, \omega)$, которую мы ввели в гл. 3. Она соответствует функции реакции плотность — плотность для фиктивной нейтральной системы с тем же взаимодействием, что и экранированное кулоновское взаимодействие электронов.

Имеется одно важное различие между $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ и истинной функцией реакции плотность — плотность, подобное различие между $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ и $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Величина $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ (так же как $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$ и $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$) характеризует реакцию системы не на внешнее поле, а на экранированное поле, которое существует внутри системы. Поэтому соображения причинности оказываются бесполезными при проводимом ниже рассмотрении задачи об определении аналитического поведения $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ и $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , если функция $1/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ не имеет там нулей. При действительных ω условие $\text{Im } \varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 0$ означает, что $S(\mathbf{q}, \omega) = 0$. Полюсы $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ могут лежать только вне области частот, для которых отличен от нуля динамический форм-фактор. Рассмотрим нормальную заряженную ферми-жидкость. Согласно теории Ландау, функция $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в принципе может иметь полюсы, лежащие вне области однопарных возбуждений (см. гл. 3, § 4). Однако мы видели, что при конечных \mathbf{q} в $S(\mathbf{q}, \omega)$ вносят вклад многопарные возбуждения, лежащие в области от $\omega = 0$ до бесконечности. Если принять их во внимание, то появляется затухание и возможный полюс в $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ смещается вниз от действительной оси. Отсюда следует, что в нормальной ферми-жидкости функция $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ аналитична на действительной оси. Иначе обстоит дело в сверхпроводниках, в спектре возбуждений которых имеется щель. В этом случае полюс $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ лежит на действительной оси. Однако полюс можно поместить на бесконечно малом расстоянии ниже этой оси; тогда на самой оси функция $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ остается аналитичной.

Теперь исследуем расположение нулей функции $\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ в комплексной полуплоскости ω :

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 \quad (\omega_2 > 0). \quad (4.16)$$

В этом случае мы можем переписать (4.8) в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{8\pi e^2}{q^2} \int_0^{\infty} d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') \frac{\omega'}{\omega^2 - (\omega')^2}. \quad (4.17)$$

Взяв мнимую часть от обеих сторон равенства (4.17), найдем

$$\text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = -\frac{16\pi e^2}{q^2} \omega_1 \omega_2 \int_0^\infty d\omega' \frac{S(\mathbf{q}, \omega') \omega'}{\{(\omega_1 + i\omega_2)^2 - (\omega')^2\} \{(\omega_1 - i\omega_2)^2 - (\omega')^2\}}. \quad (4.18)$$

Так как функция $S(\mathbf{q}, \omega')$ положительно определена, интеграл положителен. Тогда $\text{Im} \varepsilon^{-1}$ может равняться нулю только при $\omega_1 \omega_2 = 0$. Так как частота ω_2 не равна нулю по предположению, нули $\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ могут находиться только на мнимой оси.

Пусть $\omega = i\alpha$, где α — действительное число. Используя (4.17), мы видим, что $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ имеет сингулярность при значении α , определяемом условием

$$1 = \frac{8\pi e^2}{q^2} \int_0^\infty d\omega' \frac{S(\mathbf{q}, \omega') \omega'}{(\omega')^2 + \alpha^2}. \quad (4.19)$$

Может ли удовлетворять этому условию отличное от нуля значение α ? Так как интеграл в (4.19) представляет собой монотонную функцию α , стремящуюся к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$, уравнение (4.19) имеет решение только в том случае, если

$$1 < \frac{8\pi e^2}{q^2} \int_0^\infty d\omega' \frac{S(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'}. \quad (4.20)$$

С другой стороны, из (4.17) непосредственно следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) = \left[1 - \frac{8\pi e^2}{q^2} \int_0^\infty d\omega' \frac{S(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'} \right]^{-1}. \quad (4.21)$$

Поэтому условие (4.20) можно записать в виде

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) < 0. \quad (4.22)$$

Таким образом, аналитичность $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в верхней полуплоскости ω зависит от знака $\varepsilon(\mathbf{q}, 0)$.

Чтобы определить знак этой функции, мы должны воспользоваться какими-то общими физическими соображениями, поскольку все математические аргументы мы исчерпали при выводе условия (4.22).

Рассмотрим сначала простую физическую модель. Пусть электронная жидкость погружена в однородно распределенный положительный заряд (фон). До сих пор мы предполагали, что система устойчива относительно малых флуктуаций плотности положительного заряда. Фактически это не всегда так. Предположим, что плотность фона изменяется на величину $\delta\rho(\mathbf{q})$. Та-

кую флуктуацию можно уподобить действию на электроны *статического* пробного заряда. В результате возмущения полная энергия всей системы (электроны плюс положительный фон) изменится на величину

$$\delta E = \frac{2\pi e^2}{q^2} \frac{|\delta\rho(q)|^2}{\epsilon(q, 0)}$$

(вывод этого соотношения предоставляем читателю; см. задачу 1). Мы видим, что при $\epsilon(q, 0) < 0$ величина δE также оказывается отрицательной: флуктуации плотности положительного заряда энергетически выгодны. Если функция $\epsilon(q, 0)$ отрицательна при некотором значении q , положительный фон неустойчив по отношению к *спонтанным* флуктуациям плотности с таким волновым вектором.

Такая неустойчивость особенно просто выглядит в пределе длинных волн. В этом случае $\epsilon(q, 0) < 0$ соответствует отрицательной сжимаемости κ системы электроны плюс фон [см. (3.62)]. Так как величина $1/\kappa$ фактически представляет собой вторую производную энергии основного состояния по плотности [см. соотношение (1.47)], то $\kappa > 0$, очевидно, отвечает максимуму E , что приводит к неустойчивости состояния. Итак, условие $\epsilon(q, 0) > 0$ следует из требования *устойчивости положительного фона относительно воздействия электронной жидкости*. При этом функция $\epsilon(q, \omega)$ аналитична в верхней полуплоскости переменной ω . Отметим, что этот результат зависит от предположения о бесконечно большой массе фона положительного заряда. Мы неявно предполагали, что с флуктуациями фона не связана кинетическая энергия. Поэтому возникает вопрос о применимости этих результатов к реальному случаю электронов в металлах (в которых масса ионов конечна), а тем более и к электронам и дыркам в полупроводниках (в которых два типа носителей имеют сравнимые массы). Мы думаем, что функция $\epsilon(q, 0)$ должна оставаться положительной и в этих более сложных случаях. В противном случае система *перекомпенсировала бы* поле внешнего пробного заряда (полное поле в системе имело бы противоположный знак по отношению к полю пробного заряда). Представляется крайне маловероятным, чтобы система, так сказать, «перестаралась» в реакции на статическое возмущение. На языке электротехники это означает, что система была бы «активной», тогда как мы ожидаем от нее «пассивного» поведения по отношению к статическому возмущению. Физическое требование положительности $\epsilon(q, 0)$ нам представляется разумным для любой системы.

Так как $\epsilon(q, \omega)$ и $\epsilon^{-1}(q, \omega)$ имеют одинаковые аналитические свойства, мы можем сразу же записать соотношения Крамер-

са — Кронига, связывающие действительную и мнимую части $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Кроме того, можно получить правило сумм для проводимости. Из определения $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ [см. (4.7)] и продольного правила f -сумм [см. (2.29)] вытекает, что при больших частотах

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (4.23)$$

Зная это асимптотическое поведение, а также аналитические свойства $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, можно показать [ср. (4.11)], что

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \epsilon_2(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 = \frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \quad (4.24)$$

Это правило сумм часто записывают с помощью диссипативной части продольной проводимости $\sigma_1(\mathbf{q}, \omega)$. Используя (4.14), получаем

$$\int_0^{\infty} d\omega \sigma_1(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega_p^2}{8} = \frac{\pi N e^2}{2m}. \quad (4.25)$$

ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ $\epsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ И $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ В ПРЕДЕЛЕ ДЛИННЫХ ВОЛН

Существуют еще два правила сумм, которые можно получить в пределе длинных волн, зная аналитическое поведение ϵ^{-1} и ϵ и учитывая определение сжимаемости электронной системы. Заметим сначала, что в пределе длинных волн $\chi_{\text{экр}}$ сводится к сжимаемости:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{m s^2}. \quad (4.26)$$

Действительно, соотношение (4.26) представляет собой просто другой способ записи статической диэлектрической проницаемости в пределе длинных волн:

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2} \quad (\mathbf{q} \rightarrow 0). \quad (4.27)$$

Используя соотношение Крамерса — Кронига [ср. (2.78а)]

$$\epsilon_1(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega')\} P\left(\frac{\omega'}{(\omega')^2 - \omega^2}\right) \quad (4.28)$$

(где P означает, что необходимо взять главное значение интеграла), находим

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2}. \quad (4.29)$$

Аналогичное правило сумм для $\text{Im } \epsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ получается при рассмотрении реакции электронов на статическое внешнее поле. Чтобы получить его, воспользуемся соотношением Крамерса — Кронига для ϵ^{-1} :

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega')}{|\epsilon(\mathbf{q}, \omega')|^2}. \quad (4.30)$$

Как мы видели [см. (4.27)], в длинноволновом пределе электронный газ обладает идеальными экранирующими свойствами:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} = 0,$$

откуда следует

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega')}{|\epsilon(\mathbf{q}, \omega')|^2} = + \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

Это второе длинноволновое правило сумм не зависит от макроскопических параметров системы.

Рассмотренные правила сумм могут оказаться полезными при проверке какого-либо вычисления $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Они также позволяют сделать некоторые точные утверждения относительно поведения динамического форм-фактора в пределе длинных волн.

§ 2. ВОЗБУЖДЕНИЯ ТИПА ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ

ПРАВИЛА СУММ И ОБЩИЙ ХАРАКТЕР ФОРМ-ФАКТОРА $S(\mathbf{q}, \omega)$

Вообще говоря, в динамический форм-фактор электронного газа вносят вклад однопарные возбуждения квазичастица — квазидырка, многопарные возбуждения (представляющие собой две и более пар квазичастица — квазидырка) и продольные коллективные моды — плазмоны. Мы рассмотрим пока только трансляционно-инвариантную систему; электроны в металле кратко обсуждаются в § 3. Как и для нейтральной фермионной системы, динамический форм-фактор при средних и больших значениях \mathbf{q} изменяется более или менее монотонно при всех возможных частотах возбуждений вплоть до значений порядка ϵ_F/\hbar . Вклады от различных мод возбуждений, конечно, не могут быть разделены. Наоборот в пределе длинных волн оказывается возможным различать разные возбуждения и оценивать их относительные вклады в $S(\mathbf{q}, \omega)$. В этом отношении большую помощь оказывают четыре правила сумм, которые определяют поведение $S(\mathbf{q}, \omega)$ в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$.

С помощью соотношения (4.10) мы можем следующим образом переписать правила сумм, найденные в § 1:

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{2m}, \quad (4.32)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{S(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} = \frac{q^2}{8\pi e^2}, \quad (4.33)$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega S(\mathbf{q}, \omega) |\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2 = \frac{Nq^2}{2m}, \quad (4.34)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{S(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} |\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2 = \frac{N}{2ms^2}. \quad (4.35)$$

Первое из них представляет собой известное правило f -сумм. Второе — правило сумм (4.31) «о полном экранировании». Соотношение (4.34) — это правило сумм для проводимости (4.25), а (4.35) — правило сумм для сжимаемости (4.29). Тот факт, что мы имеем четыре правила сумм для электронного динамического форм-фактора, тогда как для соответствующей величины в нейтральной системе мы имели два правила сумм, является прямым следствием существования двух различных функций реакции в электронном газе¹⁾.

Рассмотрим сначала плазмоны. Плазмоны вносят существенный вклад в первые два правила сумм (4.32) и (4.33). Чтобы увидеть это, запишем соотношение (4.10) следующим образом:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{q^2}{4\pi^2 e^2} \frac{\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{|\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2} \quad (\omega > 0). \quad (4.36)$$

Как мы видели, комплексная плазменная частота ω_q удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0. \quad (4.37)$$

¹⁾ Внимательный читатель заметит, что в нейтральной системе мы могли бы ввести функцию экранирования, аналогичную диэлектрической функции, в которой величина $4\pi e^2/q^2$ заменена просто фурье-компонентой взаимодействия частиц. Тогда мы тоже имели бы четыре правила сумм, как и в рассматриваемом случае. Однако такой подход не очень плодотворен. Дело в том, что из-за особого характера кулоновского взаимодействия оказывается *необходимым* ввести экранирование или диэлектрическую функцию, что существенно упрощает все последующие физическое и математическое рассмотрение. Если же взаимодействие в системе является короткодействующим, то не имеет смысла выделять поляризационные процессы и рассматривать их отдельно.

Предположим на минуту, что плазмоны не затухают. Тогда частота ω_q действительна и из (4.37) следует

$$\varepsilon_1(\mathbf{q}, \omega_q) = \varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega_q) = 0. \quad (4.38)$$

Таким образом, вклад плазмонов в $S(\mathbf{q}, \omega)$ имеет сингулярность. В этом случае можно использовать наше причинное граничное условие, согласно которому функция $\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ должна быть аналитичной в верхней полуплоскости ω . Тогда в окрестности $\omega = \omega_q$ можно написать

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{q^2}{4\pi^2 e^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = \\ &= -\frac{q^2}{4\pi^2 e^2} \operatorname{Im} \left\{ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1(\mathbf{q}, \omega_q) + \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_q} (\omega - \omega_q + i\eta)} \right\} = \\ &= \frac{q^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_q}^{-1} \delta(\omega - \omega_q). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Мы видим, что незатухающие плазмоны, как и нуль-звуковые моды в нейтральной ферми-жидкости, приводят к δ -образной сингулярности в $S(\mathbf{q}, \omega)$.

Ниже будет показано, что этот «незатухающий» случай возможен только в трансляционно-инвариантной системе при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, когда плазмоны обладают энергией ω_p . При конечных \mathbf{q} плазмоны затухают, функция $\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega_q)$ не обращается в нуль и определяемая уравнением (4.37) энергия плазмонов равна

$$\omega_q = \omega_1 - i\omega_2 \quad (\omega_2 > 0).$$

При малых \mathbf{q} затухание невелико. Вследствие большого значения энергии плазмонов ω_p не происходит перекрытия спектра плазмонов и спектра однопарных возбуждений, верхняя граница которого равна qv_F . Затухание появляется только из-за перекрытия спектра плазмонов со спектром многопарных возбуждений. Можно показать, что такое затухание имеет порядок q^2 . Оно довольно медленно возрастает при увеличении волнового вектора. Однопарное затухание (затухание Ландау) становится возможным при

$$q = q_c \approx \frac{\omega_p}{v_F}. \quad (4.40)$$

Когда $q > q_c$, затухание Ландау оказывается весьма эффективным; обратное время жизни плазмонов становится сравнимым с действительной частью их частоты и плазмоны перестают быть хорошо определенными возбуждениями.

Пока плазмоны хорошо определены, они не вносят вклада в правила сумм (4.34) и (4.35), поскольку для того, чтобы этот

вклад был заметен, величина $|\epsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2$ должна быть мала. Тогда эти правила сумм можно рассматривать как правила сумм для другого вклада в $S(\mathbf{q}, \omega)$, а именно вклада, вносимого квазичастичными возбуждениями. Они напоминают два правила сумм, найденные ранее для нейтральной системы. Аналогия станет явной, если в функции экранированной реакции $\chi_{\text{экр}}$ [определяемой соотношениями (4.12) и (4.13)] выделить действительную и мнимую части

$$\chi_{\text{экр}} = \chi'_{\text{экр}} + i\chi''_{\text{экр}}.$$

Используя (4.13), правила сумм (4.34) и (4.35) можно записать в виде

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega) \omega = \frac{Nq^2}{m}, \quad (4.41)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} \right] = \frac{N}{ms^2}. \quad (4.42)$$

Теперь видим, что они действительно похожи на (2.173) и (2.175) ¹⁾.

Каков физический смысл величины $\chi''_{\text{экр}}$? Как мы видели, эта величина измеряет реакцию на полное экранированное поле $\mathcal{E} = \mathcal{D} + \mathcal{E}_p$. При ее вычислении следует соблюдать осторожность, чтобы не учесть второй раз те эффекты кулоновского взаимодействия, которые уже были включены в \mathcal{E}_p (эта проблема уже обсуждалась в гл. 3, § 6). В пределе длинных волн и низких частот $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ можно получить непосредственно с помощью кинетического уравнения Ландау—Силина (3.38), которое явно содержит экранированное поле \mathcal{E} . Для микроскопических значений \mathbf{q} и ω двукратного учета кулоновского взаимодействия можно избежать, если использовать соответствующие методы теории поля ²⁾.

Зная связь $\chi''_{\text{экр}}$ с функцией реакции плотность — плотность $\chi''_n(\mathbf{q}, \omega)$ эквивалентной нейтральной системы, можно выяснить поведение $\chi_{\text{экр}}$. Прежде всего определенный вклад вносят однопарные и многопарные возбуждения. Далее, если значение F_0^s

¹⁾ Соотношения (4.41) и (4.42), записанные в таком виде, справедливы как при $T=0$, так и при конечных температурах. Читатель может легко проверить, что наш вывод уравнений (4.34) и (4.35) можно без изменений перенести и на конечные температуры, если считать s изотермической скоростью звука.

²⁾ Заметим, что для этого нужно просто просуммировать все соответствующие поляризационные диаграммы, используя самосогласованное динамическое экранированное электрон-электронное взаимодействие.

велико и положительно, то $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет полюс существенно «коллективного» происхождения. Подчеркнем, что этот полюс не проявляется в спектре возбуждений типа флуктуаций плотности, т. е. в $S(\mathbf{q}, \omega)$ или в $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Чтобы убедиться в этом, возьмем мнимую часть от обеих сторон равенства (4.12); тогда

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2}. \quad (4.43)$$

Согласно (4.13), если функция $\chi''_{\text{экр}}$ имеет полюс, то полюсом обладает и $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Этому полюсу соответствует *обращение в нуль* функции $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ или $S(\mathbf{q}, \omega)$. Соотношение (4.43) позволяет уяснить физический смысл связи между $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$. Предположим сначала, что $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ не имеет «коллективного» полюса на действительной оси. Тогда $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ существует в том же частотном интервале, что и $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$. Используя (2.63) и (2.12), мы можем записать $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ в виде

$$\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega) = -\pi \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0}|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}), \quad (\omega > 0), \quad (4.44)$$

где мы положили

$$[(\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0}] = (\rho_{\mathbf{q}})_{n0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega_{n0}). \quad (4.45)$$

При такой форме записи единственное различие между функциями экранированной и неэкранированной реакции заключается в том, что $\rho_{\mathbf{q}}$ в (4.44) заменяется на $\rho_{\mathbf{q}}^{(1)}$ (поэтому полюс функции χ'' , соответствующий плазмонам, отсутствует у $\chi''_{\text{экр}}$).

Почтительно обсудить соотношение (4.45) с другой точки зрения. Предположим, что мы умеем, зная экранированное взаимодействие частиц, вычислить $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$. При этом мы получим выражение типа (4.44), в котором матричные элементы и частоты возбуждений определяются так же, как и в соответствующей нейтральной системе, описанной в гл. 2. Чтобы перейти от $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ к реальной функции реакции $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$, мы должны разделить матричные элементы $(\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0}$ на диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\mathbf{q}, \omega_{n0})$. Эта процедура аналогична *экранированию* реакции эквивалентной нейтральной системы.

Заметим, что в функцию реакции на экранированное поле $\chi''_{\text{экр}}$ входит голая, неэкранированная флуктуация плотности $\rho_{\mathbf{q}}^{(1)}$, тогда как в реакцию на неэкранированное поле χ'' входят экранированные флуктуации плотности $\rho_{\mathbf{q}}$. Иначе говоря, экранирование можно учесть либо в определении поля, либо в матричных элементах флуктуации плотности, но не одновременно там и здесь.

Физически мы можем представлять, что голая квазичастица (нашей эквивалентной нейтральной системы) окружена соответствующим динамическим облаком других квазичастиц. Математически можно вычислять спектр флуктуаций плотности, пренебрегая всеми поляризационными процессами и учитывая их затем с помощью соотношения (4.45). Некоторое время тому назад авторы настоящей книги показали это на примере приближения хаотических фаз [1]. Как следует из приведенного здесь рассуждения, введение надлежащим образом «одетых» квазичастиц во всех случаях позволяет правильно описать спектр флуктуаций плотности¹⁾.

Использование простого соотношения (4.45) приводит к некоторым трудностям, когда $\epsilon(q, \omega)$ имеет «коллективный» полюс. Тогда $\chi''_{\text{экр}}$ тоже имеет полюс, а χ'' не имеет (точно так же, как плазмоны вносят вклад в χ'' и не вносят в $\chi''_{\text{экр}}$). В этом случае в выражении (4.44) содержится дополнительный «коллективный» член с частотой $\omega_{\text{до}}^{(1)}$, который не входит в выражение для χ'' . Такой член нельзя связать с реальным возбуждением в системе, так как «коллективный» полюс в ϵ не соответствует хорошо определенному состоянию. Однако следует внимательно следить за тем, чтобы не упустить его при вычислении $\chi''_{\text{экр}}$.

Подведем итог сказанному. В $\chi''_{\text{экр}}(q, \omega)$ вносят вклад однопарные и многопарные возбуждения, а также полюс «коллективного» происхождения. Отдельные вклады имеют такое же относительное значение, как и в нейтральной системе, рассмотренной в гл. 2. В пределе длинных волн эти вклады можно разделить. Мы увидим, что многопарные возбуждения не играют существенной роли. Кроме того, при низких частотах ($\omega \ll qv_F$) функция $\chi''_{\text{экр}}(q, \omega)$ пропорциональна ω , если $q < 2p_F$, и пропорциональна по крайней мере ω^2 , если $q > 2p_F$.

Что касается $\chi''(q, \omega)$, то однопарные и многопарные возбуждения дают вклад в эту функцию в одной и той же области частот, но экранируются, так как умножаются на величину $|\epsilon(q, \omega_{\text{до}})|^{-2}$. Это экранирование очень важно при длинных волнах и низких частотах. Оно полностью погашает любой вклад в $\chi''(q, \omega)$, вносимый «коллективными» полюсами, которыми обладает $\chi''_{\text{экр}}(q, \omega)$. При переходе от $\chi''_{\text{экр}}(q, \omega)$ к $\chi''(q, \omega)$ мы учитываем плазмоны, которым соответствуют нули $\epsilon(q, \omega)$, о чем мы

¹⁾ Приведенное рассмотрение не ограничено случаем $T=0$. Оно в равной степени относится к квантовой и к классической плазме при конечных температурах. Действительно, было доказано, что метод одетых квазичастиц весьма полезен при вычислении флуктуаций в классической плазме [2—4].

говорили выше. Из-за экранирования однопарных возбуждений, а также из-за того, что многопарные возбуждения начинают играть важную роль при $q \approx p_F$, плазмоны умеренных энергий с малым затуханием определяют спектр возбуждений типа колебаний плотности при $q \leq \omega_p/v_F$ (для электронной жидкости с плотностью, характерной для металлов). В противоположном пределе больших q ($q \gg \omega_p/v_F$) имеется непрерывный энергетический спектр, связанный с однопарными и многопарными возбуждениями.

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Как и в случае нейтральной ферми-жидкости, мы можем использовать различные правила сумм, чтобы выяснить роль различных возбуждений в пределе длинных волн. Мы увидим, что в этом пределе четыре правила сумм (4.32) — (4.35) фактически разбиваются на две пары. Первые два, (4.32) и (4.33), определяют спектр возбуждений типа флуктуаций плотности, т. е. плазмонов, два других — спектр возбуждений типа экранированных флуктуаций плотности в соответствии с соотношениями (4.41) и (4.42).

Рассмотрим сначала правила сумм (4.32) и (4.33); в них входит динамический форм-фактор $S(q, \omega)$. В пределе длинных волн, когда плазмоны не затухают, мы можем записать $S(q, \omega)$ в виде суммы двух членов:

$$S(q, \omega) = S_{\text{пл}}(q, \omega) + S_{\text{неког}}(q, \omega), \quad (4.46)$$

где $S_{\text{пл}}$ — спектральная плотность для плазменной моды. Вторым членом, $S_{\text{неког}}$, соответствует существенно некогерентному вкладу квазичастичных возбуждений.

Начнем со второго члена. Прежде всего в него вносит вклад возбуждение единичных пар квазичастица — квазидырка. Для трансляционно-инвариантной системы соответствующая энергия возбуждений ω_{n0} имеет порядок qv_F . (В твердом теле энергия ω_{n0} может быть конечной, что соответствует междузонному переходу; этот более общий случай кратко обсуждается в § 3) В пределе длинных волн матричный элемент $(\rho_q^{(1)})_{n0}$ для состояний этого типа имеет порядок единицы; число таких состояний имеет порядок q/p_F . Легко видеть, что такие состояния вносят вклад в правила сумм (4.34) и (4.35). Вместе с тем в результате диэлектрического экранирования этих низкочастотных переходов мы имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} (\rho_q)_{n0} \approx \frac{(\rho_q^{(1)})_{n0}}{\epsilon(q, \Omega)} \approx \frac{q^2 s^2}{\omega_p^2}; \quad (4.47)$$

здесь мы использовали (4.45). Отсюда следует, что вклад однопарных возбуждений в правило f -сумм имеет порядок q^6 , а в правило сумм об экранировании — порядок q^4 . Таким образом, в пределе длинных волн вкладом однопарных возбуждений в правила сумм можно пренебречь.

Вклад многопарных состояний (содержащих по крайней мере две пары квазичастица — квазидырка) можно оценить подобным образом по аналогии с нейтральной системой, рассмотренной в гл. 2. Для трансляционно-инвариантной системы в длинноволновом пределе находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} \langle \omega_{n0} \rangle \sim \bar{\omega},$$

$$(\rho_q^{(1)})_{n0} \sim q^2,$$

где величина ω конечна (порядка μ). Это означает, что $\varepsilon(\mathbf{q}, \bar{\omega}) \sim 1$, так что матричный элемент флуктуации плотности $(\rho_q^{(1)})_{n0}$ в этом пределе также имеет порядок q^2 . Поскольку принцип Паули не налагает каких-либо ограничений на размер области в фазовом пространстве, многопарные возбуждения вносят вклад порядка q^4 во все четыре правила сумм, которым в длинноволновом пределе можно пренебречь.

Вернемся к правилу f -сумм (4.32) и к правилу (4.33) о полном экранировании. Приведенные соображения показывают, что в пределе длинных волн оба правила сумм должны выполняться при подстановке величины $S_{\text{пл}}$. Представим ее в виде

$$S_{\text{пл}}(\mathbf{q}, \omega) = A \delta(\omega - \omega_q). \quad (4.48)$$

Подставим (4.48) в (4.32) и (4.33) и определим A и ω_q ; тогда

$$\lim_{q \rightarrow 0} S_{\text{пл}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{2m\omega_p} \delta(\omega - \omega_p). \quad (4.49)$$

С помощью удобного подхода, основанного на правиле f -сумм, мы установили, что в однородной электронной системе независимо от ее плотности доминирующим длинноволновым возбуждением являются плазмоны с энергией ω_p .

Используя связь (4.10) между $S(\mathbf{q}, \omega)$ и мнимой частью функции $\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$, находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.50)$$

Таким образом, мы получили обещанное подтверждение справедливости проведенных в гл. 3 вычислений, основанных на теории Ландау. Легко видеть, что они законны при q , удовлетворяющих условию

$$qv_F \ll \omega_p.$$

Заметим, что матричный элемент для возбуждения плазмона равен

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \{(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}\}_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{N}{2m\omega_p}} q. \quad (4.51)$$

Используя уравнение непрерывности, находим

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \{(\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^+)_{n0}\}_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{N\omega_p}{2m}}. \quad (4.52)$$

Последний результат противоречит нашему прежнему утверждению, что в этом пределе ток $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ должен быть порядка q (это утверждение основано на том факте, что для трансляционно-инвариантной системы полный ток \mathbf{J} является хорошим квантовым числом). Недоразумение устраняется, если мы заметим, что физически эффект связан с переносом только электронов, тогда как положительный заряд неподвижен; в результате возникает разделение заряда. В длинноволновом пределе плазменные колебания связаны с таким переносом. Поэтому $(\mathbf{J}_{\mathbf{q}})_{n0}$ имеет конечное значение.

Вернемся к спектру экранированных колебаний плотности или, иначе говоря, к $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Мы видели, что в пределе длинных волн многопарные возбуждения не вносят вклада в $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ остается лишь вклад от однопарных возбуждений и от «коллективных» полюсов. Вообще говоря, оба вклада существенны и их нельзя разделить. Поэтому мы не можем сделать никаких точных утверждений о поведении функции $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Можно ожидать, что в пределе сильной связи $F_0^s \gg 1$ поведение $\chi''_{\text{экр}}$ определяется «коллективным» полюсом. В этих условиях длинноволновой предел $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ [ср. (3.77)] описывается выражением

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i\eta)^2 - s_0^2 q^2}, \quad F_0^s \gg 1. \quad (4.53)$$

При $\mathbf{q} \rightarrow 0$ соотношение (4.53) сводится к нашему прежнему результату (4.50), а при $\omega \rightarrow 0$ — к статическому результату (4.27).

Согласно полученному ранее результату (4.50), при $\mathbf{q} \equiv 0$ действительная часть проводимости σ_1 пропорциональна δ -функции от ω . Используя соотношения Крамерса — Кронига, связывающие действительную и мнимую части $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$, находим

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \sigma_1(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Ne^2}{m} \pi \delta(\omega). \quad (4.54)$$

Наличие такого полюса не вызывает удивления. Мы рассматриваем бесстолкновительный режим, когда электронная жидкость

в однородном поле обладает бесконечной проводимостью. Отраженном этого факта и является полюс в σ .

При наличии столкновений положение, конечно, меняется. В пределе очень малых частот и волновых векторов реализуется гидродинамический режим; тогда $\chi''_{\text{экр}}$ уже нельзя описать с помощью представления об элементарных возбуждениях. Предположим сначала, что наиболее важны столкновения между квази-частицами. Тогда гидродинамический предел $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ описывается соотношением (4.53), причем s_0 нужно заменить скоростью первого звука [ср. (2.182)]. Если же определяющим является рассеяние на примесях, то

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - s^2 q^2 + \frac{i\omega}{\tau_{\text{эфф}}}} \quad (4.55)$$

[см. (3.146)].

ТАБЛИЦА 4

Матричные элементы, частоты и вклады в правила сумм, вносимые возбуждениями, связанными с флуктуациями плотности, в пределе длинных волн

	Плазмоны	Однопарные возбуждения	Многопарные возбуждения
$(\rho_{\mathbf{q}}^1)_{n0}$	—	1	q^2
$(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$	$q(N/2m\omega_p)^{1/2}$	q^2	q^2
ω_{n0}	ω_p	qv_F	$\bar{\omega}$
Уменьшение числа возможных состояний, обусловленное принципом Паули	Нет	$q^1 \rho_F$	Нет
$\sum_n \omega_{n0} (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} ^2$	$Nq^2/2m$	q^6	q^4
$\sum_n (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} ^2 / \omega_{n0}$	$q^2/8\pi e^2$	q^1	q^4
$\sum_n (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} ^2 \omega_{n0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega_{n0}) ^2$	—	$Nq^2/2m$	q^4
$\sum_n (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} ^2 \epsilon(\mathbf{q}, \omega_{n0}) ^2 / \omega_{n0}$	—	$N/2ms^2$	q^4
$\sum_n (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} ^2 / N$	$q^2/2m\omega_p$	q^5	q^4

В настоящем параграфе мы рассматривали $\chi''_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ лишь в бесстолкновительном режиме. Полученные нами оценки матрич-

ных элементов и частот для различных типов возбуждений собраны в табл. 4. Приведено также значение статического форм-фактора $S(\mathbf{q})$ в пределе длинных волн. Напомним, что

$$S(\mathbf{q}) = \sum_n \frac{|\langle \rho_{\mathbf{q}}^+ \rangle_{n0}|^2}{N}. \quad (4.56)$$

В пределе малых \mathbf{q} статический форм-фактор полностью определяется плазмонами. Таким образом,

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} S(\mathbf{q}) = \frac{q^2}{2m\omega_p}. \quad (4.57)$$

§ 3. ЭКРАНИРОВАНИЕ И ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В гл. 3 мы обсуждали физическую природу двух близких явлений в однородной электронной системе — экранирования и плазменных колебаний. С помощью изложенной в настоящей главе теории можно показать, что экранирование с характерной длиной

$$\lambda_c = \frac{s}{\omega_p} \quad (4.58)$$

и плазменные колебания с частотой

$$\omega = \omega_p \quad (4.59)$$

действительно являются свойствами любой однородной электронной плазмы в длинноволновом пределе. Независимо от плотности и температуры диэлектрическую проницаемость можно записать в виде [см. (4.27)]

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2},$$

где s — изотермическая скорость звука, связанная с изотермической сжимаемостью $\chi_{\text{изо}}$ соотношением

$$ms^2 = \frac{1}{\rho \chi_{\text{изо}}} = N \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T, \Omega}. \quad (4.60)$$

Диссипативная часть функции реакции плотность — плотность принимает соответственно следующее предельное значение:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\pi}{2} \frac{Nq^2}{\omega_p} \{ \delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p) \}, \quad (4.61)$$

или эквивалентно

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

КОНЕЧНЫЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Полученные выше предельные формулы относились к электронному газу при $T=0$ [соотношение (4.61) легко получить, используя (2.167) и (4.49)]. Легко убедиться в справедливости этих результатов и при конечных температурах. Результат (4.27) почти тривиален. Он зависит только от правильного определения сжимаемости системы электронов, погруженной в однородный положительный заряд. Соотношение (4.61) для конечных температур вытекает из соответствующего правила f -сумм

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi''(\mathbf{q}, \omega) \omega = \frac{Nq^2}{m}, \quad (4.62)$$

и правила сумм «о полном экранировании»

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\chi''(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} = \frac{q^2}{4\pi e^2}. \quad (4.63)$$

Используя определение $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ при конечных температурах, соотношение (2.165) и оценивая матричные элементы, подобно тому как это делалось при $T=0$, легко убедиться, что в (4.62) и (4.63) вносят вклад только плазменные колебания. Отсюда сразу же следует результат (4.61).

Полученные результаты применимы как к классической электронной плазме, так и к квантовой плазме. Например, в случае классической плазмы малой плотности со слабым взаимодействием квадрат скорости s^2 можно заменить его значением для системы невзаимодействующих частиц

$$s^2 = \frac{kT}{m}. \quad (4.64)$$

Так мы приходим к обычному экранированию Дебая — Хюккеля:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{q^2 kT}. \quad (4.65)$$

Соотношение (4.27) позволяет получить поправки к значению ϵ , описываемому выражением (4.65) при произвольной плотности и температуре.

ЭЛЕКТРОНЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Интересно проследить, в какой степени полученные результаты применимы к электронам в твердом теле, т. е. к системе, не обладающей полной трансляционной инвариантностью из-за

наличия периодической решетки ионов. В этом случае возбуждения нумеруются их импульсом \mathbf{p} (лежащим в первой зоне Бриллюэна) и индексом зоны n (см. гл. 1, § 3). Однопарное возбуждение возникает при переходе квазичастицы из состояния (\mathbf{p}, n) в состояние $(\mathbf{p} + \mathbf{q}, n')$. Если тело не является диэлектриком, в нем могут происходить *внутризонные* переходы ($n = n'$). Они подобны однопарным возбуждениям в однородных системах. Особенностью твердых тел являются *междузонные* переходы ($n \neq n'$). Связанная с ними энергия конечна при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, что в некотором смысле вытекает из отсутствия трансляционной инвариантности. Соответствующий матричный элемент имеет порядок q при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ (тогда как для возбуждений с конечной частотой в однородной системе он имеет порядок q^2).

Рассмотрим сначала применимость наших четырех правил сумм (4.32)–(4.35). Так как закон сохранения числа частиц имеет в твердом теле ту же форму, что и в электронной жидкости, правило f -сумм (4.32) остается справедливым. В пределе длинных волн основной вклад в него вносят плазмоны и междузонные переходы. Остается справедливым и правило сумм для проводимости (4.24) или (4.34). Оно связано как с внутри-, так и с междузонными переходами. В противоположность этому, оставшиеся два правила сумм зависят от существования *свободных* зарядов (электронов в зоне проводимости или дырок в валентной зоне).

В металлах, полуметаллах и полупроводниках, где существуют свободные заряды, в пределе длинных волн полное экранирование сохраняется. Радиус экранирования, однако, оказывается другим и, вообще говоря, зависит от направления. Для достаточно изотропных металлов (например, Na) еще можно определить изотермическую электронную сжимаемость, которая связана с $\partial N / \partial \mu$ соотношением типа (4.60). Более того, можно использовать соотношения (4.60) для *определения* эффективного значения s^2 (см. гл. 3, § 8). Именно это значение s^2 входит в правило сумм для сжимаемости твердого тела (4.35). Отметим, что в то время как междузонные переходы вносят вклад в правило сумм о полном экранировании (4.33), они не вносят вклада в правило сумм для сжимаемости.

Наоборот, в диэлектриках «полное» экранирование статического внешнего заряда отсутствует. Поэтому правила сумм (4.33) и (4.35) неприменимы. Внешний заряд будет уменьшаться на величину, зависящую от статической диэлектрической проницаемости

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{q}, 0) = \varepsilon_0,$$

где ϵ_0 определяется силами осцилляторов и частотами междузонных переходов. Соответствующее удобное выражение можно получить с помощью соотношений Крамерса — Кронига.

Рассмотрим частотную зависимость ϵ , ограничиваясь пределом длинных волн. Подробные вычисления можно провести в различных предельных случаях. Здесь мы кратко изложим результаты и остановимся на их применении к вопросу о существовании плазмонов в твердом теле. Следует различать три области частот.

1) $q v_F \ll \omega \ll \bar{\omega}_{\text{мин}}$ ($\bar{\omega}$ — минимальная энергия междузонного перехода). Вклад междузонных переходов в диэлектрическую функцию не зависит от частоты и равен постоянному значению ϵ_i . Полную диэлектрическую функцию можно записать в виде

$$\lim_{q \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_i - \frac{4\pi N_c e^2}{m_c \omega^2}, \quad (4.66a)$$

где N_c — полная плотность свободных носителей заряда (электронов или дырок) и m_c — их кристаллическая эффективная масса. Мы видели в гл. 3, § 8, что из-за отсутствия трансляционной инвариантности m_c отличается от голей массы m . Разность между m и m_c для электронов (или дырок) можно выразить через силы осцилляторов для междузонных переходов (см. задачу 2).

Часто (в полуметаллах и полупроводниках) одновременно имеется несколько типов носителей, которые характеризуются плотностью $N_{c\alpha}$ и кристаллической массой $m_{c\alpha}$. Тогда диэлектрическая функция получается суммированием поляризуемостей всех групп носителей, и вместо (4.66a) мы имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_i - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{c\alpha} e^2}{m_{c\alpha} \omega^2}. \quad (4.66b)$$

В более общем случае анизотропных энергетических зон простого выражения для $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ не существует.

Согласно (4.66b), плазменные колебания имеют частоту

$$\omega = \left[\sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{c\alpha} e^2}{\epsilon_i m_{c\alpha}} \right]^{1/2}$$

[если эта частота лежит в той области, где соотношение (4.66b) справедливо]. Такого типа внутризонные плазменные колебания обычно происходят в полупроводниках и полуметаллах, где плотность $N_{c\alpha}$ относительно мала. Тогда частота плазменных колебаний лежит в далекой инфракрасной области.

В этой области частот поведение $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ определяется внутрizonными переходами. Его можно изучать экспериментально, измеряя оптические свойства твердого тела в инфракрасной и в далекой инфракрасной областях. На металлах такие эксперименты проводились; мы обсудили их кратко в гл. 3, § 8.

2) $\omega \sim \bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ — типичная частота междузонных переходов). Функция ϵ имеет сложную форму и зависит от вида спектра междузонных возбуждений. Если у ϵ имеются нули, то соответствующие значения частоты отличаются от ω_p . Поскольку плазменный пик перекрывается с непрерывным спектром междузонных возбуждений, плазмоны оказываются затухающими.

3) $\omega \gg \bar{\omega}_{\text{макс}}$ ($\bar{\omega}_{\text{макс}}$ — максимальная частота, при которой сила осциллятора для междузонных переходов валентных электронов еще имеет заметную величину) В этом пределе диэлектрическая функция имеет вид

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi N_v e^2}{m\omega^2}, \quad (4.67)$$

где m — голая масса электрона и N_v — полное число электронов в валентной зоне (которое необязательно равно числу носителей N_c). Поведение ϵ не отличается от ее поведения в однородном случае, так как электроны движутся настолько быстро, что не испытывают влияния периодического потенциала, т. е. ведут себя как свободные. В этих условиях следует ожидать, что плазменные колебания валентных электронов будут напоминать колебания в системе свободных электронов.

Эксперименты по наблюдению плазмонов мы обсудим в следующем параграфе. Подробное обсуждение плазменных колебаний, экранирования и оптических свойств твердых тел читатель может найти в оригинальной литературе [5, 6].

§ 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

ОПИСАНИЕ ПОТЕРЬ С ПОМОЩЬЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Понятие функции диэлектрической реакции можно применить к рассеянию быстрых электронов в электронной системе. Как мы уже отмечали, пучок быстрых электронов является примером внешнего пробного возмущения, которое слабо взаимодействует с системой. Поэтому для описания процесса рассеяния можно использовать борновское приближение. Если падающий электрон (который мы предполагаем нерелятивистским)

обладает импульсом P_e , то условие применимости борновского приближения имеет вид

$$P_e \gg p_F$$

(так как нас интересуют переданные импульсы $q < p_F$). Поэтому можно пренебречь отдачей быстрого электрона и воспользоваться для его плотности выражением

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_e - \mathbf{V}_e t)$$

с фурье-компонентой

$$\rho_e(\mathbf{q}, \omega) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_e} 2\pi \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e).$$

Иначе говоря, быстрый электрон подобен пробному заряду с частотой $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e$ и величиной $2\pi \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_e)$.

Согласно (2.11), отнесенная к единице времени вероятность того, что электрон передаст электронному газу импульс \mathbf{q} и энергию ω , равна

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right)^2 S(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.68)$$

Используя (4.36), можно написать

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{8\pi e^2}{q^2} \left\{ -\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} \right\} = \frac{8\pi e^2}{q^2} \frac{\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{|\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)|^2}. \quad (4.69)$$

Этот результат некоторое время использовался как отправная точка для макроскопического рассмотрения энергетических потерь в электронном газе¹⁾. Однако его можно получить и с помощью макроскопических вычислений на основе закона Ома. Такие вычисления должны приводить к правильному результату в пределе

$$q \ll p_F, \quad \omega \ll \varepsilon_F.$$

Приведенный здесь расчет позволяет распространить этот результат на микроскопический режим ($q \sim p_F, \omega \sim \varepsilon_F$).

Экспериментальный интерес представляет отнесенная к единице времени вероятность $\mathcal{P}(\Upsilon, \omega) d\Upsilon$ рассеяния электрона в телесный угол $d\Upsilon = 2\pi \sin\theta d\theta$ с потерей энергии ω (θ — угол рассеяния, показанный на фиг. 20). Зная $\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega)$, легко получить $\mathcal{P}(\Upsilon, \omega)$, поскольку переданный импульс \mathbf{q} мал по сравнению с P_e и почти перпендикулярен ему. Если ввести цилинд-

¹⁾ Такой подход впервые был использован Ферми [7]. Применения к электронному газу можно найти в работах [8—12].

рические координаты q_{\parallel} , q_{\perp} (ось которых направлена вдоль \mathbf{P}_e), то можно написать

$$\begin{aligned} q_{\perp} &= P_e \theta, \\ \omega &= q_{\parallel} V_e, \\ d^3 \mathbf{q} &= P_e^2 d\Upsilon dq_{\parallel}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Согласно (2.16), мы имеем

$$\mathcal{P}(\Upsilon, \omega) = \frac{P_e^2}{(2\pi)^3} \int dq_{\parallel} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\omega - q_{\parallel} V_e). \quad (4.71)$$

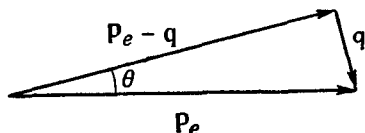
Подставляя (4.69) в (4.71), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Upsilon, \omega) &= \frac{1}{\pi^2 a_0 P_e} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\omega}{mV_e^2}\right)^2} \left\{ -\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(q_1, \omega)} \right\} = \\ &= \frac{4e^2}{a_0 P_e^3} \frac{1}{\left\{ \theta^2 + \left(\frac{\omega}{mV_e^2}\right)^2 \right\}^2} S(q_1, \omega), \end{aligned} \quad (4.72)$$

где

$$q_1 = \left[q_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega}{V_e}\right)^2 \right]^{1/2} = P_e \left[\theta^2 + \left(\frac{\omega}{mV_e^2}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.73)$$

и где $a_0 = \hbar^2 / me^2$ — боровский радиус. Из (4.73) ясно видно, что когда переданная энергия мала по сравнению с mV_e^2 , рассеяние



Фиг. 20. Схема рассеяния электрона.

происходит вперед в очень узком угловом интервале, как и должно быть.

Соотношение (4.72) связывает $\mathcal{P}(\Upsilon, \omega)$ и $S(\mathbf{q}, \omega)$. Возвращаясь к сказанному в § 2, мы можем разбить интервал углов рассеяния (и переданных импульсов) на три существенно различные части:

1) Область коллективных возбуждений, или плазмонов, в которой $S(\mathbf{q}, \omega)$ полностью определяется плазмонами.

2) Переходная область, в которой характер $S(\mathbf{q}, \omega)$ определяется в равной степени как плазмонами, так и однопарными и многопарными возбуждениями.

3) Область некогерентных возбуждений, в которой плазмоны не существуют как хорошо определенная мода. Спектр флуктуаций плотности содержит однопарные и многопарные возбуждения, более или менее однородно распределенные по энергиям.

Чисто «плазменную» область лучше определять как область волновых векторов (и углов рассеяния), в которой правило f -сумм фактически удовлетворяется уже при учете только одних плазмонов. Тогда из соотношения (4.32) вытекает, что

$$S(q_1, \omega) = S_{\text{пл}}(q_1, \omega) = \frac{Nq_1^2}{2m\omega_1} \delta(\omega - \omega_1), \quad (4.74)$$

и

$$\mathcal{F}(T, \omega) = \mathcal{F}_{\text{пл}}(T, \omega) = \frac{\omega_p^2}{2\pi a_0 P_e} \left[\frac{1}{\left(\theta^2 + \frac{\omega_1}{mV_e^2}\right)^2} \right] \frac{1}{\omega_1} \delta(\omega - \omega_1) \quad (4.75)$$

Частоту плазменных колебаний ω_1 можно записать в виде

$$\omega_1 \approx \omega_p + \frac{\alpha q_1^2}{m}, \quad (4.76)$$

где α имеет порядок единицы. В плазменной области член с q_1^2 в (4.76) является малой поправкой (он возникает лишь в том случае, когда, при учете только плазменных колебаний правило сумм не удовлетворяется).

Границу этой плазменной области можно определить лишь качественно. Мы видели, что вклад многопарных возбуждений в правило сумм начинает играть важную роль при $q_1 \sim p_F$. Кроме того, плазмоны, безусловно, отсутствуют, когда становятся возможными однопарные распады, т. е.

$$q_1 \geq q_c \sim \frac{\omega_p}{v_F}. \quad (4.77)$$

Обычно $q_c < p_F$. Итак, мы будем находиться в плазменной области, если $q_1 \ll q_c$, например, если $q_1 \leq q_c/4$. Это соответствует углу рассеяния

$$\theta \leq \theta_1 = \frac{1}{4} \frac{\omega_p}{v_F P_e}. \quad (4.78)$$

Можно считать, что переходная область в пространстве волновых векторов занимает интервал от $q_c/4$ до, скажем, $3q_c$. При увеличении q_1 энергия плазмонов начинает все сильнее и сильнее зависеть от q , при этом увеличивается и затухание плазмонов, вероятность возбуждения плазмонов уменьшается, а однопарные и многопарные возбуждения начинают играть все более важную роль. Когда q_1 становится равным q_c , плазмоны перестают быть хорошо определенной модой. Однако при значениях q_1 , лежащих между q_c и, скажем, $3q_c$, могут оставаться существенными корреляционные эффекты между однопарными и многопарными возбуждениями, обусловленные кулоновским взаимодействием (Следует отметить, что вообще не существует узкого перехода от коллективного поведения, характеризуемого широким плазменным пиком, к полностью некогерентному одночастичному поведению).

В переходной области и далее, при $\theta > \theta_1$, вероятность рассеяния очень быстро уменьшается с ростом угла рассеяния. В этой области переданная энергия есть величина порядка фермиевской энергии μ . Поскольку

$$\theta_1 \gg \frac{\mu}{mV_e^2}, \quad (4.79)$$

мы имеем

$$q_1 \approx P_e \theta. \quad (4.80)$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}(\gamma, \omega) = \frac{4e^2}{a_0 P_e} \frac{1}{\theta^4} S(P_e \theta, \omega) \quad (\theta > \theta_1) \quad (4.81)$$

Вероятность рассеяния уменьшается как θ^{-4} . Экспериментально главным образом будут наблюдаться плазмоны, вероятность обнаружить спектр коррелированных однопарных и многопарных возбуждений в области между q_c и $3q_c$ значительно меньше¹⁾

Легко вычислить полную вероятность рассеяния за единицу времени в данный телесный угол:

$$\mathcal{P}(\gamma) = \int_0^\infty d\omega \mathcal{P}(\gamma, \omega). \quad (4.82)$$

(Здесь не возникает обычной сложности, связанной с зависимостью q от ω). Интегрируя по ω , находим

$$\mathcal{P}(\gamma) = \frac{\omega_p}{2\pi a_0 P_e} \frac{1}{\theta^2 + (\omega_p/mV_e^2)^2} \quad (\theta \leq \theta_1), \quad (4.83a)$$

$$\mathcal{P}(\gamma) = \frac{4Ne^2}{P_e^3 a_0 \theta^4} S(P_e \theta) \quad (\theta \geq \theta_1). \quad (4.83b)$$

Таким образом, в экспериментах по рассеянию электронов непосредственно измеряется статический форм-фактор.

С помощью (4.83a) можно оценить среднюю длину свободного пробега для тех электронов, которые при столкновении рождают плазмоны, если принять, что это выражение применимо вплоть до максимального волнового вектора q_c , при котором плазмоны еще существуют как хорошо определенные возбуждения. Интегрируя (4.83a) по телесному углу, находим

$$\mathcal{P}_{\text{пл}} = 2\pi \int_0^{\omega_p/P_e v_F} d\theta \theta \mathcal{P}_{\text{пл}}(\gamma) = \frac{\omega_p}{a_0 P_e} \ln \frac{V_e}{v_F}. \quad (4.84)$$

¹⁾ Подробную характеристику этой области, полученную в приближении хаотических фаз, см в работе [13].

Поэтому средняя длина свободного пробега таких электронов равна с логарифмической точностью

$$\lambda_{пл} = \frac{V_e}{\mathcal{P}_{пл}} = 2a_0 \left(\frac{E_e}{\omega_p} \right) \frac{1}{\ln V_e/v_F}. \quad (4.85)$$

Нетрудно вычислить и энергию, переданную быстрым электроном системе в единицу времени. Передача энергии в единицу времени, сопровождающаяся рассеянием в телесный угол $d\Upsilon$, равна

$$\frac{dE(\Upsilon)}{dt} = \int_0^\infty d\omega \omega \mathcal{P}(\Upsilon, \omega). \quad (4.86)$$

Используя (4.75), (4.81) и правило f -сумм (4.32), находим

$$\begin{aligned} \frac{dE(\Upsilon)}{dt} &= \frac{\omega_p^2}{2\pi a_0 P_e} \frac{1}{\theta^2 + (\omega_p/mV_e^2)^2}, & \theta \leq \theta_1, \\ \frac{dE(\Upsilon)}{dt} &= \frac{\omega_p^2}{2\pi a_0 P_e} \frac{1}{\theta^2}, & \theta \geq \theta_1. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Полная передача энергии в единицу времени равна

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{\omega_p^2}{a_0 P_e} \left\{ \int_0^{\theta_1} d\theta \frac{\theta}{\theta^2 + (\omega_p/mV_e^2)^2} + \int_{\theta_1}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta} \right\} \approx \frac{\omega_p^2}{a_0 P_e} \ln \frac{q_{\max} V_e}{\omega_p}, \quad (4.88)$$

где $q_{\max} = P_e \theta_{\max}$ — максимальное значение переданного импульса, которое нас интересует (порядка p_F). Результат (4.88) получен практически во всех работах, посвященных рассматриваемому вопросу.

ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ¹⁾

Полученные выше результаты применимы только к электронной жидкости. Тем не менее они позволяют полуколичественно описать энергетические потери быстрых электронов в реальных твердых телах с учетом особенностей плазменных возбуждений. Как указывалось в § 3, рассеянная в твердом теле частица может возбуждать междузонные переходы — процесс, который конкурирует с плазменными возбуждениями даже при $\theta \ll \theta_1$. Такие междузонные возбуждения можно разделить на два типа:

¹⁾ В этом разделе мы следуем работе Пайнса [6].

1) Переходы из валентной в более высокие зоны; типичные энергии таких переходов (с заметной силой осциллятора) в металлах и полупроводниках имеют порядок 1—5 эв.

2) Переход из зон, лежащих ниже валентной зоны, в более высокие незанятые зоны. Такие переходы (с энергиями от 30 до 50 эв) в твердом теле происходят так же, как и в свободных атомах, поскольку при образовании твердого тела атомные уровни смещаются на расстояния, малые по сравнению с 30 эв.

Энергии этих переходов следует сравнивать с «невозможной» плазменной частотой валентных электронов

$$\omega_{pv} = \left(\frac{4\pi N_v e^2}{m} \right)^{1/2}, \quad (4.89)$$

где N_v — плотность валентных электронов.

Во многих твердых телах частота ω_{pv} отделяет один от другого два типа междузонных переходов. В этом случае переходы с большими энергиями не влияют на плазменные колебания (с физической точки зрения это означает, что при частоте ω_{pv} можно пренебречь поляризуемостью ионного остова). С другой стороны, переходы с малыми энергиями экранируются кулоновским взаимодействием. В силу правила f -сумм они не влияют на высокочастотную диэлектрическую проницаемость. Тогда следует ожидать, что частота плазменных колебаний будет очень близка к ω_{pv} . (При таких частотах электроны движутся настолько быстро, что «видят» весьма размытое изображение ионной решетки; ионы играют такую же роль, как однородный фон положительного заряда.)

Это приближение удовлетворительно описывает щелочные и щелочноземельные металлы, валентные полупроводники (Ge, Si) и т. д. Оно неприменимо к переходным и благородным металлам (в которых междузонные переходы из d -зоны имеют энергию порядка ω_{pv}), а также к диэлектрикам, у которых валентная зона и зона проводимости разделены большой щелью.

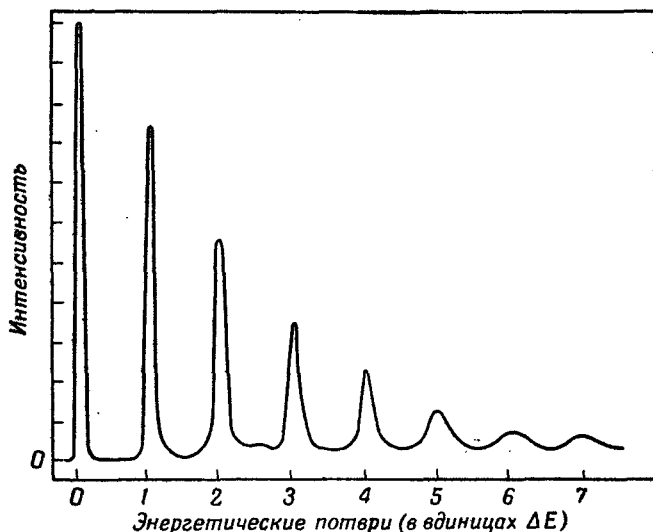
Обратимся к рассмотрению экспериментальных результатов. При измерении так называемых характеристических энергетических потерь определяется энергия, переданная твердому телу пучком электронов с энергией порядка нескольких килоэлектронвольт¹⁾. Можно различать эксперименты двух видов:

1) эксперименты с отражением, в которых наблюдается спектр быстрых электронов, испытавших отражение от поверхности твердого тела;

¹⁾ Последний обзор таких экспериментов см. в работе [17]. Детальное сравнение теории и эксперимента впервые было проведено Пайнсом [5]; позднее (более подробно, чем в данной книге) этот вопрос рассмотрен в книге [6].

2) эксперименты с прохождением, в которых измеряется спектр электронов, прошедших сквозь тонкую твердую пленку (толщиной около 1000 Å).

Эксперименты с отражением удобны в том отношении, что можно работать с только что очищенной поверхностью твердого тела. Как показали Свей и его сотрудники [14—16], это позволяет исключить влияние примесей на поверхности и однозначно

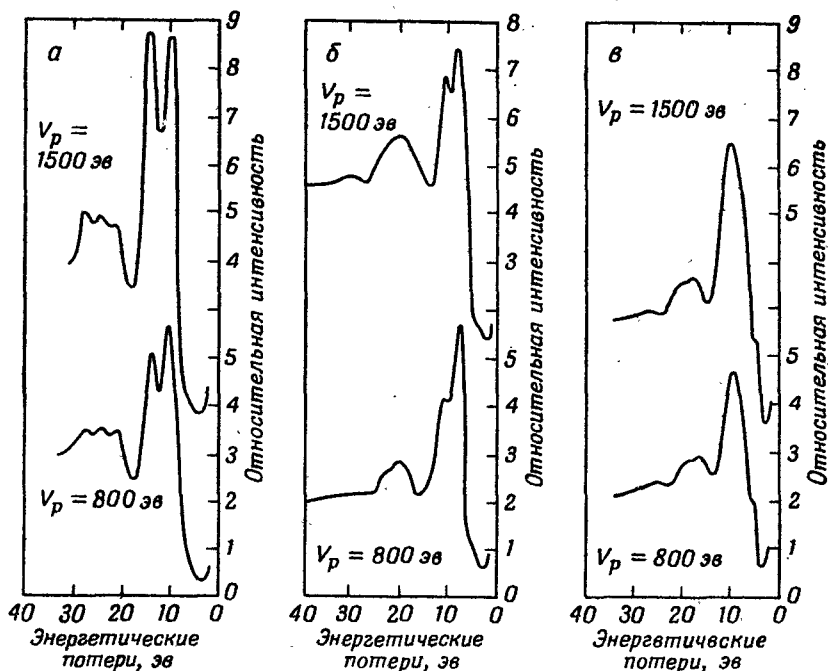


Фиг. 21. Спектр характеристических энергетических потерь электронов в алюминии, измеренный в экспериментах с прохождением [18].

интерпретировать линии в спектре потерь для характеристики самого твердого тела. С другой стороны, эксперименты с прохождением в принципе позволяют получить гораздо больше информации, так как в этом случае можно измерить угловое распределение неупруго рассеянных электронов и найти $S(\mathbf{q}, \omega)$, а также зависимость энергии от импульса для возбуждений в твердом теле. В экспериментах с отражением падающий быстрый электрон может испытывать брэгговское отражение (без потери энергии) до или после того, как он потеряет энергию; даже если угол отражения электрона известен, мы не можем ничего сказать о том, какому переданному импульсу соответствует переданная энергия.

На фиг. 21 показан спектр характеристических энергетических потерь в Al, измеренный в эксперименте с прохождением [18]. На фиг. 22 воспроизведены результаты недавно выполненных

ных экспериментов с отражением на галлии, индии и таллии [19]. Общей особенностью спектров, полученных в экспериментах с отражением, является наличие двух острых пиков в



Фиг. 22. Спектр характеристических потерь электронов, измеренный в экспериментах с отражением [19].

a — галлий; *b* — индий; *v* — таллий.

спектре потерь. Один из них связан с рассмотренными плазменными колебаниями в объеме образца, другой — с поверхностными плазмонами. Эти поверхностные плазменные колебания впервые рассматривались Ричи [12]. Их существование подтвердили Пауэлл и Свен [14]. Согласно Стерну и Феррелу [20], поверхностные плазмоны представляют собой колебания заряда на поверхности раздела между твердым телом и окружающей диэлектрической средой. Если диэлектрическая проницаемость среды равна ϵ_B , то частота поверхностных плазмонов определяется приближенным соотношением

$$\omega_s \approx \frac{\omega_{pv}}{(1 + \epsilon_B)^{1/2}}. \quad (4.90)$$

Одновременное наблюдение поверхностных и объемных плазмонных позволяет однозначно интерпретировать линии в спектре потерь. Если наблюдается два острых пика, то это, несомненно, плазменные возбуждения в исследуемом твердом теле.

ТАБЛИЦА 5

Сравнение $\hbar\omega_{pv}$ и $\Delta E_{\text{набл}}$ для некоторых твердых тел
Приведены вещества, для которых влияние внутренней части периодического ионного потенциала на $\Delta E_{\text{набл}}$ должно быть малым

Элемент	$Z^*)$	$\hbar\omega_{pv}$	$\Delta E_{\text{набл}}$	Литература
Be	2	19	19	[22]
B	3	24	19	[22]
C ₁ **)	4	19	20	***)
C ₂ **)	4	25	25 *)	***)
Na	1	5	5,9	[23]
Mg	2	11	11	[24]
Al	3	16	15	
Si	4	17	17	
K	1	3,9	3,9	[23]
Ca	2	8,0	8,8	[23]
Ga	3	14	14	[25]
Ge	4	16	16	[25]
In	3	13	11	[25]
Sn	4	14	14	[25]
Sb	5	15	16	[25]
Ba	2	6,5	6,5	[23]
Tl	3	12	9,6	[23]
Pb	4	14	14	[25]
Bi	5	14	15	[25]

*) Через Z обозначено число валентных электронов, которые по предположению участвуют в плазменных колебаниях.

***) C₁ соответствует напыленному, C₂ — аморфному углероду.

****) По данным Ледера и Садлетса, частное сообщение.

В табл. 5 и 6 для некоторых твердых тел сравниваются значения $\hbar\omega_{pv}$ и измеренные потери $\Delta E_{\text{набл}}$, которые были интерпретированы как потери, обусловленные объемными плазмонами. Мы видим, что имеется вполне удовлетворительное согласие. В действительности, как отмечалось некоторое время тому назад [5], недоумение вызывает не тот факт, что существуют

расхождения, а вопрос, почему согласие настолько хорошее. В противоположность этому в спектре потерь твердых тел, в которых междузонные переходы играют важную роль, найдены широкие линии, энергия которых не связана каким-либо простым образом с вычисленным значением ω_{pv} .

ТАБЛИЦА 6

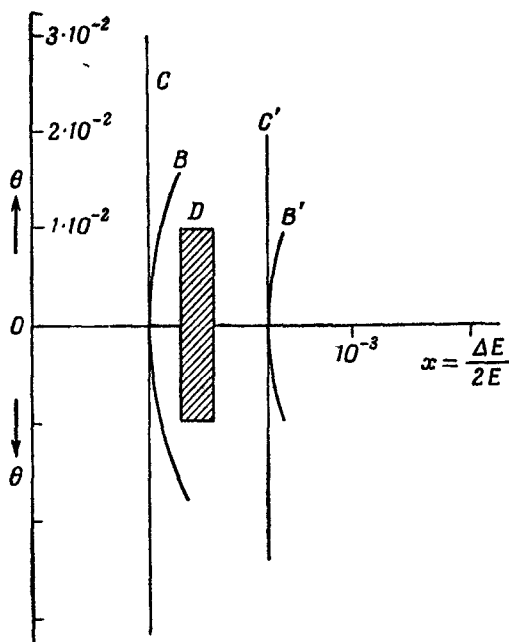
Сравнение $\hbar\omega_{pv}$ с $\Delta E_{\text{набл}}$ для некоторых соединений

Соединение	$Z^*)$	$\hbar\omega_{pv}$	$\Delta E_{\text{набл}}$	Литература
ZnS	4	17	17	[22]
PbS	5	16	15	[22]
SbS ₃	5,6	18	19	[22]
MoS ₂	6	23	21	[26]
PbTe	5	14	15	[22]
PbSe	5	15	15	[22]
Слюда	4,7	24	25	[27]
BeO	4	29	29	[26]
MgO	4	25	25	[26]
Li ₂ CO ₃	4	24	24	[26]
Ca (OH) ₂	3,2	21	22	[26]
MoO ₃	6	24	25	[26]
SiO ₂	5,3	25	25	[26]
Al ₂ O ₃	4,8	27	25	[26]
TeO ₂	6	23	23	[26]
SnO ₂	4	26	18	[22]
KBr	4	13	20	[26]
KCl	4	14	13	[22]
NaCl	4	16	16	[22]

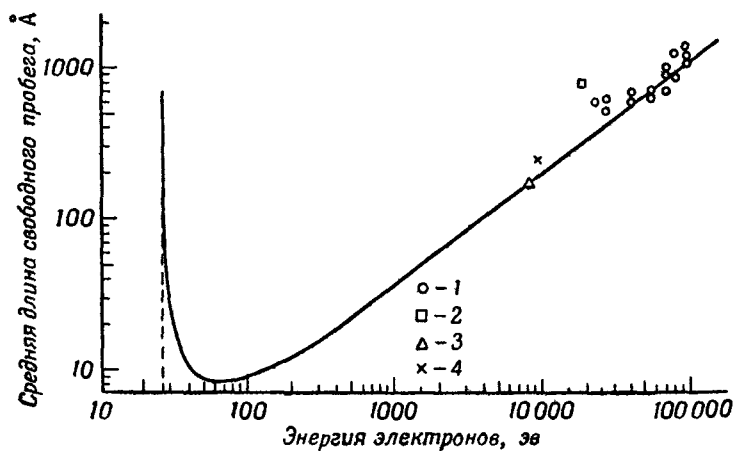
*) Через Z обозначено среднее число валентных электронов на атом, которые, по предположению, участвуют в плазменных колебаниях.

Угловое распределение неупруго рассеянных электронов, прошедших тонкую твердую пленку, впервые измерил Ватанабе [21]. Результаты его эксперимента с алюминием схематически изображены на фиг. 23. Чтобы понять их, вспомним, что энергия плазмонов зависит от импульса. В достаточно хорошем приближении эта зависимость описывается формулой

$$\omega_1(q) = \omega_p + \frac{\alpha q^2}{m}. \quad (4.91)$$



Фиг. 23. Угловое распределение неупруго рассеянных электронов [21].
 По оси ординат отложен угол рассеяния в радианах, по оси абсцисс — энергетические потери, отнесенные к удвоенной энергии падающих электронов.



Фиг. 24. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для средней длины свободного пробега с рождением плазмона [17].

1 — данные Блейкстока и др., 2 — данные Мартона и др., 3 — данные Клемперера и Шеперда, 4 — данные Джула; сплошная кривая построена по теории Квина.

Импульс q , переданный плазмону быстрым электроном, связан с углом рассеяния θ соотношением (4.80). В этом случае мы получаем следующее угловое распределение:

$$\Delta E(\theta) = \omega_p + \frac{\alpha P_e^2}{m} \theta^2. \quad (4.92)$$

В табл. 7 приведены измеренные Ватанабе значения α для нескольких металлов, а также значения, вычисленные с помощью модели свободного электронного газа¹⁾. Имеется согласие по порядку величины. Хорошему согласию измеренных и вычисленных значений для Be едва ли следует придавать особое значение, так как вычисление было приближенным.

ТАБЛИЦА 7

Вычисленные и измеренные значения α
для некоторых веществ

Элемент	$\alpha_{\text{эксп}}$	$\alpha_{\text{своб}}$
Be	$0,42 \pm 0,04$	0,41
Mg	$0,62 \pm 0,04$	0,37
Al	$0,50 \pm 0,05$	0,40

Эти эксперименты позволяют также определить значение волнового вектора, ограничивающее сверху область, в которой плазмоны существуют как хорошо определенные элементарные возбуждения. Для электронов с энергией 25 кэВ, рассеянных на алюминии, предельное отклонение равно $(15-18) \cdot 10^{-3}$ радиан, а значение, вычисленное Феррелом [29], который рассматривал только однопарное затухание, составляет $16 \cdot 10^{-3}$ радиан. Это согласие показывает, что затухание, связанное с рождением нескольких пар или с междузонными переходами, мало (это затухание не должно заметно зависеть от волнового вектора).

Отметим в заключение, что измерения средней длины свободного пробега электронов с рождением плазмонов хорошо согласуются с оценкой (4.85) и с результатами более подробных вычислений, выполненных Квином [30]. На фиг. 24 сравниваются теоретические и экспериментальные значения для алюминия.

¹⁾ В этих вычислениях не учитывается влияние периодичности, но принимаются во внимание обменные поправки в дисперсионном уравнении для плазмонов, подобно тому, как это делается в приближении хаотических фаз (см. [28]).

§ 5. РЕАКЦИЯ НА ФОНОННОЕ ПОЛЕ

ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим теперь, к каким результатам приводит существование связи квантовой плазмы, находящейся в основном состоянии, с внешним продольным фононным полем. Эта задача тесно примыкает к тому кругу вопросов, которые мы уже изучали в этой главе; ее можно рассматривать как модель реальной связи между фононами и электронами проводимости в металлах. Эта модель не отражает многие «твердотельные» эффекты, обусловленные периодическим характером ионной решетки. Тем не менее она помогает выявить ряд интересных особенностей связанных систем.

Система электронов, взаимодействующая с продольным фононным полем, описывается гамильтонианом ¹⁾

$$H = H_{\text{фон}} + H_{\text{электр}} + H_{\text{вз}}. \quad (4.93)$$

Здесь $H_{\text{фон}}$ — гамильтониан фононов без учета их связи с электронами, $H_{\text{электр}}$ — то же для электронов квантовой плазмы, а $H_{\text{вз}}$ описывает связь между электронами и фононами. Фононы можно представлять набором гармонических осцилляторов, так что

$$H_{\text{фон}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} [P_{\mathbf{q}}^+ P_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}}^2 Q_{\mathbf{q}}^+ Q_{\mathbf{q}}], \quad (4.94)$$

где $P_{\mathbf{q}}$ и $Q_{\mathbf{q}}$ — импульс и координата \mathbf{q} -й нормальной моды с волновым вектором \mathbf{q} и частотой $\Omega_{\mathbf{q}}$; они удовлетворяют условиям эрмитовости

$$P_{\mathbf{q}}^+ = P_{-\mathbf{q}}, \quad Q_{\mathbf{q}}^+ = Q_{-\mathbf{q}}.$$

Электрон-фононное взаимодействие в первом приближении линейно по фононным координатам и имеет вид

$$H_{\text{вз}} = \sum_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}}^i \rho_{\mathbf{q}}^+ Q_{\mathbf{q}}. \quad (4.95)$$

Продольные фононы непосредственно связаны с флуктуациями электронной плотности. Матричные элементы этого взаимодействия удовлетворяют соотношению

$$(v_{\mathbf{q}}^i)^+ = v_{-\mathbf{q}}^i. \quad (4.96)$$

Рассмотрим сначала качественно некоторые следствия электрон-фононного взаимодействия. При конечных температурах наиболее известным из них является рассеяние электронов на

¹⁾ Вывод соотношения (4.93) см., например, в книге Пайнса [6], гл. 5.

фононах; это один из существенных факторов, обуславливающих сопротивление металлов. При таком процессе электрон переходит из некоторого состояния p в состояние $p+q$, что сопровождается поглощением фонона с импульсом q или испусканием фонона с импульсом $-q$. Это можно видеть, записывая $H_{вз}$ в представлении вторичного квантования (см. приложение):

$$H_{вз} = \sum_q \frac{v_q^i}{\sqrt{2\Omega_q}} c_{p+q}^+ c_p (A_q + A_{-q}^+), \quad (4.97)$$

где A_q и A_q^+ — операторы уничтожения и рождения для фононного поля. Другое относящееся сюда явление — затухание фононов, т. е. поглощение звуковой волны в электронном газе, которое тоже непосредственно описывается гамильтонианом (4.97). Кроме этих двух реальных процессов, существуют три типа виртуальных процессов, которые могут повлиять на движение фононов и электронов. Во-первых, фононное поле поляризует электронный газ; эта поляризация в свою очередь приводит к сдвигу фононных частот. Можно считать, что этот сдвиг обусловлен изменением эффективного взаимодействия ионов. Во-вторых, присутствие фононного поля может изменять свойства квазичастиц в электронном газе. Теперь к квазичастице, состоящей из электрона и поляризационного облака из других электронов, добавляется еще фононное облако. Наконец, появляется новый механизм взаимодействия электронов. Данный электрон стремится поляризовать ионы (посредством индуцированных фононов), а поляризация в свою очередь влияет на другой электрон. Можно считать, что это взаимодействие возникает вследствие обмена виртуальными фононами. Оно особенно важно в теории сверхпроводимости.

В настоящем параграфе мы ограничимся главным образом поглощением звука, сдвигом фононных частот и эффективным электронным взаимодействием. Электрон-фононное рассеяние мы будем рассматривать только для того, чтобы показать, как электроны экранируют голое электрон-фононное взаимодействие. Мы не будем рассматривать изменение свойств квазичастицы; в настоящее время такое рассмотрение потребовало бы введения методов теории поля, что выходит за рамки настоящей книги.

САМОСОГЛАСОВАННОЕ РАССМОТРЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрение связанных электрон-фононных систем заметно упрощается благодаря тому, что характерные фононные частоты много меньше характерных электронных частот. Как известно

(и как мы покажем), отношение частот имеет порядок $\sqrt{m/M}$, где M — масса иона. Поскольку фононные частоты настолько малы, во многих задачах взаимодействие электронов с фононами можно рассматривать как поляризационный процесс, причем фононы трактуются как внешнее поле, слабо связанное с электронным газом. При этом пренебрегают всеми поправками к электронной поляризуемости, к которым приводят виртуальные фононные процессы; можно показать, что по отношению к удерживаемым членам эти поправки имеют порядок $(m/M)^{1/2}$. Этот важный результат в некотором смысле является отражением известной адиабатической теоремы Борна и Оппенгеймера [31]. В явном виде он недавно был доказан Мигдалом [32]. Так же, как и в случае ферми-жидкости, для обоснования теории необходимо обратиться к методам теории поля. По этому вопросу мы отсылаем интересующегося читателя к важной работе Мигдала.

Электроны и фононы связаны посредством взаимодействия $H_{\text{вз}}$. В результате фононное поле вызывает в электронной системе определенные флуктуации плотности. Эти индуцированные флуктуации плотности в свою очередь влияют на фононное поле, изменяя фононные частоты, а также обуславливая прямое поглощение звуковых волн. Поэтому вычисление индуцированных флуктуаций плотности и закона дисперсии фононов следует проводить самосогласованным образом. Мы должны предположить существование звуковой волны, скажем, с частотой $\omega_{\mathbf{q}}$, а затем вычислить индуцированные флуктуации плотности, которые приводят к волне с этой частотой.

Вычисление выполняется просто с помощью уравнения движения для фононной координаты $Q_{\mathbf{q}}$. Зная гамильтониан (4.93), легко получить квантовомеханическое операторное уравнение

$$\dot{Q}_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}}^2 Q_{\mathbf{q}} = -v_{\mathbf{q}}^i \rho_{\mathbf{q}}. \quad (4.98)$$

Возьмем теперь среднее значение от обеих сторон этого операторного уравнения по электронным координатам. В отсутствие фононного поля для рассматриваемой трансляционно-инвариантной системы

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle = 0.$$

При наличии поля с частотой $\omega_{\mathbf{q}}$ электронную реакцию можно описать с помощью функции реакции $\chi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}})$, введенной в гл. 2 (если реакция линейна). Из (2.49) и (4.95) непосредственно следует, что флуктуации плотности, наведенные продольным полем со средней амплитудой $\langle Q_{\mathbf{q}} \rangle$, определяются соотношением

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle = v_{\mathbf{q}}^i \chi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \langle Q_{\mathbf{q}} \rangle. \quad (4.99)$$

Подставляя (4.99) в (4.96), находим частоту фононов

$$\omega_q^2 = \Omega_q^2 + |v_q^l|^2 \chi(q, \omega_q). \quad (4.100)$$

Закон дисперсии фононов кажется настолько простым, что возникает сомнение в его правильности. При выводе мы использовали предположение о линейности электронной реакции на фоновое поле, т. е. считали, что $\chi(q, \omega)$ электронной поляризуемостью *в отсутствие фононного поля*. Это предположение оправдано, если фононные частоты таковы, что мы находимся в бесстолкновительном режиме. Уравнение (4.100) тогда справедливо с точностью до членов порядка $(m/M)^{1/2}$ (потому что во столько же раз фононные частоты меньше характерных электронных частот). В противоположном низкочастотном пределе, когда за счет электрон-фононных столкновений устанавливается локальное термодинамическое равновесие, нельзя не учитывать фононы при вычислении функции реакции $\chi(q, \omega)$. Тогда уравнение (4.100) изменяется. Здесь мы не будем этого касаться.

СДВИГ ЭНЕРГИИ ФОНОНОВ И ЗАТУХАНИЕ

Используем определение диэлектрической проницаемости (4.6) и запишем закон дисперсии фононов в несколько ином виде:

$$\omega_q^2 = \Omega_q^2 + \frac{|v_q^l|^2 q^2}{4\pi e^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(q, \omega_q)} - 1 \right\}. \quad (4.101)$$

Поскольку величина $1/\varepsilon(q, \omega_q)$, вообще говоря, комплексна, соответствующая частота фононов тоже комплексна. Введем действительную и мнимую части фононной частоты:

$$\omega_q = \omega_1 - i\omega_2 \quad (4.102)$$

и предположим, что

$$\omega_2 \ll \omega_1.$$

Уравнение (4.101) разбивается на два следующих уравнения:

$$\omega_1^2 = \Omega_q^2 - \frac{q^2}{4\pi e^2} |v_q^l|^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon(q, 0)} \right\}, \quad (4.103)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{q^2}{8\pi e^2} \frac{|v_q^l|^2}{\omega_1^2} \left\{ -\text{Im} \frac{1}{\varepsilon(q, \omega_1)} \right\}. \quad (4.104)$$

В (4.103) мы предположили, что $\omega_1 \ll qv_F$, и поэтому ввели статическую диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(q, 0)$. Уравнение (4.103) описывает сдвиг фононных частот в результате элек-

трон-фононного взаимодействия, тогда как (4.104) описывает затухание звуковых волн, обусловленное этим взаимодействием.

Порядок величины фононных частот и затухание фононов в металлах можно оценить с помощью модели, в которой пренебрегают влиянием периодичности решетки на электрон-фононное взаимодействие и на частоту фононов, а ион-ионное и ион-электронное взаимодействие считают чисто кулоновским (так называемая однородная модель, или модель «желе»). Тогда чисто фононная частота равна соответствующей плазменной частоте ионов:

$$\Omega_q = \Omega_p = \left(\frac{4\pi N Z^2 e^2}{M} \right)^{1/2}, \quad (4.105)$$

где Z — валентность иона, а фонон-электронная связь дается соотношением ¹⁾

$$v_q^i = - \frac{4\pi Z e^2 l}{q} \left(\frac{N}{M} \right)^{1/2}. \quad (4.106)$$

В этом случае вместо (4.103) мы получим

$$\omega_1^2 = \frac{\Omega_p^2}{\varepsilon(q, 0)}. \quad (4.107)$$

В пределе длинных волн $\varepsilon(q, 0)$ определяется соотношением (4.27). Тогда

$$\omega_1^2 = s_{\text{фон}}^2 q^2 \quad (q \ll p_F), \quad (4.108)$$

где

$$s_{\text{фон}} = \sqrt{\frac{m}{M} Z} s. \quad (4.109)$$

Сравнивая соотношения (4.105) и (4.108), мы видим, что электронная реакция приводит к изменению спектра длинноволновых продольных фононов: если раньше частота не зависела от q , то теперь мы имеем обычную линейную зависимость. Можно думать, что это изменение является результатом экранирования ион-ионного взаимодействия [поскольку оно умножается на множитель $\varepsilon^{-1}(q, 0)$]. В приближении Томаса — Ферми, или в приближении слабой связи скорость звука s имеет то же значение, что и для свободных электронов, т. е. равна $v_F/\sqrt{3}$, и мы получаем

$$s_{\text{фон}} = s^{(1)} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{Z}{3}} v_F. \quad (4.110)$$

Этот результат впервые был получен Бомом и Стэвером [33]. Он по порядку величины согласуется с экспериментальными

¹⁾ Вывод соотношений (4.105) и (4.106) см., например, в книге [6], гл. 5.

данными для металлов. Из (4.110) видно, что типичные звуковые частоты $s_{\text{фон}}q$ в $(M/m)^{1/2}$ раз меньше соответствующих электронных частот qv_F .

В рассматриваемой однородной модели соотношение (4.104), описывающее затухание фононов, принимает вид

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega_1)}{2\varepsilon(\mathbf{q}, 0)}, \quad (4.111)$$

где $\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega_1)$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости. В пределе длинных волн, используя (3.72) и (3.60), это соотношение можно упростить:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{m}{M}} Z \frac{p_F}{ms}. \quad (4.112)$$

Полученный результат справедлив в длинноволновом бесстолкновительном пределе.

Мы видим, что затухание фононов вследствие электронной реакции действительно мало. Оно соответствует «затуханию Ландау», обусловленному теми электронами, которые движутся со скоростью, равной фазовой скорости звуковой волны. Затухание мало из-за сильного различия электронных и фононных частот, отношение которых имеет порядок $(m/M)^{1/2}$. Наряду с принципом Паули это различие частот ограничивает число электронов, которые вносят вклад в затухание. Как и ранее, соотношение (4.112), по-видимому, должно давать хорошее качественное описание бесстолкновительного затухания фононов, обусловленного электронами проводимости в металлах.

Отдельные черты рассмотренной однородной модели сохраняются и при более реалистическом подходе к электрон-фононному взаимодействию в металлах. Хотя вследствие периодического расположения ионов $v_{\mathbf{q}}^i$ и $\Omega_{\mathbf{q}}$ изменяются, в пределе длинных волн эти поправки стремятся к нулю. При разложении по \mathbf{q} в соотношении (4.103) по-прежнему взаимно сокращаются члены $\Omega_{\mathbf{q}}^2$ и $(q^2/4\pi e^2)|v_{\mathbf{q}}^i|^2$ и частота длинноволнового продольного звука остается пропорциональной q (с точностью до членов более высокого порядка по q).

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Матричный элемент $v_{\mathbf{q}}^i$ в (4.95) описывает голое электрон-фононное взаимодействие, которое существовало бы в том случае, если бы кулоновского взаимодействия электронов не было. Если учесть последнее, то эффективная связь электронов и фононов изменится, поскольку данный электрон «видит» не только

внешнее фононное поле, но и электронную поляризацию, которую оно создает. Это поляризационное поле приводит к экранированию голого электрон-ионного взаимодействия. Поэтому можно ожидать, что голый матричный элемент заменится экранированным матричным элементом

$$v_q^{\text{эфф}} = \frac{v_q^i}{\varepsilon(q, \omega_q)} \approx \frac{v_q^i}{\varepsilon(q, 0)} \quad (4.113)$$

(для низкочастотных фононов достаточно учесть статическое экранирование). Результат типа (4.113) впервые был получен Бардином [34] в его ставшем классическим вычислении проводимости щелочных металлов.

Фактически этот результат не вполне верен, так как он учитывает только среднее диэлектрическое экранирование голого электрон-ионного взаимодействия. Наряду с этими имеются поправки, связанные с обменным рассеянием электрона на экранирующем облаке вокруг иона. В гл. 3, § 4 для вычисления совместного влияния этих двух поправок (в пределе длинных волн) при рассеянии электрона на статической примеси мы использовали теорию Ландау; мы видели, что поправки имеют тенденцию компенсировать друг друга. Проведенное там вычисление легко обобщить и на данный случай. Мы находим [ср. (3.65a)]:

$$\lim_{q \rightarrow 0} v_q^{\text{эфф}} \approx \frac{v_q^i}{\varepsilon(q, 0)} \frac{1}{1 + F_0^s}, \quad (4.114)$$

Используя (4.27), приведем (4.114) к виду

$$\lim_{q \rightarrow 0} v_q^{\text{эфф}} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\pi q^2}{4 p_F m^* e^2} v_q^i. \quad (4.115)$$

В результате экранирования значительно уменьшается взаимодействие электронов с длинноволновыми фононами.

Эффективное электрон-фононное взаимодействие (4.115) принимает особенно простой вид в случае рассмотренной выше однородной модели. Голое взаимодействие v_q^i описывается тогда соотношением (4.106). Подставляя его в (4.115), находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} v_q^{\text{эфф}} = -\frac{i q}{3} \frac{p_F^2}{m^*} \frac{1}{(NM)^{1/2}} = -i q \left[\frac{N}{M} \right]^{1/2} \frac{Z}{v(0)}, \quad (4.116)$$

где N , как обычно, — число атомов на единицу объема, а $v(0)$ — плотность состояний на ферми-поверхности, отнесенная к единичному интервалу энергии. В пределе длинных волн взаимодействие $v_q^{\text{эфф}}$ пропорционально импульсу q , а не наоборот пропорционально ему, как это имеет место для v_q^i .

Сравнивая (4.116) с (3.656), мы видим, что

$$v_q^{\text{эфф}} = -iq\mathcal{V}_q^{\text{эфф}} \left(\frac{N}{M}\right)^{1/2}, \quad (4.117)$$

где $\mathcal{V}_q^{\text{эфф}}$ — эффективный матричный элемент для рассеяния электрона на статическом точечном ионе. Результат (4.117) остается справедливым не только для рассмотренной однородной модели, но и при произвольном взаимодействии электронов и ионов. Его можно использовать при вычислении сопротивления металлов в приближении псевдопотенциала (см., например, [35, 36]).

В заключение следует подчеркнуть, что поправки, которые появляются в (4.116), автоматически учтены при вычислении действительной и мнимой частей фононной частоты (4.103) и (4.104). Рассмотрим, например, соотношение (4.104), которое мы получили для распада фонона на пару квазичастица — квазидырка. *Интенсивность* фононного поля изменяется как $\exp(-2\omega_2 t)$. Поэтому вероятность распада одного фонона равна $2\omega_2$. С помощью теории возмущений эту вероятность можно выразить через эффективное электрон-фононное взаимодействие

$$2\omega_2 = 2\pi \sum_p \frac{1}{2\omega_q} |v_q^{\text{эфф}}|^2 n_p [1 - n_{p+q}] \delta(\omega_q - \epsilon_{p+q} + \epsilon_p) \quad (4.104a)$$

[множитель $1/2\omega_q$ соответствует матричному элементу фононного оператора Q_q ; см. (4.97) и приложение]. Используя выражение (3.72) для статической диэлектрической проницаемости, легко показать, что (4.104) совпадает с (4.104a), если эффективное электрон-ионное взаимодействие описывается соотношением (4.115). (Этот совершенно общий результат не зависит от выбора v_q^i или Ω_q .) Детальное сравнение соотношений (4.104) и (4.104a) предоставляем провести читателю в качестве упражнения.

§ 6. ЭКРАНИРОВАНИЕ

ЭФФЕКТИВНОЕ ЭЛЕКТРОН ЭЛЕКТРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Мы уже неоднократно отмечали, что эффективное взаимодействие пары электронов в квантовой плазме экранируется поляризационным облаком, которое окружает каждый электрон. Рассмотрим теперь более подробно природу этого экранирования. Мы начнем с квантовой плазмы в отсутствие внешних полей, а затем учтем связь с продольным фононным полем.

Рассмотрим в импульсном пространстве рассеяние двух электронов с импульсами и спинами $p+q$, σ и p' , σ' ; пусть в результате рассеяния эти электроны переходят в состояния p , σ и

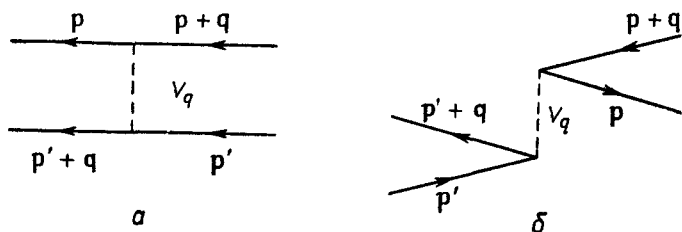
$p' + q, \sigma'$. Импульс и спин сохраняются при столкновении. Чтобы не усложнять дело обменными эффектами, предположим, что два электрона имеют противоположные спины. Тогда в отсутствие поляризационных эффектов матричный элемент рассеяния равен

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{q^2}.$$

При рассмотрении рассеяния удобно записать кулоновское взаимодействие в представлении вторичного квантования

$$V_q c_p^+ c_{p'+q}^+ c_p c_{p+q} \quad (4.118)$$

(мы опустили здесь спиновые индексы). Диаграмма, соответствующая этому процессу, изображена на фиг. 25, а. Выясним,



Фиг. 25. Кулоновское рассеяние электронов и электронно-дырочных пар.

как изменится выражение (4.118), если учесть, что электроны находятся не в пустом пространстве, а входят в систему взаимодействующих электронов.

Чтобы найти это изменение с помощью рассматриваемых в настоящей главе методов, удобно прежде всего записать выражение (4.118) в несколько ином виде. Определим оператор электронно-дырочной пары

$$\rho_{qp} = c_p^+ c_{p+q}, \quad (4.119)$$

который представляет собой отдельную компоненту флуктуации плотности. Тогда (4.118) можно рассматривать как взаимодействие между электронно-дырочными парами

$$V_q \rho_{qp}^+ \rho_{qp}, \quad (4.120)$$

что показано на фиг. 25, б.

Рассмотрим, далее, взаимодействие пары ρ_{qp} с остальными электронами системы. Если реакция других электронов на ρ_{qp} линейна, то ρ_{qp} можно рассматривать как внутренний пробный заряд, который поляризует электронный газ. Тогда между опе-

раторами ρ_{qp}^+ и ρ_{qp} имеется не только прямая связь (4.120), но и косвенная посредством поляризованного поля, которое пропорционально ρ_{qp} . Так возникает эффективное экранированное взаимодействие электронно-дырочных пар, т. е. электронов.

Чтобы пояснить эти соображения, выпишем те члены в кулоновском взаимодействии, которые соответствуют связи электронно-дырочных пар с остальными электронами:

$$\frac{4\pi e^2}{q^2} \{ \rho_q^+ \rho_{qp} + \rho_{qp}^+ \rho_q \}, \quad (4.121)$$

причем подразумевается, что ρ_q не содержит вклада рассматриваемых пар. Первый член в (4.121) в силу наличия ρ_{qp} характеризует поляризацию электронного газа, а второй в силу наличия ρ_{qp}^+ отражает влияние этой поляризации. Чтобы вычислить индуцированную поляризацию, надо знать, какая частота соответствует ρ_{qp} . При этом следует различать реальные процессы рассеяния, при которых энергия сохраняется, и виртуальные взаимодействия, при которых энергия не должна сохраняться. В реальном рассеянии, которое мы рассмотрим сначала, энергия, переданная от одной частицы к другой, равна

$$\omega_{qp} = \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p. \quad (4.122)$$

При этих условиях оператор пары ρ_{qp} напоминает пробный заряд, рассмотренный в § 4, и ему следует приписать частоту ω_{qp} . Флуктуации плотности, которые им индуцируются, в линейном приближении описываются соотношением

$$\langle \rho_q \rangle = \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi(\mathbf{q}, \omega_{qp}) \rho_{qp}. \quad (4.123)$$

Действие поляризованного поля на ρ_{qp}^+ определяется с учетом (4.121) соотношением

$$H_{\text{пол}} = \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right)^2 \chi(\mathbf{q}, \omega_{qp}) \rho_{qp}^+ \rho_{qp}. \quad (4.124)$$

Объединяя (4.124) с первоначальным выражением (4.120) для взаимодействия, получаем эффективное взаимодействие

$$H_{\text{эфф}} = \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega_{qp})} \rho_{qp}^+ \rho_{qp} = \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon(\mathbf{q}, \omega_{qp})} c_p^+ c_{p+q}^+ c_p c_{p+q}, \quad (4.125)$$

которое описывает диэлектрическое экранирование реальных процессов рассеяния.

Результат (4.125) не вызывает удивления. Его можно было бы написать сразу, если принять, что изменение взаимодействия частиц следует рассматривать как поляризованный процесс. При выводе выражения (4.125) мы, конечно, не учли *все*

возможные изменения взаимодействия пары электронов, которые возникают за счет связи с другими электронами, а отразили лишь диэлектрическое экранирование взаимодействия. Мы полностью пренебрегли нелинейными эффектами в реакции на ρ_{qr} , а также обменным взаимодействием рассеянных частиц с остальной жидкостью. Таким образом, соотношение (4.125) следует рассматривать как *приближенный*, хотя и весьма правдоподобный результат.

При выводе выражения (4.125) мы считали одну электронно-дырочную пару ρ_{qr} «поляризатором», другую ρ_{qr}^+ — «анализатором». Конечно, от этого выбора ничего не зависит. Тот же результат получится, если в качестве поляризатора взять ρ_{qr}^+ , а в качестве анализатора ρ_{qr} , так как в реальных процессах энергия сохраняется и частота ω_{qr} должна быть равна частоте ω_{qr} . (Отметим, что при рассмотрении взаимодействия двух пар нельзя считать, что обе пары одновременно создают поляризационное облако, поскольку тогда один и тот же поляризационный процесс учитывался бы дважды.)

Рассмотрение виртуальных поляризационных процессов должно проводиться так же, с той лишь разницей, что в этом случае неясно, какую частоту следует приписывать данной электронно-дырочной паре. Выбор ω зависит от конкретной задачи. Мы можем рассматривать данный электрон как пробный заряд, который окружен зависящим от волнового вектора и частоты поляризационным облаком. В этом случае q -я фурье-компонента эффективного электронного взаимодействия равна

$$V_q^{\text{эфф}} = \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon(q, \omega)}. \quad (4.126)$$

Для виртуальных процессов ω не зависит от q , тогда как для реальных процессов она связана с q выражением типа (4.122).

Если $\omega \ll qv_F$ (для взаимодействия с переданным импульсом q), то экранирование практически является статическим. В этом случае нет необходимости знать ω явно. В (4.126) можно просто заменить $\varepsilon(q, \omega)$ на $\varepsilon(q, 0)$. Если ω имеет порядок qv_F , экранирование становится динамическим. Тогда интересно рассмотреть зависимость эффективного взаимодействия электронов от координат и времени. Пусть электрон находится в начале координат в момент $t=0$. Ему мы можем приписать экранированный и зависящий от координат и времени потенциал, фурье-компонента которого определяется соотношением (4.126):

$$V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t) = \sum_q \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \frac{1}{\varepsilon(q, \omega)} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.127)$$

Потенциал $V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t)$ воспринимается вторым электроном в точке \mathbf{r} в момент времени $t > 0$. [Поскольку при определении $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ мы используем причинные граничные условия, то $V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t) = 0$ при $t < 0$] В отсутствие диэлектрического экранирования мы имеем, конечно,

$$V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2}{r} \delta(t). \quad (4.128)$$

Потенциал является дальнедействующим и мгновенным. При наличии диэлектрического экранирования положение меняется. Предположим, что проницаемость $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ для всех \mathbf{q} и ω равна ее статическому значению в пределе длинных волн [см. (4.27)]; тогда

$$V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t) = \delta(t) \frac{e^2}{r} e^{-\omega r/s}. \quad (4.129)$$

Взаимодействие остается мгновенным, но теперь оно «локализовано» в пространстве. Если допустить, что ε зависит от ω , то взаимодействие $V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t)$ становится *запаздывающим*: оно действует в течение конечного интервала времени, равного по порядку величины обратной частоте, при которой $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ начинает заметно изменяться. В квантовой плазме это частота порядка ε_F ; тогда запаздывающее взаимодействие отлично от нуля в течение очень короткого интервала времени. Как мы вскоре покажем, взаимодействие квантовой плазмы с продольным фоновым полем выглядит иначе.

До сих пор речь шла об экранировании взаимодействия электронов с противоположными спинами. Подобным же образом можно рассмотреть взаимодействие электронов с параллельными спинами. Единственное усложнение, которое появляется в этом случае, заключается в том, что, кроме *прямого* рассеяния с передачей импульса \mathbf{q} и матричным элементом $V_{\mathbf{q}}$, существует *обменное* рассеяние с передачей импульса $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ и матричным элементом $-V_{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|}$. Оба процесса рассеяния экранируются по отдельности, причем каждому соответствует своя, зависящая от частоты и волнового вектора диэлектрическая проницаемость. Отметим, что диэлектрическое экранирование прямых процессов играет гораздо более важную роль, поскольку при малых \mathbf{q} матричный элемент $V_{\mathbf{q}} = 4\pi e^2/q^2$ расходится, тогда как $V_{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}$ не зависит от \mathbf{q} и не имеет особенностей. Диэлектрическое экранирование существенно изменяет прямое взаимодействие и в гораздо меньшей степени обменное рассеяние.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФОНОНОВ

Продолжим наше изучение эффективного взаимодействия электронов в квантовой плазме при наличии связи с продольным фононным полем. Такая система описывается гамильтонианом (4.93). Снова выделим две электронно-дырочные пары ρ_{qp} и $\rho_{q'p'}^+$ и попытаемся вычислить их эффективное взаимодействие. Как мы уже отмечали, с фононами связан новый механизм взаимодействия электронов, который существенно сказывается при низкочастотных возбуждениях.

Чтобы получить первое представление об этом явлении, рассмотрим только связь выделенных пар с фононами и не будем учитывать как связь фононов с другими электронами, так и прямое кулоновское взаимодействие электронов. Соответствующая часть взаимодействия (4.95) имеет вид

$$H' = v_{-q}^i \rho_{qp} Q_q^+ + v_{q'}^i \rho_{q'p'}^+ Q_{q'}. \quad (4.130)$$

Пусть пара ρ_{qp} имеет частоту ω . В этом случае получаем следующее уравнение движения для амплитуды Q_q :

$$\ddot{Q}_q + \Omega_q^2 Q_q = -v_{-q}^i \rho_{qp} = (\Omega_q^2 - \omega^2) Q_q. \quad (4.131)$$

Таким образом, пара индуцирует флуктуации фононного поля:

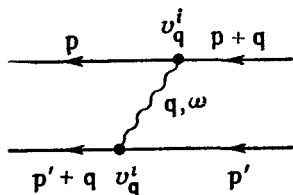
$$\langle Q_q \rangle = \frac{v_{-q}^i \rho_{qp}}{\omega^2 - \Omega_q^2 + i\eta}. \quad (4.132)$$

(Мы учли здесь запаздывание с помощью соответствующего граничного условия) Эти «вынужденные» фононные колебания влияют на $\rho_{q'p'}^+$ посредством второго члена в (4.130). В результате появляется новое взаимодействие между электронами, описываемое гамильтонианом

$$H'_{эфф} = \frac{|v_q^i|^2}{\omega^2 - \Omega_q^2 + i\eta} \rho_{q'p'}^+ \rho_{qp}. \quad (4.133)$$

Это взаимодействие через фононное поле представляет собой притяжение при $\omega < \Omega_q$ и отталкивание в случае более высоких частот. Оно соответствует обмену электронами виртуальными фононами, как изображено на фиг. 26. Мы видим, что электрон с импульсом $p+q$ испускает виртуальный фонон с импульсом q (и частотой ω), который затем поглощается электроном с импульсом p' . При очень высоких частотах ($\omega \gg \Omega_q$) ионы не успевают следовать за движением электронов, и взаимодействие посредством индуцированных фононов становится малым.

Рассмотрим теперь, как учет взаимодействия фононов с другими электронами, а также электронов друг с другом изменяет соотношение (4.133). Для этого выделим из полного гамильтониана (4.93) взаимодействия (4.121) и (4.120), содержащие пары ρ_{qp} и ρ_{qp}^+ . Вычислим, далее, среднюю флуктуацию плотности $\langle \rho_q \rangle$ и амплитуду фононного поля $\langle Q_q \rangle$, индуцированные одной парой ρ_{qp} с частотой ω . Затем подставим полученные значения в те члены гамильтониана, которые содержат ρ_{qp}^+ , и найдем, таким образом, полное эффективное взаимодействие.



Фиг. 26. Взаимодействие электронов посредством обмена фононами.

Точка соответствует матричному элементу v_q^l , волнистая линия — фонону, которым виртуально обмениваются электроны.

Это вычисление несколько сложнее выполненного в настоящем параграфе, поскольку индуцированные флуктуации электронной плотности и фононного поля $\langle \rho_q \rangle$ и $\langle Q_q \rangle$ связаны взаимодействием (4.95).

Уравнение движения для амплитуды звуковой волны имеет вид

$$\ddot{Q}_q + \Omega_q^2 Q_q = -v_{-q}^l (\langle \rho_q \rangle + \rho_{qp}). \quad (4.134)$$

Мы явно выделили здесь $\langle \rho_q \rangle$ из ρ_{qp} . Решив это уравнение, найдем связь индуцированной фононной амплитуды $\langle Q_q \rangle$ с индуцированной флуктуацией плотности $\langle \rho_q \rangle$ и ρ_{qp}

$$\langle Q_q \rangle = \frac{v_{-q}^l (\langle \rho_q \rangle + \rho_{qp})}{\omega^2 - \Omega_q^2}. \quad (4.135)$$

Еще одно соотношение мы получим, вычислив линейную электронную реакцию на ρ_{qp} :

$$\langle \rho_q \rangle = \chi(q, \omega) \left\{ v_q^l \langle Q_q \rangle + \frac{4\pi e^2}{q^2} \rho_{qp} \right\}. \quad (4.136)$$

Эти два соотношения позволяют определить реакцию на ρ_{qp} связанной электрон-фононной системы.

Подставляя (4.136) в (4.135), находим

$$\langle Q_q \rangle = \frac{v_{-q}^l}{\varepsilon(q, \omega)} \frac{1}{\omega^2 - \Omega_q^2 - |v_q^l|^2 \chi(q, \omega)} \rho_{qp}. \quad (4.137)$$

Это выражение можно упростить, так как для тех низкочастотных возбуждений, для которых существенна реакция фононов, $\chi(q, \omega)$ можно заменить величиной $\chi(q, 0)$. Используя закон дисперсии фононов (4.100) и пренебрегая очень малым затуханием фононов, запишем (4.137) в виде

$$\langle Q_q \rangle \approx \frac{v_{-q}^l}{\varepsilon(q, 0)} \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2} \rho_{qp} \quad (\omega \ll qv_F). \quad (4.138)$$

Сравнение (4.138) с (4.132) позволяет судить, как влияет учет всех электрон-электронных и электрон-фононных взаимодействий; мы видим, что частота фононов вместо Ω_q становится равной ω_q , а эффективный матричный элемент, определяющий реакцию фононов, экранируется статической диэлектрической проницаемостью, как и в (4.113).

Чтобы получить полное эффективное электронное взаимодействие, объединим (4.136) с теми членами во взаимодействии (4.121) и (4.130), которые содержат ρ_{qp}^+ . Добавив голое взаимодействие (4.120), получим следующее выражение для суммы членов, содержащих ρ_{qp}^+ :

$$\frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon(q, \omega)} \rho_{qp}^+ \rho_{qp} + \frac{v_q^l \rho_{qp}^+}{\varepsilon(q, \omega)} \langle Q_q \rangle. \quad (4.139)$$

Используя (4.138), мы находим эффективное электронное взаимодействие

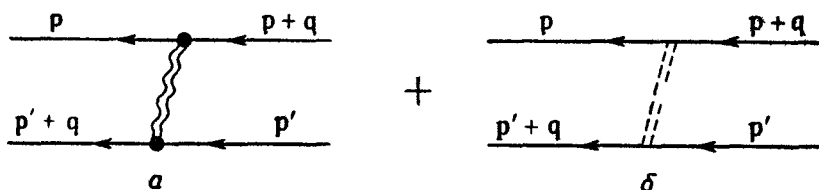
$$H_{эфф}(q, \omega) = \left\{ \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon(q, \omega)} + \frac{|v_q^l|^2}{|\varepsilon(q, 0)|^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2} \right\} \rho_{qp}^+ \rho_{qp}. \quad (4.140)$$

Первый член (в скобках) в (4.140) представляет собой экранированное кулоновское взаимодействие электронов, а второй — модифицированное взаимодействие посредством фононов. Как и следовало ожидать, последний член напоминает (4.133); он отличается лишь тем, что в него входит экранированный фонон-электронный матричный элемент и истинные фононные частоты. Полное эффективное экранированное взаимодействие изображено на фиг. 27. Результат (4.140) играет особо важную роль в теории сверхпроводимости. Как можно показать, переход в сверхпроводящее состояние связан с притяжением, обусловленным обменом фононами при низких частотах.

Чтобы лучше понять это взаимодействие, обратимся к простой однородной модели электрон-фононной связи. Подставляя (4.106) и (4.107) в (4.140), получаем¹⁾

$$\frac{4\pi e^2}{q^2 \epsilon(q, 0)} \frac{\omega_q^2}{\omega^2 - \omega_q^2} \rho_{qr}^+ \rho_{qr}. \quad (4.141)$$

При низких частотах ($\omega \leq \omega_q$) взаимодействие сравнимо по величине с прямым экранированным кулоновским взаимодействием электронов; при высоких частотах ($\omega \gg \omega_q$) оно прене-



Фиг. 27. Схематическое изображение полного эффективного экранированного взаимодействия электронов.

Полное взаимодействие можно представить как сумму взаимодействия посредством фононов и экранированного кулоновского взаимодействия. Точка соответствует матричному элементу экранированного электрон-фононного взаимодействия, двойная волнистая линия — соответствующим образом перенормированному фонону, которым виртуально обмениваются электроны (ср. эту схему со схемой на фиг. 26, на которой показан виртуальный обмен „гольц“ фононом) (матричный элемент v_q^1 соответствует неэкранированному взаимодействию).

брежимо мало. Полное эффективное взаимодействие описывается выражением

$$V_{\text{эфф}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2 \epsilon(\mathbf{q}, 0)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_q^2} \rho_{qr}^+ \rho_{qr} \quad (\omega \leq \omega_q). \quad (4.142)$$

Оно обращается в нуль для возбуждений с нулевой частотой (когда в однородной модели взаимодействие посредством фононов компенсируется экранированным кулоновским взаимодействием), при $\omega \leq \omega_q$ представляет собой притяжение, а при больших частотах — отталкивание.

Полное взаимодействие (4.142) довольно медленно изменяется при изменении \mathbf{q} и очень быстро при изменении ω . Поэтому взаимодействие $V_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, t)$ локализовано в пространстве и заметно запаздывает во времени. Можно считать, что электрон, помещенный в начало координат, действует на соседние электроны

¹⁾ Этот результат впервые был получен Бардином и Пайнсом [37] для частного случая реальных процессов рассеяния.

в течение времени порядка $1/\omega_q$. Мы видели, что в отсутствие фононного поля положение совершенно иное¹⁾).

Диэлектрическую проницаемость электрон-фононной системы можно найти, рассматривая связь пробного заряда с ионами и с электронами. Определение этой диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{полн}}$ и ее вычисление отнесено к задачам. Заметим здесь, что в однородной модели эффективное взаимодействие электронов (4.140) принимает вид

$$V_{\text{эфф}} = \frac{4\pi e^2}{q^2 \epsilon_{\text{полн}}(q, \omega)} \rho_{\text{эп}}^+ \cdot \rho_{\text{эп}}. \quad (4.143)$$

Решив задачу 3, можно убедиться, что это выражение в общем случае несправедливо.

§ 7. РЕАКЦИЯ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Применим теперь описанные в настоящей главе методы к рассмотрению взаимодействия электронной жидкости с поперечным электромагнитным полем. Получим сначала микроскопическое обоснование введенного в гл. 3, § 6, полуклассического приближения, в котором для описания электронной реакции используется тензор проводимости или тензор диэлектрической проницаемости. Мы дадим сначала микроскопический вывод соответствующих функций поперечной реакции и обсудим их поведение в некоторых предельных случаях, представляющих физический интерес.

Прежде всего отметим, что мы сначала не учитываем явно квантовую природу электромагнитного поля, а рассматриваем его как классический источник. Это приближение вполне законно для встречающихся на практике полей. Тем не менее интересно рассмотреть связанную электрон-фотонную систему с квантовомеханической точки зрения. Мы делаем это кратко, выясняя при этом законность определенных допущений, принятых при выводе функции реакции. Квантовомеханический подход использован также при выводе соответствующего выражения для комбинационного рассеяния света в электронной жидкости.

Этот параграф носит несколько формальный характер и насыщен математическими выкладками. Такой подход, конечно, не нужен при решении многих задач, для которых применима теория Ландау—Силина. Но таким образом можно выявить сходство и различие продольной и поперечной реакций элек-

¹⁾ Обсуждение взаимодействия через фононы, основанное на более реалистической модели, чем использованная здесь однородная модель, см. в книге [6], гл. 5.

тронов; в дальнейшем полученные здесь результаты оказываются очень полезными при описании эффекта Мейсснера в сверхпроводниках.

ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ РЕАКЦИЯ

Поперечные электромагнитные свойства заряженной системы описываются обычными уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.144)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \{ \langle \mathfrak{J}(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathfrak{J}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t) \}. \quad (4.145)$$

В уравнении (4.145) $\langle \mathfrak{J} \rangle$ — электрический ток, индуцированный в системе сторонними токами $\mathfrak{J}_{\text{стор}}$, \mathfrak{E} и \mathfrak{H} — самосогласованные эффективные, или локальные, поля, которые частично определяются наводимыми ими токами.

Удобно ввести векторный потенциал. Локальный потенциал $\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t)$ определяется обычным образом:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \quad (4.146)$$

Потенциал \mathfrak{A} есть сумма внешнего векторного потенциала $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ и создаваемого им поляризованного поля:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\text{стор}} + \mathfrak{A}_{\text{пол}}. \quad (4.147)$$

Выполнив в уравнениях Максвелла фурье-преобразование по координатам и времени, найдем следующую связь между токами и векторными потенциалами:

$$(\omega^2 - c^2 q^2) \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega) = -4\pi c \mathfrak{J}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.148)$$

$$(\omega^2 - c^2 q^2) \mathfrak{A}(\mathbf{q}, \omega) = -4\pi c \{ \mathfrak{J}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega) + \langle \mathfrak{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle \}. \quad (4.149)$$

Будем, как обычно, считать внешнее электромагнитное поле слабым. В этом случае индуцированный ток пропорционален локальному полю \mathfrak{E} , причем коэффициентом пропорциональности служит тензор проводимости

$$\langle \mathfrak{J}_{\mu}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) \mathfrak{E}_{\nu}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.150)$$

Соотношение (4.150) можно считать определением микроскопического тензора проводимости, представляющего собой обобщение обычного макроскопического тензора $\sigma_{\mu\nu}$. Часто оказывается удобным вводить электрическую индукцию \mathfrak{D}

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \langle \mathfrak{J} \rangle \quad (4.151)$$

и тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{D}_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \mathcal{E}_{\nu}. \quad (4.152)$$

Между $\epsilon_{\mu\nu}$ и $\sigma_{\mu\nu}$ имеется связь:

$$\epsilon_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) = \delta_{\mu\nu} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.153)$$

Для изотропной электронной жидкости тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости диагональны. Две поперечные компоненты каждого из них одинаковы, обозначим их соответственно σ_{\perp} и ϵ_{\perp} . Из (4.153) вытекает

$$\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.154)$$

В общем случае σ_{\perp} и ϵ_{\perp} отличаются от продольных компонент σ_{\parallel} и ϵ_{\parallel} .

Частоту электромагнитной волны можно определить, находя самосогласованное решение уравнений Максвелла в отсутствие внешних источников. Используя (4.152), получаем для изотропной системы

$$\omega^2 = \frac{c^2 q^2}{\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (4.155)$$

С помощью (4.148) — (4.150) эффективное поле можно выразить через внешнее:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mathfrak{A}_{\text{стоп}}(\mathbf{q}, \omega)}{1 + 4\pi i \omega \sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) / (\omega^2 - c^2 q^2)}. \quad (4.156)$$

Соотношение (4.156) описывает поперечное экранирование в электронной системе

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ПОПЕРЕЧНОЙ РЕАКЦИИ

Так как мы рассматриваем только линейную реакцию, $\sigma_{\mu\nu}$ или $\epsilon_{\mu\nu}$, очевидно, можно выразить через корреляционные функции, точно определенные в микроскопической теории. Как и в рассмотренном выше случае продольных полей, функции реакции можно определять (и вычислять) по-разному. Мы уже подробно говорили об этом в гл 3, § 6.

1. Можно вычислить реакцию на *внешнее* поле (т. е. на $\mathfrak{A}_{\text{стоп}}$) с учетом полного взаимодействия электронов (кулоновское поле плюс поперечное магнитное).

2. Можно считать поляризационное поле (т. е. $\mathfrak{A}_{\text{пол}}$) дополнительным внешним полем и вычислить реакцию на эффективное локальное поле ($\mathfrak{A}_{\text{пол}} + \mathfrak{A}_{\text{стоп}} = \mathfrak{A}$). Однако в этом случае надо

проявить аккуратность, чтобы не учесть дважды полчризаационные процессы. Мы можем это сделать с помощью экранирования затравочного магнитного взаимодействия.

Здесь удобнее воспользоваться вторым способом, поскольку экранированное магнитное взаимодействие пренебрежимо мало. Это взаимодействие, которое впервые было вычислено Бомом и Пайнсом [38], можно рассматривать как результат обмена электронами фотонами. Если два электрона с импульсами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 обмениваются фотоном с импульсом \mathbf{q} , то соответствующий матричный элемент приблизительно равен

$$-4\pi e^2 \sum_{\mu} \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu})}{\omega^2 + c^2 q^2}, \quad (4.157)$$

где $\mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu}$ — вектор поляризации фотона, переданного от одного электрона к другому. С точностью до членов порядка v^2/c^2 матричным элементом (4.157) можно пренебречь по сравнению с матричным элементом кулоновского взаимодействия $4\pi e^2/q^2$.

Иначе говоря, если не учитывать членов порядка v^2/c^2 , то поперечное магнитное взаимодействие приводит только к поляризационным процессам (ниже мы покажем это в явном виде). Их можно учесть, рассматривая поляризационное поле как добавочное внешнее; тогда остается лишь кулоновское взаимодействие электронов. В этом параграфе мы пользуемся только вторым способом. С первым читатель может познакомиться самостоятельно, решив несколько задач к настоящей главе.

Взаимодействие электронов с эффективным полем \mathfrak{A} определяется следующим выражением

$$H_e = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{e}{c} \sum_{\mathbf{q}\mu} \mathbf{J}_{\mathbf{q}} \cdot \mathfrak{A}_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{\eta t}, \quad (4.158)$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ — обычный оператор плотности потока частиц [см. (2.22)]

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2m} \sum_i \{ \mathbf{p}_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i \}$$

и $\mathfrak{A}_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента самосогласованного поперечного векторного потенциала $\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t)$ по координатам и времени. Ниже будет показано, что выражением (4.158) действительно можно пользоваться в качестве гамильтониана эффективного взаимодействия.

Линейную реакцию системы на поле \mathfrak{A} можно вычислить, последовательно применяя теорию возмущений, развитую в гл. 2. Найдем тензор проводимости $\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega)$, который определяется

соотношением (4.150). Напишем сначала выражение для полного электрического тока

$$\mathfrak{J}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2} \sum_i \{ \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{v}_i \}, \quad (4.159)$$

где $\mathbf{v}_i = [\mathbf{p}_i - (e/c) \mathfrak{A}(\mathbf{x}_i)]$ — скорость частицы в присутствии поля. Переходя в (4.159) к фурье-компонентам, находим

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{q}} = e \mathbf{J}_{\mathbf{q}} - \frac{e^2}{mc} \sum_{\mathbf{k}} \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}(t) \rho_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}, \quad (4.160)$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ — оператор тока в отсутствие поля [см. (2.22)]. Поскольку мы ограничиваемся линейной реакцией электронной системы, величину $\rho_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}$ можно заменить ее средним значением в отсутствие поля; тогда остается один член с $\mathbf{q} = \mathbf{k}$. Переходя к фурье-компонентам по времени, находим

$$\langle \mathfrak{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = e \langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle - \frac{N e^2}{mc} \mathfrak{A}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.161)$$

Тогда индуцированные токи можно записать в виде

$$\langle J_{\mu}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = -\frac{e}{c} \chi_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) \mathcal{A}_{\nu}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.162a)$$

$$\langle \mathfrak{J}_{\mu}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = -\frac{e^2}{c} \left\{ \chi_{\mu\nu} + \left(\frac{N}{m} \right) \delta_{\mu\nu} \right\} \mathcal{A}_{\nu}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.162b)$$

где $\chi_{\mu\nu}$ — тензор поперечной реакции ток — ток, который определяется формулой

$$\chi_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n \left\{ \frac{(J_{\mathbf{q}\mu})_{0n} (J_{\mathbf{q}\nu}^+)_{n0}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{(J_{\mathbf{q}\nu}^+)_{0n} (J_{\mathbf{q}\mu})_{n0}}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\}. \quad (4.163)$$

Подчеркнем, что матричные элементы и частоты возбуждений в (4.163) соответствуют системе электронов *только* с кулоновским взаимодействием; поперечное магнитное взаимодействие предполагается равным нулю. Используя (4.146), находим требуемое выражение

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i e^2}{\omega} \left\{ \chi_{\mu\nu} + \frac{N}{m} \delta_{\mu\nu} \right\}. \quad (4.164)$$

Вспоминая (4.153), получаем соответствующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \delta_{\mu\nu} - \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \chi_{\mu\nu}. \quad (4.165)$$

В изотропной системе электромагнитное поле не индуцирует флуктуаций продольного тока; реакция системы полностью опре-

деляется флуктуациями поперечного тока. Две одинаковые поперечные компоненты тензора диэлектрической проницаемости равны

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \left\{ \chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right\}, \quad (4.166)$$

где $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ — поперечная корреляционная функция ток — ток:

$$\chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n |(J_{\mathbf{q}\perp}^+)_{n0}|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2} \quad (4.167)$$

($J_{\mathbf{q}\perp}$ — любая компонента $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$, перпендикулярная \mathbf{q}).

РЕАКЦИЯ НА ПРОДОЛЬНОЙ ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Развитый формализм можно использовать и в случае продольного векторного потенциала $\mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$. Согласно (4.146), под действием такого внешнего потенциала возникает только продольное электрическое поле \mathfrak{D} с фурье-компонентой

$$\mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i\omega}{c} \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.168)$$

Ясно, что такое же поле $\mathfrak{D}(\mathbf{q}, \omega)$ можно было бы получить, используя вместо векторного потенциала $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ подходящий скалярный потенциал $\varphi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$. Из уравнения Пуассона видно, что эквивалентный $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ электростатический потенциал равен

$$\varphi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega) = - \frac{\omega}{c q^2} \mathbf{q} \cdot \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.169)$$

Переход от $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ к $\varphi_{\text{стор}}$ соответствует некоторому *градиентному преобразованию*, часто используемому в теории электромагнитного поля. В общем случае потенциалы $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ и $\varphi_{\text{стор}}$ определяются с точностью до преобразования

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\text{стор}} &\rightarrow \mathfrak{A}_{\text{стор}} + \nabla \lambda, \\ \varphi_{\text{стор}} &\rightarrow \varphi_{\text{стор}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.170)$$

где $\lambda(\mathbf{r}, t)$ — произвольная функция. В градиентно-инвариантной теории все физические результаты не зависят от λ .

Поскольку нас интересует лишь *линейная* реакция системы на внешнее пробное возмущение, достаточно сравнить чисто продольное векторное возмущение с чисто скалярным. Рассмотрим

сначала первое. Взаимодействие электронов с векторным потенциалом описывается гамильтонианом

$$H_{\text{стор}} = -\frac{e}{c} \mathbf{J}_q^+ \cdot \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{i\eta t} \quad (4.171)$$

[заметим, что в (4.171) входит потенциал *внешнего* поля $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ в отличие от (4.158)]. Для изотропной системы индуцированный электрический ток равен [ср. (4.162)]

$$\langle \mathfrak{J} \rangle = -\frac{e^2}{c} \left[\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right] \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega); \quad (4.172)$$

Здесь $\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$ — функция продольной реакции ток — ток:

$$\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{q^2} \sum_n |(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_q^+)_{n0}|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2}. \quad (4.173)$$

Индукцированные флуктуации плотности $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ можно получить из уравнения непрерывности

$$\text{div} \langle \mathfrak{J} \rangle + e \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle = 0. \quad (4.174)$$

Переходя к фурье-компонентам в (4.174) и используя (4.172), находим

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = -\frac{e}{c} \left[\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right] \frac{\mathbf{q} \cdot \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}. \quad (4.175)$$

Предположим теперь, что поле \mathfrak{D} выражается через скалярный потенциал $\varphi_{\text{стор}}$. Индуцированные флуктуации плотности равны

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \chi(\mathbf{q}, \omega) e \varphi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.176)$$

где $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ — функция реакции плотность — плотность. Заменяя $\varphi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ выражением (4.169), мы видим, что результаты (4.175) и (4.176) будут эквивалентны, если выполняется условие

$$\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} = \frac{\omega^2}{q^2} \chi(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.177)$$

которое и выражает свойство градиентной инвариантности теории.

Легко убедиться непосредственно в справедливости соотношения (4.177), подставив вместо $\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ выражения (4.173) и (2.57). Заметим еще, что из закона сохранения числа частиц [см. (2.27)] следует

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_q^+)_{n0} = \omega_{n0} (\rho_q^+)_{n0}. \quad (4.178)$$

После простых преобразований находим

$$\frac{\omega^2}{q^2} \chi(\mathbf{q}, \omega) - \chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{q^2} \sum_n 2\omega_{n0} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2. \quad (4.179)$$

Из соотношения (4.179) можно получить (4.177), используя правило f -сумм (2.29). Таким образом, градиентная инвариантность вытекает из закона сохранения числа частиц (заряда), так как только он использовался при выводе правила f -сумм.

Особенно интересен случай статического продольного потенциала $\mathcal{U}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)$. Согласно (4.168), такой потенциал не приводит к каким-либо физическим явлениям — он не индуцирует ток. Отсюда следует, что

$$\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{m}. \quad (4.180)$$

Возвращаясь к (4.173) и (4.178), мы видим, что равенство (4.180) совершенно эквивалентно правилу f -сумм.

Мы видели в § 3, что плазмоны обеспечивают выполнение правила f -сумм в пределе длинных волн. Плазмоны вносят также основной вклад в $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$. В этом смысле можно считать, что о соблюдении градиентной инвариантности в пределе длинных волн «заботятся» только плазмоны. Если требовать явной градиентной инвариантности теории, то *необходимо* учитывать плазмоны. Если же мы не хотим учитывать коллективные колебания, то следует применять *поперечный* векторный потенциал [$\mathbf{q} \cdot \mathcal{U}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0) = 0$], чтобы исключить фиктивные продольные токи. Как мы увидим, эти соображения применимы к сверхпроводникам в той же мере, как и к нормальным металлам.

Электронную реакцию на зависящий от времени продольный векторный потенциал можно получить, рассматривая индуцированный поляризационный потенциал как добавочное внешнее поле. Такое вычисление не отличается от вычисления поперечной реакции. Гамильтониан взаимодействия описывается выражением (4.158), индуцированный электрический ток — выражением (4.161). Единственное различие состоит в том, что теперь $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \omega)$ представляет собой *продольный* самосогласованный векторный потенциал. Индуцированные токи можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle &= -\frac{e}{c} \chi_{\parallel}^{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega) \mathcal{U}(\mathbf{q}, \omega), \\ \langle \mathfrak{S}(\mathbf{q}, \omega) \rangle &= -\frac{e^2}{c} \left[\chi_{\parallel}^{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right] \mathcal{U}(\mathbf{q}, \omega), \end{aligned} \quad (4.181)$$

где $\chi_{\parallel}^{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ — функция *экранированной* продольной реакции ток — ток. При вычислении $\chi_{\parallel}^{\text{экр}}$ мы должны пренебречь всеми поляризационными процессами; они уже учтены при определении самосогласованного потенциала \mathcal{U} .

Соотношения (4.181) аналогичны соотношениям (4.162). Экранированная величина $\chi_{\parallel}^{\text{экр}}$ является продольной компонентой тензора полной реакции $\chi_{\mu\nu}$ [см. (4.163)]. Последний описывает реакцию системы на произвольное

самосогласованное поле \mathfrak{U} и связан поэтому с $\chi_{\parallel}^{\text{экp}}$, а не с χ_{\parallel} . Продольная диэлектрическая функция равна

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \left[\chi_{\parallel}^{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right]. \quad (4.182)$$

Здесь ε_{\parallel} также представляет собой продольную компоненту тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\mu\nu}$.

Поскольку продольный векторный потенциал эквивалентен скалярному потенциалу, определяемому соотношением (4.169), то

$$\mathfrak{U}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mathfrak{U}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (4.183)$$

где $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ — скалярная диэлектрическая функция. Сравнивая выражения (4.172) и (4.181) для электрического тока, мы видим, что

$$\chi_{\parallel}^{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} = \varepsilon(\mathbf{q}, \omega) \left[\chi_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} \right]. \quad (4.184)$$

С помощью (4.184), (4.177) и (4.12) получаем соотношение

$$\chi_{\parallel}^{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{N}{m} = \frac{\omega^2}{q^2} \chi_{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.185)$$

которое представляет собой записанное в другой форме (через экранированные величины) условие градиентной инвариантности. Мы увидим, что это более тонкое условие, чем «неэкранированное» условие (4.177) (хотя оба они математически эквивалентны). Используя (4.185), (4.182) и (4.13), находим

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.186)$$

Этим однозначно определяется продольная диэлектрическая проницаемость.

Запишем функцию экранированной реакции плотность — плотность в виде

$$\chi_{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n \left| (\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0} \right|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2}, \quad (4.187)$$

где матричный элемент $(\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0}$ определяется соотношением (4.45). [Результат (4.187) непосредственно следует из (4.44) и соотношений Крамерса — Кронига (2.78).] Используем теперь экранированное правило f -сумм (4.41), которое можно записать в виде

$$\frac{N}{m} = \frac{1}{q^2} \sum_n 2\omega_{n0} \left| (\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0} \right|^2. \quad (4.188)$$

С помощью (4.178) можно представить функцию реакции следующим образом:

$$\chi_{\parallel}^{\text{экp}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{q^2} \sum_n \left| (\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0} \right|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2}, \quad (4.189)$$

где $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0}$ определяется по аналогии с (4.45):

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0} = \omega_{n0} (\rho_{\mathbf{q}}^{(1)})_{n0} = \varepsilon(\mathbf{q}, \omega_{n0}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}})_{n0}. \quad (4.190)$$

Соотношение (4.189) — экранированный аналог равенства (4.173).

В (4.189) используются те же возбужденные состояния, что и в (4.187). Они соответствуют возбуждению одной и нескольких пар, а также коллективных мод, присущих эквивалентной нейтральной системе (см. гл. 3, § 4). Плазмоны не вносят вклада в (4.189), так как соответствующий им экранированный матричный элемент (4.190) равен нулю. Поэтому условие градиентной инвариантности (4.185), записанное для экранированных величин, существенно отличается от (4.177). В то время как в последнем учтены только длинноволновые плазмоны, первое отражает все детали спектра экранированных возбуждений (возбуждение пар и экранированные коллективные моды). Ясно, что (4.185) является более тонким условием по сравнению с (4.177).

Подчеркнем в заключение, что при изучении продольной и поперечной диэлектрических функций можно использовать единый подход, рассматривая реакцию на самосогласованный векторный потенциал \mathcal{A} . Реакция характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\mu\nu}$, который связан с тензором экранированной реакции $\chi_{\mu\nu}$ соотношением (4.165). Следует отметить, что тензор $\chi_{\mu\nu}$ в известном смысле не описывает реакцию на определенное пробное возмущение. В принципе единое описание реакции на пробное возмущение можно получить, рассматривая одновременно кулоновское и магнитное взаимодействия электронов. Однако это сложное вычисление не приводит к существенно иным результатам, поскольку в нерелятивистской системе магнитное взаимодействие пренебрежимо мало, см. задачу 4.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. ДИАМАГНИТНАЯ РЕАКЦИЯ И ПРАВИЛО СУММ

Поведение $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, как и любой корреляционной функции, рассмотренной ранее, существенно зависит от того, какой предельный переход выполнять первым. Для трансляционно-инвариантной системы в сумму (4.167) вносят вклад только однопарные возбуждения и (возможно) поперечные коллективные моды (продольные плазмоны не вносят вклада, как следует из соображений симметрии, а многопарными возбуждениями в пределе длинных волн можно пренебречь). Для этих состояний $\omega_{n0} \sim qv_F$. Поэтому

$$\chi_{\perp}(0, \omega) = 0. \quad (4.191a)$$

В пределе $\mathbf{q} \equiv 0$ функции продольной и поперечной реакции совпадают. Этот результат, вообще говоря, очевиден, так как в однородном поле нет выделенного направления для вектора \mathbf{q} (реакция зависит только от поляризации поля). В действительности и в реальных твердых телах при неизменной поляризации поля

$$\chi_{\parallel}(0, \omega) = \chi_{\perp}(0, \omega). \quad (4.191b)$$

Благодаря соотношению (4.191b) мы можем применить полученные в § 3 результаты к изучению оптических свойств твердых тел в инфракрасной области (где $\omega \gg qv_F$). Мы не будем проводить здесь подробное сравнение теории с экспериментом;

читателям, интересующимся этим вопросом, можно рекомендовать недавно вышедшую книгу Пайнса [6].

Из соотношения (4.191a) следует

$$\lim_{q \rightarrow 0} \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.192)$$

— результат, который мы получили раньше с помощью теории Ландау — Силина. Используя соотношение (4.155), находим частоту электромагнитных волн в этом пределе:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 q^2. \quad (4.193)$$

Это так называемый предел сильной связи (см гл. 3), когда наличие электронной жидкости изменяет частоту волн от значения cq до ω_p . Изменение происходит вследствие поперечных поляризационных процессов; кулоновское взаимодействие электронов сказывается только на χ_{\perp} и в этом случае им можно пренебречь.

В противоположном пределе статического квазиоднородного внешнего поля электронная реакция определяется функцией $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$, которую в длинноволновом пределе можно вычислить с помощью теории Ландау:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{m}. \quad (4.194)$$

Ясно, что поправки к этому значению имеют порядок $(N/m) q^2 / p_F^2$; они ответственны за слабый диамагнетизм, впервые рассмотренный Ландау. Чтобы убедиться в этом, с помощью (4.156) и (4.164) запишем соотношением, связывающее $\mathfrak{A}(\mathbf{q}, 0)$ с $\mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)$,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \mathfrak{A}(\mathbf{q}, 0) &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)}{1 + (4\pi e^2 / c^2 q^2) (\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) + N/m)} \approx \\ &\approx \mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0) \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{c^2 p_F^2} \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (4.195)$$

где α — положительный коэффициент порядка единицы, который не может быть получен в теории ферми-жидкости. Локальный потенциал \mathfrak{A} определяет магнитную индукцию \mathfrak{B} , а $\mathfrak{A}_{\text{стор}}$ — магнитное поле \mathfrak{F} . Соотношение (4.195) описывает диамагнитное уменьшение поля \mathfrak{F} . В следующей главе мы вычислим α на основе микроскопической теории. В нормальной ферми-жидкости диамагнитное экранирование — очень слабый эффект порядка v^2/c^2 .

В сверхпроводниках положение иное. Мы покажем, что для пространственно однородного сверхпроводника при $T=0$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) = 0 \quad (4.196)$$

и, следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow 0} \mathfrak{X}(\mathbf{q}, 0) = \frac{\mathfrak{X}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)}{1 + \omega_p^2/c^2 q^2}. \quad (4.197)$$

В пределе длинных волн существует полное диамагнитное экранирование — так называемый эффект Мейсснера. В соответствии с (4.197) магнитное поле проникает только на глубину c/ω_p ; значение глубины проникновения было предсказано Лондоном. Мы подробно обсудим все эти вопросы в другой нашей книге. Здесь нам хотелось подчеркнуть отличие нормальных металлов от сверхпроводников и обратить внимание на то, что величина $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$ может служить мерой диамагнетизма системы.

Переходя к вопросу о правиле сумм, которому должна удовлетворять функция $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ или $\sigma_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$, следует заметить, что у нас нет для поперечных величин правила, аналогичного правилу f -сумм. Мы можем его получить, сделав разумное с физической точки зрения предположение о том, что функция $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ω . (Поскольку ϵ_{\perp} , как и продольная диэлектрическая функция, не измеряет реакцию на внешнее поле, то для определения ее аналитических свойств нельзя использовать соображения причинности). Мы знаем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) \approx O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad (4.198)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Далее, интеграл

$$I = \int_C \omega d\omega \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.199)$$

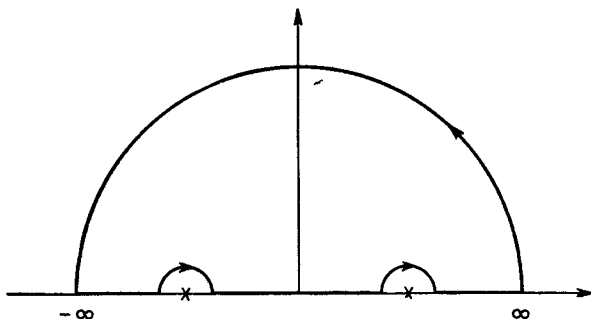
взятый по контуру C , показанному на фиг. 28, обращается в нуль в силу аналитичности функции ϵ_{\perp} .

Интегрирование по полуокружности бесконечно большого радиуса дает $-\pi\omega_p^2$. Поэтому мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = \pi\omega_p^2, \quad (4.200)$$

причем при интегрировании по ω все сингулярности функции $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ должны обходиться сверху.

Функция $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ может иметь сингулярности двух типов. Во-первых, в начале координат, где $\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon \omega^2 = -4\pi e^2 [\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) + N/m]$; во-вторых, полюс, соответствующий «коллективному» полюсу в $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$, за который (только в пределе длинных волн) ответственна уже обсуждавшаяся в гл. 3 поперечная коллектив-



Ф и г. 28. Контур, используемый при выводе правила сумм для $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$. Контур проходит выше любых возможных полюсов функции ϵ_{\perp} (которые обозначены крестами).

ная мода. При желании можно явно учесть сингулярность в начале координат. Мы получим

$$\oint_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = -4\pi^2 e^2 \chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0), \quad (4.201)$$

где перечеркнутый знак интеграла показывает, что берется его главное значение вблизи начала координат. Это правило сумм в длинноволновом пределе выглядит по-разному в зависимости от того, рассматривается ли сверхпроводник или нормальная электронная жидкость.

КВАНТОВАНИЕ ФОТОННОГО ПОЛЯ. КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Рассмотрим кратко квантовую теорию взаимодействия электронов с электромагнитным полем¹⁾. Эта теория позволяет выяснить, в какой мере можно пользоваться гамильтонианом (4.158), описывающим самосогласованное взаимодействие электронов с полем, а также вычислить вероятность комбинаци-

¹⁾ Мы следуем здесь работе Нозьера и Пайса [39].

оииого рассеяния света в квантовой плазме. Гамильтониан связанной электрон-фотонной системы можно записать в виде

$$H = \sum_i \frac{[p_i + (e/c) \mathcal{A}(\mathbf{r}_i)]^2}{2m} + H_{\text{кул}} + H_{\text{эл магн}} \quad (4.202)$$

где $H_{\text{кул}}$ — гамильтониан, соответствующий кулоновскому взаимодействию электронов, $H_{\text{эл магн}}$ — гамильтониан свободного электромагнитного поля и $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал поля. Как обычно, мы пользуемся поперечной калибровкой $\text{div } \mathcal{A} = 0$

Как известно, гамильтониан свободного поля можно записать в виде суммы членов, соответствующих гармоническим осцилляторам. Для этого разложим векторный потенциал в ряд Фурье

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}\mu} (4\pi c^2)^{1/2} Q_{\mathbf{q}\mu} \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.203)$$

Здесь $Q_{\mathbf{q}\mu}$ — амплитуда \mathbf{q} -й нормальной моды поля, $\mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu}$ — вектор ее поляризации (μ принимает значения 1 и 2 соответственно двум возможным направлениям поляризации, перпендикулярным \mathbf{q}). Канонически сопряженная с $Q_{\mathbf{q}\mu}$ координата $\Pi_{\mathbf{q}\mu}$ входит в разложение электрического поля:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}\mu} (4\pi)^{1/2} \Pi_{\mathbf{q}\mu}^+ \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.204)$$

Поскольку \mathcal{A} и \mathcal{E} действительны, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu} &= \mathbf{n}_{-\mathbf{q}\mu} \\ Q_{\mathbf{q}\mu}^+ &= Q_{-\mathbf{q}\mu} \\ \Pi_{\mathbf{q}\mu}^+ &= \Pi_{-\mathbf{q}\mu} \end{aligned} \quad (4.205)$$

Гамильтониан свободного поля получается из выражения для энергии поля

$$\int d^3r \frac{\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad (4.206)$$

где, как обычно,

$$\mathcal{H} = \text{rot } \mathcal{A}. \quad (4.207)$$

Используя (4.204) и (4.207), легко найти, что выражение (4.206) можно записать в виде

$$H_{\text{эл. магн}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\mu} [\Pi_{\mathbf{q}\mu}^+ \Pi_{\mathbf{q}\mu} + c^2 q^2 Q_{\mathbf{q}\mu}^+ Q_{\mathbf{q}\mu}]. \quad (4.208)$$

С помощью разложения (4.203) гамильтониан (4.202) приводится к виду

$$H = H_0 + H'_{\text{эл. магн}} + H_1 + H_2, \quad (4.209)$$

где

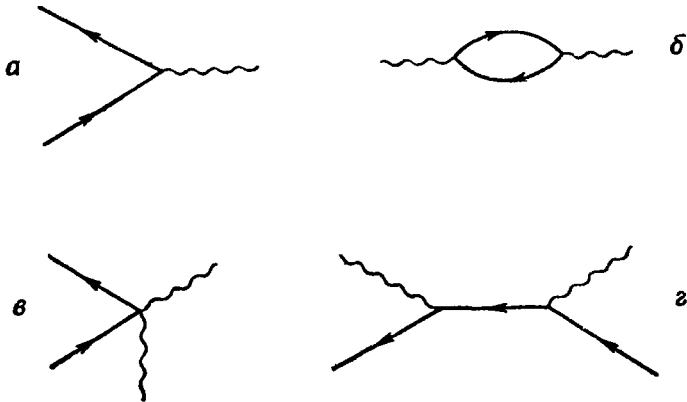
$$H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + H_{\text{кул}}. \quad (4.210)$$

$$H'_{\text{эл. магн}} = \frac{1}{2} \sum_{\text{qu}} [\Pi_{\text{qu}}^+ \Pi_{\text{qu}} + (c^2 q^2 + \omega_p^2) Q_{\text{qu}}^+ Q_{\text{qu}}], \quad (4.211)$$

$$H_1 = \sum_{\text{qu}} (4\pi e^2)^{1/2} (\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n}_{\text{qu}}) Q_{\text{qu}} \quad (4.212)$$

$$H_2 = \sum_{q \neq k, \mu\nu} \frac{2\pi e^2}{m} (\mathbf{n}_{k\nu} \cdot \mathbf{n}_{\text{qu}}) \rho_{k-q}^+ Q_{\text{qu}}^+ Q_{k\nu}. \quad (4.213)$$

Оператор плотности потока частиц \mathbf{J}_q определяется выражением (2.22). В (4.211) мы включили диагональную часть члена с \mathfrak{M}^2 в (4.202), вызывающую смещение фотонных частот, которые теперь равны не cq , а $(c^2 q^2 + \omega_p^2)^{1/2}$.



Фиг. 29. Различные процессы взаимодействия электрона с фотоном.

а — распад фотона на электронно-дырочную пару; *б* — поляризационный процесс, влияющий на энергию фотона; *в* — комбинационное рассеяние, описываемое членом H_2 в гамильтониане; *г* — комбинационное рассеяние, описываемое членом H_1 .

Электрон-фотонное взаимодействие мы разделили на два отдельных члена: H_1 и H_2 , первый из которых связан с испусканием или поглощением одного фотона; он приводит также к смещению фотонных частот. Двухфотонным процессам соответствует член H_2 . Нетрудно показать с помощью теории возмущений, что в первом порядке по электрон-фотонному взаимодействию эти два члена можно рассматривать независимо. Поскольку константа взаимодействия равна

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

это достаточно хорошее приближение, и мы будем здесь его использовать. В этом приближении с H_2 связан только один интересный процесс, а именно комбинационное рассеяние фотонов на флуктуациях плотности. В такое рассеяние вносят вклад в более высоком порядке и члены с H_1 , однако с точностью до членов порядка v^2/c^2 ими можно пренебречь. Различные члены изображены на фиг. 29. На фиг. 29, *а* показан распад фотона на электронно-

дырочную пару, на фиг. 29, б изображен поляризационный процесс, приводящий к смещению энергии фотона Комбинационное рассеяние, связанное с H_2 , представлено на фиг. 29, в, а на фиг. 29, г изображен малый (порядка v^2/c^2) вклад в комбинационное рассеяние, к которому приводит взаимодействие H_1 .

Анализ взаимодействия электронов с фотонами, описываемого членом H_1 , проводится в полной аналогии с рассмотрением связанной электрон-фотонной системы (см. § 5). Чтобы самосогласованным образом вычислить фотонные частоты и индуцированные флуктуации тока, предположим, что существует электромагнитная волна некоторой частоты $\omega_{\mathbf{q}\mu}$, а затем найдем индуцированные флуктуации тока, который создает волну с такой частотой. Как и в случае фононов, при этом учитываются все поляризационные явления в электронной системе, но не учитывается вклад в электронную реакцию виртуальных процессов с участием фотонов. Приближение справедливо с точностью до членов порядка $e^2/\hbar c$ — константы электрон-фотонного взаимодействия. Это полностью эквивалентно вычислению электронной реакции с помощью эффективного гамильтониана (4.158), в чем читатель может убедиться самостоятельно. В качестве упражнения предоставляем читателю показать, что смещенные фотонные частоты определяются дисперсионным уравнением

$$\omega_{\mathbf{q}\mu}^2 = c^2 q^2 + \omega_p^2 + 4\pi e^2 \sum_n |(\mathbf{J}_q^+ \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}\mu})_{n0}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\}. \quad (4.214)$$

Этот результат можно было бы получить непосредственно из уравнений Максвелла с учетом вычисленного нами значения $\chi_{\mu\nu}$ [см. (4.163)].

Рассмотрим теперь ту часть H_2 , которая связана с комбинационным рассеянием света. Вводя операторы рождения и уничтожения фотонов

$$Q_{\mathbf{q}\mu} = \frac{(A_{\mathbf{q}\mu} + A_{-\mathbf{q}\mu}^+)}{(2\omega_{\mathbf{q}\mu})^{1/2}}, \quad (4.215)$$

находим

$$H_2 = \frac{2\pi e^2}{m} \sum_{\mathbf{q}\mathbf{k}, \mu\nu} \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \right)^{1/2} (\mathbf{n}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mu}) \times \\ \times (A_{\mathbf{k}\mu} + A_{-\mathbf{k}\mu}^+) (A_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \nu}^+ + A_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \nu}) \rho_{\mathbf{q}}^+. \quad (4.216)$$

Гамильтониан H_2 описывает рассеяние, в результате которого фотон с импульсом \mathbf{k} и энергией $\omega_{\mathbf{k}}$ переходит в состояние с импульсом $\mathbf{k}-\mathbf{q}$ и энергией $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, причем одновременно электронной системе передается импульс \mathbf{q} и энергия $\omega = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$. Матричный элемент рассеяния, очевидно, пропорционален матричному элементу флуктуаций плотности $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ для перехода из основного состояния в возбужденное электронное состояние с энергией $\omega_{n0} = \omega$. Мы видим, что электромагнитная волна играет роль зонда, позволяющего обнаружить флуктуации плотности частиц. Прямым вычислением находим дифференциальное эффективное сечение рассеяния с передачей импульса \mathbf{q} и энергии ω :

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\theta} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right] S(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.217)$$

где θ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн. Соотношение (4.217) служит отправным моментом при обсуждении возможности использования комбинационного рассеяния для обнаружения флуктуаций плотности в квантовой плазме. Легко распространить этот результат и на случай электронов в твердых телах, а также на классическую плазму. Обе эти задачи представляют значительный экспериментальный интерес.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что сторонний заряд с плотностью $\delta\rho(\mathbf{q}, 0)$, внесенный в электронную жидкость, изменяет энергию системы на величину

$$\delta E_{\mathbf{q}} = \frac{2\pi e^2}{q^2} \frac{|\delta\rho(\mathbf{q}, 0)|^2}{\varepsilon(\mathbf{q}, 0)}.$$

2. Для электронов в твердых телах правило f -сумм остается справедливым. Рассмотрим металл, в котором представляет интерес только одна зона — зона проводимости. В этом случае в длинноволновом пределе удобно различать силы осцилляторов, соответствующие внутризонным и междузонным переходам, и определять полную силу осцилляторов для внутризонных переходов соотношением:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \sum_n f_{0n}^{\text{внутр}} = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{2m}{q^2} \sum_n' \omega_{n0} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 = \frac{Nm}{m_c};$$

здесь штрих у знака суммы показывает, что мы учитываем только внутризонные переходы (для которых $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \omega_{n0} = 0$), N — число электронов проводимости.

1) Используя формальное определение $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ [см. (47)], доказать, что для частот ω , меньших частоты любого междузонного перехода, справедлив результат

$$\varepsilon(0, \omega) \approx 1 - \frac{4\pi N e^2}{m_c \omega^2}.$$

2) Сравнивая этот результат с полученным в теории Ландау [ср. (3167)], показать, что ток, переносимый одной квазичастицей с импульсом \mathbf{p} , равен \mathbf{p}/m_c , где m_c определяется выше.

З а м е ч а н и е Таким образом мы получаем микроскопическое определение кристаллической массы, введенной ранее соотношением (3157).

3. Получить явное выражение для диэлектрической функции системы электронов и ионов $\varepsilon_{\text{поля}}(\mathbf{q}, \omega)$, рассматривая реакцию ионов и электронов на внешний пробный заряд. Показать, что в описанной здесь однородной модели для частот $\omega \ll qv_F$

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{полн}}} = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} + \frac{|v_{\mathbf{q}}^i|^2}{\varepsilon(\mathbf{q}, 0)} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2},$$

а в противном случае (4.143) несправедливо.

4. Рассмотреть взаимодействие электронной жидкости с внешним поперечным возмущением, характеризуемым векторным потенциалом $\mathfrak{A}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$.

1) Показать, что индуцированный ток равен

$$\langle \mathfrak{S} \rangle = -\frac{e^2}{c} \left\{ \chi_{\perp}^{\text{стор}} + \frac{N}{m} \right\} \mathfrak{A}_{\text{стор}}$$

где $\chi_{\perp}^{\text{стор}}$ — функция поперечной реакции ток — ток, вычисленная с учетом магнитного взаимодействия электронов.

2) Поперечную диэлектрическую функцию $\epsilon_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ можно определить с помощью соотношения

$$\mathcal{X} = \frac{\mathcal{X}_{\text{стор}}}{\epsilon_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)}$$

по аналогии с продольным случаем. (Здесь \mathcal{X} — локальный векторный потенциал $\mathcal{X}_{\text{пол}} + \mathcal{X}_{\text{стор}}$.) Показать, что

$$\frac{1}{\epsilon_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{(\omega + i\eta)^2 - c^2 q^2} \left\{ \chi_{\perp}^{\text{стор}} + \frac{N}{m} \right\}.$$

3) Получить связь $\epsilon_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ с $\epsilon_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ и рассмотреть поведение $\epsilon_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ и $\chi_{\perp}^{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ в следующих случаях: а) $\mathbf{q}=0$, ω конечна; б) $\omega=0$, $\mathbf{q} \rightarrow 0$.

б. Обсудить поведение в пределе длинных воли матричных элементов $(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}$ и частот возбуждений ω_{n0} для электронов во внешнем постоянном магнитном поле: а) при \mathbf{q} , параллельном \mathfrak{H}_0 ; б) при \mathbf{q} , перпендикулярном \mathfrak{H}_0 . Использовать результаты при обсуждении правил сумм при наличии магнитного поля и предельного поведения $S(\mathbf{q}, \omega)$.

Указание. Ответ можно проверить с помощью теории Ландау (см. гл. 3, задача 8).

6. Вычислить фоновую скорость в присутствии слабого статического внешнего магнитного поля для однородной модели в случае, когда волна распространяется а) параллельно и б) перпендикулярно внешнему полю.

Указание. Пренебречь влиянием магнитного поля на ноны, и при рассмотрении электронной реакции на движение ионов использовать результаты, полученные в гл. 3, задача 8.

Литература

1. Nozières P., Pines D., Nuovo Cimento, 9, 470 (1958).
2. Thompson W., Hubbard J., Rev. Mod. Phys., 32, 714 (1960).
3. Ichimaru S., Ann. Phys., 20, 78 (1962).
4. Ichimaru S., Phys. Rev., 140, B226 (1965).
5. Pines D., Rev. Mod. Phys., 28, 184 (1956).
6. Pines D., Elementary Excitations in Solids, New York, 1963. (Имеется перевод: Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах, изд-во «Мир», 1965.)
7. Fermi E., Phys. Rev., 57, 485 (1940).
8. Kramers H. A., Physica, 13, 401 (1947).
9. Bohr A., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat-fys. Medd., 24, № 19 (1948).
10. Hubbard J., Proc. Phys. Soc., 68, 976 (1955).
11. Frölich H., Pelzer H., Proc. Phys. Soc., 68, 525 (1955).
12. Ritchie R. H., Phys. Rev., 108, 874 (1957).
13. Glick A., Ferrell R. A., Ann. Phys., 11, 359 (1960).
14. Powell C. J., Swan J. B., Phys. Rev., 118, 640 (1960).
15. Powell C. J., Proc. Phys. Soc., 76, 593 (1960).
16. Robins J. L., Swan J. B., Proc. Phys. Soc., 76, 857 (1960).

17. Klempner O., Shepherd J. P. G., Adv. Phys., 12, 355 (1963).
18. Marton L., Simpson J. A., Fowler H. A., Swanson N., Phys. Rev., 126, 182 (1962).
19. Robins J. L., Proc. Phys. Soc., 78, 1177 (1961).
20. Stern E. A., Ferrell R. A., Phys. Rev., 120, 130 (1960).
21. Watanabe H., Journ. Phys. Soc. Japan, 11, 12 (1956).
22. Marton L., Leder L. B., Phys. Rev., 94, 203 (1954).
23. Robins J. L., Best P. E., Proc. Phys. Soc., 79, 110 (1962).
24. Powell C. J., Proc. Phys. Soc., 76, 593 (1960).
25. Robins J. L., Proc. Phys. Soc., 79, 119 (1962).
26. Watanabe H., Journ. Phys. Soc. Japan, 9, 1035 (1954).
27. Möllenstedt G., Optik, 5, 499 (1949).
28. Pines D., Physica, 26, S103 (1960).
29. Ferrell R. A., Phys. Rev., 107, 450 (1957).
30. Quinn J. J., Phys. Rev., 126, 1453 (1962).
31. Вогн М., Oppenheimer J. R., Ann. Phys., 84, 457 (1928).
32. Мигдал А. Б., ЖЭТФ, 34, 1438 (1958).
33. Bohm D., Staver T., Phys. Rev., 84, 836 (1952).
34. Vardeem J., Phys. Rev., 52, 688 (1937).
35. Sham L. J., Ziman J., Solid State Phys., 15 (1964).
36. Harrison W., Pseudopotentials in the Theory of Metals, New York, 1966. (Готовится русский перевод.)
37. Vardeem J., Pines D., Phys. Rev., 99, 1140 (1955).
38. Bohm D., Pines D., Phys. Rev., 82, 625 (1951).
39. Nozières P., Pines D., Phys. Rev., 113, 1254 (1959).

Микроскопические теории электронной жидкости

Рассмотренная в предыдущих главах макроскопическая теория ферми-жидкости обладает тем преимуществом, что при достаточно низких температурах и малых частотах и волновых векторах она представляет собой точную теорию, описывающую любую нормальную жидкость независимо от ее плотности и закона взаимодействия. Конечно, ее нельзя считать полной, поскольку она не может быть использована для описания микроскопических явлений, когда существенны короткие волны и большие частоты возбуждений, а также при вычислении равновесных свойств, например энергии основного состояния и парной функции распределения. В противоположность этому микроскопические теории могут описывать как макро-, так и микроскопические явления. Но здесь имеются свои ограничения.

1. Эти теории справедливы только в определенном интервале плотности частиц или величины их взаимодействия, т. е. в условиях, не всегда отвечающих физической реальности.

2. Часто трудно указать степень точности, с которой такая теория описывает реальную физическую систему.

В первом случае берется некоторая модельная задача о системе с взаимодействием специального типа (или с определенной плотностью), которая затем решается либо точно, либо с указанием погрешности используемого приближения. Для электронной системы существуют две такие модели: электронный газ большой плотности и электронное твердое тело малой плотности. Поведение электронной жидкости в пределе очень большой плотности упрощается, потому что в этом случае кулоновское взаимодействие оказывается относительно малым возмущением; средняя потенциальная энергия (пропорциональная e^2/r_0 , где r_0 — расстояние между частицами) мала по сравнению с кинетической энергией (пропорциональной \hbar^2/mr_0^2). Их отношение равно

$$\frac{e^2 m r_0^2}{r_0 \hbar^2} = \frac{r_0}{a_0} = r_s,$$

где межэлектронное расстояние выражено в единицах боровского радиуса. Когда $r_s \ll 1$, свойства системы хорошо описываются в так называемом приближении хаотических фаз (RPA).

В пределе низкой плотности ($r_s \gg 1$) поведение электронов определяется кулоновским взаимодействием. Как впервые заметил Вигнер [1], в этом пределе сильной связи электронная «жидкость» представляет собой совсем не жидкость, а скорее твердое тело; электроны образуют устойчивую решетку на фоне однородного положительного заряда. Кулоновское отталкивание удерживает электроны на расстоянии, а кинетическая энергия при больших r_s имеет недостаточную величину, чтобы помешать им локализоваться в определенных узлах решетки. Предел сильной связи, вероятно, достигается при $r_s \gg 10$.

Значения плотности для реальных металлов соответствуют промежуточной области ($1,8 \leq r_s \leq 5,6$), наиболее трудной для изучения; здесь кинетическая и потенциальная энергии сравнимы, а потому никакое строгое рассмотрение неприменимо. Любая теория электронной жидкости при таких плотностях будет по необходимости теорией второго типа, когда нельзя оценить погрешность сделанного допущения.

В настоящей главе изучается электронная жидкость как при высоких плотностях, так и в промежуточной области. Мы не рассматриваем здесь электронное твердое тело малой плотности в основном потому, что этот случай не имеет отношения к свойствам металлов¹⁾. По этой же причине мы не рассматриваем единственную модель, которая имеется в нашем распоряжении для нейтральной системы фермионов, а именно модель разреженного нейтрального газа. Хотя его свойства могут быть подробно исследованы, это не поможет нам понять свойства жидкого ³He. Наоборот, как мы увидим, приближение хаотических фаз позволяет исследовать электроны в металлах, несмотря на то, что оно справедливо только в пределе высокой плотности.

Мы начнем с приближения Хартри — Фока для системы многих частиц, которому посвящен § 1. Вариационные вычисления Хартри, Фока и Слейтера были первой серьезной попыткой определить квантовомеханические характеристики системы многих частиц. В случае однородной системы эти вычисления сводятся к первому порядку теории возмущений. Поэтому при рассмотрении микроскопических теорий полезно начать с приближения Хартри — Фока. В § 2—4 изложено приближение хаотических фаз и с его помощью найдены энергия основного состояния и свой-

¹⁾ Краткий обзор свойств электронного твердого тела малой плотности дан Пайисом [2], гл. 3.

ства квазичастиц электронной жидкости. Мы уделяем такое большое внимание приближению хаотических фаз, во-первых, потому, что оно позволяет найти довольно интересное решение модельной задачи, в котором можно учесть все эффекты электронного взаимодействия, и, во-вторых, потому, что оно, и особенно некоторые его предельные варианты, очень помогает при построении приближенной теории электронной жидкости в области промежуточных значений плотности.

В § 5 мы развиваем метод уравнений движения; это позволяет установить место приближения хаотических фаз и его возможных обобщений в некоторой совокупности последовательных приближений в теории электронной жидкости. Во многих отношениях такое рассмотрение удобно проводить с помощью диаграммной техники, подобной той, которая была разработана в квантовой электродинамике Фейнманом и Дайсоном. Однако этот сложный аппарат не является необходимым для ограниченного класса рассмотренных здесь задач. В § 6 мы обсудим два приближенных метода, которые используются в случае промежуточных значений плотности электронной жидкости, а затем применим их при изучении некоторых равновесных свойств простых металлов. Таков довольно длинный и извилистый путь, который нам предстоит проделать, чтобы от описания поведения электронной жидкости с типичным для металлов значением электронной плотности перейти к вычислению характеристик металлов на основе микроскопической теории; мы попытаемся показать главные препятствия и выяснить природу результатов, которые будут попутно получены.

§ 1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ — ФОКА

В настоящем параграфе мы рассматриваем электронную жидкость с учетом эффектов только первого порядка по взаимодействию частиц V . Для однородной системы это приближение эквивалентно приближению Хартри — Фока. Мы вычислим сначала энергию основного состояния и парную корреляционную функцию. Затем, зная энергию основного состояния, найдем взаимодействие квазичастиц, которое используем при анализе свойств квазичастиц

ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ

Гамильтониан системы большого числа фермионов можно записать в виде

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + \sum_{pp'q\sigma\sigma'} \frac{1}{2} V_{qq} c_{p+q\sigma}^+ c_{p-q\sigma'}^+ c_{p'\sigma'} c_{p\sigma} \quad (5.1)$$

где V_q — фурье-компонента потенциала взаимодействия. Для электронной жидкости, погруженной в однородный положительный заряд,

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{q^2} (1 - \delta_{q0}). \quad (5.2)$$

В электронном взаимодействии нет члена с $q=0$, так как соответствующая часть потенциала компенсируется полем однородного положительного заряда.

Энергию основного состояния в первом приближении можно найти, считая, что волновые функции основного состояния $|0\rangle$ совпадают с соответствующими функциями для невзаимодействующего ферми-газа. Это соответствует заполнению всех состояний типа плоских волн внутри ферми-сферы радиусом p_F . Мы имеем

$$c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} |0\rangle = n_{p\sigma}^0 |0\rangle, \quad (5.3)$$

где $n_{p\sigma}^0$ — распределение в основном состоянии:

$$n_{p\sigma} = \begin{cases} 1, & p < p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases} \quad (5.4)$$

При действии второго члена в (5.1) (соответствующего потенциальной энергии) на состояние $|0\rangle$ «уничтожается» пара частиц $p\sigma$, $p'\sigma'$ внутри ферми-сферы. Диагональные члены получаются только в том случае, если эти частицы «порождаются» операторами $c_{p+q\sigma}^+ c_{p'-q\sigma'}^+$. Это возможно либо при $q=0$, либо при $p'-q=p$ и $\sigma=\sigma'$. Поэтому энергия основного состояния равна

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_{p\sigma} \epsilon_p^0 n_{p\sigma}^0 + \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma'} V_0 \langle 0 | c_{p\sigma}^+ c_{p'\sigma'}^+ c_{p'\sigma} c_{p\sigma} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma', q \neq 0} V_q \langle 0 | c_{p+q\sigma}^+ c_{p'\sigma'}^+ c_{p+q\sigma} c_{p'\sigma'} | 0 \rangle. \quad (5.5)$$

Коммутируя соответствующие операторы, выражаем (5.5) через функцию распределения

$$E_0 = \sum_{p\sigma} \epsilon_p^0 n_{p\sigma}^0 + \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma'} V_0 n_{p\sigma}^0 (n_{p'\sigma'}^0 - \delta_{p',p} \delta_{\sigma',\sigma}) - \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma'} V_q n_{p+q\sigma}^0 n_{p'\sigma'}^0. \quad (5.6)$$

Первый член в энергии основного состояния (5.6) представляет собой нулевое приближение — это кинетическая энергия невзаимодействующих частиц. Второй и третий члены — вклады первого порядка (по потенциалу) в энергию основного состояния. Второй член можно получить с помощью самосогласован-

ной процедуры Хартри [3], в которой многочастичную волновую функцию ищут в виде произведения одноэлектронных волновых функций. Для однородной системы многих частиц такими функциями будут просто плоские волны. Третий член представляет собой обменную энергию; этот дополнительный член можно найти, если, следуя Фоку [4], выбрать надлежащим образом антисимметризованную волновую функцию и представить многочастичную волновую функцию в виде детерминанта, составленного из одноэлектронных волновых функций. Для однородной системы самосогласованными волновыми функциями снова будут плоские волны, так что энергия основного состояния в приближении Хартри — Фока будет такой же, как в системе невзаимодействующих частиц¹⁾. По этой причине мы будем называть выражение (5.6) для энергии основного состояния результатом, полученным в приближении Хартри — Фока (Hartree — Fock approximation, или сокращенно HFA). Подчеркнем, что приближение Хартри — Фока сводится к первому порядку теории возмущений *только* для однородной системы. В случае неоднородной системы приближение Хартри — Фока требует *самосогласованного* вычисления среднего потенциала, действующего на частицы, т. е. привлечения более тонких методов, чем разложение по плоским волнам в теории возмущений.

Для электронной жидкости член, вычисленный Хартри, отсутствует; однородный положительный заряд компенсирует влияние среднего заряда электронов. Поэтому энергия основного состояния, отнесенная к одной частице, равна

$$\frac{E_0^{\text{HFA}}}{N} = \left(\frac{3}{5}\right) \frac{p_F^2}{2m} - \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{p < p_F, p' < p_F} \frac{2\pi e^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}. \quad (5.7)$$

Удобно измерять энергию в ридбергах, а длину в боровских радиусах a_0 . Определим безразмерное расстояние между частицами r_s равенством

$$\frac{4\pi r_s^3 a_0^3}{3} = \frac{1}{N}. \quad (5.8)$$

Фермиевский импульс p_F связан с r_s соотношением

$$p_F = \frac{1}{\alpha r_s a_0}, \quad (5.9)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} \approx 0,521. \quad (5.10)$$

¹⁾ Приближение Хартри—Фока прекрасно описано в книге Зейтца [5].

Выполняя интегрирование в (5.7) и используя введенные обозначения, найдем

$$\frac{E_0^{\text{HFA}}}{N} = \frac{3}{5} \frac{1}{\alpha^2 r_s^2} - \left(\frac{3}{2\pi} \right) \frac{1}{\alpha r_s} = \frac{2,21}{r_s^2} - \frac{0,916}{r_s} \text{ ридберг.} \quad (5.11)$$

Мы видим, что обменная энергия отрицательна; она сравнима с кинетической при $r_s \approx 1$.

ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ

Дополнительные сведения о микроскопическом поведении электронной жидкости в приближении Хартри — Фока можно получить, рассматривая статическую парную корреляционную функцию. Эта величина просто связана со статическим фактором S_q , введенным в гл. 2. Рассмотрим сначала одновременную функцию корреляции плотность — плотность

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \langle \Psi_0 | \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') | \Psi_0 \rangle, \quad (5.12)$$

где Ψ_0 — точная волновая функция основного состояния (операторы плотности частиц берутся в один и тот же момент времени). Для трансляционно-инвариантной системы корреляционная функция не зависит от \mathbf{r}' ; мы уже учли это, указав у S лишь один аргумент \mathbf{r} . Плотность системы точечных частиц равна

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \quad (5.13)$$

Считая объем системы единичным, напишем

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}) &= \frac{1}{N} \langle \Psi_0 | \sum_{ij} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) | \Psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{N} \langle \Psi_0 | \sum_{ij} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) | \Psi_0 \rangle = \\ &= \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{N} \langle \Psi_0 | \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) | \Psi_0 \rangle = \\ &= \delta(\mathbf{r}) + (N-1) g(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{N(N-1)} \langle \Psi_0 | \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) | \Psi_0 \rangle \quad (5.15)$$

— парная функция распределения. Функция $g(\mathbf{r})$ определяет вероятность найти частицу в точке $\mathbf{R} + \mathbf{r}$, если другая частица на-

ходится в точке \mathbf{R} . В выражении (5.14) мы выделили «автокорреляционную часть» (т. е. часть, связанную с собственными корреляциями частицы); оставшаяся часть определяет корреляции между парами частиц.

Прямым вычислением можно показать, что статический форм-фактор $S_{\mathbf{q}}$ является фурье-компонентой (по координатам) функции $S(\mathbf{r})$:

$$S_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{N} \langle \Psi_0 | \rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_{\mathbf{q}} | \Psi_0 \rangle. \quad (5.16)$$

Поэтому для нахождения парной функции распределения $g(\mathbf{r})$ достаточно вычислить $S_{\mathbf{q}}$ — средний квадрат флуктуаций плотности. Часто удобнее сначала вычислить динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$, а затем использовать соотношение

$$S_{\mathbf{q}} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} d\omega S(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.17)$$

В приближении Хартри — Фока форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ принимается равным его значению для системы невзаимодействующих фермионов $S^0(\mathbf{q}, \omega)$. В гл. 2 мы подробно обсуждали форм-фактор $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ и нашли, что он полностью определяется однопарными возбуждениями, энергия которых равна

$$\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 = \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - \epsilon_{\mathbf{p}}^0. \quad (5.18)$$

Таким образом,

$$S^{\text{HFA}}(\mathbf{q}, \omega) = S^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}^0) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0). \quad (5.19)$$

С помощью выражения (5.19) находим

$$S_{\mathbf{q}}^{\text{HFA}} = S_{\mathbf{q}}^0 = \begin{cases} N, & \mathbf{q} \equiv 0, \\ \frac{3q}{4p_F} - \frac{q^3}{16p_F^3}, & 0 < q \leq 2p_F, \\ 1, & q \geq 2p_F. \end{cases} \quad (5.20)$$

[см. (2.96)]. Используя (5.20), (5.16) и (5.14), легко найти, что парная функция распределения равна

$$g^{\text{HFA}}(\mathbf{r}) = 1 - \frac{9}{2} \left[\frac{\sin p_F r - p_F r \cos p_F r}{p_F^3 r^3} \right]^2. \quad (5.21)$$

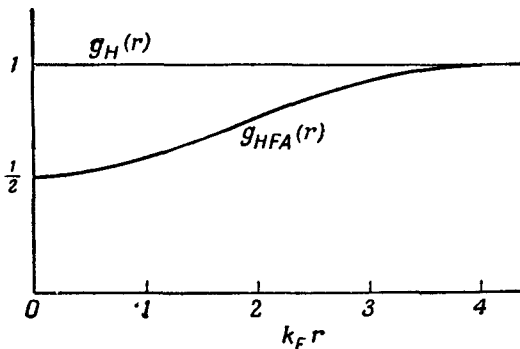
График функции $g^{\text{HFA}}(\mathbf{r})$ изображен на фиг. 30.

Если бы корреляции между положениями частиц отсутствовали, функция $g(\mathbf{r})$ была бы равна единице. В данном случае отличие $g^{\text{HFA}}(\mathbf{r})$ от единицы можно прямо связать с принципом

Паули, который налагает определенные ограничения на волновую функцию основного состояния $|0\rangle$. Выражение (5.19) показывает, что корреляции между частицами с антипараллельными спинами отсутствуют; в $g(\mathbf{r})$ содержатся только корреляции частиц с параллельными спинами. Запишем $g(\mathbf{r})$ в виде

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [g_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}) + g_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r})],$$

где $g_{\uparrow\uparrow}$ и $g_{\uparrow\downarrow}$ — корреляционные функции пар соответственно с параллельными и антипараллельными спинами. В приближении Хартри — Фока $g_{\uparrow\uparrow}^{\text{HFA}}(\mathbf{r}) = 1$. Легко показать, что $g_{\uparrow\uparrow}^{\text{HFA}}(0) = 0$:



Фиг. 30. Парная функция распределения, вычисленная в приближении Хартри — Фока.

в силу принципа Паули две частицы с одинаковыми спинами не могут находиться в одной точке. Часто говорят, что около данного электрона находится «обменная дырка», т. е. область пространства, в которой вероятность найти другой электрон с тем же спином мала. Из (5.21) и фиг. 30 видно, что радиус обменной дырки приблизительно равен $r_F^{-1} = a r_s a_0$.

Корреляции, связанные с принципом Паули, ответственны за существование обменной энергии [см. (5.11)]. Поскольку между электронами существует отталкивательное взаимодействие, любая корреляция, препятствующая сближению электронов, приводит к уменьшению энергии системы. Поучительно выразить среднее значение потенциальной энергии в основном состоянии через S_q . Легко видеть, что

$$\langle \Psi_0 | \sum_{\mathbf{q} \mathbf{p} \mathbf{p}' \sigma \sigma'} \frac{V_{\mathbf{q}}}{2} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}^+ c_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}\sigma'}^+ c_{\mathbf{p}'\sigma'} c_{\mathbf{p}\sigma} | \Psi_0 \rangle = \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} V_{\mathbf{q}} N (S_{\mathbf{q}} - 1). \quad (5.22)$$

Подставив (5.20) в (5.22), мы получим обменную энергию (5.11).

СПЕКТР КВАЗИЧАСТИЦ

С помощью приближения Хартри — Фока легко изучать свойства квазичастиц. Используя (5.6) для определения соответствующих параметров теории Ландау, находим

$$\epsilon_{p\sigma}^{\text{HFA}} = \frac{\partial E_0^{\text{HFA}}}{\partial n_{p\sigma}} = \epsilon_{p\sigma}^0 + \sum_{p'\sigma'} n_{p'\sigma'}^0 V_0 - \sum_{p'\sigma'} n_{p'\sigma'}^0 V_{p'-p} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (5.23)$$

$$f_{p\sigma, p'\sigma'}^{\text{HFA}} = \frac{\partial^2 E_0^{\text{HFA}}}{\partial n_{p\sigma} \partial n_{p'\sigma'}} = V_0 - V_{p'-p} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (5.24)$$

В качестве примера рассмотрим электронную жидкость, для которой член с V_0 , предложенный Хартри, отсутствует. Если квазичастицы находятся на ферми-поверхности, то $f_{pp'}$ зависит только от $x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' / p_F^2$. Мы имеем

$$f_{p\sigma, p'\sigma'}^{\text{HFA}}(x) = - \frac{2\pi e^2}{p_F^2(1-x)} \delta_{\sigma\sigma'} = f_{\text{HFA}}(x). \quad (5.25)$$

Симметричная и антисимметричная по спину части $f_{\text{HFA}}(x)$ равны друг другу [ср. (1.20)]:

$$f_{\text{HFA}}^s(x) = f_{\text{HFA}}^a(x) = \frac{f_{\text{HFA}}}{2} = - \frac{\pi e^2}{p_F^2(1-x)}. \quad (5.26)$$

С помощью (1.22), (1.43), (1.58), (1.67) и (1.100) сразу получаем точные выражения для сжимаемости, спиновой восприимчивости и удельной теплоемкости (см. задачу 1):

$$\frac{\kappa^0}{\kappa} = \frac{s^2}{s_0^2} = \frac{1 + F_0^s}{1 + F_1^s/3} = 1 + N^0(0) \int_{-1}^{+1} dx f^s(x) (1-x), \quad (5.27)$$

$$\frac{\chi_P^0}{\chi_P} = \frac{1 + F_0^a}{1 + F_1^s/3} = 1 + N^0(0) \int_{-1}^{+1} dx [f^a(x) - x f^s(x)], \quad (5.28)$$

$$\frac{C_0}{C} = \frac{m}{m^*} = \frac{1}{1 + F_1^s/3} = 1 - N^0(0) \int_{-1}^{+1} dx x f^s(x), \quad (5.29)$$

где $N^0(0)$ — плотность состояний для *невзаимодействующих* частиц с *одним* направлением спина:

$$N^0(0) = \frac{3}{4} \frac{N}{\epsilon_F^0} = \frac{p_F m}{2\pi^2}. \quad (5.30)$$

Используя (5.26) и (5.30), находим из (5.27) и (5.28)

$$\frac{s_{\text{HFA}}^2}{s_0^2} = \frac{\chi_P^0}{\chi_P^{\text{HFA}}} = 1 - \frac{ar_s}{\pi}, \quad (5.31)$$

тогда как удельная теплоемкость *логарифмически расходится*.

Расходимость обусловлена большим радиусом кулоновского взаимодействия, что приводит к обращению в нуль плотности состояний в приближении Хартри — Фока. Об этом результате мы уже упоминали в гл. 3, § 1. В этом заключается недостаток указанного приближения. По той же причине следует с большой осторожностью применять теорию Ландау в случае кулоновского взаимодействия. Коэффициенты F_0^a и F_0^s также логарифмически расходятся, однако в сжимаемость и спиновую восприимчивость входит такая их комбинация, что расходимости не возникает. Так и должно быть, поскольку сжимаемость и восприимчивость можно найти прямо из выражения для энергии основного состояния, которое свободно от расходимости.

Если бы коэффициент F_1^s действительно расходился, то удельная теплоемкость изменялась бы пропорционально $T/\ln T$, а не пропорционально T , что впервые было показано Бардином [6]. Однако на самом деле это не так. Если учесть члены более высокого порядка в разложении по теории возмущений, то взаимодействие квазичастиц станет экранированным и расходимости снимутся.

Именно из-за дальнедействующего характера кулоновских сил усложняется систематическое описание электронной жидкости по теории возмущений. Мы не можем сразу написать члены второго порядка (по V_q) в энергии основного состояния и в амплитуде рассеяния квазичастиц. Оба они расходятся, — это наглядно показывает, что члены второго порядка нельзя считать малой добавкой к членам первого порядка. Мы увидим, что в первом порядке самосогласованное описание электронного газа можно получить, используя приближение хаотических фаз, которое в дальнейшем мы часто будем сокращенно называть RPA (random phase approximation).

§ 2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Метод, который получил название приближения хаотических фаз, в течение 1950—1960 гг. неоднократно независимо предлагался различными авторами; за это время он постепенно получил признание как удобный способ изучения электронного газа.

История его создания оказалась очень поучительной. Во-первых, она еще раз продемонстрировала поразительное многообра-

ние эквивалентных способов описания и, во-вторых, убедила физиков-теоретиков в необходимости владения несколькими «языками» и полезности попыток примирения на первый взгляд различных, но, очевидно, связанных результатов.

Приближение хаотических фаз было разработано в процессе изучения экранирования и коллективного поведения электронной жидкости. Для этой цели в ранних работах [7—9] основное внимание обращалось на введение коллективных координат, которые описывают плазмоны¹⁾. Приближение хаотических фаз основано на физически оправданном предположении, что при определенных условиях можно пренебречь суммой экспонент с хаотически изменяющимися фазами по сравнению с N (откуда и произошло его название). Так, в тех случаях, когда в основные уравнения теории входил множитель $\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, часто принималось, что

$$\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \sum_l e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_l} \approx N \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}.$$

При этом вычисление энергии основного состояния и анализ свойств квазичастиц значительно упрощались по сравнению с приближением Хартри — Фока [11]. Однако теорию нельзя было назвать красивой, поскольку при введении коллективных координат коллективные моды рассматриваются совершенно независимо от квазичастичных возбуждений. Поэтому некоторые сомневались в справедливости RPA.

За это время несколькими способами был выведен основной закон дисперсии плазмонов; в частности, было использовано приближение Хартри с учетом временной зависимости [7] и приближенное решение гейзенберговских уравнений движения для электроно-дырочной пары [9]. Климонтович и Силин [12] предложили вывод, основанный на квантовом кинетическом уравнении, а Линдхард [13] вычислил диэлектрическую функцию в рамках RPA, используя метод самосогласованного поля. Все эти вычисления казались интересными и перспективными. Однако было не ясно, можно ли применить их к какому-либо другому объекту помимо плазмы.

Следующий решающий шаг был сделан Гелл-Манном и Бракнером [14, 15], вычислившими энергию основного состояния и удельную теплоемкость в приближении, которое, как было показано, эквивалентно RPA. Они показали, что при суммировании наиболее расходящихся членов (каждый из которых порядка V) в разложении по теории возмущений можно получить сходя-

¹⁾ Обзор по теории коллективных координат см. в работе [10]; краткое изложение результатов можно найти в книге [2], гл. 3.

щийся результат, справедливый в пределе большой плотности. (До этого подобные вычисления проводил Маке [16], который получил менее законченные результаты.) Вскоре Савада и др. [17] предложили новый метод, основанный на уравнениях движения, и показали, что с его помощью в RPA можно получить как плазменные колебания (теория Гелл-Манна и Бракнера их не давала), так и результат Гелл-Манна и Бракнера для энергии основного состояния. Независимо от них Хаббард [18], используя методы теории поля, установил связь приближения коллективных координат с суммированием в теории возмущений¹⁾. Затем Эренрайх и Коэн [20] и Голдстоун и Готтфрид [21] установили связь между методом уравнений движения, квантовым кинетическим уравнением, вычислением диэлектрической функции и теорией ферми-жидкости, предложенной Ландау.

Мы не будем излагать здесь детали всех этих вычислений и выяснять связь между ними. Мы получим выражение для диэлектрической функции в рамках RPA и покажем затем, как его можно использовать для определения всех физических свойств электронной жидкости в этом приближении. Предыдущие две главы показали, что диэлектрическая функция очень удобна как для построения теории, так и для выяснения связи между некоторыми, на первый взгляд различными, способами решения задачи.

ВЫВОД И ХАРАКТЕР ПРИБЛИЖЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Мы дадим сначала упрощенный вывод диэлектрической функции в рамках RPA, который позволяет лучше понять физическую природу приближения. В гл. 4, § 1, мы обсуждали функцию *экранированной реакции* плотности — плотность, которая описывает флуктуации плотности, индуцированные *экранированным* внешним полем. Затем мы показали, что диэлектрическая функция связана с этой функцией реакции простым соотношением

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.32)$$

Как мы уже отмечали, при вычислении $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ нужно соблюдать осторожность, чтобы не учесть одно и то же взаимодействие дважды. Однако это не должно нас беспокоить, когда мы аппроксимируем функцию $\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$ ее значением для не-

¹⁾ Эта связь не была очевидной, поскольку Гелл-Манн и Бракнер учитывали некоторые члены, опущенные в работе Бома и Пайнса. Явное доказательство того, что при учете всех членов оба метода приводят к одному результату, было дано авторами настоящей книги [19].

действующей электронной жидкости $\chi^0(\mathbf{q}, \omega)$. Тогда мы получаем диэлектрическую функцию в RPA

$$\varepsilon_{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{n_{\mathbf{p}\sigma}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}^0) 2\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0}{(\omega + i\eta)^2 - (\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0)^2}. \quad (5.33)$$

Таким образом, в RPA, так же, как и в теории Ландау — Силина, дальнедействующая часть кулоновского взаимодействия рассматривается как стороннее поляризационное поле. Это делается для всех длин волн; предполагается, что реакция на экранированное поле, т. е. поляризуемость, соответствует реакции газа невзаимодействующих частиц.

Полезно сравнить вычисления $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в приближениях хаотических фаз и Хартри — Фока. В последнем случае $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ получается подстановкой в (4.6) значения $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ для невзаимодействующей системы

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{HFA}}(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.34)$$

Если формально считать величину $\chi^0(\mathbf{q}, \omega)$ малой, результат в RPA можно записать в виде

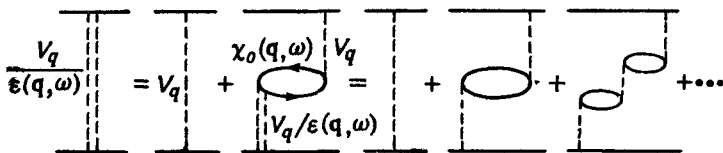
$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{1}{1 - (4\pi e^2/q^2) \chi^0(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(\mathbf{q}, \omega) + \left\{ \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \right\}^2 + \dots \quad (5.35)$$

Такая запись позволяет проследить связь приведенного выше результата с суммированием в теории возмущений, выполненным Гелл-Манном и Бракнером. Первый член ряда, стоящего в правой части (5.35), соответствует приближению Хартри — Фока; члены более высокого порядка — это как раз те члены (наиболее расходящиеся), которые удерживали Гелл-Манн и Бракнер при вычислении энергии основного состояния и удельной теплоемкости. Если ряд считать суммируемым, то получается известный сходящийся результат.

Это же суммирование можно выполнить с помощью фейнмановских диаграмм в зависящей от времени теории возмущений [18, 22]. Соответствующие диаграммы приведены на фиг. 31. Пунктирная линия соответствует голому кулоновскому взаимодействию $V_{\mathbf{q}}$. Двойная пунктирная линия — взаимодействию, экранированному поляризацией среды $V_{\mathbf{q}}/\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$. Овалы изображают поляризационные процессы с возбуждением и последующим исчезновением электронно-дырочной пары. Фиг. 31 является графическим представлением алгебраического уравнения Дайсона

$$\frac{V_{\mathbf{q}}}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = V_{\mathbf{q}} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{\chi^0(\mathbf{q}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} V_{\mathbf{q}}. \quad (5.36)$$

которое получено суммированием ряда (5.35). Заметим, что уравнение Дайсона позволяет автоматически суммировать данную совокупность поляризационных диаграмм, это эквивалентно замене потенциала стороннего поля $\Phi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega)$ экранированным потенциалом $\Phi_{\text{стор}}/\epsilon = \varphi$. Для тех, кто знаком с методами теории поля, заметим, что сумма *всех* неприводимых поляризационных диаграмм (диаграммы, которые нельзя разделить на две поляризационные диаграммы разрезом по линиям взаимодействия) дает просто точную экранированную поляризуемость $(4\pi e^2/q^2)\chi_{\text{экр}}(\mathbf{q}, \omega)$



Фиг. 31. Суммирование поляризационных диаграмм в приближении хаотических фаз.

Приведем теперь точный микроскопический вывод $\epsilon_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega)$. Этот вывод принадлежит Эренрайху и Коэну [20] и заключается в применении метода уравнений движения [9] к изучаемой задаче. Рассмотрим движение электронно-дырочной пары с импульсом $-\mathbf{q}$,

$$\rho_{\mathbf{r}\mathbf{q}\sigma} = c_{\mathbf{r}\sigma}^+ c_{\mathbf{r}+\mathbf{q}\sigma}, \quad (5.37)$$

на которую действует поле, что описывается гамильтонианом (5.1), и стороннее пробное поле с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \{ \epsilon \rho_{\mathbf{q}}^+ \varphi_{\text{стор}}(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.} \} e^{\eta t}. \quad (5.38)$$

Мы хотим найти среднее значение величины

$$\rho_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{r}\sigma} \rho_{\mathbf{r}\mathbf{q}\sigma} \quad (5.39)$$

в присутствии стороннего поля. Это можно сделать, написав в явном виде квантовомеханическое уравнение движения

$$i\dot{\rho}_{\mathbf{r}\mathbf{q}} = [\rho_{\mathbf{r}\mathbf{q}}, H] \quad (5.40)$$

и удержав затем члены, соответствующие использованию РРА. (Здесь и далее мы опускаем спиновый индекс.)

Не будем сначала учитывать электрон-электронное взаимодействие; тогда мы должны получить $\epsilon_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega)$. Вычисляя ком-

мутатор ρ_{pq} с кинетической энергией и с внешним полем, находим

$$\dot{\rho}_{pq} = \omega_{pq}^0 \rho_{pq} + \{c_p^+ c_p - c_{p+q}^+ c_{p+q}\} e\Phi_{\text{стоп}} e^{-i\omega t} e^{\eta t} + \\ + \{c_p^+ c_{p+2q} - c_{p-q}^+ c_{p+q}\} e\Phi_{\text{стоп}}^+ e^{\eta t} e^{i\omega t}. \quad (5.41)$$

Решим это уравнение, взяв от обеих сторон равенства среднее значение по основному состоянию. Поскольку нас интересует только первый порядок по $\Phi_{\text{стоп}}(\mathbf{q}, \omega)$, в правой части (5.41) можно сделать следующую подстановку:

$$\langle c_p^+ c_p \rangle = n_p^0, \quad \langle c_p^+ c_{p+2q} \rangle = 0. \quad (5.42)$$

Член, пропорциональный Φ^+ , пропадает, и мы находим

$$\langle \rho_q \rangle = \sum_p \langle \rho_{pq} \rangle = \sum_p \frac{n_p^0 - n_{p+q}^0}{\omega - \omega_{pq}^0 + i\eta} e\Phi_{\text{стоп}}. \quad (5.43)$$

Функция реакции плотность — плотность соответственно равна

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_p \frac{n_p^0 - n_{p+q}^0}{\omega - \omega_{pq}^0 + i\eta}. \quad (5.44a)$$

Этот результат эквивалентен обычному выражению в приближении Хартри — Фока, получающемуся из (5.33):

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_p n_p^0 (1 - n_{p+q}^0) \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{pq}^0 + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{pq}^0 + i\eta} \right\} \quad (5.44b)$$

[чтобы перейти от (5.44a) к (5.44b), надо в последнем члене в (5.44b) следующим образом изменить индексы суммирования: $p \rightarrow -p - q$, $\omega_{pq}^0 \rightarrow -\omega_{pq}^0$].

Теперь учтем взаимодействие электронов, коммутируя ρ_{pq} с потенциальной энергией, входящей в (5.1). В правой части уравнения (5.41) появляются дополнительные члены

$$\sum_k \frac{1}{2} V_k \{ \rho_k (c_p^+ c_{p+q-k} - c_{p+k}^+ c_{p+q}) + (c_p^+ c_{p+q-k} - c_{p+k}^+ c_{p+q}) \rho_k \}. \quad (5.45)$$

Приближение хаотических фаз состоит прежде всего в том, что в этой сумме удерживается только один член с $\mathbf{k} = \mathbf{q}$. Взяв среднее значение по основному состоянию, можно с помощью (5.42) переписать его в виде

$$V_q \langle \rho_q (c_p^+ c_p - c_{p+q}^+ c_{p+q}) \rangle = V_q \langle \rho_q \rangle (n_p^0 - n_{p+q}^0). \quad (5.46)$$

Вместо (5.43) тогда получаем

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \left\{ e\varphi_{\text{стоп}} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle \right\} = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) e\varphi(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.47)$$

Отсюда сразу следует результат (5.33) для диэлектрической функции в RPA.

В RPA электронное взаимодействие принимается во внимание только в той степени, в какой оно приводит к образованию экранированного поля $\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle$. Реакция на экранированное поле характеризуется величиной χ^0 . Таким образом, мы проверили упрощенный вывод, в котором исходили из соотношения (5.32). Заметим, что RPA заключается в приближенной линейаризации уравнения движения для $\rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ более последовательно выражение (5.45) линейаризуется в § 5.

Метод уравнений движения, который мы кратко обсуждали выше, тесно связан с кинетическим уравнением Ландау — Силина, рассмотренным в гл. 3. Чтобы установить эту связь, положим

$$\langle \rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \rangle = \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.48)$$

Микроскопическое уравнение движения в RPA получается из (5.41) и (5.46)

$$(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0) \delta n_{\mathbf{p}} + (n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{p}}^0) \left\{ e\varphi_{\text{стоп}} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle \right\} = 0. \quad (5.49)$$

В пределе длинных волн имеем

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} (n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{p}}^0) = \mathbf{q} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0 \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}^0} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0 \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 - \mu) \quad (5.50a)$$

и

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 = \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0, \quad (5.50b)$$

так что уравнение (5.49) принимает вид

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0) \delta n_{\mathbf{p}} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^0) e\varphi(\mathbf{q}, \omega) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 - \mu) = 0. \quad (5.51)$$

Этот результат следует сравнить с кинетическим уравнением Ландау — Силина, которое можно записать следующим образом:

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \delta n_{\mathbf{p}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left\{ e\varphi(\mathbf{q}, \omega) + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} \right\} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) = 0. \quad (5.52)$$

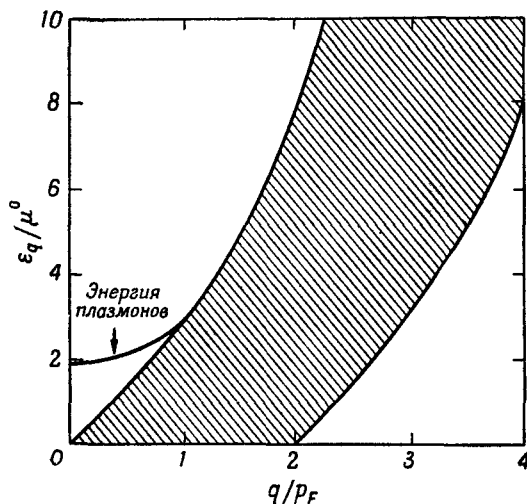
Уравнение (5.52) переходит в (5.51), если положить $\varepsilon_{\mathbf{p}} \rightarrow \varepsilon_{\mathbf{p}}^0$, $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \rightarrow 0$. Итак, в той мере, в какой это касается кинетического уравнения в пределе длинных волн, можно сказать, что в RPA учитывается среднее поляризационное поле и не принимается во внимание взаимодействие квазичастиц на близких расстояниях.

ЭНЕРГИЯ И ЗАТУХАНИЕ ПЛАЗМОНОВ

В отсутствие затухания частота плазмонов ω_q определяется из дисперсионного уравнения

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0. \quad (5.53)$$

При вычислении ω_q можно в (5.33) не учитывать ограничения, вытекающие из принципа Паули (чтобы убедиться в этом,



Фиг. 32. Спектр флуктуаций плотности, вычисленный в приближении хаотических фаз для электронной жидкости с плотностью $r_s = 4$.

Парным возбуждениям соответствует заштрихованная область.

достаточно провести замену индекса суммирования $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Тогда дисперсионное уравнение приводится к виду

$$1 = \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{p < p_F} \left\{ \frac{1}{\omega_q - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}/m) - (q^2/2m)} - \frac{1}{\omega_q + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}/m) + (q^2/2m)} \right\}. \quad (5.54)$$

Заменяя во втором члене \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$, мы приходим к выражению, впервые полученному Бомом и Пайнсом,

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{p < p_F} \frac{1}{(\omega_q - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}/m)^2 - q^4/4m^2}. \quad (5.55)$$

Теперь легко найти энергию плазмонов:

$$\omega_q \approx \omega_p \left\{ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{q v_F^0}{\omega_p} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (5.56)$$

При увеличении q энергия плазмонов возрастает довольно медленно; максимальная энергия электронно-дырочной пары $qv_F^0 + q^2/2m$ увеличивается гораздо быстрее. При некотором критическом значении волнового вектора q_c впервые становится возможным распад плазмона на электронно-дырочную пару. Чтобы найти q_c , надо решить уравнения [17, 23]

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}_c}) &= 0, \\ \omega_{\mathbf{q}_c} &= q_c v_F^0 + \frac{q_c^2}{2m}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Это нетрудно сделать, поскольку выражение для ε при $\omega = \omega_{\mathbf{q}_c}$ значительно упрощается. Вычисление q_c мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Можно показать, что при типичных для металлов значениях электронной плотности ($2 \leq r_s \leq 5,5$) удовлетворительную оценку по порядку величины можно получить с помощью длинноволнового критерия

$$q_c \approx \frac{\omega_p}{v_F^0} = \left(\frac{4\pi r_s}{3\pi} \right)^{1/2} p_F. \quad (5.58)$$

На фиг. 32 приведен спектр плазмонов и парных возбуждений в РРА для металла с $r_s=4$ (натрий).

ДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМ-ФАКТОР И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ

Согласно (4.36), динамический форм-фактор в РРА дается выражением

$$S_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{q^2}{4\pi^2 e^2} \frac{\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega)}{\varepsilon_1^2(\mathbf{q}, \omega) + \varepsilon_2^2(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (5.59)$$

где ε_1 и ε_2 — действительная и мнимая части диэлектрической функции в РРА

$$\varepsilon_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_1(\mathbf{q}, \omega) + i\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.60)$$

Форм-фактор $S_{\text{РРА}}$ можно также записать в виде

$$S_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{S^0(\mathbf{q}, \omega)}{|\varepsilon_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega)|^2} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{n_{\mathbf{p}}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0)}{|\varepsilon_{\text{РРА}}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0)|^2} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0), \quad (5.61)$$

где $S^0(\mathbf{q}, \omega)$ — динамический форм-фактор для системы невзаимодействующих частиц. Соотношение (5.61) отчетливо демонстрирует динамическое экранирование матричных элементов в РРА. Заметим, что в (5.61) вносят вклад только однопарные возбуждения и плазмоны; в РРА в динамическом форм-факторе и функциях линейной реакции *не учитываются* многопарные возбуждения.

Выполняя суммирование по \mathbf{p} в (5.44а) и (5.44б), можно найти явные выражения для ε_1 и ε_2 . Эти вычисления впервые выполнил Линдхард [13], который нашел

$$\varepsilon_1(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{q_{FT}^2}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{p_F}{4q} \left[\left(\frac{(\omega + q^2/2m)^2}{(qv_F^0)^2} - 1 \right) \ln \left| \frac{\omega - qv_F^0 + q^2/2m}{\omega + qv_F^0 + q^2/2m} \right| - \left(\frac{(\omega - q^2/2m)^2}{(qv_F^0)^2} - 1 \right) \ln \left| \frac{\omega - qv_F^0 - q^2/2m}{\omega + qv_F^0 - q^2/2m} \right| \right] \right\}, \quad (5.62)$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} \frac{q_{FT}^2}{q^2} \frac{\omega}{qv_F^0}, \quad 0 \leq \omega \leq qv_F^0 - \frac{q^2}{2m},$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} \frac{q_{FT}^2}{q^2} \frac{p_F}{q} \left\{ 1 - \frac{(\omega - q^2/2m)^2}{(qv_F^0)^2} \right\}, \quad -\frac{q^2}{2m} \leq \omega - qv_F^0 \leq \frac{q^2}{2m}, \quad (5.63)$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad \omega \geq qv_F^0 + \frac{q^2}{2m},$$

где q_{FT} — волновой вектор, характеризующий экранирование в приближении Томаса — Ферми

$$q_{FT}^2 = \frac{3\omega_p^2}{(v_F^0)^2}.$$

Эти выражения справедливы при произвольных волновых векторах и частотах. Они полностью определяют $S_{RPA}(\mathbf{q}, \omega)$.

В пределе длинных волн ε_1 , как и предполагалось, имеет вид

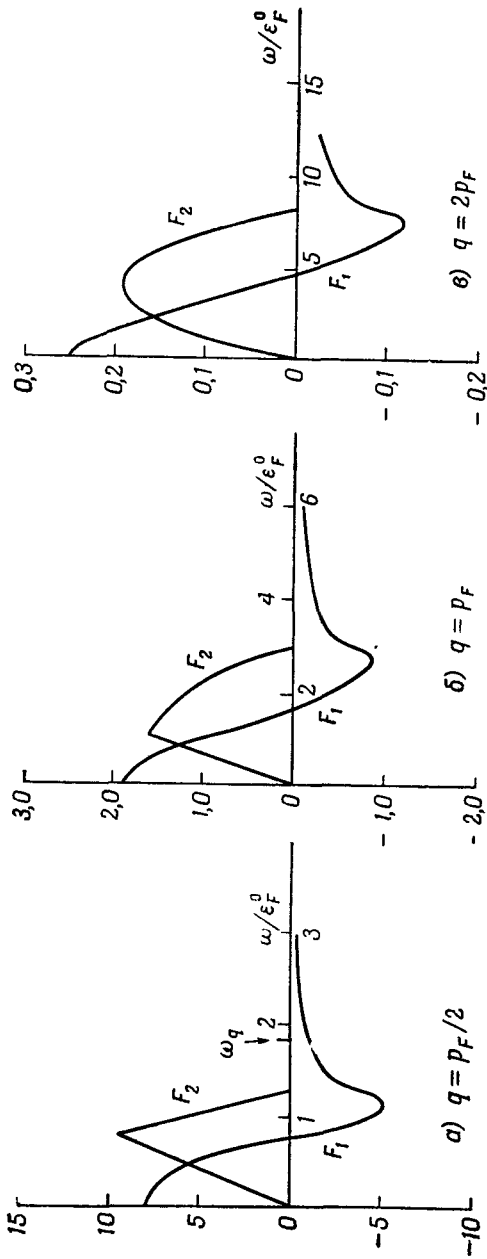
$$\varepsilon_1(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (5.64)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \varepsilon_1(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{FT}^2}{q^2} = 1 + \frac{3\omega_p^2}{(qv_F^0)^2}. \quad (5.65)$$

Результат (5.64) совпадает с точным результатом для электронной жидкости, а (5.65) — с полученным в приближении Томаса — Ферми и отличается от точного результата (4.27):

$$\lim_{q \rightarrow 0} \varepsilon_1(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{q^2 s^2}. \quad (5.66)$$

Заметим, что изотермическая скорость звука, которая входит в (5.65), хуже аппроксимирует s , чем скорость, которую можно получить, дифференцируя энергию основного состояния. Это очевидное противоречие, которое присуще всем вычислениям с помощью теории возмущений, возникает из-за того, что в выражение



Фиг. 33. Универсальные диэлектрические функции для трех значений волнового вектора.

для энергии основного состояния входит лишнее $V_{\mathbf{q}}$. Подобное противоречие содержится и в результатах, полученных в приближении Хартри — Фока для нейтральной системы, где

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \chi_{\text{HFA}}(\mathbf{q}, 0) = \chi^0(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{m s_0^2} = -\frac{3N}{m (v_F^0)^2}, \quad (5.67)$$

тогда как

$$s_{\text{HFA}}^2 = \frac{(v_F^0)^2}{3} \left\{ 1 + (F_0^s)_{\text{HFA}} \right\} \frac{m}{m_{\text{HFA}}^*}. \quad (5.68)$$

Рассмотрим теперь микроскопическое поведение $S_{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)$ и $\epsilon_{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)$. Для расчетов удобно выразить ϵ_1 и ϵ_2 через безразмерные величины

$$x = \frac{q}{p_F}, \quad y = \frac{\omega}{\epsilon_F^0}, \quad (5.69)$$

$$\epsilon_1(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \xi F_1(x, y), \quad (5.70)$$

$$\epsilon_2(\mathbf{q}, \omega) = \xi F_2(x, y), \quad (5.71)$$

$$\xi = \frac{e^2 p_F}{\pi \epsilon_F^0} = \frac{2ar_s}{\pi} \approx 0,33r_s. \quad (5.72)$$

Величины F_1 и F_2 играют роль универсальных диэлектрических функций. На фиг 33 изображены графики F_1 и F_2 для трех значений волнового вектора: $q = p_F/2$, $q = p_F$ и $q = 2p_F$. Заметим, что при использовании введенных безразмерных величин

$$S_{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega) = S_{\text{RPA}}(x, y) = \frac{N^0(0) x^2}{2ar_s} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}. \quad (5.73)$$

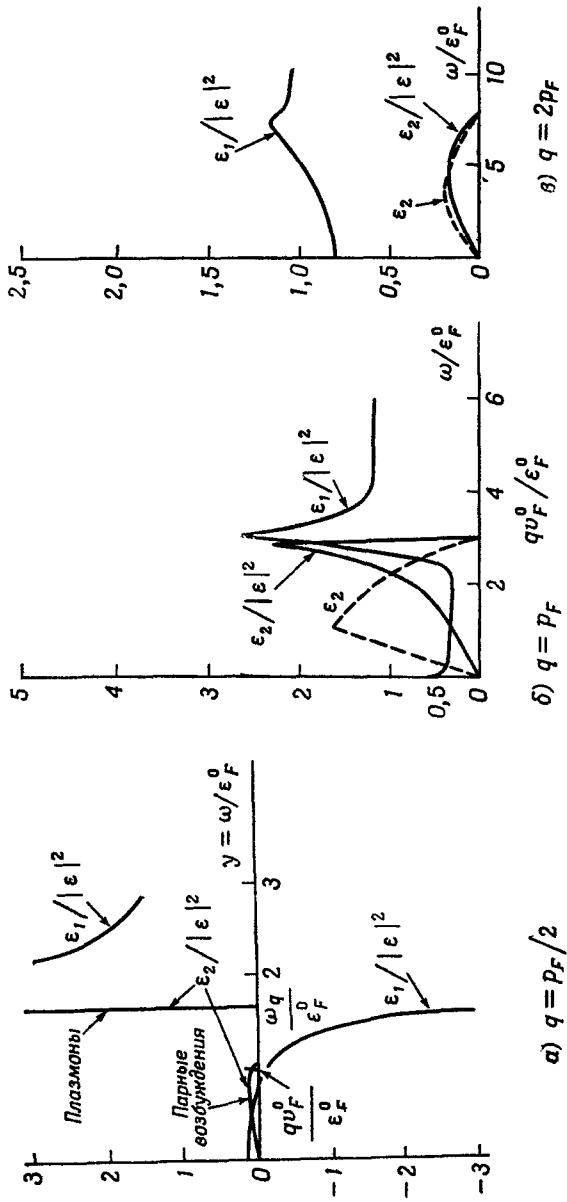
Для конкретности рассмотрим электронную жидкость, для которой $r_s = 3$ (т. е. $\xi \approx 1$). В этом случае затухание плазмонов начинается приблизительно при

$$x_c = \frac{qc}{p_F} \approx 0,82, \quad (5.74)$$

$$x_{FT} = \frac{q_{FT}}{p_F} \approx 2. \quad (5.75)$$

На фиг. 34 приведены графики функций $\epsilon_1/|\epsilon_{\text{RPA}}|^2$ и $\epsilon_2/|\epsilon_{\text{RPA}}|^2$ для тех же трех значений волнового вектора. Отметим следующие общие особенности полученных результатов.

1) $q = p_F/2$. Хотя рассматриваемая длина волны не является макроскопической, поведение диэлектрической функции и динамического форм-фактора мало изменяется по сравнению с макроскопическим режимом. Нетрудно видеть, что низкочастотное



Фиг. 34. Вычисленные в приближении хаотических фаз функции $\epsilon_1/|\epsilon|^2$ и $\epsilon_2/|\epsilon|^2$ для трех значений волнового вектора.

возмущение, соответствующее $\omega \leq qv_F^0$, $y \leq 1$, почти полностью экранируется (для этого достаточно сравнить $\epsilon_2/|\epsilon_{RPA}|^2$ с $\epsilon_2 = F_2$). При высоких частотах, когда $qv_F^0 \leq \omega$, функция реакции практически совпадает с соответствующей функцией для классического осциллятора с частотой ω_p . В области

$$qv_F^0 \leq \omega \leq \omega_p \quad (5.76)$$

функция реакции имеет обратный знак («антиэкранирование»), тогда как при $\omega \geq \omega_p$ происходит усиление поля. При $\omega \gg \omega_p$ взаимодействие частиц несущественно. Заметим, что затухание плазмонов мало и поскольку величина $\epsilon_2/|\epsilon_{RPA}|^2$ мала, плазменный полюс по-прежнему определяет спектр флуктуаций плотности.

2) $q = p_F$. Низкочастотное экранирование исчезает. При $\omega \leq qv_F^0$ экранирование, описываемое множителем $(\epsilon_1/|\epsilon_{RPA}|^2)$, почти не зависит от частоты; внешнее поле уменьшается по величине примерно в 3 раза. Отсутствует «антиэкранирование» высокочастотных возмущений; некоторое усиление имеет место в области $\omega \geq qv_F^0$. Для сравнения на фиг. 34 представлена зависимость ϵ_2 от частоты. Хотя плазмоны и не затухают, кулоновское взаимодействие приводит к смещению спектра возбуждений в область более высоких частот; динамический форм-фактор похож на форм-фактор для спектра экранированных пар, в котором имеется плазменный вклад с частотой $\omega_q \approx (\frac{3}{2}) qv_F^0$. Интерпретировать ли спектр таким образом или как модифицированный спектр парных возбуждений — дело вкуса.

3) *Очень короткие волны* ($q \approx 2p_F$). Взаимодействие электронов практически несущественно; динамический форм-фактор и диэлектрическая функция имеют почти такой же вид, как и для системы невзаимодействующих частиц.

Эти результаты показывают, что значение $q = q_c$ является граничным. При $q > q_c$ электрон-электронное взаимодействие становится менее важным. При $q \leq q_c$ плазмоны не затухают и определяют спектр возбуждений. При $q \geq q_c$ диэлектрическое экранирование уже не является существенной особенностью поведения системы (хотя взаимодействие электронов может заметно влиять на динамический форм-фактор).

Следует подчеркнуть, что полученные результаты нельзя применять количественно к электронной жидкости с типичными для металлов значениями плотности (когда RPA несправедливо). Тем не менее можно ожидать, что в этой области они вполне пригодны для качественного рассмотрения.

СТАТИЧЕСКОЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Рассмотрим здесь в рамках RPA экранирование статической заряженной примеси в электронном газе. Пусть примесь с зарядом $-e$ находится в начале координат. С помощью (4.3) мы находим, что индуцированные флуктуации плотности в электронной системе описываются выражением

$$\langle \rho(\mathbf{q}, 0) \rangle = -\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} + 1. \quad (5.77)$$

Изменение плотности электронного газа в точке \mathbf{r} , вызванное примесью, равно

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \langle \rho(\mathbf{q}, 0) \rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q \frac{\sin qr}{r} \left\{ \frac{\epsilon(\mathbf{q}, 0) - 1}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} \right\}. \quad (5.78)$$

Естественно вычислить $\delta\rho$ в приближении Томаса—Ферми, в котором для $\epsilon(\mathbf{q}, 0)$ справедливо выражение (5.65). Мы находим

$$\delta\rho_{FT}(\mathbf{r}) = \frac{q_{FT}^2}{4\pi r} e^{-q_{FT}r}. \quad (5.79)$$

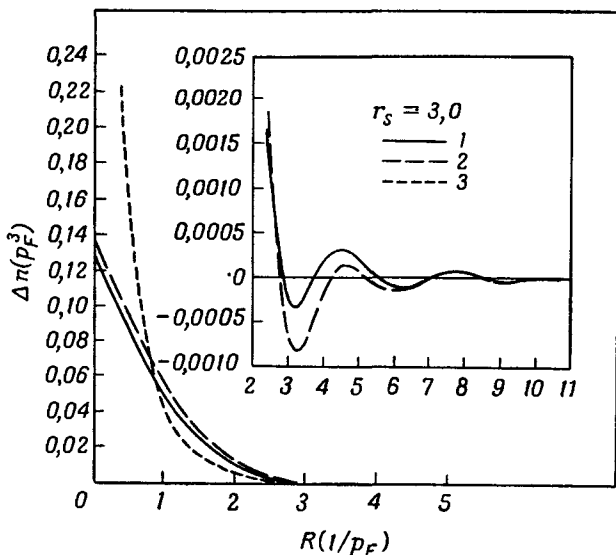
Плотность индуцированного экранирующего заряда экспоненциально спадает на больших расстояниях r ; при малых r она изменяется обратно пропорционально r , что приводит к нефизическому результату для очень малых расстояний от отрицательно заряженной примеси. (Из области вблизи примеси большая часть отрицательных зарядов выталкивается, остается лишь меньшая часть; см. задачу 3). Это и неудивительно, поскольку мы использовали приближение Томаса—Ферми при больших значениях \mathbf{q} , где оно неприменимо. Очевидно, и теория Ландау, с помощью которой получено соотношение (5.66), не приводит к лучшим результатам. Поэтому мы обратимся к приближению хаотических фаз, которое позволяет последовательно учесть статическое экранирование.

Вычисление индуцированной экранирующей плотности в рамках RPA было выполнено Лангером и Воско [24]. Из (5.62) находим

$$\epsilon_1(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{FT}^2}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{p_F}{2q} \left(1 - \frac{q^2}{4p_F^2} \right) \ln \left(\frac{q + 2p_F}{q - 2p_F} \right) \right\}. \quad (5.80)$$

Подставив (5.80) в (5.78), мы приходим к довольно сложному интегралу. Поскольку этот интеграл не берется в квадратурах, его приходится вычислять приближенно. На фиг. 35 показаны результаты, найденные для электронного газа с $r_s = 3$. Мы ви-

дим, что результаты вычислений в рамках RPA и в приближении Томаса — Ферми оказались различными в двух отношениях: 1) в RPA экранирующая плотность в начале координат конечна, 2) в RPA экранирующая плотность не стремится к нулю экспоненциально, а осциллирует при больших значениях r .



Фиг. 35. Зависимость плотности экранированного заряда от расстояния до примеси в случае $r_s = 3$ [24].

Плотность вычислена в приближениях хаотических фаз (1), Хэббарда (2) и Томаса — Ферми (3). $\Delta\rho = e\Delta\pi$.

Первый результат мы воспринимаем с удовлетворением, тогда как второй вызывает некоторое удивление, хотя к такому же выводу еще раньше пришел Фридель [25].

Чтобы понять, как возникают эти осцилляции, заметим, что при $q = 2p_F$ функция $\epsilon_{\text{RPA}}(q, 0)$ конечна и непрерывна, но ее производная логарифмически расходится:

$$\left(\frac{\partial \epsilon(q, 0)}{\partial q} \right)_{q=2p_F} = \infty. \quad (5.81)$$

Вследствие этой сингулярности при больших r для $\delta\rho(r)$ имеем

$$\frac{\delta\rho_{\text{RPA}}(r)}{p_F^3} = -\frac{2\xi}{\pi(4+\xi)^2} \frac{\cos 2p_F r}{(p_F r)^3}, \quad (5.82)$$

где ξ — безразмерная величина, определяемая соотношением (5.72). Нетрудно выяснить физическую причину сингулярности (5.81). При $q < 2p_F$ электрон можно перевести с одного участка ферми-поверхности на другой. Спектр возбуждения электронно-дырочных пар начинается от нулевого значения энергии. При $q > 2p_F$ для возбуждения электрона надо сообщить ему некоторую энергию; соответствующий спектр возбуждений начинается с конечного значения энергии, что показано на фиг. 32.

Фактически это общее свойство, присущее не только РРА. Вклад однопарных возбуждений в функцию экранированной диэлектрической реакции всегда имеет сингулярность типа (5.81). Кроме того, в гл. 2, § 4, мы видели, что при низких частотах можно пренебречь многопарными возбуждениями. Это означает, что осцилляции типа (5.82) являются точным микроскопическим свойством нормальной электронной жидкости; их можно рассматривать как следствие четкой определенности ферми-поверхности.

Результат (5.82) приводит к важным физическим следствиям. Спадающие довольно медленно, хотя и небольшие по величине осцилляции плотности можно обнаружить в экспериментах по ядерному магнитному резонансу, поскольку они обуславливают градиенты электрического поля на большом расстоянии от примесей [26, 27]. Подобные же осцилляции, как и следовало ожидать, создаются парамагнитной примесью в металле.

СТАТИЧЕСКОЕ ДИАМАГНИТНОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

В гл. 4, § 7, мы получили следующее выражение для статического диамагнитного экранирования внешнего поперечного поля $\mathcal{U}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)$:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}, 0) = \frac{\mathcal{U}_{\text{стор}}(\mathbf{q}, 0)}{1 + (4\pi e^2/c^2 q^2) \{\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) + N/m\}}. \quad (4.195)$$

Заметим, что в пределе длинных волн

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{m}$$

— результат, который можно получить в теории Ландау. Мы используем РРА для вычисления $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$ для микроскопических значений q . Поскольку диэлектрическое экранирование поперечного поля отсутствует и поскольку в РРА однопарные возбуждения обладают такими же свойствами, как и в системе свободных частиц, функция $\chi_{\perp}(\mathbf{q}, 0)$ будет той же, как и в системе невзаимодействующих фермионов. Согласно (4.167), мы имеем

$$\chi_{\perp}^0(\mathbf{q}, 0) = - \sum_{\mathbf{p}} \frac{2n_{\mathbf{p}}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_{\perp})^2}{m^2 \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0}. \quad (5.83)$$

Легко показать, изменяя надлежащим образом индекс суммирования, что при суммировании по p в (5.83) можно не учитывать ограничения, вытекающие из принципа Паули. Поэтому мы можем написать

$$\chi_{\perp}^0(q, 0) = -\frac{2}{m} \sum_{p < p_F} \frac{(p \cdot n_{\perp})^2}{p \cdot q + q^2/2}. \quad (5.84)$$

Заменяя сумму интегралом и выполняя интегрирование по углам, получаем

$$\chi_{\perp}(q, 0) = -\frac{N}{2m} + \frac{1}{2\pi^2 m q} \int_0^{p_F} dp p \left(p^2 - \frac{q^2}{4}\right) \ln\left(\frac{p - q/2}{p + q/2}\right). \quad (5.85)$$

Интегрирование по p проводится элементарно, но оно довольно громоздко. В действительности нас не столько интересует точное выражение, сколько поправки порядка q^2 к $(\chi_{\perp} + N/m)$. Разложив логарифм по степеням $q/2p$, мы легко найдем требуемый результат

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi_{\perp}(q, 0) = -\frac{N}{m} + \frac{N}{m} \frac{q^2}{4p_F^2}. \quad (5.86)$$

Член порядка q^2 ответствен за слабый диамагнетизм, который впервые рассматривал Ландау. Подставляя (5.86) в (4.195), найдем следующее выражение для магнитной проницаемости μ_M :

$$\mu_M = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{A}(q, 0)}{\mathfrak{A}_{\text{стор}}(q, 0)} = \frac{1}{1 + \omega_p^2/4c^2 p_F^2}.$$

Соответствующая диамагнитная восприимчивость равна

$$\chi_D = \frac{\mu_M - 1}{4\pi} \approx -\frac{\omega_p^2}{16\pi c^2 p_F^2} = -\frac{1}{3} \chi_P^0, \quad (5.87)$$

где χ_P^0 — парамагнитная спиновая восприимчивость невзаимодействующего ферми-газа. Простая связь (5.87) между χ_P и χ_D справедлива только в рамках РРА. Заметим, что диамагнитное экранирование имеет порядок v^2/c^2 , в согласии с нашим прежним утверждением, сделанным в гл. 4, § 7, на основании соображений размерности.

§ 3. ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ В РРА

Начиная с работ Вигнера и Зейтца об энергии связи металлов [28—30], теоретики неизменно проявляли интерес к вопросу об энергии основного состояния электронной жидкости. Вигнер и Зейтц показали, что электронное взаимодействие существенно при определении связи в металлах и что для удовлетворительного вычисления энергии связи необходимо точно знать энергию основного состояния электронной жидкости с плотностью, характерной для металлов. Они определяли *корреляционную энергию* электронной жидкости как разность между энергией основного

состояния, полученной в приближении Хартри — Фока (5.11) и в любом более точном вычислении. Такое название объясняется тем, что в приближении Хартри — Фока учитываются лишь кинематические корреляции частиц, связанные с принципом Паули. Динамические корреляции, возникающие из-за того, что у электронов имеется заряд, учитываются при использовании более точного приближения, например RPA.

Корреляции, обусловленные зарядом, очевидно, должны препятствовать сближению электронов (поскольку электроны отталкивают друг друга); это приводит к дополнительному уменьшению энергии системы. Поэтому корреляционная энергия отрицательна. Корреляции особенно важны для электронов с антипараллельными спинами, относительное движение которых в приближении Хартри — Фока совершенно не коррелировано. Такие корреляции впервые рассматривал Вигнер [1, 29], который учел корреляции между электронами с антипараллельными спинами в приближенных волновых функциях (в вариационном методе) и провел численный расчет энергии основного состояния. Он нашел, что для электронной жидкости с плотностью $r_s \approx 1$ корреляционная энергия, отнесенная к одному электрону, имеет порядок $0,1$ ридберга. Вигнер вычислил также корреляционную энергию для электронной системы малой плотности, в которой потенциальная энергия играет основную роль, благодаря чему электроны колеблются вблизи определенных узлов решетки. (Это имеет место при $r_s \geq 100$.) Вигнер предположил, что корреляционную энергию при электронной плотности, типичной для металлов, можно аппроксимировать следующей интерполяционной формулой, описывающей переход от малых плотностей к большим¹⁾:

$$E_{\text{корр}} = - \frac{0,88}{r_s + 7,8} \text{ ридберг}. \quad (5.88)$$

Мы увидим в § 6, что эта формула дает хорошую оценку корреляционной энергии при таких плотностях.

В настоящем параграфе мы вычислим корреляционную энергию в RPA — приближении, которое, как будет показано в дальнейшем, справедливо в пределе большой плотности ($r_s \leq 1$). Мы докажем полезную теорему, которую можно использовать при вычислении энергии основного состояния, исходя из динамического форм-фактора или диэлектрической функции, и применим ее в RPA. Затем мы остановимся на связи RPA с формальной

¹⁾ Ранее Вигнером была опубликована другая интерполяционная формула, согласно которой $E_{\text{корр}} = -0,58/(r_s + 5,1)$ ридберг. Как указано в примечании к работе [1], в этом выражении использовано неправильное значение корреляционной энергии в пределе малых плотностей.

теорией возмущений, а также на анализе длинноволновых вкладов в корреляционную энергию. В заключение мы кратко обсудим парные корреляции, вычисленные в РРА.

ТЕОРЕМА ОБ ЭНЕРГИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ

Вычисление энергии основного состояния заметно упрощается, если использовать теорему, которая впервые, по-видимому, была доказана Паули (не опубликовано). Эта теорема позволяет определить E_0 , если диэлектрическая функция $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ известна при всех значениях волновых векторов, частот и констант связи [31]. Определим *энергию взаимодействия* в основном состоянии как среднее значение потенциальной энергии (5.22):

$$E_{\text{вз}} = \langle \Psi_0 | \sum_{\mathbf{q}} \frac{2\pi e^2}{q^2} (\rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_{\mathbf{q}} - N) | \Psi_0 \rangle = N \sum_{\mathbf{q}} \frac{2\pi e^2}{q^2} (S_{\mathbf{q}} - 1).$$

Используя (5.17) и (4.36), мы можем написать

$$E_{\text{вз}} = \sum_{\mathbf{q}} E_{\text{вз}}(\mathbf{q}) = - \sum_{\mathbf{q}} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \text{Im} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} + \frac{2\pi N e^2}{q^2}. \quad (5.89)$$

От $E_{\text{вз}}$ можно перейти к E_0 , рассматривая энергию основного состояния как функцию константы связи $\alpha = e^2$, которая характеризует интенсивность электрон-электронного взаимодействия. Будем формально считать α переменной величиной. Дифференцируя энергию основного состояния

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \frac{p_i^2}{2m} | \Psi_0 \rangle + E_{\text{вз}} \quad (5.90)$$

по α , найдем

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{d\alpha} &= \langle \Psi_0 | \frac{\partial H}{\partial \alpha} | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | H | \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \rangle + \langle \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} | H | \Psi_0 \rangle = \\ &= \frac{E_{\text{вз}}}{\alpha} + E_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Поскольку функции основного состояния нормированы, последний член в (5.91) обращается в нуль, и мы можем написать

$$\frac{\partial E_0}{\partial \alpha} = \frac{E_{\text{вз}}}{\alpha}. \quad (5.92)$$

Если теперь проинтегрировать обе части равенства (5.92) по α от $\alpha=0$ до $\alpha=e^2$ (фактическое значение константы связи), то мы получим

$$E_0(e^2) - E_0(0) = \int_0^{e^2} \frac{d\alpha}{\alpha} E_{\text{вз}}(\alpha); \quad (5.93)$$

здесь $E_0(e^2)$ — фактическое значение энергии основного состояния, $E_0(0) = (3/5)Np_F^2/2m$ — энергия основного состояния в отсутствие взаимодействия частиц. Таким образом, мы приходим к требуемому результату:

$$E_0 = \frac{3}{10} \frac{Np_F^2}{m} + \int_0^{e^2} \frac{d\alpha}{\alpha} E_{вз}(\alpha), \quad (5.94)$$

который и позволяет перейти от $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega, e^2)$ к E_0 .

С помощью выражений (5.94) и (5.89) можно независимым образом определять вклад с данным значением переданного импульса в энергии основного состояния $E_{вз}(\mathbf{q}, \alpha)$. Например, при малых q мы имеем *точный* результат [см. (4.57)]:

$$\lim_{q \rightarrow 0} S_q = \frac{q^2}{2m\omega_p}. \quad (5.95)$$

Это означает, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} E_{вз}(\mathbf{q}) = \frac{\omega_p}{4} - \frac{2\pi Ne^2}{q^2}, \quad (5.96)$$

а для соответствующего вклада в энергию основного состояния получаем (выполняя интегрирование по константе связи)

$$\frac{\omega_p}{2} - \frac{2\pi Ne^2}{q^2}. \quad (5.97)$$

Первый член в (5.97) представляет собой нулевую энергию длинноволновых плазмонов, второй — собственную энергию флуктуаций плотности, которые описываются плазмонами. Результат (5.97) можно было бы получить сразу, если допустить, что в пределе длинных волн динамический форм-фактор определяется плазмонами. При этих условиях можно было бы считать, что вклад нулевых плазменных колебаний в энергию основного состояния состоит из двух равных частей — кинетической энергии $\omega_p/4$ и потенциальной энергии $\omega_p/4$.

Сравним (5.97) с соответствующей величиной, вычисленной в приближении Хартри — Фока. Используя (5.20) и (5.22), найдем эту величину в пределе длинных волн:

$$\frac{3\pi}{2} \frac{Ne^2}{qp_F} - \frac{2\pi Ne^2}{q^2}. \quad (5.98)$$

Вычитая выражение (5.98) из (5.97) и деля на N , мы находим, что отнесенный к одной частице вклад с переданным импульсом \mathbf{q} в *корреляционной энергии* равен

$$E_{\text{корр}}(\mathbf{q}) = \frac{\omega_p}{2N} - \frac{3\pi e^2}{2qp_F}. \quad (5.99)$$

Мы видим, что в пределе длинных волн динамические флуктуации, обусловленные наличием заряда, вносят существенный вклад в корреляционную энергию. Вместе с тем сравнение (5.95) с (5.20) показывает, что динамические корреляции приводят к существенному уменьшению среднего квадрата флуктуаций плотности S_q по сравнению с его значением в приближении Хартри — Фока. Подчеркнем, что при малых q результат (5.99) является точным.

ВЫЧИСЛЕНИЕ E_{RPA}

Как было показано выше, вычисление энергии основного состояния в рамках RPA сводится к вычислению энергии взаимодействия $E_{вз}^{RPA}(q)$ для данного переданного импульса и последующему интегрированию по константе связи и суммированию по импульсу q . Запишем энергию взаимодействия в виде

$$E_{вз}^{RPA}(q) = -\frac{2\pi e^2}{q^2} \left[N + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \chi_{RPA}(q, \omega) \right], \quad (5.100)$$

где

$$\chi_{RPA} = \frac{\chi^0}{1 - (4\pi e^2/q^2)\chi^0}. \quad (5.101)$$

При явном вычислении E_{RPA} удобно использовать аналитические свойства $\chi(q, \omega)$. Выбрав подходящим образом контур¹⁾, можно показать, что

$$\int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \chi_{RPA}(q, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \chi_{RPA}(q, i\omega), \quad (5.102)$$

где

$$\omega = i\omega. \quad (5.103)$$

Тогда энергию основного состояния можно записать следующим образом

$$E_{RPA} = \frac{E_0^{RPA}}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F^0 - \sum_q \frac{2\pi}{q^2 N} \int_0^{e^2} d\alpha \left\{ N + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{\chi^0(q, i\omega)}{1 - (4\pi\alpha/q^2)\chi^0(q, i\omega)} \right\}. \quad (5.104)$$

Интегрируя по константе связи, находим

$$E_{RPA} = \frac{3}{5} \varepsilon_F^0 + \sum_q \left\{ -\frac{2\pi e^2}{q^2} + \frac{1}{4\pi N} \int_{-\infty}^\infty d\omega \operatorname{Im} \left[1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(q, i\omega) \right] \right\}, \quad (5.105)$$

¹⁾ См., например, книгу [2], приложение В

Если теперь ввести обозначения

$$u = \frac{w}{qv_F^0},$$

$$\chi^0(q, iw) = -\frac{N^0(0)}{2\pi} Q_x(u), \quad (5.106)$$

$$-\frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(q, iw) = \frac{\alpha r_s}{\pi x^2} Q_x(u),$$

где $x = q/p_F$ [см. (5.69)], то (5.105) можно переписать в виде

$$E_{RPA} = \left\{ \frac{2.21}{r_s^2} + \frac{3}{4\pi\alpha^2 r_s^2} \int_0^\infty dx x^3 \int_0^\infty du \ln \left[1 + \frac{\alpha r_s}{\pi x^2} Q_x(u) \right] \right\} \text{ридберг} - \sum_q \frac{2\pi e^2}{q^2}. \quad (5.107)$$

Наш результат (5.107) согласуется с результатом, полученным Гелл-Манном и Бракиером [14] посредством прямого суммирования отдельных членов разложения E_0 по теории возмущений.

Не так просто получить явное аналитическое выражение для E_{RPA} из (5.107). Анализ структуры соответствующего разложения по теории возмущений показывает, что в него входят обменная энергия плюс члены типа

$$a \ln r_s + b + cr_s + \dots \quad (5.108)$$

Гелл-Мани и Бракиер вычислили константы a и b , которые только и важны в пределе большой плотности ($r_s \ll 1$), когда RPA оказывается полезным приближением. В этом пределе они нашли

$$E_{RPA} = \left(\frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} + 0.622 \ln r_s - 0.142 \right) \text{ридберг}. \quad (5.109)$$

СТРУКТУРА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ¹⁾

Полезно обратиться к явному разложению энергии основного состояния по теории возмущений. Краткий анализ появляющихся при этом различных членов помогает понять, каким образом возникает выражение типа (5.109) для энергии основного состояния, и непосредственно установить, какие члены суммируются в RPA. Рассмотрение опущенных членов полезно для оценки справедливости RPA.

Мы видели, что вычисление с точностью до членов первого порядка по V эквивалентно приближению Хартри — Фока и позволяет получить первые два члена в (5.109). Согласно теории возмущений Рэля — Шредингера член второго порядка по V в E_0 равен

$$E_2 = - \sum_n \frac{\langle 0 | H_{B3} | n \rangle \langle n | H_{B3} | 0 \rangle}{E_n - E_0}, \quad (5.110)$$

¹⁾ В этом разделе мы следуем книге [2].

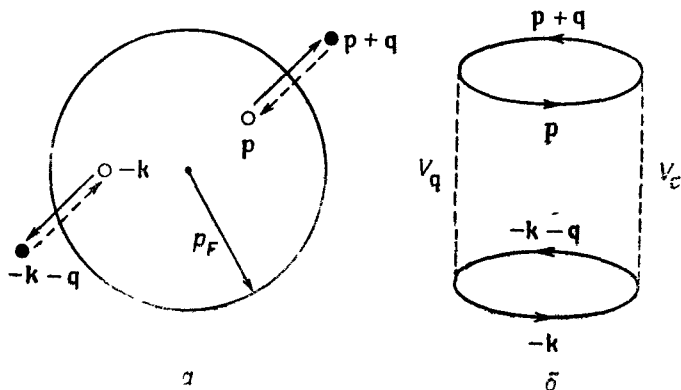
где $H_{вз}$ — кулоновское взаимодействие [см (51)] Типичный процесс, обусловленный $H_{вз}$, заключается в том, что электроны, имевшие импульсы, скажем p и $-k$, переходят в состояние с импульсами $p+q$ и $-k-q$. В силу принципа Паули состояния p и $-k$ должны лежать внутри ферми-поверхности, а состояния $p+q$ и $-k-q$ — вне ее. Матричный элемент для этого перехода, когда он разрешен, равен просто

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{q^2}.$$

Энергия возбуждения равна

$$E_{pk}(q) = \frac{(p+q)^2}{2m} + \frac{(-k-q)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{2m} = \frac{q \cdot (p+k+q)}{m}. \quad (5.111)$$

От возбужденного состояния n , характеризующегося наличием электронов с импульсами $p+q$ и $-k-q$ и дырок с импульсами p , $-k$, мы должны



Ф и г. 36. Два способа изображения вклада прямого процесса второго порядка в энергию основного состояния

Электроны, имевшие импульсы p и $-k$, переходят в состояния $p+q$, $-k-q$ (сплошные линии) и возвращаются в начальные состояния (пунктирные линии), матричный элемент в том и другом случае равен V_q .

вернуться к основному состоянию, используя еще раз $H_{вз}$. Здесь следует различать два процесса, которые соответствуют разным вкладам в энергию основного состояния

Во-первых, мы имеем так называемые «прямые» процессы, когда переход в основное состояние происходит так же, как переход в возбужденное, им соответствует матричный элемент V_q . Прямой процесс изображен на фиг. 36, а. Диаграмма такого процесса показана на фиг. 36, б, где сплошные линии соответствуют электрону и дырке, а пунктирные — взаимодействию с передачей импульса q . Вклад прямого процесса в E_2 равен

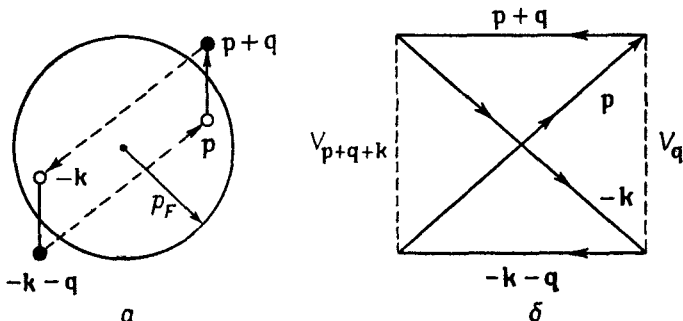
$$E_2^{(a)} = -4 \sum_{pkq} \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right)^2 \frac{m}{q \cdot (p+k+q)} n_p^0 (1 - n_{p+q}^0) n_k^0 (1 - n_{k+q}^0) \quad (5.112)$$

(множитель 4 возникает в результате суммирования по спинам).

Во-вторых, имеют место так называемые «обменные» процессы, когда электрон с импульсом $p+q$ переходит в состояние $-k$, а электрон $(-k-q)$ возвращается в состояние p . Матричный элемент для этого перехода равен

$$-V_{p+k+q} = -\frac{4\pi e^2}{(p+k+q)^2}.$$

Знак минус учитывает то, что операторы рождения и уничтожения стоят в обратном порядке. Заметим, что обменный процесс может происходить только в том случае, когда электроны p и k имеют параллельные спины, в то время как в прямом процессе электроны p и k могут иметь как параллельные, так



Фиг. 37. Два способа изображения вклада обменного процесса второго порядка в энергию основного состояния.

и антипараллельные спины. Типичный обменный процесс показан на фиг. 37. Вклад обменных процессов в E_2 описывается выражением

$$E_2^{(b)} = 2 \sum_{pkq} \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{4\pi e^2}{(p+k+q)^2} \frac{m}{p \cdot (p+k+q)} n_p^0 (1 - n_{p+q}^0) n_k^0 (1 - n_{k+q}^0). \quad (5.113)$$

Вклад прямых процессов $E_2^{(a)}$ логарифмически расходится в пределе малых переданных импульсов. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу требования $p < p_F$, $|p+q| > p_F$ значения p могут лежать лишь в непосредственной близости от ферми-поверхности в узком слое шириной порядка q ; это означает, что

$$\sum_p n_p^0 (1 - n_{p+q}^0) \sim \frac{Nq}{p_F} \sim \sum_k n_k^0 (1 - n_{k+q}^0). \quad (5.114)$$

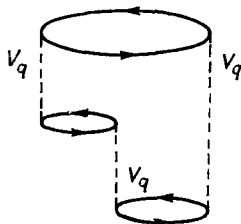
Тогда, заменяя сумму по q интегралом, находим

$$\lim_{q \rightarrow 0} E_2^{(a)} \sim - \int dq q^2 \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right)^2 \frac{q^2}{p_F^2} \frac{m}{qp_F} \sim - \int \frac{dq}{q} \sim - \ln q. \quad (5.115)$$

Эта логарифмическая расходимость является прямым следствием кулоновского дальнего действия (если бы взаимодействие быстро спадало с расстоя-

нием, то матричный элемент V_q при малых q стремился бы к константе и никакой расходимости не было).

Кулоновское дальноедействие приводит к более сильным расходностям в членах более высокого порядка теории возмущений. Структуру этих членов можно выяснить следующим образом. На примере прямых процессов второго порядка, когда переход в возбужденное и возвращение в основное состояние происходит с передачей одного и того же импульса q , мы видели, что расходящийся результат получается из-за множителей типа $1/q^2$. Наоборот, обменный процесс не приводит к расходностям, поскольку один множитель равен $1/q^2$, а другой равен $1/(\mathbf{p}+\mathbf{k}+\mathbf{q})^2$, причем последний при $q \rightarrow 0$ стремится к конечному значению. Для примера рассмотрим вклады третьего порядка. Наиболее расходящаяся диаграмма, соответствующая процессу, в котором несколько раз передается импульс q , изображена на фиг. 38. В этом



Фиг. 38. Сильно расходящийся вклад третьего порядка в энергию основного состояния.

случае сначала возбуждаются две электронно-дырочные пары с передачей импульса q , затем эти пары аннигилируют и рождаются снова, опять с взаимодействием $V_q = 4\pi e^2/q^2$, наконец, две пары аннигилируют, и система возвращается в состояние без возбуждений. Порядок величины члена, соответствующего этой диаграмме, легко оценить в пределе $q \rightarrow 0$. По сравнению с $E_2^{(a)}$ появляется один добавочный множитель $4\pi e^2/q^2$, один добавочный энергетический знаменатель порядка qp_F и множитель q/p_F , учитывающий обусловленную принципом Паули уменьшенную область фазового пространства, в которой может лежать \mathbf{p} . Следовательно, вклад члена, которому соответствует диаграмма на фиг. 38, расходится квадратично:

$$E_3^{(a)} \sim \int_{\beta} \frac{dq}{q} \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \frac{q}{p_F} \frac{1}{qp_F} \sim \frac{r_s}{\beta^2} \text{ ридберг}, \quad (5.116)$$

где мы ввели параметр обрезания β . С другой стороны, если мы предположим, что рассеяние одной из электронно-дырочных пар представляет собой обменный процесс, то получим

$$E_3^{(b)} \sim \int_{\beta} \frac{dq}{q} \frac{4\pi e^2}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q})^2} \frac{q}{p_F} \frac{1}{qp_F} \sim r_s \ln \beta \text{ ридберг}. \quad (5.117)$$

Этот результат расходится, но гораздо более слабо, чем $E_3^{(a)}$. Аналогично члены, соответствующие двум обменным процессам, дают

$$E_3^{(c)} \sim r_s \text{ ридберг}. \quad (5.118)$$

Таким образом выясняется структура ряда теории возмущений. Рассмотрим поведение матричных элементов при малых импульсах, получаем ряды:

$$E_{\text{корр}} = a + b \ln \beta + c \frac{r_s}{\beta^2} + d \frac{r_s^2}{\beta^4} + e \frac{r_s^3}{\beta^6} + \dots + a_1 + b_1 r_s \ln \beta + c_1 \frac{r_s^2}{\beta^2} + \dots \\ \dots + a_2 r_s + b_2 r_s^2 \ln \beta + c_2 r_s^2 + \dots \quad (5.119)$$

Как мы видели выше, волновой вектор экранирования пропорционален $r_s^{1/2}$. Следовательно, первая группа членов, связанных только с передачей импульса q , дает в корреляционной энергии член, пропорциональный $\ln r_s$, и постоянный член. Вторая группа дает постоянную и члены порядка r_s , третья — члены порядка $r_s \ln r_s$, r_s^2 и т. д. Итак, если можно было бы просуммировать первую группу наиболее расходящихся членов в ряду теории возмущений, то мы получили бы как член $\ln r_s$, так и постоянный вклад в корреляционной энергии (измеренные в ридбергах), следующая группа наиболее расходящихся членов дает поправки порядка r_s и $r_s \ln r_s$ и т. д. (исключая $E_2^{(b)}$).

Именно это и сделали Гелл-Манн и Бракнер, они использовали метод фейнмановских диаграмм для суммирования наиболее расходящихся членов и получили результаты (5.107) и (5.109). Они вычислили также и тот постоянный член в корреляционной энергии, который связан с обменным процессом второго порядка (5.113)

$$E_2^{(b)} = 0,046 \text{ ридберг}. \quad (5.120)$$

Исходя из этих результатов, а также соображений, приведенных выше, названные авторы смогли записать энергию основного состояния электронного газа в виде¹⁾

$$E_0 = \left\{ \frac{2,21}{r_s^2} - \frac{0,916}{r_s} + 0,062 r_s - 0,096 + \right. \\ \left. + a r_s + b r_s \ln r_s + c r_s^2 + \dots \right\} \text{ ридберг}. \quad (5.121)$$

¹⁾ Выражение (5.121) получено Гелл-Манном и Бракнером для нереалистической модели, в которой положительные ионы заменены однородным положительным зарядом. В действительности при больших сжатиях ионы образуют кристаллическую решетку, обладающую энергией связи. Это вносит существенные поправки в члены порядка $1/r_s$ и в постоянный член в (5.121). Так обстоит дело для покоящейся решетки, но в действительности кристаллическая решетка колеблется, и поэтому в основном состоянии она обладает дополнительной энергией нулевых колебаний. Соответствующий член в энергии пропорционален $\sqrt{m/M} r_s^{-3/2}$, где m/M — отношение масс электрона и иона. Порядок этого члена по r_s уступает лишь кинетической энергии и превосходит энергию связи, но он содержит малый коэффициент $\sqrt{m/M}$. Поскольку этот член положителен, то при достаточно больших сжатиях он может превзойти энергию связи решетки, что приводит к разрушению последней. В действительности для всех элементов, кроме водорода и, может быть, гелия, это такие сжатия, при которых начинаются спонтанные ядерные реакции и вся рассматриваемая модель теряет смысл. Свойства сильно сжатого вещества с учетом новов рассмотрены в статьях Абрикосова [67].

Кстати, на этом примере видно, сколь существенно отличается рассматриваемая в настоящей главе нереалистическая модель с размазанным положительным зарядом от истинного сильно сжатого вещества. — Прим, ред.

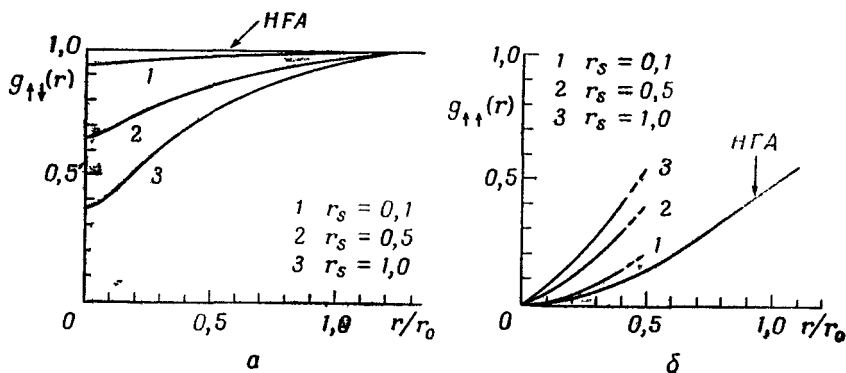
Таким образом, Гелл-Манн и Бракнер показали, что в пределе большой плотности ($r_s \ll 1$) с помощью RPA можно строго получить корреляционную энергию.

Заметим, что при больших плотностях ($r_s \ll 1$) кинетическая энергия электронов играет определяющую роль; обменная энергия Хартри — Фока является уже малой поправкой, еще меньший вклад вносит корреляционная энергия. Этот результат, вообще говоря, не вызывает удивления, так как при достаточно большой плотности взаимодействие становится сравнительно слабым и мы вправе воспользоваться развитым методом. Несколько странной может показаться форма ряда, который содержит как степени r_s , так и $\ln r_s$ (вообще возможность существования такого ряда кажется сомнительной). Как мы видели, появление логарифмических членов есть просто следствие дальнедействующего характера кулоновских сил. Позже мы вернемся к вопросу об области значений r_s , в которой такой ряд имеет смысл; здесь мы заметим, что при $r_s \ll 1$ это разложение представляется законным; вероятно, можно пользоваться им вплоть до значений r_s порядка единицы.

Мы закончим это обсуждение следующим замечанием. Связь между RPA и теорией возмущений можно установить прямо, предположив, что в (5.101) величина $(4\pi e^2/q^2)\chi^0$ является малой; тогда знаменатель можно разложить в степенной ряд [см. (5.35)]. С помощью (5.100) и (5.93) легко показать, что член, пропорциональный $\text{Im} \chi^0$, приводит к обменной энергии, а пропорциональный $\text{Im} (\chi^0)^2$ — к прямому процессу второго порядка (5.112) и т. д. Мы предлагаем читателю провести это вычисление самостоятельно (см. задачу 4).

ПАРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вычисление парной функции распределения в RPA было выполнено Гликом и Феррелом [32] и Уэда [33]. Результаты Уэда



Фиг. 39. Парная функция распределения, вычисленная в приближении хаотических фаз [33].

показаны на фиг. 39. Мы видим, что появляются вполне заметные корреляции между электронами с антипараллельными спинами, причем корреляции выражены сильнее при переходе к

большим плотностям. Так, при $r_s \approx 0,1$ значения $g(r)$ мало отличаются от полученных в приближении Хартри — Фока, тогда как при $r_s \approx 1$ отклонение становится значительным. Как показывают вычисления Уэда, электроны с параллельными спинами в приближении хаотических фаз «избегают» друг друга в несколько меньшей степени, чем в приближении Хартри — Фока; тем не менее в любом случае электроны с параллельными спинами значительно больше «сторонятся» друг друга, чем с антипараллельными. Другими словами, кинетические (связанные со спином) корреляции более важны, чем динамические (связанные с зарядом). К этому же выводу можно прийти, сравнивая обменную и корреляционную энергии при рассматриваемых значениях плотности.

Отметим в заключение, что, как нашли Глик и Феррел, при $r_s \approx 2$ функция $g_{\text{RPA}}(r)$ отрицательна при малых r . Поскольку функция $g(r)$ должна быть положительна при всех r , этот результат указывает на неприменимость RPA в этой области плотностей.

§ 4. СВОЙСТВА КВАЗИЧАСТИЦ В ПРИБЛИЖЕНИИ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

В приближении хаотических фаз квазичастица представляет собой электрон, окруженный динамическим поляризационным облаком. Как мы уже видели, экранирующее облако стремится уменьшить заряд электрона в $|\varepsilon(\mathbf{q}, \omega_e)|$ раз, где ω_e — частота, характеризующая движение электронов. Благодаря экранирующему облаку (которое можно рассматривать как «корреляционную» дырку, окружающую электрон) вполне определены теперь различные характеристики системы (удельная теплоемкость, спиновая восприимчивость и т. д.), для вычисления которых достаточно знать свойства квазичастиц. К тому же в пределе большой плотности, когда справедливо RPA, поправки к этим величинам малы, как и следовало ожидать, поскольку в этой области обменная и корреляционная энергии дают очень небольшой вклад в энергию основного состояния.

Соответствующие вычисления элементарны, хотя подчас длинны. В настоящем параграфе мы обсудим сначала простое эвристическое выражение для экранированного взаимодействия квазичастиц $f_{pp'}$. Мы найдем удельную теплоемкость, спиновую восприимчивость и сжимаемость и сравним эти результаты с полученными при использовании RPA. Мы обсудим также вычисление в рамках RPA времени жизни квазичастиц, находящихся вблизи ферми-поверхности.

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ, СПИНОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И СЖИМАЕМОСТЬ

Значение теплоемкости, восприимчивости и сжимаемости в рамках RPA можно получить, найдя сначала $f_{pp'}^{\text{RPA}}$ дифференцированием E_0^{RPA} по n_p и $n_{p'}$ и используя затем исходные формулы (5.27) — (5.29). Вместо того чтобы проводить эти длинные и не слишком поучительные вычисления, воспользуемся приближенным выражением

$$f_{p^\sigma, p'^{\sigma'}} = - \frac{4\pi e^2}{|p - p'|^2 + q_{FT}^2} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (5.122)$$

и обсудим, можно ли с его помощью получить удовлетворительное описание свойств квазичастиц. Выражение (5.122) было предложено Квином и Феррелом [34]. Оно построено по типу взаимодействия квазичастиц (5.25) в приближении Хартри — Фока с учетом экранирования посредством статической диэлектрической проницаемости (5.65), вычисленной в рамках RPA в пределе длинных волн.

Согласно (5.122), имеем

$$f^s(x) = f^a(x) = - \frac{\pi e^2}{p_F^2} \frac{1}{1 - x + 2ar_s/\pi}. \quad (5.123)$$

Подставляя (5.123) в (5.29), находим (с точностью до членов порядка r_s)

$$\frac{C}{C_0} = \frac{m^*}{m} = \frac{1}{1 + (ar_s/2\pi) [\ln(\pi/ar_s) - 2]}. \quad (5.124)$$

Результат (5.124) совпадает с вычисленным в том же приближении результатом Гелл-Манна [15]. Отметим, что благодаря диэлектрическому экранированию, учтенному в (5.122), удельная теплоемкость, а также F_0^a и F_0^s , конечны. Как и следовало ожидать по аналогии с соответствующими членами в корреляционной энергии, поправки к значению для свободных частиц имеют порядок r_s и $r_s \ln r_s$. Можно видеть, что величина $(\pi e^2/p_F^2) N^0(0)$ имеет порядок r_s , так что все поправки по крайней мере порядка r_s .

Подставляя (5.123) в (5.27) и (5.28), найдем сжимаемость (или скорость звука) и спиновую восприимчивость:

$$\frac{\kappa_0}{\kappa} = \frac{s^2}{s_0^2} = \frac{\chi_P^0}{\chi_P} = 1 - \frac{ar_s}{\pi} - \frac{a^2 r_s^2}{\pi^2} \ln r_s + \dots \quad (5.125)$$

Результат (5.125) справедлив только с точностью до членов порядка r_s и фактически соответствует результату (5.31), полу-

ченному в приближении Хартри — Фока. Непосредственно это можно видеть на примере сжимаемости (или скорости звука), поскольку для определения этой величины достаточно знать энергию основного состояния (5.109). Мы имеем

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \varepsilon(\rho) + \rho \frac{\partial \varepsilon(\rho)}{\partial \rho}, \quad (5.126)$$

$$\frac{ms^2}{N} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon(\rho)}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial \varepsilon(\rho)}{\partial \rho}, \quad (5.127)$$

где $\varepsilon(\rho)$ — энергия основного состояния, отнесенная к одной частице. Используя связь между ρ и r_s , легко найти

$$\frac{\kappa_0}{\kappa} = \frac{s^2}{s_0^2} = \frac{\alpha^2 r_s^4}{6} \frac{\partial^2 \varepsilon(r_s)}{\partial r_s^2} - \frac{\alpha^2 r_s^3}{3} \frac{\partial \varepsilon(r_s)}{\partial r_s}. \quad (5.128)$$

Подставляя (5.109) в (5.128), получаем

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{RPA}}} = \frac{s_{\text{RPA}}^2}{s_0^2} = 1 - \frac{\alpha r_s}{\pi} - \frac{\alpha^2 r_s^2}{\pi^2} (1 - \ln 2) \ln r_s. \quad (5.129)$$

Теперь ясно, что при использовании RPA появляются поправки к приближенному выражению (5.122) для $f_{pp'}$, вследствие чего коэффициент перед $\ln r_s$ равен не $-\alpha^2 r_s^2 / \pi^2$, а $-(\alpha^2 r_s^2 / \pi^2) \times (1 - \ln 2)$.

Анализ полного выражения для $f_{pp'}^{\text{RPA}}$ показывает, что при использовании (5.122) не учитываются экранированные прямые процессы рассеяния второго порядка, и что именно они ответственны за дополнительные члены порядка $r_s^2 \ln r_s$ в сжимаемости. Поскольку они приводят к эффективному взаимодействию квазичастиц с противоположными спинами, оказывается, что электронное взаимодействие по-разному влияет на спиновую восприимчивость и на сжимаемость. Вычисление χ в рамках RPA было выполнено Бракнером и Савадой [35]. Они нашли

$$\frac{\chi_P^0}{\chi_P^{\text{RPA}}} = 1 - \frac{\alpha r_s}{\pi} - \frac{\alpha^2 r_s^2}{2\pi^2} \ln r_s + \dots \quad (5.130)$$

ВРЕМЯ ЖИЗНИ ВОЗБУЖДЕННЫХ КВАЗИЧАСТИЦ

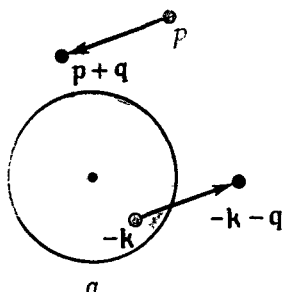
Рассмотрим квазичастицу, лежащую вне ферми-поверхности. Она не может оставаться в этом состоянии неопределенно долго, а будет рассеиваться на квазичастицах, находящихся внутри ферми-поверхности, поскольку такой процесс приводит к уменьшению энергии. Поэтому рассматриваемое электронное состояние обладает конечным временем жизни. Те же соображения применимы и к дырке, находящейся внутри ферми-поверхности. С точки зрения теории поля время жизни определяется мнимой частью собственной энергии квазичастицы. Именно этим способом Квинн и Феррел [36] впервые вычислили

время жизни в рамках РРА. Однако этот результат можно получить и более простым способом [37], которым мы и воспользуемся.

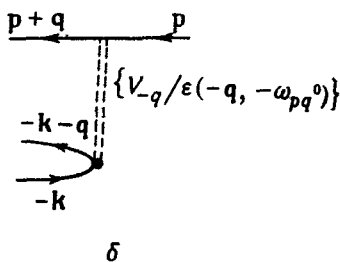
Как мы видели, физическое содержание РРА заключается в том, что данный электрон окружен соответствующим поляризационным облаком. Следовательно, можно считать, что в процессе, при котором электрон с импульсом p ($p > p_F$) переходит в некоторое другое состояние $p+q$, отличающееся по энергии на величину

$$-\omega_{pq}^0 = \varepsilon_p^0 - \varepsilon_{p+q}^0,$$

имеет место динамическое экранирование, причем взаимодействие уменьшается в $\varepsilon(-q, -\omega_{pq}^0)$ раз, как показано на фиг. 40. Мы можем вычислить



а



б

Фиг. 40. Рассеяние возбужденной квазичастицы на невозбужденных частицах.

а — частица с импульсом p переходит в состояние $p+q$; при этом происходит рождение электронно-дырочной пары $(-k-q, -k)$; б — диаграммное представление такого процесса.

время жизни, используя обычную теорию возмущений второго порядка. Тогда находим

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi \sum'_{\mathbf{q}\mathbf{k}\sigma} \frac{|V_{\mathbf{q}}|^2}{|\varepsilon(-\mathbf{q}, \omega_{pq}^0)|^2} n_{\mathbf{k}\sigma}^0 (1 - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^0) \delta[\omega_{pq}^0 + \omega_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^0], \quad (5.131)$$

где штрих у знака суммы означает, что переданный импульс удовлетворяет условию

$$p_F^2 < |p+q|^2 < p^2. \quad (5.132)$$

[Это следует из того, что конечное состояние $p+q$ должно лежать вне ферми-поверхности, а энергия электрона уменьшается при рассеянии его на частицах основного состояния ($\omega_{pq}^0 < 0$).]

Используя выражение (5.33) и изменяя обозначение индексов, находим для времени жизни

$$\frac{1}{\tau} = \sum'_{\mathbf{q}} \frac{8\pi e^2}{q^2} \frac{\text{Im} \varepsilon(-\mathbf{q}, -\omega_{pq}^0)}{|\varepsilon(-\mathbf{q}, -\omega_{pq}^0)|^2} = - \sum'_{\mathbf{q}} \frac{8\pi e^2}{q^2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega_{pq}^0)}; \quad (5.133)$$

этот результат и был получен Квином и Феррелом.

Если рассматриваемая квазичастица находится вблизи ферми-поверхности, то выражение (5.133) можно значительно упростить. При этом условии в (5.133) входят только низкочастотные возбуждения. Используя (5.63), можно написать (заменяя сумму интегралом и вводя полярные координаты с осью вдоль p)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \sum'_{\mathbf{q}} \left(\frac{4\pi^2 e^2}{q^4} \right) q_{FT}^2 \left(\frac{\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0}{qv_F^0} \right) \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{q}, 0)|^2} = \\ &= e^2 q_{FT}^2 \int_0^{2p_F} \frac{dq}{q^3 v_F^0 |\varepsilon(\mathbf{q}, 0)|^2} \int dx \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0(x). \end{aligned} \quad (5.134a)$$

В силу условия (5.132) переданный импульс не может превышать $2p_F$. Это условие ограничивает также и область полярных углов $x = \cos \theta$, что обозначено перечеркнутым символом интеграла. Последнее ограничение легко учесть, если перейти от x к новой переменной

$$\omega = \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0(x) = \frac{pqx}{m} + \frac{q^2}{2m}.$$

Тогда находим

$$\int dx \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0(x) = \int_0^{\varepsilon_p^0 - \mu^0} \frac{d\omega}{qv_F^0} \omega = \frac{(\varepsilon_p^0 - \mu^0)^2}{2qv_F^0}.$$

Подставляя этот результат в (5.134a), получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{e^2 q_{FT}^2 (\varepsilon_p^0 - \mu^0)^2}{2(v_F^0)^2} \int_0^{2p_F} \frac{dp}{|\varepsilon(\mathbf{q}, 0)|^2 q^4}. \quad (5.134b)$$

Если не учитывать экранирование, то последний интеграл, как показали Квин и Феррел, расходится. При учете экранирования интеграл сходится и в пределе большой плотности ($r_s \ll 1$) равен

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{128} \omega_p \left(\frac{\varepsilon_p^0 - \mu^0}{\mu^0} \right)^2. \quad (5.134b)$$

Это выражение для времени жизни справедливо, когда квазичастица находится в непосредственной близости от ферми-поверхности. Заметим, что зависимость времени жизни от $(\varepsilon_p^0 - \mu^0)^2$, как мы видели раньше, определяется тем, что принцип Паули ограничивает число разрешенных состояний. Результат (5.134b), полученный в рамках РПА, является частным случаем более общей формулы (1.163), найденной ранее для времени жизни квазичастицы вблизи ферми-поверхности.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ОБОБЩЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Прежде чем переходить к приближенным теориям электронной жидкости с характерными для металлов значениями плотности, мы попытаемся с более общей точки зрения рассмотреть вопрос о приближении хаотических фаз. Как микроскопическое приближение РРА довольно понятно, но оно является, конечно, лишь одним из многих возможных приближенных методов. Из числа этих методов наиболее известны два: использование фейнмановских диаграмм и приближенное решение системы зацепляющихся уравнений для многочастичных функций Грина. Однако в настоящем параграфе мы рассмотрим другой способ, близко примыкающий к последнему методу и сводящийся к приближенному решению зацепляющихся *уравнений движения* для соответствующих операторов в гейзенберговском представлении. Этот метод, который мы будем называть методом *уравнений движения*, удобен в том отношении, что с его помощью можно непосредственно получить многие простые микроскопические приближения (приближение Хартри — Фока, приближение хаотических фаз, теорию сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера), почти не прибегая к дополнительным математическим определениям, теоремам и усложнениям.

В методе уравнений движения для определения спектра элементарных возбуждений и энергии основного состояния системы многих частиц находят сначала приближенное самосогласованное решение различных зацепляющихся уравнений движения для гейзенберговских операторов [9, 17, 38, 39]. При этом поступают следующим образом [40]:

1) Предполагают, что волновая функция Ψ_0 основного состояния известна.

2) Находят операторы рождения и уничтожения элементарных возбуждений в системе O_q^+ и O_q , требуя, чтобы они удовлетворяли осцилляторным уравнениям движения

$$(H, O_q^+) = \omega_q O_q^+, \quad (H, O_q) = -\omega_q O_q. \quad (5.135)$$

3) При действии O_q^+ на Ψ_0 рождается возбуждение с энергией ω_q . Точно так же должно выполняться равенство

$$O_q \Psi_0 = 0,$$

если Ψ_0 — волновая функция основного состояния. Последнее условие используется для определения Ψ_0 .

4) Определив ω_q и Ψ_0 , можно различными способами найти другие характеристики системы (энергию основного состояния и др.).

В настоящем параграфе мы не используем всех возможностей, которые открывает метод уравнений движения при определении энергии основного состояния. Мы ограничимся тем, что найдем разрешенные частоты возбуждений и выясним общие свойства соответствующих решений. В качестве примера мы рассмотрим одночастичные возбуждения и снова выведем приближения Хартри и Хартри — Фока. Затем мы рассмотрим электронно-дырочные возбуждения, используя метод для того, чтобы снова в приближениях Хартри—Фока и хаотических фаз получить спектр возбуждений, связанных с флуктуациями плотности. Далее будет рассмотрено простое обобщение решения, полученного в рамках РРА для электронно-дырочных пар. Мы используем это обобщение как основу для обсуждения возможных микроскопических неустойчивостей в фермионных системах, обращая особое внимание на связь с теорией Ландау. В заключение обсуждаются пределы применимости РРА к электронной жидкости.

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ХАРТРИ И ХАРТРИ — ФОКА

Рассмотрим движение одной частицы, характеризуемой оператором рождения $c_{p\sigma}^+$. Используя гамильтониан (5.1), легко найти, что

$$[H, c_{p\sigma}^+] = \epsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ + \sum_{p'q\sigma'} V_{q} c_{p'+q, \sigma}^+ c_{p'-q, \sigma'} c_{p'\sigma'}^- \quad (5.136)$$

Согласно (5.136) движение одной частицы (p, σ) связано с движением двух частиц и дырки. Далее мы могли бы записать уравнение движения для произведения $c^+ c^+ c$ и найти, что оно связано с конфигурацией из трех частиц и двух дырок и т. д. Этот ряд зацепляющихся уравнений движения представляет собой просто другой способ записи уравнения Шредингера. Эти уравнения, разумеется, слишком сложны, чтобы решать их явно, поэтому цепочку обрывают на некотором этапе, а затем исследуют самосогласованность найденного приближенного решения.

Очевидно, простейшее приближение заключается в рассмотрении только одного уравнения (5.136). Так как мы хотим, чтобы оператор $c_{p\sigma}^+$ удовлетворял осцилляторному уравнению движения типа (5.135), мы должны упростить член с произведением трех операторов в правой части (5.136). Очевидное упрощение сводится к тому, что мы удерживаем только одно слагаемое с $q=0$ в сумме и заменяем произведение $c_{p'\sigma'}^+ c_{p'\sigma'}$ его средним значением по основному состоянию. Тогда уравнение (5.136) становится *линейным*:

$$[H, c_{p\sigma}^+] = \epsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ \quad (5.137)$$

а ϵ_p определяется выражением

$$\epsilon_p = \epsilon_p^0 + V_0 \sum_{p'\sigma'} n_{p'\sigma'}^0 \quad (5.138)$$

Согласно (5.138) оператор $c_{p\sigma}^+$ приводит к появлению элементарного возбуждения с энергией ϵ_p . Очевидно, что (5.138) эквивалентно приближению Хартри для энергии квазичастицы.

Мы можем пойти дальше и попытаться *последовательно* линеаризовать уравнение (5.136). Для этого мы должны сделать следующую замену:

$$c_1^+ c_2^+ c_3^+ \rightarrow c_1^+ \langle c_2^+ c_3^+ \rangle - c_2^+ \langle c_1^+ c_3^+ \rangle.$$

В этом приближении уравнение движения (5.136) снова принимает вид (5.137), но теперь энергия ϵ_p описывается выражением

$$\epsilon_p = \epsilon_p^0 + \sum_{p'\sigma'} n_{p'\sigma'} [V_0 - V_{p-p'} \delta_{\sigma\sigma'}]. \quad (5.139)$$

Сравнивая (5.139) с (5.23), видим, что путем последовательной линеаризации уравнения (5.136) мы непосредственно получаем спектр квазичастиц для однородной системы в приближении Хартри — Фока.

ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ — ФОКА И ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Используем метод уравнений движения для определения спектра возбуждений, связанных с флуктуациями плотности, в произвольной фермионной системе. Рассмотрим уравнение движения электронно-дырочной пары с импульсом q :

$$\rho_{pq\sigma}^+ = c_{p+q, \sigma}^+ c_{p, \sigma}$$

Оно определяется гамильтонианом системы (5.1) и имеет вид

$$\begin{aligned} [H, \rho_{pq\sigma}^+] = & \omega_{pq}^0 \rho_{pq\sigma}^+ - \sum_k \frac{V_k}{2} \{ (c_{p+q, \sigma}^+ c_{p+k, \sigma} - c_{p+q-k, \sigma}^+ c_{p, \sigma}) \rho_k^+ + \\ & + \rho_k^+ (c_{p+q, \sigma}^+ c_{p+k, \sigma} - c_{p+q-k, \sigma}^+ c_{p, \sigma}) \}. \quad (5.140) \end{aligned}$$

Мы видим, что в уравнении (5.140) однопарное возбуждение связано с двухпарным. Если записать уравнение движения для двухпарного возбуждения, то окажется, что оно связано как с однопарным, так и с трехпарным возбуждением и т. д. Эту систему уравнений также нельзя решить точно.

Однако общий вид решения ясен. Предположим, что мы хотим найти оператор ξ_q^+ , который описывает элементарное возбуждение, вносящее вклад в спектр флуктуаций плотности. Оператор ξ_q^+ должен удовлетворять осцилляторному уравнению движения:

$$(H, \xi_q^+) = \omega \xi_q^+. \quad (5.141)$$

Если такой оператор существует, он должен быть линейной комбинацией однопарных возбуждений, двухпарных возбуждений, и т. д. (каждый член соответствует возбуждению с полным импульсом q)

$$\begin{aligned} \xi_q^+ = & \sum_p A(p, q, \omega) c_{p+q}^+ c_p + \\ & + \sum_{pp'} B(p, p', p'', q, \omega) c_{p+p'+q-p}^+ c_{p'}^+ c_{p''} c_p + \dots, \end{aligned} \quad (5.142)$$

здесь мы для краткости опустили спиновый индекс (который можно вместе с импульсом обозначать одной буквой p). Коэффициенты A , B и т. д. и энергию возбуждения ω можно получить, решая в некотором приближении уравнение на собственные значения (5.141).

Первое приближение, мы, очевидно, получим, если пренебрежем взаимодействием частиц. В этом случае из (5.142) и (5.140) находим

$$\sum_p A(p, q, \omega) (\omega - \omega_{pq}^0) c_{p+q}^+ c_p = 0. \quad (5.143)$$

Коэффициент перед каждой парой операторов $c_{p+q}^+ c_p$ должен обращаться в нуль, и мы приходим к следующему уравнению для коэффициента $A(p, q, \omega)$:

$$(\omega - \omega_{pq}^0) A(p, q, \omega) = 0,$$

которое имеет решение

$$\omega = \omega_{pq}^0, \quad (5.144a)$$

$$A(p, q, \omega) = c(q, \omega) \delta(\omega - \omega_{pq}^0). \quad (5.144b)$$

Разрешенные частоты соответствуют распространению свободной электронно-дырочной пары; решение (5.144) зацепляющихся уравнений имеет вид, типичный для задачи о рассеянии, о чем свидетельствует δ -функция в (5.144b). Таким образом, мы получили еще одним способом спектр парных возбуждений в приближении Хартри — Фока.

Рассмотрим теперь решение уравнений (5.141) и (5.142), соответствующее RPA. В этом случае мы сохраняем только один член с $\mathbf{k}=\mathbf{q}$ в правой части (5.140) и заменяем операторы в скобках их средним значением по основному состоянию системы невзаимодействующих частиц. Тогда уравнение (5.140) принимает вид

$$[H, c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+, c_{\mathbf{p}, \sigma}^-]_{\text{RPA}} - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \sigma}^+ c_{\mathbf{p}, \sigma}^- = -V_{\mathbf{q}}(n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{p}}^0) \rho_{\mathbf{q}}^+. \quad (5.145)$$

Мы видим, что удержанная часть взаимодействия играет роль силы, действующей на движущуюся электронно-дырочную пару. Мы можем рассматривать ее как среднее поле сил, образованное всеми электронно-дырочными парами системы. Это поле, которое в свою очередь приводит к возбуждению пар, следует определить самосогласованным образом. При таком подходе RPA можно рассматривать как *зависящее от времени приближение Хартри*, в котором взаимодействие частиц приводит только к образованию среднего самосогласованного зависящего от времени поля с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω . Члены, которыми мы пренебрегали, соответствуют флуктуациям поля около этого среднего значения и предполагаются малыми.

Теперь воспользуемся уравнением (5.145) для определения формы оператора $\xi_{\mathbf{q}}$. Поскольку уравнение (5.145) линейно по электронно-дырочным операторам, в (5.142) мы должны удерживать только члены с коэффициентом $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$. Подставим (5.142) в (5.141) и используем (5.145). Полагая равным нулю коэффициент перед каждым оператором пары $c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{p}}$, мы найдем следующее уравнение для $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$:

$$[\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0] A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) + V_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{p}'} (n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{p}'}^0) A(\mathbf{p}', \mathbf{q}, \omega) = 0. \quad (5.146)$$

Линейное уравнение (5.146) имеет собственные решения двух типов.

1. «Рассеивательные» решения, когда $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ имеет пик при определенном значении \mathbf{p} . Такие решения соответствуют некогерентным однопарным возбуждениям. С точностью до членов порядка $1/N$ они совпадают с решениями, полученными в приближении Хартри — Фока.

2. «Коллективные» решения с частотой $\omega_{\mathbf{q}}$, когда $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ является гладкой функцией \mathbf{p} . Чтобы получить коллективные решения, заметим, что второй член в левой части уравнения (5.146) не зависит от \mathbf{p} . Тогда коэффициент $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ должен иметь вид

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \frac{A'(\mathbf{q}, \omega)}{\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0}. \quad (5.147)$$

Используя этот результат, мы видим, что уравнение (5.146) имеет решение только в том случае, если

$$1 = V_q \sum_p \frac{n_p^0 - n_{p+q}^0}{\omega_q - \omega_{pq}^0}. \quad (5.148)$$

Это известное дисперсионное уравнение для коллективных мод системы взаимодействующих фермионов в RPA.

В случае отталкивательного взаимодействия ($V_q > 0$) коллективные моды будут хорошо определенными возбуждениями при условии

$$\omega_q > \omega_{pq}^0. \quad (5.149)$$

(Тогда энергия коллективной моды не попадает в интервал энергий электронно-дырочных пар) Если это условие не выполнено, дисперсионное уравнение (5.148) становится неопределенным. Чтобы устранить сингулярности при

$$\omega_q = \omega_{pq}^0,$$

мы можем ввести внешнюю силу в уравнение движения (5.145) и потребовать, чтобы реакция системы удовлетворяла требованию причинности [см. (5.41)]. Требование причинности будет выполнено, если всюду произвести замену

$$\omega \rightarrow \omega + i\eta,$$

где η — бесконечно малая положительная величина. Тогда дисперсионное уравнение (5.148) принимает вид

$$1 = V_q \sum_p \frac{n_p^0 - n_{p+q}^0}{\omega_q - \omega_{pq}^0 + i\eta}. \quad (5.150)$$

Уравнению (5.150) удовлетворяют комплексные ω_q , которым соответствуют затухающие коллективные моды.

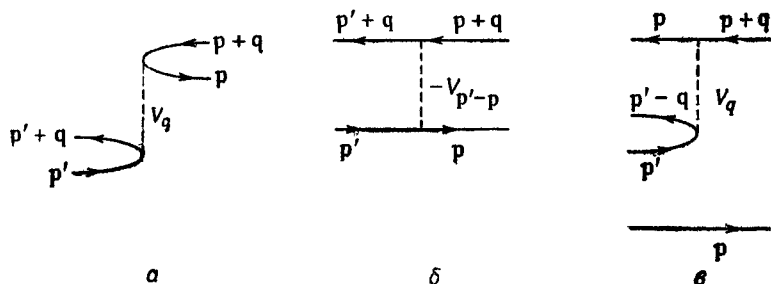
Можно спросить, какая связь между квазичастицами, приводящая к коллективным модам, учитывается при использовании RPA. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим рассеяние частицы и дырки с полным импульсом q , описываемое взаимодействием

$$V = \sum_{pp', q, \sigma\sigma'} \frac{V_q}{2} c_{p, \sigma}^+ c_{p'+q, \sigma'}^+ \cdot c_{p', \sigma'} c_{p+q, \sigma} \quad (5.151)$$

Предположим, что вначале имеется частица с импульсом $p+q$, спином σ и дырка в состоянии pp' . Взаимодействие (5.151) мо-

жет вызывать три различных процесса, схематически показанных на фиг. 41

1. Частица может просто занять место дырки внутри ферми-поверхности. Соответствующий матричный элемент равен V_q . Этот процесс аннигиляции пары сопровождается рождением другой электронно-дырочной пары $(p'+q, \sigma')$ и $(p'\sigma')$. Новое значение спина σ' может быть любым.



Фиг. 41. Процессы рассеяния электронно-дырочной пары: аннигиляция и рождение пары (прямое рассеяние) (а), обменное рассеяние (б); рассеяние частицы с возбуждением пары из основного состояния (в).

Сплошные линии со стрелками, указывающими влево, соответствуют электронам, со стрелками, указывающими вправо, — дыркам, пунктирными линиями изображен матричный элемент рассеяния.

2. Частица из состояния $(p+q, \sigma)$ может перейти в состояние $(p'+q, \sigma)$, а дырка $(p\sigma)$ — в состояние $(p'\sigma)$. Матричный элемент для этого процесса рассеяния равен $-V_{p'-p}$; новая электронно-дырочная пара должна иметь тот же спин σ , что и первоначальная пара

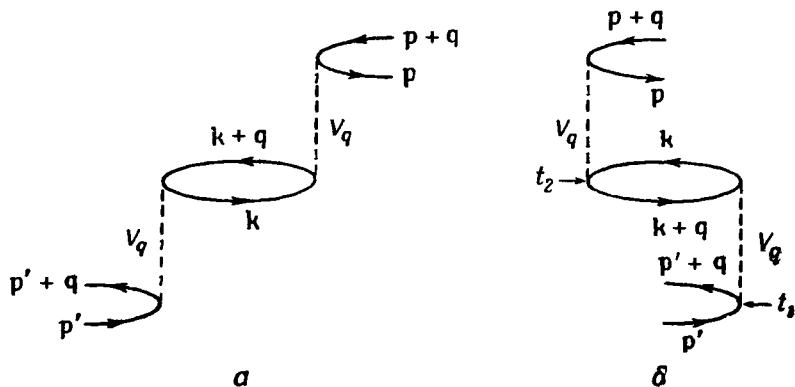
3. Наконец, частица или дырка могут рассеиваться на частицах основного состояния. При этом возбуждаются новые электронно-дырочные пары.

В РРА учитываются только процессы первого типа (аннигиляция и прямое рассеяние). При процессах второго типа, которые соответствуют обменному рассеянию пары, переданный импульс не равен q , поэтому они исключаются. Наконец, при линеаризации уравнения движения (5.140) мы автоматически пренебрегаем процессами третьего типа.

С другой стороны, в РРА учитываются все процессы первого типа, при которых передается импульс q . [Суммирование ряда выполняется автоматически, когда получают самосогласованное решение с учетом (5.145)] Говоря другими словами, РРА дает описание процесса множественного рассеяния электронно-дырочной пары как совокупности процессов аннигиляции и рождения.

Отметим, что такое рассеяние может происходить и «вперед», и «назад» во времени, как показано на фиг. 42.

По смыслу сказанного совокупность индивидуальных возбуждений соответствует «рассеивательным» решениям задачи о множественном рассеянии электронно-дырочной пары, тогда как коллективные моды описываются решениями типа «связанных состояний». Как обычно, спектр связанных состояний дискретен. Мы вернемся к этой интерпретации коллективных мод в другой нашей книге при обсуждении сверхпроводимости.



Фиг. 42. Множественное рассеяние, учитываемое в приближении хаотических фаз.

Более поздние события изображаются слева от более ранних; *a* — процесс, происходящий при обычном ходе времени; *b* — процесс, которому соответствует обратный ход времени (в момент t_2 пара с полным импульсом q аннигилирует с парой, которая имеет полный импульс $-q$ и родилась в более ранний момент времени t_1 вместе с другой парой q).

Следует подчеркнуть, что RPA — это существенно «операторное» приближение, которым одинаково легко пользоваться как при $T=0$, так и при конечных температурах. При конечных температурах единственное изменение состоит в том, что в (5.140) операторы в круглых скобках заменяются функцией распределения в соответствии с соотношением

$$c_{p+q}^+ c_{p+k} - c_{p+q-k}^+ c_p \rightarrow [n_{p+q}^0(T) - n_p^0(T)] \delta_{q,k}, \quad (5.152)$$

где $n_p^0(T)$ — невозмущенная функция распределения системы при температуре T . Для электронного газа при конечных температурах уравнение, аналогичное уравнению (5.150), в классическом пределе сводится к закону дисперсии продольных плазменных колебаний в классической плазме¹⁾.

¹⁾ Относительно обсуждения свойств плазмы при конечных температурах в рамках изложенного здесь метода см., например, статью Пайнса [41] и цитированную в ней литературу.

ОБОБЩЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Выше мы видели, что в RPA принимаются следующие два допущения:

1) уравнение движения (5.140) *линеаризуется*, поэтому в разложении (5.142) для ξ_q^+ остается лишь однопарный коэффициент $A(p, q, \omega)$;

2) *обменное* рассеяние электронно-дырочных пар не учитывается (опущенные члены связаны с отличными от q передачами импульса).

Основное упрощение достигается благодаря линеаризации. Действительно, если мы ищем *наиболее общее* самосогласованное линейное решение уравнений (5.141) и (5.142), мы автоматически учитываем и обменное рассеяние возбужденных пар. В качестве упражнения предоставляем читателю показать, что если последовательно собрать все билинейные члены в правой части уравнения (5.140), то мы получим

$$[H, \rho_{pq\sigma}^+] \approx \left\{ \omega_{pq}^0 + \sum_k n_{k\sigma}^0 (V_{k-p} - V_{k-p-q}) \right\} \rho_{pq\sigma}^+ - \sum_{k\sigma'} (V_q - V_{k-p} \delta_{\sigma\sigma'}) (n_{p+q, \sigma}^0 - n_{p, \sigma}^0) c_{k+q, \sigma'}^+ c_{k, \sigma'}. \quad (5.153)$$

Более общее приближение, использующее соотношение (5.153), известно под названием обобщенного, или расширенного, приближения хаотических фаз.

Решение уравнений движения в обобщенном приближении хаотических фаз отличается от решений в рамках RPA по двум причинам. Во-первых, изменяются «рассеивательные» решения; свободные электронно-дырочные возбуждения теперь имеют частоту

$$\omega = \omega_{pq} = \omega_{pq}^0 + \sum_k n_{k\sigma}^0 (V_{k-p} - V_{k-p-q}) = \epsilon_{p+q, \sigma}^{\text{HFA}} - \epsilon_{p, \sigma}^{\text{HFA}} \quad (5.154)$$

[см. (5.23)]: энергия электронно-дырочной пары совпадает с вычисленной в приближении Хартри — Фока. Во-вторых, изменяется характер силового слагаемого.

Природу обобщенного приближения хаотических фаз легче всего понять на примере осцилляторного решения уравнения (5.153), соответствующего частоте ω . Беря среднее значение от обеих сторон уравнения и переходя к длинноволновому пределу, мы получаем

$$\left\{ \omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p^0 + \mathbf{q} \cdot \nabla_p \sum_k n_{k\sigma}^0 V_{k-p} \right\} \delta n_{p\sigma}(\mathbf{q}, \omega) + \mathbf{q} \cdot \nabla_p n_p^0 \sum_{k\sigma'} (V_0 - V_{k-p} \delta_{\sigma\sigma'}) \delta n_{k\sigma'}(\mathbf{q}, \omega) = 0. \quad (5.155)$$

Здесь мы использовали соотношения (5.48), (5.50a) и (5.50б). Сравнение с основным кинетическим уравнением Ландау (1.103)

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p) \delta n_{p\sigma} + \mathbf{q} \cdot \nabla_p n_p^0 \sum_{p', \sigma'} f_{p\sigma, p', \sigma'} \delta n_{p', \sigma'} = 0$$

показывает, что для нейтральной ферми-системы обобщенное приближение хаотических фаз сводится к кинетическому уравнению, в котором энергия квазичастиц и взаимодействие описываются в приближении Хартри — Фока

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p\sigma} &= \varepsilon_{p\sigma}^0 - \sum_{p'} n_{p', \sigma}^0 V_{p' - p} + N V_0, \\ f_{p\sigma, p', \sigma'} &= V_0 - V_{p' - p} \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned}$$

Если RPA соответствует зависящему от времени приближению Хартри, то обобщенное приближение хаотических фаз соответствует зависящему от времени приближению Хартри — Фока.

Для нейтральной системы обобщенное приближение хаотических фаз дает описание спектра флуктуаций плотности, которое, по-видимому, справедливо в пределе слабой связи, поскольку для длинных волн оно приводит к кинетическому уравнению теории Ландау со значениями ε_p и $f_{pp'}$, получающимися в первом порядке по взаимодействию (т. е. в приближении Хартри — Фока). С помощью (5.24) находим

$$F_i^s = N^0(0) \{2V_0 \delta_{i,0} - \langle V_{p' - p} \rangle_i\}, \quad (5.156a)$$

$$F_i^a = -N^0(0) \langle V_{p' - p} \rangle_i. \quad (5.156b)$$

Используя эти выражения, мы можем непосредственно применить результаты гл. 1 для изучения различных длинноволновых коллективных мод, критерия устойчивости и т. д. в обобщенном приближении хаотических фаз. Кроме того, в тех случаях, когда это приближение справедливо, оно позволяет получить соответствующее микроскопическое обобщение теории Ландау на случай больших \mathbf{q} и ω [на основе уравнения (5.153)]. Подобным образом можно обсуждать затухание Ландау коллективных мод при конечных \mathbf{q} , микроскопические неустойчивости и т. д.

Для примера рассмотрим нулевой звук в системе с δ -образным потенциалом $V(\mathbf{r})$

$$V(\mathbf{r}) = V \delta(\mathbf{r}), \quad (5.157a)$$

когда

$$F_0^s = N^0(0) V. \quad (5.157b)$$

Введем $\rho_{pq}^s = (\rho_{pq\sigma} + \rho_{pq-\sigma})/2$ и заметим, что симметричную по спину часть общего уравнения (5.153) можно записать в виде

$$[H, (\rho_{pq}^+)^s] = \omega_{pq}^0 (\rho_{pq}^+)^s - \frac{V}{2} (n_{p+q, \sigma}^0 - n_{p, \sigma}^0) \rho_q^+. \quad (5.158)$$

Сравнивая (5.158) с (5.145), мы видим, что в этом частном случае обобщенное приближение хаотических фаз сводится к RPA с эффективным взаимодействием $V_q = V/2$. Поэтому закон дисперсии нулевого звука принимает вид [см. (5.150)]

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{n_{\mathbf{p}}^0 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0}{\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta}. \quad (5.159)$$

Суммируя по \mathbf{p} , находим

$$1 = \frac{N^0(0)V}{2} \left\{ -1 + \frac{p_F}{2q} \left(\left[\frac{(\omega_q - q^2/2m)^2}{(qv_F^0)^2} - 1 \right] \times \right. \right. \\ \times \ln \left| \frac{\omega_q - qv_F^0 - q^2/2m}{\omega_q + qv_F^0 - q^2/2m} \right| + \left. \left[\frac{(\omega_q + q^2/2m)^2}{(qv_F^0)^2} - 1 \right] \times \right. \\ \left. \left. \times \ln \left| \frac{\omega_q + qv_F^0 + q^2/2m}{\omega_q - qv_F^0 + q^2/2m} \right| \right) \right\}, \quad (5.160)$$

при условии, что коллективные моды хорошо определены ($\omega_q > qv_F^0 + q^2/2m$). Читатель может убедиться, что в пределе длинных волн уравнение (5.160) сводится к дисперсионному уравнению Ландау (1.1286)

$$\frac{\omega_q}{qv_F^0} \ln \left| \frac{\omega_q + qv_F^0}{\omega_q - qv_F^0} \right| = 2 + \frac{2}{N^0(0)V}. \quad (5.161)$$

В пределе слабой связи

$$N^0(0)V \ll 1, \quad (5.162)$$

уравнение (5.161) имеет следующее решение:

$$\omega_q = qv_F^0 \left\{ 1 + \frac{2}{e^2} \exp \left(-\frac{2}{N^0(0)V} \right) \right\} \quad (5.163)$$

(где e — основание натуральных логарифмов).

Затухание Ландау появляется, когда спектр коллективной моды перекрывается со спектром парных возбуждений. Это происходит в том случае, когда волновой вектор q_c удовлетворяет условию

$$\omega_{q_c} = q_c v_F^0 + \frac{q_c^2}{2m}. \quad (5.164)$$

Нетрудно решить уравнение (5.164) и найти q_c . В пределе слабой связи получаем

$$q_c = \frac{2}{e} p_F \exp \left[-\frac{2}{N^0(0)V} \right]. \quad (5.165)$$

Из (5.163) и (5.165) видно, что в случае слабой связи в пределе длинных волн нулевой звук лежит выше спектра парных возбуждений и что он затухает при волновом векторе q_c , который очень мал по сравнению с p_F . Ситуация заметно отличается от той, которая существует при кулоновском взаимодействии. Причина этого отличия лежит в дальнедействующем характере кулоновских сил.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

В пределе длинных волн устойчивость основного состояния относительно спонтанного нарастания коллективной моды обеспечивается условиями (1.141). Чтобы написать условия устойчивости в обобщенном приближении хаотических фаз, воспользуемся соотношениями (5.156). Тогда получаем

$$\begin{aligned} 1 + N^0(0) [2V_0 - \langle V_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} \rangle_0] &> 0, \\ 1 - N^0(0) \frac{\langle V_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} \rangle_l}{2l+1} &> 0. \end{aligned} \quad (5.166)$$

Если не выполнено одно из этих условий, то соответствующая коллективная мода экспоненциально нарастает. Состояние $|\Phi_0\rangle$, которое мы считали основным состоянием системы, спонтанно переходит в другое состояние с более низкой энергией, характеризующееся постоянной флуктуацией той величины, с которой связана неустойчивая коллективная мода. Например, неустойчивая спиновая волна приводит к постоянным флуктуациям спиновой плотности, т. е. к *ферромагнитному* состоянию.

Обобщенное приближение хаотических фаз интересно в том отношении, что оно дает некоторую аппроксимацию разработанной Ландау точной теории макроскопических неустойчивостей. Однако главное достоинство этого приближения заключается в том, что оно может быть использовано и при обсуждении *микроскопических* неустойчивостей, характеризующихся коллективной модой, которая начинает нарастать при некотором конечном q . Как и в длинноволновом пределе, порог неустойчивости соответствует обращению в нуль частоты, являющейся решением дисперсионного уравнения для рассматриваемой коллективной моды. Условия устойчивости зависят теперь от волнового вектора q . Если менять величину взаимодействия, то неустойчивость впервые появляется при некотором значении q . Это значение определяет структуру нового равновесного состояния. В качестве примера можно назвать «гигантскую спиновую волну», рассмотренную Оверхаузером [42, 43], когда неустойчивость указывает на переход в упорядоченное состояние, характеризующееся спиральным расположением спинов.

Обобщенное приближение хаотических фаз можно использовать также при изучении неустойчивостей при конечных температурах T , если сделать подстановку (5.152). Оказывается, что повышение температуры всегда уменьшает тенденцию к возникновению неустойчивости. Выше некоторой критической температуры T_c неустойчивость вообще не может возникнуть. Выше T_c «нормальное» состояние, характеризующееся распределением $n_{\mathbf{p}}^0$, устойчиво; при T_c происходит *фазовый переход второго рода* из

«нормального» состояния в иное низкотемпературное состояние. Ниже T_c устойчиво последнее состояние. Обобщенное приближение хаотических фаз позволяет оценить температуру перехода T_c (например, точку Кюри при ферромагнитном переходе).

Мы не будем подробно описывать результаты этих исследований¹⁾, а рассмотрим только в качестве примера простой случай длинноволновой ($q \rightarrow 0$) спиновой неустойчивости в системе с δ -образным взаимодействием (5.157а). Введем оператор $\rho_{pq}^a = \rho_{pq\sigma} - \rho_{pq-\sigma}$ и заметим, что антисимметричная по спину часть общего уравнения (5.153) имеет вид

$$[H, (\rho_{pq}^+)^a] = \omega_{pq}^0 (\rho_{pq}^+)^a + \frac{V}{2} [n_{p+q}^0 - n_p^0] (\rho_{q\sigma}^+ - \rho_{q,-\sigma}^+), \quad (5.167)$$

где $\rho_{q\sigma}^+$ — флуктуация плотности для частиц со спином σ . Уравнение (5.167) формально подобно полученному в RPA уравнению (5.145), если считать $V_q = -V/2$. Используя (5.150) и делая замену (5.152), мы можем записать дисперсионное уравнение для спиновых волн при температуре T в виде

$$1 = -\frac{V}{2} \sum_p \frac{n_p^0(T) - n_{p+q}^0(T)}{\omega_q - \omega_{pq}^0 + i\eta}. \quad (5.168a)$$

Порог неустойчивости соответствует той температуре T_c , при которой $\omega_q = 0$. Переходя к пределу $q \rightarrow 0$, находим

$$1 = -\frac{V}{2} \sum_p \frac{\partial n_p^0(T_c)}{\partial \epsilon_p}. \quad (5.168б)$$

Это уравнение позволяет определить T_c . Уравнение (5.168б) имеет решение только в том случае, когда

$$N^0(0)V > 1.$$

Это условие эквивалентно критерию устойчивости при $T=0$ [см. (5.166)].

Если коллективная мода неустойчива, то существуют установившиеся флуктуации, и оператор пары $\rho_{pq\sigma}$ обладает отличным от нуля средним значением

$$\langle c_{p+q, \sigma}^+ c_{p\sigma} \rangle,$$

что при $q \rightarrow 0$ приводит к изменению $\delta n_{p\sigma}$ функции распределения частиц. В случае спиновых волн отклонение $\delta n_{p\sigma}$ изотропно и антисимметрично по спину; ферми-поверхность спонтанно расщепляется на две, соответствующие разным направлениям спина,

¹⁾ Различные приложения излагаемой теории читатель найдет в недавно вышедшей монографии Браута [44], посвященной фазовым переходам.

вследствие чего и возникает намагниченность. Чтобы найти новое равновесное состояние при $T=0$, вернемся к приближению Хартри — Фока и учтем зависящее от спина распределение δn_{σ} . Энергия квазичастиц (5.139) также зависит от спина. В случае δ -образного взаимодействия (5.157а) она равна

$$\varepsilon_{p\sigma} = \varepsilon_p^0 + VN_{-\sigma},$$

где N_{σ} — полное число частиц со спином σ . Пусть $p_{F_{\pm}}$ — фермиевские импульсы для двух направлений спина, а $\varepsilon_{F_{\pm}}$ — соответствующие энергии квазичастиц. При равновесии химические потенциалы для частиц с разными направлениями спина должны быть равны. Следовательно,

$$\varepsilon_{F_+} = \varepsilon_{F_-}.$$

Это соотношение вместе с условием

$$N_+ + N_- = N$$

определяет разность $(p_{F_+} - p_{F_-})$, т. е. намагниченность. Если выполнен критерий неустойчивости $N^0(0)V > 1$, то, помимо тривиального решения $p_{F_+} = p_{F_-}$, которое соответствует немагнитному (неустойчивому) состоянию, имеется другое, «магнитное» решение. Последнее решение определяет структуру реального магнитного основного состояния.

Аналогичное вычисление можно провести в том случае, когда неустойчивая коллективная мода имеет конечный волновой вектор q . В этом случае новое равновесное состояние получается путем нахождения *самосогласованного* решения уравнений Хартри — Фока при условии, что в одночастичных собственных состояниях учитывается периодическая деформация системы. Вычисление, очевидно, будет гораздо более сложным.

Обобщенное приближение хаотических фаз можно использовать для нахождения коллективных мод, соответствующих новому магнитному основному состоянию. Это вычисление мы предоставляем читателю (см. задачу 6). Оказывается, что спиновые волны, которые неустойчивы в немагнитном состоянии, становятся устойчивыми в реальном основном состоянии.

Предыдущее рассмотрение носит общий характер; оно применимо к любой неустойчивости, макроскопической или микроскопической. Во всех случаях мы должны проводить анализ следующим образом:

1. Изучить возможные неустойчивости идеального основного состояния, характеризуемого распределением n_p^0 . Вычислить соответствующую температуру перехода.

2. Определить новое упорядоченное основное состояние посредством нахождения самосогласованного решения линеаризованных уравнений движения в приближении Хартри — Фока. Характер упорядочения определяется типом неустойчивой коллективной моды.

3. Вычислить спектр коллективных мод в новом основном состоянии с помощью обобщенного приближения хаотических фаз. Убедиться в том, что фазовый переход устраняет неустойчивости.

Мы воспользуемся этим рецептом в другой нашей книге, где рассматривается переход в сверхтекучее состояние.

ОБСУЖДЕНИЕ СПРАВЕДЛИВОСТИ RPA И ОБОБЩЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

При определении применимости описанных выше приближений следует различать нейтральную и заряженную системы фермионов. Для нейтральной системы последовательное объяснение ее свойств дает только *обобщенное* приближение хаотических фаз; к тому же, оно справедливо только в случае слабого взаимодействия частиц. Более точно границы применимости этого приближения можно установить в частном случае δ -образного взаимодействия; оно справедливо, если

$$N^0(0)V \ll 1.$$

Обобщенное приближение хаотических фаз, очевидно, представляет собой *теорию слабой связи*, поскольку в нем используются те значения энергии квазичастиц (5.23) и взаимодействия (5.24), которые определяются в приближении Хартри — Фока. Как известно, для однородной системы последнее соответствует вычислению в первом порядке по V^1).

Если связь не является слабой, необходимо учитывать биквадратные члены в точном уравнении движения (5.140). Написав уравнение движения для двухпарного оператора, мы увидим, что в него входят однопарные и трехпарные возбуждения, и, таким образом, приходим к задаче о приближенном решении всей системы зацепляющихся уравнений. Общий метод решения очень напоминает тот способ, который используется для решения цепочки зацепляющихся уравнений для функций Грина, причем, как правило, последний способ оказывается проще. Мы не будем входить здесь в детали этих вычислений (изложение метода

¹) Заметим, что поскольку обобщенное приближение хаотических фаз — это приближение слабой связи, следует с большой осторожностью относиться к тем результатам, которые касаются неустойчивостей, появляющихся только в пределе сильной связи $[N^0(0)|V| > 1$, см. (5.166)]

функций Грина см. в книге [45]), отметим лишь, что в пределе длинных волн и низких частот получающиеся уравнения можно существенно упростить, поскольку важны лишь однопарные возбуждения. Мы снова получаем кинетическое уравнение теории Ландау (1.103), в котором f_{pp}' соответствует полному взаимодействию квазичастиц.

В случае электронной жидкости система последовательных приближений носит совершенно иной характер, чем в случае нейтральной жидкости. Причина проста: «прямое» взаимодействие V_q в (5.153) играет определяющую роль, поскольку оно расходуется в длинноволновом пределе. Поэтому в первом приближении последовательное описание можно получить с помощью «простого», а не обобщенного приближения хаотических фаз, т. е. без учета обменного взаимодействия в (5.153). Если мы хотим выйти за пределы RPA (и учесть обменное рассеяние пар), необходимо расширить и уравнение обобщенного приближения (5.153); в частности, мы должны включить те члены в системе зацепляющихся уравнений, которые приводят к экранированию вкладов обменного рассеяния. Соответствующая техника была предложена Сулом и Вертхеймером [39, 46] и Батабе [47]. В следующем приближении получается кинетическое уравнение, которое правильно учитывает экранированное взаимодействие квазичастиц f_{pp}^{RPA} в RPA (и позволяет последовательно получить описанные в § 4 свойства квазичастиц). Можно также найти в следующем порядке по r_s все поправки к полученным в RPA дисперсионному уравнению для плазмонов, энергии основного состояния и т. д. Как мы увидим, они не представляют большого физического интереса, поскольку имеют малую величину в пределе большой плотности ($r_s \ll 1$), когда достаточно теории возмущений, и поэтому здесь вычисляться не будут.

То, что в RPA проводится разложение по малым значениям r_s , видно из формы рядов для энергии основного состояния, для различных квазичастичных характеристик и т. д. Это приближение перестает быть справедливым при плотностях порядка $r_s = 1$, в чем можно убедиться несколькими способами. Например, «обменная» поправка второго порядка к энергии основного состояния равна $0,046$ *ридберг*. При плотности $r_s = 1$ эта поправка составляет около 30% от корреляционной энергии в RPA ($-0,142$ *ридберг*). Даже в том случае, когда учтена эта обменная поправка, результат справедлив только для $r_s \leq 1$; при более низком значении плотности соответствующее выражение не удовлетворяет требованию отрицательности второй производной по константе связи от энергии основного состояния [48]. Можно попытаться улучшить RPA путем вычисления следующих членов в разложении поляризуемости, энергии основного состояния и

г. д. Так, например, Дюбойс [22] вычислил удельную теплоемкость и (помимо нескольких очень громоздких интегралов) энергию основного состояния. Эти вычисления интересны в отношении изучения структуры рядов. Однако таким образом не удается получить корректного объяснения свойств электронного газа с $1,8 < r_s < 5,5$, у которого потенциальная и кинетическая энергии сравнимы по величине. В связи с этим представляется сомнительным, чтобы электронный газ с такой плотностью можно было описать с помощью какого-либо обобщения вычислений, справедливых в пределе сильной связи ($r_s \gg 1$).

§ 6. РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЫХ МЕТАЛЛОВ

Рассмотрим теперь вопрос о том, можно ли с помощью микроскопической теории получить какие-либо полезные сведения о поведении электронов в металлах. Роль, которую играет взаимодействие электронов, зависит от того, изучаются ли микроскопические или макроскопические явления. Для макроскопических явлений применима теория Ландау. Задача микроскопической теории заключается в вычислении с помощью основных законов соответствующих параметров теории Ландау. Наоборот, для микроскопических явлений феноменологической теории не существует, для них необходима только микроскопическая теория.

Микроскопическая теория металлов должна учитывать с самого начала одновременное влияние, во-первых, периодического потенциала ионов («твердотельный» эффект), во-вторых, электрон-электронное взаимодействие («многочастичный» эффект). Для многих явлений необходимо принять во внимание и электрон-фононное взаимодействие. Перед теоретиками стоит очень трудная задача; необходимо ни мало, ни много построить теорию электрон-электронного взаимодействия, которая была бы справедлива для электронного газа с характерной для металлов плотностью, не забывая при этом о твердотельных и многочастичных эффектах. Для учета влияния периодического потенциала, вообще говоря, необходимо включить экранирующее действие электронов — характерный многочастичный эффект; хотелось бы также рассмотреть, к каким изменениям теории электронного взаимодействия приводит тот факт, что электроны движутся в поле периодического потенциала. Ввиду всех этих трудностей, вставших на пути создания теории, попытка объяснить с ее помощью *любые* свойства металлов представляется довольно смелой.

Исторически первыми вычислениями на основе микроскопической теории, в которых учитывались как электрон-ионное, так и электрон-электронное взаимодействия, были выполненные

Вигнером и Зейтцем [28] расчеты энергии связи металлов. Такие вычисления представляют интерес и теперь. Они показательны в том отношении, что сравнение теории и эксперимента позволяет одновременно оценить точность

1) «твердотельного» вычисления, т. е. приближения, в котором отдельный электрон рассматривается в поле периодического потенциала (а следовательно, выяснить вид такого потенциала);

2) «многочастичного» вычисления (т. е. вычисления корреляционной энергии электронов при типичных для металлов значениях плотности);

3) разделения твердотельных и многочастичных эффектов.

Практически то же самое положение существует и при сравнении теории с экспериментом для электронной удельной теплоемкости или спиновой восприимчивости; при этом оценивается не просто «многочастичная» или «твердотельная» теория, а некоторая их комбинация. Очевидно, не следует ожидать точного согласия такой теории с экспериментом; при построении теории делается так много приближений, что расхождение в 15% можно считать блестящим успехом теории (либо просто счастливой случайностью — все зависит от точки зрения).

По этой причине мы не пытаемся дать здесь исчерпывающий обзор различных вычислений свойств металлов с помощью микроскопической теории, а приведем лишь несколько примеров для того, чтобы проиллюстрировать положение дел с вычислением многочастичных эффектов при металлических плотностях. Нас интересуют как сами вычисления, так и то, в какой степени они согласуются с экспериментом. Что касается прочной теоретической базы для описания тех твердотельных эффектов, которые мы рассматриваем, то мы отсылаем читателя к соответствующей литературе.

Мы начнем с обсуждения приближения, которое было предложено для электронной жидкости с металлической плотностью, затем используем эту микроскопическую теорию для определения энергии связи щелочных металлов и для описания свойств квазичастиц в простых почти изотропных металлах, например щелочных металлах, алюминии и свинце.

ПРИБЛИЖЕНИЯ, ПРИГОДНЫЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ, ТИПИЧНЫХ ДЛЯ МЕТАЛЛОВ

Чтобы построить приближенную теорию, которая была бы справедлива при электронных плотностях, соответствующих типичным металлам, полезно подробнее проанализировать, почему RPA не применимо в этом интервале значений плотности. Для этого рассмотрим вклады с различными передачами импульса

в корреляционной энергии. Мы видели на примере соотношений (5.89) и (5.94), что всегда можно выделить вклады с данной передачей импульса, вычислив, скажем, $E_{\text{вз}}(q)$ и проинтегрировав по константе связи. Нетрудно вычислить в RPA вклады с малыми передачами импульса: главные члены связаны с нулевой энергией плазмонов и согласуются с *точным* результатом (5.99). Кроме того, Нозьер и Пайнс [19] показали, что при больших q (но при $q \leq q_c$) обменные поправки к вычисленному в RPA значению $E_{\text{корр}}(q)$ малы даже при типичных для металлов плотностях. Это означает, что ошибки в RPA связаны с большими передачами импульса, фактически с $q \geq p_F$.

Нетрудно понять, почему RPA сталкивается с трудностями при больших передачах импульса. Как доказали Хаббард [18] и авторы [19], в RPA корреляционные эффекты, обусловленные электронами с параллельными и антипараллельными спинами, неразличимы. Вместе с тем из физических соображений следует, что электроны с параллельными спинами просто не должны «чувствовать» короткодействующей части взаимодействия, поскольку в силу принципа Паули они должны находиться на некотором расстоянии друг от друга. Математически этот эффект обусловлен тем, что для больших передач импульса «обменная» часть разложения по теории возмущений (которая присутствует только для электронов с одинаковыми спинами и которая не учитывается в RPA) сокращается с той половиной «прямого» взаимодействия, которую следует приписать электронам с параллельными спинами. В результате только у электронов с противоположными спинами в кулоновском взаимодействии имеется часть, соответствующая большим передачам импульса. Причина этого взаимного сокращения проста: каждому прямому процессу для электронов с параллельными спинами, описываемому матричным элементом V_q , соответствует обменный «сопряженный» процесс с матричным элементом $-V_{k-p}$. (Для электронов с антипараллельными спинами такой обменный процесс невозможен.) Для малых передач импульса обменные члены несут незначительный вклад, а для больших обменные процессы сокращаются с той частью прямых процессов, которые соответствуют взаимодействию частиц с одинаковыми спинами¹⁾.

¹⁾ Здесь можно спросить: почему тогда RPA вообще пригодно при какой-либо плотности? Ответ заключается в том, что при высоких плотностях основной вклад в корреляционную энергию связан с малыми передачами импульса, для которых результат, полученный в рамках RPA, справедлив. Но как только мы переходим к металлическим плотностям, становятся заметными вклады с большими передачами импульса; в тех случаях, когда они важны, необходимо выйти за рамки RPA для объяснения свойств системы,

Эти два замечания лежат в основе приближенного рассмотрения, предложенного для типичных металлических плотностей Хаббардом [18] и авторами [19]. Приближение Хаббарда эквивалентно предположению о том, что функция экранированной реакции плотность — плотность имеет вид

$$\chi_{\text{экр}}^H(q, \omega) \approx \frac{\chi^0(q, \omega)}{1 + f(q) (4\pi e^2/q^2) \chi^0(q, \omega)}, \quad (5.169)$$

где

$$f(q) = \frac{q^2}{2(q^2 + q_F^2)}. \quad (5.170)$$

При таком выборе $\chi_{\text{экр}}^H$ выражение для основной величины $\chi(q, \omega)$, определяющей корреляционную энергию, имеет вид

$$\chi^H(q, \omega) = \frac{\chi^0(q, \omega)}{1 - (4\pi e^2/q^2) (1 - f) \chi^0(q, \omega)}. \quad (5.171)$$

Мы видим, что при $q \ll q_F$ функция χ не отличается от значения (5.101), полученного с помощью РРА. С другой стороны, при $q \gg q_F$ имеем $f \approx 1/2$ и, разлагая знаменатель в (5.171), находим

$$\chi^H(q, \omega) \approx \chi^0 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{(\chi^0)^2}{2} + \dots \quad (5.172)$$

Первый член в этом разложении, приводящий к обменной энергии, не изменился; второй член, который приводит к «прямому» взаимодействию во втором порядке теории возмущений для энергии основного состояния при больших q , уменьшился в два раза, что согласуется с высказанными ранее физическими соображениями. В промежуточной области выражение (5.171) является гладкой интерполяцией. Результаты Хаббарда для корреляционной энергии приведены в табл. 8.

ТАБЛИЦА 8

Значения корреляционной энергии, полученные разными способами

r_s	$E_{\text{кorr}}$, ридберг		
	Хаббард	Нозьер — Пайнс	Вигнер
2	—0,039	—0,094	—0,090
3	—0,086	—0,081	—0,082
4	—0,074	—0,072	—0,075
5	—0,067	—0,065	—0,069

В приближении, полученном авторами (в дальнейшем мы будем называть его приближением Нозьера — Пайнса и обозначать NP), используется другая интерполяция для корреляционной энергии в области промежуточных значений q . В области малых передач импульса результат $E_0^{\text{РРА}}(q)$ можно разложить по степеням q . Интегрируя это выражение по q от нуля

до некоторого достаточно малого $\beta_1 q_F$, найдем следующий вклад в корреляционную энергию [19]:

$$E_{\text{корр}}^{\text{дал}}(\beta_1) = \left\{ -0,46 \frac{\beta_1^2}{r_s} + 0,87 \frac{\beta_1^3}{r_s^{3/2}} - 0,98 \frac{\beta_1^4}{r_s^2} + 0,71 \frac{\beta_1^5}{r_s^{5/2}} + \dots \right\} \text{ ридберг.} \quad (5.173a)$$

Первые два члена в (5.173a) соответствуют собственной энергии электронов и нулевой энергии плазмонов [см. (5.90) и (5.97)] — это точные выражения. К следующим членам имеются «обменные» поправки, которые малы при типичных для металлов значениях плотности.

Как было показано, при больших значениях переданного импульса разложение по теории возмущений сходится очень быстро, так что можно ограничиться членом второго порядка. В этом порядке обменная часть сокращается с половиной части, соответствующей прямому взаимодействию; другими словами, при больших передачах импульса нужно учитывать только вклад взаимодействия электронов с противоположными спинами. Итак, вклады в корреляционную энергию, связанные с близкими расстояниями (от передач импульса с $q > \beta_2 p_F$), можно аппроксимировать выражением

$$E_{\text{корр}}^{\text{близ}} = - (0,025 - 0,063 \ln \beta_2 + 0,0064 \beta_2^2) \text{ ридберг} \quad (5.173б)$$

при условии, что β_2 достаточно велико. [Результат (5.173б) можно получить, выполняя суммирование в выражении (5.112) для $E_2^{(a)}$ и деля результат на 2, чтобы учесть только прямое взаимодействие частиц с противоположными спинами.]

В каких пределах справедливы выражения (5.173a) и (5.173б)? Наибольшее значение β_1 , при котором выражение (5.173a) еще справедливо, по-видимому, определяется плазмонами ($q_c/p_F = 0,47 r_s^{1/2}$). Наименьшее значение β_2 , при котором еще справедливо выражение (5.173б), по-видимому, имеет порядок 1,5; можно ожидать, что при меньших значениях переданного импульса будут играть важную роль члены более высокого порядка в теории возмущений. На фиг. 43 приведен график зависимости вклада в корреляционную энергию $E_{\text{корр}}(q)$ от величины переданного импульса q для плотности $r_s = 4$ (натрий). Для $q/q_F \leq 0,47 r_s^{1/2}$ значения $E_{\text{корр}}(q)$ вычислены с помощью RPA, а при $q \geq 0,47 r_s^{1/2}$ они получены при учете лишь взаимодействия электронов с антипараллельными спинами во втором порядке теории возмущений. Мы видим, что две кривые подходят друг к другу довольно близко при $q/q_F \approx 0,47 r_s^{1/2} \approx 1$. Если предположить, что $E_{\text{корр}}(q)$ — гладкая функция q , то легко провести интерполяцию, скажем, между $q/q_F \approx 0,8$ и $q/q_F \approx 1,5$ и оценить вклад в корреляционную энергию от тех важных промежуточных значений переданного импульса, для которых ни RPA, ни теория возмущений неприменимы. Фактически, поскольку разрыв в $E_{\text{корр}}(q)$ при $q/q_F = 0,47 r_s^{1/2}$ расположен довольно симметрично, явное выражение для $E_{\text{корр}}$ можно получить, просто подставив $\beta = 0,47 r_s^{1/2}$ в выражения (5.173a) и (5.173б) для корреляционной энергии, связанной соответственно с далекими и близкими расстояниями. Таким путем находим

$$E_{\text{корр}}^{\text{дал}}(\beta) = -0,043 \text{ ридберг,}$$

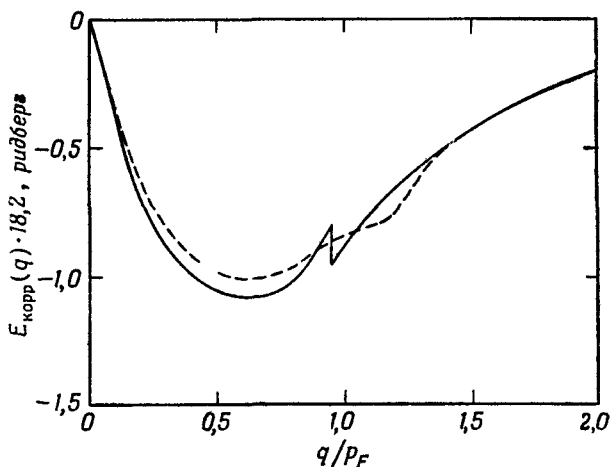
$$E_{\text{корр}}^{\text{близ}}(\beta) = -0,072 + 0,031 \ln r_s \text{ ридберг;} \quad (5.174)$$

складывая, получаем

$$E_{\text{корр}} \approx -0,115 + 0,031 \ln r_s \text{ ридберга.} \quad (5.175)$$

Соответствующие численные значения корреляционной энергии приведены в табл. 8.

Интерполяционные формулы Хаббарда и Нозьера — Пайнса приводят к очень близким результатам для корреляционной



Фиг. 43. Вклады различных передач импульса в корреляционную энергию [19].

Сплошная линия — приближение Нозьера — Пайнса, пунктирная — приближение Хаббарда.

энергии, как видно из фиг. 43; это совпадение не случайно, поскольку обе схемы основаны на одной физической картине. Тот факт, что интерполяцию между областями q , для которых известны вклады в корреляционную энергию, провести нетрудно, дает нам некоторую уверенность в численной достоверности результатов. Авторы полагают, что погрешность должна быть порядка 10%. Заметим, что оба выражения с той же точностью согласуются со значением, полученным по формуле Вигнера (5.88) (см. табл. 8).

Рассмотрим теперь поведение статической диэлектрической функции $\epsilon(q, 0)$. Для малых передач импульса статическая диэлектрическая проницаемость описывается формулой (5.66), где изотермическую скорость звука s можно определить прямо по энергии основного состояния с помощью (5.128). Используя для

корреляционной энергии приближенное значение (5.175), мы находим

$$\frac{\chi_0}{\chi} = \frac{s^2}{s_0^2} \approx 1 - \frac{\alpha r_s}{\pi} - 0,016 \alpha^2 r_s^2. \quad (5.176)$$

Член $\alpha^2 r_s^2$, учитывающий корреляционную энергию, мало влияет на сжимаемость по сравнению с членом обменного происхождения; в основном это связано с тем, что корреляционная энергия медленно изменяется при изменении r_s . [Значение сжимаемости, вычисленное с помощью выражений Вигнера или Хаббарда, мало отличается от (5.176).] Мы видим, что сжимаемость, а следовательно, и экранирующее действие электронной жидкости существенно зависит от взаимодействия электронов. При $r_s=4$ сжимаемость почти в 4 раза превышает значение Томаса — Ферми.

Выражение Хаббарда (5.169) не дает хорошей интерполяции для $\epsilon(q, 0)$ при переходе от малых к большим q , так как оно в пределе длинных волн приводит к экранированию в приближении Томаса — Ферми. С другой стороны, можно думать, что оно лучше, чем RPA, описывает коротковолновое экранирование, поскольку оно учитывает в этом пределе обменные поправки. Что же касается осцилляции плотности экранирующего заряда на больших расстояниях, то здесь вычисления, основанные на выражении (5.169), и расчет в рамках RPA дают очень близкие результаты при $q \approx 2p_F$ (см. фиг. 35). Лангер и Воско [24] изучили диэлектрическое экранирование неподвижной примеси, используя как RPA, так и выражение Хаббарда для $\epsilon(q, 0)$; однако для детального сравнения с экспериментом было бы желательно иметь более точные вычисления.

Расчет удельной теплоемкости и спиновой восприимчивости электронной жидкости с типичным для металлов значением плотности был выполнен Сильверстейном [49] с помощью методов теории поля. В основу вычислений было положено приближение Нозьера — Пайнса. Те же величины и взаимодействие квазичастиц $f_{pp'}$ недавно вычислил Райс [50] с помощью приближения Хаббарда. Райс исходил из приближения Хаббарда для энергии основного состояния E_H . Чтобы получить E_H , надо подставить χ^H [см. (5.171)] вместо χ^{RPA} в (5.100); это дает [ср. с (5.105)]

$$E_H - \frac{3}{5} \epsilon_F^0 = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{1}{4\pi N} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ln \left[1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} [1 - f(q)] \chi^0(\mathbf{q}, i\omega) \right] - \frac{2\pi e^2}{q^2} \right\}. \quad (5.177)$$

Затем Райс рассмотрел различные функциональные производные от E_H и численно определил значения m^* , χ_P и $f_{pp'}$. Его выбор f несколько отличается от (5.170): он полагал $f = q^2/2(q^2 + q_F^2 + q_{FT}^2)$. Результаты Сильверстейна (исправленные Райсом) и Райса для спиновой восприимчивости и эффективной массы при нескольких значениях r_s приведены в табл. 9.

ТАБЛИЦА 9

Значения χ_P и m^* в приближениях Хаббарда и Нозьера — Пайнса

r_s	χ_P/χ_P^0		$m/m_{эфф}$	
	Нозьер-Пайнс	Хаббард	Нозьер-Пайнс	Хаббард
2	1,26	1,26	1,02	0,99
3	1,28	1,40	1,05	1,02
4	1,29	1,48	1,10	1,06

Используя указанные вычисления, а также значения сжимаемости, мы можем найти F_0^s , F_0^a и F_1^s . Параметры теории Ландау, вычисленные в приближениях Хаббарда и Нозьера — Пайнса, приведены в табл. 10

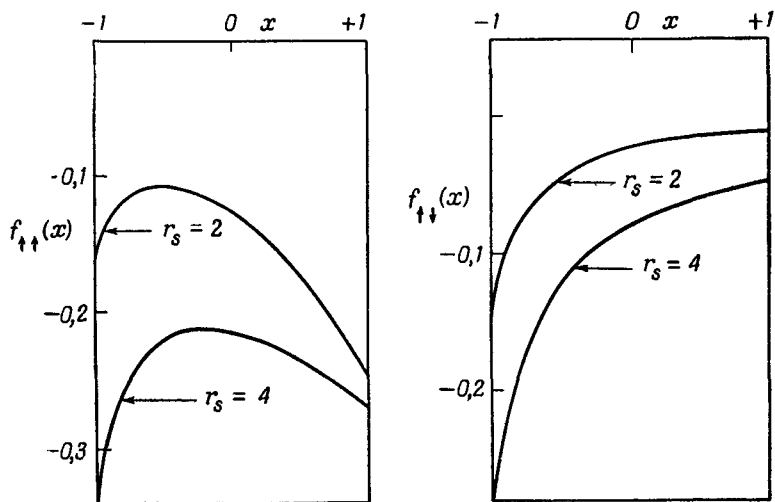
ТАБЛИЦА 10

Значения параметров теории Ландау, вычисленные в приближениях Хаббарда и Нозьера — Пайнса

r_s	F_0^s		F_0^a		F_1^s	
	Нозьер-Пайнс	Хаббард	Нозьер-Пайнс	Хаббард	Нозьер-Пайнс	Хаббард
2	-0,34	-0,35	-0,19	-0,21	0,06	-0,03
3	-0,52	-0,51	-0,18	-0,27	0,15	0,06
4	-0,70	-0,69	-0,15	-0,29	0,30	0,18

Взаимодействие квазичастиц при характерных для металлов значениях плотности оказывается не слишком сильным, причем в наибольшей степени оно изменяет сжимаемость. Заметим, что расхождения между интерполяциями Хаббарда и Нозьера — Пайнса более заметны при определении свойств квазичастиц, чем при вычислении энергии основного состояния. На фиг. 44 показано вычисленное Райсом взаимодействие квазичастиц для двух значений плотности. Мы видим, что для квазичастиц с параллельными спинами величина взаимодействия больше, чем для

квазичастиц с антипараллельными спинами. Это и понятно, поскольку при больших плотностях преобладает первое взаимодействие. (Вспомним, что в приближении Хартри — Фока $f_{\uparrow\downarrow} = 0$. Заметим, что $f_{\uparrow\uparrow}$ и $f_{\uparrow\downarrow}$ более близки при $r_s = 4$. Это говорит о том, что при такой плотности корреляции, обусловленные зарядом, начинают играть большую роль. Отметим также, что поскольку



Фиг. 44. Энергия взаимодействия квазичастиц в электронной системе с характерной для металлов плотностью [50].

$f_{\uparrow\uparrow}$ и $f_{\uparrow\downarrow}$ отрицательны, первая величина меньше второй; этот факт обусловлен обменным отталкиванием частиц с параллельными спинами и приводит к отрицательным значениям F_0^a . Точность приближенных вычислений свойств квазичастиц при типичных для металлов плотностях оценить трудно. Вероятно, они менее точны, чем соответствующие вычисления корреляционной энергии. Сделаем лишь одно общее замечание: когда мы переходим к малым плотностям ($4 \leq r_s \leq 5,56$), поведение электронной жидкости качественно меняется. Это можно заметить, сравнив, например, величину нулевой энергии плазмонов с энергией Ферми, равной $2,21/r_s^2$. При $\beta = 0,47r_s^{1/2}$ нулевая энергия плазмонов постоянна и равна приблизительно 0,10 *ридберг*. При $r_s \approx 4,5$ она сравнима с «невозмущенной» кинетической энергией невзаимодействующих частиц. Можно ожидать, что такое изменение физических свойств системы требует и соответствующей модифи-

кации приближения, которое используется для ее описания. Поскольку к рассмотренным здесь приближениям мы подошли со стороны больших плотностей и поскольку их характер не меняется при изменении r_s , они, по-видимому, более надежны при $r_s \leq 3$ и менее надежны при плотностях электронов, характерных для более тяжелых щелочных металлов.

Еще одно указание на трудности, возникающие при малых плотностях, дает вычисление сжимаемости. Из соотношения (5.176) следует, что сжимаемость обращается в бесконечность при $r_s \approx 5,5$ (примерно значение для цезия). Согласно гл. 4, § 1, это означает, что электронная жидкость с такой плотностью неустойчива. Вероятно, в действительности неустойчивости нет (можно полагать, что электронное твердое тело существует и при гораздо более низких плотностях). Этот факт следует рассматривать как указание на неприменимость формулы (5.176) при таких значениях плотности.

ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ

В качестве первого применения проведенных выше микроскопических вычислений рассмотрим энергию связи щелочных металлов. Энергия связи металлов определяется как разность энергий совокупности свободных атомов и тех же атомов, составляющих металл¹⁾. Для одновалентных металлов с изотропной ферми-поверхностью в энергии связи можно выделить три части:

1) $E_{\text{ион}}$ — разность между энергией связи наиболее сильно связанных электронов проводимости (находящихся на дне зоны проводимости) и энергией ионизации свободного атома;

2) $E_{\text{кин}}$ — средняя кинетическая энергия электронов проводимости, вычисленная в предположении, что электроны не взаимодействуют;

3) $E_{\text{пот}}$ — средний вклад в энергию, обусловленный взаимодействием электронов проводимости.

Величины $E_{\text{ион}}$ и $E_{\text{кин}}$ определяются с помощью «одноэлектронного» вычисления, в котором учитывается влияние периодического потенциала ионов на движение одного электрона. Энергию $E_{\text{кин}}$ можно записать в виде

$$E_{\text{кин}} = \langle \varepsilon_p^0 \rangle = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_{\text{кин}}}, \quad (5.178)$$

где ε_p^0 — энергия блоховской волны с импульсом p , а *среднее вычисляется по всей ферми-сфере*. Выражение (5.178) позволяет

¹⁾ Обзор вычислений энергии связи простых металлов имеется в работе Брукса [51], относительно последних вычислений зонной структуры щелочных металлов см. работу Хэма [52].

определить кинетическую массу $m_{\text{кин}}$. В общем случае $m_{\text{кин}}$ отличается от кристаллической массы m_c ; последняя зависит от плотности состояний электронов на ферми-поверхности [см. (1.69а)]. Мы можем написать

$$E_{\text{кин}} = \frac{2,21}{r_s^2} \left(\frac{m}{m_{\text{кин}}} \right) \text{ ридберг.} \quad (5.179)$$

Все важнейшие эффекты электронного взаимодействия учитываются в энергии основного состояния многоэлектронной системы, в которую, однако, не входят вклады электроинной кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ и связи электронов с полем положительного ионного остатка $E_{\text{ион}}$. Энергия $E_{\text{пот}}$ отличается от соответствующих членов в энергии основного состояния электронной жидкости с той же плотностью в силу ряда причин.

а. Электрическая нейтральность обеспечивается дискретными положительными ионами, а не однородным фоном положительного заряда. Так как мы учли электрон-ионное взаимодействие, введя член $E_{\text{ион}}$, необходимо учитывать и кулоновскую собственную энергию распределения электронного заряда (в электронной жидкости этот вклад сокращается с энергией однородно распределенного положительного заряда). Легко показать, что электронная собственная энергия составляет $1,2/r_s$ ридберг на электрон;

б. При вычислении обменной и корреляционной энергии многоэлектронной системы необходимо учесть, что в действительности электроны движутся в поле ионов, а не в поле однородно распределенного положительного заряда.

Сделаем теперь следующее важное предположение: будем считать, что обменная и корреляционная энергии имеют такую же величину, как и в соответствующей электронной жидкости. В этом случае энергия связи принимает вид

$$E_{\text{св}} = \left(E_{\text{ион}} + \frac{2,21}{r_s^2} \frac{m}{m_{\text{кин}}} + \frac{0,28}{r_s} + E_{\text{корр}} \right) \text{ ридберг;} \quad (5.180)$$

здесь мы использовали значение (5.11) для обменной энергии на электрон, а через $E_{\text{корр}}$ обозначена корреляционная энергия на электрон для электронной жидкости.

Такое приближение представляется правдоподобным, поскольку большая часть обменной и корреляционной энергии связана с микроскопическими значениями передачи импульса, т. е. с взаимодействием электронов на близких расстояниях. Два электрона, которые находятся на небольшом расстоянии, не ощущают заметного влияния ионных остовов, они «видят» только друг друга. По этой причине обменная и корреляционная энергии

должны изменяться относительно мало при учете периодичности. Мы не знаем, как вычислить этот твердотельный эффект и поэтому не можем доказать, что им можно пренебречь. Можно предполагать, что он мал, а затем сравнить вычисления с экспериментом и проверить, нет ли явных противоречий. Итак, как мы уже отмечали, сравнивая вычисленные значения энергии связи с экспериментально определенными, можно одновременно оценить точность одноэлектронного «твердотельного» вычисления, микроскопического многочастичного вычисления $E_{\text{корр}}$ при типичных для металлов значениях электронной плотности, а также точность разделения многочастичных и твердотельных эффектов.

Наиболее точные вычисления энергии связи пока были выполнены для щелочных металлов. Теоретические и экспериментальные значения сравниваются в табл. 11; использованы вычисления зонной структуры, проведенные Бруксом [53]; корреляционная энергия получена в интерполяционном приближении Нозьера — Пайнса. Остановимся на некоторых интересных особенностях этой таблицы.

ТАБЛИЦА 11

Различные вклады в энергию связи щелочных металлов *)

Значения энергии выражены в ккал/моль (1 ридберг = 311 ккал/моль)

Металл	r_s	$E_{\text{ион}}$	$m_{\text{кин}}/m$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{корр}}$	$E_{\text{пот}}$	$E_{\text{св}}$	$E_{\text{экср}}$
Li	3,22	-87,2	1,45	47,3	-25,6	2,4	-37,5	-36,5
Na	3,96	-71,3	0,98	46,5	-23,2	-0,4	-25,2	-26,0
K	4,87	-51,6	0,93	32,4	-21,2	-2,6	-21,8	-22,6
Rb	5,11	-47,6	0,89	29,9	-20,7	-3,2	-20,9	-18,9
Cs	5,57	-43,9	0,83	27,8	-20,0	-3,8	-19,9	-18,8

*) По работе Пайнса [10].

1. Полный вклад потенциальной энергии взаимодействия электронов относительно мал. Электроны «избегают» друг друга, и если один электрон оказался в данной элементарной ячейке, то маловероятно, что другой электрон попадет туда же. Поэтому приближение, в котором пренебрегают всеми эффектами, связанными с взаимодействием электронов, и полагают $E_{\text{пот}}=0$, не будет слишком плохим. (Это было известно еще Вигнеру и Зейтцу [28].)

2. Значение $E_{\text{пот}}$ уменьшается от Li к Cs; при меньшей плотности электронам лучше удается «избегать» друг друга. В результате, как мы уже отмечали, при очень малых плотностях электроны образуют твердое тело.

3. Несмотря на приближения, которые делались при выводе $E_{св}$, согласие с экспериментом превосходное. Это согласие само по себе нельзя рассматривать как доказательство законности всех приближений; однако хорошее согласие с экспериментом, разумеется, не должно и препятствовать использованию этих приближений.

СВОЙСТВА КВАЗИЧАСТИЦ

Перейдем теперь к микроскопическим вычислениям свойств квазичастиц в металлах. При изучении этих свойств мы вынуждены ограничиться почти изотропными металлами. Как мы уже отмечали в гл. 3, в случае сильно анизотропных металлов в теорию Ландау приходится вводить так много независимых параметров, что, хотя эта теория здесь применима, она становится практически бесполезной. Маловероятно, чтобы при микроскопическом описании таких металлов дело обстояло лучше. Поэтому мы рассмотрим относительно простые металлы, а именно щелочные металлы, алюминий и свинец. Кроме того, мы ограничимся вычислением спиновой восприимчивости и удельной теплоемкости.

В гл. 3, § 8, мы видели, что для металлов с изотропной ферми-поверхностью теория Ландау дает [см. (3.160) и (3.164)]

$$\frac{C}{C_0} = \frac{m^*}{m} = \frac{m_c}{m} \left(1 + \frac{F_1^s}{3} \right), \quad (5.181)$$

$$\frac{\chi_P}{\chi_P^0} = \frac{m_c}{m} \left(\frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^a} \right), \quad (5.182)$$

где C_0 и χ_P^0 — соответственно удельная теплоемкость и спиновая восприимчивость невзаимодействующего электронного газа, а m^* — тепловая эффективная масса, определяемая отношением теплоемкостей (5.181). В этих формулах m_c — кристаллическая масса, которую можно выразить через поток, переносимый квазичастицей [см. (3.157)]:

$$j_P = \frac{P}{m_c}. \quad (5.183)$$

В принципе, как мы видели в гл. 3, § 8, величину m_c можно определять по измерениям проводимости в бесстолкновительном режиме при таких частотах, когда междузонные переходы не играют роли (т. е. в оптической области). Практически для рассматриваемых металлов мы не располагаем этими данными; поэтому m_c следует определять с помощью зонной теории. Именно по этой причине мы не приводили в гл. 3 таблицу экспериментально найденных значений различных параметров: F_0^a , F_1^s и т. д.

При вычислении m_c , так же как и при вычислении $E_{\text{ион}}$, перепутываются твердотельные и многочастичные эффекты, поскольку в зонной теории предполагается, что эффективный периодический потенциал ионов отчасти определяется эффектами электронного экранирования. Кроме того, как вычислить F_0^2 и т. д., даже если величина m_c известна? Прежде всего нужно вычислить взаимодействие квазичастиц в электронной жидкости с типичной для металлов плотностью. Затем надо решить, будет ли влиять на результат периодичность решетки твердого тела, поскольку электроны движутся в периодическом поле ионов, а не в поле однородного положительного заряда. Наконец, необходимо учесть возможное влияние электрон-фононного взаимодействия.

Выше мы приводили результаты приближенных вычислений F_0^2 и т. д. для электронной жидкости с типичной для металлов плотностью. Теперь мы *предположим*, что периодичность ионного потенциала не влияет на взаимодействие квазичастиц в металле, и поэтому можно написать

$$f_{pp'}^{\text{металл}} = f_{pp'}^{\text{жидкость}}. \quad (5.184)$$

Об обоснованности этого предположения можно сказать то же, что говорилось при вычислении корреляционной энергии металлов: мы утверждаем, что главный вклад в $f_{pp'}$ связан с микроскопическими передачами импульса и что ионы не влияют заметным образом на взаимодействие частиц, находящихся на небольших расстояниях. Как и раньше, точность соотношения (5.184) можно оценить, выясняя, не возникает ли необъяснимых противоречий теории с экспериментом.

Чтобы установить, зависит ли данное свойство квазичастиц от электрон-фононного взаимодействия, нужно провести вычисление, пользуясь методами теории поля. Симкин [54] показал, что спиновая восприимчивость и сжимаемость не изменяются, а еще раньше было известно, что удельная теплоемкость изменяется при учете этого взаимодействия. Недавно Каданов и Прейнж [55] изучили некоторые кинетические явления и пришли к заключению, что на большинство свойств (за исключением удельной теплоемкости) электрон-фононное взаимодействие не влияет. Поэтому при рассмотрении спиновой восприимчивости можно непосредственно применять соотношение (5.182), а выражение (5.181) нужно изменить. Обобщая результаты Каданова и Прейнжа, легко показать, что выражение для удельной теплоемкости (и тепловой эффективной массы) имеет вид

$$\frac{C}{C_s} = \frac{m^*}{m} = \left(\frac{m_{\text{фэн}}^*}{m} \right) \left(\frac{m_{\text{эл}}^*}{m} \right), \quad (5.185)$$

где m^* — тепловая масса, определяемая по экспериментальным значениям удельной теплоемкости; $m_{эл}^*$ — тепловая масса, найденная с учетом только электрон-электронного взаимодействия и структуры кристалла [она описывается формулой (5.181)]; $m_{фон}^*$ — тепловая масса, вычисленная с учетом только электрон-фононных взаимодействий. Недавно Ашкрофт и Уилкинс [56] вычислили $m_{фон}^*$ для Na, Al и Pb; к этому мы вскоре еще вернемся.

Сравнение теоретических и экспериментальных значений спиновой восприимчивости и удельной теплоемкости мы начнем со щелочных металлов, главным образом потому, что именно для этих металлов твердотельные эффекты наиболее тщательно изучены. Хэм [52] подробно теоретически исследовал ферми-поверхности всех щелочных металлов. Он нашел, что натрий во всех случаях можно считать изотропным, а плотность состояний на ферми-поверхности равна значению для свободных электронов. У калия ферми-поверхность имеет почти сферическую форму, у рубидия она несколько деформирована, а у лития и цезия заметно отличается от сферической. Об отклонении от сферической симметрии можно судить, сравнивая величину $(m_c/m)_{сфер}$ — кристаллическую массу, вычисленную в предположении сферической симметрии ферми-поверхности, с m_c/m — кристаллической массой, вычисленной путем усреднения плотности состояний по реальной деформированной ферми-поверхности. Результаты Хэма приведены в табл. 12.

ТАБЛИЦА 12

Значения кристаллической массы для щелочных металлов *)

	Li	Na	K	Rb	Cs
$(m_c/m)_{сфер}$	1,32	1,00	1,02	0,99	1,06
m_c/m	1,66	1,00	1,09	1,21	1,71

*) По данным Хэма [52]

Для рубидия, лития и цезия едва ли можно учесть взаимодействие квазичастиц при вычислении χ_p и m^* , поскольку в этом случае анизотропия очень велика. Для этих металлов было бы желательно выполнять более реалистическое усреднение f_{pp} по углам, чем в изотропном случае. Если даже мы сможем это сделать, возникает следующая трудность: в микроскопической теории влияние электронного взаимодействия на свойства квазичастиц

рассматривалось в предположении изотропии. Таким образом, при переходе от приближений, развитых для промежуточных плотностей, к случаю металлов уже нельзя пользоваться взаимодействием $f_{pp'}$, которое зависит только от угла между p и p' , как это было в изотропной жидкости. При вычислении корреляционной энергии или энергии связи эта трудность несущественна, поскольку все эффекты, связанные с анизотропией, при этом усредняются; однако она представляется почти непреодолимой, когда речь идет о точном определении свойств квазичастиц. Тем не менее мы проведем сравнение теории с экспериментом для всех щелочных металлов, не забывая, однако, об этом недостатке теории.

Рассмотрим сначала спиновую восприимчивость, так как она не изменяется при учете электрон-фононного взаимодействия. Впервые прямые измерения спиновой восприимчивости электронов проводимости в металлах были выполнены Шумахером, Карвером и Сликхтером [57]. Они находили χ_p , сравнивая сигнал электронного парамагнитного резонанса с сигналом ядерного магнитного резонанса в том же образце. В настоящее время имеются экспериментальные данные для лития и натрия. Подставляя в соотношение (5.182) результаты Хэма и вычисленные Сильверстейном и Райсом значения спиновой восприимчивости электронной жидкости, мы приходим к выражению, которое можно сравнивать с экспериментом. Результаты этого сравнения приводятся в табл. 13. Мы видим, что электрон-электронное взаимодействие играет заметную роль и в литии, и в натрии. Хорошее согласие вычисленного Сильверстейном и измеренного на опыте значения χ_p для лития является, по-видимому, случайным, поскольку для весьма изотропного натрия имеется расхождение.

ТАБЛИЦА 13

Сравнение теоретических и экспериментальных значений спиновой восприимчивости

	m_c/m	χ_p^H/χ_p^0	χ_p^{NP}/χ_p^0	$\chi_p^{\text{эксп}}/\chi_p^0$
Li	1,66	3,26	2,60	$2,57 \pm 0,14$
Na	1,00	1,48	1,29	$1,58 \pm 0,25^*)$
Литература	[52]	[50]	[61, 50]	[58—60]

*) Среднее из следующих значений $\chi_p^{\text{эксп}}$: $0,95 \pm 10$ (10^6 ед. CGS) [58], $0,89 \pm 0,04$ [59], $1,13 \pm 0,05$ [60]. Большой разброс результатов объясняется неопределенностью начала отсчета при интегрировании по линии, имеющей лоренцеву форму.

Обратимся теперь к удельной теплоемкости простых металлов. Значения, вычисленные по формуле (5.185), приведены в табл. 14; там же указаны и экспериментальные значения. В случае Na, Al и Pb учитывалось электрон-фононное взаимодействие. Индексами Н и NP соответственно отмечены значения, полученные для ферми-жидкости при использовании приближения Хаббарда и авторов [49, 50, 61].

ТАБЛИЦА 14

Сравнение теоретических значений тепловой эффективной массы с экспериментальными

Металл	m_c/m	$(m_{эл}^*/m)_H$	$(m_{эл}^*/m)_{NP}$	$m_{фон}^*/m$	$(m^*/m)_H$	$(m^*/m)_{NP}$	$(m^*/m)_{эксп}$
Li	1,66 [52]	1,74	1,80				2,19 [62]
Na	1,00 [52]	1,06	1,10	1,18 [56]	1,25	1,30	1,27 [62]
K	1,09 [52]		1,30				1,25 [63]
Rb	1,21 [52]		1,52				1,26 [63]
Cs	1,76 [52]		2,61				2,82 [64]
Al	1,06 [56]	1,05	1,09	1,49 [56]	1,57	1,62	1,45 [65]
Pb	1,12 [56]	1,12	1,16	2,05 [56]	2,30	2,38	2,00 [66]

Согласие с экспериментом удивительно хорошее, особенно если учесть количество самых разнообразных по своей природе приближенных вычислений, которые нужно провести для такого сравнения. Основную поправку к одноэлектронной теории, очевидно, дает электрон-фононное взаимодействие, особенно в случае «сильно связанных» металлов, например Pb. Значения тепловой массы, полученные в приближении Хаббарда и в приближении Нозьера — Пайнса, довольно близки, так что в данном случае нельзя решить, какому приближению следует отдать предпочтение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложением микроскопических теорий электронной жидкости мы заканчиваем изучение нормальных ферми-жидкостей. Если в начале книги (и в начале настоящей главы) основное внимание уделялось получению точных результатов и рассмотрению некоторых моделей, то ее конец посвящен приближенным теориям электронной жидкости с типичной для металлов плотностью, а также приближениям, позволяющим установить связь этих вычислений с наблюдаемыми свойствами простых металлов. Такое заметное отклонение от основного курса объясняется тем, что мы хотели проследить, к каким результатам приводит электронное взаимодействие в реальных металлах.

Следует ожидать, что при использовании более совершенных приближенных методов ряд результатов, на которые мы здесь ссылались, изменится количественно. Однако мы не думаем, что более точные результаты будут отличаться качественно. Так, величина взаимодействия квазичастиц может измениться на 30% по сравнению с указанным здесь значением, но в 3 раза она измениться не может. Мы можем сделать вывод, что влияние электрон-электронного взаимодействия на спиновую восприимчивость металлов существенно и может быть измерено, но его влияние на удельную теплоемкость экспериментально выделить трудно, поскольку оно является малым по сравнению с большим экспериментально наблюдаемым эффектом электрон-фононного взаимодействия. Наконец, электрон-электронное взаимодействие заметно изменяет электронную сжимаемость. Этот эффект, однако, трудно наблюдать экспериментально.

ЗАДАЧИ

1. Получить точные выражения (5.27) — (5.29) для сжимаемости, спиновой восприимчивости и удельной теплоемкости ферми-жидкости.

2. Получить явное аналитическое выражение для порогового значения q_c , при котором (в RPA) становится возможным распад плазмона на электронно-дырочную пару. Показать, что при типичных для металлов значениях электронной плотности удовлетворительное приближение дает формула (5.58).

3. Вычислить в приближении Томаса — Ферми смещение электронного заряда, обусловленное отрицательно заряженной примесью. Показать, что на малых расстояниях от примеси выталкиваемый заряд больше того заряда, который имелся в отсутствие примеси.

4. Показать с помощью соотношения (5.100), что в формальном разложении по теории возмущений

$$\chi_{RPA} = \frac{1}{1 - (4\pi e^2/q^2)\chi^0} = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2}\chi^0 + \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2(\chi^0)^2 + \dots$$

член, пропорциональный $\text{Im } \chi^0$, приводит к обменной энергии, а пропорциональный $\text{Im } (\chi^0)^2$ — к прямому вкладу второго порядка в энергию основного состояния.

5. В обобщенном приближении хаотических фаз вывести уравнение движения (5.153) для $\rho_{pq\sigma}$.

6. Вывести дисперсионное уравнение для длинных поперечных спиновых волн в ферми-жидкости с устойчивым намагниченным основным состоянием.

7. а) Написать выражения для силы осцилляторов, соответствующих междузонным и внутризонным переходам, в длинноволновом пределе для системы невзаимодействующих электронов в твердом теле.

У к а з а н и е. Использовать точные результаты, полученные в гл. 4, задача 2.

б) Получить явное выражение для функции реакции плотность — плотность $\chi^c(q, \omega)$ в этом приближении.

в) Для электронов в твердом теле приближение хаотических фаз получается, если положить $\chi_{\text{эпр}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^c(\mathbf{q}, \omega)$. Обсудить поведение

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \epsilon_{\text{RPA}}^c(\mathbf{q}, 0) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^c(\mathbf{q}, 0)$$

для следующих систем:

- 1) диэлектрик;
- 2) полупроводник, электроны проводимости которого образуют классическую систему (учесть валентные электроны);
- 3) электроны проводимости в металле.

г) Качественно обсудить поведение $\epsilon_{\text{RPA}}^c(0, \omega)$ в указанных выше случаях при изменении ω от значений, меньших частоты междузонного перехода, до значений, больших частоты любого междузонного перехода.

8. Вычислить $f_{\text{pp}'}$, удерживая в выражении для энергии основного состояния только обменную энергию и прямое взаимодействие второго порядка.

9. Вычислить $f_{\text{pp}'}$ в RPA, непосредственно дифференцируя соответствующее выражение для энергии основного состояния. Сравнить результат с (5.122) и с результатом задачи 8 и обсудить его смысл.

10. а) Показать, что эффективное магнитное взаимодействие электронов описывается формулой

$$H_{\text{магн}} = \sum_{\substack{\text{pp}' \\ \text{q}\mu}} \frac{4\pi e^2 (\mathbf{J}_{\text{p}\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}_{\text{q}\mu}) (\mathbf{J}_{\text{p}'\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}_{\text{q}\mu})}{\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 q^2 - 4\pi e^2 \chi_{\perp}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)}$$

где

$$\mathbf{J}_{\text{p}\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}}{m} c_{\mathbf{p}}^+ c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

— поток, связанный с электронно-дырочной парой с импульсом \mathbf{p} .

Указание. Исходить из гамильтониана (4.209) взаимодействия электронов с поперечным электромагнитным полем и поступать так же, как и при выводе эффективного взаимодействия электронов посредством фононов.

б) Показать, что при малых q статическое магнитное взаимодействие аналогично кулоновскому, но меньше последнего в c^2/v^2 раз и является притяжением.

Литература

1. Wigner E P, Trans. Farad. Soc., 34, 678 (1938).
2. Pines D., Elementary Excitations in Solids, New York, 1963. (Имеется перевод: Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах, изд-во «Мир», 1965)
3. Hartree D. R., Proc. Cambr. Phil. Soc., 24, 89 (1928).
4. Фок В. А., Zs Phys., 61, 126 (1930).
5. Seitz F., Modern Theory of Solids, New York, 1940 (Имеется перевод: Ф. Зейтц, Современная теория твердого тела, М.—Л., 1949.)
6. Bardeen J., Phys. Rev., 50, 1098 (1936).
7. Pines D., Ph. D. Thesis, Princeton University, 1950.
8. Pines D., Bohm D., Phys. Rev., 85, 338 (1952).
9. Bohm D., Pines D., Phys. Rev., 92, 609 (1953).
10. Pines D., Adv. Solid State Phys., 1, 368 (1955).

11. Pines D., Phys. Rev., **92**, 636 (1953).
12. Климонтович Ю. Л., Силян В. П., ЖЭТФ, **23**, 151 (1952).
13. Lindhard J., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **28**, 8 (1954).
14. Gell-Mann M., Brueckner K. A., Phys. Rev., **106**, 364 (1957). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 1, ИЛ, 1958.)
15. Gell-Mann M., Phys. Rev., **106**, 369 (1957). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 1, ИЛ, 1958.)
16. Maske W., Zs. Naturforsch., **5a**, 192 (1950).
17. Sawada K., Brueckner K. A., Fukuda N., Brout R., Phys. Rev., **108**, 507 (1957). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 1, ИЛ, 1959.)
18. Hubbard J., Proc. Roy. Soc., **A243**, 336 (1957). (Имеется перевод в сб. «Вопросы квантовой теории многих тел». ИЛ, 1959.)
19. Nozières P., Pines D., Phys. Rev., **111**, 442 (1958).
20. Ehrenreich H., Cohen M., Phys. Rev., **115**, 786 (1959).
21. Goldstone J., Gottfried K., Nuovo Cimento, [X], **13**, 849 (1959).
22. Du Bois D. F., Ann. Phys., **7**, 174 (1959).
23. Ferrell R. A., Phys. Rev., **107**, 450 (1957).
24. Langer J., Vosko S., Journ. Phys. Chem. Sol., **12**, 196 (1960).
25. Friedel J., Nuovo Cimento, Suppl., **7**, 287 (1958).
26. Rowland T., Phys. Rev., **119**, 900 (1960).
27. Kohn W., Vosko S., Phys. Rev., **119**, 912 (1960).
28. Wigner E. P., Seitz F., Phys. Rev., **43**, 804 (1933).
29. Wigner E. P., Seitz F., Phys. Rev., **46**, 509 (1934).
30. Wigner E. P., Phys. Rev., **46**, 1002 (1934).
31. Nozières P., Pines D., Nuovo Cimento, [X], **9**, 470 (1958).
32. Glick A., Ferrell R. A., Ann. Phys., **11**, 359 (1959).
33. Ueda S., Prog. Theor. Phys., **26**, 45 (1961).
34. Quinn J. J., Ferrell R. A., Journ. Nucl. Energy, Pt. C., **2**, 18 (1961).
35. Brueckner K. A., Sawada K., Phys. Rev., **112**, 328 (1958).
36. Quinn J. J., Ferrell R. A., Phys. Rev., **112**, 812 (1958).
37. Ritchie R. N., Phys. Rev., **114**, 644 (1959).
38. Anderson R. W., Phys. Rev., **112**, 1900 (1958).
39. Suhl H., Werthamer R. N., Phys. Rev., **122**, 359 (1961).
40. Pines D., The Many Body Problem, New York, 1962. (Имеется перевод: Д. Пайнс, Проблема многих тел, ИЛ, 1963.)
41. Pines D., Physica, **26**, S 103 (1960).
42. Overhauser A. W., Phys. Rev. Lett., **4**, 462 (1960).
43. Overhauser A. W., Phys. Rev., **128**, 1437 (1962).
44. Brout R., Phase Transitions, New York, 1965. (Готовится русский перевод.)
45. Kadanoff L. P., Baym G., Quantum Statistical Mechanics, New York, 1962. (Имеется перевод: Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, изд-во «Мир», 1964.)
46. Suhl H., Werthamer R. N., Phys. Rev., **125**, 1402 (1962).
47. Watabe M., Progr. Theor. Phys., **28**, 265 (1962).
48. Ferrell R. A., Phys. Rev. Lett., **1**, 443 (1959).
49. Silverstein S. D., Phys. Rev., **128**, 631 (1962).
50. Rice M., Ann. Phys., **31**, 100 (1965).
51. Brooks H., Nuovo Cimento, Suppl., **7**, 165 (1958).
52. Ham F., Phys. Rev., **128**, 2524 (1962).
53. Brooks H., Phys. Rev., **91**, 1027 (1953).
54. Simkin D., Ph. D. Thesis, University Illinois, 1963.
55. Kadanoff L. P., Prange P., Phys. Rev., **134**, A566 (1964).
56. Ashcroft N., Wilkins J., Phys. Lett., **14**, 285 (1965).

57. Schumacher R. T., Carver T., Slichter C. P., Phys. Rev., **95**, 1089 (1954).
58. Schumacher R. T., Slichter C. P., Phys. Rev., **101**, 58 (1956).
59. Schumacher R. T., Vehse W. E., Bull. Am. Phys. Soc., **4**, 296 (1960).
60. Schumacher R. T., Vehse W. E., Journ. Phys. Chem. Sol., **24**, 297 (1963).
61. Silverstein S. D., Phys. Rev., **130**, 912, 1703 (1963).
62. Martin D. L., Proc. Roy. Soc., **A263**, 378 (1961); Phys. Rev., **124**, 438 (1961).
63. Lien W. H., Phillips N. E., Phys. Rev., **133**, A1370 (1964).
64. Martin B. D., Heer C. V., Bull. Am. Phys. Soc., **9**, 230 (1964).
65. Otter F. A., Mapother D. E., Phys. Rev., **125**, 1171 (1962).
66. Decker P. L., Mapother D. E., Shaw R. W., Phys. Rev., **112**, 1888 (1958).
- 67*. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, **39**, 1798 (1960); **41**, 569 (1961); **45**, 2038 (1963).

Вторичное квантование¹⁾

Рассмотрим систему N частиц, заключенную в прямоугольный «ящик» объемом Ω , с периодическими граничными условиями. Для описания состояния системы мы обычно используем волновую функцию $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, зависящую от $3N$ координат частиц в конфигурационном пространстве. Такое представление позволяет естественным образом обобщить методы, используемые применительно к одной частице. Это не единственно возможное представление, существуют и другие, более удобные на практике.

Возьмем полный набор *одночастичных состояний*, например плоских волн с импульсом \mathbf{p} (не учитывая пока спин). Состояние системы можно определить, указывая число частиц $n_{\mathbf{p}}$, находящихся в состоянии \mathbf{p} . Таким образом мы выбираем базисные векторы в *пространстве состояний всей системы*

$$|n_1, \dots, n_{\mathbf{p}}, \dots\rangle,$$

где каждое $n_{\mathbf{p}}$ считается целым положительным числом. (Заметим, что полное число частиц теперь не сохраняется.) Волновая функция каждого состояния есть просто произведение (симметризованное или антисимметризованное) плоских волн, по одной на каждую частицу.

Операторы «рождения» $a_{\mathbf{p}}^+$ можно определить соотношением

$$a_{\mathbf{p}}^+ | \dots, n_{\mathbf{p}}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{p}} + 1} | \dots, n_{\mathbf{p}} + 1, \dots \rangle. \quad (\text{A. 1})$$

В этом представлении, известном под названием представления чисел заполнения, только один матричный элемент оператора $a_{\mathbf{p}}^+$ отличен от нуля. Комплексно сопряженный ему оператор —

¹⁾ В этом приложении мы следуем книге Нозьера (P. Nozières, *Theory of Interacting Fermi Systems*, New York, 1963).

оператор «уничтожения» — определяется соотношением

$$a_p | \dots, n_p, \dots \rangle = \sqrt{n_p} | \dots, n_p - 1, \dots \rangle. \quad (\text{A. 2})$$

Наша задача заключается в том, чтобы выразить все величины, характеризующие систему, через операторы рождения и уничтожения.

Начнем с газа бозонов и рассмотрим состояние

$$a_p^+ a_{p'}^+ | \rangle.$$

В этом случае рождаются две частицы: сначала с импульсом p' , затем с импульсом p . Такой же результат получается, если переставить порядок операторов, поскольку полная волновая функция инвариантна по отношению к перестановке двух частиц. Следовательно, мы имеем

$$[a_p^+, a_{p'}^+] = 0. \quad (\text{A. 3})$$

Точно так же легко показать, что

$$[a_p, a_{p'}] = 0, \quad [a_p, a_{p'}^+] = \delta_{pp'}. \quad (\text{A. 4})$$

Оператор

$$N_p = a_p^+ a_p \quad (\text{A. 5})$$

характеризует число частиц в состоянии p , так как

$$N_p | \dots, n_p, \dots \rangle = n_p | \dots, n_p, \dots \rangle.$$

Рассмотрим теперь газ фермионов. Обозначим через c_p^+ оператор рождения частицы с импульсом p , а через c_p — оператор уничтожения и так же, как для бозонного газа, построим набор состояний. Различие между двумя системами проявляется в свойствах симметрии многочастичной волновой функции. Для фермионов она должна быть антисимметрична относительно перестановки любых двух частиц. Поэтому операторы c_p должны удовлетворять антикоммутиационным соотношениям

$$[c_p^+, c_{p'}^+]_+ = [c_p, c_{p'}]_+ = 0, \quad [c_p^+, c_{p'}]_+ = \delta_{pp'}. \quad (\text{A. 6})$$

С помощью соотношений (A.6) можно найти, что $c_p^2 = 0$; в каждом состоянии может находиться только одна частица. Кроме того, для оператора чисел заполнения

$$N_p = c_p^+ c_p$$

имеем $N_p^2 = N_p$ [в чем можно убедиться с помощью (A.6)]. Поэтому оператор N_p может быть равен только 0 или 1,

Заметим, что для фермионов соотношения типа (A.1) и (A.2) имеют вид

$$c_p | \dots, n_p, \dots \rangle = (-1)^{j < p} n_p | \dots, n_p - 1, \dots \rangle; \quad (\text{A. 1a})$$

$$c_p^+ | \dots, n_p, \dots \rangle = (-1)^{j < p} [1 - n_p] | \dots, n_p + 1, \dots \rangle. \quad (\text{A. 2a})$$

Множитель $(-1)^{j < p}$ необходим для указания знака многочастичной волновой функции.

В действительности фермионы имеют отличный от нуля спин. Каждое состояние характеризуется волновым вектором \mathbf{p} и спиновым индексом σ . Операторы рождения и уничтожения теперь следует обозначить через $c_{\mathbf{p}\sigma}^+$ и $c_{\mathbf{p}\sigma}$. Они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям типа (A.6):

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{p}\sigma}, c_{\mathbf{p}'\sigma'}]_+ &= [c_{\mathbf{p}\sigma}^+, c_{\mathbf{p}'\sigma'}^+]_+ = 0, \\ [c_{\mathbf{p}\sigma}^+, c_{\mathbf{p}'\sigma'}]_+ &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \quad (\text{A. 6a})$$

Нормированная волновая функция, соответствующая плоской волне с импульсом \mathbf{p} , имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.$$

Амплитуда вероятности уничтожения бозона с импульсом \mathbf{p} в точке \mathbf{r} определяется оператором

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{p}}$$

(подобный вид имеет и выражение для фермиона). Таким образом, мы получаем оператор уничтожения в точке \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \\ a_{\mathbf{p}} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

Оператор $\psi(\mathbf{r})$ описывает уничтожение в точке \mathbf{r} частицы с лю-

бым импульсом. Аналогично определяется и оператор рождения $\psi^+(\mathbf{r})$:

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.$$

Коммутационные соотношения, которым удовлетворяют ψ и ψ^+ , легко вывести, исходя из (А.3) и (А.4) или (А.6). Их можно написать следующим образом:

бозоны:

$$\left. \begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')] &= [\psi^+(\mathbf{r}), \psi^+(\mathbf{r}')] = 0, \\ [\psi(\mathbf{r}), \psi^+(\mathbf{r}')] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \end{aligned} \right\}$$

фермионы:

$$\left. \begin{aligned} [\psi_{\sigma}(\mathbf{r}), \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')]_{+} &= [\psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}), \psi_{\sigma'}^+(\mathbf{r}')]_{+} = 0, \\ [\psi_{\sigma}(\mathbf{r}), \psi_{\sigma'}^+(\mathbf{r}')]_{+} &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\sigma, \sigma'}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{А. 8})$$

Для фермионов мы явно ввели спиновые переменные. Важно не путать операторы ψ , ψ^+ с векторами состояния $|\varphi\rangle$.

Для простоты рассмотрим только ферми-газ. Подобно тому, как оператор $N_{\mathbf{p}} = c_{\mathbf{p}}^+ c_{\mathbf{p}}$ представляет число частиц в состоянии \mathbf{p} , оператор

$$\rho(\mathbf{r}, \sigma) = \psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (\text{А. 9})$$

представляет плотность частиц в точке \mathbf{r} . Полное число частиц в системе равно

$$N = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{r} \psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} c_{\mathbf{p}\sigma}^+ c_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (\text{А. 10})$$

Эти результаты нетрудно распространить и на другие физические величины. Так, кинетическую энергию

$$T = \sum_l \frac{p_l^2}{2m}$$

можно записать в виде

$$T = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} N_{\mathbf{p}\sigma} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} c_{\mathbf{p}\sigma}^+ c_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (\text{А. 11})$$

С помощью преобразования Фурье мы можем перейти к ψ , ψ^+ . Тогда получаем

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\sigma} \int \psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\sigma} \nabla \psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (\text{A. 12})$$

Обратимся теперь к потенциальной энергии V и будем считать, что она определяется парным взаимодействием частиц, зависящим только от координат:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Используя выражение для плотности газа точечных частиц

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l),$$

мы можем записать взаимодействие в виде

$$V = \frac{1}{2} \int \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') - \rho(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \quad (\text{A. 13})$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} \rho(\mathbf{r}, \sigma),$$

где второй член введен для того, чтобы исключить взаимодействие заряда с самим собой. Используя (A.9) и соотношения коммутации, можно привести (A.13) к виду

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{\sigma'}^+(\mathbf{r}') \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \psi_{\sigma}(\mathbf{r}). \quad (\text{A. 14})$$

Вообще мы предпочитаем пользоваться операторами $c_{\mathbf{p}}$, а не $\psi(\mathbf{r})$. Введем фурье-компоненту парного потенциала

$$V_{\mathbf{q}} = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}). \quad (\text{A. 15})$$

Тогда формулу (A.14) можно записать следующим образом:

$$V = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}, \sigma, \sigma'} V_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \sigma}^+ c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma'}^+ c_{\mathbf{k}, \sigma'} c_{\mathbf{p}, \sigma}. \quad (\text{A. 16})$$

С помощью (A.16) и соотношений коммутации (A.6a) можно найти матричный элемент для перехода пары фермионов (\mathbf{p} , σ ; \mathbf{k} , σ') в новые состояния ($\mathbf{p}+\mathbf{q}$, σ ; $\mathbf{k}-\mathbf{q}$, σ')

$$\langle \dots; \mathbf{p} + \mathbf{q}, \sigma; \mathbf{k} - \mathbf{q}, \sigma'; \dots | V | \dots; \mathbf{p}, \sigma; \mathbf{k}, \sigma'; \dots \rangle = \\ = V_{\mathbf{q}} - V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{A. 17})$$

при условии, что состояния \mathbf{p} , \mathbf{k} заняты, а состояния $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{k}-\mathbf{q}$ свободны. Первый член соответствует прямому процессу, вто-

рой — обменному рассеянию пары, которое происходит только в том случае, когда частицы имеют одинаковый спин. Соответствующее выражение для бозонов со спином нуль имеет вид

$$V_q + V_{k-p-q}. \quad (\text{A. 18})$$

Различие опять объясняется статистикой, т. е. симметрией многочастичной волновой функции.

Тем же способом легко вычисляется выражение для любой физической величины в этом представлении (ток и т. д.). Например, рассмотрим фурье-компоненту плотности

$$\rho_q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A. 19})$$

Используя (A. 7) и (A. 9), можно написать

$$\rho_q = \sum_{p, \sigma} c_{p\sigma}^+ c_{p+q, \sigma}. \quad (\text{A. 20})$$

Подобным образом, плотность тока равна

$$\mathbf{J}_q = \sum_{p, \sigma} \frac{p}{m} c_{p\sigma}^+ c_{p+q, \sigma}. \quad (\text{A. 21})$$

В заключение напомним, как проводится квантование колебаний решетки (фононов). Исходный гамильтониан фононов имеет вид

$$H = \sum_q \frac{P_q^+ P_q}{2} + \omega_q^2 \frac{Q_q^+ Q_q}{2}, \quad (\text{A. 22})$$

где P_q и Q_q — соответственно импульс и координата продольных смещений решетки. Они удовлетворяют правилам коммутации для гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} [P_q, P_{q'}] &= [Q_q, Q_{q'}] = 0, \\ [P_q, Q_{q'}] &= -i\delta_{qq'}. \end{aligned} \quad (\text{A. 23})$$

Переход к операторам рождения и уничтожения фононов a_q^+ и a_q (фононное представление) осуществляется с помощью формул

$$\begin{aligned} P_q &= i \left(\frac{\omega_q}{2} \right)^{1/2} (a_q^+ - a_{-q}), \\ Q_q &= \frac{1}{(2\omega_q)^{1/2}} (a_q + a_{-q}^+). \end{aligned} \quad (\text{A. 24})$$

Читатель может легко убедиться, что операторы a_q и a_q^+ удо-

влетворяют правилам коммутации для бозонов (A.1) и что гамильтониан (A.22) принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} \left(a_{\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A. 25})$$

Тогда взаимодействие электронов с колебаниями решетки можно записать в виде (в представлении вторичного квантования)

$$H_{\text{вз}} = \sum_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}}^l \rho_{\mathbf{q}}^+ Q_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{q} \rho \sigma} \frac{v_{\mathbf{q}}^l}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \sigma}^+ c_{\rho \sigma} (a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^+). \quad (\text{A. 26})$$

Подчеркнем, что мы в этом приложении не установили ничего нового, лишь перешли к весьма удобному для работы представлению.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр
Предисловие редактора перевода	5
Предисловие авторов к русскому изданию	7
Предисловие	9
Введение	13
Глава 1. Нейтральные ферми-жидкости	19
§ 1. Представление о квазичастицах	21
Элементарные возбуждения в невзаимодействующем ферми-газе (21). Определение квазичастиц и квазидырок (24) Энергия квазичастиц (27).	
§ 2. Взаимодействие между квазичастицами. Теория Ландау	29
Разложение свободной энергии (29). Локальная энергия квази-частицы (31). Равновесное распределение квазичастиц при конеч-ной температуре (33).	
§ 3. Равновесные свойства	35
Теплоемкость (35). Сжимаемость и скорость звука (36). Спиновая восприимчивость (39). Обобщение на случай электронов в ме-таллах (41).	
§ 4. Кинетическое уравнение для квазичастиц	44
Определение неоднородных функций распределения (44). Разло-жение энергии (46). Кинетическое уравнение для квазичастиц (47).	
§ 5. Вычисление плотности потока частиц	51
Вывод с помощью уравнения непрерывности (51). Поток квази-частиц в трансляционно-инвариантной системе (53).	
§ 6. Локализованные квазичастичные возбуждения	56
Качественная структура неоднородного возбуждения (56). Опре-деление амплитуд рассеяния (60).	
§ 7. Коллективные моды	63
Преобразование кинетического уравнения (64). Простая модель нулевого звука (66). Затухание Ландау (68). Устойчивость относи-тельно коллективных колебаний (70). Обзор возможных решений типа коллективных мод (73).	
§ 8. Столкновения квазичастиц	75
Структура интеграла столкновений (75). Время жизни квази-частиц (80). Кинетические коэффициенты (82).	
§ 9. Сравнение нулевого звука с первым звуком	85
Сравнение бесстолкновительного режима с гидродинамиче-ским (85). Первый звук (86). Затухание коллективных мод. Пере-ход от нулевого звука к первому звуку (88).	
§ 10. Свойства вырожденного ^3He	90
Применимость теории Ландау (90). Макроскопические свой-ства (92). Экспериментальные данные о нулевом звуке (96).	
§ 11. Заключение	99
Задачи	100
Литература	101

<i>Глава 2. Реакция и корреляции в нейтральных системах</i>	102
§ 1. Рассеяние частиц в борновском приближении	103
Описание процесса рассеяния (103). Эффективное сечение рассеяния. Динамический форм-фактор (105). Статический форм-фактор (107).	
§ 2. Сохранение числа частиц. Правило f -сумм	109
Флуктуации плотности потока частиц (110). Правило f -сумм (111). Энергетические потери быстрой частицы (113).	
§ 3. Функция линейной реакции	114
Реакция на скалярный потенциал (115). Связь $\chi(q, \omega)$ с динамическим форм-фактором (118). Причинность и дисперсионные соотношения (120). Правило сумм для сжимаемости (125). Корреляции и спектр возбуждений (126).	
§ 4. Качественное поведение динамического форм-фактора нейтральной ферми-жидкости	127
Невзаимодействующий ферми-газ (127). Взаимодействующая ферми-жидкость (131). Структура $S(q, \omega)$ при $q \rightarrow 0$ (135). Длинноволновый предел правил сумм (139).	
§ 5. Вычисление функции реакции плотность — плотность с помощью теории Ландау	141
Реакция на макроскопическую пробную частицу (141). Точный вид функции макроскопической реакции в некоторых предельных случаях (146). Обратный поток около медленно движущейся частицы (149).	
§ 6. Реакция и корреляция при конечных температурах	151
Динамический форм-фактор (152). Функция реакции плотность — плотность (155).	
§ 7. Гидродинамический предел	157
Сравнение гидродинамического и бесстолкновительного режимов (157). Гидродинамический предел функции реакции плотность — плотность для нейтральной ферми-жидкости (160). Влияние тепловой диффузии (164).	
§ 8. Заключение	165
Задачи	167
Литература	167
<i>Глава 3. Заряженные ферми-жидкости</i>	168
§ 1. Экранирование и плазменные колебания. Элементарное введение. Расходимость (169). Статическое экранирование (170). Динамическое экранирование (172). Плазменные колебания (173).	169
§ 2. Функция диэлектрической реакции	175
Реакция на продольное поле (175). Экранирование и плазменные колебания (176). Продольная проводимость (178).	
§ 3. Макроскопическое кинетическое уравнение	178
Уравнение Ландау — Силина (178). Сравнение заряженной и нейтральной систем (182). Сравнение плазменных колебаний с нулевым звуком (183).	
§ 4. Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы	185
Экранирование статического продольного поля ($\omega \equiv 0$). (187). Эффективное электрон-ионное взаимодействие (188). Квазистатическая реакция ($0 < \omega \ll qv_F$) (191). Слабо неоднородное переменное поле ($0 < qv_F \ll \omega$) (193). Полюсы функции $\epsilon(q, \omega)$ (194).	
§ 5. Обратный поток	194

§ 6. Реакция на электромагнитное поле	198
Квазиклассическая теория реакции (198). Кинетическое уравнение (199). Макроскопическая поперечная реакция (203). Поперечные коллективные моды (205). Сравнение поперечной и продольной реакции (207).	
§ 7. Рассеяние на примесях	208
Структура интеграла столкновений (210). Реакция на однородное поле ($q \equiv 0$) (212). Медленно меняющееся внешнее поле ($0 < qv_{F,T} \ll 1$) (213).	
§ 8. Электроны в металлах	216
Задачи	221
Литература	222
Глава 4. Реакция и корреляция в однородных электронных системах	223
§ 1. Функции диэлектрической реакции	224
Реакция на внешнее поле $1/\varepsilon(q, \omega)$ (224). Реакция на экранированное поле $\varepsilon(q, \omega)$ (226). Аналитические свойства функции $\varepsilon(q, \omega)$ (227). Правила сумм для $\varepsilon^{-1}(q, \omega)$ и $\varepsilon(q, \omega)$ в пределе длинных волн (230).	
§ 2. Возбуждения типа флуктуаций плотности	231
Правила сумм и общий характер форм-фактора $S(q, \omega)$ (231). Длинноволновые возбуждения (237).	
§ 3. Экранирование и плазменные колебания	241
Конечные температуры (242). Электроны в твердом теле (242).	
§ 4. Энергетические потери быстрых электронов	245
Описание потерь с помощью диэлектрической проницаемости (245). Плазменные возбуждения в твердых телах (250).	
§ 5. Реакция на фононное поле	250
Электрон-фононное взаимодействие (258). Самосогласованное рассмотрение связанных электрон-фононных систем (259). Сдвиг энергий фононов и затухание (261). Экранирование электрон-фононного взаимодействия (263).	
§ 6. Экранирование	265
Эффективное электрон-электронное взаимодействие (265). Динамическое экранирование при наличии фононов (270).	
§ 7. Реакция на электромагнитное поле	274
Поперечная электронная реакция (275). Вычисление тензора поперечной реакции (276). Реакция на продольный векторный потенциал. Градиентная инвариантность (279). Асимптотическое поведение $\chi_{\perp}(q, \omega)$. Распространение электромагнитных волн. Диамагнитная реакция и правило сумм (283). Квантование фотонного поля. Комбинационное рассеяние (286).	
Задачи	290
Литература	291
Глава 5. Микроскопические теории электронной жидкости	293
§ 1. Приближение Хартри — Фока	295
Энергия основного состояния (295). Парная корреляционная функция и спектр флуктуаций плотности (298). Спектр квазичастиц (301).	
§ 2. Приближение хаотических фаз	302
Вывод и характер приближения хаотических фаз (304). Энергия и затухание плазмонов (303). Динамический форм-фактор и ди-	

	электрическая реакция (310). Статическое диэлектрическое экранирование (316). Статическое диамагнитное экранирование (318).	
§ 3.	Энергия основного состояния в RPA Теорема об энергии основного состояния (321). Вычисление E_{RPA} (323). Структура теории возмущений (324). Парная функция распределения (329).	319
§ 4.	Свойства квазичастиц в приближении хаотических фаз Удельная теплоемкость, спиновая восприимчивость и сжимаемость (331). Время жизни возбужденных квазичастиц (332).	330
§ 5.	Уравнения движения и обобщенное приближение хаотических фаз Одночастичные возбуждения. Приближения Хартри и Хартри — Фока (336). Электронно-дырочные возбуждения. Приближение Хартри — Фока и приближение хаотических фаз (337). Обобщенное приближение хаотических фаз (343). Неустойчивости и фазовые переходы (346). Обсуждение справедливости RPA и обобщенного приближения хаотических фаз (349).	335
§ 6.	Равновесные свойства простых металлов Приближения, пригодные для плотностей, типичных для металлов (352). Энергия связи (360). Свойства квазичастиц (363). Заключение (367).	351
Задачи		368
Литература		369
<i>Приложение.</i>	Вторичное квантование	372

Д. ПАЙНС и Ф. НОЗЬЕР

**Теория
квантовых жидкостей**

Редактор *И. Г. Нахимсон*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *П. Ф. Некундв*
Технический редактор *Н. А. Турсукова*
Корректор *Л. В. Байкова*

Сдано в производство 23/1 1967 г.
Подписано к печати 28/VI 1967 г.
Бумага тип. № 2 60×90^{1/16} = 12 бум. л.
24 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 22,13. Изд. № 2/4001
Цена 1 р. 73 к. Зак. 532

Тем план 1967 г. Изд-во «Мир», пор. № 42

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29