В. П. ПАЛАМОДОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2
П.14
УДК 517.947

Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Паламодов В. П.

Монография состоит из двух частей. В первой части излагается общий аналитический метод, служащий основой для содержания второй части. Здесь идет речь о пространствах аналитических функций многих комплексных переменных, подчиненных специальным ограничениям роста на бесконечности, изучаются связанные с ними когомологии и алгебраические структуры.

Во второй части содержится систематическое изложение теории общих систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В главе V (вводной) приведены необходимые сведения из теории линейных пространств, обобщенных функций и преобразования Фурье. В главе VI изложено экспоненциальное представление решений однородной системы уравнений общего вида. Это представление занимает центральное место в книге; на его основе, в частности, излагается теория гипоэллиптических операторов и находятся классы единственности обобщенной задачи Коши.

В главе VII изучается разрешимость общей неоднородной системы уравнений. Основной результат этой главы заключается в том, что дифференциальных условий совместности оказывается достаточно для разрешимости такой системы в любой выпуклой области. Здесь же описаны более общие связи между разрешимостью неоднородной системы и геометрическими и топологическими свойствами области. Глава VIII содержит изложение специальных свойств решений переопределенных систем: правила принудительного продолжения этих решений, теоремы о распространении гладкости, о единственности и др. Большое внимание уделяется связям и параллелям с теорией функций многих комплексных переменных.

Книге предпослано элементарное введение, поясняющее ее содержание. Библиографических ссылок 145.

$\frac{2-2-3}{204-67}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит систематическое изложение фактов, относящихся к дифференциальным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. Центральное место в ней занято изучением систем уравнений общего вида. Наряду с классическими вопросами существования, единственности и регулярности решений здесь рассматриваются специфические задачи, возникающие для переопределенных и недоопределенных систем уравнений: продолжимость решения в бо́льшую область, распространение регулярности, M-когомологии и другие. Большое внимание уделяется связям и параллелям с теорией функций многих комплексных переменных.

Отбор материала определялся следующими соображениями. Из всех фактов, относящихся к общим системам уравнений, в книгу не вошли лишь результаты, касающиеся поведения дифференциальных операторов в пространствах медленно растущих функций. Отсутствуют также некоторые факты, относящиеся к одному уравнению с одной неизвестной функцией: корректность задачи Коши, некоторые теоремы о p-выпуклости, теория краевых задач, — изложенные в других монографиях (Гельфанд и Шилов [3], Хёрмандер [10] и Трев [4]).

Книга состоит из двух частей. В первой изложен аналитический метод, составляющий основу для содержания второй части, посвященной дифференциальным уравнениям. Первой части предпослано введение, в котором описано содержание и методы этой части. Все примечания и литературные указания собраны в заключительном разделе.

Эта книга написана по инициативе Г. Е. Шилова. Я благодарен ему за постоянное содействие. Очень ценными для меня были постоянные контакты с В. В. Грушиным.

Сделаю некоторые замечания о способе пользования книгой. При первом чтении § 1 гл. I достаточно ограничиться основными определениями — остальное содержание этого параграфа служит для детального обоснования рассуждений § 2. Содержание § 3 гл. I, за исключением вводного раздела и 7°, используется лишь во второй части, начиная с гл. VII.

Главы II—IV составляют единое целое. При первом их чтении можно исключить лишь § 4 гл. IV, содержание которого используется по существу лишь с гл. VII. В § 5 гл. IV для понимания дальнейшего достаточно прочесть лишь 1°—3°. Общая формулировка основной теоремы, содержащаяся в 4°—6°, используется лишь в § 14 гл. VIII.

В пятой главе содержание §§ 1—3 представляет в основном изложение более или менее известных фактов из теории линейных топологических пространств, обобщенных функций и преобразования Фурье. Исключение составляют лишь 9°—11° § 1, 10° и 12° § 2, а также 7° и 8° § 3. В шестой главе 4° § 4, 8° § 5 и § 6 не связаны с последующим содержанием и также могут быть опущены при первом чтении.

В седьмой главе независимыми являются §§ 11 и 12. § 13 восьмой главы имеет вспомогательное значение.

В первой части книги параграфы нумеруются независимым образом в каждой главе. Во второй части нумерация параграфов сквозная. Формулы нумеруются по следующему правилу: формула с номером (a, b) находится в параграфе с номером b и имеет порядковый номер a. При ссылке на формулу из другой главы первой части указывается номер этой главы, а при ссылке на формулу из того же параграфа номер параграфа опускается.

Символ ■ указывает конец доказательства.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие завершено создание основ так называемой теперь общей теории дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами. Общая теория выделялась из классической по мере того, как изучение частных свойств специальных операторов сменялось исследованием общих структурных свойств операторов общего вида. Лучший пример, иллюстрирующий этот процесс, представляет история изучения локальных свойств решений однородных уравнений. Специальные результаты о регулярности решений уравнений Лапласа, теплопроводности и некоторых других послужили основой для выделения классов операторов, обладающих аналогичными свойствами: эллиптических и параболических. Эти классы операторов обладают общим свойством: всякое решение соответствующего однородного уравнения бесконечно дифференцируемо. Следующим шагом была постановка задачи об описании всех дифференциальных операторов, обладающих тем же свойством. Такие операторы, названные гипоэллиптическими, были полностью описаны в классе операторов с постоянными коэффициентами.

Далее обнаружилось, что регулярность решений гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффицентами является простым следствием более общего свойства, относящегося ко всем операторам с постоянными коэффициентами. Это общее свойство заключается в возможности экспоненциального представления, а именно в том, что всякое решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде интеграла с некоторой мерой по множеству экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих тому же уравнению.

Другое направление, определяющее сейчас лицо общей теории, имело отправной точкой классическую задачу о построении фундаментальных решений в целом. В рамках классической теории эта задача была решена лишь для некоторых специальных типов операторов. Далее благодаря привлечению аппарата обобщенных функций был получен следующий общий результат: для любого отличного от нуля оператора с постоянными коэффициентами существует, вообще говоря, обобщенное фундаментальное решение. Более того, оказалось, что неоднородное уравнение, соответствующее такому оператору, разрешимо для любой обобщенной правой части.

Следующий этап развития этого направления был связан с рассмотрением систем уравнений с постоянными коэффициентами общего вида. На этом этапе «сырьем» для развития общей теории послужили соответствующие разделы теории дифференциальных форм и функций многих комплексных переменных. Результатом этого взаимодействия явилась общая теорема о разрешимости произвольной системы уравнений с постоянными коэффициентами при выполнении «формальных условий согласования» на правые части. Эта теорема о разрешимости неоднородных систем вместе с упомянутой выше теоремой об экспоненциальном представлении являются в свою очередь частными случаями общей теоремы об экспоненциальном представлении, которая занимает центральное место в настоящей монографии. Ряд других вопросов общей теории также приводит к этой общей теореме. Вторая часть монографии содержит изложение основных разделов общей теории дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в форме серии следствий из основной теоремы об экспоненциальном представлении.

Доказательство теоремы об экспоненциальном представлении составляет содержание первой части монографии, а также § 4 гл. V. Чтобы помочь читателю разобраться в нем, мы изложим сейчас кратко некоторые ее простейшие случаи и некоторые идеи ее доказательства. Мы предполагаем у читателя знакомство с основами теории обобщённых функций.

§ 1. Экспоненциальное представление для одного обыкновенного уравнения с одной неизвестной функцией

1°. Постановка задачи. Произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в R^n мы будем записывать в виде

$$p(D)=\sum_{|j|\leqslant m} p_j D^j, \qquad p_j \in C,$$

где

$$D^j = i^{|j|}\frac{\partial^{|j|}}{\partial\xi_1^{j_1}\ldots\partial\xi_n^{j_n}}, \qquad j=(j_1, \ldots, j_n), \quad |j|=j_1+\ldots+j_n,$$

$$i=\sqrt{-1},$$

а $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — некоторая фиксированная система координат в R^n. Пусть $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства C^n. Многочлен

$$p(z)=\sum p_j z^j, \quad z^j = z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n}$$

называется характеристическим по отношению к оператору $p(D)$. Алгебраическое многообразие в $N \subset C^n$, образованное корнями многочлена $p(z)$, также называется характеристическим.

Выберем некоторую область $\Omega \subset R^n$ и рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$p(D)\,u = 0, \tag{1.1}$$

в котором u предиолагается обобщенной функцией в Ω. Заметим, что для любой точки z, принадлежащей характеристическому многообразию N, фуйкция $\exp(z, -i\xi)$ удовлетворяет уравнению (1). В самом деле,

$$p(D)\exp(z, -i\xi) = p(z)\exp(z, -i\xi) = 0.$$

Обратно, если функция $\exp(z, -i\xi)$ удовлетворяет (1), то точка z принадлежит N. Мы можем также указать некоторые экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие (1). Прежде всего отметим формулу Лейбница

$$p(D)\,fg = \sum \frac{1}{j!} D^j f\, p^{(j)}(D)\, g, \quad j! = j_1! \ldots j_n!,$$

где $p^{(j)}(z) = D_z^j p(z)$. Применим ее к функциям $f = f(\xi)$ и $g = \exp(z, -i\xi)$, где $f(\xi)$ — полином порядка α:

$$p(D) f(\xi)\exp(z, -i\xi) = \sum_{|j| \leqslant \alpha} D^j f(\xi)\, p^{(j)}(z)\exp(z, -i\xi). \tag{2.1}$$

Из этой формулы следует, что если в точке $z \in N$ все производные полинома p до порядка α обращаются в нуль, то любой экспоненциальный полином вида $f(\xi)\exp(z, -i\xi)$ удовлетворяет (1). Отметим, что из формулы (2) следует также, что для того, чтобы экспоненциальный полином $f(\xi)\exp(z, -i\xi)$ удовлетворял (1), необходимо, чтобы $z \in N$ *).

Мы можем теперь сформулировать в общих чертах задачу об экспоненциальном представлении решений уравнения (1): произвольное решение этого уравнения записать в виде интеграла с некоторой мерой по множеству всех экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих тому же уравнению. Эту задачу мы сейчас решим в самом простом случае.

2°. Случай одного незавнснмого переменного. В этом случае (1) есть обыкновенное уравнение с постоянными коэффициентами, а характеристический многочлен $p(z)$ имеет лишь конечное число корней $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — кратности этих корней; как известно, $\sum \alpha_\lambda = m$, где m — порядок многочлена p. Из сказанного выше следует, что экспоненциальные многочлены

$$\xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi), \qquad j = 0, \ldots, \alpha_\lambda - 1, \quad \lambda = 1, \ldots, l, \tag{3.1}$$

---

*) В гл. V § 7 мы получим полное описание экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих (1).

удовлетворяют (1) на всей прямой. Заметим, что любой экспоненциальный многочлен, удовлетворяющий (1), является линейной комбинацией функций (3). Таким образом, задача об экспоненциальном представлении формулируется теперь так: записать любое обобщенное решение (1), определенное в области Ω, в виде линейной комбинации экспоненциальных полиномов (3) *). Понятно, что для разрешимости этой задачи необходимо, чтобы область была связной. В противном случае мы можем построить решение, равное различным линейным комбинациям функций (3), на различных связных компонентах. Ввиду того, что функции (3) линейно независимы в любой области, такое решение невозможно представить в виде линейной комбинации функций (3) сразу во всей области Ω. Итак, мы предположим, что область Ω связна, т. е. является интервалом (конечным или бесконечным).

3°. Редукция задачи. Не ограничивая, по существу, общности, мы предположим, что интервал Ω имеет вид $(-a, a)$ с некоторым $a > 0$. Символ $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначает пространство всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на прямой, носители которых принадлежат Ω. Через $\mathscr{D}_b$ для каждого b, $0 < b < a$, мы обозначим его подпространство, образованное всеми функциями, носители которых принадлежат отрезку $[-b, b]$. Топологию в пространстве $\mathscr{D}_b$ мы определим при помощи счетного набора норм

$$\|\varphi\|^q = \sum_{|j| \leqslant q} \sup_{\xi} |D^j \varphi(\xi)|.$$

Очевидно, что $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup\limits_{b<a} \mathscr{D}_b$. Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$, т. е. пространство обобщенных функций в Ω, есть по определению совокупность всех линейных функционалов над $\mathscr{D}(\Omega)$, сужение которых на каждом подпространстве $\mathscr{D}_b$ непрерывно по топологии этого подпространства. Функционал $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1), если

$$(u, p^*(D)\varphi) = 0 \tag{4.1}$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Здесь $p^*(D)$ — оператор, сопряженный с $p(D)$; он равен оператору $\bar{p}(D)$, где $\bar{p}(z)$ — полином, полученный из полинома $p(z)$ заменой всех его коэффициентов p_j на комплексно сопряженные.

*) Хорошо известно, что классическая теорема Эйлера о структуре решений обыкновенного уравнения с постоянными коэффициентами дает именно такое представление для всех классических решений. С другой стороны, известно, что всякое обобщенное решение такого уравнения является классическим, следовательно, результат, который мы собираемся сейчас получить, хорошо известен. Цель наших рассуждений заключается, однако, в том, чтобы на этом простейшем примере продемонстрировать методы, применимые в значительно более общей ситуации.

Хорошо известно, что преобразование Фурье переводит функции $\varphi \in \mathscr{D}_b$ в целые функции, для которых конечны все нормы

$$\|\psi\|_q^b = \sup_z (|z|+1)^q \exp(-b|\operatorname{Im} z|)|\psi(z)|, \quad q = 0, 1, 2, \ldots \quad (5.1)$$

Пространство всех целых функций, для которых конечны все нормы (5), обозначим через Z^b. Введем в нем топологию, определяемую этими нормами. Согласно известной теореме преобразование Фурье устанавливает топологический изоморфизм пространств $\mathscr{D}_b$ и Z^b. Иными словами, обратное преобразование Фурье непрерывно действует из Z^b в $\mathscr{D}_b$.

Преобразованием Фурье обобщенной функции $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ называется линейный функционал над пространством $Z(\Omega) = \bigcup_{b<a} Z^b$, определяемый по формуле

$$(\tilde{u}, \psi) = (u, \tilde{\psi}), \qquad \psi \in Z(\Omega),$$

где $\tilde{\psi}$ — обратное преобразование Фурье функции ψ. Из сказанного выше следует, что функционал $\tilde{u}$ непрерывен над каждым подпространством Z^b. Из соотношения $\widetilde{\bar{p}(z)\psi(z)} = \bar{p}(D)\tilde{\psi}$ вытекает, что равенство (4) можно переписать так:

$$(\tilde{u}, \bar{p}(z)\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Z(\Omega).$$

Таким образом, для того, чтобы обобщенная функция u в Ω удовлетворяла уравнению (1), необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье обращалось в нуль на функциях вида $\bar{p}(z)\psi$, где $\psi \in Z(\Omega)$. Подпространство, образованное такими функциями, мы обозначим через $\bar{p}Z(\Omega)$. Отметим, что полином $\bar{p}$ связан с p соотношением $\bar{p}(z) = \overline{p(\bar{z})}$, из которого следует, что для каждого λ точка $\bar{\zeta}_\lambda$ является корнем многочлена $\bar{p}$ кратности α_λ.

Найдем теперь преобразование Фурье экспоненциальных полиномов (3). Мы имеем

$$(\widetilde{\xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi)}, \psi) =$$
$$= (\xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi), \tilde{\psi}) = \int \xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi)\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi = cD_z^j \psi|_{\bar{\zeta}_\lambda},$$

где c — некоторая константа, отличная от нуля. Таким образом, преобразование Фурье экспоненциального полинома $\xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi)$ есть (с точностью до константы) j-тая производная дельта-функции в точке $\bar{\zeta}_\lambda$. Итак, наша задача свелась теперь к следующей: всякий функционал над $Z(\Omega)$, обращающийся в нуль на подпространстве $\bar{p}Z(\Omega)$, представить в виде линейной комбинации дельта-функций в точках $\bar{\zeta}_\lambda$ и их производных до определенных порядков.

4°. Конструкция изоморфизма. Сформулированная выше задача по существу аналогична известной в теории обобщенных функций задаче об описании структуры обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Эта аналогия подсказывает ход решения. Основной шаг его заключается в том, чтобы показать, что по произвольному набору значений производных

$$D^j\psi(\bar{\zeta}_\lambda), \qquad j=0, \ldots, \alpha_\lambda-1, \quad \lambda=1, \ldots, l,$$

всегда можно восстановить функцию $\psi \in Z(\Omega)$, причем такое восстановление однозначно с точностью до функции из подпространства $\bar{p}Z(\Omega)$.

Для удобства мы формализуем это утверждение; рассмотрим оператор d, действующий на функции из $Z(\Omega)$, по формуле

$$d\colon \psi \to \{D^j\psi(\bar{\zeta}_\lambda), \quad j=0, \ldots, \alpha_\lambda-1, \ \lambda=1, \ldots, l\} \in C^m.$$

Этот оператор, очевидно, обращается в нуль на подпространстве $\bar{p}Z(\Omega)$ и, следовательно, может быть продолжен до отображения соответствующего фактор-пространства

$$d\colon Z(\Omega)/\bar{p}Z(\Omega) \to C^m. \tag{6.1}$$

Утверждение, которое мы хотим доказать, звучит теперь так: отображение d есть изоморфизм линейных пространств. Чтобы установить этот изоморфизм, мы докажем сначала, что d есть мономорфизм, а затем, что d — эпиморфизм.

Первое из этих утверждений в развернутом виде формулируется так: всякая функция $\psi \in Z(\Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$D^j\psi(\bar{\zeta}_\lambda)=0, \qquad j=0, \ldots, \alpha_\lambda-1, \ \lambda=1, \ldots, l, \tag{7.1}$$

принадлежит подпространству $\bar{p}Z(\Omega)$. Рассмотрим отношение $\chi=\psi/\bar{p}$. Оно, очевидно, аналитично вне точек $\bar{\zeta}_\lambda$, $\lambda=1, \ldots, l$. С другой стороны, оно аналитично в любой точке $\bar{\zeta}_\lambda$, так как в силу (7) функция ψ обращается в $\bar{\zeta}_\lambda$ в нуль с кратностью, не меньшей чем многочлен $\bar{p}$. Таким образом, χ — целая функция. Так как модуль многочлена $\bar{p}$ не убывает на бесконечности, из конечности нормы $\|\psi\|_q^b$ вытекает конечность нормы $\|\chi\|_q^b$. Отсюда $\chi \in Z(\Omega)$, ч. и т. д.

Докажем теперь эпиморфность отображения d. Произвольный вектор $a \in C^m$ для удобства запишем в виде

$$a=\{a_\lambda^j, \ j=0, \ldots, \alpha_\lambda-1, \ \lambda=1, \ldots, l\}.$$

Задача заключается в том, чтобы построить функцию $\psi \in Z(\Omega)$, удовлетворяющую m условиям

$$D^j\psi(\bar{\zeta}_\lambda)=a_\lambda^j, \quad \forall j, \ \lambda.$$

Легко сообразить, что такую функцию ψ всегда можно найти ввиду того, что пространство $Z(\Omega)$ достаточно обширно; в частности, оно содержит функции, отличные от тождественного нуля, и с каждой своей функцией содержит все ее производные и сдвиги. Итак, изоморфизм (6) установлен.

Используя этот изоморфизм, уже совсем несложно получить экспоненциальное представление. Как мы отметили выше, для всякого решения (1) функционал $\tilde{u}$ обращается в нуль на $\bar{p}Z(\Omega)$ и, следовательно, может рассматриваться как функционал над фактор-пространством в (6). В силу изоморфизма (6) ему отвечает некоторый функционал v над C^m. Функционал v можно отождествлять с вектором $\{v_\lambda^j\}$, действие которого на C^m имеет вид $(v, a) = \sum v_\lambda^j a_\lambda^j$. Отсюда

$$(\tilde{u}, \psi) = (v, d\psi) = \sum_{j, \lambda} v_\lambda^j D^j \psi(\bar{\zeta}_\lambda).$$

Тем самым мы представили функционал $\tilde{u}$ в виде линейной комбинации производных дельта-функций, которые являются преобразованиями Фурье экспоненциальных полиномов (3). Возвращаясь к прообразам Фурье, мы приходим к искомому представлению функционала u

$$u(\xi) = \sum_{j, \lambda} v_\lambda^j \xi^j \exp(-i\zeta_\lambda \xi). \tag{8.1}$$

§ 2. Экспоненциальное представление решений уравнений в частных производных

1°. Общие замечания. Для простоты предположим, что область Ω, в которой мы рассматриваем уравнение (1.1), есть шар радиуса a с центром в начале координат. По аналогии со случаем $n=1$ мы конструируем пространства $\mathcal{D}_b$, Z^b и $Z(\Omega)$; $\mathcal{D}_b$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций в R^n, носители которых принадлежат замкнутому шару $\{\xi \colon |\xi| \leqslant b\}$, а пространство Z^b, являющееся образом Фурье пространства $\mathcal{D}_b$, состоит из всех целых функций в C^n, удовлетворяющих неравенствам

$$|\psi(z)| \leqslant c_q(|z|+1)^{-q} \exp(b|\operatorname{Im} z|), \qquad q = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Мы имеем $Z(\Omega) = \bigcup\limits_{b<a} Z^b$, а через $\bar{p}Z(\Omega)$ обозначаем подпространство в $Z(\Omega)$, образованное функциями вида $\bar{p}\psi$, где $\psi \in Z(\Omega)$. Так же как и в одномерном случае, задача об экспоненциальном представлении сводится к описанию фактор-пространства

$$Z(\Omega)/\bar{p}Z(\Omega). \tag{2.2}$$

Чтобы получить это описание, мы должны прежде всего найти подходящие локальные условия, выделяющие подпространство $\overline{p}Z(\Omega) \subset Z(\Omega)$. Пусть $\overline{N}$ — множество, сопряженное с N, т. е. множество корней $\overline{p}$. Простейшим условием такого рода было бы условие

$$\psi|_{\overline{N}} = 0. \tag{3.2}$$

Как мы видели, это условие не является достаточным для того, чтобы $\psi \in \overline{p}Z(\Omega)$ в случае $n=1$, если многочлен имеет кратные корни. В общем случае условие простоты корней следует заменить таким: разложим многочлен $\overline{p}$ в произведение неприводимых $\overline{p} = q_1, \ldots, q_l$ и допустим, что все многочлены $q_1, \ldots, q_l$ различны. Покажем, что в этом случае из выполнения (3) вытекает, что $\psi \in \overline{p}Z(\Omega)$.

2°. Доказательство достаточности (3). В C^n выберем систему координат $z = (z_1, \ldots, z_n)$ таким образом, чтобы многочлен $\overline{p}$ был нормален по переменной z_1, т. е. чтобы он записывался в виде

$$\overline{p}(z) = p_m z_1^m + p_{m-1}(z') z_1^{m-1} + \ldots + p_0(z'), \qquad z' = (z_2, \ldots, z_n),$$

где m — его порядок, а p_m — отличная от нуля константа. Элементарные рассуждения показывают, что такую систему координат всегда можно найти. Не ограничивая общности, будем считать, что $p_m = 1$. В таком случае мы можем записать

$$\overline{p}(z) = \prod_1^m [z_1 - \zeta_j(z')],$$

где $\zeta_j(z')$ — некоторые функции от z'. Функция

$$\mathscr{D}(z') = \prod_{j \neq i} [\zeta_i(z') - \zeta_j(z')],$$

являющаяся многочленом от z', называется дискриминантом многочлена $\overline{p}$ относительно переменной z_1. Из наложенного выше условия на многочлен следует, что многочлен $\mathscr{D}$ не равен тождественно нулю. Множество $M \subset C^{n-1}$, образованное его корнями, называется дискриминантным. В окрестности любой точки z', не принадлежащей дискриминантному множеству, все функции $\zeta_j(z')$ голоморфны. Следовательно, множество $\overline{N}$ в окрестности любой своей точки (z_1, z'), где $z' \notin M$, есть $(n-1)$-мерное аналитическое многообразие.

Пусть ψ — произвольная функция из $Z(\Omega)$, удовлетворяющая (3). Зафиксируем произвольную точку $z' \in C^{n-1} \setminus M$. Так как $\mathscr{D}(z') \neq 0$, все числа $\zeta_j(z')$, $j = 1, \ldots, l$, различны. Поэтому $\overline{p}(z_1, z')$ как многочлен от z_1 имеет различные корни. Функция $\psi(z_1, z')$, рассматриваемая как функция лишь от z_1, в силу (3) обращается в нуль в этих корнях. Поэтому отношение $\chi = \psi/\overline{p}$ есть целая функция по z_1. Выберем некоторый шар $S \subset C^{n-1}$, не пересекающий множества M. Из сказанного выше следует, что все функции $\zeta_j(z')$ аналитически зависят от z' в этом шаре. Отсюда нетрудно сделать вывод, что отношение $\chi = \psi/\overline{p}$ также аналитически зависит от z' в шаре S.

Таким образом, мы установили, что функция χ аналитична по всем переменным z во всем пространстве C^n, за исключением, быть может, точек множества $\overline{N}$, проектирующихся в M (т. е. имеющих вид (z_1, z'), где $z' \in M$). Множество таких точек имеет в C^n коразмерность два и, следовательно, в силу известной теоремы Гартогса является множеством устранимых особенностей, откуда следует, что функция χ на самом деле целая. Легко проверить, что она удовлетворяет неравенствам (1) и, следовательно, принадлежит пространству $Z(\Omega)$. Тем самым доказательство закончено.

3°. Описание фактор-пространства (2). Продолжая аналогию со случаем $n = 1$, мы должны определить оператор d, относящий функции $\psi \in Z(\Omega)$ ее сужение на множестве $\overline{N}$, а затем описать образ этого оператора в терминах функций, определенных лишь на самом множестве $\overline{N}$. Для этой цели нам потребуется понятие аналитической функции на множестве. Применительно к множеству $\overline{N}$ оно звучит так: комплекснозначная функция $f(z)$, определенная на $\overline{N}$, называется аналитической, если для любой точки $\zeta \in \overline{N}$ существует голоморфная в ее окрестности функция $F(z)$, значения которой на $\overline{N}$ совпадают с $f(z)$ в некоторой окрестности ζ. Ясно, что всякая функция вида $d\psi$, $\psi \in Z(\Omega)$, аналитична на $\overline{N}$, но не всякая аналитическая на $\overline{N}$ функция имеет такой вид, поскольку функции из $Z(\Omega)$ удовлетворяют на бесконечности определенным ограничениям роста. Через $Z_{\overline{N}}(\Omega)$ обозначим пространство, образованное аналитическими на $\overline{N}$ функциями, удовлетворяющими всем неравенствам

$$|f(z)| \leqslant c_q(|z|+1)^{-q} \exp(b|\operatorname{Im} z|), \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \quad z \in \overline{N}, \tag{4.2}$$

при некотором $b < a$.

Таким образом, оператор d действует из $Z(\Omega)$ в $Z_{\overline{N}}(\Omega)$ и обращается в нуль на $\overline{p}Z(\Omega)$. Поэтому определено отображение

$$d: Z(\Omega)/\overline{p}Z(\Omega) \to Z_{\overline{N}}(\Omega). \tag{5.2}$$

Покажем, что на самом деле оно является изоморфизмом. Этот изоморфизм и является искомым описанием фактор-пространства (2).

4°. Доказательство изоморфизма (5). Рассуждения 2 показывают, что d есть мономорфизм, следовательно, остается установить эпиморфность оператора d. Иными словами, нам предстоит решить следующую задачу: для каждой аналитической на $\overline{N}$ функции f, удовлетворяющей неравенствам (4), построить продолжающую ее в C^n целую функцию ψ, удовлетворяющую аналогичным неравенствам (1).

Мы укажем сейчас ход решения этой задачи. Первый этап заключается в том, чтобы построить «локальное продолжение». Под локальным продолжением мы понимаем совокупность функций $\psi_\zeta(z)$, $\zeta \in C^n$, обладающих следующими свойствами:

а) для любого ζ функция ψ_ζ определена и голоморфна в ε-окрестности U_ζ точки ζ (ε — некоторое число, не зависящее от ζ),

б) функции ψ_ζ в совокупности удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_\zeta(z)| \leqslant c_q(|z|+1)^{-q} \exp(b|\operatorname{Im} z|),$$
$$q=0, 1, 2, \ldots; \; z \in U_\zeta, \; \zeta \in C^n,$$

с некоторым $b < a$ и

в)

$$\psi_\zeta(z)\big|_{\overline{N}} = f(z)$$

для $z \in \overline{N} \cap U_\zeta$.

Укажем путь построения такого локального продолжения. Если точка ζ не принадлежит $\overline{N}$, выберем наибольший шар V_ζ, не пересекающий $\overline{N}$, и положим $\psi_\zeta \equiv 0$ в этом шаре. Если же $\zeta \in \overline{N}$, то построим область V_ζ, равную произведению шаров v_1 и v' с наибольшими возможными радиусами, не превосходящими единицы, обладающих следующим свойством: для всех $z' \in v'$ количество чисел $\zeta_1(z'), \ldots, \zeta_m(z')$, принадлежащих кругу v_1, постоянно. В качестве ψ_ζ в этом случае выберем интерполяционный многочлен относительно z_1, который при каждом $z' \in v'$ принимает в точках $\zeta_j(z')$, принадлежащих v_1, те же значения, что и функция f. Нетрудно показать, что в покрытие пространства C^n, образованного областями V_ζ, можно вписать покрытие, образованное шарами $U_\zeta = \{z : |z-\zeta| < \varepsilon\}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Сужая функции ψ_ζ на соответствующих шарах U_ζ, мы получим набор, удовлетворяющий условию а). Выполнение условия в) следует непосредственно из конструкции функций ψ_ζ. Чтобы установить б), достаточно при помощи известных приемов оценить интерполирующие многочлены ψ_ζ через их значения в узлах, которые суть значения функции f. Тем самым локальное продолжение построено.

Функции ψ_ζ, построенные на первом этапе, не решают задачи о продолжении, поскольку они не обязаны совпадать между собой в пересечениях соответствующих шаров U_ζ. Цель дальнейшего — «склеить» эти функции, т. е. найти такие добавки ρ_ζ к этим функциям, не нарушающие условий а), б) и в), что «исправленные» функции $\psi'_\zeta = \psi_\zeta - \rho_\zeta$ совпадают между собой в попарных пересечениях шаров U_ζ.

Совокупность функций ψ_ζ рассмотрим как коцепь нулевого порядка на покрытии $\{U_\zeta\}$. Возьмем кограницу этой коцепи, т. е. для любых ζ, $\theta \in C^n$ рассмотрим разность

$$\psi_{\zeta\theta} = \psi_\zeta - \psi_\theta, \tag{6.2}$$

определенную и аналитическую в пересечении $U_\zeta \cap U_\theta$. Из в) следует, что функция $\psi_{\zeta\theta}$ обращается в нуль на множестве $U_\zeta \cap U_\theta \cap \overline{N}$. Модифицируя рассуждения 2°, нетрудно показать, что эта функция делится на $\overline{p}$, т. е.

$$\psi_{\zeta\theta} = \overline{p}\chi_{\zeta\theta}, \tag{7.2}$$

где функция $\chi_{\zeta\theta}$ аналитична в $U_\zeta \cap U_\theta$. Оценивая частное $\chi_{\zeta\theta}$ через делимое $\psi_{\zeta\theta}$ и учитывая неравенство б), мы приходим к аналогичным неравенствам

$$\begin{gathered}|\chi_{\zeta\theta}(z)| \leqslant c_q(|z|+1)^{-q}\exp(b|\operatorname{Im} z|),\\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ z \in U'_\zeta \cap U'_\theta,\end{gathered} \tag{8.2}$$

где $\{U'_\zeta\}$ — некоторое более мелкое покрытие.

Заметим, что функции $\chi_{\zeta\theta}$ образуют коцикл на покрытии $\{U'_\zeta\}$, т. е. для любых ζ, θ и η выполнено соотношение

$$\chi_{\zeta\theta}(z) + \chi_{\theta\eta}(z) + \chi_{\eta\zeta}(z) \equiv 0, \quad z \in U'_\zeta \cap U'_\theta \cap U'_\eta. \tag{9.2}$$

Чтобы проверить его, умножим обе части на $\overline{p}(z)$. Слева мы получим нуль в силу соотношений (6) и (7). Остается заметить, что из равенства $\overline{p}h \equiv 0$ для аналитической функции h следует, что $h \equiv 0$. Тем самым равенство (9) доказано.

Следующий важный шаг заключается в том, чтобы доказать, что всякий аналитический коцикл $\{\chi_{\zeta\theta}\}$, удовлетворяющий (8), является кограницей некоторой аналитической коцепи $\{\chi_\zeta\}$ (определенной, быть может, на более мелком покрытии), удовлетворяющей аналогичным неравенствам. Доказательство этого утверждения достаточно сложно, и поэтому мы отложим его до гл. III. Покажем, что функции

$$\psi'_\zeta = \psi_\zeta - \overline{p}\chi_\zeta$$

представляют искомое «исправленное» локальное продолжение. В самом деле для любых точек ζ и θ в пересечении соответствующих шаров имеет место равенство

$$\psi'_\zeta - \psi'_\theta = \psi_\zeta - \psi_\theta - \overline{p}(\chi_\zeta - \chi_\theta) = \psi_{\zeta\theta} - \overline{p}\chi_{\zeta\theta} = 0.$$

Функции ψ'_ζ удовлетворяют условию б), поскольку ему удовлетворяют функции ψ_ζ и функции χ_ζ. Таким образом, функции ψ'_ζ суть сужения некоторой целой функции ψ, принадлежащей пространству $Z(\Omega)$, значения которой на $\overline{N}$ совпадают с f. Тем самым задача о продолжении решена и, следовательно, изоморфизм (5) установлен.

5°. Экспоненциальное представление. Исходя из изоморфизма (5), мы получим сейчас экспоненциальное представление решений уравнения (1.1). Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — такое решение. Рассуждая так же, как в случае $n=1$, мы представим его преобразование Фурье в виде

$$(\tilde{u}, \psi) = (v, d\psi), \quad \psi \in Z(\Omega),$$

где v — некоторый функционал над $Z_{\overline{N}}(\Omega)$. Уточняя рассуждения 3° и 4°, можно установить, что этот функционал непрерывен в следующем смысле: для любого $b < a$ найдется целое $q \geqslant 0$ такое, что функционал v ограничен по норме

$$f \to \| f \|_q^b = \sup_{\overline{N}} (|z| + 1)^q \exp(-b |\operatorname{Im} z|) |f(z)|$$

над подпространством $Z_{\overline{N}}^b \subset Z_{\overline{N}}(\Omega)$, образованным функциями, для которых эта норма конечна.

Рассмотрим теперь пространство $C_{\overline{N}}$, образованное комплекснозначными непрерывными на $\overline{N}$ функциями с ограниченной величиной

$$\| F \| = \sup_{\overline{N}} | F(z) |.$$

Очевидно, что отображение

$$f(z) \to F(z) = f(z)(|z| + 1)^q \exp(-b |\operatorname{Im} z|)$$

определяет изометрическое вложение пространства $Z_{\overline{N}}^b$, наделенного нормой $\| \cdot \|_q^b$, в пространство $C_{\overline{N}}$, наделенное нормой $\| \cdot \|$. По теореме Хана — Банаха функционал v допускает продолжение $\check{v}$ на все пространство $C_{\overline{N}}$. Согласно теореме Рисса функционал $\check{v}$, ограниченный по норме $\| \cdot \|$, может быть записан в виде интеграла

$$(\check{v}, F) = \int_{\overline{N}} F \mu$$

с некоторой комплексной аддитивной мерой μ, абсолютная величина которой имеет конечный интеграл $\int |\mu|$. Отсюда окончательно

$$(\tilde{u}, \psi) = (v, d\psi) = \int_{\overline{N}} \psi(z) \mu', \tag{10.2}$$

где

$$\mu' = (|z| + 1)^q \exp(-b |\operatorname{Im} z|) \mu. \tag{11.2}$$

Равенство (10) и является искомым представлением решения u. Чтобы придать ему «экспоненциальный» вид, подставим в (10) $\psi(z) = \exp(z, -i\xi)$. Мы получим равенство

$$u(\xi) = (\tilde{u}, \exp(z, -i\xi)) = \int \exp(z, -i\xi)\,\mu',$$

которое следует понимать символически, а именно в применении к основным функциям

$$(u, \varphi) = \int\limits_{\overline{N}} (\exp(z, -i\xi), \varphi)\,\mu'. \tag{12.2}$$

Из формулы (11) и конечности интеграла $\int |\mu|$ легко усмотреть, что правая часть (12) абсолютно сходится для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}_b$, причем равномерно на каждом ограниченном в $\mathscr{D}_b$ множестве.

Формула (10) вполне аналогична представлению (8.1) для случая, когда все $\alpha_\lambda = 1$. Отметим два существенных различия между формулами (8.1) и (10). Первое заключается в том, что коэффициенты v_λ^j в (8.1) определены однозначно, в то время как мера μ' в (12) может быть выбрана со значительной степенью произвола. Для примера построим меру μ_0 с компактным носителем, принадлежащим $\overline{N}$, которая при подстановке в правую часть (12) определяет нулевой функционал. Пусть $\zeta \in \overline{N}$ — некоторая точка, в окрестности которой $\overline{N}$ есть $(n-1)$-мерное аналитическое многообразие. Внутри этого многообразия выберем некоторую голоморфную систему координат в окрестности ζ и построим достаточно малый полицилиндр в этой системе координат. Пусть γ — его остов. В силу теоремы Коши интеграл от любой аналитической на $\overline{N}$ функции, взятый вдоль γ, равен нулю. Такой интеграл можно записать в виде интеграла по $\overline{N}$ с некоторой мерой μ_0, носитель которой совпадает с γ. Отсюда

$$\int (\exp(z, -i\xi), \varphi)\,\mu_0 = \left(\int \exp(z, -i\xi)\,\mu_0, \varphi\right) = 0,$$

следовательно, мера μ_0 является искомой.

Другое существенное различие между (8.1) и (12) состоит в том, что в формуле (8.1) присутствуют все экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению, в то время как в формуле (12) таких экспоненциальных полиномов лишь малая часть. В самом деле в формуле (12) фигурируют лишь экспоненты, с другой стороны, для любой точки $\zeta \in N$ мы можем построить экспоненциальный полином вида $h(\xi)\exp(\zeta, -i\xi)$, удовлетворяющий (1.1), в котором многочлен $h(\xi)$ имеет сколь угодно высокий порядок. Для простоты допустим, что ζ — регулярная точка $\overline{N}$. Пусть τ — некоторый вектор, касающийся $\overline{N}$ в ζ. Мы имеем

$$(\tau, \text{grad})\, p(\zeta) = 0,$$

откуда

$$p(D)(\tau, \xi)\exp(\zeta, -i\xi) = 0.$$

Читатель без большого труда может обобщить эту конструкцию на случай экспоненциальных полиномов любого порядка и произвольной точки $\zeta \in \overline{N}$.

6°. Обобщение на произвольные выпуклые области Ω. В наших предыдущих рассуждениях область Ω являлась шаром. На самом деле рассуждения могут быть проведены в значительно более общем случае: когда Ω — произвольная выпуклая область. С точки зрения метода причина, по которой допустимыми областями являются выпуклые области и только они, заключается в том, что только для выпуклых областей целые функции, являющиеся преобразованиями Фурье функций из $\mathscr{D}(\Omega)$, могут быть адекватно описаны в терминах неравенств вида

$$|\psi(z)| \leqslant CM_\alpha(z),$$

где $\{M_\alpha(z)\}$ — некоторая система мажорант. Если область Ω выпукла, такое описание всегда возможно. Для этого выберем некоторую возрастающую последовательность выпуклых компактов $K_\alpha \subset \Omega$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, объединение которых равно Ω. Целая функция ψ является преобразованием Фурье некоторой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ в том и только том случае, когда при некотором α она удовлетворяет неравенствам

$$|\psi(z)| \leqslant c_q(|z|+1)^{-q}\exp(\gamma_\alpha(\operatorname{Im} z)), \qquad q = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\gamma_\alpha(y) = \sup_{\xi \in K_\alpha}(-y, \xi).$$

Обозначив через $Z(\Omega)$ пространство таких целых функций, мы можем повторить все рассуждения 2°—5°, заменяя всюду мажоранту $\exp(b|\operatorname{Im} z|)$ на $\exp(\gamma_\alpha(\operatorname{Im} z))$.

Условие выпуклости области Ω на самом деле не является следствием ограниченности метода, оно необходимо по существу самой задачи. Именно, представление (10), вообще говоря, невозможно в невыпуклой области Ω. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим тривиальный случай $p \equiv 0$. В этом случае уравнению (1.1) удовлетворяет любая обобщенная в Ω функция, а в формуле (12) $\overline{N} = C^n$. Следовательно, представление (10) означает, что всякая обобщенная в Ω функция является обратным преобразованием Фурье некоторой меры μ в C^n такой, что интеграл $\int |\tilde{\varphi}\mu|$ сходится для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. С другой стороны, как известно, такое представление обобщенных функций возможно лишь в случае, когда область Ω выпукла, ч. и т. д.

§ 3. Экспоненциальное представление решений произвольных систем

Рассмотрим сначала общую систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с одной неизвестной функцией

$$p_1(D)u = \ldots = p_t(D)u = 0, \quad u \in \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.3}$$

Здесь $p_1(D), \ldots, p_t(D)$ — произвольный конечный набор операторов с постоянными коэффициентами, а Ω — выпуклая область. По определению функция $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда она обращается в нуль на всех функциях вида

$$\bar{p}_1(D)\varphi_1 + \ldots + \bar{p}_t(D)\varphi_t, \qquad \varphi_1, \ldots, \varphi_t \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Преобразование Фурье функционала u есть функционал над $Z(\Omega)$, который характеризуется тем, что обращается в нуль на подпространстве $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_t)Z(\Omega)$, образованном функциями вида

$$\bar{p}_1(z)\psi_1 + \ldots + \bar{p}_t(z)\psi_t, \qquad \psi_1, \ldots, \psi_t \in Z(\Omega).$$

Поэтому получение экспоненциального представления для решений системы (1) сводится к изучению факторпространства

$$Z(\Omega)/(p_1, \ldots, p_t)Z(\Omega). \tag{2.3}$$

Задача, рассмотренная нами во 2° § 2, является частным случаем настоящей, когда $t = 1$, а полином p_1 не имеет кратных делителей. Для решения общей задачи рассмотрим характеристическое многообразие N системы (1), т. е. множество общих корней многочленов $p_1, \ldots, p_t$. Сопряженное множество $\bar{N}$ есть множество общих корней сопряженных многочленов $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_t$; мы укажем сейчас конструкцию локальных условий на этом множестве, выделяющих подпространство $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_t)Z(\Omega) \subset Z(\Omega)$. Эта конструкция имеет следующий вид:

существуют конечное покрытие $\{N_\lambda, \lambda = 1, \ldots, l\}$ многообразия $\bar{N}$, образованное алгебраическими многообразиями, и для каждого λ конечный набор дифференциальных операторов $d_\lambda^j(z, D)$ в C^n с полиномиальными коэффициентами такие, что совокупность условий

$$d_\lambda^j(z, D)\psi(z)\big|_{N_\lambda} = 0, \quad \forall j, \ \lambda, \ \psi \in Z(\Omega),$$

необходима и достаточна для того, чтобы функция ψ принадлежала подпространству $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_t) Z(\Omega)$.

В частном случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, покрытие $\{N_\lambda\}$ сводится к самому множеству $\bar{N}$, а набор операторов d_λ^j сводится к единственному оператору нулевого порядка, равному тождественно единице. Опишем теперь конструкцию операторов d_λ^j в более общем случае, когда $t = 1$, но какие-либо ограничения на многочлен $\bar{p}_1$ отсутствуют. Пусть $q_1^{\alpha_1} \ldots q_l^{\alpha_l}$ — его представление в виде произведения степеней неприводимых многочленов, а для каждого λ, N_λ — множество корней q_λ. В таком случае, как нетрудно проверить, операторы

$$d_\lambda^j(z, D) = \frac{\partial^j}{\partial z_1^j}, \qquad j = 0, \ldots, \alpha_\lambda - 1, \quad \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются искомыми. (Многочлен $\bar{p}_1$ предполагается нормальным по z_1.) В общем случае, когда $t > 1$, операторы d_λ^j строятся более сложным образом; типичный случай общей ситуации рассмотрен в гл. IV, § 4.

Далее мы введем оператор d, относящий функции $\psi \in Z(\Omega)$ совокупность функций $d_\lambda^j(z, D) \psi(z)\big|_{N_\lambda}$. Чтобы описать образ этого оператора, мы используем следующее понятие, обобщающее понятие аналитической функции на $\bar{N}$. Голоморфной p-функцией *) мы назовем любой набор $\{f_\lambda^j\}$, в котором f_λ^j есть функция на N_λ, такой, что для всякой точки $\zeta \in \bar{N}$ существует обычная голоморфная в ее окрестности функция F такая, что

$$f_\lambda^j(z) = d_\lambda^j(z, D) F(z)\big|_{N_\lambda}, \quad \forall j, \lambda.$$

Совокупность голоморфных p-функций, компоненты которых удовлетворяют неравенствам

$$\left| f_\lambda^j(z) \right| \leqslant c_q (|z| + 1)^{-q} \exp\left(\gamma_\alpha (\operatorname{Im} z)\right), \qquad q = 0, 1, 2, \ldots; \ \exists \alpha,$$

образуют линейное пространство, которое мы обозначим через $Z_p(\Omega)$. Оператор d действует из пространства $Z(\Omega)$ в $Z_p(\Omega)$ и обращается в нуль на подпространстве $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_t) Z(\Omega)$. Согласно основной теореме первой части книги этот оператор на самом деле устанавливает изоморфизм факторпространства (2) и пространства $Z_p(\Omega)$.

---

*) Символ p обозначает вектор $(p_1, \ldots, p_t)$

Из этого результата по аналогии с § 2 можно вывести экспоненциальное представление для решений системы (1)

$$u(\xi) = \sum_{j,\lambda} \int_{N_\lambda} d^j_\lambda(z, -i\xi)\exp(z, -i\xi)\,\mu^j_\lambda. \tag{3.3}$$

Здесь для любого компакта K_α меры μ^j_λ могут быть выбраны так, что

$$\sum_{j,\lambda} \int_{N_\lambda} (|z|+1)^{-q}\exp\left(\gamma_\alpha(\operatorname{Im} z)\right)|\mu^j_\lambda| < \infty$$

с некоторым q.

Наконец, полную общность мы достигнем при рассмотрении произвольной прямоугольной системы уравнений

$$p(D)u = 0 \tag{4.3}$$

с многими неизвестными функциями $u = (u_1, \ldots, u_s)$, где $p(D)$ — матрица общего вида, образованная дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Экспоненциальное представление для решений такой системы мы получим в виде формулы, аналогичной (3), в которой d^j_λ будут уже векторными дифференциальными операторами. Доказательство этой общей формулы в самых общих чертах следует плану доказательства представления § 2. Однако используемый при этом технический аппарат значительно сложнее.

В первой главе будут введены и изучены семейства топологических модулей, представляющие удобный для дальнейшего язык. В той же главе собраны несколько важных гомологических теорем. Во второй главе доказывается общая теорема, заменяющая в общем случае конструкцию интерполирующего многочлена, использованную в 4° § 2. В третьей главе мы установим тривиальность когомологий аналитических коцепей, подчиненных определенным ограничениям роста на бесконечности, откуда, в частности, будет следовать результат, использованный без доказательства в 4° § 2. В четвертой главе будет доказана основная теорема, о которой говорилось выше, для случая матрицы p общего вида. Во второй части мы выведем из основной теоремы экспоненциальное представление решений общей системы (4) и многие другие следствия, касающиеся дифференциального оператора $p(D)$.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Глава I

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

Основное содержание главы заключается в гомологических теоремах § 2, в которых идет речь о семействах топологических модулей, представляющих более сложные образования, чем модули. Метод семейств модулей и результаты § 2 будут многократно применяться в дальнейшем. Все определения, относящиеся к семействам, сосредоточены в § 1, содержание которого заключается, по существу, в обосновании рассуждений § 2.

В § 3 приводятся некоторые элементарные факты из обычной гомологической алгебры. Содержание этого параграфа, за исключением вводного раздела, 2° и 7°, используется лишь в пятой главе, начиная с § 7.

§ 1. Семейства топологических модулей

1°. Топологические модули и отображения. Зафиксируем некоторое коммутативное кольцо A, содержащее в качестве подкольца поле C комплексных чисел. Напомним, что модулем над кольцом A или коротко A-модулем называется коммутативная группа X (которую мы будем записывать аддитивно), в которой каждый элемент a кольца A определяет аддитивный оператор $x \to ax$, причем сумме и произведению элементов A отвечает сумма и композиция этих операторов. Мы будем предполагать выполнение условия унитарности модуля, которое означает, что единице кольца A отвечает тождественный оператор. Поскольку по предположению кольцо A содержит поле C, всякий A-модуль в то же время является линейным пространством над C. Модуль X мы назовем ***топологическим***, если он является топологическим линейным пространством и для любого элемента $a \in A$ соответствующий оператор в X непрерывен.

Всякий A-модуль можно рассматривать как топологический, наделив его дискретной топологией, т. е. топологией, в которой каждый его элемент является собственной окрестностью; другой способ — наделить его абсолютно неотделимой топологией, в которой единственным открытым множеством является весь модуль.

Пусть X — топологический A-модуль. Всякий его подмодуль Y является топологическим, если ввести в нем топологию, индуцированную из X. Рассмотрим фактормодуль X/Y и каноническое отображение $X \to X/Y$, относящее каждому элементу из X содержащий его класс смежности. Это отображение мы используем для введения топологии в модуле X/Y, объявив открытыми множествами в этом модуле образы открытых множеств из X. В дальнейшем, говоря о подмодуле и фактормодуле, мы будем предполагать, что в них введена топология по описанному сейчас правилу.

Пусть φ: $X \to Y$ — некоторое отображение A-модулей. С ним связываются модули $\operatorname{Ker}\varphi =$ ядро φ, $\operatorname{Im}\varphi =$ образ φ, $\operatorname{Coker}\varphi = Y/\operatorname{Im}\varphi =$ коядро φ и $\operatorname{Coim}\varphi = X/\operatorname{Ker}\varphi =$ кообраз φ. Предположим, что модули X и Y топологические. Тогда по сделанному выше соглашению все четыре связанные с φ модуля также топологические. Скажем, что *отображение φ непрерывно*, если оно непрерывно как отображение топологических линейных пространств X и Y. В частности, каноническое отображение $X \to X/Y$ всегда непрерывно. *В дальнейшем все встречающиеся модули будут предполагаться топологическими, а все отображения — непрерывными* (если не оговорено противное). Поэтому слова «топологический» и «непрерывное» будут опускаться.

Пусть φ: $X \to Y$ — некоторое отображение модулей, а X', $X'' \subset X'$ и Y', $Y'' \subset Y'$ — подмодули соответственно модулей X и Y такие, что $\varphi(X') \subset Y'$, а $\varphi(X'') \subset Y''$. Сужая φ на X', мы получим отображение $\hat{\varphi}$: $X' \to Y'$. Так как отображение $\hat{\varphi}$ переводит подмодуль X'' в Y'', с его помощью можно построить отображение

$$\check{\varphi}\colon\ X'/X'' \to Y'/Y''$$

соответствующих классов смежности. Отображение $\check{\varphi}$, очевидно, является непрерывным отображением топологических модулей. Это отображение мы назовем *ассоциированным* с φ.

Отображение φ: $X \to Y$ мы назовем *изоморфизмом* и запишем $X \overset{\varphi}{\cong} Y$, если существует обратное отображение φ^{-1}: $Y \to X$, т. е. такое отображение, что композиции $\varphi\varphi^{-1}$ и $\varphi^{-1}\varphi$ представляют тождественные отображения. Отображение φ назовем *гомоморфизмом*, если ассоциированное с ним отображение $\check{\varphi}$: $\operatorname{Coim}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ есть изоморфизм. Очевидно, что всякий изоморфизм является в то же время гомоморфизмом. Если модули X и Y наделены дискретной топологией, то всякое их отображение φ: $X \to Y$ является гомоморфизмом.

Последовательность отображений

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

назовем *полуточной* (в члене Y), если $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. Эту последовательность мы назовем *алгебраически точной*, если $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Наконец, скажем, что она *точна*, если она алгебраически точна, а отображения φ и ψ суть гомоморфизмы. В частности, всякая последовательность алгебраически точна тогда и только тогда, когда она точна при наделении X, Y и Z дискретной топологией.

Отображения, которые были рассмотрены в этом пункте, мы будем называть однозначными в отличие от тех, которые мы рассмотрим в 2°.

2°. Многозначные отображения модулей.

Определение 1. *Многозначным отображением* $\varphi\colon X \to Y$ топологических A-модулей мы назовем любую функцию на X, относящую каждому элементу x некоторое подмножество $\varphi(x)$ модуля Y, удовлетворяющую следующим двум условиям.

I. Линейность. Для любых элементов x_1, $x_2 \in X$ и элементов a_1, $a_2 \in A$ имеет место включение

$$a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) \subset \varphi(a_1x_1 + a_2x_2). \tag{1.1}$$

II. Непрерывность. Для любой окрестности нуля $V \subset Y$ найдется окрестность нуля $U \subset X$ такая, что для любого $x \in U$ пересечение $\varphi(x) \cap V$ не пусто.

Из условия I следует, что для любых a_1, $a_2 \in A$

$$a_1\varphi(0) + a_2\varphi(0) \subset \varphi(0).$$

Отсюда следует, что множество $\varphi(0)$ есть подмодуль модуля Y. Для любого элемента $x \in X$ из того же условия вытекают включения

$$\varphi(0) + \varphi(x) \subset \varphi(x), \qquad \varphi(x) - \varphi(x) \subset \varphi(0),$$

которые означают, что множество $\varphi(x)$ есть сдвиг подмодуля $\varphi(0)$, т. е. $\varphi(x) = \varphi(0) + y$ для любого элемента $y \in \varphi(x)$. В частности, если $0 \in \varphi(x)$, то $\varphi(x) = \varphi(0)$.

Ядром отображения φ мы назовем подмножество $\operatorname{Ker}\varphi$ модуля X, образованное теми элементами x, для которых $\varphi(x) = \varphi(0)$. Это подмножество является подмодулем. Действительно, для любых элементов x_1, x_2 этого подмножества и элементов a_1, $a_2 \in A$ множества $a_1\varphi(x_1)$ и $a_2\varphi(x_2)$ содержат нулевой элемент модуля X. Из включения (1) следует, что множество $\varphi(a_1x_1 + a_2x_2)$ также содержит нулевой элемент и, следовательно, совпадает с $\varphi(0)$.

Образом отображения φ мы назовем множество $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(X)$, являющееся объединением множеств $\varphi(x)$ по $x \in X$. Оно является подмодулем Y, поскольку для любых элементов $y_1 \in \varphi(x_1)$ и $y_2 \in \varphi(x_2)$ этого множества из (1) вытекает включение $a_1y_1 + a_2y_2 \in \varphi(a_1x_1 + a_2x_2)$. Рассмотрим также модули: *коядро* $\operatorname{Coker}\varphi = Y/\operatorname{Im}\varphi$ и *кообраз* $\operatorname{Coim}\varphi = X/\operatorname{Ker}\varphi$ отображения φ.

Типичным примером многозначного отображения является отображение $X/Y \to X$, относящее каждому классу смежности совокупность элементов, принадлежащих этому классу. Это отображение мы также будем называть *каноническим*. Всякое однозначное отображение является в то же время многозначным, причем $\varphi(0) = 0$. В дальнейшем, если противное не оговорено, все отображения будут предполагаться, вообще говоря, многозначными.

Пусть φ: $X \to Y$ и ψ: $Y \to Z$ — два отображения модулей. Определим их композицию. Для каждого $x \in X$ через $\psi\varphi(x)$ обозначим объединение $\psi(\varphi(x))$ множеств $\psi(y)$ по $y \in \varphi(x)$. Проверим линейность отображения $\psi\varphi$. Используя линейность отображений φ и ψ, мы получаем

$$a_1\psi(\varphi(x_1)) + a_2\psi(\varphi(x_2)) \subset \psi(a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2)) \subset \psi(\varphi(a_1x_1 + a_2x_2))$$

для любых x_1, $x_2 \in X$ и a_1, $a_2 \in A$. Тем самым линейность установлена. Проверим непрерывность.

Пусть W — некоторая окрестность нуля в Z. Так как отображения φ и ψ непрерывны, можно найти окрестности нуля $V \subset Y$ и $U \subset X$ такие, что для любого $x \in U$ пересечение $\varphi(x) \cap V$ не пусто, а для любого $y \in V$ не пусто пересечение $\psi(y) \cap W$. Отсюда следует, что для любого $x \in U$ не пусто пересечение $\psi(\varphi(x)) \cap W$. Тем самым мы установили, что композиция $\psi\varphi$ действительно является отображением.

3°. Семейства топологических модулей.

Определение 2. *Возрастающим семейством топологических A-модулей* мы назовем любую систему $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$, состоящую из функции X_α, заданной на множестве всех целых чисел, значениями которой являются топологические A-модули, и из набора однозначных непрерывных отображений $i_\alpha^{\alpha'}$: $X_\alpha \to X_{\alpha'}$, определенных для любой пары чисел α, α' такой, что $\alpha \leqslant \alpha'$, удовлетворяющих условиям:

а) для любого α отображение i_α^α тождественное,

б) для любых $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha''$ имеем $i_{\alpha'}^{\alpha''} i_\alpha^{\alpha'} = i_\alpha^{\alpha''}$.

Убывающим семейством топологических A-модулей мы будем называть систему $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$, где X_α—топологический A-модуль, определенный для любого целого α, а $i_\alpha^{\alpha'}$: $X_\alpha \to X_{\alpha'}$ — однозначное отображение, определенное для любых $\alpha \geqslant \alpha'$, удовлетворяющее условию а), а также условию:

б′) для любых $\alpha \geqslant \alpha' \geqslant \alpha''$ имеет место соотношение $i_{\alpha'}^{\alpha''} i_\alpha^{\alpha'} = i_\alpha^{\alpha''}$.

Легко видеть, что всякое убывающее семейство A-модулей сводится к возрастающему семейству, а именно, если $\{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — убывающее семейство, то совокупность модулей $Y_\alpha = X_{-\alpha}$ и отображений $j_\alpha^{\alpha'} = i_{-\alpha}^{-\alpha'}$ образует возрастающее семейство. Поэтому при изучении возрастающих и убывающих семейств достаточно ограничиться лишь возрастающими семействами.

Иногда в приложениях у нас будут возникать возрастающие (или убывающие) семейства $\{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$, в которых модули X_α и отображения $i_\alpha^{\alpha'}$ определены лишь для $0 < \alpha \leqslant \alpha'$. Такие неполные семейства можно тривиальным образом достроить до полных семейств, положив $X_\alpha = 0$ и $i_\alpha^{\alpha'} = 0$ при $\alpha \leqslant 0$. Итак, в ближайших двух параграфах мы будем рассматривать лишь полные возрастающие семейства топологических модулей, которые мы будем называть просто *семействами* (топологических модулей).

Определение 3. Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ и $Y = \{Y_\alpha, j_\alpha^{\alpha'}\}$ — два семейства. Их *отображением* φ: $X \to Y$ мы назовем совокупность непрерывных отображений

$$\varphi_\alpha: X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)},$$

определенных для всех целых α, где $\beta(\alpha)$ есть неубывающая функция α, стремящаяся к $\pm\infty$ вместе с α, причем для любых $\alpha < \alpha'$ следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha'} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha'}} & Y_{\beta(\alpha')} \\ {\scriptstyle i_\alpha^{\alpha'}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j_{\beta(\alpha)}^{\beta(\alpha')}} \\ X_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & Y_{\beta(\alpha)} \end{array} \tag{2.1}$$

коммутативна. Отображения φ_α мы назовем *компонентами* отображения φ, а функцию $\beta(\alpha)$ — *порядком* этого отображения.

Отображение I: $X \to Y$ назовем *тождественным*, если его компонентами являются отображения $i_\alpha^{\beta(\alpha)}$. Таким образом, тождественные отображения находятся во взаимно однозначном соответствии со своими порядками, т. е. неубывающими функциями $\beta(\alpha)$, стремящимися к $\pm\infty$ вместе с α. Если $\beta(\alpha) \equiv \alpha$, то соответствующее тождественное отображение мы назовем *единичным*.

Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — некоторое семейство. Семейство $Y = \{Y_\alpha, j_\alpha^{\alpha'}\}$ мы назовем *подсемейством* семейства X, если для каждого α Y_α есть подмодуль X_α (топология которого индуцирована из X_α), а отображения $j_\alpha^{\alpha'}$ являются сужениями отображений $i_\alpha^{\alpha'}$. Пусть Y — подсемейство X. Рассмотрим последовательность фактормодулей X_α/Y_α. Так как при любых $\alpha' > \alpha$ $i_\alpha^{\alpha'}(Y_\alpha) = j_\alpha^{\alpha'}(Y_\alpha) \subset Y_{\alpha'}$, то определено отображение $\check{i}_\alpha^{\alpha'}$: $X_\alpha/Y_\alpha \to X_{\alpha'}/Y_{\alpha'}$, ассоциированное с отображением $i_\alpha^{\alpha'}$. Легко видеть, что модули X_α/Y_α и отображения $\check{i}_\alpha^{\alpha'}$ образуют семейство. Это семейство мы назовем *факторсемейством* и обозначим через X/Y. Канонические отображения

$X_\alpha \to X_\alpha/Y_\alpha$ и $X_\alpha/Y_\alpha \to X_\alpha$ определяют отображения семейств $X \to X/Y$ и $X/Y \to Y$, которые мы будем называть также *каноническими*.

Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ и $Y = \{Y_\alpha, j_\alpha^{\alpha'}\}$ — произвольные семейства, а $\varphi = \{\varphi_\alpha: X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}\}$ — их отображение. Из коммутативности диаграммы (2) следует, что отображение $i_\alpha^{\alpha'}$ переводит подмодуль $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ в подмодуль $\operatorname{Ker}\varphi_{\alpha'}$. Следовательно, подмодули $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$, наделенные топологиями, индуцированными из модулей X_α, образуют подсемейство семейства X. Это подсемейство мы назовем *ядром отображения* φ и обозначим через $\operatorname{Ker}\varphi$.

Построим образ φ. Для каждого целого β в модуле Y_β выделим подмодуль $j_{\beta(\alpha)}^{\beta}\varphi_\alpha(X_\alpha)$, где α — наибольшее число такое, что $\beta \geqslant \beta(\alpha)$. Наделив эти подмодули топологиями, индуцированными из модулей Y_β, мы получим подсемейство семейства Y. Это подсемейство мы назовем *образом* φ и обозначим через $\operatorname{Im}\varphi$ или $\varphi(X)$. Рассмотрим также факторсемейства

$$\operatorname{Coim}\varphi = X/\operatorname{Ker}\varphi, \qquad \operatorname{Coker}\varphi = Y/\operatorname{Im}\varphi.$$

Пусть

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z,$$

$$\varphi = \{\varphi_\alpha: X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}\}, \qquad \psi = \{\psi_\alpha: Y_\alpha \to Z_{\gamma(\alpha)}\}$$

— последовательность семейств и их отображений. Композицией этих отображений мы назовем отображение, компонентами которого являются отображения $\psi_{\beta(\alpha)}\varphi_\alpha: X_\alpha \to Z_{\gamma(\beta(\alpha))}$. Установим корректность этого определения. Функция $\gamma(\beta(\alpha))$ неубывающая и стремится к $\pm\infty$ вместе с α, так как этими свойствами по определению обладают функции $\beta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_{\alpha'} \arrow[r, "\varphi_{\alpha'}"] & Y_{\beta(\alpha')} \arrow[r, "\psi_{\beta(\alpha')}"] & Z_{\gamma(\beta(\alpha'))} \\
X_\alpha \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & Y_{\beta(\alpha)} \arrow[u] \arrow[r, "\psi_{\beta(\alpha)}"] & Z_{\gamma(\beta(\alpha))} \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad \alpha' > \alpha$$

коммутативна, так как коммутативны оба квадрата, образующие эту диаграмму. Следовательно, отображения $\psi_{\beta(\alpha)}\varphi_\alpha$ действительно образуют отображение семейств.

Заметим, что композиция тождественных отображений есть снова тождественное отображение. Отметим некоторые другие простые свойства тождественных отображений.

Предложение 1.

I. *Для любых двух тождественных отображений I_1, I_2 некоторого семейства X можно найти некоторые тождественные* *отображения* I_3 *и* I_4 *того же семейства такие, что* $I_3I_1 = I_4I_2$.

II. *Пусть* $\varphi: X \to Y$ — *некоторое отображение семейств. Для любого тождественного отображения* J *семейства* Y *можно найти тождественные отображения* $I: X \to X$ *и* $J': Y \to Y$ *такие, что* $\varphi I = J'J\varphi$.

III. *Пусть* $\varphi: X \to Y$ — *некоторое отображение, а* $I: X \to X$ — *некоторое тождественное отображение. Тогда можно найти тождественное отображение* J *семейства* Y *такое, что* $\varphi I = J\varphi$.

Доказательство. Установим первое утверждение. Пусть $\beta_i(\alpha)$ — порядок отображения I_i, $i = 1, 2$. Положим $\beta(\alpha) = \max\limits_i \beta_i(\alpha)$. Каждую неубывающую функцию γ_i: $\beta_i(\alpha) \to \beta(\alpha)$ продолжим на все целочисленные значения аргумента с сохранением свойства монотонного неубывания. Полученные функции $\gamma_i(\alpha)$ выберем в качестве порядков отображений I_{i+2}, $i = 1, 2$.

Докажем утверждение II. Пусть $\beta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$ — порядки отображений φ и J. Функцию $\gamma(\beta(\alpha))$, являющуюся порядком $J\varphi$, выберем в качестве порядка отображения I, а функцию $\beta(\alpha)$ — в качестве порядка J'.

Установим утверждение III. Пусть $\delta(\alpha)$ — порядок отображения I. Функцию $\beta(\alpha) \to \beta(\delta(\alpha))$ продолжим на все множество целых чисел с сохранением свойства монотонного неубывания и выберем в качестве порядка отображения J. ■

4°. Эквивалентные семейства и отображения.

Определение 4а. Пусть X' и X'' — подсемейства некоторого семейства X. Скажем, что *подсемейство* X' *мажорирует подсемейство* X'', и запишем $X' \succ X''$, если существует тождественное отображение I семейства X, переводящее подсемейство X'' в X'.

Пусть X', X'', X''' — три подсемейства X, причем $X' \succ X'' \succ X'''$, т. е. существуют тождественные отображения I' и I'', переводящие соответственно X'' в X', а X''' в X''. Тогда композиция $I'I''$ переводит X''' в X', т. е. $X' \succ X'''$. Таким образом, мажорирование подсемейств является отношением порядка.

Пусть X' и $X'' \prec X'$ — подсемейства в X, а I — тождественное отображение, переводящее X'' в X'. Мы можем рассмотреть факторсемейство $X'/I(X'')$; любое факторсемейство такого вида мы будем называть *семейством, ассоциированным* с X.

Определение 4б. Пусть $X_1 = X_1'/X_1''$ и $X_2 = X_2'/X_2''$ — два семейства, ассоциированных с X. Скажем, что первое из них *мажорирует* второе, и запишем $X_1 \succ X_2$, если одновременно $X_1' \succ X_2'$ и $X_1'' \succ X_2''$.

Мажорирование семейств, ассоциированных с X, является отношением порядка, поскольку таковым является мажорирование подсемейств. Используя предложение 1, определение 4б можно переформулировать так: $X_1 \succ X_2$ тогда и только тогда, когда существует тождественное отображение I: $X \to X$ такое, что $I(X_2') \subset X_1'$ и $I(X_2'') \subset X_1''$.

Скажем, что семейства X_1 и X_2 *эквивалентны*, и запишем $X_1 \sim X_2$, если одновременно $X_1 \succ X_2$ и $X_1 \prec X_2$. Заметим, что если $X' \succ X''$, то факторсемейство $X'/I(X'')$ с точностью до эквивалентного не зависит от выбора тождественного отображения I, переводящего X'' в X'. Для этого факторсемейства мы будем использовать более короткое обозначение X'/X'', которое, однако, не означает, что X'' обязано быть подсемейством X'.

Определение 5. Скажем, что два *отображения* φ, φ': $X \to Y$ *эквивалентны*, и запишем $\varphi \sim \varphi'$, если существуют тождественные отображения J, J': $Y \to Y$ такие, что $J\varphi = J'\varphi'$.

Установим корректность этого определения. Пусть $\varphi \sim \varphi'$ и $\varphi' \sim \varphi''$, т. е.

$$J\varphi = J'\varphi', \qquad J^*\varphi' = J^{**}\varphi''.$$

Согласно предложению 1 существуют тождественные отображения J_1 и J_2 такие, что $J_1J' = J_2J^*$. Отсюда $J_1J\varphi = J_2J^{**}\varphi''$, т. е. $\varphi \sim \varphi''$, ч. и т. д.

Предложение 2. *Отношение эквивалентности сохраняется при композиции.*

Доказательство. Пусть φ, φ': $X \to Y$ и ψ, ψ': $Y \to Z$ — пары эквивалентных отображений. По определению $J\varphi = J'\varphi'$ и $K\psi = K'\psi'$ с некоторыми тождественными отображениями J, J' и K, K'. В силу предложения 1 можно найти тождественные отображения K_1, K_1' такие, что

$$K_1K\psi = K\psi J, \qquad K_1'K'\psi' = K'\psi'J'.$$

Тогда

$$K_1K\psi\varphi = K\psi J\varphi = K'\psi'J'\varphi' = K_1K'\psi'\varphi',$$

т. е. $\psi\varphi \sim \psi'\varphi'$. ■

В частности, для любого отображения φ: $X \to Y$ и тождественного отображения I: $X \to X$ отображения φI и φ эквивалентны.

Пусть задана некоторая диаграмма семейств и их отображений, т. е. некоторая совокупность семейств X^i, $i \in \mathcal{J}$, и их отображений φ_i^j: $X^i \to X^j$, определенных для некоторых пар $(i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}$. Скажем, что эта диаграмма *коммутативна*, если выполнено следующее условие. Если для некоторой пары $(i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ определены некоторые композиции вида

$$\varphi_{i^*}^j \dots \varphi_{i'}^{i''}\varphi_i^{i'}: X^i \to X^j,$$

то все эти композиции эквивалентны. В силу предложения 2 коммутативность диаграммы не нарушается при замене всех ее отображений на эквивалентные.

Определение 6. Пусть X' и $X'' \prec X'$ — семейства, ассоциированные с некоторым семейством X, а Y' и $Y'' \prec Y'$ — семейства, ассоциированные с некоторым семейством Y. Пусть, далее,

$$\varphi'\colon X' \to Y', \qquad \varphi''\colon X'' \to Y''$$

— некоторые отображения этих семейств. Скажем, что отображение φ' *мажорирует* отображение φ'', и запишем $\varphi' \succ \varphi''$, если существуют тождественные отображения I и J соответственно семейств X и Y такие, что ассоциированные с ними отображения $\breve{I}$ и $\breve{J}$ определяют коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & Y' \\ {\scriptstyle \breve{I}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \breve{J}} \\ X'' & \xrightarrow{\varphi''} & Y'' \end{array} \tag{3.}$$

т. е. $\varphi'\breve{I} \sim \breve{J}\varphi''$.

Очевидно, что отношение мажорирования отображений есть отношение порядка. Если $X' \sim X''$, $Y' \sim Y''$, $\varphi' \succ \varphi''$, а $\varphi'' \succ \varphi'$, то отображения φ' и φ'' *назовем эквивалентными* и запишем $\varphi' \sim \varphi''$. В случае $X' = X''$ и $Y' = Y''$ это отношение эквивалентности совпадает с отношением эквивалентности определения 5. Действительно, если $\varphi' \sim \varphi''$ в смысле определения 5, то φ' и φ'' эквивалентны и в смысле определения 6. Покажем обратное. Пусть φ' и φ'' — отображения, эквивалентные в смысле определения 6. Согласно определению существуют тождественные отображения J_1, J_2: $Y' \to Y'$ такие, что $J_1\varphi'\breve{I} = J_2\breve{J}\varphi''$. В силу предложения 1 можно найти тождественное отображение J^* такое, что $J^*J_1\varphi' = J_1\varphi'\breve{I}$. Таким образом, $J^*J_1\varphi' = J_2\breve{J}\varphi''$, т. е. φ' и φ'' — отображения, эквивалентные в смысле определения 5.

Пусть X', X'' — некоторые семейства, ассоциированные с X, а Y', Y'' — некоторые семейства, ассоциированные с Y. Предположим, что $X'' \prec X'$, а $Y'' \succ Y'$, т. е. существуют ассоциированные с тождественными отображения $\breve{I}$: $X'' \to X'$ и $\breve{J}$: $Y' \to Y''$. В таком случае для любого отображения φ: $X' \to Y'$ определены композиции $\varphi\breve{I}$: $X'' \to Y'$ и $\breve{J}\varphi$: $X' \to Y''$. Очевидно, что эти композиции с точностью до эквивалентных не зависят от I и J. В дальнейшем мы не будем отличать отображений $\varphi\breve{I}$ и $\breve{J}\varphi$ от самого отображения φ.

Пусть теперь X и Y — произвольные семейства, а X'/X'' и Y'/Y'' — ассоциированные с ними семейства. Пусть, далее, задано отображение φ: $X \to Y$, удовлетворяющее условиям $\varphi(X') \prec Y'$ и $\varphi(X'') \prec Y''$. Заменив φ на эквивалентное отображение, если это необходимо, мы можем добиться выполнения включений $\varphi(X')\subset Y'$ и $\varphi(X'')\subset Y''$. В таком случае можно рассмотреть отображение

$$\breve{\varphi}\colon X'/X''\to Y'/Y'',$$

компонентами которого являются отображения $\breve{\varphi}_\alpha\colon X'_\alpha/X''_\alpha\to Y'_\alpha/Y''_\alpha$, ассоциированные с компонентами отображения φ. Отображение $\breve{\varphi}$ мы будем называть ***ассоциированным*** с φ. Легко видеть, что описанная конструкция определяет отображение $\breve{\varphi}$ с точностью до эквивалентного.

Пусть φ', φ'': $X\to Y$ — два отображения семейств, имеющие одинаковый порядок. Суммой таких отображений мы назовем отображение $\varphi'+\varphi''$: $X\to Y$, компонентами которого являются суммы соответствующих компонент отображений φ' и φ''. Если отображения φ' и φ'' имеют разные порядки, их суммой мы назовем отображение $J'\varphi'+J''\varphi''$, где тождественные отображения J' и J'' семейства Y подобраны так, чтобы отображения $J'\varphi'$ и $J''\varphi''$ имели одинаковые порядки. Очевидно, что отображение $\varphi'+\varphi''$ с точностью до эквивалентного не зависит от выбора отображений J' и J''. Очевидно также, что операция сложения отображений семейств, а также операция умножения отображения на элемент кольца A не нарушают отношения мажорирования, введенного в определении 6.

Пусть X' и Y' — некоторые семейства, ассоциированные с семействами X и Y, а φ: $X'\to Y'$ — некоторое отображение этих семейств. Тогда семейства $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Coim}\varphi$ ассоциированы с X', а следовательно, и с X, а семейства $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Coker}\varphi$ ассоциированы с Y' и, следовательно, с Y.

Предложение 3. *Пусть отображения* φ': $X'\to Y'$ *и* φ'': $X''\to Y''$, *удовлетворяют соотношениям* $X'\succ X''$, $Y'\succ Y''$, $\varphi'\succ\varphi''$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\varphi'\succ\operatorname{Im}\varphi'', &\operatorname{Coker}\varphi'\succ\operatorname{Coker}\varphi'',\\ &\operatorname{Ker}\varphi'\succ\operatorname{Ker}\varphi'', &\operatorname{Coim}\varphi'\succ\operatorname{Coim}\varphi''.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Доказательство. Так как диаграмма (3) коммутативна, существуют тождественные отображения J_1 и J_2 семейства Y' такие, что $J_1\varphi'\breve{I}=J_2\breve{J}\varphi''$. Поскольку отображение $J_2\breve{J}$ переводит $\operatorname{Im}\varphi''$ в $\operatorname{Im}J_2\breve{J}\varphi''$, семейство $\operatorname{Im}J_2\breve{J}\varphi''$ мажорирует $\operatorname{Im}\varphi''$. С другой стороны,

$$\operatorname{Im}J_2\breve{J}\varphi''=\operatorname{Im}J_1\varphi'\breve{I}\subset\operatorname{Im}\varphi'\breve{I}\subset\operatorname{Im}\varphi'.$$

Следовательно, первое отношение (4) доказано. Второе соотношение вытекает из первого, поскольку $Y'\succ Y''$.

Докажем третье отношение. Из предложения 1 следует, что существуют тождественные отображения I_0, J_3 семейств X'' и Y' такие, что

$$\varphi'\breve{I}I_0=J_3J_1\varphi'\breve{I}=J_3J_2\breve{J}\varphi''.$$

Так как отображение $\breve{I}I_0$ переводит $\operatorname{Ker}\varphi'\breve{I}I_0$ в $\operatorname{Ker}\varphi'$, мы имеем

$$\operatorname{Ker}\varphi''\subset\operatorname{Ker} J_3J_2\breve{J}\varphi''=\operatorname{Ker}\varphi'\breve{I}I_0\prec\operatorname{Ker}\varphi'.$$

Таким образом, третье отношение (4) доказано. Четвертое отношение вытекает из третьего. ■

В частности, если семейства X', X''; Y', Y'' и отображения φ', φ'' эквивалентны, то и семейства (4) попарно эквивалентны.

Предложение 4. *Пусть*

$$X'\xrightarrow{\varphi'}Y'\xrightarrow{\psi'}Z',\qquad X''\xrightarrow{\varphi''}Y''\xrightarrow{\psi''}Z''$$

— некоторые последовательности семейств и их отображений, причем

$$X'\succ X'',\quad Y'\succ Y'',\ Z'\succ Z'',\quad \varphi'\succ\varphi'',\ \psi'\succ\psi''.$$

Тогда $\psi'\varphi'\succ\psi''\varphi''$. *Иначе говоря, композиция сохраняет отношение порядка отображений.*

Доказательство. Как легко понять, коммутативность диаграммы (3) не зависит от выбора отображений I и J. Отсюда для любых отображений $\breve{I}$: $X''\to X'$, $\breve{J}$: $Y''\to Y'$ и $\breve{K}$: $Z''\to Z'$, ассоциированных с тождественными в диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\varphi'"] & Y' \arrow[r, "\psi'"] & Z' \\
X'' \arrow[u, "\breve{I}"] \arrow[r, "\varphi''"] & Y'' \arrow[u, "\breve{J}"'] \arrow[r, "\psi''"] & Z'' \arrow[u, "\breve{K}"']
\end{tikzcd}$$

оба квадрата коммутативны. Следовательно, в силу предложения 2 вся диаграмма коммутативна. Отсюда $\psi'\varphi'\succ\psi''\varphi''$. ■

Определение 7. Отображение φ: $X\to Y$ назовем ***мономорфизмом***, если $\operatorname{Ker}\varphi\sim 0$, и ***эпиморфизмом***, если $\operatorname{Coker}\varphi\sim 0$.

В силу предложения 3 это определение инвариантно замене отображения φ на эквивалентное.

Предложение 5. *Если в последовательности*

$$W\xrightarrow{\chi}X\xrightarrow{\varphi}Y\xrightarrow{\psi}Z$$

отображение φ *— мономорфизм, то* $\operatorname{Ker}\varphi\chi\sim\operatorname{Ker}\chi$. *Если* φ *— эпиморфизм, то* $\operatorname{Im}\psi\varphi\sim\operatorname{Im}\psi$.

Доказательство. Пусть φ — мономорфизм. Тогда, поскольку $\operatorname{Ker}\varphi\sim 0$, можно найти тождественное отображение I семейства X такое, что $I(\operatorname{Ker}\varphi)=0$. Пусть $w\in\operatorname{Ker}\varphi\chi$, т. е. $\varphi\chi(w)=\varphi\chi(0)$. Из этого равенства следует, что можно найти элемент $x\in\chi(w)$ такой, что $\varphi(x)=\varphi(0)$, т. е. $x\in\operatorname{Ker}\varphi$. Отсюда $I(x)=0$, следовательно, множество $I\chi(w)$ содержит нуль и поэтому совпадает с $I\chi(0)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\varphi\chi\subset\operatorname{Ker}I\chi$. В силу предложения 3 $\operatorname{Ker}I\chi\sim\operatorname{Ker}\chi$, откуда $\operatorname{Ker}\varphi\chi \dashv \operatorname{Ker}\chi$. Обратное отношение очевидно. Первое утверждение доказано. Доказательство второго аналогично. ■

Из предложения 5 вытекает, что композиция мономорфизмов есть мономорфизм, а композиция эпиморфизмов есть эпиморфизм.

5°. Точные последовательности отображений.

Определение 8. Скажем, что *отображение семейств* φ: $X \to Y$ *устанавливает изоморфизм*, если существует отображение φ^{-1}: $Y \to X$ такое, что

$$\varphi\varphi^{-1} = J, \quad \varphi^{-1}\varphi = I,$$

где I и J — тождественные отображения соответственно семейств X и Y. Этот факт мы запишем так: $X \overset{\varphi}{\cong} Y$.

Из равенства $\varphi\varphi^{-1} = J$, в частности, вытекает, что отображение φ эквивалентно однозначному. Отображение φ^{-1} мы назовем обратным.

Скажем, что отображение φ есть *гомоморфизм*, если ассоциированное отображение

$$\hat{\varphi}: \quad \operatorname{Coim}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$$

есть изоморфизм. Таким образом, всякий гомоморфизм эквивалентен однозначному отображению.

Если отображение φ — изоморфизм или гомоморфизм, то всякое отображение, эквивалентное этому отображению, также является изоморфизмом, соответственно гомоморфизмом.

Предложение 6. *Для того чтобы отображение* φ: $X \to Y$ *было гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение* φ': $\operatorname{Im}\varphi \to X$ *такое, что композиция* $\varphi\varphi'$ *равна тождественному отображению семейства* $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. Необходимость. Из определения следует, что существует отображение φ^{-1}: $\operatorname{Im}\varphi \to X/\operatorname{Ker}\varphi$ такое, что композиция $\breve{\varphi}\varphi^{-1}$ есть тождественное отображение. Следовательно, композиция φ^{-1} и канонического отображения $X/\operatorname{Ker}\varphi \to X$ является искомым отображением φ'.

Достаточность. Через φ^{-1} обозначим композицию φ' и канонического отображения $X \to X/\operatorname{Ker}\varphi$. Так как $\breve{\varphi}\varphi^{-1} = \varphi\varphi'$, композиция $\breve{\varphi}\varphi^{-1}$ есть тождественное отображение. Отсюда $\breve{\varphi}\varphi^{-1}\breve{\varphi} \sim \breve{\varphi}$, т. е. $\breve{\varphi}(\varphi^{-1}\breve{\varphi} - j) \sim 0$, где j — единичное отображение семейства $\operatorname{Coim}\varphi$. Так как $\breve{\varphi}$ — мономорфизм, из предложения 5 следует, что

$$\operatorname{Ker}(\varphi^{-1}\breve{\varphi} - j) \sim \operatorname{Ker}\breve{\varphi}(\varphi^{-1}\breve{\varphi} - j) \sim \operatorname{Coim}\varphi,$$

откуда $\varphi^{-1}\breve{\varphi} - j \sim 0$. ■

Определение 9. Пусть

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \tag{5.1}$$

— последовательность семейств и их отображений, эквивалентных однозначным. Скажем, что эта последовательность *полуточна*, если $\operatorname{Im}\varphi \prec \operatorname{Ker}\psi$, т. е. $\psi\varphi \sim 0$. Скажем, что эта последовательность *алгебраически точна*, если $\operatorname{Im}\varphi \sim \operatorname{Ker}\psi$. Последовательность (5) назовем *точной*, если она алгебраически точна, а отображения φ и ψ суть гомоморфизмы.

Предложение 7. *Пусть*

$$X' \xrightarrow{\varphi'} Y' \xrightarrow{\psi'} Z', \qquad X'' \xrightarrow{\varphi''} Y'' \xrightarrow{\psi''} Z''$$

— две последовательности соответственно эквивалентных семейств и отображений. Если одна из этих последовательностей полуточна, алгебраически точна или точна, то тем же свойством обладает и другая.

Доказательство. Из предложения 3 $\operatorname{Im}\varphi' \sim \operatorname{Im}\varphi''$ и $\operatorname{Ker}\psi' \sim \sim \operatorname{Ker}\psi''$. Остается добавить, что из гомоморфности отображения вытекает гомоморфность всех эквивалентных отображений. ■

6°. Дополнительные обозначения. Если X' и X'' — два подсемейства некоторого семейства X, то через $X' + X''$ обозначим семейство, образованное суммами соответствующих модулей семейств X' и X'', а через $X' \cap X''$ — семейство, образованное их пересечениями. Легко видеть, что при замене семейств X' и X'' на эквивалентные сумма и пересечение этих семейств заменяются на эквивалентные семейства.

Пусть X — некоторый модуль, а $k > 0$ — целое число. Через $[X]^k$ или X^k мы будем обозначать прямую сумму $X \oplus \ldots \oplus X$ k экземпляров модуля X. Для общности положим $[X]^0 = 0$. Если φ: $X \to Y$ — некоторое отображение модулей, то через $[\varphi]^k$ обозначим отображение

$$[X]^k \ni (x_1, \ldots, x_k) \to (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) \in [Y]^k.$$

Если $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — некоторое семейство модулей, то через $[X]^k$ обозначим семейство $\{[X_\alpha]^k, [i_\alpha^{\alpha'}]^k\}$. Пусть

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \tag{6.1}$$

— некоторая последовательность семейств и их отображений, а

$$[X]^k \xrightarrow{[\varphi]^k} [Y]^k \xrightarrow{[\psi]^k} [Z]^k \tag{7.1}$$

— последовательность степеней этих семейств и отображений. Тогда, если φ есть гомоморфизм, то, очевидно, и $[\varphi]^k$ есть гомоморфизм, если (6) точная последовательность, то последовательность (7) также точна и т. д. Часто во избежание громоздкости в последовательностях вида (7) вместо $[\varphi]^k$ и $[\psi]^k$ мы будем писать φ и ψ.

Подведем итог сказанному в 3°—6°. В этих пунктах мы ввели понятие семейств и их отображений и рассмотрели некоторые свойства этих понятий. Все эти свойства оказались инвариантными по отношению к эквивалентности семейств и отображений. Это обстоятельство позволяет в дальнейшем не различать между собой эквивалентные семейства и отображения.

Заметим, что всякий топологический модуль X можно рассматривать как семейство, положив $X_\alpha \equiv X$ и выбрав в качестве отображений $i_\alpha^{\alpha'}$ тождественное отображение X. Если X и Y — два модуля и φ: $X \to Y$ — их отображение, то φ можно рассматривать как отображение соответствующих семейств. При этом определения 3° — 6° в применении к семействам и отображениям такого рода совпадают с соответствующими определениями 1°.

§ 2. Основная гомологическая теорема

Прежде чем перейти к самой теореме, носящей довольно общий характер, разберем ее простейшие случаи. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "h"] & Y' \\
& X \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X' \arrow[u, "g'"'] \\
& & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

где X, X', Y, Y' — семейства топологических модулей, а f, h, g, g' — их отображения (для простоты можно считать, что X, X', Y, Y' суть модули — это не влияет на последующие рассуждения). Предположим, что в этой диаграмме точны верхняя строка и правый столбец. Мы утверждаем, что в этом случае отображения f и g могут быть гомоморфизмами лишь одновременно, т. е. если f — гомоморфизм, то и g — гомоморфизм и обратно. Проверка этого простого факта предоставляется читателю.

Перейдем теперь к более сложной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] & Z' & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h"] & Y' \arrow[u, "i'"'] \arrow[r, "h'"] & Y'' \\
& X \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X' \arrow[u, "g'"'] \arrow[r, "f'"] & X'' \arrow[u, "g''"'] \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

содержащей предыдущую в качестве фрагмента. Предположим, что эта диаграмма коммутативна, а все ее строки, за исключением нижней, и все столбцы, кроме левого, точны. Утверждается, что левый столбец и нижняя строка полуточны и имеет место естественный изоморфизм

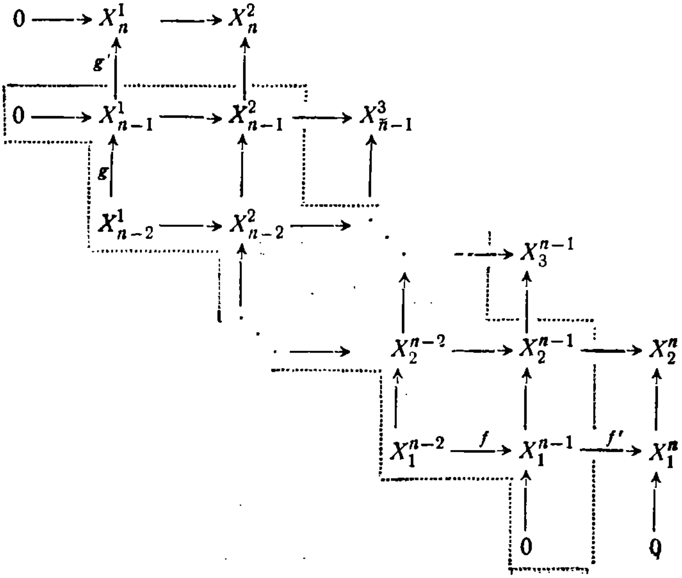
$$\operatorname{Ker} f'/\operatorname{Im} f \cong \operatorname{Ker} i/\operatorname{Im} g.$$

Основной результат этого параграфа — теорема 1 — представляет из себя обобщение тех двух утверждений, которые мы сейчас рассмотрели.

1°. Теорема 1. *Рассмотрим три типа коммутативных диаграмм* (см. стр. 38—39), *образованных семействами X_i^j топологических модулей и их однозначными отображениями. Справедливы следующие утверждения.*

I. *Ограничимся рассмотрением выделенных фрагментов этих диаграмм. Предположим, что все строки и столбцы этих фрагментов точны. Тогда отображения f и g могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

II. *Рассмотрим теперь диаграммы* (α), (β) *и* (γ) *целиком. Отметим строки и столбцы, образованные отображениями f, f', g и g'. Предположим в дополнение к условиям первой части теоремы, что все строки и столбцы наших диаграмм, исключая*

(α)


(β)

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \\
X_n^1 \arrow[u] \arrow[r, "g"] & X_n^2 \arrow[u] \arrow[r, "g'"] & X_n^3 \\
X_{n-1}^1 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^2 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^3 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \\
 & X_{n-2}^2 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] & & & \cdot \\
 & & & & \cdot \arrow[r] & X_3^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_3^n \\
 & & & & X_2^{n-2} \arrow[u] \arrow[r] & X_2^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_2^n \arrow[u] \arrow[r] & X_2^{n+1} \\
 & & & & & X_1^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "f"] & X_1^n \arrow[u] \arrow[r, "f'"] & X_1^{n+1} \arrow[u] \\
 & & & & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(γ)

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \\
X_n^1 \arrow[u] \arrow[r, "g"] & X_n^2 \arrow[u] \arrow[r, "g'"] & X_n^3 \\
X_{n-1}^1 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^2 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^3 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \\
 & X_{n-2}^2 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] & & & \cdot \\
 & & & & \cdot \arrow[r] & X_3^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_3^n \\
 & & & & X_2^{n-2} \arrow[u] \arrow[r] & X_2^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_2^n \arrow[u, "f'"] \arrow[r] & 0 \\
 & & & & & X_1^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_1^n \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

отмеченные, алгебраически точны. Тогда отмеченные строки и столбцы полуточны и имеют место естественные изоморфизмы

$$\operatorname{Ker} f'/\operatorname{Im} f \cong \operatorname{Ker} g'/\operatorname{Im} g. \tag{1.2}$$

Доказательству мы предпошлем

2°. Три леммы.

Лемма 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму:*

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "\psi_1"] & Z_2 \arrow[r, "\psi_2"] & Z_3 \\ & Y_2 \arrow[u, "\chi_2"] \arrow[r, "\varphi"] & Y_3 \arrow[u, "\chi_3"'] \\ & & 0 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

семейств и их отображений. Предположим, что правый столбец точен, первая строка алгебраически точна, а отображения φ и ψ_1 суть гомоморфизмы. Тогда

А) *отображение ψ_1': $Z_1 \to Z_2/\operatorname{Im}\chi_2$, являющееся продолжением отображения ψ_1* (т. е. его композицией с каноническим отображением $Z_2 \to Z_2/\operatorname{Im}\chi_2$), *есть гомоморфизм;*

Б) *если $Z_1 \sim 0$, то отображение χ_2 также является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть

$$\varkappa\colon \operatorname{Im}\psi_1 + \operatorname{Im}\chi_2 \to \operatorname{Im}\psi_1 + \operatorname{Im}\chi_2/\operatorname{Im}\chi_2 = \operatorname{Im}\psi_1',$$

$$\varkappa^{-1}\colon \operatorname{Im}\psi_1' \to \operatorname{Im}\psi_1 + \operatorname{Im}\chi_2$$

— канонические отображения. Из полуточности первой строки (2) следует, что сужение отображения ψ_2 на $\operatorname{Im}\psi_1 + \operatorname{Im}\chi_2$ в композиции с некоторым тождественным отображением действует в $\operatorname{Im}\psi_2\chi_2$. В силу коммутативности диаграммы (2) $\operatorname{Im}\psi_2\chi_2 \sim \operatorname{Im}\chi_3\varphi$, откуда $\psi_2(\operatorname{Im}\psi_1 + \operatorname{Im}\chi_2) \prec \operatorname{Im}\chi_3\varphi$, следовательно, отображение $\psi_2\varkappa^{-1}$ (в композиции с некоторым тождественным отображением) действует из $\operatorname{Im}\psi_1'$ в $\operatorname{Im}\chi_3\varphi$.

Согласно точности правого столбца существует однозначное отображение χ_3^{-1}: $\operatorname{Im}\chi_3 \to Y_3$, обратное χ_3. Рассмотрим его сужение на подсемействе $\operatorname{Im}\chi_3\varphi$. Так как $\chi_3^{-1}\chi_3\varphi \sim \varphi$, это сужение переводит $\operatorname{Im}\chi_3\varphi$ в подсемейство $\operatorname{Im}\varphi$ семейства Y_3. Поскольку φ — гомоморфизм, определено обратное отображение φ^{-1}: $\operatorname{Im}\varphi \to Y_2$. Рассмотрим композицию $\omega = \chi_2\varphi^{-1}\chi_3^{-1}\psi_2\varkappa^{-1}$, действующую из $\operatorname{Im}\psi_1'$ в $\operatorname{Im}\chi_2$. Так как $\psi_2\chi_2 \sim \chi_3\varphi$, мы имеем

$$\psi_2\omega \sim \chi_3\varphi\varphi^{-1}\chi_3^{-1}\psi_2\varkappa^{-1} \sim \psi_2\varkappa^{-1}.$$

Следовательно, отображение $\delta = \varkappa^{-1} - \omega$, действующее из $\operatorname{Im}\psi_1'$ в Z_2, обладает тем свойством, что $\psi_2\delta \sim 0$, т. е. $\operatorname{Im}\delta \subset \operatorname{Ker}\psi_2$. Из алгебраической точности первой строки (2) $\operatorname{Ker}\psi_2 \subset \operatorname{Im}\psi_1$, а так как ψ_1 — гомоморфизм, существует отображение ψ_1^{-1}: $\operatorname{Im}\psi_1 \to Z_1$, обратное ψ_1. Рассмотрим композицию $\psi_1^{-1}\delta$: $\operatorname{Im}\psi_1' \to Z_1$. Очевидно, что

$$\psi_1'\psi_1^{-1}\delta \sim \varkappa\delta = \varkappa\varkappa^{-1} - \varkappa\omega = j - \varkappa\omega,$$

где j — единичное отображение семейства $\operatorname{Im}\psi_1'$. Поскольку отображение ω действует в $\operatorname{Im}\chi_2$, композиция $\varkappa\omega$ есть нуль. Таким образом, $\psi_1'\psi_1^{-1}\delta \sim j$, откуда согласно предложению 6 § 1 вытекает, что ψ_1' есть гомоморфизм. Утверждение А) доказано.

Докажем утверждение Б). Пусть $Z_1 \sim 0$. В силу точности правого столбца (2) отображение χ_3 изоморфно действует из $\operatorname{Im}\varphi$ на $\operatorname{Im}\chi_3\varphi \sim \operatorname{Im}\psi_2\chi_2$. Следовательно, мы можем рассмотреть композицию отображений

$$\chi\colon \operatorname{Im}\chi_2 \xrightarrow{\psi_2} \operatorname{Im}\psi_2\chi_2 \xrightarrow{\chi_3^{-1}} \operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{\varphi^{-1}} Y_2.$$

Далее, имеем

$$\psi_2\chi_2\chi = \psi_2\chi_2\varphi^{-1}\chi_3^{-1}\psi_2 \sim \chi_3\varphi\varphi^{-1}\chi_3^{-1}\psi_2 \sim \psi_2,$$

т. е. $\psi_2(\chi_2\chi - i) \sim 0$, где i — единичное отображение Z_2. Из точности первой строки $\operatorname{Ker}\psi_2 \sim 0$ и, следовательно, $\chi_2\chi \sim i$. Отсюда вытекает, что χ_2 есть гомоморфизм. ■

Лемма 2. *Рассмотрим коммутативную диаграмму*:

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & Y_2 & \\
Z_1 \arrow[u, "\chi_1"] \arrow[r, "\psi_1"] & Z_2 \arrow[u, "\chi_2"'] \arrow[r, "\psi_2"] & Z_3
\end{tikzcd}$$

семейств и их отображений. Предположим, что левый столбец точен, нижняя строка алгебраически точна, а φ и ψ_2 суть гомоморфизмы. Тогда

А) *отображение* ψ_2': $\operatorname{Ker}\chi_2 \to Z_3$, *являющееся сужением* ψ_2, *есть гомоморфизм*;

Б) *если* $Z_3 \sim 0$, *то* χ_2 *также является гомоморфизмом.*

Доказательство. Из условия следует, что существует отображение ψ_2^{-1}: $\operatorname{Im}\psi_2 \to Z_2/\operatorname{Ker}\psi_2$, обратное ψ_2. Это отображение переводит подсемейство $\operatorname{Im}\psi_2'$ в образ канонического отображения $\operatorname{Ker}\chi_2 \to Z_2/\operatorname{Ker}\psi_2$, т. е. в семейство $(\operatorname{Ker}\chi_2 + \operatorname{Ker}\psi_2)/\operatorname{Ker}\psi_2$. Пусть

λ: $Z_2/\mathrm{Ker}\,\psi_2 \to Z_2$ — каноническое отображение. Композиция $\lambda\psi_2^{-1}$ переводит $\mathrm{Im}\,\psi_2'$ в сумму $\mathrm{Ker}\,\chi_2 + \mathrm{Ker}\,\psi_2 \sim \mathrm{Ker}\,\chi_2 + \mathrm{Im}\,\psi_1$.

Рассмотрим далее последовательность отображений

$$\mathrm{Ker}\,\chi_2 + \mathrm{Im}\,\psi_1 \xrightarrow{\chi_2} \mathrm{Im}\,\chi_2\psi_1 \sim \mathrm{Im}\,\varphi\chi_1 \sim \mathrm{Im}\,\varphi \xrightarrow{\varphi^{-1}} Y_1 \xrightarrow{\chi_1^{-1}} Z_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathrm{Ker}\,\psi_2.$$

Композицию $\lambda\psi_2^{-1}$ и всех этих отображений мы обозначим через ρ. Так как $\chi_2\psi_1 \sim \varphi\chi_1$, мы имеем $\chi_2\rho \sim \varphi\chi_1\chi_1^{-1}\varphi^{-1}\chi_2\lambda\psi_2^{-1} \sim \chi_2\lambda\psi_2^{-1}$. Таким образом, $\chi_2\left(\lambda\psi_2^{-1} - \rho\right) \sim 0$, следовательно, отображение $\lambda\psi_2^{-1} - \rho$ (с точностью до эквивалентного) действует из $\mathrm{Im}\,\psi_2'$ в $\mathrm{Ker}\,\chi_2$. При этом

$$\psi_2'\left(\lambda\psi_2^{-1} - \rho\right) = \psi_2\lambda\psi_2^{-1} - \psi_2\rho = \psi_2\lambda\psi_2^{-1} \sim k,$$

где k — единичное отображение Z_3. Отсюда следует, что ψ_2' есть гомоморфизм. Утверждение А) доказано.

Докажем утверждение Б). Пусть $Z_3 \sim 0$. Тогда из алгебраической точности левого столбца и нижней строки следует, что $\mathrm{Im}\,\chi_2 \sim \mathrm{Im}\,\varphi$. Рассмотрим композицию отображений

$$\chi_2'\colon\ \mathrm{Im}\,\chi_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} Y_1 \xrightarrow{\chi_1^{-1}} Z_1 \xrightarrow{\psi_1} Z_2.$$

Отображение χ_2' удовлетворяет соотиошению

$$\chi_2\chi_2' = \chi_2\psi_1\chi_1^{-1}\varphi^{-1} \sim \varphi\chi_1\chi_1^{-1}\varphi^{-1} \sim l,$$

где l — единичное отображение Y_2, т. е. χ_2 есть гомоморфизм. ■

Лемма 3. *Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
Z_1 \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & Z_2 \\
Y_1 \arrow[u, "\chi_1"] \arrow[r, "\varphi"] & Y_2 \arrow[u, "\chi_2"'] \\
& 0 \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

семейств и их отображений.

а) *Пусть χ_1 — эпиморфизм, а второй столбец точен. Тогда если φ есть гомоморфизм, то и ψ является гомоморфизмом.*

б) *Пусть χ_2 — мономорфизм, а первый столбец точен. Тогда, если ψ гомоморфизм, то φ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Установим утверждение а). Из того, что χ_1 есть эпиморфизм, следует, что $\mathrm{Im}\,\psi \sim \mathrm{Im}\,\psi\chi_1 \sim \mathrm{Im}\,\chi_2\varphi$. Поэтому отображение χ_2 (с точностью до эквивалентного) устанавливает изоморфизм $\operatorname{Im}\psi$ и $\operatorname{Im}\varphi$. Искомое отображение ψ^{-1} мы определим как композицию отображений

$$\operatorname{Im}\psi \xrightarrow{\chi_2^{-1}} \operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{\varphi^{-1}} Y_1 \xrightarrow{\chi_1} Z_1.$$

Мы имеем

$$\psi\psi^{-1} = \psi\chi_1\varphi^{-1}\chi_2^{-1} \sim \chi_2\varphi\varphi^{-1}\chi_2^{-1} \sim i,$$

где i — единичное отображение $\operatorname{Im}\psi$.

Докажем утверждение б). Поскольку χ_1 — эпиморфизм, а диаграмма (3) коммутативна, имеет место эквивалентность $\operatorname{Im}\chi_2\varphi \sim \sim \operatorname{Im}\psi\chi_1 \sim \operatorname{Im}\psi$. Искомое отображение φ^{-1} есть композиция отображений

$$\operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{\chi_2} \operatorname{Im}\psi \xrightarrow{\psi^{-1}} Z_1 \xrightarrow{\chi_1^{-1}} Y_1.$$

Так как χ_2 есть мономорфизм, из соотношения

$$\chi_2\varphi\varphi^{-1} = \chi_2\varphi\chi_1^{-1}\psi^{-1}\chi_2 \sim \psi\chi_1\chi_1^{-1}\psi^{-1}\chi_2 \sim \chi_2$$

вытекает, что $\varphi\varphi^{-1} \sim j$, где j — единичное отображение Y_2. Тем самым утверждение б) установлено. ■

3°. Доказательство первого утверждения теоремы. Рассмотрим сначала диаграмму (α). Предположим, что отображение f есть гомоморфизм. Покажем, что отображение g также является гомоморфизмом. В случае $n = 2$ этот факт вытекает из утверждения Б) леммы 1. Пусть $n > 2$; применим лемму 1 к фрагменту диаграммы (α), образованному двумя нижними строками и столбцами с номерами $n-3$, $n-2$ и $n-1$. Тем самым мы установим, что отображение

$$X_2^{n-3} \to X_2^{n-2}/I_2^{n-2}, \qquad I_2^{n-2} = \operatorname{Im}(X_1^{n-2} \to X_2^{n-2}), \tag{4.2}$$

являющееся продолжением отображения $X_2^{n-3} \to X_2^{n-2}$, есть гомоморфизм. Заметим, что семейство I_2^{n-2} принадлежит ядру отображения $X_2^{n-2} \to X_3^{n-2}$. Поэтому мы можем рассмотреть ассоциированное отображение $X_2^{n-2}/I_2^{n-2} \to X_3^{n-2}$. Далее рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
X_3^{n-4} & \longrightarrow & X_3^{n-3} & \longrightarrow & X_3^{n-2} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & X_2^{n-3} & \longrightarrow & X_2^{n-2}/I_2^{n-2} \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & 0
\end{array}$$

и применим к ней лемму 1. Заметим, что все ее отображения суть гомоморфизмы, а строка и столбец точны. Поэтому отображение

$$X_3^{n-4} \to X_3^{n-3}/I_3^{n-3},$$

определяемое аналогично (4), также является гомоморфизмом. Многократно повторяя это рассуждение, мы придем к диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_{n-1}^1 \arrow[r] & X_{n-1}^2 \\
& X_{n-2}^1 \arrow[u, "g"] \arrow[r] & X_{n-2}^2/I_{n-2}^2 \arrow[u] \\
& & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой строка и столбец точны, а все отображения, за исключением, быть может, g, суть гомоморфизмы. Применив утверждение Б) леммы 1, мы установим, что g также есть гомоморфизм. Импликация g — гомоморфизм $\Longrightarrow$ f — гомоморфизм сводится к рассмотренной, если диаграмму (α) отразить от биссектрисы первой четверти. Тем самым мы доказали первое утверждение теоремы для диаграммы (α).

Перейдем к диаграмме (β). Пусть известно, что f — гомоморфизм. Многократно применяя лемму 1 аналогично предыдущему случаю, мы придем к диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
X_n^1 \arrow[u] \arrow[r, "g"] & X_n^2 \\
X_{n-1}^1 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^2/I_{n-1}^2 \arrow[u] \\
& 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой точны оба столбца, а все отображения, кроме, быть может, g, суть гомоморфизмы. Применив к ней утверждение а) леммы 3, найдем, что g также гомоморфизм.

Предположим теперь, что g есть гомоморфизм. Применив лемму 2 к фрагменту диаграммы (β), образованному первыми двумя строками и первыми тремя столбцами, мы установим, что отображение

$$K_{n-1}^2 \to X_{n-1}^3, \qquad K_{n-1}^2 = \mathrm{Ker}\,(X_{n-1}^2 \to X_n^2), \tag{5.2}$$

являющееся сужением отображения $X_{n-1}^2 \to X_{n-1}^3$, есть гомоморфизм. Заметим, что образ отображения $X_{n-2}^2 \to X_{n-1}^2$ принадлежит K_{n-1}^2.

Поэтому мы можем рассмотреть диаграмму:

$$\begin{tikzcd} 0 & & \\ K_{n-1}^2 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-1}^3 & \\ X_{n-2}^2 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-2}^3 \arrow[u] \arrow[r] & X_{n-2}^4 \end{tikzcd}$$

В ней все отображения суть гомоморфизмы, а строка и столбец точны. Применив к ней лемму 2, найдем, что отображение

$$K_{n-2}^3 \to X_{n-2}^4,$$

аналогичное (5), также является гомоморфизмом. Многократно повторяя это рассуждение, приходим к диаграмме:

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ K_2^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_2^n \\ X_1^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "f"] & X_1^n \arrow[u] \\ & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

в которой оба столбца точны, а все отображения, за исключением, быть может, f, суть гомоморфизмы. Согласно утверждению б) леммы 3 отображение f обладает тем же свойством. Тем самым мы доказали первое утверждение теоремы для диаграммы (β).

Докажем это утверждение для диаграммы (γ). Чтобы получить импликацию g — гомоморфизм $\Rightarrow f$ — гомоморфизм, достаточно, рассуждая по аналогии с предыдущим, многократно применить утверждение А) леммы 2, а затем утверждение Б) той же леммы. Обратная импликация сводится к доказанной симметрией диаграммы (γ) относительно биссектрисы. Таким образом, первое утверждение теоремы полностью доказано.

4°. Доказательство второго утверждения теоремы. Установим сначала еще одну лемму.

Лемма 4. *Пусть в диаграмме*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[r, "\psi"] & Z' \\ Y' \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[u, "\chi"] & \end{tikzcd}$$

образованной семействами и их отображениями, χ есть гомоморфизм и $\psi\chi\varphi \sim 0$. Тогда определен изоморфизм

$$[\operatorname{Im}\chi \cap \operatorname{Ker}\psi]/\operatorname{Im}\chi\varphi \cong \operatorname{Ker}\psi\chi/[\operatorname{Ker}\chi + \operatorname{Im}\varphi],$$

ассоциированный с χ.

Доказательство. Поскольку χ — гомоморфизм, определено обратное отображение $\chi^{-1}: \operatorname{Im}\chi \to Y/\operatorname{Ker}\chi$. Сужение этого отображения на $\operatorname{Im}\chi \cap \operatorname{Ker}\psi$ переводит это подсемейство в семейство $\operatorname{Ker}\psi\chi/\operatorname{Ker}\chi$. При этом отображение χ^{-1} устанавливает изоморфизм между подсемейством $\operatorname{Im}\chi\varphi \subset \operatorname{Im}\chi \cap \operatorname{Ker}\psi$ и образом отображения $\operatorname{Im}\varphi \to Y/\operatorname{Ker}\chi$. Этот образ, очевидно, равен семейству $[\operatorname{Ker}\chi + \operatorname{Im}\varphi]/\operatorname{Ker}\chi$. Следовательно, отображение, ассоциированное с χ, устанавливает изоморфизм

$$[\operatorname{Im}\chi \cap \operatorname{Ker}\psi]/\operatorname{Im}\chi\varphi \cong (\operatorname{Ker}\psi\chi/\operatorname{Ker}\chi)/([\operatorname{Ker}\chi + \operatorname{Im}\varphi]/\operatorname{Ker}\chi) \cong$$
$$\cong \operatorname{Ker}\psi\chi/[\operatorname{Ker}\chi + \operatorname{Im}\varphi]. \blacksquare$$

Вернемся к диаграммам (α), (β), (γ). Установим полуточность выделенных строк и столбцов. Покажем, например, что $f'f \sim 0$ в диаграмме (α). В самом деле, композиция отображения $f'f$ и мономорфизма $X_1^n \to X_2^n$ равна композиции отображений

$$X_1^{n-2} \to X_2^{n-2} \to X_2^{n-1} \to X_2^n,$$

из которых два последних дают нуль. Отсюда $f'f \sim 0$, ч. и т. д.

Докажем теперь изоморфизм (1) для диаграммы (α). Для каждой пары (i, j), удовлетворяющей соотношению $i + j = n - 1$ или n, определено отображение $X_i^j \to X_{i+1}^{j+1}$, равное композиции отображений

$$X_i^j \to X_i^{j+1} \to X_{i+1}^{j+1} \quad \text{или} \quad X_i^j \to X_{i+1}^j \to X_{i+1}^{j+1}. \tag{6.2}$$

Эти композиции эквивалентны между собой в силу коммутативности диаграммы. Для всякой пары (i, j) с $i + j = n$ или $n + 1$ рассмотрим семейство H_i^j, ассоциированное с X_i^j, которое при $i + j = n$ определяется формулой

$$H_i^j = \operatorname{Ker}(X_i^j \to X_{i+1}^{j+1})/[\operatorname{Im}(X_i^{j-1} \to X_i^j) + \operatorname{Im}(X_{i-1}^j \to X_i^j)],$$

а при $i + j = n + 1$ — формулой

$$H_i^j = [\operatorname{Ker}(X_i^j \to X_i^{j+1}) \cap \operatorname{Ker}(X_i^j \to X_{i+1}^j)]/\operatorname{Im}(X_{i-1}^{j-1} \to X_i^j).$$

Далее применим лемму 4 к фрагменту:

$$\begin{tikzcd}
& X_{i+1}^{j} & \\
\cdot \arrow[r] & X_i^j \arrow[u] \arrow[r] & X_i^{j+1} \\
X_{i-1}^{j-1} \arrow[u] \arrow[r] & X_{i-1}^{j} \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \\
& \cdot \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$i+j=n+1.$$

Как легко проверить, применение этой леммы дает изоморфизм

$$H_{i-1}^{j} \cong H_i^j, \tag{7.2}$$

ассоциированный с отображением $X_{i-1}^j \to X_i^j$. Аналогичным образом устанавливается изоморфизм

$$H_i^{j-1} \cong H_i^j, \tag{8.2}$$

ассоциированный с отображением $X_i^{j-1} \to X_i^j$. Комбинируя все изоморфизмы (7) и (8), приходим к изоморфизму $H_{n-1}^1 \cong H_1^{n-1}$. Заметив, что

$$H_{n-1}^1 \sim \operatorname{Ker} g'/\operatorname{Im} g, \qquad H_1^{n-1} \sim \operatorname{Ker} f'/\operatorname{Im} f,$$

получаем (1). Построение изоморфизма (1) для диаграмм (β) и (γ) проводится аналогично. ■

Следствие. *Пусть в диаграмме* (α), (β) *или* (γ) *точны все строки и столбцы, за исключением одной отмеченной строки или отмеченного столбца. Тогда эта строка* (*столбец*) *также точна.*

5°. Уточнения. I. Для простоты предположим, что диаграммы (α), (β) и (γ) строго коммутативны, т. е. при любых i и j оба сквозных отображения (6) совпадают (а не только эквивалентны, как это предполагалось до сих пор). Предположим также, что все их строки и столбцы строго полуточны, т. е. композиции соседних отображений в строках и столбцах равны нулю. Заметим, что в приложениях теоремы 1 эти условия почти всегда будут выполняться.

Предположения второй части теоремы заключаются в том, что существуют (вообще говоря, многозначные) отображения

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}\left(X_i^{j+1} \to X_i^{j+2}\right) \to X_i^j, \\ &\operatorname{Ker}\left(X_{i+1}^j \to X_{i+2}^j\right) \to X_i^j, \end{aligned} \tag{9.2}$$

обратные отображениям

$$X_i^j \to X_i^{j+1}, \qquad X_i^j \to X_{i+1}^j. \tag{10.2}$$

С другой стороны, утверждение второй части теоремы заключается в существовании отображений

$$\operatorname{Ker} f'/\operatorname{Im} f \underset{J}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \operatorname{Ker} g'/\operatorname{Im} g,$$

устанавливающих изоморфизм. Анализируя доказательство теоремы, нетрудно обнаружить, что отображения I и J строятся эффективно и являются некоторыми полиномами от отображений (9) и (10). Поэтому порядки (в смысле 3° § 1) отображений I и J являются определенными композициями порядков отображений (9), (10) и, следовательно, зависят лишь от порядков этих отображений, но не от самих отображений (9), (10).

II. Следующий результат показывает, насколько можно ослабить условия теоремы 1, чтобы она продолжала действовать в одном направлении (в данном случае сверху вниз).

Теорема 1′. *Пусть в коммутативной диаграмме* (α) *все строки и столбцы полуточны, а последовательности*

$$X_i^j \to X_i^{j+1} \to X_i^{j+2}, \qquad i+j=n,\ i=2, \ldots, n \qquad \left(X_n^0=0\right),$$

и

$$X_{i-1}^j \to X_i^j \to X_{i+1}^j, \qquad i+j=n,\ i=1, \ldots, n-1 \qquad \left(X_0^n=0\right),$$

алгебраически точны. Тогда нижняя строка этой диаграммы также алгебраически точна.

Доказательство этой теоремы предоставляется читателю.

6°. Отображения диаграмм типа (α), (β), (γ).

Теорема 2. *Пусть заданы две диаграммы типа* (α) *одинакового размера*

$$\left\{X_i^j;\ f,\ f',\ g,\ g'\right\}, \qquad \left\{\mathscr{X}_i^j;\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{f}',\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}'\right\}, \tag{11.2}$$

каждая из которых удовлетворяет всем условиям теоремы 1. *Предположим далее, что для любой пары* (i, j) *с* $i+j=n-1$, n, $n+1$, $n+2$ *задано отображение* $\varphi_i^j: X_i^j \to \mathscr{X}_i^j$, *причем отображения* φ_i^j *в совокупности коммутируют с отображениями диаграмм* (11). *Тогда ассоциированные отображения* $\breve{\varphi}_{n-1}^1$ *и* $\breve{\varphi}_1^{n-1}$

образуют коммутативную диаграмму:

$$
\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ker} \mathfrak{f}'/\operatorname{Im} \mathfrak{f} & \overset{\mathcal{J}}{\cong} & \operatorname{Ker} \mathfrak{g}'/\operatorname{Im} \mathfrak{g} \\
\scriptstyle\check{\varphi}_1^{n-1}\uparrow & & \uparrow\scriptstyle\check{\varphi}_{n-1}^1 \\
\operatorname{Ker} f'/\operatorname{Im} f & \overset{I}{\cong} & \operatorname{Ker} g'/\operatorname{Im} g
\end{array}
\tag{12.2}
$$

в которой I и $\mathcal{J}$ — изоморфизмы типа (1). *Аналогичные утверждения справедливы для диаграмм типа* (β) *и* (γ).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением диаграмм типа (α). Из условия следует, что отображения, ассоциированные с φ_i^j, переводят ядро и образ отображения $X_i^j \to X_i^{j+1}$ соответственно в ядро и образ отображения $\mathscr{X}_i^j \to \mathscr{X}_i^{j+1}$ и т. д. Поэтому для любой пары (i, j) с $i+j=n, n+1$ определено отображение $H_i^j \to \mathscr{H}_i^j$, ассоциированное с φ_i^j, где $\mathscr{H}_i^j$ — семейство, аналогичное H_i^j, построенное для диаграммы $\{\mathscr{X}_i^j\}$. При этом коммутативна диаграмма:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathscr{H}_{i-1}^j & \cong & \mathscr{H}_i^j & \cong & \mathscr{H}_i^{j-1} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H_{i-1}^j & \cong & H_i^j & \cong & H_i^{j-1}
\end{array}
\qquad i+j=n+1,
$$

в которой по горизонтали расположены изоморфизмы типа (7) и (8). Комбинируя эти диаграммы, приходим к коммутативной диаграмме

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{H}_1^{n-1} & \cong & \mathscr{H}_{n-1}^1 \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_1^{n-1} & \cong & H_{n-1}^1
\end{array}
$$

которая совпадает с (12). ■

§ 3. Операции над модулями

В этом параграфе мы построим функторы $\otimes$ и Hom, а также их производные*) и установим некоторые свойства этих функторов, ограничившись случаем, когда первый аргумент есть конечный модуль над нетеровским кольцом. Факты, которые мы здесь изложим, в большинстве хорошо известны; их можно найти, например, в книгах Зарисского и Самюэля [1] и Картана и Эйленберга [1]. Однако для удобства читателя мы снабдим некоторые из них доказательствами.

*) Мы предполагаем у читателя лишь самое поверхностное знакомство с понятием функтора, см., например, § 1 гл. I книги Годемана [1].

Символом A мы снова обозначаем произвольное коммутативное кольцо, являющееся надкольцом поля C. Все A-модули, которые мы будем рассматривать, предполагаются топологическими, а все A-отображения — непрерывными и однозначными.

Пусть Φ — некоторый A-модуль, а k — натуральное число. Модуль Φ^k мы будем интерпретировать как модуль, образованный столбцами высоты k, компоненты которых принадлежат Φ. Модуль A^k обладает каноническим базисом, образованным столбцами e_i, $i = 1, \ldots, k$, единичной матрицы порядка k.

Пусть $p: A^s \to A^t$ — некоторое A-отображение. Такое отображение характеризуется своими значениями $p(e_i)$ на базисных элементах модуля A^s. Через p мы обозначим также матрицу размера $t \times s$, образованную столбцами $p(e_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Очевидно, что действие отображения p совпадает с умножением столбцов из A^s слева на матрицу p. Обратно, всякой матрице p размера $t \times s$ (т. е. с t строками и s столбцами) с элементами из A отвечает A-отображение $p: A^s \to A^t$, заключающееся в умножении слева на эту матрицу. Матрицы такого сорта мы будем называть A-матрицами.

Всякой A-матрице p размера $t \times s$ и модулю Φ отвечает отображение $p: \Phi^s \to \Phi^t$, заключающееся в умножении столбцов из Φ^s слева на эту матрицу. Образ этого отображения мы обозначим через $p\Phi^s$, а его ядро — через Φ_p. A-модуль M мы назовем конечным, если в нем имеется конечный базис. Так, например, для любого натурального k модуль A^k конечный, поскольку имеет конечный базис $\{e_i\}$. Этот модуль, кроме того, свободный, поскольку его канонический базис $\{e_i\}$ образован линейно независимыми (над кольцом A) элементами. Все конечные модули мы наделим дискретной топологией.

Свободной резольвентой конечного модуля M мы назовем любую точную последовательность вида

$$\ldots \to A^{s_2} \xrightarrow{p_1} A^{s_1} \xrightarrow{p_0} A^{s_0} \xrightarrow{a} M \longrightarrow 0, \tag{1.3}$$

где p_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ — некоторые A-матрицы. Если кольцо A нетерово, то всякий конечный A-модуль имеет, по крайней мере, одну свободную резольвенту. В дальнейшем мы будем все время предполагать, что кольцо A нетерово. Из нетеровости кольца A вытекает также, что любой подмодуль конечного A-модуля также является конечным. Очевидно, что фактор-модуль конечного модуля также конечный.

1°. Тензорное произведение модулей и функтор Tor. Пусть M — некоторый конечный A-модуль и (1) — его свободная резольвента. Пусть, далее, Φ — некоторый A-модуль. В последовательности (1) заменим степени кольца A теми же степенями модуля Φ

и рассмотрим последовательность

$$\ldots \to \Phi^{s_2} \xrightarrow{p_1} \Phi^{s_1} \xrightarrow{p_0} \Phi^{s_0} \to 0.$$

Эта последовательность, вообще говоря, не является алгебраически точной, а лишь полуточной, так как из точности (1) $p_i p_{i+1} = 0$ для всех i. Рассмотрим гомологии этой последовательности, которые обозначаются так:

$$\begin{gathered} M \otimes \Phi = \operatorname{Tor}_0(M, \Phi) = \Phi^{s_0}/p_0\Phi^{s_1}, \\ \operatorname{Tor}_i(M, \Phi) = \Phi_{p_{i-1}}/p_i\Phi^{s_{i+1}}, \\ i = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.3}$$

Чтобы установить корректность этих обозначений, нужно показать, что эти фактор-модули действительно зависят лишь от модулей M и Φ и не зависят от выбора свободной резольвенты (1).

Предложение 1 *). *Пусть*

$$\ldots \to A^{\sigma_2} \xrightarrow{\pi_1} A^{\sigma_1} \xrightarrow{\pi_0} A^{\sigma_0} \xrightarrow{\alpha} M' \to 0 \tag{3.3}$$

— свободная резольвента некоторого конечного A-модуля M', и пусть f: $M \to M'$ — некоторое A-отображение. Тогда можно построить A-матрицы f_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы диаграмма:

$$\begin{CD} \ldots @>>> A^{\sigma_2} @>\pi_1>> A^{\sigma_1} @>\pi_0>> A^{\sigma_0} @>\alpha>> M' @>>> 0 \\ @. @A{f_2}AA @A{f_1}AA @A{f_0}AA @A{f}AA \\ \ldots @>>> A^{s_2} @>p_1>> A^{s_1} @>p_0>> A^{s_0} @>a>> M @>>> 0 \end{CD} \tag{4.3}$$

была коммутативной.

Если g_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, — некоторые другие A-матрицы, делающие эту диаграмму коммутативной, то соответствующие две диаграммы гомотопны, т. е. существуют такие A-матрицы h_i: $A^{s_i} \to A^{\sigma_{i+1}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, что

$$f_i - g_i = \pi_i h_i + h_{i-1} p_{i-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (h_{-1} = 0). \tag{5.3}$$

Из коммутативности диаграммы (4) следует, что отображение f_i: $\Phi^{s_i} \to \Phi^{\sigma_i}$ переводит подмодуль $\Phi_{p_{i-1}}$ в $\Phi_{\pi_{i-1}}$, а подмодуль $p_i\Phi^{s_{i+1}}$ в $\pi_i\Phi^{\sigma_{i+1}}$. Следовательно, определено ассоциированное отображение

$$\check{f}_i\colon \Phi_{p_{i-1}}/p_i\Phi^{s_{i+1}} \to \Phi_{\pi_{i-1}}/\pi_i\Phi^{\sigma_{i+1}}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

Предложение 2.

I. *Отображения* (6) *зависят лишь от модуля Φ и отображения f.*

---

*) Доказательство этого утверждения имеется у Картана и Эйленберга [1], гл. V, и у Годемана [1], гл. I, § 5.

II. *Предположим, что отображение f есть изоморфизм. Тогда отображения* (6) *также являются изоморфизмами, причем обратными к ним служат отображения, также ассоциированные с некоторыми A-матрицами.*

III. *Предположим снова, что f есть изоморфизм. Тогда если некоторое отображение π_l: $\Phi^{\sigma_{l+1}} \to \Phi^{\sigma_l}$ является гомоморфизмом, то соответствующее отображение p_l: $\Phi^{s_{l+1}} \to \Phi^{s_l}$ также является гомоморфизмом.*

Доказательство. Если g_l — некоторые другие матрицы, делающие диаграмму (4) коммутативной, то в силу предложения 1 выполнены соотношения (5). Из этих соотношений видно, что отображения вида (6), ассоциированные с матрицами f_l и g_l, совпадают, поскольку сужение отображения $h_{l-1}p_{l-1}$ на $\Phi_{p_{l-1}}$ есть нуль, а слагаемое $\pi_l h_l$ переводит модуль $\Phi_{p_{l-1}}$ в $\pi_l\Phi^{\sigma_{l+1}}$. Тем самым первое утверждение доказано.

Предположим, что f есть изоморфизм. В силу предложения 1 мы можем построить A-матрицы φ_l так, чтобы была коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \longrightarrow & A^{s_2} & \xrightarrow{p_1} & A^{s_1} & \xrightarrow{p_0} & A^{s_0} & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \uparrow{\scriptstyle f^{-1}} & \\ \ldots \longrightarrow & A^{\sigma_2} & \xrightarrow{\pi_1} & A^{\sigma_1} & \xrightarrow{\pi_0} & A^{\sigma_0} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow 0 \end{array} \qquad (7.3)$$

следовательно, определены отображения

$$\check{\varphi}_l\colon \Phi_{\pi_{l-1}}/\pi_l\Phi^{\sigma_{l+1}} \to \Phi_{p_{l-1}}/p_l\Phi^{s_{l+1}},$$

ассоциированные с матрицами φ_l. Покажем, что эти отображения являются обратными по отношению к отображениям (6). Комбинируя диаграммы (4) и (7), мы получим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \longrightarrow & A^{s_2} & \xrightarrow{p_1} & A^{s_1} & \xrightarrow{p_0} & A^{s_0} & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow{\scriptstyle\varphi_2 f_2} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_1 f_1} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_0 f_0} & & \| & \\ \ldots \longrightarrow & A^{s_2} & \xrightarrow{p_1} & A^{s_1} & \xrightarrow{p_0} & A^{s_0} & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \end{array}$$

С другой стороны, мы можем построить аналогичную коммутативную диаграмму, в которой вместо отображений $\varphi_l f_l$ фигурируют тождественные отображения e^{s_l}: $A^{s_l} \to A^{s_l}$. Согласно предложению 1 обе эти диаграммы гомотопны, т. е.

$$\varphi_l f_l - e^{s_l} = p_l h_l + h_{l-1}p_{l-1}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8.3)$$

с некоторыми A-матрицами h_i: $A^{s_i} \to A^{s_{i+1}}$ ($h_{-1}=0$). Из этих соотношений вытекает, что отображение

$$\breve{\varphi}_i\breve{f}_i\colon \Phi_{p_{i-1}}/p_i\Phi^{s_{i+1}} \to \Phi_{p_{i-1}}/p_i\Phi^{s_{i+1}},$$

ассоциированное с матрицей $\varphi_i f_i$, совпадает с аналогичным отображением, ассоциированным с матрицей e^{s_i}, т. е. является тождественным. Из симметрии отображений φ_i и f_i следует, что композиция $\breve{f}_i\breve{\varphi}_i$ также является тождественным отображением. Тем самым второе утверждение доказано.

Перейдем к третьему утверждению. Пусть для некоторого $i \geqslant 0$ отображение π_i: $\Phi^{\sigma_{i+1}} \to \Phi^{\sigma_i}$ является гомоморфизмом, т. е. определено многозначное отображение

$$\rho\colon \pi_i\Phi^{\sigma_{i+1}} \to \Phi^{\sigma_{i+1}},$$

обратное π_i. Рассмотрим отображение

$$r\colon p_i\Phi^{s_{i+1}} \xrightarrow{f_i} \pi_i\Phi^{\sigma_{i+1}} \xrightarrow{\rho} \Phi^{\sigma_{i+1}} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \Phi^{s_{i+1}}.$$

Из коммутативности диаграммы (7)

$$p_i(r-h_i) = p_i\varphi_{i+1}\rho f_i - p_i h_i = \varphi_i\pi_i\rho f_i - p_i h_i = \varphi_i f_i - p_i h_i.$$

Согласно (8) правая часть равна $e^{s_i} + h_{i-1}p_{i-1}$. Так как сужение отображения $h_{i-1}p_{i-1}$ на $p_i\Phi^{s_{i+1}}$ есть нуль, то отображение $p_i(r-h_i)$, рассматриваемое на $p_i\Phi^{s_{i+1}}$, совпадает с e^{s_i}, т. е. является тождественным. Поэтому отображение $r-h_i$ является обратным по отношению к p_i. Следовательно, p_i есть гомоморфизм. ■

Предположим, что $M' = M$, а f есть тождественное отображение. Тогда согласно предложению 2 существуют A-матрицы f_i, $i=0$, 1, 2, ..., такие, что ассоциированные отображения (6) суть изоморфизмы. Следовательно, фактор-модули (2) действительно не зависят от выбора свободной резольвенты (1), чем и оправдывается их обозначение.

Найдем модули (2) в случае $M = A^k$ с некоторым натуральным k. В качестве свободной резольвенты модуля A^k можно выбрать последовательность $0 \to A^k \to A^k \to 0$. Поэтому из определения немедленно вытекают изоморфизмы

$$A^k \otimes \Phi \cong \Phi^k, \qquad \mathrm{Tor}_i(A^k, \Phi) = 0, \qquad i \geqslant 1,$$

для любого A-модуля Φ. В частности, для любых натуральных k и l $A^k \otimes A^l \cong A^{kl}$.

Если f: $M \to M'$ — некоторое отображение конечных A-модулей, то согласно предложению 2 определены отображения $\mathrm{Tor}_i(M, \Phi) \to \mathrm{Tor}_i(M', \Phi)$, зависящие лишь от f и Φ. Пусть φ: $\Phi \to \Phi'$ —

некоторое отображение A-модулей. Понятно, что оно переводит $\Phi_{p_{i-1}}$ в $\Phi'_{p_{i-1}}$, а $p_i\Phi^{s_{i+1}}$ в $p_i\Phi'^{s_{i+1}}$. Поэтому мы можем рассмотреть ассоциированное отображение

$$\Phi_{p_{i-1}}/p_i\Phi^{s_{i+1}} \to \Phi'_{p_{i-1}}/p_i\Phi'^{s_{i+1}},$$

которое отвечает отображению $\operatorname{Tor}_i(M, \Phi) \to \operatorname{Tor}_i(M, \Phi')$, не зависящему от выбора резольвенты (1). Если мы имеем одновременно оба отображения f и φ, то можно рассмотреть композицию отображений $M \otimes \Phi \to M' \otimes \Phi \to M' \otimes \Phi'$. Для этой композиции имеется специальное обозначение: $f \otimes \varphi$.

В частности, если мы имеем два отображения p: $A^s \to A^t$ и q: $A^\sigma \to A^\tau$, то их тензорное произведение $p \otimes q$: $A^{s\sigma} \to A^{t\tau}$ отвечает A-матрице $p \otimes q$, являющейся кронеккеровским произведением матриц p и q.

Предложение 3. *Пусть M и L — произвольные конечные A-модули, (1) — свободная резольвента модуля M, а*

$$\ldots \to A^\sigma \xrightarrow{q} A^\tau \xrightarrow{b} L \to 0$$

— свободная резольвента модуля L. Тогда имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} &M \otimes L \cong A^{t\tau}/[p_0A^{s\tau} + qA^{t\sigma}], \quad t = s_0, \quad s = s_1, \\ &\operatorname{Tor}_i(M, L) \cong [p_{i-1}A^{s_i\tau} \cap qA^{s_{i-1}\sigma}]/(p_{i-1} \otimes q)\, A^{s_i\sigma}, \quad i \geqslant 1, \end{aligned} \tag{9.3}$$

где мы для сокращения положили $p_i = p_i \otimes e^\tau$, $q = e^t \otimes q$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \geqslant 1$ и рассмотрим следующую диаграмму типа (γ):

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
L^{s_{i+1}} \arrow[u] \arrow[r, "p_i"] & L^{s_i} \arrow[u] \arrow[r, "p_{i-1}"] & L^{s_{i-1}} & \\
A^{s_{i+1}\tau} \arrow[u, "b"] \arrow[r, "p_i"] & A^{s_i\tau} \arrow[u, "b"] \arrow[r, "p_{i-1}"] & p_{i-1}A^{s_i\tau} \arrow[u, "b"] \arrow[r] & 0 \\
 & qA^{s_i\sigma} \arrow[u] \arrow[r, "p_{i-1}"] & (p_{i-1} \otimes q)\, A^{s_i\sigma} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Она, очевидно, коммутативна, причем первый и второй столбцы, а также вторая и третья строки точны. Отсюда на основании теоремы 1 § 2 мы заключаем, что модуль

$$L_{p_{i-1}}/p_iL^{s_{i+1}} \cong \operatorname{Tor}_i(M, L)$$

изоморфен ядру отображения $p_{i-1}A^{s_i\tau} \xrightarrow{b} L^{s_{i-1}}$, профакторизованному по подмодулю $(p_{i-1} \otimes q) A^{s_i\sigma}$. Это ядро есть пересечение подмодуля $p_{i-1}A^{s_i\tau} \subset A^{s_{i-1}\tau}$ и ядра отображения b: $A^{s_{i-1}\tau} \to L^{s_{i-1}}$. Последнее, очевидно, равно $qA^{s_i\sigma}$. Тем самым изоморфизмы (9) с $i = 1, 2, \ldots$ доказаны.

Рассмотрим, далее, другую коммутативную диаграмму типа (γ):

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
L^s \arrow[u] \arrow[r, "p"] & L^t \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
A^{s\tau} \arrow[u, "b"] \arrow[r, "p"] & A^{t\tau} \arrow[u, "b"] \arrow[r] & A^{t\tau}/pA^{s\tau} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
& qA^{t\sigma} \arrow[u] \arrow[r] & {[qA^{t\sigma} + pA^{s\tau}]/pA^{s\tau}} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Легко заметить, что у нее точны вторая и третья строки и первый и второй столбцы. Поэтому мы можем применить теорему 1 § 2, откуда вытекает первый из изоморфизмов (9). ■

Поскольку соотношение (9) для модуля $M \otimes L$ симметрично относительно M и L, имеет место естественный изоморфизм $M \otimes L \cong L \otimes M$, иначе говоря, тензорное произведение коммутативно. Аналогичным свойством обладают и модули $\mathrm{Tor}_i(M, L)$ для всех $i \geqslant 1$. Доказательство этого факта предоставляется читателю (указание: воспользоваться диаграммой (21.9) гл. VII).

Для любых конечных модулей M, M' и модуля Φ определен естественный изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_i(M \oplus M', \Phi) \cong \mathrm{Tor}_i(M, \Phi) \oplus \mathrm{Tor}_i(M', \Phi).$$

Это свойство модулей Tor_i называется дистрибутивностью.

2°. Плоские модули.

Определение 1. A-модуль Φ называется *плоским*, если для любой точной последовательности конечных A-модулей

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \tag{10.3}$$

последовательность

$$M' \otimes \Phi \xrightarrow{f \otimes I} M \otimes \Phi \xrightarrow{g \otimes I} M'' \otimes \Phi \tag{11.3}$$

(где I — тождественное отображение Φ) точна.

Если Φ — плоский модуль, то, как легко видеть, $\mathrm{Tor}_i(M, \Phi) = 0$ для всех $i \geqslant 1$ и любого конечного модуля M. Из предложения 5 будет следовать, что это свойство является также достаточным для того, чтобы модуль был плоским.

Простейшим примером плоского модуля служит модуль A^k, где k — любое натуральное число. Действительно, в этом случае последовательность (11) выглядит так:

$$[M']^k \xrightarrow{[f]^k} [M]^k \xrightarrow{[g]^k} [M'']^k.$$

Поэтому из точности (10) немедленно следует точность (11). Другие примеры плоских модулей мы встретим позднее.

Отметим некоторые свойства плоских модулей. Пусть Φ — плоский модуль, а p: $A^s \to A^t$ — некоторая A-матрица. Тогда из точности последовательности $A^s \xrightarrow{p} pA^s \longrightarrow 0$ вытекает алгебраическая точность последовательности

$$A^s \otimes \Phi \xrightarrow{p \otimes I} pA^s \otimes \Phi \longrightarrow 0.$$

При подстановке изоморфизма $A^s \otimes \Phi \cong \Phi^s$ отображение $p \otimes I$ перейдет в p. Учитывая, что это отображение есть эпиморфизм, мы приходим к изоморфизму $pA^s \otimes \Phi \cong p\Phi^s$.

Пусть N — подмодуль конечного модуля M. Тождественное вложение $N \to M$ есть мономорфизм, следовательно, для любого плоского модуля Φ отображение $N \otimes \Phi \to M \otimes \Phi$ также является мономорфизмом. Поэтому модуль $N \otimes \Phi$ можно рассматривать как подмодуль модуля $M \otimes \Phi$. Заметим, что имеет место изоморфизм

$$M \otimes \Phi/N \otimes \Phi \cong M/N \otimes \Phi.$$

Для его доказательства достаточно рассмотреть точную последовательность

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

и, умножив ее тензорно на модуль Φ, воспользоваться тем, что он плоский.

Предложение 4. *Пусть M — произвольный конечный модуль, K и L — его подмодули, а Φ — плоский модуль. Из сказанного выше следует, что модуль $(K \cap L) \otimes \Phi$ можно рассматривать как подмодуль модулей $K \otimes \Phi$ и $L \otimes \Phi$. При этом имеет место равенство*

$$(K \cap L) \otimes \Phi = (K \otimes \Phi) \cap (L \otimes \Phi).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$0 \to K \cap L \xrightarrow{\sigma} K \oplus L \xrightarrow{\rho} K + L \to 0,$$

где σ — отображение, переводящее элемент x в пару (x, x), а отображение ρ переводит пару (x, y) в разность $x - y$. Очевидно, что эта последовательность точна. Поэтому, умножив ее тензорно на модуль Φ, мы получим снова точную последовательность

$$0 \to (K \cap L) \otimes \Phi \xrightarrow{\sigma \otimes I} (K \oplus L) \otimes \Phi \xrightarrow{\rho \otimes I} (K + L) \otimes \Phi \to 0. \quad (12.3)$$

В силу дистрибутивности тензорного произведения имеет место изоморфизм $(K\oplus L)\otimes\Phi\cong(K\otimes\Phi)\oplus(L\otimes\Phi)$. Подставим этот изоморфизм в (12). Очевидно, что отображение $\sigma\otimes I$ превратится в отображение σ, а отображение $\rho\otimes I$ — в отображение ρ, т. е. мы получим следующую точную последовательность:

$$0\to(K\cap L)\otimes\Phi\xrightarrow{\sigma}(K\otimes\Phi)\oplus(L\otimes\Phi)\xrightarrow{\rho}(K+L)\otimes\Phi\to 0.$$

Из ее точности

$$(K\cap L)\otimes\Phi=\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Ker}\rho=(K\otimes\Phi)\cap(L\otimes\Phi).\ \blacksquare$$

3°. Критерий плоскости модуля.

Предложение 5. *Для того чтобы модуль Φ был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для любой точной последовательности вида $A^s\xrightarrow{p}A^t\xrightarrow{r}A^v$ была точна последовательность*

$$\Phi^s\xrightarrow{p}\Phi^t\xrightarrow{r}\Phi^v.$$

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Докажем достаточность. Сначала мы установим формально более простое утверждение: из точности последовательности вида

$$0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0 \tag{13.3}$$

вытекает точность последовательности

$$0\to M'\otimes\Phi\xrightarrow{f\otimes I}M\otimes\Phi\xrightarrow{g\otimes I}M''\otimes\Phi\to 0. \tag{14.3}$$

Лемма*). *Последовательность* (13) *можно включить в коммутативную диаграмму вида*:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\ldots \arrow[r] & A^{s''_1} \arrow[u] \arrow[r, "p''_0"] & A^{s''_0} \arrow[u] \arrow[r, "i''"] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & A^{s_1} \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "p_0"] & A^{s_0} \arrow[u, "g_0"] \arrow[r, "i"] & M \arrow[u, "g"] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & A^{s'_1} \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "p'_0"] & A^{s'_0} \arrow[u, "f_0"] \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{15.3}$$

*) Доказательство этого утверждения может быть получено из Картана и Эйленберга [1], гл. V, § 2, заменяя все проективные модули на свободные.

Умножив тензорно на Φ диаграмму (15), мы получим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\ldots \arrow[r] & \Phi^{s''_2} \arrow[u] \arrow[r, "p''_1"] & \Phi^{s''_1} \arrow[u] \arrow[r, "p''_0"] & \Phi^{s''_0} \arrow[u] \arrow[r] & M'' \otimes \Phi \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & \Phi^{s_2} \arrow[u, "g_2"] \arrow[r, "p_1"] & \Phi^{s_1} \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "p_0"] & \Phi^{s_0} \arrow[u, "g_0"] \arrow[r] & M \otimes \Phi \arrow[u, "g"] \arrow[r] & 0 \\
\ldots & \vdots \arrow[u] & \Phi^{s'_1} \arrow[l, phantom] \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "p'_0"] & \Phi^{s'_0} \arrow[u, "f_0"] \arrow[r] & M' \otimes \Phi \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{16.3}$$

Из условия следует, что все строки и все столбцы, исключая правый, точны. Применяя теорему 1 § 2, мы находим, что правый столбец также точен, т. е. точность (14) доказана.

Установим теперь точность (11) в предположении точности (10). Из точности (10) вытекает точность последовательностей

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coim} f \xrightarrow{\bar{f}} M \xrightarrow{\breve{g}} \operatorname{Im} g \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow M' \longrightarrow \operatorname{Coim} f \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Im} g \longrightarrow M'' \longrightarrow \operatorname{Coker} g \longrightarrow 0.$$

Отсюда согласно доказанному утверждению точны следующие последовательности:

$$\begin{aligned}
&0 \to \operatorname{Coim} f \otimes \Phi \to M \otimes \Phi \to \operatorname{Im} g \otimes \Phi \to 0,\\
&0 \to \operatorname{Ker} f \otimes \Phi \to M' \otimes \Phi \to \operatorname{Coim} f \otimes \Phi \to 0,\\
&0 \to \operatorname{Im} g \otimes \Phi \to M'' \otimes \Phi \to \operatorname{Coker} g \otimes \Phi \to 0,
\end{aligned}$$

откуда нетрудно извлечь точность (11). ■

4°. Функторы Hom и Ext. Пусть Φ и M — некоторые A-модули. Рассмотрим совокупность всех A-отображений из M в Φ. Такие отображения можно складывать и умножать на элементы кольца A по обычным правилам. Понятно, что введение этих операций и множество всех таких отображений превращает это множество в A-модуль. Этот модуль обозначается через $\operatorname{Hom}(M, \Phi)$. Если задано некоторое отображение $f\colon M \to M'$, то определено встречное отображение $\operatorname{Hom}(M', \Phi) \to \operatorname{Hom}(M, \Phi)$, относящее каждому элементу $F \in \operatorname{Hom}(M', \Phi)$ отображение $M \ni x \to F(f(x)) \in \Phi$. Это встречное отображение мы будем обозначать через $\mathrm{Hom}(f, \Phi)$ или f^*. Далее мы будем предполагать, что модуль M конечный.

Пусть k — натуральное число. Рассмотрим модуль Φ^k. Каждому его элементу $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ сопоставим отображение

$$A^k \ni (a_1, \ldots, a_k) \to \Sigma a_i\varphi_i \in \Phi.$$

Это сопоставление определяет отображение h: $\Phi^k \to \mathrm{Hom}(A^k, \Phi)$.

Предложение 6. *Отображение h есть изоморфизм. Для любой A-матрицы p коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A^s, \Phi) \arrow[d, leftrightarrow, "h"] & & \mathrm{Hom}(A^t, \Phi) \arrow[ll, "\mathrm{Hom}(p, \Phi)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "h"] \\ \Phi^s & & \Phi^t \arrow[ll, "p'"'] \end{tikzcd} \tag{17.3}$$

где p' — транспонированная матрица.

Доказательство. Прежде всего заметим, что отображение h взаимно однозначно. Действительно, если $h(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = 0$, то все $\varphi_i = 0$, так как модуль A^k содержит столбцы единичной матрицы.

Построим отображение h^{-1}. Всякое отображение F: $A^k \to \Phi$ однозначно определено своими значениями $F(e_\sigma)$, $\sigma = 1, \ldots, k$, на базисных элементах и может быть записано в виде $F(a) = (F, a)$, где F — вектор, образованный элементами $F(e_\sigma)$. Рассматривая этот вектор как элемент модуля Φ^k, мы получаем отображение h^{-1}: $\mathrm{Hom}(A^k, \Phi) \to \Phi^k$. Композиция hh^{-1} есть, очевидно, тождественное отображение. Следовательно, h есть изоморфизм.

Перейдем к диаграмме (17). По определению отображение $\mathrm{Hom}(p, \Phi)$ переводит элемент $F \in \mathrm{Hom}(A^t, \Phi)$ в отображение, действующее по формуле F': $a \to F(pa)$. Используя изоморфизм h, мы представим это отображение в виде

$$\left(h^{-1}(F'), a\right) = F'(a) = F(pa) = \left(h^{-1}(F), pa\right) = \left(p'h^{-1}(F), a\right).$$

Отсюда $h^{-1}(F') = p'h^{-1}(F)$. ■

Функтор Hom можно определить также другим способом — по аналогии с функтором тензорного произведения. В свободной резольвенте (1) модуля M заменим модули A^k модулями Φ^k, а матрицы p_k — транспонированными матрицами p'_k:

$$0 \to \Phi^{s_0} \xrightarrow{p'_0} \Phi^{s_1} \xrightarrow{p'_1} \Phi^{s_2} \to \ldots$$

Эта последовательность полуточна, так как из точности (1) $p'_i p'_{i-1} = 0$. Гомологии этой последовательности мы обозначим следующим образом:

$$\mathrm{Ext}^0(M, \Phi) = \Phi_{p'_0}, \quad \mathrm{Ext}^i(M, \Phi) = \Phi_{p'_i} / p'_{i-1} \Phi^{s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{18.3}$$

Покажем, что имеет место алгебраический изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^0(M, \Phi) \cong \mathrm{Hom}(M, \Phi). \tag{19.3}$$

Каждому отображению F: $M \to \Phi$ поставим в соответствие отображение F': $A^{s_0} \to \Phi$, являющееся композицией F и отображения a: $A^{s_0} \to M$ из (1). Композиция отображения F' и отображения p_0: $A^{s_1} \to A^{s_0}$, очевидно, равна нулю, т. е. $\mathrm{Hom}(p_0, \Phi)(F') = 0$. Применив к F' отображение h^{-1}, мы получим некоторый элемент $f \in \Phi^{s_0}$, причем согласно предложению 6 $p'_0 f = 0$. Обратно, всякому элементу $f \in \Phi_{p'_0}$ изоморфизм h ставит в соответствие отображение F': $A^{s_0} \to \Phi$, обращающееся в нуль на подмодуле $p_0 A^{s_1}$. Такое отображение можно рассматривать как отображение из фактор-модуля $A^{s_0} / p_0 A^{s_1} \cong M$ в Φ. Тем самым изоморфизм (19) установлен.

Проверим корректность определений (18). Пусть f: $M \to M'$ — некоторое отображение конечных A-модулей, а (1) и (3) — свободные резольвенты этих модулей. Из коммутативности диаграммы (4) следует, что транспонированная матрица f'_i переводит $\Phi_{\pi'_i}$ в $\Phi_{p'_i}$, а $\pi'_{i-1}\Phi^{\sigma_{i-1}}$ в $p'_{i-1}\Phi^{s_{i-1}}$, следовательно, определено ассоциированное отображение

$$\check{f}'_i\colon\ \Phi_{\pi'_i} / \pi'_{i-1} \Phi^{\sigma_{i-1}} \to \Phi_{p'_i} / p'_{i-1} \Phi^{s_{i-1}}. \tag{20.3}$$

Аналогично предложению 2 доказывается следующее

Предложение 7.

I. *Отображения* (20) *зависят лишь от отображения* f *и модуля* Φ.

II. *Предположим, что отображение* f *есть изоморфизм. Тогда отображения* (20) *также являются изоморфизмами, причем обратными к ним служат отображения, также ассоциированные с некоторыми* A*-матрицами.*

III. *Пусть снова* f *есть изоморфизм. Тогда если для некоторого* i *отображение* $\mathrm{Hom}(\pi_i, \Phi)$ *является гомоморфизмом, то отображение* $\mathrm{Hom}(p_i, \Phi)$ *также является гомоморфизмом.*

Из этого предложения вытекает, что модули (18) с точностью до A-изоморфизмов зависят лишь от M и Φ, и если f: $M \to M'$ —

некоторое отображение конечных модулей, то однозначно определены отображения

$$f_i^*\colon \operatorname{Ext}^i(M', \Phi) \to \operatorname{Ext}^i(M, \Phi), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем $f_0^* = f^*$.

Пусть $\varphi\colon \Phi \to \Phi'$ — некоторое отображение модулей. Такое отображение, очевидно, переводит подмодуль $\Phi_{p_i'}$ в $\Phi'_{p_i'}$, а подмодуль $p_{i-1}'\Phi^{s_{i-1}}$ в $p_{i-1}'\Phi'^{s_{i-1}}$. Следовательно, определено ассоциированное с ним отображение $\varphi_i^*\colon \operatorname{Ext}^i(M, \Phi) \to \operatorname{Ext}^i(M, \Phi')$, которое, как легко проверить, зависит лишь от φ и M. Отображения φ_i^* и f_i^* мы будем называть производными (по отношению к φ и f).

5°. Точные последовательности, связывающие производные отображения. Мы имеем в виду хорошо известные точные последовательности для функтора Ext. Пусть Φ — некоторый модуль, а

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

— некоторая точная последовательность конечных модулей. Тогда определены так называемые связывающие отображения δ_i, $i \geqslant 0$, делающие последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', \Phi) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, \Phi) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M', \Phi) \xrightarrow{\delta_0}$$
$$\to \operatorname{Ext}^1(M'', \Phi) \to \ldots \to \operatorname{Ext}^i(M'', \Phi) \xrightarrow{g_i^*} \operatorname{Ext}^i(M, \Phi) \xrightarrow{f_i^*}$$
$$\to \operatorname{Ext}^i(M', \Phi) \xrightarrow{\delta_i} \operatorname{Ext}^{i+1}(M'', \Phi) \to \ldots$$

алгебраически точной.

Пусть, далее, M — некоторый конечный модуль, а

$$0 \to \Phi' \xrightarrow{\varphi} \Phi \xrightarrow{\psi} \Phi'' \to 0 \tag{21.3}$$

— некоторая алгебраически точная последовательность модулей. Тогда определены отображения δ^i, также называемые связывающими, такие, что последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, \Phi') \xrightarrow{\varphi_0^*} \operatorname{Hom}(M, \Phi) \xrightarrow{\psi_0^*} \operatorname{Hom}(M, \Phi'') \xrightarrow{\delta^0}$$
$$\to \operatorname{Ext}^1(M, \Phi') \to \ldots \to \operatorname{Ext}^i(M, \Phi') \xrightarrow{\varphi_i^*} \operatorname{Ext}^i(M, \Phi) \xrightarrow{\psi_i^*}$$
$$\to \operatorname{Ext}^i(M, \Phi'') \xrightarrow{\delta^i} \operatorname{Ext}^{i-1}(M, \Phi') \to \ldots$$

алгебраически точна. Отметим, что мы не утверждаем, что связывающие отображения являются непрерывными отображениями модулей. Их непрерывность мы сейчас докажем при дополнительном ограничении на (21).

Предложение 8. *Если последовательность* (21) *точна, то отображения* δ^i *непрерывны.*

Доказательство. Пусть (1) — свободная резольвента модуля M. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
\Phi'' \arrow[u] \arrow[r, "p'_{i-1}"] & \Phi'' \arrow[u] \arrow[r, "p'_i"] & \Phi'' & \\
\Phi \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "p'_{i-1}"] & \Phi \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "p'_i"] & \Phi \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "p'_{i+1}"] & \Phi \\
& \Phi' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "p'_i"] & \Phi' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "p'_{i+1}"] & \Phi \arrow[u, "\varphi"] \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

где для упрощения мы любой модуль вида Φ^k обозначаем просто через Φ. С помощью этой диаграммы построим последовательность отображений

$$\Phi''_{p'_i}/p'_{i-1}\Phi'' \xrightarrow{\psi^{-1}} \Phi_{(p'_i\psi)}/[p'_{i-1}\Phi+\varphi\Phi'] \xrightarrow{p'_i} \\ \xrightarrow{p'_i} [\Phi_{p'_{i+1}} \cap \varphi\Phi']/\varphi p'_i\Phi' \xrightarrow{\varphi^{-1}} \Phi'_{p'_{i+1}}/p'_i\Phi'. \qquad (22.3)$$

Отображения ψ^{-1} и φ^{-1} в этой последовательности получены применением леммы 4 § 2 к тройкам (p'_{i-1}, ψ, p'_i) и $(p'_i, \varphi, p'_{i+1})$ и, следовательно, являются изоморфизмами. Из непрерывности всех отображений в (22) вытекает непрерывность их композиции, которая, как легко видеть, совпадает с δ^i. ■

Если конечный модуль M является прямой суммой конечных модулей M' и M'', то, как легко вывести из определений, имеют место топологические изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^i(M, \Phi) \cong \mathrm{Ext}^i(M', \Phi) \oplus \mathrm{Ext}^i(M'', \Phi), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Аналогичным образом, если $\Phi \cong \Phi' \oplus \Phi''$, то при любом $i \geqslant 0$

$$\mathrm{Ext}^i(M, \Phi) \cong \mathrm{Ext}^i(M, \Phi') \oplus \mathrm{Ext}^i(M, \Phi'').$$

6°. Инъективные модули.

Определение 2. A-модуль Φ называется *инъективным*, если для любой точной последовательности конечных A-модулей $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ точна последовательность

$$\operatorname{Hom}(M'', \Phi) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, \Phi) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M', \Phi).$$

По аналогии с предложением 5 доказывается следующий факт.

Предложение 9. *Для того чтобы A-модуль Φ был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точной последовательности вида $A^s \xrightarrow{p} A^t \xrightarrow{r} A^v$ была точна последовательность*

$$\Phi^v \xrightarrow{r'} \Phi^t \xrightarrow{p'} \Phi^s.$$

7°. Когомологическая размерность модулей. *Когомологической размерностью* конечного A-модуля M называется наименьшее число $\delta = \delta(M)$ такое, что существует свободная резольвента этого модуля, состоящая из нулей, начиная с $\delta+1$-го члена, т. е. свободная резольвента вида

$$0 \to A^{s_\delta} \xrightarrow{p_{\delta-1}} A^{s_{\delta-1}} \to \ldots \to A^{s_1} \xrightarrow{p_0} A^{s_0} \xrightarrow{a} M \to 0.$$

В частности, модуль M свободный тогда и только тогда, когда $\delta(M) = 0$; равенсгво $\delta(M) = -1$ означает, что $M = 0$.

Если A есть кольцо всех многочленов от n переменных с комплексными коэффициентами, то в силу теоремы Гильберта*) любой конечный A-модуль имеет когомологическую размерность, не превосходящую n. Отсюда следует, что для любого конечного A-модуля M и A-модуля Φ мы имеем $\operatorname{Ext}^i(M, \Phi) = 0$ при $i > n$.

*) См. Зарисский О., Самюэль П. [1], т. II.

Глава II

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ В ПРОСТРАНСТВЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Известная «подготовительная лемма» Вейерштрасса есть теорема о делении с остатком формальных (сходящихся) степенных рядов. Именно, если фиксирован степенной ряд p, всякий ряд φ может быть записан в виде $\varphi = p\psi + \chi$, где частное ψ и остаток χ суть степенные ряды, причем остаток χ принадлежит выделенному подпространству (образованному рядами, содержащими выделенное переменное в ограниченных степенях). Последнее условие определяет это разложение однозначно. В этой главе мы установим аналогичную теорему о делении векторных степенных рядов на фиксированную матрицу p, образованную степенными рядами: всякий векторный ряд φ будет однозначно записан в виде $\varphi = p\psi + \chi$, где ψ и χ — также векторные степенные ряды, а ряд χ принадлежит специальному подпространству. Мы будем предполагать, что матрица p образована полиномами или аналитическими функциями, что несущественно для формальной части результата, но необходимо для оценки операторов $\varphi \to \psi$ и $\varphi \to \chi$. Детальное изучение этих операторов, которое мы проведем, будет весьма важно в гл. IV.

§ 1. Пространство степенных рядов

1°. Терминология и символика. Пусть s — натуральное число. Элементы пространства C^s мы будем часто интерпретировать как столбцы высоты s с комплексными элементами. Для любого $\zeta \in C^s$ положим

$$|\zeta| = \max_{\sigma} |\zeta_\sigma|, \qquad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_s).$$

В соответствии с этим линейный оператор a: $C^s \to C^t$ мы отождествим с прямоугольной матрицей $a = \{a_{\tau\sigma}\}$ размера $t \times s$ (т. е. с t

строками и s столбцами), действие которой на столбец ζ заключается в умножении слева. Положим

$$|a| = \max_{1 \leqslant \tau \leqslant t} \sum_{\sigma=1}^{s} |a_{\tau\sigma}|.$$

Мы, очевидно, имеем $|a\zeta| \leqslant |a| \cdot |\zeta|$ для любого $\zeta \in C^s$.

Предложение 1. *Пусть a — невырожденная матрица размера $s \times s$. Тогда*

$$|a^{-1}| \leqslant \frac{s\,|a|^{s-1}}{|\det a|}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $A_{\tau\sigma}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\tau\sigma}$. Очевидно, что

$$|A_{\tau\sigma}| \leqslant \prod_{\tau' \neq \tau} \sum_{\sigma'} |a_{\tau'\sigma'}| \leqslant |a|^{s-1}.$$

Поэтому каждый элемент матрицы a^{-1} не превосходит по модулю величины $|a|^{s-1} |\det a|^{-1}$. Отсюда следует (1). ■

Матрицы, которые нам будут встречаться, часто будут иметь несколько более общий вид, чем обычно. Пусть M и N — произвольные конечные множества; матрицей размера $M \times N$ мы будем называть любую функцию $A = \{a_{\mu\nu}\}$, определенную для $\mu \in M$, $\nu \in N$, значениями которой являются комплексные числа. Совокупность чисел $a_{\mu\nu}$ с фиксированным μ назовем строкой этой матрицы с номером μ, а множество чисел $a_{\mu\nu}$, $\mu \in M$ — столбцом с номером ν. Занумеровав элементы множеств M и N, мы можем превратить матрицу A в обычную прямоугольную. Исходя из этого, мы можем для любой матрицы размера $M \times N$ определить понятия минора, ранга и т. д.

Пусть $A = \{a_{\mu\nu}\}$ — матрица размера $M \times N$; если $M' \subset M$ и $N' \subset N$ — некоторые подмножества, то совокупность чисел $\{a_{\mu\nu}, \mu \in M', \nu \in N'\}$ мы назовем подматрицей матрицы A. Если A — матрица размера $M \times N$, а B — матрица размера $N \times L$, то определено произведение AB, являющееся матрицей размера $M \times L$.

Зафиксируем произвольное натуральное число m. Через Z^m обозначим подмножество в евклидовом пространстве R^m, образованное точками с целочисленными координатами, а через Z^m_+ — подмножество в Z^m, образованное точками с неотрицательными координатами. Множества Z^m и Z^m_+ мы будем называть решетками. Векторы e_k, $k = 1, \ldots, m$, являющиеся строками единичной матрицы порядка m, образуют базис в решетке Z^m. В Z^m рассмотрим линейный функционал $i \to |i|$, относящий точке сумму ее координат. Пересечение Z^m_+ и множества, где $|i| = k \geqslant 0$, обозначим через Σ_k.

В решетке Z^m определим следующее отношение порядка: запишем $i \geqslant j$, если все координаты точки j не превосходят соответствующих координат точки i, т. е. если $i - j \in Z^m_+$. Будем писать $i > j$, если $i \geqslant j$, и $i \neq j$.

Пусть s — произвольное натуральное число. Через sZ^m обозначим множество, образованное всевозможными парами (σ, i), где σ — натуральное число, принимающее значения от 1 до s, а $i \in Z^m$. Более общо, если $\mathcal{J}$ — произвольное подмножество в Z^m, то через $s\mathcal{J}$ обозначим подмножество в sZ^m, образованное парами (σ, i), где $\sigma = 1, \ldots, s$, а $i \in \mathcal{J}$. Множество $1\mathcal{J}$ отождествим с $\mathcal{J}$. Для любого подмножества $\mathcal{J} \subset sZ^m$ через $|\mathcal{J}|$ обозначим число его элементов. Если $\mathcal{J}$ — подмножество в sZ^m, а $\mathcal{F}$ — подмножество в Z^m, то через $\mathcal{J} + \mathcal{F}$ обозначим множество в sZ^m, образованное парами $(\sigma, i + j)$, где $(\sigma, i) \in \mathcal{J}$, а $j \in \mathcal{F}$.

2°. Пространство формальных степенных рядов. Зафиксируем комплексное евклидово пространство C^m, точки которого мы будем постоянно обозначать буквой $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Через $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\eta]$ обозначим линейное пространство, образованное формальными степенными рядами по переменным η с коэффициентами из C, т. е. пространство формальных сумм вида

$$\varphi = \varphi[\eta] = \sum_{i \in Z^m_+} \varphi_i \eta^i, \qquad i = (i_1, \ldots, i_m), \quad \eta^i = \eta_1^{i_1} \ldots \eta_m^{i_m}. \tag{2.1}$$

Для любого натурального s через $\mathcal{S}^s$, в соответствии с обозначениями § 1 гл. I, мы обозначаем прямую сумму s экземпляров пространства $\mathcal{S}$. Пространство $\mathcal{S}^s$ мы будем интерпретировать двумя способами: во-первых, как пространство столбцов высоты s, элементы которых принадлежат $\mathcal{S}$, а во-вторых, как пространство формальных степенных рядов по η с коэффициентами из C^s. В последнем случае мы будем записывать элементы пространства $\mathcal{S}^s$ в виде сумм (2), имея в виду, что $\varphi_i \in C^s$ для всех i, или в виде

$$\varphi = \sum_{sZ^m_+} \varphi_{\sigma, i} \eta^{\sigma, i}, \qquad \varphi_{\sigma, i} \in C,$$

где $\eta^{\sigma, i}$ — произведение η^i и столбца e_σ с номером σ единичной матрицы порядка s.

Для каждой пары $(\sigma, i) \in sZ^m_+$ рассмотрим линейный функционал $\delta_{\sigma, i}$ над $\mathcal{S}^s$, действующий по формуле

$$\delta_{\sigma, i}\colon \varphi = \sum \varphi_{\tau, j} \eta^{\tau, j} \to \varphi_{\sigma, i}.$$

Для общности обозначений положим $\delta_{\sigma, i} = 0$ при $i \bar{\in} Z^m_+$. Если $i \in Z^m_+$, то через δ_i обозначим функционал над $\mathcal{S}^s$ со значениями в C^s, относящий ряду (2) его коэффициент φ_i. Таким образом, функционал

δ_l можно рассматривать как столбец высоты s, образованный функционалами $\delta_{\sigma, l}$, $\sigma = 1, \ldots, s$.

Более общо, пусть $\mathcal{J}$ — произвольное конечное подмножество в sZ^m_+. Через $\delta_{\mathcal{J}}$ обозначим функционал над $\mathcal{S}^s$, действующий по формуле

$$\delta_{\mathcal{J}}\colon \varphi \to \{\varphi_{\sigma, l}, \quad (\sigma, l) \in \mathcal{J}\} \in C^{|\mathcal{J}|}.$$

Иными словами, $\delta_{\mathcal{J}}\varphi$ есть столбец, образованный коэффициентами ряда φ с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}$. Для функционала $\delta_{s\Sigma_k}$ будем применять более простое обозначение δ_k.

Пусть s и t — произвольные натуральные числа. *Функционалом над $\mathcal{S}^s$ со значениями в C^t* мы назовем любую конечную сумму вида

$$f = f(\delta) = \sum f^{\sigma, l}\delta_{\sigma, l}, \quad f^{\sigma, l} \in C^t, \tag{3.1}$$

действующую по формуле

$$f\colon \varphi \to \sum f^{\sigma, l}\varphi_{\sigma, l}.$$

В матричной записи равенство (3) выглядит так: $f = \sum f^l\delta_l$, где $f^l\colon C^s \to C^t$ — матрицы, образованные столбцами $f^{\sigma, l}$. Максимум величины $|l|$ при $f^l \neq 0$ мы назовем ***порядком*** функционала f и обозначим через $\deg f$.

Дифференциальным оператором, отвечающим функционалу f, назовем выражение

$$f(D) = \sum f^{\sigma, l}\frac{1}{l!}D^{\sigma, l},$$

где $D^{\sigma, l}$ — произведение оператора $D^l = \dfrac{\partial^{|l|}}{\partial\eta_1^{l_1}\ldots\partial\eta_m^{l_m}}$ и столбца e_σ с номером σ единичной матрицы порядка s. Следующая формула связывает функционал $f(\delta)$ и оператор $f(D)$:

$$f(\delta)\varphi = f(D)\varphi|_{\eta=0}.$$

3°. Операторы в пространстве формальных рядов. Пусть снова s и t — произвольные натуральные числа. *Оператором, действующим из $\mathcal{S}^s$ в $\mathcal{S}^t$*, мы назовем произвольное выражение

$$A = \sum_{tZ^m_+} \eta^{\tau, l}A_{\tau, l}(\delta), \tag{4.1}$$

где все $A_{\tau, l}$ суть функционалы над $\mathcal{S}^s$ со значениями в C, действующее по формуле

$$A\colon \varphi \to \sum \eta^{\sigma, l}A_{\sigma, l}(\delta)\varphi.$$

Для каждого i столбец $A_i = (A_{1,\,i}, \ldots, A_{s,\,i})$ есть функционал над $\mathcal{S}^s$ со значениями в C^t, следовательно, формулу (4) можно переписать так: $A = \sum \eta^i A_i(\delta)$. Эту же формулу можно переписать иначе, если записать функционалы A_i в развернутом виде

$$A = \sum \eta^i A_i^j \delta_j = \sum \eta^{\tau,\,i} A_{\tau,\,i}^{\sigma,\,j} \delta_{\sigma,\,j},$$

где $A_i^j \colon C^s \to C^t$ — матрицы, образованные числами $A_{\tau,\,i}^{\sigma,\,j}$. Величины A_i, A_i^j, а также $A_{\tau,\,i}^{\sigma,\,j}$ мы будем называть коэффициентами оператора A. Они выражаются через сам оператор так:

$$A_i = \delta_i A, \quad A_i^j = \delta_i A \eta^j, \quad A_{\tau,\,i}^{\sigma,\,j} = \delta_{\tau,\,i} A \eta^{\sigma,\,j}.$$

В частности, тождественный оператор в $\mathcal{S}^s$ может быть записан так:

$$E = \sum \eta^i \delta_i = \sum \eta^{\sigma,\,i} \delta_{\sigma,\,i}.$$

Через $[\,\cdot\,]_k$ обозначим оператор в $\mathcal{S}^s$, действующий по формуле

$$[\varphi]_k = \sum_{|i| \leqslant k} \eta^i \delta_i \varphi.$$

Ядро этого оператора обозначим через m_{k+1}^s. Таким образом, m_{k+1}^s есть пространство рядов из $\mathcal{S}^s$, не содержащих членов порядка $\leqslant k$.

4°. **Пространство сходящихся степенных рядов.** Для каждого $r > 0$ рассмотрим подпространство $\mathfrak{G}_r \subset \mathcal{S}$, образованное сходящимися при $|\eta| \leqslant r$ рядами. Это подпространство наделим нормой

$$\|\varphi\|_r = \sup_{|\eta| \leqslant r} \left|\sum \varphi_i \eta^i\right|,$$

где в правой части выражение $\sum \varphi_i \eta^i$ мы понимаем не как формальный степенной ряд, а как сумму этого ряда. Через $\mathfrak{G}$ обозначим объединение всех пространств $\mathfrak{G}_r$.

Предложение 2. *Для любого* $\varphi \in \mathfrak{G}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *имеют место неравенства*

$$|\varphi_i| \leqslant \left(\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right)^{|i|} \|\varphi\|_\varepsilon, \quad i \in Z_+^m. \tag{5.1}$$

Доказательство. Через $\varphi(\eta)$ обозначим сумму ряда $\sum \varphi_i \eta^i$. Эта функция ограничена в шаре $|\eta| \leqslant \varepsilon$ и аналитична внутри него. Впишем в этот шар полицилиндр $\left\{\eta \colon |\eta_l| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\ l = 1, \ldots, m\right\}$ и применим теорему Коши, взяв в качестве контура остов Γ этого полицилиндра. Цепочка очевидных соотношений

$$|\varphi_i| = \left|\frac{1}{i!} D^i\varphi\Big|_{\eta=0}\right| = \left|(2\pi)^{-n}\int\limits_{\Gamma} \eta^{-i-e}\varphi(\eta)\,d\eta\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right)^{|i|}\|\varphi\|_{\varepsilon},$$

$$e = \sum_{1}^{s} e_k$$

приводит нас к цели. ■

5°. Пространства $\mathscr{S}$ и $\mathcal{O}$ как $\mathscr{P}$-модули. Зафиксируем произвольное натуральное $n \geqslant m$ и рассмотрим кольцо $\mathscr{P} = C[z]$ многочленов в пространстве $C^n = C^n_z$ с комплексными коэффициентами. Введенное выше пространство C^m мы будем рассматривать как координатное подпространство в C^n, точнее, точку $\eta \in C^m$ отождествим с точкой $z = (\eta_1, \ldots, \eta_m, 0, \ldots, 0)$.

Каждому многочлену $f \in \mathscr{P}$ и точке $z \in C^n$ поставим в соответствие оператор в $\mathscr{S}$

$$f(z)\colon\ \varphi[\eta] \to f(z+\eta)\,\varphi[\eta], \tag{6.1}$$

действие которого заключается в умножении на степенной ряд

$$f(z+\eta) = \sum \eta^i \frac{D^i}{i!} f(z),$$

равный ряду Тейлора по переменным η многочлена f в точке z. Аналогичным образом каждой $\mathscr{P}$-матрице $p\colon \mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$ (т. е. матрице размера $t \times s$ с элементами из $\mathscr{P}$) и точке $z \in C^n$ отнесем оператор

$$p(z)\colon\ \mathscr{S}^s \ni \varphi[\eta] \to p(z+\eta)\,\varphi[\eta] \in \mathscr{S}^t,$$

заключающийся в умножении на соответствующий матричный ряд Тейлора.

Зафиксируем точку z. Если каждому многочлену $f \in \mathscr{P}$ поставить в соответствие оператор (6), то тем самым мы превратим пространство $\mathscr{S}$ в унитарный $\mathscr{P}$-модуль. Пространство $\mathscr{S}$, наделенное такой структурой $\mathscr{P}$-модуля, мы будем иногда обозначать через $\mathscr{S}_z$. Подмодуль этого модуля, образованный элементами подпространства $\mathcal{O}$, обозначим через $\mathcal{O}_z$. В случае $n = m$ этот подмодуль мы будем часто отождествлять с пространством функций, голоморфных в окрестности z, в котором действие многочлена кольца $\mathscr{P}$ есть обычное умножение.

В дальнейшем, если не отмечено противное, пространства $\mathscr{S}$ и $\mathcal{O}$ мы будем наделять структурами модулей $\mathscr{S}_0$ соответственно $\mathcal{O}_0$. Отметим некоторые известные свойства этих модулей *).

Предложение 3. *В случае $n = m$ $\mathscr{P}$-модули $\mathscr{S}$ и $\mathcal{O}$ — плоские.*

---

*) См., например, Зарисский О., Самюэль П. [1], т. II.

Предложение 4. *Пусть* $n=m$, $p\colon \mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$ — *произвольная* $\mathcal{P}$-*матрица, а* z — *произвольная точка в* C^n. *Тогда если столбец* $F \in \mathcal{P}^t$ *принадлежит* $p\mathcal{S}^s_z$, *то он принадлежит* $p\mathcal{R}^s_z$, *где* $\mathcal{R}_z$ — *кольцо всех рациональных функций в* C^n *со знаменателями, отличными от нуля в точке* z.

Если $F \in p\mathcal{S}^s_z$ *при любом* $z \in C^n$, *то* $F \in p\mathcal{P}^s$.

§ 2. Базисная последовательность матриц

Начиная с этого параграфа вплоть до конца главы, зафиксируем произвольную $\mathcal{P}$-матрицу $p\colon \mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$, т. е. матрицу размера $t \times s$, образованную полиномами в C^n с комплексными коэффициентами.

1°. Конструкция базисной последовательности.

Теорема. *В каждой точке* $z \in C^n$ *для любого целого* $k \geqslant 0$ *существует матрица* $P_k(z, \eta)$ *размера* $t \times s_k$ *с некоторым* $s_k \geqslant 0$, *образованная многочленами от* η, *обладающая следующими свойствами.*

I.

$$P_k(z)\mathcal{S}^{s_k} = m^t_k \cap p(z)\mathcal{S}^s.$$

II. *Пусть* $\Delta_k(z) = \delta_k P_k(z, \eta)$ *) — *матрица размера* $t\Sigma_k \times s_k$, *образованная столбцами* $\delta_k P_{k,\sigma}$, *где* $P_{k,\sigma}$, $\sigma = 1, \ldots, s_k$, — *столбцы матрицы* P_k; $\rho_k(z)$ — *ранг матрицы* $\Delta_k(z)$. *На любом множестве вида*

$$N^r_{k-1} = \{z \in C^n\colon \rho_0(z) = r_0, \ldots, \rho_{k-1}(z) = r_{k-1}\},$$
$$\text{где} \quad r = (r_0, \ldots, r_{k-1}) \in Z^k_+,$$

число s_k *постоянно, а матрица* P_k *может быть записана в виде*

$$P_k(z, \eta) = p(z+\eta)Q_k(z, \eta), \tag{1.2}$$

где Q_k — *некоторая матрица размера* $s \times s_k$, *образованная многочленами от* z *и* η.

Последовательность матриц $\Delta_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мы будем называть базисной последовательностью. Из сформулированной теоремы легко выводится следующее свойство базисной последовательности. Для всякого $k \geqslant 0$ ряд $\varphi \in m^t_k$ принадлежит подпространству $p(z)\mathcal{S}^s$ по модулю m^t_{k+1} в том и только том случае, когда столбец $\delta_k\varphi$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\Delta_k(z)$. В самом деле, включение

$$\varphi \in m^t_k \cap p(z)\mathcal{S}^s, \qquad \operatorname{mod} m^t_{k+1}$$

---

*) Здесь и в дальнейшем элементы матрицы $P_k(z, \eta)$ и аналогичных матриц мы рассматриваем как степенные ряды по η; переменные z являются параметрами.

в силу первого утверждения теоремы эквивалентно включению

$$\varphi \in P_k(z)\mathscr{S}^{s_k}, \qquad \operatorname{mod} m_{k+1}^t.$$

Так как матрица P_k не содержит членов порядка ниже k, последнее включение эквивалентно тому, что $\varphi = P_k(z)\psi$, $\operatorname{mod} m_{k+1}^t$ с некоторым скалярным вектором $\psi \in C^{s_k}$. Подействовав на обе части этого равенства функционалом δ_k, мы получаем эквивалентное соотношение

$$\delta_k\varphi = \Delta_k(z)\psi,$$

ч. и т. д.

Доказательство теоремы. Матрицы P_k будем строить индукцией по числу k. Положим $P_0(z, \eta) = p(z+\eta)$; очевидно, что эта матрица удовлетворяет условиям теоремы с $k=0$. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 0$ мы построили матрицы $P_0, \ldots, P_k$, удовлетворяющие условиям I и II. Построим матрицу P_{k+1}.

Зафиксируем произвольным образом вектор $r' = (r_0, \ldots, r_{k-1}, \rho) \in Z_+^{k+1}$ и предположим, что точка z принадлежит множеству $N_k^{r'}$. В силу предположения индукции на этом множестве элементы матрицы P_k суть многочлены от z и η. В множестве $t\Sigma_k$ выберем произвольным образом ρ различных элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$. Выберем также произвольное $\rho+1$ различное натуральное число $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho, \sigma$, каждое из которых не превосходит s_k. Пусть M — минор матрицы Δ_k, образованный элементами $\delta_{\alpha_i}P_{k,\sigma_j}$, $i, j = 1, \ldots, \rho$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\delta_\alpha \sum_1^\rho P_{k,\sigma_j}\lambda_j = (\det M)^2\,\delta_\alpha P_{k,\sigma}, \qquad \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \tag{2.2}$$

относительно неизвестных $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho)$, матрица которой равна M. Решение этой системы мы найдем по следующему правилу, не зависящему от невырожденности матрицы M. Рассмотрим матрицу $\breve{M}$, образованную алгебраическими дополнениями элементов матрицы M; пусть $\breve{M}'$ — транспонированная матрица. Искомый вектор λ мы получим, применив матрицу $(\det M)\,\breve{M}'$ к столбцу, образованному величинами $\delta_\alpha P_{k,\sigma}$, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$. Очевидно, что элементы вектора λ являются многочленами от z и обращаются в нуль, когда $\det M = 0$.

Заметим, что найденные величины λ_j удовлетворяют уравнениям (2) при всех $\alpha \in t\Sigma_k$. В самом деле, если $\det M = 0$, то обе части уравнения (2) равны нулю. Если же $\det M \neq 0$, то столбцы $\delta_k P_{k,\sigma_j}$, $j = 1, \ldots, \rho$, матрицы Δ_k линейно независимы и, следовательно, образуют базис среди всех столбцов этой матрицы, так как из $z \in N_k^{r'}$ следует, что ранг матрицы Δ_k равен ρ. Отсюда вытекает, что столбец $\delta_k P_{k,\sigma}$ является линейной комбинацией столбцов этого базиса с коэффициентами, равными $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$, ч. и т. д. Рассмотрим следующий столбец:

$$P^* = (\det M)^2 P_{k,\sigma} - \sum P_{k,\sigma_j}\lambda_j. \tag{3.2}$$

Он, очевидно, образован многочленами от z и η, а из выполнения уравнения (2) при любом $\alpha \in t\Sigma_k$ следует, что он не содержит членов порядка ниже $k+1$.

Заставим теперь величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$, σ пробегать в определенном, не зависящем от точки $z \in N_k^{r'}$ порядке всевозможные сочетания из ρ различных элементов множества $t\Sigma_k$, соответственно из $\rho+1$ натурального числа, не превосходящего s_k. При этом мы получим упорядоченную последовательность столбцов вида (3). Добавим к этой последовательности всевозможные столбцы вида $\eta^j P_{k,\sigma}(z, \eta)$, где $\sigma = 1, \ldots, s_k$, а $j \in \Sigma_1$, также расположенные в определенном, не зависящем от точки $z \in N_k^{r'}$ порядке. Полученную последовательность столбцов обозначим так:

$$P_{k+1,1}, \ldots, P_{k+1,s_{k+1}}.$$

При каждом $\sigma \leqslant s_{k+1}$ $P_{k+1,\sigma}$ есть столбец высоты t, образованный многочленами от z и η. Матрицу размера $t \times s_{k+1}$, образованную этими столбцами в установленном нами порядке, обозначим через P_{k+1}. Проверим, что эта матрица удовлетворяет условиям теоремы.

Непосредственно из конструкции видно, что на множестве $N_k^{r'}$

$$P_{k+1,\sigma} = \sum_\tau P_{k,\tau} q_{k,\tau}^\sigma, \qquad \sigma = 1, \ldots, s_{k+1},$$

где $q_{k,\tau}^\sigma$ — некоторые полиномы от z и η. В матричной записи

$$P_{k+1} = P_k q_k, \tag{4.2}$$

где $q_k = \{q_{k,\tau}^\sigma\}$. Поэтому из (1)

$$P_{k+1} = pQ_{k+1},$$

где $Q_{k+1} = Q_k q_k$ — матрица, образованная многочленами от z и η. Таким образом, мы проверили, что матрица P_{k+1} удовлетворяет условию II.

2°. Окончание доказательства теоремы. Остается проверить, что матрица P_{k+1} удовлетворяет первому условию теоремы. Установим сначала равенство

$$P_{k+1}\mathscr{P}^{s_{k+1}} = m_{k+1}^t \cap P_k \mathscr{P}^{s_k}. \tag{5.2}$$

Из (4) мы имеем

$$P_{k+1}\mathscr{P}^{s_{k+1}} = P_k q_k \mathscr{P}^{s_{k+1}} \subset P_k \mathscr{P}^{s_k}. \tag{6.2}$$

Так как столбцы матрицы P_{k+1} не содержат членов порядка ниже $k+1$, то $P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}} \subset m^t_{k+1}$, что в сочетании с (6) влечет включение $P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}} \subset m^t_{k+1} \cap P_k\mathscr{S}^{s_k}$.

Докажем обратное включение. Пусть φ — произвольный элемент правой части (5). Это означает, что он не содержит членов порядка ниже $k+1$ и может быть записан в виде

$$\varphi = \sum_\sigma P_{k,\sigma} \sum_l \psi_{\sigma,l}\eta^l$$

с некоторыми $\psi_{\sigma,l} \in C$. Правую часть мы перепишем в виде

$$\sum_\sigma P_{k,\sigma}\psi_{\sigma,0} + \sum_{\sigma,\,|l|>0} \psi_{\sigma,l}P_{k,\sigma}\eta^l. \tag{7.2}$$

Заметим теперь, что каждое слагаемое второй суммы принадлежит пространству $P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}}$, поскольку среди столбцов матрицы P_{k+1} содержатся все столбцы вида $P_{k,\sigma}\eta^j$, где $|j|=1$.

Преобразуем теперь первую сумму в (7). Для этого выберем некоторый невырожденный минор M порядка $\rho=\rho_k=\operatorname{rang}\Delta_k$ в матрице Δ_k. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$ — номера столбцов, в которых находится этот минор. В таком случае произвольный столбец $P_{k,\sigma}$ матрицы P_k в силу (3) выражается через P_{k,σ_j} по формуле

$$P_{k,\sigma} = (\det M)^{-2}\left(P^* + \sum P_{k,\sigma_j}\lambda_j\right),$$

где P^* — один из столбцов матрицы P_{k+1}. Подставив эти выражения в первую сумму (7), мы приведем ее к виду $\sum P_{k,\sigma_j}\psi_j$ с некоторыми $\psi_j \in C$ с точностью до линейной комбинации столбцов матрицы P_{k+1}. Учитывая, что сумма (7) равна φ, мы получаем

$$\varphi = \sum P_{k,\sigma_j}\psi_j, \qquad \operatorname{mod} P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}}. \tag{8.2}$$

Применив к обеим частям равенства функционал δ_k, мы получим

$$\sum_j \delta_k P_{k,\sigma_j}\psi_j = 0,$$

поскольку $\varphi \in m^t_{k+1}$. Так как столбцы $\delta_k P_{k,\sigma_j}$, $j=1, \ldots, \rho$, матрицы Δ_k линейно независимы в силу выбора минора M, мы заключаем, что все $\psi_j=0$. Поэтому правая часть (8) равна нулю, т. е. $\varphi \in P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}}$, ч. и т. д. Таким образом, равенство (5) доказано.

Комбинируя это равенство с утверждением I теоремы для матрицы P_k, мы получаем

$$P_{k+1}\mathscr{S}^{s_{k+1}} = m^t_{k+1} \cap \left(m^t_k \cap p\mathscr{S}^s\right) = m^t_{k+1} \cap p\mathscr{S}^s.$$

Следовательно, матрица P_{k+1} удовлетворяет равенству I теоремы. ■

3°. Дополнительные построения. В решетке Z^m введем лексикографическое отношение порядка: запишем $i \succ j$, если при некотором натуральном $k \leqslant m$

$$i_1 = j_1, \ \ldots, \ i_{k-1} = j_{k-1}, \qquad i_k > j_k,$$

где i_α и j_α — координаты точек i и j. Запишем $i \succeq j$, если $i \succ j$ или $i = j$. Заметим, что отношение $i \succ j$ сохраняется при параллельном переносе в решетке Z^m.

Согласно определению § 1 tZ^m есть множество пар (τ, i), где $i \in Z^m$, а τ — натуральное число, не превосходящее t. В этом множестве также введем отношение порядка, положив

$$(\tau, i) \succ (\sigma, j), \quad \text{если} \quad i \succ j \quad \text{или} \quad i = j \quad \text{и} \quad \tau < \sigma.$$

Аналогичным образом запишем $(\tau, i) \succeq (\sigma, j)$, если $(\tau, i) \succ (\sigma, j)$ или $(\tau, i) = (\sigma, j)$. В случае $(\tau, i) \succeq (\sigma, j)$ $((\tau, i) \succ (\sigma, j))$ будем говорить, что точка (τ, i) (строго) *старше* точки (σ, j). Пусть $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — некоторое конечное подмножество в tZ^m; скажем, что оно *упорядочено по старшинству*, если $\alpha_1 \succ \ldots \succ \alpha_r$. Пусть $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и $B = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ — два подмножества в tZ^m с равными количествами элементов, упорядоченные по старшинству. Скажем, что множество A *строго старше* B, если для некоторого $k \leqslant r$ выполнены соотношения

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \qquad \alpha_k \succ \beta_k.$$

Скажем, что A *старше* B, если A строго старше B или $A = B$.

Зафиксируем произвольную точку $z \in C^n$ и рассмотрим базисную последовательность Δ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в этой точке (см. 1°). При каждом k строками матрицы Δ_k являются строки

$$\delta_{\tau,\, i}P_k = \left(\delta_{\tau,\, i}P_{k,\,1}, \ \ldots, \ \delta_{\tau,\, i}P_{k,\, s_k}\right), \qquad (\tau, i) \in t\Sigma_k.$$

Элемент (τ, i) есть номер этой строки. Зафиксируем произвольным образом число k и рассмотрим всевозможные множества $\mathcal{J} \subset t\Sigma_k$, обладающие тем свойством, что соответствующие строки $\delta_{\tau,\, i}P_k$, $(\tau, i) \in \mathcal{J}$, матрицы Δ_k образуют базис в линейном пространстве, натянутом на все строки этой матрицы. Число элементов в каждом таком множестве $\mathcal{J}$ равно рангу ρ_k матрицы Δ_k. Упорядочив каждое множество $\mathcal{J}$ по старшинству, выберем среди них самое старшее, которое обозначим через $\mathcal{G}_k$. Множество $\mathcal{G}_k$ характеризуется тем, что $|\mathcal{G}_k| = \rho_k$, а любая строка $\delta_{\tau,\, i}P_k$ матрицы Δ_k является линейной комбинацией строк той же матрицы с номерами $\alpha \in \mathcal{G}_k$, более старшими чем (τ, i). Множество $\mathcal{G}(z) = \mathcal{G} = \bigcup\limits_k \mathcal{G}_k$ мы будем называть *базисным в данной точке* z.

Зафиксируем произвольные целые $k \geqslant K \geqslant 0$. Рассмотрим линейный оператор L: $Z^m \to Z^m$, переводящий точку $i = (i_1, \ldots, i_m)$

в точку $L(i)$ с координатами $L_\alpha(i)$, $\alpha=1, \ldots, m$, определяемыми по формулам

$$L_\alpha(i)=K^{\alpha-1}[i_1-(K+1)|i|]+K^{\alpha-2}[i_2-(K+1)|i|]+\ldots$$
$$\ldots+[i_\alpha-(K+1)|i|],$$
$$\alpha=1, \ldots, m-1;$$
$$L_m(i)=-|i|.$$

Как легко видеть, из $L(i)=0$ вытекает $i=0$. Поэтому матрица, отвечающая этому оператору, не вырождена, следовательно, этот оператор, рассматриваемый в R^m, является изоморфизмом.

Предложение, которое мы сейчас сформулируем, описывает свойства этого оператора. Введем еще два обозначения: для каждой точки $i=(i_1, \ldots, i_m)\in Z^m$ через $|i|_-$ обозначим сумму всех отрицательных величин, встречающихся в последовательности $i_1, \ldots, i_{m-1}$, а через $|i|_+$ — сумму всех остальных координат точки i; таким образом, мы имеем $|i|=|i|_+ + |i|_-$.

Предложение.

I. *Если* $i\leqslant 0$, *то* $L(i)\geqslant 0$ (*т. е.* $L_\alpha(i)\geqslant 0$ *для всех* α).

II. *Из соотношений* $|i|\leqslant 0$, $i\succ 0$ *и* $|i|_-\geqslant -K$ *вытекает, что* $L(i)>0$.

III. *Из неравенств* $|i|<0$, $|i|_+\leqslant K$ *следует, что* $L(i)\geqslant -|i|e_m$.

Доказательство. Пусть $i_\alpha\leqslant 0$ для всех α. Тогда $|i|\leqslant i_\alpha$, $\alpha=1, \ldots, m$, откуда $i_\alpha-(K+1)|i|\geqslant 0$ для всех α. Поэтому $L_\alpha(i)\geqslant 0$ при $\alpha\leqslant m-1$. Кроме того, очевидно, что $L_m(i)\geqslant 0$. Тем самым первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим сначала, что $|i|=0$. Из соотношений $i\succ 0$ и $|i|_-\geqslant -K$ следует, что при некотором $k<m$

$$i_1=\ldots=i_{k-1}=0, \qquad i_k>0,$$

а сумма отрицательных чисел в последовательности $i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}$ не меньше $-K$. Отсюда немедленно вытекает, что $L_1(i)=\ldots$ $\ldots=L_{k-1}(i)=0$, а $L_k(i)>0$. В случае $k<\alpha<m$ мы имеем

$$L_\alpha(i)=K^{\alpha-k}i_k+K^{\alpha-k-1}i_{k+1}+\ldots+i_\alpha.$$

Так как $i_k>0$, первое слагаемое в правой части не меньше $K^{\alpha-k}$. Сумма всех отрицательных слагаемых в правой части не меньше произведения $K^{\alpha-k-1}$ на сумму всех отрицательных чисел в последовательности $i_{k+1}, \ldots, i_\alpha$. Последняя не меньше $-K$, следовательно, все отрицательные слагаемые в формуле для $L_\alpha(i)$ дают в сумме не меньше $-K^{\alpha-k}$. Отсюда $L_\alpha(i)\geqslant 0$. Кроме того, $L_m(i)=0$, поскольку $|i|=0$. Тем самым неравенство $L(i)>0$ доказано.

В случае $|i|<0$ положим $i'=i-|i|e_m$. Мы, очевидно, имеем $|i'|=0$, $i'\succ 0$ и $|i'|_-=|i|_-\geqslant -K$. Поэтому согласно доказанному $L(i')>0$. С другой стороны, $L(i)=L(i')+L(|i|e_m)\geqslant L(i')$, так как в силу первого утверждения предложения $L(|i|e_m)\geqslant 0$. Отсюда окончательно $L(i)>0$, ч. и т. д.

Перейдем к третьему утверждению. Из неравенства $|i|<0$ следует, что $-K|i|\geqslant K$, откуда $|i|_++|i|_--(K+1)|i|\geqslant K$, и, следовательно,

$$|i|_--(K+1)|i|\geqslant K-|i|_+\geqslant 0.$$

Поэтому при любом $\alpha=1,\ldots,m-1$ величина $i_\alpha-(K+1)|i|$ неотрицательна. Следовательно, $L_1(i)\geqslant 0,\ldots,L_{m-1}(i)\geqslant 0$. Для завершения доказательства остается заметить, что $L_m(i)=-|i|$. ■

4°. Основная лемма.

Лемма. *Для любой точки $z\in C^n$ и любых целых $k\geqslant K\geqslant 0$ справедливы следующие утверждения.*

I. $\mathcal{J}_K+\Sigma_\varkappa\subset\mathcal{J}_k$, $\varkappa=k-K$.

II. *Для каждого $j\in\Sigma_\varkappa$ положим $\Delta_K^j=\delta_k\eta^jP_K$ и рассмотрим систему уравнений*

$$\sum_{j\in\Sigma_\varkappa}\Delta_K^jx_j=y, \tag{9.2}$$

где $y=\{y_i\in\mathcal{L}^t,\ i\in\Sigma_k\}$ — столбец размера $t\Sigma_k$, элементы которого принадлежат некоторому линейному пространству $\mathcal{L}$. Пусть M — некоторый невырожденный минор порядка $\rho=\rho_K(z)$ матрицы $\widehat{\Delta}_K=\delta_{\mathcal{J}_K}P_K(z)$. Тогда величины $x_j\in\mathcal{L}^{s_K}$ могут быть выбраны так, что в системе (9) *будут удовлетворены все уравнения с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}_K+\Sigma_\varkappa$, причем*

$$x_j=\sum R_j^iy_i, \tag{10.2}$$

где R_j^i — некоторые матрицы, элементы которых являются многочленами от элементов матриц Δ_K и M^{-1}; неравенство $R_j^i\neq 0$ выполнено лишь при условии $L(i)\geqslant L(j+Ke_m)$ и

$$|R_j^i|\leqslant b^{|L(i)-L(j+Ke_m)|+1}, \tag{11.2}$$

где

$$b=|\Sigma_K|t\left(\rho\frac{(|\Delta_K|+1)^\rho}{|\det M|}\right)^{t+1}. \tag{12.2}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что среди столбцов матрицы P_k содержатся все столбцы вида $\eta^jP_{K,\sigma}$, где $j\in\Sigma_\varkappa$. Зафиксируем $j\in\Sigma_\varkappa$ и заметим, что

$$\delta_{\tau,i}\eta^jP_{K,\sigma}=\begin{cases}\delta_{\tau,i-j}P_{K,\sigma}, & \text{если } i\geqslant j,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{13.2}$$

Если точка (τ, i) пробегает множество $t\Sigma_k$ в порядке убывания старшинства, то точка $(\tau, i-j)$ при $i \geqslant j$ пробегает все множество $t\Sigma_K$ также в порядке убывания старшинства. Отсюда следует, что каждый столбец $\delta_k \eta^j P_{K,\sigma}$ матрицы Δ_K^j содержит в качестве подматрицы столбец $\delta_K P_{K,\sigma}$ матрицы Δ_K, а на остальных местах, т. е. местах с номерами (τ, i), где $i \not\geqslant j$, имеет нули.

Докажем первое утверждение леммы. Точки множества $\mathcal{J}_K$ в порядке убывания старшинства обозначим через $\alpha_\sigma = (\tau_\sigma, i_\sigma)$, $\sigma = 1, \ldots, \rho$. Допустим, что включение I не имеет места. В таком случае множество $(\mathcal{J}_K + \Sigma_\varkappa) \setminus \mathcal{J}_k$ не пусто; пусть α — некоторая точка этого множества. По определению эта точка имеет вид $\alpha_\sigma + j$ с некоторым σ и $j \in \Sigma_\varkappa$ и не принадлежит множеству $\mathcal{J}_k$. Согласно свойству множества $\mathcal{J}_k$ соответствующая строка $\delta_\alpha P_k$ матрицы Δ_k является линейной комбинацией строк $\delta_\beta P_k$, номера которых принадлежат $\mathcal{J}_k$ и строго старше номера α. Пусть λ_β — коэффициенты этой линейной комбинации. Заменив каждую строку $\delta_\beta P_k$ на ее фрагмент $\delta_\beta \eta^j P_K$, мы получим равенство

$$\delta_\alpha \eta^j P_K = \sum_{\beta \succ \alpha} \lambda_\beta \delta_\beta \eta^j P_K.$$

В силу соотношений (13) это равенство можно переписать так:

$$\delta_{\alpha_\sigma} P_K = \sum_{\beta - j \succ \alpha_\sigma} \lambda_\beta \delta_{\beta - j} P_K.$$

Полученное соотношение показывает, что строка $\delta_{\alpha_\sigma} P_K$ матрицы Δ_K с номером $\alpha_\sigma \in \mathcal{J}_K$ является линейной комбинацией строк той же матрицы со строго более старшими номерами. Это невозможно из-за свойства множества $\mathcal{J}_K$. Полученное противоречие доказывает включение I.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть M — некоторый невырожденный минор матрицы $\hat{\Delta}_K$ порядка ρ. Для простоты предположим, что он находится в первых ρ столбцах этой матрицы. Рассмотрим прямоугольную матрицу $\mathcal{M}$ размера $s_K \times \rho$, первые ρ строк которой образуют матрицу M^{-1}, а остальные равны нулю. Положим

$$D = \Delta_K \mathcal{M}; \qquad D^j = \Delta_K^j \mathcal{M}, \qquad j \in \Sigma_\varkappa.$$

Опишем структуры этих матриц. D есть прямоугольная матрица размера $t\Sigma_K \times \rho$, причем ее минор, образованный строками с номерами, принадлежащими $\mathcal{J}_K$, есть единичная матрица. Для каждого $\alpha \in t\Sigma_K$ через d_α обозначим ее строку с номером α. Для всякого α строка d_α является линейной комбинацией строк d_{α_σ} с номерами $\alpha_\sigma \in \mathcal{J}_K$, более старшими чем α, поскольку аналогичным свойством обладает матрица Δ_K. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ — все элементы множества $\mathcal{J}_K$, более старшие чем α. В таком случае в строке d_α могут быть отличными от нуля лишь первые σ элементов, поскольку $d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_\sigma}$ — первые σ строк единичной матрицы. Пусть далее d^σ, $\sigma = 1, \ldots, \rho$, столбец матрицы D с номером σ. Из сказанного следует, что все элементы столбца d^σ с номерами, строго более старшими чем α_σ, равны нулю, а элемент с номером α_σ равен единице.

Элемент матрицы $D(D^j)$, находящийся в столбце с номером σ и строке с номером α, обозначим через $d_\alpha^\sigma \left(d_\alpha^{j,\sigma}\right)$. Из соотношений (13) вытекает, что

$$d_{\tau,\,i}^{j,\,\sigma} = \begin{cases} d_{\tau,\,i-j}^{\sigma}, & \text{если} \quad i \geqslant j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14.2}$$

Таким образом, связь между матрицами D и D^j такая же, как между матрицами Δ_K и Δ_K^j, а именно, минор матрицы D^j, образованный ее строками с номерами, принадлежащими $t\Sigma_K + j$, равен D; остальные строки матрицы D^j равны нулю.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j \in \Sigma_K} D^j x'_j = y, \tag{15.2}$$

где $x'_j \in \mathcal{L}^\rho$, решив которую мы получим затем решение системы (9). В развернутом виде эта система выглядит так:

$$\sum d^{j,\,\sigma} x_{j,\,\sigma} = y, \quad \text{где} \quad \left(x_{j,\,1}, \ldots, x_{j,\,\rho}\right) = x'_j, \tag{16.2}$$

а $d^{j,\sigma}$ — столбцы матрицы D^j. Мы покажем сейчас, что существуют элементы $x_{j,\sigma} \in \mathcal{L}$, удовлетворяющие всем уравнениям этой системы с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}_K + \Sigma_K$, причем эти элементы могут быть записаны в виде

$$x_{j,\,\sigma} = \sum r_{j,\,\sigma}^{i} y_i, \tag{17.2}$$

где $r_{j,\sigma}^i \in C^t$ — строки, образованные многочленами от элементов матриц Δ_K и M^{-1}, отличные от нуля лишь при $L(i) \geqslant L(i_\sigma + j)$ и удовлетворяющие неравенствам

$$\left| r_{j,\,\sigma}^{i} \right| \leqslant b_0^{|L(i) - L(i_\sigma + j)| + 1}, \qquad b_0 = |\Sigma_K|t|D|^t. \tag{18.2}$$

Величины $x_{j,\sigma}$ мы будем находить индукцией по значению суммы $i_\sigma + j$. Предположим, что для некоторого $i \in \Sigma_k$ мы нашли все величины $x_{j,\sigma}$ с $i_\sigma + j \succ i$, имеющие описанный выше вид (17) — (18), таким образом, что в системе (16) удовлетворены все уравнения с номерами $(\tau, i') \in \mathcal{J}_K + \Sigma_K$ такими, что $i' \succ i$. Заметим, что значения не найденных еще величин $x_{j,\sigma}$ не могут повлиять на выполнение этих уравнений. Действительно, из формулы (14) и свойства величин $d^{\sigma}_{\tau, l}$ следует, что старший отличный от нуля элемент столбца $d^{j, \sigma}$ имеет номер $(\tau_\sigma, l_\sigma + j)$. Поэтому, если $l_\sigma + j \preceq l$, то все элементы столбца $d^{j, \sigma}$ с номерами (τ, l'), где $l' \succ l$, равны нулю.

Мы должны теперь найти величины $x_{j, \sigma}$ с $l_\sigma + j = l$ таким образом, чтобы удовлетворить всем уравнениям системы (16) с номерами $(\tau, l) \in \mathcal{G}_K + \Sigma_\varkappa$ (где l — фиксированная выше точка). Это означает, что должны быть удовлетворены уравнения

$$\sum_{l_\sigma + j = l} d^{j, \sigma}_{\tau, l} x_{j, \sigma} = \hat{y}_{\tau, l}, \quad \text{где} \quad \hat{y}_{\tau, l} = y_{\tau, l} - \sum_{l_{\sigma'} + j' \succ l} d^{j', \sigma'}_{\tau, l} x_{j', \sigma'} \tag{19.2}$$

для всех $(\tau, l) \in \mathcal{G}_K + \Sigma_\varkappa$. Учитывая соотношение (14), перепишем эту систему так:

$$\sum_{l_\sigma + j = l} d^{\sigma}_{\tau, l_\sigma} x_{j, \sigma} = \hat{y}_{\tau, l}. \tag{20.2}$$

По определению множества $\mathcal{G}_K + \Sigma_\varkappa$ для каждой его точки (τ, l) существует, по крайней мере, одна пара (σ, j), где $1 \leqslant \sigma \leqslant \rho$, а $j \in \Sigma_\varkappa$ такая, что $l = l_\sigma + j$, а $\tau = \tau_\sigma$. Если данной точке (τ, l) отвечает несколько таких пар (σ, j), то мы выделим ровно одну такую пару (например, из условия, чтобы точка $(\sigma, j) \in \rho\Sigma_\varkappa$ была самой старшей), а для остальных таких пар (σ, j) положим $x_{j, \sigma} = 0$. Таким образом, число не найденных еще величин $x_{j, \sigma}$ в системе (20) оказывается теперь равным числу уравнений этой системы.

Расположив слагаемые в левой части (20) в порядке возрастания τ_σ, мы приведем эту систему к верхнему треугольному виду. Действительно, при любом $\tau < \tau_\sigma$ элемент $d^{\sigma}_{\tau, l_\sigma}$ равен нулю, поскольку $(\tau, l_\sigma) \succ (\tau_\sigma, l_\sigma) = \alpha_\sigma$. На диагонали соответствующей треугольной матрицы находятся величины $d^{\sigma}_{\tau_\sigma, l_\sigma} = d^{\sigma}_{\alpha_\sigma}$, равные единице. Таким образом, определитель матрицы системы (20) равен единице, а следовательно, норма обратной матрицы согласно неравенству (1.1) не превосходит $t\,|D|^{t-1}$. Поэтому система (20) имеет решение, которое записывается в виде

$$x_{j, \sigma} = \rho^{l}_{j, \sigma} \hat{y}_l, \qquad \hat{y}_l = (\hat{y}_{1, l}, \ldots, \hat{y}_{t, l}), \tag{21.2}$$

где $\rho^{l}_{j, \sigma}$ — некоторые строки, образованные многочленами от элементов матрицы D, удовлетворяющие неравенствам

$$|\rho^{l}_{j, \sigma}| \leqslant t\,|D|^{t-1}. \tag{22.2}$$

Проверим, что найденные величины $x_{j,\sigma}$ имеют вид (17)—(18). Для этого мы подставим в (21) выражение (19) для величин $\hat{y}_i$ в векторной записи

$$x_{j,\sigma}=\rho^i_{j,\sigma}y_i-\rho^i_{j,\sigma}\sum_{i_{\sigma'}+j'\succ i} d^{j',\sigma'}_i x_{j',\sigma'}=$$
$$=\rho^i_{j,\sigma}y_i-\rho^i_{j,\sigma}\sum_{i_{\sigma'}+j'\succ i} d^{\sigma'}_{i-j'}\sum_{i'} r^{i'}_{j',\sigma'}y_{i'}. \quad (23.2)$$

Покажем, что во втором слагаемом правой части суммирование происходит лишь по точкам i', удовлетворяющим соотношению $L(i')>L(i)$. В самом деле, величина $d^{\sigma'}_{i-j'}$ отлична от нуля, лишь если $i-j'\in\Sigma_K$. Отсюда мы заключаем, что $|i_{\sigma'}+j'-i|_-\geqslant\geqslant|j'-i|_-\geqslant-K$. Поскольку $i_{\sigma'}+j'\succ i$ и $|i_{\sigma'}+j'-i|=0$, то из предложения I вытекает, что $L(i_{\sigma'}+j')>L(i)$. С другой стороны, из предположения индукции следует, что $r^{i'}_{j',\sigma'}\neq 0$ лишь при $L(i')\geqslant L(i_{\sigma'}+j')$. Это неравенство в сочетании с предыдущим влечет $L(i')>L(i)$, откуда, в частности, следует, что $i'\neq i$. Поэтому равенство (23) мы превратим в (17), положив

$$r^i_{j,\sigma}=\rho^i_{j,\sigma},\qquad r^{i'}_{j,\sigma}=-\rho^i_{j,\sigma}\sum_{i_{\sigma'}+j'\succ i} d^{\sigma'}_{i-j'}r^{i'}_{j',\sigma'}, \quad (24.2)$$

где $i=i_\sigma+j$, а $L(i')>L(i)$. Заметим, что элементы этих матриц являются многочленами от элементов матриц Δ_K и M^{-1}, поскольку этим свойством обладают матрицы $\rho^i_{j,\sigma}$, а по предположению индукции и матрицы $r^{i'}_{j',\sigma'}$ с $i_{\sigma'}+j'\succ i$.

Оценим нормы матриц $r^{i'}_{j,\sigma}$. В случае $i'=i$ неравенство (18) вытекает из (22), поскольку $t|D|^{t-1}\leqslant b_0$, а $L(i)=L(i_\sigma+j)$. При $i'\neq i$ воспользуемся второй формулой (24). Число слагаемых в правой части этой формулы не превосходит числа точек j', для которых $d^{\sigma'}_{i-j'}\neq 0$, и, следовательно, не превосходит числа точек j', для которых $i-j'\in\Sigma_K$. Последнее, очевидно, не больше $|\Sigma_K|$. Используя этот факт, а также неравенства (22) и (18), мы получаем

$$|r^{i'}_{j,\sigma}|\leqslant|\Sigma_K|\cdot t\cdot|D|^{t-1}\cdot|D|\cdot b_0^{|L(i')-L(i_{\sigma'}+j')|+1}\leqslant b_0^{|L(i')-L(i_\sigma+j)|+1},$$

так как $L(i_{\sigma'}+j')>L(i)=L(i_\sigma+j)$.

Таким образом, формулы (17)—(18) доказаны для всех пар (σ, j). Заметим, что для любого σ, $i_\sigma\succ Ke_m$, $|i_\sigma|=K$, следовательно, в силу предложения I $L(i_\sigma)\geqslant L(Ke_m)$, откуда $L(i_\sigma+j)\geqslant L(j+Ke_m)$. Поэтому равенства (17) можно переписать в векторной форме

$$x'_j=\sum r^i_j y_i, \quad (25.2)$$

где r^l_j — матрицы, отличные от нуля лишь при $L(l) \geqslant L(j+Ke_m)$ и удовлетворяющие неравенствам

$$\left| r^l_j \right| \leqslant b_0^{| L(l) - L(j+Ke_m) | + 1}. \tag{26.2}$$

Так как векторы x'_j удовлетворяют системе (15), положив $x_j = \mathcal{M} x'_j$, $j \in \Sigma_\varkappa$, мы получим решение системы (9). Из (25) следует, что векторы x_j записываются в виде (10) с $R^l_j = \mathcal{M} r^l_j$. Из сказанного выше следует, что элементы матриц R^l_j суть многочлены от элементов матриц Δ_K и M^{-1}, причем матрица R^l_j отлична от нуля лишь при $L(l) \geqslant L(j+Ke_m)$. В силу неравенства (1.1) норма матрицы $\mathcal{M}$ не превосходит величины $\rho |\Delta_K|^{\rho-1} (\det M)^{-1}$. Отсюда, учитывая, что в неравенстве (26) показатель всегда положителен, мы получаем из него неравенство (11) для матриц R^l_j. ∎

§ 3. Стабилизация базисной последовательности

1°. Монотонные множества.

Определение 1. Подмножество $\mathcal{J} \subset Z^m_+$ назовем *монотонным*, если с каждой своей точкой i оно содержит все точки $j \geqslant i$, иначе говоря, если оно совпадает с объединением $\bigcup \{ i + Z^m_+,\ i \in \mathcal{J} \}$. *Множество* $\mathcal{J} = (\mathcal{J}^1, \ldots, \mathcal{J}^t) \subset tZ^m_+$ *назовем монотонным*, если все его компоненты $\mathcal{J}^1, \ldots, \mathcal{J}^t \subset Z^m_+$ суть монотонные подмножества Z^m_+.

Для каждого множества $\mathcal{J} \subset tZ^m_+$ и целого $k \geqslant 0$ через $\mathcal{J}_k$ будем обозначать пересечение $\mathcal{J} \cap t\Sigma_k$. Критерий монотонности множества формулируется так: для того чтобы подмножество $\mathcal{J} \subset tZ^m_+$ было монотонным, необходимо, чтобы при любом $k \geqslant 0$ и любом $l \geqslant 0$, и достаточно, чтобы при всех $k \geqslant 0$ и $l = 1$ имело место включение $\mathcal{J}_k + \Sigma_l \subset \mathcal{J}_{k+l}$. Поэтому согласно основной лемме § 2 всякое базисное множество является монотонным.

Определение 2. *Источником* монотонного множества $\mathcal{J} \subset tZ^m_+$ назовем его минимальное подмножество $s(\mathcal{J})$, обладающее тем свойством, что

$$\mathcal{J} = s(\mathcal{J}) + Z^m_+.$$

Иными словами, источник есть множество всех точек $(\tau, i) \in \mathcal{J}$, каждая из которых обладает тем свойством, что не существует точки $(\tau, j) \in \mathcal{J}$ с $j < i$. Очевидно, что компонентами множества $s(\mathcal{J})$ являются множества $s(\mathcal{J}^1), \ldots, s(\mathcal{J}^t)$, где $\mathcal{J}^1, \ldots, \mathcal{J}^t$ — компоненты монотонного множества $\mathcal{J}$.

Предложение 1. *Источник любого монотонного множества $\mathcal{J} \subset tZ^m_+$ есть конечное множество.*

Доказательство. В силу последнего замечания достаточно ограничиться случаем $t=1$. При $m=1$ утверждение предложения очевидно. Предположим, что оно верно для любого монотонного множества в решетке Z_{+}^{m-1}, и докажем его для данного множества $\mathcal{J}\subset Z_{+}^{m}$.

Если множество $\mathcal{J}$ пусто, то утверждение о конечности $s(\mathcal{J})$ тривиально. Предположим, что $\mathcal{J}$ не пусто, и обозначим через $i^0=(i_1^0, \ldots, i_m^0)$ некоторую точку из $\mathcal{J}$. Пусть k — произвольное целое число, заключенное между 1 и m, а α—целое число, удовлетворяющее неравенствам $0\leqslant\alpha<i_k^0$. Сечения решетки Z_{+}^{m}, множества $\mathcal{J}$ и его источника $s(\mathcal{J})$ подпространством $i_k=\alpha$ суть соответственно решетка Z_{+}^{m-1}, некоторое монотонное подмножество $\mathcal{J}'$ этой решетки и некоторое подмножество его источника $s(\mathcal{J}')$. Согласно предположению индукции источник $s(\mathcal{J}')$ конечен при любых α и k. Меняя константы α и k в дозволенных пределах, мы убеждаемся, что часть множества $s(\mathcal{J})$, лежащая вне множества $Z_{+}^{m}+i^0\subset\mathcal{J}$, конечна. Из всего множества $Z_{+}^{m}+i^0$ к источнику $s(\mathcal{J})$ может принадлежать, самое большее, одна точка i^0. Отсюда мы заключаем, что множество $s(\mathcal{J})$ конечно. ■

Величину

$$K=K(\mathcal{J})=\max\{|i|,\ (\tau,\ i)\in s(\mathcal{J})\}$$

мы будем называть константой стабильности монотонного множества $\mathcal{J}\subset tZ_{+}^{m}$. Эта константа обладает следующим свойством. Для любого другого монотонного множества $\mathcal{J}'\subset tZ_{+}^{m}$ из $\mathcal{J}'_k\supset\mathcal{J}_k$ для всех $k\leqslant K(\mathcal{J})$ вытекает $\mathcal{J}'\supset\mathcal{J}$. Действительно, из этих включений следует, что множество $\mathcal{J}'$ содержит источник $s(\mathcal{J})$ и поэтому, будучи монотонным, содержит все $\mathcal{J}$.

2°. Разбиение пространства C^n на множества постоянства рангов базисной последовательности. Сейчас мы разложим C^n в сумму конечного числа множеств, на каждом из которых все матрицы $\Delta_k(z)$ полиномиально зависят от z и имеют постоянные ранги.

Определение 3. *Алгебраическим разбиением пространства C^n* мы назовем любую последовательность $\mathcal{N}=\{N_\nu\}$ алгебраических многообразий $N_\nu\subset C^n$ такую, что

$$C^n=N_0\supset N_1\supset\ldots\supset N_\nu\supset N_{\nu+1}\supset\ldots\supset N_\omega=\phi, \tag{1.3}$$

и при каждом ν $N_\nu\neq N_{\nu+1}$.

Как известно, всякая строго убывающая последовательность алгебраических многообразий конечна, в частности, конечно всякое алгебраическое разбиение. Алгебраическому разбиению $\mathcal{N}$ мы отнесем функцию $\theta(z, \mathcal{N})$, определенную в C^n, имеющую следующий вид:

$$\theta(z, \mathcal{N}) = \frac{\rho(z, N_{\nu+1})}{|z|^2+1}, \quad z \in N_\nu \setminus N_{\nu+1}, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где для удобства мы полагаем $\rho(z, \phi) = 1$. Степенной функцией на разбиении $\mathcal{N}$ мы назовем любую функцию вида $C\theta^q(z, \mathcal{N})$, где $C > 0$ и q — константы.

Чтобы не прерывать связности изложения, мы отложим изучение свойств алгебраических разбиений до конца параграфа с тем, чтобы перейти сейчас к основному результату.

Теорема. *Существует алгебраическое разбиение $\mathcal{N} = \{N_\nu\}$ пространства C^n, обладающее следующими свойствами. При любом $\nu \geqslant 0$ на множестве $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$*

I. *базисное множество $\mathcal{J} = \mathcal{J}(z)$ постоянно и, следовательно, постоянны ранги всех матриц $\Delta_k(z)$* (равные $|\mathcal{J}_k(z)|$).

II. *для любого $k \leqslant K$, где $K = K(\mathcal{J})$, в матрице $\widehat{\Delta}_k(z) = \delta_{\mathcal{J}_k} P_k(z)$ можно выделить невырожденный минор $M_k(z)$ порядка $|\mathcal{J}_k|$, лежащий в столбцах с постоянными номерами, так, что*

$$|\det M_k(z)| \geqslant c\theta^q(z, \mathcal{N}) \tag{2.3}$$

с некоторыми $c > 0$ и q.

Доказательство. Многообразия N_ν будем строить по индукции. Положим $N_0 = C^n$ и допустим, что для некоторого $\mu \geqslant 0$ мы уже построили многообразия $N_0, \ldots, N_\mu$, удовлетворяющие условиям теоремы с $\nu = 0, \ldots, \mu - 1$. Если многообразие N_μ пусто, то теорема доказана. Предположив, что N_μ не пусто, построим многообразие $N_{\mu+1}$ так, чтобы удовлетворить условиям теоремы с $\nu = \mu$.

Начнем с того, что построим последовательность множеств $\mathcal{F} \subset t\Sigma_k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ и последовательность алгебраических многообразий L_k таких, что

$$L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_k \subset \ldots \underset{\neq}{\subset} N_\mu$$

при помощи следующей индуктивной конструкции. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 0$ множества $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}$ и многообразия $L_0, \ldots, L_{k-1}$ уже построены, и для удобства положим $\mathcal{F}_{-1} = \phi$ и $L_{-1} = \phi$. Тогда

1) найдем $\max |\mathcal{J}_k(z)|$ для точек $z \in N_\mu \setminus L_{k-1}$, а среди множеств $\mathcal{J}_k(z)$, для которых этот максимум достигается, выберем самое старшее множество, которое обозначим через $\mathcal{F}_k$;

2) объединение L_{k-1} и множества точек $z \in N_\mu \setminus L_{k-1}$, в которых $\mathcal{J}_k(z) \neq \mathcal{F}_k$, обозначим через L_k.

Очевидно, что $L_{k-1} \subset L_k \underset{\neq}{\subset} N_\mu$. Остается проверить, что L_k есть алгебраическое многообразие. Через $\widehat{\Delta}_k(z)$ обозначим подматрицу матрицы $\Delta_k(z)$, образованную ее строками с номерами, принадлежащими $\mathscr{F}_k$. Покажем, что равенство $\mathscr{G}_k(z) = \mathscr{F}_k$ для точек $z \in N_\mu \setminus L_{k-1}$ эквивалентно уравнению

$$\operatorname{rang} \widehat{\Delta}_k(z) = |\mathscr{F}_k|. \tag{3.3}$$

Действительно, если $\mathscr{G}_k(z) = \mathscr{F}_k$, то строки матрицы $\widehat{\Delta}_k(z)$ (число которых равно $|\mathscr{F}_k|$) линейно независимы, и, следовательно, мы имеем (3). Обратно, если равенство (3) выполнено, то в силу 1) ранг матрицы $\Delta_k(z)$ равен $|\mathscr{F}_k|$. Поэтому согласно построению множества $\mathscr{G}_k(z)$ *) оно старше, чем $\mathscr{F}_k$. С другой стороны, по построению множество $\mathscr{F}_k$ является самым старшим из множеств $\mathscr{G}_k(z)$, для которых $|\mathscr{G}_k(z)| = |\mathscr{F}_k|$, а $z \in N_\mu \setminus L_{k-1}$. Отсюда следует, что $\mathscr{G}_k(z) = \mathscr{F}_k$.

Условие, противоположное (3), можно записать в виде

$$\det M^\alpha(z) = 0, \ \forall_\alpha, \tag{4.3}$$

где $M^\alpha(z)$ — всевозможные миноры матрицы $\widehat{\Delta}_k(z)$ порядка $|\mathscr{F}_k|$. Согласно 1) и 2) множества $\mathscr{G}_0(z), \ldots, \mathscr{G}_{k-1}(z)$ постоянны на $N_\mu \setminus L_{k-1}$, следовательно, на $N_\mu \setminus L_{k-1}$ постоянны ранги матриц $\Delta_0(z), \ldots, \Delta_{k-1}(z)$. Из теоремы § 2 следует, что матрица $\Delta_k(z)$ имеет на этом множестве постоянный размер, а ее элементы суть многочлены от z. Поэтому все величины $\det M^\alpha(z)$ также являются многочленами на множестве $N_\mu \setminus L_{k-1}$. Следовательно, система уравнений (4) выделяет некоторое алгебраическое подмногообразие $L' \subset N_\mu \setminus L_{k-1}$. Из 2) следует, что L_k равно $L' \cup L_{k-1}$ и, следовательно, является алгебраическим многообразие, ч. и т. д. Тем самым конструкция множеств $\mathscr{F}_k$ и L_k осуществлена.

Для любой точки $z \in N_\mu \setminus L_k$ мы имеем $\mathscr{G}_{k-1}(z) = \mathscr{F}_{k-1}$ и $\mathscr{G}_k(z) = \mathscr{F}_k$. Отсюда в силу монотонности множества $\mathscr{G}(z)$ следует, что $\mathscr{F}_{k-1} + \Sigma_1 \subset \mathscr{F}_k$, что влечет монотонность множества $\mathscr{F} = \bigcup_k \mathscr{F}_k \subset tZ_+^m$.

Пусть $K = K(\mathscr{F})$ — константа стабильности множества $\mathscr{F}$. Покажем, что для любого $k > K$ имеет место равенство $L_k = L_K$. Предположим противное: пусть k — наименьшее из чисел, для которых это равенство не выполняется. В таком случае L_k строго больше L_K; выберем произвольную точку $z \in L_k \setminus L_K$. Из 2) следует, что $\mathscr{G}_i(z) = \mathscr{F}_i$ для всех $i \leqslant K$. Отсюда согласно свойству константы K следует, что $\mathscr{G}(z) \supset \mathscr{F}$. С другой стороны, из 1) вытекает, что $|\mathscr{G}_k(z)| \leqslant |\mathscr{F}_k|$, откуда в сочетании с предыдущим включением вытекает, что $\mathscr{G}_k(z) = \mathscr{F}_k$.

*) См. 3° § 2.

т. е. $z \overline{\in} L_k$, что противоречит выбору точки z. Полученное противоречие показывает, что $L_k = L_K$ для $k \geqslant K$. Так как $L_k \subset L_K$ для $k < K$, то $\mathcal{J}(z) \equiv \mathcal{J}$ на $N_\mu \setminus L_K$.

Отсюда, в частности, следует, что на множестве $N_\mu \setminus L_K$ постоянны ранги всех матриц $\Delta_k(z)$, следовательно, постоянны их размеры, а их элементы являются многочленами. Для каждого $k \leqslant K$ в ее подматрице $\widehat{\Delta}_k(z)$ выберем некоторый не вырожденный тождественно на множестве $N_\mu \setminus L_K$ минор $M_k(z)$ порядка $|\mathcal{J}_k(z)|$, расположенный в столбцах, номера которых постоянны на всем множестве $N_\mu \setminus L_K$. В таком случае все функции $\det M_k(z)$ суть не равные тождественно нулю многочлены на множестве $N_\mu \setminus L_K$. Через L^0 обозначим алгебраическое подмногообразие в N_μ, определяемое полиномиальным уравнением $\prod_0^k \det M_k(z) = 0$. Положив $N_{\mu+1} = L_K \cup L^0$, мы получим искомое многообразие. Для завершения доказательства теоремы остается установить неравенства (2). Поскольку каждый многочлен $\det M_k(z)$ не обращается в нуль на $N_\mu \setminus N_{\mu+1}$, эти неравенства вытекают из следствия 2, которое мы получим ниже. ∎

В дальнейшем символами $\mathcal{J}$ и K мы будем обозначать функции $\mathcal{J}(z)$ и $K(\mathcal{J}(z))$. В силу доказанной теоремы эти функции постоянны на каждом из множеств $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$.

Следствие 1. *Для каждой точки $z \in C^n$ и числа $k \geqslant K$ столбцы матрицы $\Delta_k(z)$ являются линейными комбинациями ее столбцов, имеющих вид*

$$\delta_k\{\eta^j P_{K,\sigma}(z, \eta)\}, \quad j \in \Sigma_{k-K}, \quad \sigma = 1, \ldots, s_K. \tag{5.3}$$

Доказательство. Согласно свойству константы стабильности K для любого $k \geqslant K$ мы имеем $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_K + \Sigma_{k-K}$, следовательно, ранг матрицы $\Delta_k(z)$ равен $|\mathcal{J}_K + \Sigma_{k-K}|$. С другой стороны, из основной леммы § 2 вытекает, что минор матрицы $\Delta_k(z)$, образованный ее строками с номерами из $\mathcal{J}_K + \Sigma_{k-K}$ и столбцами вида (5), имеет ранг, равный числу его строк, т. е. величине $|\mathcal{J}_K + \Sigma_{k-K}|$. Отсюда вытекает доказываемое утверждение. ∎

Это следствие говорит о том, что столбцы матрицы $\Delta_k(z)$ с $k \geqslant K$, отличные от столбцов (5), не играют никакой роли и, следовательно, могут быть исключены из рассмотрения. В дальнейшем мы будем считать, что матрицы $\Delta_k(z)$ при $k \geqslant K$ состоят лишь из столбцов вида (5). Аналитически это соглашение выглядит так:

$$P_k(z, \eta) = P_K(z, \eta) H_{k,K}(\eta), \tag{6.3}$$

где $H_{k,K}(\eta)$ — матрица размера $s_K \times s_K |\Sigma_{k-K}|$, являющаяся кронеккеровским произведением единичной матрицы порядка s_K и строки

$\{\eta^j,\ j\in\Sigma_{k-K}\}$. В соответствии с этим, чтобы сохранить равенство (1.2) для всех k, мы положим

$$Q_k(z,\ \eta)=Q_K(z,\ \eta)\,H_{k,\,K}(\eta) \tag{7.3}$$

при $k\geqslant K$.

3°. Свойства алгебраических разбиений. Сейчас мы установим некоторые свойства алгебраических разбиений, которые использовались в доказательстве теоремы этого параграфа, а также некоторые свойства, которые будут полезны в гл. IV.

Предложение 2.

I. *Пусть $f(x)$ — произвольный, не равный тождественно нулю многочлен в вещественном эвклидовом пространстве R^n, а $N\subset R^n$ — множество его вещественных корней. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{c}(|x|^2+1)^q\rho(x,\ N)\geqslant|f(x)|\geqslant c\left(\frac{\rho(x,\ N)}{|x|^2+1}\right)^q \tag{8.3}$$

с некоторыми положительными c и q.

II. *Пусть N и M — алгебраические многообразия в R^n. Тогда*

$$\rho(x,\ N)\geqslant c\left(\frac{\rho(x,\ N\cap M)}{|x|^2+1}\right)^q,\qquad x\in M, \tag{9.3}$$

с некоторыми положительными c и q.

Доказательство. Установим левое неравенство (8). Пусть x — произвольная точка в R^n; выберем точку $y\in N$ так, чтобы $\rho(x,\ N)=\rho(x,\ y)$. Используя теорему Лагранжа, оценим величину $|f(x)|=|f(x)-f(y)|$ произведением $\rho(x,\ y)$ и верхней грани $|\operatorname{grad} f|$, взятой по отрезку, соединяющему точки x и y. Поскольку $|\operatorname{grad} f(x)|\leqslant C(|x|^2+1)^q$ с некоторыми C и q, эта оценка приводит нас к левому неравенству (8). Правое неравенство хорошо известно *).

Перейдем ко второму утверждению. Пусть $\{f_\alpha(x)\}$ — конечный набор многочленов, множество общих вещественных корней которых совпадает с N, а $\{g_\beta(x)\}$ — аналогичный набор многочленов для многообразия M. Очевидно, что множество корней многочлена $\sum|f_\alpha|^2$ есть N, а множество корней многочлена $\sum|f_\alpha|^2+\sum|g_\beta|^2$ есть $N\cap M$. На множестве M имеет место равенство

$$\sum|f_\alpha|^2=\sum|f_\alpha|^2+\sum|g_\beta|^2.$$

Согласно первому утверждению предположения левая часть не превосходит $C(|x|^2+1)\rho(x,\ N)$, а правая часть не меньше чем $c\left(\frac{\rho(x,\ N\cap M)}{|x|^2+1}\right)^q$ с некоторыми C, c и q. Отсюда следует неравенство (9). ■

*) См., например, Горин [1].

Следствие 2. *Пусть* $\mathscr{N}=\{N_\nu\}$ — *некоторое алгебраическое разбиение* C^n, *а* $f(z)$ — *многочлен, отличный от нуля на некотором множестве* $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$. *Тогда*

$$|f(z)| \geqslant c\theta^q(z, \mathscr{N}), \qquad z \in N_\nu \setminus N_{\nu+1}, \tag{10.3}$$

с некоторыми положительными c *и* q.

Доказательство. Комплексное пространство C^n рассмотрим как вещественное пространство R^{2n}. Пусть N — множество корней многочлена f. Применив к нему первое утверждение предложения 2, а затем второе утверждение того же предложения к многообразиям N_ν и N, мы получим неравенства

$$|f(z)| \geqslant c\left(\frac{\rho(z, N)}{|z|^2+1}\right)^q \geqslant c'\left(\frac{\rho(z, N_\nu \cap N)}{|z|^2+1}\right)^{q'}, \qquad z \in N_\nu.$$

Так как по условию $N_\nu \cap N \subset N_{\nu+1}$, правая часть не меньше, чем $c'\theta^{q'}(z, \mathscr{N})$, что влечет (10). ■

Предложение 3. *Для любых двух алгебраических разбиений* $\mathscr{M}$ *и* $\mathscr{L}$ *можно найти алгебраическое разбиение* $\mathscr{N}$ *такое, что*

$$c\theta^q(z, \mathscr{N}) \leqslant \min\{\theta(z, \mathscr{M}), \theta(z, \mathscr{L})\}, \qquad z \in C^n, \tag{11.3}$$

с некоторыми положительными c *и* q.

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}=\{M_\mu\}$, а $\mathscr{L}=\{L_\lambda\}$. Положим

$$N_\nu = \bigcup_{\mu+\lambda=\nu} (M_\mu \cap L_\lambda), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что алгебраические многообразия N_ν, за вычетом повторяющихся, образуют разбиение C^n. Установим неравенство (11). Множества

$$(M_\mu \setminus M_{\mu+1}) \cap (L_\lambda \setminus L_{\lambda+1}) = \\ = (M_\mu \cap L_\lambda) \setminus [(M_\mu \cap L_{\lambda+1}) \cup (M_{\mu+1} \cap L_\lambda)] \tag{12.3}$$

образуют конечное покрытие C^n. Поэтому неравенство (11) достаточно установить на каждом из этих множеств.

Зафиксируем произвольным образом μ и λ. Мы имеем $M_\mu \cap L_\lambda \subset N_\nu$, где $\nu=\mu+\lambda$, и

$$(M_\mu \cap L_\lambda) \cap N_{\nu+1} = (M_\mu \cap L_{\lambda+1}) \cup (M_{\mu+1} \cap L_\lambda).$$

Отсюда следует, что множество (12) принадлежит $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$ и

$$\rho(z, N_{\nu+1}) \leqslant \min\{\rho(z, M_\mu \cap L_{\lambda+1}), \rho(z, M_{\mu+1} \cap L_\lambda)\}, \\ z \in M_\mu \cap L_\lambda. \tag{13.3}$$

Рассматривая C^n как вещественное пространство R^{2n}, применим второе утверждение предложения 2 к многообразиям $N=L_{\lambda+1}$ и

$M = M_\mu \cap L_\lambda$. Мы получим, что на множестве $M_\mu \cap L_\lambda$ имеет место неравенство

$$c\left(\frac{\rho(z, M_\mu \cap L_{\lambda+1})}{|z|^2+1}\right)^q \leqslant \rho(z, L_{\lambda+1}).$$

Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$c\left(\frac{\rho(z, M_{\mu+1} \cap L_\lambda)}{|z|^2+1}\right)^q \leqslant \rho(z, M_{\mu+1}).$$

Комбинируя эти неравенства с (13), мы приходим к (11). ■

Разбиение $\mathcal{N}$, построенное в этом предложении, мы будем называть *произведением* разбиений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$.

§ 4. p-разложение

1°. Формулировка основной теоремы. Напомним необходимую нам сейчас символику. Через n мы обозначили произвольное натуральное число; $\mathcal{P}$ — кольцо многочленов в C^n с комплексными коэффициентами, а p — произвольная матрица размера $t \times s$, образованная элементами этого кольца. Далее, m — произвольное натуральное число, не превосходящее n, $\mathcal{S}$ — пространство формальных степенных рядов от m переменных $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ с комплексными коэффициентами. Для любой точки $z \in C^n$ символ $p(z)$ означает также линейный оператор, действующий из $\mathcal{S}^s$ в $\mathcal{S}^t$, действие которого заключается в умножении на матрицу $p(z+\eta)$, где $z+\eta = (z_1+\eta_1, \ldots, z_m+\eta_m, z_{m+1}, \ldots, z_n)$.

Через $\mathcal{J} = \mathcal{J}(z)$, $K = K(\mathcal{J}(z))$ и $\mathcal{N} = \{N_\nu\}$ мы обозначаем базисное множество, его константу стабильности и алгебраическое разбиение C^n, построенные в § 3 для матрицы p. Символ L означает линейный оператор в R^m, построенный в § 2 с константой K, равной $K(\mathcal{J}(z))$. Через $\mathcal{S}^t_{\mathcal{J}}$ обозначим подпространство в $\mathcal{S}^t$, образованное рядами, коэффициенты которых с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}$, равны нулю.

Теорема 1. *В каждой точке $z \in C^n$ тождественный оператор E в $\mathcal{S}^t$ допускает разложение*

$$E = \mathcal{D}(z) + p(z)\mathcal{G}(z), \qquad (1.4)$$

обладающее следующими свойствами:

1) $\mathcal{D}(z)$ есть линейный оператор из $\mathcal{S}^t$ в $\mathcal{S}^t_{\mathcal{J}}$, обращающийся в нуль на подпространстве $p(z)\mathcal{S}^s$.

2) $\mathcal{G}(z)$ есть линейный оператор из $\mathcal{S}^t$ в $\mathcal{S}^s$, обращающийся в нуль на подпространстве $\mathcal{S}^t_{\mathcal{J}}$.

3) *Пусть* $\mathscr{D}(z)=\sum\eta^i\mathscr{D}_i$, а $\mathscr{G}(z)=\sum\eta^i\mathscr{G}_i$. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}_i\eta^\lambda\neq 0, \quad \text{лишь если} \quad L(\lambda)\geqslant L(i)+L(Ke_m-Ke_1),\\ &\mathscr{G}_i\eta^\lambda\neq 0, \quad \text{лишь если} \quad L(\lambda)\geqslant L(i)+L(Ke_m).\end{aligned} \tag{2.4}$$

4) *При любых i и λ величины* (2) *являются рациональными, не обращающимися в бесконечность функциями z на каждом из множеств $N_\nu\setminus N_{\nu+1}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, причем*

$$\begin{aligned}&|\mathscr{D}_i\eta^\lambda|\leqslant\mathscr{B}^{|L(\lambda)-L(i)-L(Ke_m-Ke_1)|+1},\\ &|\mathscr{G}_i\eta^\lambda|\leqslant\mathscr{B}^{|L(\lambda)-L(i)-L(Ke_m)|+1},\end{aligned} \tag{3.4}$$

где константа $\mathscr{B}$ удовлетворяет неравенству

$$\mathscr{B}\leqslant C\theta^q(z, \mathscr{N}) \tag{4.4}$$

с некоторыми C и *q.*

Разложение (1) мы будем называть *p-разложением*, а операторы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{G}$ — *p-операторами* или операторами, отвечающими матрице p. В дальнейшем, если противное не оговорено, мы будем использовать это разложение в частном случае $m=n$.

2°. Конструкция p-разложения. Зафиксируем произвольную точку $z\in C^n$. Разложение (1) мы получим, последовательно подвергая преобразованиям однородные компоненты левой части (1). На минус первом шагу наше разложение имеет следующий вид:

$$E=\sum\eta^{\tau, i}\delta_{\tau, i}=\sum\eta^{\tau, i}\mathscr{D}_{\tau, i}^{-1}+p(z+\eta)\sum\eta^i\mathscr{G}_i^{-1}, \tag{5.4}$$

где

$$\mathscr{D}_{\tau, i}^{-1}=\delta_{\tau, i}, \qquad \mathscr{G}_i^{-1}=0. \tag{6.4}$$

Предположим теперь, что для некоторого целого $k\geqslant 0$ мы сделали $k-1$ шаг и получили разложение

$$\sum\eta^{\tau, i}\delta_{\tau, i}=\sum\eta^{\tau, i}\mathscr{D}_{\tau, i}^{k-1}+p(z+\eta)\sum\eta^i\mathscr{G}_i^{k-1}, \tag{7.4}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

а$_{k-1}$) функционал $\mathscr{D}_{\tau, i}^{k-1}\colon \mathscr{S}^t\to C$ равен нулю, если $(\tau, i)\in\mathscr{J}$ и $|i|\leqslant k-1$,

б$_{k-1}$) порядок функционала $\mathscr{D}_{\tau, i}^{k-1}$ не превосходит $|i|$,

в$_{k-1}$) каждый функционал $\mathscr{G}_i^{k-1}\colon \mathscr{S}^t\to C^s$ содержит функционалы $\delta_{\tau, j}$ лишь с $(\tau, j)\in\mathscr{J}$.

г$_{k-1}$) порядок функционала $\mathscr{G}_i^{k-1}$ не превосходит $k-1$. Для разложения (5) эти условия с $k-1=-1$, очевидно, выполнены.

Сделаем k-й шаг. Пусть $\Delta_k=\Delta_k(z)$ — матрица из базисной последовательности; $\delta_k\mathscr{D}^{k-1}$ — столбец размера $t\Sigma_k\times 1$, образованный функционалами $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ с $|i|=k$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Delta_k F = \delta_k \mathscr{D}^{k-1}, \tag{8.4}$$

где F — столбец, образованный неизвестными функционалами F_σ: $\mathscr{S}^t \to C$, $\sigma = 1, \ldots, s_k$. Столбец F мы определим так, чтобы в системе (8) были удовлетворены все уравнения с номерами $(\tau, i) \in \mathscr{J}_k$. Это можно сделать, поскольку согласно определению базисного множества $\mathscr{J}$ строки матрицы Δ_k с номерами, принадлежащими $\mathscr{J}_k$, линейно независимы. Следовательно, существует вектор F, удовлетворяющий всем уравнениям системы (8), компоненты которого являются линейными комбинациями функционалов $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ с $(\tau, i) \in \mathscr{J}_k$. Отметим, что этот вектор определяется неоднозначно, поскольку столбцы матрицы Δ_k могут быть линейно зависимыми. Несколько позже мы устраним эту неоднозначность, уточнив выбор вектора F.

Положим

$$\sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^k_{\tau, i} = \sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i} - P_k F, \quad \mathscr{D}^k_{\tau, i} = \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i} - \delta_{\tau, i} P_k F. \tag{9.4}$$

Так как каждый элемент матрицы P_k не содержит членов порядка ниже k (по η), то из равенства (9) заключаем, что

$$\mathscr{D}^k_{\tau, i} = \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i} \quad \text{для любого } i \text{ с } |i| < k. \tag{10.4}$$

Поэтому из а$_{k-1}$) следует, что $\mathscr{D}^k_{\tau, i} = 0$ для всех $(\tau, i) \in \mathscr{J}$ с $|i| < k$. Заметим, что уравнение системы (8) с номером (τ, i) имеет вид $\delta_{\tau, i} P_k F = \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$. По построению вектор F удовлетворяет всем таким уравнениям с $(\tau, i) \in \mathscr{J}_k$. Поэтому из (9) следует, что $\mathscr{D}^k_{\tau, i} = 0$ также, если $(\tau, i) \in \mathscr{J}_k$. Таким образом, мы установили, что функционалы $\mathscr{D}^k_{\tau, i}$ удовлетворяют условию а$_k$).

Из б$_{k-1}$) следует, что $\deg \delta_k \mathscr{D}^{k-1} \leqslant k$, откуда $\deg F \leqslant k$. Поэтому каждый коэффициент степенного ряда $P_k F$ есть функционал порядка не выше k. Но поскольку элементы матрицы P_k не содержат членов порядка ниже k, то в этом степенном ряде коэффициент при $\eta^{\tau, i}$ есть функционал порядка не выше $|i|$. Согласно б$_{k-1}$) тем же свойством обладает ряд $\sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$. Поэтому из (9) следует, что то же утверждение справедливо и для ряда $\sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^k_{\tau, i}$, т. е. условие б$_k$) выполнено.

Функционалы $\mathscr{G}^k_i$, отвечающие k-му шагу, определим так:

$$\sum \eta^i \mathscr{G}^k_i = \sum \eta^i \mathscr{G}^{k-1}_i + Q_k F, \qquad \mathscr{G}^k_i = \mathscr{G}^{k-1}_i + \delta_i Q_k F, \tag{11.4}$$

где Q_k — матрицы из теоремы § 2. Проверим выполнение условий в$_k$) и г$_k$). В обеих частях (7) приравняем коэффициенты при $\eta^{\tau, i}$, где (τ, i) — произвольная точка множества $\mathscr{J}_k$. Слева мы получим функционал $\delta_{\tau, i}$, а справа — сумму функционала $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ и некоторой линейной комбинации функционалов $\mathscr{G}^{k-1}_{i'}$. В силу в$_{k-1}$) эта линейная комбинация функционалов $\mathscr{G}^{k-1}_{i'}$ содержит $\delta_{\sigma, j}$ лишь с $(\sigma, j) \in \mathscr{J}$. Следовательно, функционал $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ также обладает этим свойством. По построению функционалы F_σ являются линейными комбинациями функционалов $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ с $(\tau, i) \in \mathscr{J}_k$ и поэтому также содержат $\delta_{\sigma, j}$ лишь с $(\sigma, j) \in \mathscr{J}$. Поэтому в силу равенства (11) из в$_{k-1}$) вытекает в$_k$). Аналогичным образом из г$_{k-1}$) следует г$_k$), поскольку $\deg F \leqslant k$.

Сопоставляя равенства (9), (11), (7) и (1.2), мы получаем

$$\sum \eta^{\tau, i} \delta_{\tau, i} = \sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^k_{\tau, i} + p(z+\eta) \sum \eta^i \mathscr{G}^k_i. \qquad (12.4)$$

Тем самым индукция проведена и, следовательно, для любого $k \geqslant 0$ построено разложение (12), удовлетворяющее условиям а$_k$), б$_k$), в$_k$), г$_k$).

Заметим, что при $k \to \infty$ функционалы $\mathscr{D}^k_{\tau, i}$ и $\mathscr{G}^k_i$ стабилизируются. Действительно, из (10) $\mathscr{D}^k_{\tau, i} = \mathrm{const}$ уже при $k \geqslant |i|$. Положим $\mathscr{D}_{\tau, i} = \mathscr{D}^{|i|}_{\tau, i}$ для всех (τ, i). Далее из (7.3) следует, что при $k \geqslant K$ матрица Q_k не содержит членов порядка ниже $k - K$ (по η). Поэтому из (11) $\mathscr{G}^k_i = \mathscr{G}^{k-1}_i$, если $k - K > |i|$, следовательно, $\mathscr{G}^k_i = \mathrm{const}$ при $k - K \geqslant |i|$. Положим $\mathscr{G}_i = \mathscr{G}^{|i|+k}_i$ и рассмотрим операторы

$$\mathscr{D}(z) = \sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}_{\tau, i}, \quad \mathscr{G}(z) = \sum \eta^i \mathscr{G}_i.$$

Устремив в (12) k к бесконечности, мы убеждаемся в том, что эти операторы удовлетворяют (1).

3°. Доказательство 1-го и 2-го свойств. Из а$_k$) следует, что $\mathscr{D}_{\tau, i} = 0$ для всех $(\tau, i) \in \mathscr{J}$, следовательно, образ оператора $\mathscr{D}$ принадлежит $\mathscr{S}^t_{\mathscr{J}}$. Далее, пусть φ — произвольный элемент пространства $p(z)\mathscr{S}^s$. Нам нужно показать, что

$$\mathscr{D}_{\tau, i} \varphi = 0 \qquad (13.4)$$

для всех (τ, i). Эти равенства мы установим по индукции. Предположим, что при некотором $k \geqslant 0$ равенства (13) выполнены для всех (τ, i) с $|i| < k$ (если $k = 0$, это предположение тривиальным образом верно), и докажем, что они имеют место также при $|i| = k$.

Так как $\mathscr{D}_{\tau, i} = \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i}$ при $|i| < k$, то согласно предположению $\mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i} \varphi = 0$ при $|i| < k$. Подействовав разложением (7) на ряд φ, мы получим

$$\check{\varphi} = \varphi - p(z+\eta) \sum \eta^i \mathscr{G}^{k-1}_i \varphi = \sum \eta^{\tau, i} \mathscr{D}^{k-1}_{\tau, i} \varphi.$$

Таким образом, ряд $\breve{\varphi}$ принадлежит $p(z)\mathcal{S}^s$ и не содержит членов порядка ниже k. Согласно теореме § 2 отсюда следует, что столбец

$$\delta_k\breve{\varphi}=\delta_k\mathcal{D}^{k-1}\varphi$$

является линейной комбинацией столбцов матрицы Δ_k. Поэтому столбец

$$\delta_k\left(\mathcal{D}^{k-1}\varphi-P_kF\varphi\right)$$

также является линейной комбинацией столбцов матрицы $\Delta_k=\delta_kP_k$. По определению оператора $\mathcal{D}^k$ этот столбец равен $\mathcal{D}^k\varphi$, и, следовательно, его элементы с номерами, принадлежащими $\mathcal{J}_k$, равны нулю. Поскольку строки матрицы Δ_k с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}_k$, образуют базис среди всех ее строк, отсюда следует, что весь столбец $\mathcal{D}^k\varphi$ равен нулю, т. е. $\mathcal{D}^k_{\tau,\,i}\varphi=0$ для всех $(\tau,\,i)$ с $|i|=k$. Так как $\mathcal{D}_{\tau,\,i}=\mathcal{D}^k_{\tau,\,i}$ при $|i|=k$, отсюда вытекает равенство (13) с $|i|=k$. Тем самым свойство 1 установлено. Свойство 2 следует из в$_k$).

4°. Доказательство третьего свойства.

Индуктивное предложение. *Для любых* $i,\ \lambda\in Z^m_+$, $|i|\geqslant k-1$, $\mathcal{D}^{k-1}_i\eta^\lambda\neq\delta_i\eta^\lambda$, *лишь если* $L(\lambda)\geqslant L(i)-l^i_{k-1}$, *где*

$$l^i_{k-1}=\begin{cases}L(Ke_1-Ke_m), & |i|=k-1,\\ (k-1-|i|)e_m, & |i|>k-1.\end{cases}\qquad (3_{k-1})$$

Доказательство. При $k-1=-1$ это утверждение вытекает из того, что $\mathcal{D}^{-1}_i=\delta_i$. Докажем (3_k), предполагая справедливым утверждение (3_{k-1}). Заметим, что

$$\mathcal{D}^k_i\eta^\lambda=\mathcal{D}^{k-1}_i\eta^\lambda\quad\text{в случае, если } |\lambda|>k.\qquad(14.4)$$

Это соотношение следует из (9), поскольку $\deg F\leqslant k$. В силу (14) при $|\lambda|>k$ утверждение (3_k) непосредственно следует из (3_{k-1}), так как $l^i_{k-1}\leqslant l^i_k$.

Предположим теперь, что $|\lambda|\leqslant k$. Допустим сначала, что $k<K$. Покажем, что выполнено неравенство $L(\lambda)\geqslant L(i)-l^i_k$. В самом деле, если $|i|=k$, то

$$\lambda-i+Ke_1-Ke_m\not\geq 0,\qquad |\lambda-i+Ke_1-Ke_m|\leqslant 0,$$
$$|\lambda-i+Ke_1-Ke_m|_-\geqslant|-i|_->-K.$$

Отсюда в силу предложения § 2 $L(\lambda-i+Ke_1-Ke_m)\geqslant 0$, что с учетом линейности оператора L дает $L(\lambda)\geqslant L(i)-L(Ke_1-Ke_m)=$ $=L(i)-l^i_k$. Если же $|i|>k$, то

$$|\lambda-i|\leqslant k-|i|<0,\quad |\lambda-i|_+\leqslant|\lambda|\leqslant K,$$

что снова в силу предложения § 2 приводит к неравенству $L(\lambda - l) \geqslant \geqslant (|l| - k) e_m = -l_k^l$, откуда $L(\lambda) \geqslant L(l) - l_k^l$.

Пусть теперь $k \geqslant K$. Уточним конструкцию вектора F. Для этого систему (8) перепишем в виде

$$\sum_j \Delta_K^j F_j = \delta_k \mathscr{D}^{k-1}, \qquad (15.4)$$

где Δ_K^j, $j \in \Sigma_{k-K}$, — минор матрицы Δ_K, образованный столбцами $\delta_k \eta^j P_{K,\sigma}(z, \eta)$, $\sigma = 1, \ldots, s_K$, а F_j — столбец, образованный неизвестными функционалами $F_{j,\sigma}$, $\sigma = 1, \ldots, s_K$, которые лишь нумерацией отличаются от функционалов F_σ в (8). Согласно основной лемме § 2 можно найти столбцы F_j, удовлетворяющие всем уравнениям этой системы с номерами, принадлежащими $\mathscr{J}_k$, которые допускают представление

$$F_j = \sum R_j^{i'} \mathscr{D}_{i'}^{k-1}, \qquad (16.4)$$

где $R_j^{i'}$ — построенные в этой лемме матрицы, отличные от нуля лишь при $L(i') \geqslant L(j + Ke_m)$.

Равенство (9) перепишется теперь так:

$$\mathscr{D}_i^k - \mathscr{D}_i^{k-1} = -\delta_i \sum_j \eta^j P_k F_j = -\sum_j \delta_{i-j} P_K \sum_{i'} R_j^{i'} \mathscr{D}_{i'}^{k-1}.$$

Применив обе его части к элементу η^λ, мы получим

$$\mathscr{D}_i^k \eta^\lambda - \mathscr{D}_i^{k-1} \eta^\lambda = -\sum_j \delta_{i-j} P_K \sum_{i'} R_j^{i'} \mathscr{D}_{i'}^{k-1} \eta^\lambda. \qquad (17.4)$$

Покажем, что значения индексов i, i', j, λ, для которых слагаемые в правой части отличны от нуля, связаны неравенствами

$$L(\lambda) \geqslant L(i') \geqslant L(j + Ke_m) \geqslant L(i) - l_k^i. \qquad (18.4)$$

Поскольку в правой части (17) $|i'| = k > k - 1$, то из (3_{k-1}) следует, что $\mathscr{D}_{i'}^{k-1} \eta^\lambda \neq 0$, лишь если $L(\lambda) \geqslant L(i') + e_m$ или $i' = \lambda$. В обоих случаях выполнено первое из неравенств (18). Второе неравенство следует из того, что $R_j^{i'} \neq 0$ лишь при $L(i') \geqslant L(j + Ke_m)$. Установим третье неравенство. Заметим, что $\delta_{l-j} P_K \neq 0$ лишь при $l \geqslant j$. Предположим сначала, что $|l| = k$. Тогда из равенства $|j| = k - K$ вытекает, что

$$j - l + Ke_1 \succeq 0, \qquad |j - l + Ke_1| = 0,$$
$$|j - i + Ke_1|_- \geqslant |j - l|_- = -K.$$

Отсюда в силу предложения § 2 $L(j - l + Ke_1) \geqslant 0$, т. е. $L(j + Ke_m) \geqslant L(l - Ke_1 + Ke_m)$, что приводит к третьему неравенству (18). Пусть теперь $|i| > k$. Тогда $|j + Ke_m - l| = k - |i| < 0$, а из $l \geqslant j$ следует, что $|j + Ke_m - i|_+ \leqslant |Ke_m|_+ = K$. Поэтому в силу того же предложения $L(j+Ke_m-l)\geqslant(|l|-k)e_m=-l_k^l$, что снова влечет третье неравенство (18).

Сопоставляя левую и правую части (18), мы заключаем, что правая часть (17) отлична от нуля лишь при $L(\lambda)\geqslant L(l)-l_k^l$. Следовательно, лишь в этом случае $\mathscr{D}_l^k\eta^\lambda\neq\mathscr{D}_l^{k-1}\eta^\lambda$. Этот факт в сочетании с $(З_{k-1})$ влечет $(З_k)$, поскольку $l_k^l\geqslant l_{k-1}^l$. ■

Так как $\mathscr{D}_l=\mathscr{D}_l^{k-1}$ при $|l|=k-1$, из $(З_{k-1})$ вытекает третье утверждение теоремы для оператора $\mathscr{D}$.

Докажем это утверждение для оператора $\mathscr{G}$. Для этого достаточно показать, что при любом k

$$\mathscr{G}_i^k\eta^\lambda\neq 0, \qquad \text{лишь если} \qquad L(\lambda)\geqslant L(i+Ke_m). \tag{$З_k'$}$$

Пусть сначала $k<K$. Из г$_k$) следует, что величина $\mathscr{G}_l^k\eta^\lambda$ отлична от нуля лишь при $|\lambda|\leqslant k$. Покажем, что для любого λ, удовлетворяющего этому неравенству, и любого l выполнено неравенство

$$L(\lambda)\geqslant L(l+Ke_m). \tag{19.4}$$

Каждая из координат точки $L(\lambda)$ достигает своего наименьшего значения при наибольшем $|\lambda|$ и наименьших значениях первой $m-1$-й координаты точки λ, т. е. при $\lambda=ke_m$. Отсюда $L(\lambda)\geqslant L(ke_m)$. С другой стороны, $L(ke_m)>L(Ke_m)\geqslant L(i+Ke_m)$, так как $L(l)\leqslant 0$ для любого $i\geqslant 0$. Тем самым мы доказали неравенство (19) и вместе с тем установили $(З_k')$.

Пусть теперь $k\geqslant K$. Учитывая в (11) формулу (16) для функционала F, мы приходим к равенству

$$\mathscr{G}_l^k\eta^\lambda-\mathscr{G}_l^{k-1}\eta^\lambda=\sum_j\delta_{l-j}Q_k\sum_{i'}R_j^{i'}\mathscr{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda. \tag{20.4}$$

Из аналогии с равенством (17) следует, что значения индексов l, l', j, λ, для которых слагаемые в правой части (20) отличны от нуля, удовлетворяют первым двум неравенствам (18). Вместо третьего мы имеем в данном случае неравенство $L(j+Ke_m)\geqslant L(i+Ke_m)$. Оно вытекает из соотношения $l\geqslant j$. Таким образом, мы получаем цепочку неравенств

$$L(\lambda)\geqslant L(i')\geqslant L(j+Ke_m)\geqslant L(l+Ke_m).$$

Сопоставляя левую и правую части, приходим к выводу, что разность $\mathscr{G}_l^k\eta^\lambda-\mathscr{G}_l^{k-1}\eta^\lambda$ отлична от нуля лишь при $L(\lambda)\geqslant L(l+Ke_m)$. Этот факт в сочетании с утверждением $(З_k')$, доказанным для всех $k<K$, позволяет установить $(З_k')$ по индукции для всех k.

5°. Доказательство четвертого свойства. Уточним конструкцию функционалов F. Предположим сначала, что $k<K$. Пусть M_k — минор матрицы Δ_k, фигурирующий в теореме § 3, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$,

$(\rho=\rho_k)$ — номера столбцов, в которых он лежит. Столбец F мы определим так: его компоненты с номерами, отличными от $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$, положим равными нулю. Тогда для укороченного столбца $\hat{F}= =\left(F_{\sigma_1}, \ldots, F_{\sigma_\rho}\right)$ система (8) перепишется так:

$$M_k\hat{F}=\delta_{\mathcal{J}_k}\mathscr{D}^{k-1}.$$

Решение полученной системы записывается в виде

$$\hat{F}=M_k^{-1}\delta_{\mathcal{J}_k}\mathscr{D}^{k-1}. \tag{21.4}$$

Отметим, что в силу теоремы § 3 минор M_k не вырожден в каждой точке, причем на каждом множестве вида $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$ номера столбцов и строк, в которых он лежит, постоянны, а его элементы являются многочленами от z.

В случае $k \geqslant K$ столбец $F=\{F_j\}$ мы определили из системы (15), применив к ней основную лемму § 2. Положим в этой лемме $M=M_K$, где M_K — минор из теоремы § 3. Согласно основной лемме элементы матриц $R_j^{i'}$, фигурирующих в (16), суть многочлены от элементов матриц Δ_K и M_K^{-1} и, следовательно, являются рациональными, отличными от бесконечности функциями z на каждом множестве $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$.

Итак, мы установили, что при любом k элементы столбца F являются линейными комбинациями функционалов $\mathscr{D}_i^{k-1}$ с коэффициентами, являющимися рациональными всюду конечными (матричными) функциями на каждом из множеств $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$. С другой стороны, функционалы $\mathscr{D}_i^k$ и $\mathscr{G}_i^k$ являются линейными комбинациями функционалов F, $\mathscr{D}_i^{k-1}$, $\mathscr{G}_i^{k-1}$ с коэффициентами, равными $\pm\delta_i P_k$, $\pm\delta_i Q_k$ или 1, являющимися многочленами от z. Таким образом, при любом k функционалы $\mathscr{D}_i^k$ и $\mathscr{G}_i^k$ строятся по функционалам $\mathscr{D}_i^{k-1}$ и $\mathscr{G}_i^{k-1}$ при помощи операций сложения и умножения на функции описанного выше типа. Отсюда в силу (6) вытекает первая часть четвертого утверждения теоремы.

Перейдем к доказательству неравенств (3). Для этого мы установим по индукции неравенство

$$\left|(\mathscr{D}_i^k-\delta_i)\eta^\lambda\right| \leqslant B^{\left|L(\lambda)-L(i)+l_k^i\right|+1}, \qquad |i| \geqslant k, \tag{4_k}$$

где величина B определяется из формулы

$$B=2^{m+1}b\prod_0^K B_k, \quad B_k=2\left(\left|M_k^{-1}\right|+1\right)\Big[\sum_{|i|=k}\left(|\delta_i P_k|+|\delta_i Q_k|\right)+1\Big], \tag{22.4}$$

а b — константа из основной леммы § 2, в которой мы положили $M=M_K$. В силу (3_k) мы можем предположить, что $L(\lambda)-L(i)+l_k^i \geqslant 0$, так как в противном случае неравенство (4_k) выполнено тривиальным образом.

Допустим сначала, что $k < K$. Тогда из (21)

$$|F\eta^\lambda| \leqslant |M_k^{-1}| \cdot |\delta_k \mathscr{D}^{k-1}\eta^\lambda|.$$

Поэтому из равенства (9) и формулы (22) следует, что

$$|\mathscr{D}_i^k\eta^\lambda| \leqslant |\mathscr{D}_i^{k-1}\eta^\lambda| + |\delta_i P_k F\eta^\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant |\mathscr{D}_i^{k-1}\eta^\lambda| + \left(\frac{B_k}{2} - 1\right)|\delta_k \mathscr{D}^{k-1}\eta^\lambda| \leqslant \frac{B_k}{2}\max_{i'} |\mathscr{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda|.$$

Многократно применяя это неравенство и учитывая, что $|\mathscr{D}_i^{-1}\eta^\lambda| = |\delta_i\eta^\lambda| \leqslant 1$, мы получаем

$$|\mathscr{D}_i^k\eta^\lambda| \leqslant 2^{-(k+1)}B_0 \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_k. \tag{23.4}$$

Так как согласно предположению величина $|L(\lambda) - L(i) + l_k^i|$ неотрицательна, а $B \geqslant 2$, из (23) следует, что

$$|(\mathscr{D}_i^k - \delta_i)\eta^\lambda| \leqslant |\mathscr{D}_i^k\eta^\lambda| + |\delta_i\eta^\lambda| \leqslant \frac{B}{2} + 1 \leqslant B \leqslant B^{|L(\lambda) - L(i) + l_k^i| + 1}.$$

Тем самым неравенство (4_k) установлено для всех $k < K$.

Пусть теперь $k \geqslant K$. Из соотношения (17) и неравенства (11.2) мы имеем

$$|(\mathscr{D}_i^k - \delta_i)\eta^\lambda| \leqslant |(\mathscr{D}_i^{k-1} - \delta_i)\eta^\lambda| +$$
$$+ \sum_{|i'|=k}\left(\sum_{j\leqslant i}|\delta_{i-j}P_K| \cdot |R_j^{i'}|\right)|\mathscr{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant |(\mathscr{D}_i^{k-1} - \delta_i)\eta^\lambda| + \sum_{|i'|=k}\left(\frac{B_K}{2}\max_{j\leqslant i} b^{|L(i') - L(j+Ke_m)|+1}\right) \cdot |\mathscr{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda|. \tag{24.4}$$

Оценим правую часть. Из неравенства (18) следует, что показатель в правой части не превосходит $|L(i') - L(i) + l_k^i| + 1$. Поэтому величина, стоящая в круглых скобках, не больше чем

$$\frac{B_K}{2} b^{|L(i') - L(i) + l_k^i| + 1} \leqslant [2^{-(m+2)}B]^{|L(i') - L(i) + l_k^i| + 1}.$$

Предположим, что неравенство (4_{k-1}) справедливо. Тогда при $|i'| = k$ мы имеем $l_{k-1}^{i'} = -e_m$ и, следовательно,

$$|\mathscr{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda| \leqslant |(\mathscr{D}_{i'}^{k-1} - \delta_{i'})\eta^\lambda| + |\delta_{i'}\eta^\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant B^{|L(\lambda) - L(i')|} + 1 \leqslant 2B^{|L(\lambda) - L(i')|}. \tag{25.4}$$

поскольку $|L(\lambda)-L(i')|\geqslant 0$ в силу (18). В итоге из (24) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}|(\mathscr{D}_i^k-\delta_i)\eta^\lambda|\leqslant \\ \leqslant|(\mathscr{D}_i^{k-1}-\delta_i)\eta^\lambda|+\sum_{|i'|=k}[2^{-(m+2)}B]^{|L(i')-L(i)+i_k^i|+1}2B^{|L(\lambda)-L(i')|}\leqslant \\ \leqslant B^{|L(\lambda)-L(i)+i_{k-1}^i|+1}+ \\ +\left[\sum_{i'}2^{-(m+2)\left(|L(i')-L(i)+i_k^i|+1\right)+1}\right]B^{|L(\lambda)-L(i)+i_k^i|+1}. \quad (26.4)\end{aligned}$$

Заметим, что сумма по i' в правой части не превосходит суммы $\sum 2^{-(m+2)(|j|+1)+1}$, взятой по всем $j\in Z_+^m$. Последняя, как нетрудно подсчитать, равна $2^{-(m+1)}\left[1-2^{-(m+2)}\right]^{-m}$. Отметим, что $|i_{k-1}^i|<|i_k^i|$ при всех i, $|i|\geqslant k$. Поэтому правая часть (26) оценивается сверху величиной

$$\left\{B^{-1}+2^{-(m+1)}\left[1-2^{-(m+2)}\right]^{-m}\right\}B^{|L(\lambda)-L(i)+i_k^i|+1}. \quad (27.4)$$

Из формулы (22) видно, что $B\geqslant 2^{m+1}$, откуда $B^{-1}\leqslant 2^{-(m+1)}$. Проведя несложный подсчет, можно убедиться в том, что первый сомножитель в (27) не превосходит единицы, что приводит нас в итоге к неравенству (4_k).

Тем самым неравенство (4_k) полностью доказано. Из него получаем при $k=|i|$

$$|\mathscr{D}_i\eta^\lambda|=|\mathscr{D}_i^{|i|}\eta^\lambda|\leqslant B^{|L(\lambda)-L(i)+i_k^i|+1}+1\leqslant(B+1)^{|L(\lambda)-L(i)+i_k^i|+1},$$

что влечет первое из неравенств (3) с $\mathscr{B}=B+1$.

Оценим константу $\mathscr{B}$. Поскольку P_k и Q_k суть многочлены от z и η, все функции вида $\delta_i P_k$ и $\delta_i Q_k$ и, в частности, все элементы матриц Δ_k суть многочлены от z. Поэтому все они оцениваются по модулю сверху величиной вида $C(|z|+1)^q$. С другой стороны, согласно теореме § 3 определители миноров M_k, $k\leqslant K$, оцениваются по модулю снизу функцией вида $c\theta^q(z,\mathscr{N})$. Поэтому, учитывая неравенство (1.1), мы получаем

$$|M_k^{-1}|\leqslant|\mathscr{I}_k|\frac{|\Delta_k|^{|\mathscr{I}_k|-1}}{|\det M_k|}\leqslant C\theta^q(z,\mathscr{N}), \qquad k\leqslant K,$$

с подходящими C и q. Из формулы (22) видно, что подобным образом оцениваются сверху величины B_k, а из формулы (12.2) и величина b. Учитывая формулу (22) для B, мы приходим к (4). Таким образом, четвертое утверждение теоремы для оператора $\mathscr{D}$ доказано.

Установим теперь неравенство (3) для величин $\mathscr{G}_i\eta^\lambda$. В силу $(3_k')$ мы можем при этом предполагать, что выполнено неравенство $L(\lambda)\geqslant$

$\geqslant L(i+Ke_m)$. Пусть сначала $k<K$. Тогда из (11) и (23) следует неравенство

$$|\mathcal{G}_i^k\eta^\lambda-\mathcal{G}_i^{k-1}\eta^\lambda|\leqslant\frac{B_k}{2}\max_{i'}|\mathcal{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda|\leqslant 2^{-(k+1)}B_0\ldots B_k\leqslant$$
$$\leqslant 2^{-(k+2+m)}B\leqslant\left[2^{-(k+2+m)}B\right]^{|L(\lambda)-L(i+Ke_m)|+1},\quad(28.4)$$

поскольку в силу предположения $|L(\lambda)-L(i+Ke_m)|\geqslant 0$. Если же $k\geqslant K$, то из (20) и (11.2)

$$|\mathcal{G}_i^k\eta^\lambda-\mathcal{G}_i^{k-1}\eta^\lambda|\leqslant\sum_{|i'|=k}\left(\frac{B_K}{2}\max_{j\leqslant i}b^{|L(i')-L(j+Ke_m)|+1}\right)|\mathcal{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda|.$$

Так как $j\leqslant i$, то $L(j+Ke_m)\geqslant L(i+Ke_m)$. Поэтому показатель в правой части этого неравенства не больше чем $|L(i')-L(i+Ke_m)|+1$. Поэтому каждое слагаемое в правой части не превосходит величины

$$\left[2^{-(m+2)}B\right]^{|L(i')-L(i+Ke_m)|+1}|\mathcal{D}_{i'}^{k-1}\eta^\lambda|.$$

Это неравенство в сочетании с (25) дает

$$|\mathcal{G}_i^k\eta^\lambda-\mathcal{G}_i^{k-1}\eta^\lambda|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i'}2^{-(m+2)(|L(i')-L(i+Ke_m)|+1)+1}\right)B^{|L(\lambda)-L(i+Ke_m)|+1}.$$

Суммируя эти неравенства вместе с неравенствами (28), мы получаем

$$|\mathcal{G}_i\eta^\lambda|=\sum_{k=0}^{K-1}|\mathcal{G}_i^k\eta^\lambda-\mathcal{G}_i^{k-1}\eta^\lambda|+\sum_{k=K}^{|i|+K}|\mathcal{G}_i^k\eta^\lambda-\mathcal{G}_i^{k-1}\eta^\lambda|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{K-1}2^{-(k+2+m)}+\sum_{j\in Z_+^m}2^{-(m+2)(|j|+1)+1}\right)B^{|L(\lambda)-L(i+Ke_m)|+1}.$$

Первый сомножитель правой части равен

$$2^{-(m+1)}\left[1-2^{-(K+1)}\right]+2^{-(m+1)}\left[1-2^{-(m+2)}\right]^{-m}\leqslant 1.$$

Отсюда окончательно

$$|\mathcal{G}_i\eta^\lambda|\leqslant B^{|L(\lambda)-L(i+Ke_m)|+1},$$

что завершает доказательство неравенства (3), а с ним и всей теоремы. ■

6°. Замечания и следствия.

Замечание 1. *p-разложение определяет представление пространства $\mathcal{S}^t$ в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{S}^t_{\mathcal{G}}\oplus p\mathcal{S}^s$.*

Действительно, образы операторов $\mathscr{D}$ и $p\mathscr{G}$ принадлежат соответственно подпространствам $\mathscr{S}^t_{\mathscr{J}}$ и $p\mathscr{S}^s$, а из свойств 1 н 2 следует, что

$$\mathscr{D}=\mathscr{D}E=\mathscr{D}\mathscr{D}, \qquad p\mathscr{G}=p\mathscr{G}E=p\mathscr{G}p\mathscr{G},$$

т. е. $\mathscr{D}$ и $p\mathscr{G}$ суть проекционные операторы.

Отметим, что в случае $p(z)\equiv 0$ мы имеем $p(z)\mathscr{S}^s\equiv 0$ и, следовательно, $\mathscr{D}(z)\equiv E$.

Замечание 2. Поскольку $\mathscr{D}$ есть тождественный оператор на подпространстве $\mathscr{S}^t_{\mathscr{J}}$, его *коэффициенты* $\mathscr{D}_{\tau, i}$ *с номерами* $(\tau, i)\in tZ^m_+\setminus\mathscr{J}$ *линейно независимы*. Так как оператор $\mathscr{D}$ действует нз $\mathscr{S}^t$ в $\mathscr{S}^t_{\mathscr{J}}$, остальные его коэффициенты равны нулю.

Отметим, что при любом $i\in Z^m_+$

$$\deg\mathscr{D}_i\leqslant|i|, \quad \deg\mathscr{G}_i\leqslant|i|+K. \tag{29.4}$$

В самом деле, согласно третьему свойству величина $\mathscr{D}_i\eta^\lambda$ отлнчна от нуля лишь при $L_m(\lambda)\geqslant L_m(i)+L_m(Ke_m-Ke_1)$, т. е. лишь при $|\lambda|\leqslant|i|$. Отсюда вытекает первое неравенство (29). Второе неравенство доказывается аналогично.

Замечание 3. Свойство 2 оператора $\mathscr{G}(z)$ может быть записано в следующей усиленной форме:

$$\mathscr{G}_i(z, D)\varphi=0 \quad \textit{для всех } i \textit{ и для любого } \varphi\in\mathscr{S}^t_{\mathscr{J}} \tag{30.4}$$

(где $\mathscr{G}_i(z, D)$ — дифференциальный оператор, отвечающнй функционалу $\mathscr{G}_i(z, \delta)$, см. § 1). Действительно, величина $D^{\tau,\lambda}\eta^{\sigma, j}$ отлична от нуля лишь в том случае, когда $\sigma=\tau$, а $j\geqslant\lambda$. С другой стороны, в оператор $\mathscr{G}_i(z, D)$ входят дифференцирования $D^{\tau,\lambda}$ лишь с $(\tau, \lambda)\in\mathscr{J}$. Так как множество $\mathscr{J}$ монотонное, всякая пара (σ, j), удовлетворяющая условиям $\sigma=\tau$, а $j\geqslant\lambda$, также принадлежит этому множеству. Отсюда н следует (30).

Следствие 1. *Существует степенная функция* $r_z\leqslant 1$ *на разбиении* $\mathscr{N}$ *такая, что при любом* $Z\in C^n$ *и* ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, *функции* $\varphi\in\mathfrak{S}^t_\varepsilon$ *могут быть представлены в виде*

$$\varphi=\mathscr{D}(z)\varphi+p(z)\mathscr{G}(z)\varphi,$$

где $\mathscr{D}(z)\varphi$ *и* $\mathscr{G}(z)\varphi$ — *сходящиеся при* $|\eta|\leqslant\varepsilon r_z$ *ряды, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|\mathscr{D}(z)\varphi\|_{\varepsilon r_z}\leqslant\frac{1}{r_z}\|\varphi\|_\varepsilon, \quad \|\mathscr{G}(z)\varphi\|_{\varepsilon r_z}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^K r_z}\|\varphi\|_\varepsilon. \tag{31.4}$$

Доказательство. Оценим коэффициенты $\mathscr{D}_i\varphi$ ряда $\mathscr{D}(z)\varphi$. Их можно записать в виде

$$\mathscr{D}_i\varphi=\sum_\lambda \mathscr{D}_i\eta^\lambda\cdot\delta_\lambda\varphi.$$

Так как порядок функционала $\mathscr{D}_i$ не превосходит $|i|$ (см. (29)), суммирование в правой части происходит лишь по λ с $|\lambda|\leqslant|i|$. Поэтому число слагаемых в этой сумме не превосходит $(|i|+1)^m$. Далее, так как $L(i)$ есть линейный оператор в R^m, то на множестве Z_+^m выполнено неравенство $|-L(i)|\leqslant l|i|$ с достаточно большим l. Предполагая, что константа l не меньше чем $|-L(Ke_m-Ke_1)|+1$, из неравенства (3) получаем

$$|\mathscr{D}_i\eta^\lambda|\leqslant\mathscr{B}^{l(|i|+1)},$$

так как $|L(\lambda)|\leqslant 0$. Положив $\mathscr{A}=\sqrt{m}\,\mathscr{B}^l$ и учитывая предложение 2 § 1, находим, что

$$|\mathscr{D}_i\varphi|\leqslant\sum_\lambda|\mathscr{D}_i\eta^\lambda|\cdot|\delta_\lambda\varphi|\leqslant(|i|+1)^m\mathscr{A}^{(|i|+1)}\varepsilon^{-|i|}\|\varphi\|_\varepsilon.$$

Отсюда при $|\eta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\mathscr{A}}$

$$\left|\sum\eta^i\mathscr{D}_i\varphi\right|\leqslant\sum|\eta|^{|i|}|\mathscr{D}_i\varphi|\leqslant C\mathscr{A}\|\varphi\|_\varepsilon.$$

Выбрав степенную функцию r_z так, чтобы она не превосходила $(2\mathscr{A})^{-1}$ и $(C\mathscr{A})^{-1}$, мы придем к первому из неравенств (31). Аналогичным образом, из (3) и (29) выводится второе неравенство (31). ■

7°. p-разложение для аналитических матриц p. Отметим, что все рассуждения §§ 1—4 с очевидными изменениями переносятся на случай, когда p — матрица, образованная произвольными голоморфными в некоторой области $\Omega\subset C^n$ функциями. Чтобы совершить такой перенос, достаточно в предыдущих рассуждениях слова «многочлен от z» заменить словами «голоморфная в Ω функция», а понятие алгебраического разбиения C^n заменить аналогичным понятием аналитического разбиения Ω. Последний термин нуждается в пояснении: аналитическим разбиением Ω мы называем произвольную строго убывающую последовательность $\mathscr{N}$:

$$\Omega=N_0\supset N_1\supset\ldots\supset N_\nu\supset N_{\nu+1}\supset\ldots$$

аналитических подмножеств области Ω. Как хорошо известно, всякая такая последовательность конечна на каждом компакте, т. е. для любого компакта $K\subset\Omega$ пересечение $K\cap N_\nu$ становится пустым, начиная с некоторого ν.

Функция $\theta(z, \mathcal{N})$, отвечающая такому разбиению, строится совершенно так же, как в случае алгебраического разбиения. Степенной функцией на аналитическом разбиении $\mathcal{N}$ мы назовем любую функцию вида $C(z)\theta^{q(z)}(z, \mathcal{N})$, где $C(z) > 0$ и $q(z)$ — некоторые вещественные непрерывные в Ω функции. Сформулируем теперь общий результат, аналогичный основной теореме.

Теорема 2. *Существует аналитическое разбиение* $\mathcal{N} = \{N_\nu\}$ *области* Ω *такое, что на каждом множестве* $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$ *базисное множество* $\mathcal{J}$ *постоянно. В каждой точке* $z \in C^n$ *определено разложение* (1), *в котором операторы* $\mathcal{D}(z)$ *и* $\mathcal{G}(z)$ *удовлетворяют условиям 1—3 основной теоремы, а также условию*

4′) *На каждом множестве* $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$ *величины* (2) *являются аналитическими функциями* z *и удовлетворяют неравенству* (3), *в котором* $\mathcal{B}$ — *некоторая степенная функция на разбиении* $\mathcal{N}$.

Глава III

КОГОМОЛОГИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ РОСТА

В этой главе мы рассмотрим комплекс аналитических коцепей в C^n (или некоторой области в C^n), удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}(z)| \leqslant C M_\alpha(z), \qquad \exists C,\ \alpha, \quad \forall i_0, \ldots, i_\nu, \quad z \in C^n,$$

где $M_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, — некоторая фиксированная возрастающая последовательность положительных функций. В тех случаях, когда эта последовательность, называемая семейством мажорант, удовлетворяет некоторым специальным условиям, мы докажем, что когомологии этого комплекса тривиальны. Этот результат мы установим в § 5 на основе теорем о разрешимости неоднородного уравнения для оператора $\frac{\partial}{\partial \bar z}$, полученных в §§ 2 и 3. В §§ 1 и 4 собраны все определения. В § 6 мы рассмотрим оператор умножения на полиномиальную матрицу, действующий в комплексах описанного вида. При тех же предположениях на семейство мажорант мы покажем, что ядро и коядро этого оператора когомологически тривиальны.

§ 1. Пространства голоморфных функций

1°. Семейства мажорант и пространств.

Определение. Пусть в комплексном пространстве C^n задана невозрастающая последовательность областей

$$C^n \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_\alpha \supset \ldots$$

Пусть, далее, для каждого α определена функция $M_\alpha(z)$ в C^n, конечная и положительная в Ω_α, равная ∞ вне Ω_α. Последовательность функций $M_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, назовем *семейством мажорант в C^n*, если для каждого α выполнены неравенства

а) $(|z| + 1) M_\alpha(z) \leqslant C_\alpha M_{\alpha+1}(z)$,

б) $\sup\limits_{|z'-z| \leqslant \varepsilon_\alpha} M_\alpha(z') \leqslant C_\alpha M_{\alpha+1}(z)$, где C_α и ε_α — некоторые положительные числа. Из неравенства б), в частности, вытекает, что ε_α-окрестность области $\Omega_{\alpha+1}$ принадлежит Ω_α.

Зафиксируем некоторое семейство мажорант $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}$. Для всяких целых $\alpha > 0$ и $k \geqslant 0$ рассмотрим норму

$$\|\varphi\|_\alpha^k = \max_{|i|+|j| \leqslant k} \sup_{\Omega_\alpha} \frac{|D^{i, \bar{j}}\varphi(z)|}{M_\alpha(z)}, \tag{1.1}$$

определенную на функциях, заданных в Ω_α, имеющих производные до порядка k. Здесь

$$i = (i_1, \ldots, i_n), \quad j = (j_1, \ldots, j_n) \in Z_+^n,$$

а

$$D^{i, \bar{j}} = D_z^{i, \bar{j}} = \frac{\partial^{|i|}}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} \frac{\partial^{|j|}}{\partial \bar{z}_1^{j_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{j_n}}.$$

Пространство функций, для которых норма (1) конечна, мы обозначим через $\mathcal{H}_\alpha^{0, k}$. Норма (1) превращает это пространство в нормированное. Любую функцию, определенную в некоторой более широкой области $\Omega \supset \Omega_\alpha$, мы также будем считать элементом пространства $\mathcal{H}_\alpha^{0, k}$, если для нее конечна норма (1). При этом мы можем считать, что верхняя грань в (1) распространяется на всю область Ω, полагая $\frac{1}{M_\alpha(z)} = 0$ вне Ω_α. В соответствии с этим скажем, что функция φ равна нулю как элемент пространства $\mathcal{H}_\alpha^{0, k}$, если $\varphi = 0$ в Ω_α.

Пусть m — некоторое целое число, заключенное между 0 и n. Подпространство $\mathcal{H}_\alpha^{0, k}$, образованное функциями, голоморфными по $z_1, \ldots, z_m$, обозначим через $\mathcal{H}_\alpha^{m, k}$. При фиксированных m и α пространства $\mathcal{H}_\alpha^{m, k}$ образуют убывающую последовательность относительно тождественных отображений $\mathcal{H}_\alpha^{m, k+1} \to \mathcal{H}_\alpha^{m, k}$. Положим

$$\mathcal{H}_\alpha^m = \varprojlim_k \mathcal{H}_\alpha^{m, k}.$$

Операция сужения функций, определенных в Ω_α на подобласти $\Omega_{\alpha+1}$, определяет непрерывное отображение $\mathcal{H}_\alpha^{m, k} \to \mathcal{H}_{\alpha+1}^{m, k}$. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\alpha^{m, k} & \to & \mathcal{H}_{\alpha+1}^{m, k} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}_\alpha^{m, k+1} & \to & \mathcal{H}_{\alpha+1}^{m, k+1} \end{array}$$

очевидно, коммутативна. Следовательно, определено отображение предельных пространств $\mathcal{H}_\alpha^m \to \mathcal{H}_{\alpha+1}^m$. Таким образом, пространства

$\mathscr{H}^m_\alpha$, $-\infty<\alpha<\infty$, образуют возрастающее семейство линейных топологических пространств. Это семейство мы обозначим через $\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}$.

Тождественные отображения пространств $\mathscr{H}^m_\alpha \to \mathscr{H}^{m-1}_\alpha$ определяют отображения их семейств $\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}} \to \mathscr{H}^{m-1}_{\mathscr{M}}$. Пространства $\mathscr{H}^{m,k}_\alpha$ будут служить нам средством для изучения пространств $\mathscr{H}^{n,0}_\alpha$, которые в дальнейшем мы будем обозначать более коротким образом: $\mathscr{H}^{n,0}_\alpha = \mathscr{H}_\alpha$. Семейство этих пространств мы обозначим через $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$. Положим $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}} = \varinjlim \mathscr{H}_{\mathscr{M}}$. Пространство $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}}$ состоит из функций, каждая из которых определена и аналитична в некоторой области Ω_α и равна по модулю $O(M_\alpha(z))$.

2°. Оценки производных в пространствах $\mathscr{H}^{m,0}_\alpha$. Результат, который мы сейчас установим, является частным случаем хорошо известного свойства эллиптических дифференциальных операторов.

Рассмотрим оператор $''d$, относящий функции $\varphi(z)$ вектор, образованный функциями $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar z_m}$, $m=1,\ldots,n$.

Предложение 1. *Пусть ω — r-окрестность некоторой точки $z\in C^n$, где $0<r\leqslant 1$. Тогда для любой функции $\varphi\in L_2(\omega)$ имеет место неравенство*

$$\left|D^{l,\bar j}\varphi(z)\right| \leqslant Cr^{-n-|l|-|j|}\|\varphi\|_{L_2(\omega)} + C\sup_{\omega}\left|D^{l,\bar j}\,''d\varphi\right| \qquad (2.1)$$

в предположении, что вектор-функция $''d\varphi$ имеет нужные производные.

Доказательство. Мы можем предположить, что $z=0$. Пусть сначала $r=1$. Через E обозначим фундаментальное решение для оператора Лапласа $\Delta=\sum\limits_1^n \dfrac{\partial^2}{\partial z_m\partial\bar z_m}$ и рассмотрим вектор-функцию $\mathscr{E}=\left\{\dfrac{\partial E}{\partial z_m},\ m=1,\ldots,n\right\}$. Эта функция удовлетворяет соотношению $''d\mathscr{E}=\delta$ (δ — дельта-функция), а ее компоненты локально суммируемы. Пусть h — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в ω, равная единице в окрестности нуля. Мы имеем

$$''dh\mathscr{E} + {}''d(1-h)\mathscr{E}=\delta,$$

причем $h\mathscr{E}$ — суммируемая, а $(1-h)\mathscr{E}$ — бесконечно дифференцируемая функция. Отсюда

$$D^{l,\bar j}\varphi(0) = \left(\overline{D^{l,\bar j}\delta},\ \varphi\right) = \left(\overline{h\mathscr{E}},\ D^{l,\bar j}\,''d\varphi\right) + \left(\overline{D^{l,\bar j}\,''d(1-h)\mathscr{E}},\ \varphi\right).$$

Первое слагаемое правой части не превосходит $C\sup\limits_{\omega}\left|D^{l,\bar j}\,''d\varphi\right|$.

а второе — величины $C\|\varphi\|_{L_2(\omega)}$. Тем самым неравенство (2) в случае $r=1$ доказано.

Пусть теперь $r<1$. Применив доказанное неравенство к функции $\varphi(rz)$, мы получим

$$r^{|i|+|j|}|D^{i,\bar{j}}\varphi(0)|\leqslant Cr^{-n}\|\varphi\|_{L_2(\omega)}+Cr^{|i|+|j|+1}\sup_{\omega}|D^{i,\bar{j}}{''}d\varphi|.$$

Разделив обе части на $r^{|i|+|j|}$, мы придем к (2). ■

Следствие 1. *В пространстве* $\mathscr{H}_\alpha^{0,0}$ *имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{\alpha+1}^k\leqslant C_\alpha\left(\|\varphi\|_\alpha^0+\|{''}d\varphi\|_\alpha^k\right),\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.1}$$

Доказательство. В предложении 1 положим $r=\varepsilon_\alpha$. Так как функция $\varphi\in\mathscr{H}_\alpha^{0,0}$ ограничена в r-окрестности любой точки $z\in\Omega_{\alpha+1}$, то $\|\varphi\|_{L_2(\omega)}\leqslant Cr^n\sup_\omega|\varphi|$. Отсюда

$$|D^{i,\bar{j}}\varphi(z)|\leqslant\frac{C}{r^{|i|+|j|}}\sup_{|\zeta|\leqslant\varepsilon_\alpha}|\varphi(z+\zeta)|+C\sup_{|\zeta|\leqslant\varepsilon_\alpha}|D^{i,\bar{j}}{''}d\varphi(z+\zeta)|. \tag{4.1}$$

Поделив левую часть на $M_{\alpha+1}(z)$, а правую на $M_\alpha(z+\zeta)\leqslant M_{\alpha+1}(z)$ и перейдя к верхней грани по z и $(i,\ j)$ с $|i|+|j|\leqslant k$, мы получим (3). ■

Следствие 2. *При любом* α $\mathscr{H}_\alpha^{n,0}\subset\mathscr{H}_{\alpha+1}^n$, *а тождественное вложение* $\mathscr{H}_\alpha^{n,0}\to\mathscr{H}_{\alpha+1}^n$ *непрерывно. Семейства* $\mathscr{H}_\mathscr{M}$ *и* $\mathscr{H}_\mathscr{M}^n$ *эквивалентны.*

3°. Логарифмически выпуклые функции.

Определение. Функцию $\mathscr{G}(y)$, определенную в R^n, назовем *логарифмически выпуклой* (л. в.), если она положительна, т. е. принимает лишь положительные значения и значение $+\infty$, а множество в $R^1\times R^n$, образованное точками $(t,\ y)$, в которых $t\geqslant\ln\mathscr{G}(y)$, выпукло и замкнуто.

Пусть $\mathscr{G}$ — л. в. функция. Через $g_\mathscr{G}$ обозначим множество в R^n, где $\mathscr{G}(y)<\infty$. Это множество, очевидно, совпадает с множеством, где $\ln\mathscr{G}(y)<\infty$, и, следовательно, является проекцией на R^n множества в $R^1\times R^n$, определенного неравенством $t\geqslant\ln\mathscr{G}(y)$. Отсюда следует, что множество $g_\mathscr{G}$ выпукло. Предположим, что это множество имеет внутренние точки. В таком случае оно является замыканием некоторой области ω. Таким образом, функция $\ln\mathscr{G}$ конечна и выпукла в области ω. Отсюда следует, что она непрерывна в этой области.

Функцией, логарифмически двойственной по отношению к $\mathcal{J}$, назовем функцию I, определенную в двойственном евклидовом пространстве при помощи формулы

$$I(\sigma) = \sup_y \frac{\exp((y, \sigma))}{\mathcal{J}(y)}. \tag{5.1}$$

Если при данном σ $\exp((y, \sigma)) = o(\mathcal{J}(y))$, при $|y| \to \infty$, то верхняя грань достигается в некоторой конечной точке или на некотором компактном множестве. Любую из точек этого множества мы обозначим через $y(\sigma)$. В противном случае существует точка $y(\sigma)$, принадлежащая бесконечно удаленному гиперподпространству пространства R^n такая, что $\frac{\exp((y, \sigma))}{\mathcal{J}(y)} \to \infty$ при $y \to y(\sigma)$. В этом случае из формулы (5) $I(\sigma) = \infty$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{J}$ *— л. в. функция, а* I *— логарифмически двойственная ей. Тогда для любых* y *и* σ

$$\mathcal{J}(y) I(\sigma) \geqslant \exp((y, \sigma)), \tag{6.1}$$

причем если точка y *движется прямолинейно к точке* $y(\sigma)$, *то величина* $\mathcal{J}(y)\exp(-(y, \sigma))$ *монотонно убывает.*

Доказательство. Неравенство (6) вытекает из определения функции I. Логарифмируя формулу (5), мы находим, что при любом y выполнено неравенство $\ln \mathcal{J}(y) \geqslant (y, \sigma) - \ln I(\sigma)$, причем при $y = y(\sigma)$ (или $y \to y(\sigma)$, если $y(\sigma)$ — несобственная точка) достигается равенство. Отсюда вытекает, что гиперподпространство $t = (y, \sigma) - \ln I(\sigma)$ является опорным по отношению к множеству $\{t \geqslant \ln \mathcal{J}(y)\}$. Пусть $l \subset R^n$ — произвольная прямая, проходящая через точку $y(\sigma)$. Пересечем это множество и опорное подпространство плоскостью $R_t^1 \times l$. В сечении мы получим выпуклую кривую и прямую, опорную по отношению к этой кривой. Величина $\ln \mathcal{J}(y) - [(y, \sigma) - \ln I(\sigma)]$ представляет из себя разность ординат точки на этой кривой и точки на опорной прямой с той же абсциссой. Понятно, что эта разность, монотонно убывая, стремится к нулю, когда y приближается к $y(\sigma)$ вдоль l. Отсюда вытекает второе утверждение предложения. ■

Предложение 3. *Функция* I, *логарифмически двойственная по отношению к* $\mathcal{J}$, *является логарифмически выпуклой. Если функция* $\mathcal{J}$ *сама логарифмически выпукла, то она совпадает с функцией, логарифмически двойственной по отношению к* I.

Доказательство. Из определения функции I

$$\ln I(\sigma) = \sup_y [(y, \sigma) - \ln \mathcal{J}(y)].$$

Таким образом, множество $\{t \geqslant \ln I(y)\}$ является пересечением замкнутых полупространств $\{t \geqslant (y, \sigma) - \ln \mathcal{J}(y)\}$ и, следовательно само замкнуто и выпукло.

Докажем второе утверждение. Пусть $\mathcal{J}$ — л. в. функция. Покажем, что она совпадает с функцией $\mathcal{J}'$, логарифмически двойственной по отношению к I. Множество $\{t \geqslant \ln \mathcal{J}(y)\}$, будучи выпуклым и замкнутым, совпадает с пересечением содержащих его полупространств вида $\{t \geqslant (y, \sigma) - t_\sigma\}$. Зафиксировав $\sigma \in R^n$, найдем наименьшее t_σ, при котором такое полупространство содержит множество $\{t \geqslant \ln \mathcal{J}(y)\}$:

$$\min t_\sigma = \sup_y [(y, \sigma) - \ln \mathcal{J}(y)] = \ln I(\sigma).$$

Таким образом, множество $\{t \geqslant \ln \mathcal{J}(y)\}$ совпадает с пересечением полупространств

$$t \geqslant (y, \sigma) - \ln I(\sigma).$$

Отсюда

$$\ln \mathcal{J}(y) = \sup_\sigma [(y, \sigma) - \ln I(\sigma)] = \ln \mathcal{J}'(y),$$

ч. и т. д. ■

4°. Семейства мажорант типа $\mathcal{J}$. Пусть $z = x + iy$. Семейство мажорант $\{M_\alpha\}$ в C^n мы назовем *семейством типа* $\mathcal{J}$, если при любом α функция M_α имеет вид $M_\alpha(z) = \mathcal{R}_\alpha(z)\, \mathcal{J}_\alpha(y)$, где $\mathcal{R}_\alpha$ — всюду конечная положительная функция в C_z^n, а $\mathcal{J}_\alpha$ — некоторая логарифмически выпуклая в R_y^n функция. При этом требуется, чтобы функции $\mathcal{R}_\alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$, образовывали семейство мажорант в C^n, а функции $\mathcal{J}_\alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$, — семейство мажорант в R_y^n, т. е. чтобы при любом α были выполнены неравенства

$$\text{а}')\qquad (|y| + 1)\, \mathcal{J}_\alpha(y) \leqslant C_\alpha \mathcal{J}_{\alpha+1}(y),$$

$$\text{б}')\qquad \sup_{|y'-y| \leqslant \varepsilon_\alpha} \mathcal{J}_\alpha(y') \leqslant C_\alpha \mathcal{J}_{\alpha+1}(y).$$

Наиболее существенное условие заключается в следующем: при любом α существует целая функция $e_\alpha(z) \not\equiv 0$ в C^n, неотрицательная, суммируемая в квадрате на R_x^n такая, что выполнено неравенство

$$|e_\alpha(z)| \leqslant r_\alpha(z)\, i_\alpha(y),$$

где функции r_α и i_α таковы, что

$$r_\alpha(\pm(z - \lambda))\, \mathcal{R}_\alpha(\lambda) \leqslant C_\alpha \mathcal{R}_{\alpha+1}(z), \qquad z, \lambda \in C^n;$$

$$i_\alpha(y)\, \mathcal{J}_\alpha(y) \leqslant C_\alpha \mathcal{J}_{\alpha+1}(y), \qquad y \in R^n.$$

Заметим, что так как по условию функция $\mathcal{R}_\alpha$ всюду конечна, область Ω_α, в которой конечна функция M_α, имеет вид $R_x^n \times \omega_\alpha$, где ω_α — область, в которой конечна функция $\mathcal{J}_\alpha$. Область ω_α непустая, так как согласно неравенству б′) она содержит ε_α-окрестность множества, где $\mathcal{J}_{\alpha+1} < \infty$ (случай, когда $\mathcal{J}_\alpha \equiv \infty$ для всех α, мы не рассматриваем).

Выберем произвольным образом натуральное число m, лежащее между 1 и n, и разобьем переменные z на две группы: $v=(z_1, \ldots, z_m)$ и $w=(z_{m+1}, \ldots, z_n)$. Сужение функции $f(z)$, определенной в C_z^n на подпространстве $w=W$, обозначим через $f_W(v)$. Имеет место очевидное

Предложение 4. *Пусть $\{M_\alpha\}$ — семейство мажорант типа $\mathcal{G}$ в C^n, удовлетворяющее условиям* а), б), а$'$), б$'$) *с некоторыми константами ε_α, C_α и некоторыми функциями e_α. Тогда при любом W последовательность функций $M_{\alpha, W}(v)$ является семейством мажорант типа $\mathcal{G}$ в C_v^m, удовлетворяющим тем же условиям с теми же константами и функциями $e_{\alpha, W}$.*

Замечание. Пусть $\mathcal{M}=\{M_\alpha\}$ — произвольное семейство мажорант в C^n. Умножая функции M_α на подходящие положительные константы, мы всегда можем добиться того, чтобы неравенства а) и б) были выполнены с константами C_α, равными единице. Понятно, что если $\mathcal{M}$ — семейство типа $\mathcal{G}$, то такое преобразование не изменяет его типа, причем мы можем добиться также того, чтобы константы C_α в неравенствах а$'$) и б$'$) также были равны единице. В дальнейшем мы будем считать, что такое преобразование уже проведено и, следовательно, все встречающиеся константы C_α равны единице. Не ограничивая общности, мы будем также считать, что $\varepsilon_{\alpha+1} \leqslant \frac{\varepsilon_\alpha}{2}$ и $\varepsilon_\alpha \leqslant 1$.

§ 2. Оператор $D_{\bar{z}}$ в пространствах типа $\mathcal{G}$

Рассмотрим последовательность отображений пространств

$$0 \to \mathcal{H}_\alpha^m \to \mathcal{H}_\alpha^{m-1} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}} \mathcal{H}_\alpha^{m-1} \to 0 \qquad (0 < m \leqslant n).$$

Так как эти отображения коммутируют с тождественными отображениями вида $\mathcal{H}_\alpha^m \to \mathcal{H}_{\alpha+1}^m$, мы можем перейти в этой последовательности к отображениям соответствующих семейств

$$0 \to \mathcal{H}_{\mathcal{M}}^m \to \mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m-1} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}} \mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m-1} \to 0. \tag{1.2}$$

Очевидно, что эта последовательность точна в первых двух членах. В этом параграфе мы покажем, что если $\mathcal{M}$ есть семейство типа $\mathcal{G}$, то эта последовательность точна также и в третьем члене.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — семейство мажорант типа $\mathcal{G}$. Тогда для любых m, $1 \leqslant m \leqslant n$, и $\alpha > 0$ существует непрерывный оператор $\mathfrak{R}_\alpha$: $\mathcal{H}_\alpha^{m-1} \to \mathcal{H}_{\alpha'}^{m-1}$, $\alpha' = \alpha + 2n + 12$, такой, что* *композиция* $\frac{\partial}{\partial \bar z_m}\mathfrak{R}_\alpha\colon \mathscr{H}_\alpha^{m-1} \to \mathscr{H}_{\alpha'}^{m-1}$ *есть тождественное отображение, удовлетворяющий при любом* $k \geqslant 0$ *неравенству*

$$\|\mathfrak{R}_\alpha\varphi\|_{\alpha'}^{k} \leqslant C_k \|\varphi\|_\alpha^{k+\varkappa}, \qquad \varkappa = \text{const}. \tag{2.2}$$

Из этой теоремы очевидным образом вытекает точность (1).

1°. Вспомогательные нормы и пространства. Зафиксируем произвольное семейство мажорант $\mathscr{M} = \{M_\alpha(z)\}$ типа $\mathcal{G}$. Для любых целых $\alpha > 0$ и $k \geqslant 0$ рассмотрим норму

$$\|\varphi\|_{(\alpha)}^{k} = \max_{|l|+|j|\leqslant k}\ \sup_{\Omega_\alpha} \frac{|D^{l,\bar j}\varphi(z)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)}, \qquad (M_\alpha(z) = \mathscr{R}_\alpha(z)\,\mathcal{G}_\alpha(y)),$$

определенную на функциях φ, заданных в области $\Omega_\alpha = R_x^n \times \omega_\alpha$ (ω_α — область, в которой конечна функция $\mathcal{G}_\alpha$). Пространство функций, для которых эта норма конечна, обозначим через $J_\alpha^{0,k}$. Его подпространство, образованное функциями, голоморфными в Ω_α по переменным $z_1, \ldots, z_m$, обозначим через $J_\alpha^{m,k}$. В $J_\alpha^{m,k}$ рассмотрим подпространство $\check J_\alpha^{m,k}$, состоящее из функций, для которых конечна норма

$${}^{\vee}\|\varphi\|_{(\alpha)}^{k} = \max_{|l|+|j|\leqslant k}\ \sup_{\Omega_\alpha} (|x|+1)^{n+1}\frac{|D^{l,\bar j}\varphi(z)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)}, \qquad (z = x+iy).$$

При фиксированных α и m пространства $J_\alpha^{m,k}$ и пространства $\check J_\alpha^{m,k}$ образуют убывающие последовательности относительно k. Положим

$$J_\alpha^m = \lim_{\overleftarrow{k}} J_\alpha^{m,k}, \qquad \check J_\alpha^m = \lim_{\overleftarrow{k}} \check J_\alpha^{m,k}.$$

На функциях, заданных в области $R_x^n \times \omega_\alpha$, определим оператор F преобразования Фурье по переменным x:

$$F\colon \varphi(x+iy) \to \psi(\sigma+iy) = \int_{R_x^n} e^{i(x,\sigma)}\varphi(x+iy)\,dx.$$

Если функция φ суммируема по x при каждом y, то ее образ непрерывен и ограничен по σ при каждом y. При этом для любого α

$$\sup_{\sigma, y}\frac{|\psi(\sigma+iy)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)} \leqslant C \sup_{z}(|x|+1)^{n+1}\frac{|\varphi(x+iy)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)} = C\,{}^{\vee}\|\varphi\|_{(\alpha)}^{0},$$

где константа C зависит лишь от n.

В силу известного свойства преобразования Фурье, если норма ${}^{\vee}\|\cdot\|_{(\alpha)}^{0}$ конечна не только для функции φ, но и для всех ее производных по переменным x до порядка k, то оператор F переводит $D_x^j\varphi$,

$|j| \leqslant k$, в $i^{|j|}\sigma^j F\varphi$. Очевидно, что операторы D_y^j перестановочны с оператором F. Отсюда для любого $k \geqslant 0$

$$\sup_{\sigma, y} \frac{(|\sigma|+1)^k |\psi(\sigma+iy)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)} \leqslant C_{n,k} {}^{\vee}\|\varphi\|_{(\alpha)}^k. \tag{3.2}$$

Обратное преобразование Фурье по переменным σ

$$F^{-1}\colon \psi(\sigma+iy) \to \varphi(x+iy) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R_\sigma^n} e^{-i(\sigma, x)} \psi(\sigma+iy)\, d\sigma$$

есть оператор, обратный оператору F. Так как он несущественно отличается от оператора F, в неравенстве (3) с $k=0$ мы можем поменять ролями функции φ и ψ, одновремеино поменяв ролями x и σ. После такого преобразования мы придем к неравенству

$$\|\varphi\|_{(\alpha)}^0 \leqslant C_n \sup_{y, \sigma} (|\sigma|+1)^{n+1} \frac{|\psi(\sigma+iy)|}{\mathcal{G}_\alpha(y)}. \tag{4.2}$$

Лемма 1. *Для любой функции* $\varphi \in \check{J}_\alpha^{n-1}$ *и точки* σ *интеграл*

$$e^{-(y, \sigma)}\psi(\sigma+iy) = \int\limits_{y=\mathrm{const}} e^{i(z, \sigma)}\varphi(z)\, dx, \tag{5.2}$$

где $y=(y_1, \ldots, y_n) \in \omega_\alpha$ *не зависит от* $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Доказательство. Пусть y' и y'' — два произвольных значения переменной y, принадлежащих области ω_α, у которых совпадают проекции на ось y_n. Соединим эти точки прямолинейным отрезком l и рассмотрим многообразие $L = R_x^n \times l$. В этом многообразии построим цилиндр, основание которого есть шар в R_x^n с центром в начале координат и радиусом r, а образующая которого есть l. По теореме Стокса интеграл $\int\limits_S e^{i(z, \sigma)}\varphi(z)\, dz$, взятый по поверхности этого цилиндра, равен интегралу по его внутренности от дифференциальной формы

$$d(e^{i(z, \sigma)}\varphi(z)\, dz) = e^{i(z, \sigma)} \frac{\partial\varphi(z)}{\partial \bar{z}_n} d\bar{z}_n\, dz.$$

Но поскольку наш цилиндр находится в подпространстве $z_n = \mathrm{const}$, то $d\bar{z}_n = 0$, откуда

$$\int\limits_S e^{i(z, \sigma)}\varphi(z)\, dz = 0.$$

Этот интеграл есть сумма интегралов по основаниям цилиндра, которые при $r \to \infty$ стремятся к интегралам (5) с $y = y'$ и $y = y''$, и интеграла по боковой поверхности, который стремится к нулю при $r \to \infty$, поскольку $e^{i(z, \sigma)}\varphi(z)$ есть $O\left((|x|+1)^{-(n+1)}\right)$. ■

2°. Лемма 2. *Для любых* α *и* m *существует непрерывный оператор* R_α: $\breve{J}_\alpha^{m-1} \to J_{\alpha+5}^{m-1}$ *такой, что композиция* $\frac{\partial}{\partial \bar z_m} R_\alpha$: $\breve{J}_\alpha^{m-1} \to J_{\alpha+5}^{m-1}$ *есть тождественное отображение, причем при любом* $k \geqslant n+2$ *выполняется неравенство*

$$\| R_\alpha \varphi \|_{(\alpha+5)}^k \leqslant C_k \,{}^\vee\| \varphi \|_{(\alpha)}^k. \tag{6.2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $m = n$. Пусть $y(\sigma)$ — функция, отвечающая логарифмически выпуклой функции $\mathcal{J}_{\alpha+2}(y)$. Положим

$$\chi(\sigma + iy) = \int\limits_{y(\sigma)}^{y} e^{(y,\sigma)-(\eta,\sigma)} \psi(\sigma + i\eta)\, dl, \qquad \psi = F\varphi, \tag{7.2}$$

где интегрирование ведется по отрезку, а в случае, когда точка $y(\sigma)$ бесконечно удаленная, — по лучу, соединяющему точки y и $y(\sigma)$. Оценим этот интеграл для функций $\varphi \in \breve{J}_\alpha^{n-1}$.

Согласно предложению 2 § 1 на отрезке (луче) интегрирования выполнено неравенство

$$\frac{\mathcal{J}_{\alpha+2}(\eta)}{e^{(\eta,\sigma)}} \leqslant \frac{\mathcal{J}_{\alpha+2}(y)}{e^{(y,\sigma)}},$$

следовательно,

$$|\chi(\sigma + iy)| \leqslant \mathcal{J}_{\alpha+2}(y) \int\limits_{y(\sigma)}^{y} \frac{|\psi(\sigma + i\eta)|}{\mathcal{J}_{\alpha+2}(\eta)}\, dl \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{J}_{\alpha+2}(y) \int\limits_{y(\sigma)}^{y} \frac{|\psi(\sigma + i\eta)|}{\mathcal{J}_\alpha(\eta)(|\eta| + 1)^2}\, dl \leqslant C \mathcal{J}_{\alpha+2}(y) \sup_\eta \frac{|\psi(\sigma + i\eta)|}{\mathcal{J}_\alpha(\eta)},$$

где

$$C = \int\limits_{y(\sigma)}^{y} \frac{dl}{(|\eta| + 1)^2}.$$

Отсюда

$$\sup_{\sigma, y} \frac{(|\sigma| + 1)^{n+2} |\chi(\sigma + iy)|}{\mathcal{J}_{\alpha+2}(y)} \leqslant C \sup_{\sigma, y} \frac{(|\sigma| + 1)^{n+2} |\psi(\sigma + iy)|}{\mathcal{J}_\alpha(y)}. \tag{8.2}$$

В силу неравенства (4) левая часть (8) не меньше чем $C_n' \| F^{-1}\chi \|_{(\alpha+2)}^0$. С другой стороны, из неравенства (3) правая часть (8) не превосходит величины $C_n'' \,{}^\vee\| \varphi \|_{(\alpha)}^{n+2}$. В итоге

$$\| R_\alpha \varphi \|_{(\alpha+2)}^0 \leqslant b_n \,{}^\vee\| \varphi \|_{(\alpha)}^{n+2}, \qquad \text{где} \qquad R_\alpha \varphi = -2iF^{-1}\chi, \tag{9.2}$$

с некоторой константой b_n, зависящей лишь от n.

Вычислим производную функции χ по y_k, $k=1, \ldots, n$. Зафиксируем σ и предположим, что точка $y(\sigma)$ конечная. Поскольку функция $e^{-(\eta, \sigma)}\psi(\sigma+i\eta)$ не зависит от $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$, интеграл (7) мы можем переписать следующим образом:

$$\int\limits_{y(\sigma)}^{(y'(\sigma),\, y_n)} e^{(y,\sigma)-(\eta,\sigma)}\psi(\sigma+i\eta)\,dl,$$

где интегрирование ведется по отрезку, соединяющему точку $y(\sigma)$ с точкой $(y'(\sigma), y_n)$, первая $n-1$ координата которой совпадает с первой $n-1$-й координатой точки $y(\sigma)$, а последняя равна y_n. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\chi(\sigma+iy)=\sigma_k\chi(\sigma+iy)+\delta_n^k e^{(y,\sigma)-((y'(\sigma),\, y_n),\, \sigma)}\psi\big(\sigma+i\big(y'(\sigma),\ y_n\big)\big),$$

где δ_n^k — символ Кронеккера. Учитывая свойство функции $e^{-(\eta,\sigma)}\psi(\sigma+i\eta)$, правую часть мы перепишем в виде

$$\sigma_k\chi(\sigma+iy)+\delta_n^k\psi(\sigma+iy).$$

Таким образом,

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_k}-\sigma_k\right]\chi(\sigma+iy)=\delta_n^k\psi(\sigma+iy). \tag{10.2}$$

Предположим теперь, что точка $y(\sigma)$ бесконечно удаленная. Через $y_t(\sigma)$ обозначим точку, находящуюся на луче, соединяющем y и $y(\sigma)$, на расстоянии $t>0$ от y. Положим

$$\chi_t(\sigma+iy)=\int\limits_{y(\sigma)}^{y_t(\sigma)} e^{(y,\sigma)-(\eta,\sigma)}\psi(\sigma+i\eta)\,dl.$$

Проводя оценку, аналогичную (8), мы приходим к неравенству

$$\sup_{\sigma,\, y}\frac{(|\sigma|+1)^{n+2}\,|\chi_t(\sigma+iy)|}{\mathcal{G}_{\alpha+2}(y)}\leqslant C_t\sup_{\sigma,\, y}\frac{(|\sigma|+1)^{n+2}\,|\psi(\sigma+iy)|}{\mathcal{G}_{\alpha}(y)}, \tag{11.2}$$

где

$$C_t=\int\limits_{y(\sigma)}^{y_t(\sigma)}\frac{dl}{(|\eta|+1)^2}.$$

Функцию χ_t продифференцируем по y, считая точку $y_t(\sigma)$ постоянной

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\chi_t=\sigma^j\chi_t.$$

Это соотношение в сочетании с (11) показывает, что производные функции χ_t по y порядка не выше первого стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Опираясь на лемму 1, разность $\chi - \chi_t$ запишем так:

$$\chi(\sigma + iy) - \chi_t(\sigma + iy) = \int\limits_{y_t(\sigma)}^{(y'_t(\sigma),\ y_n)} e^{(y,\ \sigma)-(\eta,\ \sigma)}\psi(\sigma + i\eta)\,dl.$$

Продифференцируем это выражение по y_k, считая точку $y_t(\sigma)$ постоянной:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_k} - \sigma_k\right](\chi - \chi_t) = \delta_n^k\psi.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, мы снова приходим к (10). Таким образом, равенство (10) доказано для всех σ.

В силу неравенства (8) функция $(|\sigma| + 1)\chi(\sigma + iy)$ абсолютно суммируема по σ, следовательно, мы можем совершить следующие преобразования:

$$F^{-1}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y_k} - \sigma_k\right]\chi\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial y_k} - i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right]F^{-1}\chi = \frac{\partial}{\partial \bar z_k}R_\alpha\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_k}R_\alpha\varphi = \delta_n^k\varphi, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{12.2}$$

Соотношения (12) с $k = 1, \ldots, n-1$ показывают, что оператор R_α переводит функции пространства $\mathcal{J}_\alpha^{n-1}$ в функции, голоморфные по переменным $z_1, \ldots, z_{n-1}$, а соотношение (12) с $k = n$, — что $\dfrac{\partial}{\partial \bar z_n}R_\alpha\varphi = \varphi$.

Согласно следствию 1 § 1 и неравенству (9)

$$\|R_\alpha\varphi\|_{(\alpha+3)}^k \leqslant C\left(\|R_\alpha\varphi\|_{(\alpha+2)}^0 + \|\varphi\|_{(\alpha+2)}^k\right) \leqslant C^\vee\|\varphi\|_{(\alpha)}^k \qquad (k \geqslant n+2).$$

Таким образом, R_α является искомым оператором. ■

3°. Случай произвольного *m*. Положим $v = (z_1, \ldots, z_m)$ и $w = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$. Через C_v и C_w обозначим координатные подпространства переменных v и w. Для любых α и $w' \in C_w$ через $M_{\alpha, w'}$, $R_{\alpha, w'}$ и $\mathcal{J}_{\alpha, w'}$ обозначим сужения функций M_α, $\mathcal{R}_\alpha$ и $\mathcal{J}_\alpha$ на подпространстве $w = w'$. В силу предложения 4 § 1 последовательность функций $M_{\alpha, w}(v) = \mathcal{R}_{\alpha, w}(v)\,\mathcal{J}_{\alpha, w}(v'')$, $v = v' + iv''$ есть семейство мажорант в C_v типа $\mathcal{J}$, удовлетворяющее неравенствам б) и б′) с константой ε_α, не зависящей от w. Отправляясь от этого семейства, определим серию норм, аналогичных нормам, введенным в 1°:

$$\|\varphi\|^k_{(\alpha),\, w} = \max_{|i|+|j|\leqslant k} \sup_{C_v} \frac{|D^{i,\, \bar{j}}\varphi(v)|}{\mathcal{G}_{\alpha,\, w}(v'')},$$

$$^{\vee}\|\varphi\|^k_{(\alpha),\, w} = \max_{|i|+|j|\leqslant k} (|v'|+1)^{m+1} \frac{|D^{i,\, \bar{j}}\varphi(v)|}{\mathcal{G}_{\alpha,\, w}(v'')}.$$

Через $J^{l,\, k}_{\alpha,\, w}$ и $\check{J}^{l,\, k}_{\alpha,\, w}$ обозначим пространства функций в C_v, голоморфных по переменным $z_1, \ldots, z_l$ $(0 \leqslant l \leqslant m)$, для которых конечны соответственно нормы $\|\cdot\|^k_{(\alpha),\, w}$ и $^{\vee}\|\cdot\|^k_{(\alpha),\, w}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Зафиксируем произвольным образом w и применим рассуждения 2° к семейству мажорант $\{M_{\alpha,\, w}\}$. Тем самым мы для каждого α построим непрерывный оператор $R_{\alpha,\, w}$: $\check{J}^{m-1}_{\alpha,\, w} \to J^{m-1}_{\alpha+3,\, w}$ такой, что композиция $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} R_\alpha$ есть тождественное отображение, который при любом $k \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|R_{\alpha,\, w}\varphi\|^k_{(\alpha+3),\, w} \leqslant C_k \, ^{\vee}\|\varphi\|^{k+\varkappa}_{(\alpha),\, w}, \qquad \varkappa = m+2. \tag{13.2}$$

При этом существенно то обстоятельство, что константы C_k в этих неравенствах зависят лишь от чисел n, k и величины $\varepsilon_{\alpha+2}$, отвечающей семейству мажорант $\{M_{\alpha,\, w}\}$. Однако, как мы отметили выше, величина $\varepsilon_{\alpha+2}$ не зависит от w, следовательно, константы C_k также не зависят от w. Следующим шагом нам предстоит «склеить» операторы $R_{\alpha,\, w}$.

4°. Конструкция разбиения единицы в C_w. Пусть δ — произвольное положительное число. Пространство C_w покроем последовательностью кубов K_τ, $\tau = 1, 2, \ldots$, с ребрами, равными $\delta/\sqrt{2n}$, так, чтобы они пересекались между собой лишь по своим границам. Через w_τ обозначим центр куба K_τ.

Пусть, далее, $h(w)$ — некоторая неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в кубе $K_1 - w_1$ и нулю вне вдвое большего концентрического куба. Рассмотрим функции

$$h_\tau(w) = \frac{h(w - w_\tau)}{\sum\limits_\sigma h(w - w_\sigma)}.$$

Так как в каждой точке w, по крайней мере, одна из функций $h(w - w_\tau)$ равна единице, а остальные неотрицательны, то

$$\sum_\sigma h(w - w_\sigma) \geqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что функции h_τ бесконечно дифференцируемы. Очевидно, что функция $h_\tau(w+w_\tau)$ не зависит от τ. Поэтому для любых l и j

$$|D^{l, \bar j} h_\tau(w)| \leqslant C_{l, j},$$

где константа $C_{l, j}$ не зависит от w и τ. Заметим, что носитель функции h_τ находится в 2δ-окрестности U_τ точки w_τ.

5°. Склеивание операторов $R_{\alpha, w}$. В конструкции 4° положим $\delta = \frac{1}{2}\min(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha+4})$. В таком случае для любых τ и $w' \in U_\tau$ имеет место неравенство $|w' - w_\tau| \leqslant \varepsilon_\alpha$. Поэтому из неравенства б′) § 1 $\mathcal{J}_{\alpha, w'} \leqslant \mathcal{J}_{\alpha+1, w_\tau}$. Отсюда следует, что для любого $w' \in U_\tau$ и функции $\varphi \in \breve{J}_\alpha^{m-1}$ ее сужение $\varphi_{w'}$ на подпространстве $w = w'$ принадлежит пространству $\breve{J}^{m-1}_{\alpha+1, w_\tau}$, причем

$$\|\varphi_{w'}\|^k_{(\alpha+1), w_\tau} \leqslant \|\varphi\|^k_{(\alpha)}$$

для любого $k \geqslant 0$. Любая производная функции φ вида $\left(D_w^{l, \bar j}\varphi\right)_{w'}$ также принадлежит $\breve{J}^{m-1}_{\alpha+1, w_\tau}$. Поэтому к ней применим оператор $R_{\alpha+1, w_\tau}$. Положим $\psi_{\tau, w} = R_{\alpha+1, w_\tau}\varphi_w$. Так как оператор $R_{\alpha+1, w_\tau}$ линеен, он коммутирует с операторами дифференцирования по переменным w. Поэтому

$$D_w^{l, \bar j}\psi_{\tau, w} = R_{\alpha+1, w_\tau}\left(D_w^{l, \bar j}\varphi\right)_w \in J^{m-1}_{\alpha+4, w_\tau}.$$

Отсюда следует, что для любых l и j функция

$$D_w^{l, \bar j}\{h_\tau(w)\psi_{\tau, w}\} \tag{14.2}$$

также принадлежит пространству $J^{m-1}_{\alpha+4, w_\tau}$.

Поскольку $2\delta \leqslant \varepsilon_{\alpha+4}$, для любого $w \in U_\tau$ имеет место неравенство $\|\cdot\|_{(\alpha+5), w} \leqslant \|\cdot\|_{(\alpha+4), w_\tau}$. Поэтому функция (14) принадлежит также пространству $J^{m-1}_{\alpha+5, w}$ и

$$\begin{aligned} \left\| D_w^{l, \bar j}\left\{h_\tau(w)\psi_{\tau, w}\right\}\right\|^k_{(\alpha+5), w} &\leqslant \\ \leqslant C_{l, j} \max_{|l'| \leqslant |l|, |j'| \leqslant |j|} &\left\| D_w^{l', \bar j'}\psi_{\tau, w}\right\|^k_{(\alpha+4), w_\tau} \leqslant \\ &\leqslant C_{l, j}C_k \max_{|l'| \leqslant |l|, |j'| \leqslant |j|} \left\| D_w^{l', \bar j'}\varphi\right\|^{k+\varkappa}_{(\alpha), w'}, \end{aligned} \tag{15.2}$$

где C_k — константы из (13). Так как функция h_τ обращается в нуль вне U_τ, эти неравенства справедливы для всех точек w.

Положим $\psi_w = \sum_\tau h_\tau \psi_{\tau, w}$. Так как величины C_k не зависят от w, а число функций h_τ, не обращающихся одновременно в нуль, ограничено, из (15) вытекает неравенство

$$\| D_w^{i, \bar{j}} \psi_w \|_{(\alpha+5), w}^k \leqslant C_{i, j, k} \max_{|i'| \leqslant |i|, |j'| \leqslant |j|} \| D_w^{i', \bar{j}'} \varphi \|_{(\alpha), w}^{k+\varkappa},$$

в котором константы $C_{i, j, k}$ не зависят от w. Переходя к верхней грани по w, мы приходим к неравенству

$$\| \psi \|_{(\alpha+5)}^k \leqslant C_k \| \varphi \|_\alpha^{k+\varkappa},$$

где $\psi = \psi_w(v)$ — функция, принадлежащая пространству $J_{\alpha+5}^{m-1}$. Отсюда следует, что отображение R_α: $\varphi \to \psi$ есть непрерывный оператор из $\tilde{J}_\alpha^{m-1}$ в $J_{\alpha+5}^{m-1}$. При этом в силу свойства операторов $R_{\alpha+1, w_\tau}$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} R_\alpha \varphi = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \sum h_\tau \psi_{\tau, w} = \sum h_\tau \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} R_{\alpha+1, w_\tau} \varphi = \sum h_\tau \varphi = \varphi.$$

Следовательно, R_α — искомый оператор. ■

6°. Доказательство теоремы. Зафиксируем m и α. Так как по условию $\mathscr{M}$ — семейство мажорант типа $\mathscr{J}$, существует целая функция $e(z) \not\equiv 0$, неотрицательная и квадратично суммируемая на R_x^n, удовлетворяющая неравенству

$$|e(z)| \leqslant r(z) \frac{\mathscr{J}_{\beta+2}(y)}{\mathscr{J}_{\beta+1}(y)}, \qquad \beta = \alpha + n + 1,$$

причем

$$r(z - \lambda) \mathscr{R}_{\beta+1}(z) \leqslant \mathscr{R}_{\beta+2}(\lambda)$$

для любых z, $\lambda \in C^n$. Положим

$$e_\lambda(z) = \frac{1}{\mathscr{R}_{\beta+2}(\lambda)} e(z - \lambda), \quad \lambda \in R^n.$$

Оценим производные этой функции. Пусть $\varepsilon = \min(\varepsilon_\beta, \varepsilon_{\beta+2})$. Тогда

$$|D_z^i e_\lambda(z)| \leqslant \frac{C_i}{\mathscr{R}_{\beta+2}(\lambda)} \sup_{|z-z'| \leqslant \varepsilon} r(z' - \lambda) \frac{\mathscr{J}_{\beta+2}(y')}{\mathscr{J}_{\beta+1}(y')} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_i}{\mathscr{R}_{\beta+2}(\lambda)} \sup_{|z-z'| \leqslant \varepsilon} \frac{\mathscr{R}_{\beta+2}(\lambda)}{\mathscr{R}_{\beta+1}(z')} \frac{\mathscr{J}_{\beta+2}(y')}{\mathscr{J}_{\beta+1}(y')} \leqslant \frac{C_i}{\mathscr{R}_\beta(z)} \frac{\mathscr{J}_{\beta+3}(y)}{\mathscr{J}_\beta(y)} \quad (y' = \operatorname{Im} z'). \tag{16.2}$$

Отсюда для любой функции $\varphi \in \mathscr{H}_\alpha^0$

$$\sup (|x| + 1)^{n+1} \frac{|D^{i, \bar{j}} \{e_\lambda(z) \varphi(z)\}|}{\mathscr{J}_{\beta+3}(y)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{i, j} \sup (|x| + 1)^{n+1} \frac{\mathscr{R}_\alpha(z)}{\mathscr{R}_\beta(z)} \max_{|i'| \leqslant |i|} \sup \frac{|D^{i', \bar{j}} \varphi|}{\mathscr{R}_\alpha \mathscr{J}_\alpha}.$$

Так как функции $\mathcal{R}_\alpha(z)$ по условию образуют семейство мажорант, имеет место неравенство $(|x|+1)^{n+1}\mathcal{R}_\alpha(z)\leqslant\mathcal{R}_\beta(z)$. Отсюда следует, что второй сомножитель в правой части не превосходит единицы. Третий сомножитель не превосходит $\|\varphi\|_\alpha^k$, где $k=|i|+|j|$, а левая часть равна ${}^{\vee}\|D^{l,\bar j}\{e_\lambda\varphi\}\|_{(\beta+3)}^0$. Переходя в этом неравенстве к максимуму по l и j с $|l|+|j|\leqslant k$, мы получаем неравенство

$$ {}^{\vee}\|e_\lambda\varphi\|_{(\beta+3)}^k\leqslant C_k\|\varphi\|_\alpha^k, \tag{17.2}$$

в котором число $k\geqslant 0$ произвольно, а константы C_k не зависят от λ.

Предположим, что функция φ принадлежит пространству $\mathcal{H}_\alpha^{m-1}$, т. е. голоморфна по переменным $z_1, \ldots, z_{m-1}$. Так как функции $e_\lambda(z)$ целые, произведение $e_\lambda\varphi$ также голоморфно по этим переменным. Из конечности левых частей (17) вытекает, что $e_\lambda\varphi$ принадлежит $\check{J}_{\beta+3}^{m-1}$. Поэтому к этим функциям применим оператор $R_{\beta+3}$, построенный в лемме 2. Положим $\psi_\lambda=R_{\beta+3}e_\lambda\varphi$. Из неравенств (17) и (6) вытекает неравенство

$$\|\psi_\lambda\|_{(\beta+8)}^k\leqslant C_k'\|\varphi\|_\alpha^{k+\varkappa}, \tag{18.2}$$

Снова используя свойство $\mathcal{M}$, мы найдем целую функцию $e'(z)\not\equiv 0$, неотрицательную и квадратично суммируемую в R_x^n, удовлетворяющую неравенству

$$|e'(z)|\leqslant r'(z)\frac{\mathcal{J}_{\gamma+2}(y)}{\mathcal{J}_{\gamma+1}(y)},\qquad \gamma=\beta+n+8,$$

где

$$r'(z-\lambda)\mathcal{R}_{\gamma+1}(\lambda)\leqslant\mathcal{R}_{\gamma+2}(z),\qquad z,\lambda\in C^n.$$

Так как обе функции e и e' положительны и квадратично суммируемы в R_x^n, их произведение неотрицательно, суммируемо и не равно тождественно нулю. Поэтому

$$a=\int e(x)e'(x)\,dx>0.$$

Положим

$$e_\lambda'(z)=\frac{\mathcal{R}_{\beta+2}(\lambda)}{a}e'(z-\lambda).$$

По аналогии с (16) мы устанавливаем неравенство

$$|D_z^je_\lambda'(z)|\leqslant C_i'\mathcal{R}_{\beta+2}(\lambda)\frac{\mathcal{R}_{\gamma+3}(z)}{\mathcal{R}_\gamma(\lambda)}\frac{\mathcal{J}_{\gamma+3}(y)}{\mathcal{J}_\gamma(y)}.$$

Используя эту оценку, мы получаем

$$\|D^{i,\bar j}\{e_\lambda'\psi_\lambda\}\|_{\gamma+3}^0\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_i'}{(|\lambda|+1)^{n+1}}\sup(|\lambda|+1)^{n+1}\frac{\mathcal{R}_{\beta+2}(\lambda)}{\mathcal{R}_\gamma(\lambda)}\max_{|i'|\leqslant|i|}\sup\frac{|D^{i',\bar j}\psi_\lambda|}{\mathcal{J}_\gamma(y)}. \tag{19.2}$$

Поскольку функции $\mathscr{R}_\alpha(z)$ образуют семейство мажорант, второй сомножитель в правой части не превосходит единицы. Переходя в (19) к максимуму по i и j с $|i|+|j|\leqslant k$ и учитывая неравенство (18), мы для любого $k\geqslant 0$ получаем неравенство

$$\|e'_\lambda\psi_\lambda\|^k_{\gamma+3}\leqslant\frac{C_k}{(|\lambda|+1)^{n+1}}\|\psi_\lambda\|^k_{(\gamma)}\leqslant\frac{C_k}{(|\lambda|+1)^{n+1}}\|\varphi\|^{k+\varkappa}_\alpha.$$

Отсюда следует, что интеграл $\psi=\int\limits_{R^n} e'_\lambda\psi_\lambda\,d\lambda$ абсолютно сходится по нормам $\|\cdot\|^k_{\gamma+3}$, $k\geqslant 0$, и

$$\|\psi\|^k_{\gamma+3}=\left\|\int e'_\lambda\psi_\lambda\,d\lambda\right\|^k_{\gamma+3}\leqslant C'_k\|\varphi\|^{k+\varkappa}_\alpha, \tag{20.2}$$

следовательно, $\psi\in\mathscr{H}^0_{\alpha'}$, $\alpha'=\gamma+3=\alpha+2n+12$. Так как функции e'_λ целые, а функции ψ_λ голоморфны по переменным $z_1,\ldots,z_{m-1}$, функция ψ также голоморфна по этим переменным, т. е. $\psi\in\mathscr{H}^{m-1}_{\alpha'}$. Таким образом, мы построили непрерывный оператор $\mathfrak{R}_\alpha$: $\mathscr{H}^{m-1}_\alpha\ni\varphi\to\to\psi\in\mathscr{H}^{m-1}_{\alpha'}$, удовлетворяющий неравенствам (2) согласно (20).

Остается проверить, что композиция $\frac{\partial}{\partial\bar z_m}\mathfrak{R}_\alpha$ есть тождественное отображение, т. е. $\frac{\partial}{\partial\bar z_m}\psi=\varphi$ для любой функции $\varphi\in\mathscr{H}^{m-1}_\alpha$. Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_m}\psi=\int e'_\lambda\frac{\partial}{\partial\bar z_m}\psi_\lambda\,d\lambda=\int e'_\lambda e_\lambda\varphi\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{a}\int e'(z-\lambda)\,e(z-\lambda)\,\varphi(z)\,d\lambda. \tag{21.2}$$

Поскольку правая часть сходится как функция, принадлежащая $\mathscr{H}^{m-1}_{\alpha'}$, она сходится для любого $z\in\Omega_{\alpha'}$ и равна

$$\varphi(z)\frac{1}{a}\int\limits_{R^n}e'(z-\lambda)\,e(z-\lambda)\,d\lambda.$$

По теореме Коши этот интеграл равен

$$\int\limits_{R^n}e'(x-\lambda)\,e(x-\lambda)\,d\lambda=a,$$

следовательно, интеграл в (21) сходится к φ, откуда $\frac{\partial}{\partial\bar z_m}\psi=\varphi$. ■

7°. Оператор $D_{\bar z}$ в ограниченной области. Сейчас мы построим оператор, действующий в пространстве функций, определенных в ограниченной выпуклой области C^n и обладающий свойствами оператора $\mathfrak{R}_\alpha$ теоремы 1. Этот результат мы получим как следствие известного факта тривиальности $''d$-когомологий в выпуклой области.

Пусть Ω — ограниченная область в C^n. Для каждого целого $k \geqslant 0$ рассмотрим норму

$$\|\varphi\|_\Omega^k = \max_{|i|+|j| \leqslant k} \sup_\Omega |D^{i, \bar j}\varphi|,$$

определенную для функций, имеющих производные до порядка k в Ω.

Теорема 2. *Пусть Ω — выпуклая область в C^n диаметра, не превосходящего* 1, $0 < r \leqslant 1$, *а Ω_r — r-окрестность области Ω. Для всякого целого m, $0 < m \leqslant n$, и функции φ, бесконечно дифференцируемой и голоморфной по $z_1, \ldots, z_{m-1}$ в Ω_r, существует функция ψ, бесконечно дифференцируемая и голоморфная по $z_1, \ldots, z_{m-1}$ в Ω такая, что $\dfrac{\partial\psi}{\partial \bar z_m} = \varphi$ и*

$$\|\psi\|_\Omega^k \leqslant C_k \|\varphi\|_{\Omega_r}^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22.2}$$

где константа C_k не зависит от Ω.

Доказательство. Воспроизведем необходимый результат о $''d$-формах. $''d$-формой порядка k мы называем форму вида $f = \sum f^{j_1, \ldots, j_k} d\bar z_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{j_k}$. Оператор $''d$ действует по формуле

$$''d\colon f \to \sum \sum_j \frac{\partial f^{j_1, \ldots, j_k}}{\partial \bar z_j} d\bar z_j \wedge d\bar z_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{j_k}.$$

Пусть $k \geqslant 0$ — целое число, а ω — область в C^n. Рассмотрим пространство $L^k(\omega)$, образованное $''d$-формами порядка k в ω с квадратично суммируемыми коэффициентами и нормой

$$\|f\|_\omega = \left| \sum \|f^{j_1, \ldots, j_k}\|_{L_2(\omega)}^2 \right|^{1/2}.$$

Пусть ω — ограниченная псевдовыпуклая область диаметра δ. Согласно одной теореме Хёрмандера *) для всякой формы $f \in L^{k+1}(\omega)$, удовлетворяющей уравнению $''df = 0$, существует форма $g \in L^k(\omega)$ такая, что $''dg = f$ и

$$\|g\|_\omega \leqslant e\delta^2 \|f\|_\omega.$$

Докажем теперь нашу теорему в случае $m = n$. Положим $\omega = \Omega_r$ и $f = \varphi\, d\bar z_n$. Область Ω_r ограничена и выпукла, причем ее диаметр не превосходит двух. Так как функция φ аналитична по $z_1, \ldots, z_{n-1}$, форма $f \in L^1(\omega)$ удовлетворяет уравнению $''df = 0$. Применив

---

*) См. Хёрмандер [2], теорема 2.2.3.

сформулированный выше результат, мы найдем форму $g \in L^0(\omega)$. В гильбертовом пространстве $L^0(\omega)$ спроектируем функцию g на подпространство, ортогональное ядру оператора $''d$; ее проекцию обозначим через ψ. Оператор R: $\varphi \to \psi$ линеен, непрерывен как оператор из $L^1(\omega)$ в $L^0(\omega)$ и удовлетворяет соотношениям $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} R = \delta_n^i$, так как $''d\psi = \varphi$. Из предложения 1 § 1 следует, что функция ψ бесконечно дифференцируема в Ω и удовлетворяет неравенствам (22). Константы C в этих неравенствах зависят лишь от r и константы $e\delta^2$ из (23), которая не превосходит 12. Тем самым в случае $m = n$ теорема доказана.

Пусть теперь $m < n$. Вернемся к рассуждениям 4°—5°. Для каждого $W \in C_w$ пересечение Ω_W области Ω с подпространством $w = W$ есть выпуклая область. По доказанному при каждом w существует оператор R_w, удовлетворяющий соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} R_w = \delta_m^i, \quad i \leqslant m,$$

и неравенствам

$$\| R_w \varphi_w \|_{\Omega_w}^k \leqslant C_k \| \varphi_w \|_{\Omega'_w}^k, \qquad \Omega' = \Omega_{\frac{r}{2}},$$

в которых константы C_k не зависят от Ω и w. Пусть $\{h_\tau\}$ — разбиение единицы в C_w с $\delta = \frac{r}{2}$ (см. 4°). Тогда, как легко убедиться, оператор $\varphi \to \sum h_\tau R_{w_\tau} \varphi$ является искомым. ■

§ 3. $\mathcal{M}$-когомологии

1°. Коцепи. Пусть Ω — область в C^n. Совокупность областей $U = \{U_i, i \in I\}$ в C^n назовем покрытием области Ω, если $\bigcup U_i = \Omega$. Пусть U — некоторое покрытие области Ω, а L — некоторое линейное пространство над полем C. Предположим, что каждому конечному набору индексов $i_0, \ldots, i_\nu \in I$ поставлено в соответствие некоторое линейное топологическое пространство $\Phi(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu})$, образованное некоторыми функциями, определенными в области $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}$ со значениями в L. Предположим, далее, что операция сужения функций этого пространства на подобласти $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{\nu+1}}$ (для любых $i_0, \ldots, i_{\nu+1} \in I$) определяет непрерывное отображение $\Phi(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu})$ в $\Phi(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{\nu+1}})$. В такой ситуации можно говорить о пространствах коцепей на покрытии U со значениями в этих пространствах. Для удобства записей мы прибегнем к следующему формализму.

Коцепи ν-го порядка ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) на покрытии U со значениями в пространствах $\Phi(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu})$ мы будем записывать в следующем виде:

$$\varphi = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu}, \quad \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} \in \Phi(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}),$$

где сумма распространяется на всевозможные упорядоченные наборы из ν элементов множества I. Функции $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ будем называть компонентами коцепи φ. Операцию, обозначенную символом $\wedge$, мы наделим обычными свойствами косого умножения: ассоциативность и антикоммутативность. Таким образом, меняя местами два соседних сомножителя в некотором слагаемом в φ, мы должны поменять знак перед этим слагаемым.

Этот формализм позволяет оперировать с коцепями на покрытии по аналогии с дифференциальными формами. В частности, любую коцепь ν-го порядка можно представить в кососимметрическом виде, т. е. в виде суммы

$$\varphi = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \varphi'_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu},$$

в которой функция $\varphi'_{i_0, \ldots, i_\nu}$ кососимметрически зависит от индексов $i_0, \ldots, i_\nu$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь коцепи, записанные в кососимметрическом виде.

Обычные функции, определенные в области $\Omega = \bigcup U_i$, мы будем также называть коцепями -1-го порядка на покрытии U. В качестве пространства L мы будем использовать пространства вида C^k. Скажем, что коцепь φ на покрытии U определена, дифференцируема, голоморфна или равна нулю в некоторой области ω, если каждая ее компонента $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ соответственно определена, дифференцируема, голоморфна или равна нулю в области $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu} \cap \omega$.

Покрытие области $\Omega \cap \omega$, образованное областями $U_i \cap \omega$, обозначим через $U \cap \omega$. Таким образом, коцепь на покрытии U, определенная в ω, есть то же самое, что коцепь на покрытии $U \cap \omega$.

2°. Кограничный оператор. Пусть $U = \{U_i, \ i \in I\}$ — некоторое фиксированное покрытие области Ω. Рассмотрим следующий оператор, определенный на коцепях на этом покрытии:

$$\partial\colon \varphi \to \sum_{i \in I} U_i \wedge \varphi.$$

В развернутом виде действие этого оператора выглядит следующим образом:

$$\partial\varphi = \sum_i U_i \wedge \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} =$$
$$= \sum_{i, i_0, \ldots, i_\nu} \varphi^{(i)}_{i_0, \ldots, i_\nu} U_i \wedge U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu}. \qquad (1.3)$$

где $\varphi^{(i)}_{i_0, \ldots, i_\nu}$ — сужение функции $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ в области $U_i \cap U_{i_0} \cap \ldots \ldots \cap U_{i_\nu}$. В частности, если φ — коцепь -1-го порядка, то $\partial\varphi = \sum \varphi^{(i)} U_i$. Чтобы записать правую часть (1) в кососимметрическом виде, каждое ее слагаемое перепишем так:

$$\varphi^{(i)}_{i_0, \ldots, i_\nu} U_i \wedge U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} = \\ = \frac{1}{\nu+2} \sum_{\mu=0}^{\nu+1} (-1)^\mu \varphi^{(i)}_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{\mu-1} \wedge U_i \wedge U_\mu \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu}. \tag{2.3}$$

Отсюда

$$\partial\varphi = \frac{1}{\nu+2} \sum_{i_0, \ldots, i_{\nu+1}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu+1} (-1)^\mu \varphi^{(i_\mu)}_{i_0, \ldots, \hat{i}_\mu, \ldots, i_{\nu+1}} \right) U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_{\nu+1}}.$$

В такой записи компоненты коцепи $\partial\varphi$ кососимметричны относительно своих индексов *).

Из равенства $\sum U_i \wedge \sum U_i = -\sum U_i \wedge \sum U_i = 0$ вытекает, что $\partial\partial = 0$.

Пусть мы имеем два покрытия $U = \{U_i, i \in I\}$ и $V = \{V_j, j \in J\}$. Скажем, что *покрытие V вписано в покрытие U*, если задано отображение θ: $J \to I$ такое, что $V_j \subset U_{\theta(j)}$ для любого $j \in J$. В таком случае определено сопряженное отображение θ^*, действующее в коцепях на этих покрытиях:

$$\theta^*\colon \varphi = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} \to \varphi|_V = \\ = \sum \hat{\varphi}_{\theta(j_0), \ldots, \theta(j_\nu)} V_{j_0} \wedge \ldots \wedge V_{j_\nu},$$

где $\hat{\varphi}_{\theta(j_0), \ldots, \theta(j_\nu)}$ — сужение функции $\varphi_{\theta(j_0), \ldots, \theta(j_\nu)}$ на области $V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_\nu}$.

3°. Элементарные покрытия. *Элементарным покрытием* назовем покрытие U пространства C^n, образованное шарами

$$U_z = \{\zeta\colon |\zeta - z| < r(|z|+1)^{-\rho}\}, \qquad z \in C^n.$$

Величины $\rho = \rho(U)$ и $r = r(U)$ мы назовем соответственно *параметром* и *радиусом* элементарного покрытия U. Мы будем рассматривать элементарные покрытия лишь с $\rho(U) \geqslant 0$ и $r(U) > 0$. Если

*) Таким образом, оператор ∂ отличается от обычного кограничного оператора лишь постоянным коэффициентом $\frac{1}{\nu+2}$, что, впрочем, удобно при оценке норм этого оператора.

$\rho(V) \geqslant \rho(U)$ и $r(V) \leqslant r(U)$, то элементарное покрытие V вписано в элементарное покрытие U, если в качестве соответствующего отображения θ выбрать тождественное отображение $C^n \to C^n$.

Пусть S — некоторая центрально-симметричная фигура в C^n, а λ — положительное число. Через λS обозначим фигуру, полученную из S растяжением с коэффициентом λ с центром в центре S. Если $U = \{U_z\}$ — некоторое элементарное покрытие, то через λU мы обозначим покрытие, образованное шарами λU_z, т. е. элементарное покрытие параметра $\rho(U)$, радиуса $\lambda r(U)$.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{N}$ — некоторое алгебраическое разбиение пространства C^n, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, и q — некоторые вещественные числа. В покрытие S, образованное шарами*

$$S_z = \{\zeta\colon |\zeta - z| < C\varepsilon\theta^q(z, \mathcal{N})\}\ ^{*)}, \qquad z \in C^n,$$

можно вписать элементарное покрытие параметра ρ, радиуса $r = c\varepsilon^Q$, причем величины ρ, c и Q не зависят от ε.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} = \{C^n \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_m \supset \phi\}$. Предположим, что для некоторого числа $\nu \leqslant m$ мы построили вписанное в S покрытие S^ν, образованное шарами S_z^ν, $z \in N_\nu$, обладающими следующими свойствами: центр шара S_z^ν находится в точке z, а его радиус r_z^ν не меньше величины $r_\nu(|z| + 1)^{-\rho_\nu}$ с некоторыми r_ν, $1 \geqslant r_\nu > 0$ и $\rho_\nu \geqslant 0$. Заметим, что в случае $\nu = m$ такое покрытие можно построить, положив $S_z^m = S_z$, $z \in N_m$. Необходимая оценка снизу для r_z^m выполнена, так как по определению $\theta(z, \mathcal{N}) = (|z|^2 + 1)^{-1}$ на многообразии N_m и, следовательно, $r_z^m = C\varepsilon\theta^q(z, \mathcal{N}) = C\varepsilon(|z| + 1)^{-2q}$. Предположим теперь, что построено покрытие S^ν. Построим покрытие $S^{\nu-1}$.

Предположим, что для данной точки $z \in N_{\nu-1}$ выполнено неравенство

$$\rho(z, N_\nu) \leqslant r'_z \overset{\text{опр.}}{=} \frac{r_\nu}{2}\left(|z| + 1 + \frac{r_\nu}{2}\right)^{-\rho_\nu}.$$

Выберем точку $z' \in N_\nu$ такую, что $\rho(z, N_\nu) = \rho(z, z')$. Так как $\rho(z, z') \leqslant \frac{r_\nu}{2}$, то

$$r_{z'}^\nu \geqslant r_\nu(|z'| + 1)^{-\rho_\nu} \geqslant r_\nu\left(|z| + 1 + \frac{r_\nu}{2}\right)^{-\rho_\nu} = 2r'_z \geqslant \rho(z, N_\nu) + r'_z.$$

Отсюда следует, что шар $S_{z'}^\nu$ содержит открытый шар $S_z^{\nu-1}$ с центром в точке z и радиусом $r'_z \geqslant r_\nu 2^{-1-\rho_\nu}(|z| + 1)^{-\rho_\nu}$.

---

*) Определение функции θ дано в гл. II, § 3.

Предположим теперь, что выполнено обратное неравенство $\rho(z, N_\nu) > r'_z$. Тогда

$$C\varepsilon\theta^q(z, \mathcal{N}) = C\varepsilon\left(\frac{\rho(z, N_\nu)}{|z|^2+1}\right)^q > C\varepsilon\left(\frac{r'_z}{|z|^2+1}\right)^{|q|},$$

откуда вытекает, что шар $S_z^{\nu-1}$ с центром в точке z и радиусом $C\varepsilon\left(\frac{r'_z}{|r|^2+1}\right)^q$ принадлежит шару S_z. Следовательно, при любом $z \in N_{\nu-1}$ радиус шара $S_z^{\nu-1}$ не меньше чем $r_{\nu-1}(|z|+1)^{-\rho_{\nu-1}}$, где

$$\begin{aligned} r_{\nu-1} &= \min\left(r_\nu 2^{-1-\rho_\nu},\ C\varepsilon\left[r_\nu 2^{-1-\rho_\nu}\right]^q\right), \\ \rho_{\nu-1} &= \max(\rho_\nu,\ |q|(\rho_\nu+2)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, искомое покрытие $S^{\nu-1} = \{S_z^{\nu-1}\}$ построено. Проводя индукцию, мы построим покрытие $S^0 = \{S_z^0\}$. Уменьшив радиус каждого шара S_z^0 до величины $r_0(|z|+1)^{-\rho_n}$, мы получим покрытие, удовлетворяющее условию предложения. Так как $r_m = C\varepsilon$, а $\rho_m = 2q$, из рекуррентной формулы (3) мы находим, что $r_0 \geqslant c\varepsilon^Q$, причем константы c, Q и ρ_0 не зависят от ε. ■

4°. Пространства коцепей на элементарных покрытиях. Пусть $\mathcal{M} = \{M_\alpha(z)\}$ — некоторое семейство мажорант в C^n, $U = \{U_z\}$ — некоторое элементарное покрытие параметра нуль, а $\nu \geqslant 0$ — целое число. Для любых целых $\alpha > 0$ и $k \geqslant 0$ рассмотрим следующую норму, определенную на коцепях ν-го порядка на покрытии U, заданных в Ω_α:

$$\|\varphi\|_{\alpha,\,U}^k = \max_{|l|+|j|\leqslant k}\ \sup_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu}\ \sup_{U_{z_0}\cap\ldots\cap U_{z_\nu}\cap\Omega_\alpha} \frac{\left|D^{l,\bar{j}}\varphi_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu}(z)\right|}{M_\alpha(z)}. \tag{4.3}$$

Пространство таких коцепей, для которых эта норма конечна, обозначим через ${}^\nu\mathcal{H}_\alpha^{0,\,k}(U)$. Если φ — некоторая коцепь ν-го порядка на некотором описанном покрытии V, определенная в более широкой области $\Omega \supset \Omega_\alpha$, то мы скажем, что φ есть элемент пространства ${}^\nu\mathcal{H}_\alpha^{0,\,k}(U)$, если для нее конечна норма (4). При этом мы, как и раньше, полагаем $\frac{1}{M_\alpha(z)} = 0$ вне Ω_α. В частности, если $\varphi \equiv 0$ в Ω_α, то коцепь φ равна нулю как элемент пространства $\mathcal{H}_\alpha^{0,\,k}(U)$.

Подпространство в ${}^\nu\mathcal{H}_\alpha^{0,\,k}(U)$, образованное коцепями, голоморфными по $z_1, \ldots, z_m$ в Ω_α, обозначим через ${}^\nu\mathcal{H}_\alpha^{m,\,k}(U)$. Положим ${}^\nu\mathcal{H}_\alpha^m(U) = \varprojlim_{k\to\infty} {}^\nu\mathcal{H}_\alpha^{m,\,k}(U)$. Для общности введем также обозначения

$${}^{-1}\mathcal{H}_\alpha^{m,\,k}(U) = \mathcal{H}_\alpha^{m,\,k}, \quad {}^{-1}\mathcal{H}_\alpha^m(U) = \mathcal{H}_\alpha^m.$$

Из формулы (2) видно, что при любых α, m, k и $\nu \geqslant -1$ оператор ∂ определяет непрерывное отображение ∂: ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{m,k}(U) \to {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\alpha}^{m,k}(U)$, норма которого не превосходит единицы, а также предельное отображение ∂: ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{m}(U) \to {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\alpha}^{m}(U)$. Через ${}^{\nu}\mathcal{Z}_{\alpha}^{m,k}$ и ${}^{\nu}\mathcal{Z}_{\alpha}^{m}$ обозначим ядра, а через ${}^{\nu+1}\mathcal{B}_{\alpha}^{m,k}$ и ${}^{\nu+1}\mathcal{B}_{\alpha}^{m}$ — образы этих отображений.

Если $\alpha' \geqslant \alpha$, а покрытие V вписано в U, то определено и непрерывно отображение сужения ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{m,k}(U) \to {}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha'}^{m,k}(V)$, норма которого не превосходит единицы. Такие отображения, а также соответствующие предельные отображения мы будем называть тождественными.

Через U_{α}, $0 < \alpha < \infty$, обозначим элементарное покрытие параметра нуль радиуса ε_{α}. При любом α покрытие $U_{\alpha+1}$ вписано в U_{α} и, следовательно, определено тождественное отображение ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{m}(U_{\alpha}) \to$ $\to {}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha+1}^{m}(U_{\alpha+1})$.

Таким образом, пространства ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{m}(U_{\alpha})$ относительно тождественных отображений образуют возрастающее семейство линейных топологических пространств. Это семейство мы обозначим через ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m}$. Так как тождественные отображения коммутируют с операторами ∂, определена последовательность отображений семейств

$$0 \to \mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m} \xrightarrow{\partial} {}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m} \xrightarrow{\partial} {}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m} \to \ldots \to {}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m} \xrightarrow{\partial} {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{m} \to \ldots$$

Среди рассмотренных пространств чаще всего мы будем использовать пространства ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}(U) = {}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}^{n,0}(U)$. Через ${}^{\nu}\mathcal{Z}_{\alpha}(U)$ и ${}^{\nu+1}\mathcal{B}_{\alpha}(U)$ мы обозначим ядро и образ отображения ∂: ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}(U) \to {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\alpha}(U)$. Пространства ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}(U_{\alpha})$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, образуют возрастающее семейство, которое мы обозначим через ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Кограничный оператор определяет последовательность отображений

$$0 \to \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\partial} \ldots \to {}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \to \ldots \quad (5.3)$$

Эта последовательность полуточна и, следовательно, мы можем рассмотреть фактор-семейства

$$\operatorname{Ker}\{\partial: {}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \to {}^{\nu+1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\} / \partial^{\nu-1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}.$$

Эти фактор-семейства мы будем называть *$\mathcal{M}$-когомологиями*. Скажем, что $\mathcal{M}$-когомологии *тривиальны*, если последовательность (5) точна.

5°. Предложение 2. *Для любого элементарного покрытия U параметра нуль, числа θ, $0 < \theta < 1$, и целых $\alpha > 0$, $\nu \geqslant 0$ операция сужения функций пространства ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha}(U)$ на вписанном покрытии θU непрерывно отображает это пространство в ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha+1}^{n}(\theta U)$.*

Доказательство. Положим $U=\{U_z\}$ и $V_z=\theta U_z$. Для любых $z_0, \ldots, z_\nu$ область $V_{z_0}\cap\ldots\cap V_{z_\nu}$ содержится в области $U_{z_0}\cap\ldots\cap U_{z_\nu}$ вместе со своей окрестностью радиуса $(1-\theta)r(U)$. Пусть φ — произвольная коцепь из пространства ${}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U)$. К ее произвольной компоненте $\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ применим предложение 1 § 1 (см. стр. 104) с $r=\min\{(1-\theta)r(U), \varepsilon_\alpha\}$ в точке $z\in V_{z_0}\cap\ldots\cap V_{z_\nu}\cap\Omega_{\alpha+1}$:

$$\left|D^{i, \bar{j}}\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}(z)\right|\leqslant C_{ij}M_{\alpha+1}(z)\sup_{U_{z_0}\cap\cdots\cap U_{z_\nu}\cap\Omega_\alpha}\frac{|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}(\zeta)|}{M_\alpha(\zeta)}.$$

Отсюда для любого $k\geqslant 0$

$$\|\varphi\|^k_{\alpha+1, \theta U}\leqslant C_k\|\varphi\|^0_{\alpha, U}. \tag{6.3}$$

Из этого неравенства вытекает доказываемое утверждение. ■

Из предложения 2, в частности, следует, что семейство ${}^\nu\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$ есть подсемейство семейства ${}^\nu\mathscr{H}^n_{\mathscr{M}}$, эквивалентное этому семейству

§ 4. Теорема о тривиальности $\mathscr{M}$-когомологий

1°. Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — семейство мажорант типа $\mathscr{J}$. Тогда для любого m, $0\leqslant m\leqslant n$, последовательность семейств*

$$0\to\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}\xrightarrow{\partial}{}^0\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}\xrightarrow{\partial}{}^1\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}\to\ldots\to{}^\nu\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}\xrightarrow{\partial}{}^{\nu+1}\mathscr{H}^m_{\mathscr{M}}\to\ldots \tag{1.4}$$

точна.

Доказательство основано на двух леммах. В первой лемме содержится утверждение, что при $m=0$ последовательность (1) точна для любого семейства мажорант. С помощью леммы 2 точность последовательности (1) будет доказана индукцией по числу m.

Лемма 1. *Для любого семейства мажорант $\mathscr{M}$ последовательность* (1) *с* $m=0$ *точна.*

Доказательство. Пусть r — произвольное число, заключенное между 0 и 1, и $U=\{U_z\}$ — элементарное покрытие параметра нуль радиуса r. Построим подчиненное ему разбиение единицы. Пусть $h(\zeta)$ — некоторая неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция в C^n с носителем в шаре $|\zeta|<1$, интеграл от которой по C^n равен единице. Положим $h_z(\zeta)=r^{-2n}h[(z-\zeta)/r]$, $z\in C^n$. Функции h_z образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию U в том смысле, что $\operatorname{supp} h_z\subset U_z$ для любого z и

$$\int h_z(\zeta)\,dz\,d\bar{z}=1.$$

Очевидно, что производные функций h_z удовлетворяют неравенству

$$|D^{i, \bar{j}}_\zeta h_z(\zeta)|\leqslant C_{ij}, \qquad z\in C^n,$$

где $C_{l,\,j}$ — некоторые константы, не зависящие от r. Отсюда

$$\int \left| D_\zeta^{l,\,\bar{j}} h_z(\zeta)\, dz\, d\bar{z} \right| \leqslant C'_{l,\,j}. \tag{2.4}$$

Перейдем к доказательству леммы. Зафиксируем индекс α. Пусть

$$\varphi = \sum_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu} \varphi_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu} U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}$$

— произвольная коцепь, принадлежащая пространству ${}^\nu\mathfrak{Z}^0_\alpha(U)$. Нам нужно построить коцепь $\psi \in {}^{\nu-1}\mathscr{H}^0_\alpha(U)$ такую, что $\partial\psi = \varphi$. Для любых точек $z, z_1, \ldots, z_\nu$ в области $\Omega_\alpha \cap U_{z_1} \cap \ldots \cap U_{z_\nu}$ рассмотрим функцию $(h_z\varphi_{z,\,z_1,\,\ldots,\,z_\nu})'$, равную $h_z\varphi_{z,\,z_1,\,\ldots,\,z_\nu}$ в $\Omega_\alpha \cap U_{z_1} \cap \ldots \ldots \cap U_{z_\nu} \cap U_z$ и нулю в $\Omega_\alpha \cap U_{z_1} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \setminus U_z$. Положим

$$\psi_{z_1,\,\ldots,\,z_\nu} = (\nu+1) \int (h_z\varphi_{z,\,z_1,\,\ldots,\,z_\nu})'\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.4}$$

Из неравенства (2) следует, что этот интеграл сходится в $\Omega_\alpha \cap U_{z_1} \cap \cap \ldots \cap U_{z_\nu}$. Покажем, что коцепь $\psi = \sum\limits_{z_1,\,\ldots,\,z_\nu} \psi_{z_1,\,\ldots,\,z_\nu} U_{z_1} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}$ — искомая. Мы имеем

$$\partial\psi = \frac{1}{\nu+1} \sum_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \psi_{z_0,\,\ldots,\,z_{\mu-1},\,z_{\mu+1},\,\ldots,\,z_\nu} U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu} =$$
$$= \sum_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu} \int h_z \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \varphi_{z,\,z_0,\,\ldots,\,z_{\mu-1},\,z_{\mu+1},\,\ldots,\,z_\nu}\, dz\, d\bar{z}\, U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}. \tag{4.4}$$

По определению компонента коцепи $\partial\varphi$ при произведении $U_z \wedge U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}$ в случае, если $z \neq z_\mu$, $\mu = 0, \ldots, \nu$, равна

$$\frac{1}{\nu+2}\left[\sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\mu+1} \varphi_{z,\,z_0,\,\ldots,\,z_{\mu-1},\,z_{\mu+1},\,\ldots,\,z_\nu} + \varphi_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu}\right].$$

Но по условию $\partial\varphi = 0$, следовательно,

$$\varphi_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \varphi_{z,\,z_0,\,\ldots,\,z_{\mu-1},\,z_{\mu+1},\,\ldots,\,z_\nu}.$$

Таким образом, в случае $z \neq z_\mu$, $\mu = 0, \ldots, \nu$, внутренняя сумма в правой части (4) равна $\varphi_{z_0,\,\ldots,\,z_\nu}$. В исключенных случаях $z = z_\mu$, $\mu = 0, \ldots, \nu$, в этой сумме присутствует лишь одно слагаемое, равное $\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$. Поэтому правую часть (7) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{z_0, \ldots, z_\nu} \int h_z\, dz\, d\bar{z}\, \varphi_{z_0, \ldots z_\nu} U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu} = \varphi,$$

откуда $\partial\psi = \varphi$.

Оценим производные коцепи ψ. Из (3) и (2)

$$\left| D_\zeta^{i, \bar{j}} \psi_{z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta) \right| \leqslant (\nu + 1) \int \left| D_\zeta^{i, \bar{j}} \left(h_z(\zeta) \varphi_{z, z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta') \right)' dz\, d\bar{z} \right| \leqslant$$
$$\leqslant C_{i, j} \max_{i' \leqslant i,\ j' \leqslant j} \int \left| D_\zeta^{i - i', \overline{j - j'}} h_z(\zeta)\, dz\, d\bar{z} \right| \sup_z \left| D_\zeta^{i', \bar{j'}} \varphi_{z, z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta) \right| \leqslant$$
$$\leqslant C'_{i,j} \max_{i' \leqslant i,\ j' \leqslant j} \sup_z \left| D^{i', \bar{j'}} \varphi_{z, z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta) \right|.$$

Поделив обе части неравенства на $M_\alpha(\zeta)$ и переходя к верхней грани по ζ, $z_1, \ldots, z_\nu$, приходим к неравенству

$$\|\psi\|_{\alpha, U}^k \leqslant C_k \|\varphi\|_{\alpha, U}^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

Итак, мы построили оператор S_U: ${}^\nu\mathfrak{Z}_\alpha^0(U) \ni \varphi \to \psi \in {}^{\nu-1}\mathscr{H}_\alpha^0(U)$ такой, что композиция ∂S_U: ${}^\nu\mathfrak{Z}_\alpha^0(U) \to {}^\nu\mathfrak{Z}_\alpha^0(U)$ есть тождественное отображение. Отсюда вытекает точность последовательности (1) с $m = 0$. ■

2°. Лемма 2. *Пусть M — произвольное семейство мажорант, а $\alpha > 0$, $\nu \geqslant 0$ и m, $0 < m \leqslant n$, — целые числа. Существует непрерывный оператор T: ${}^\nu\mathscr{H}_\alpha^{m-1}(U_\alpha) \to {}^\nu\mathscr{H}_{\alpha+1}^{m-1}(U_{\alpha+1})$, удовлетворяющий уравнению $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} T\varphi = \varphi$.*

Доказательство. Положим $U_\alpha = \{U_z\}$, $U_{\alpha+1} = \{V_z\}$ и выберем точки $z_0, \ldots, z_\nu$ произвольным образом так, чтобы область $\omega = V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap \Omega_{\alpha+1}$ не была пустой. Область $\omega' = U_{z_0} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \cap \Omega_\alpha$ содержит окрестность ω радиуса $r = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha+1}$. Выберем произвольную коцепь $\varphi \in {}^\nu\mathscr{H}_\alpha^{m-1}(U_\alpha)$ и применим к ее компоненте $\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ теорему 2 § 2, положив $\Omega = \omega$. Мы найдем бесконечно дифференцируемую в ω функцию $\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}$, голоморфную по $z_1, \ldots, z_{m-1}$ такую, что

$$\frac{\partial \psi_{z_0, \ldots, z_\nu}}{\partial \bar{z}_m} = \varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$$

и

$$\|\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}\|_\omega^k \leqslant C_k \|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}\|_{\omega'}^k,$$

где константы C_k не зависят от $z_0, \ldots, z_\nu$ и α. Так как диаметр области ω' не превосходит ε_α, мы получаем отсюда неравенство

$$\max_{|i|+|j|\leqslant k} \sup_{\omega} \frac{\left|D^{i,\bar{j}}\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}\right|}{M_{\alpha+1}} \leqslant C_k \max_{|i|+|j|\leqslant k} \sup_{\omega} \frac{\left|D^{i,\bar{j}}\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}\right|}{M_\alpha}. \tag{6.4}$$

Поскольку функция $\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ антисимметрично зависит от индексов $z_0, \ldots, z_\nu$, мы можем выбирать функции $\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ так, чтобы они обладали тем же свойством. Образуем коцепь $\psi = \sum \psi_{z_0, \ldots, z_\nu} \times \times V_{z_0} \wedge \ldots \wedge V_{z_\nu}$. Из неравенства (6) следует, что она принадлежит ${}^\nu\mathcal{H}^{m-1}_{\alpha+1}(U_{\alpha+1})$ и непрерывно зависит от φ. Из построения $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_m} = \varphi$. Таким образом, оператор T: $\varphi \to \psi$ — искомый. ■

Следствие 1. *Для любого семейства мажорант $\mathcal{M}$, чисел $\nu \geqslant 0$ и m точна последовательность*

$$0 \to {}^\nu\mathcal{H}^m_{\mathcal{M}} \to {}^\nu\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial\bar{z}_m}} {}^\nu\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \to 0$$

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что последовательность, полученная из (1) заменой m на $m-1$, точна. Докажем точность самой последовательности (1). Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму семейств:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & {}^1\mathcal{H}^m_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {}^1\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial\bar{z}_m}"] \arrow[u, "\partial"] & {}^1\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}^0\mathcal{H}^m_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {}^0\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial\bar{z}_m}"] \arrow[u, "\partial"] & {}^0\mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^m_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial\bar{z}_m}"] \arrow[u] & \mathcal{H}^{m-1}_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{7.4}$$

Следствие 1 гарантирует точность всех строк этой диаграммы кроме нижней. Точность нижней строки вытекает из теоремы 1 § 2. Из предположения индукции следует точность второго и третьего столбцов. Фрагмент этой диаграммы, заключенный в рамку, имеет вид диаграммы, симметричной (β) § 2 гл. I. Применяя теорему 1 § 2 гл. I к этому фрагменту, мы устанавливаем точность первого столбца в члене ${}^{0}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}}$. Далее, поднимая рамку на один шаг вверх и применяя то же рассуждение, мы находим, что первый столбец точен также в члене ${}^{1}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}}$ и т. д. Тем самым точность первого столбца доказана.

Таким образом, мы установили точность последовательности (1) в предположении, что она точна при замене m на $m-1$. Для завершения доказательства остается заметить, что при $m=0$ эта последовательность точна в силу леммы 1. ■

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{M}$ — семейство мажорант типа $\mathscr{J}$. Тогда точна последовательность*

$$0 \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{0}\mathscr{H}_{\mathscr{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}} \to \ldots \to {}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}} \xrightarrow{\partial} {}^{\nu+1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}} \to \ldots$$

Доказательство. Точность этой последовательности вытекает из точности (1) с $m=n$, так как по доказанному в § 3 ${}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$ есть подсемейство в ${}^{\nu}\mathscr{H}^{n}_{\mathscr{M}}$, эквивалентное этому семейству.

3°. Замечание. Согласно следствию 2 при любом $\nu \geqslant -1$ определено отображение

$$R^{\nu}\colon \operatorname{Ker}\{\partial\colon {}^{\nu+1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}} \to {}^{\nu+2}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\} \to {}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}/\partial\, {}^{\nu-1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}},$$

обратное отображению ∂. Покажем, что отображение R^{ν} всегда может быть выбрано так, что его порядок (см. определение 4 § 1 гл. I) есть некоторая фиксированная функция $\alpha \to \beta(\alpha)$, не зависящая от семейства мажорант $\mathscr{M}$. Для этого мы сначала установим аналогичное утверждение для отображений

$$R^{\nu}_{m}\colon \operatorname{Ker}\{\partial\colon {}^{\nu+1}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}} \to {}^{\nu+2}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}}\} \to {}^{\nu}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}}/\partial\, {}^{\nu-1}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}},$$

обратных отображениям ∂.

Согласно лемме 1 для любого семейства мажорант $\mathscr{M}$ существует отображение R^{ν}_{0}, $\nu=-1, 0, 1, \ldots$, обратное ∂, порядок которого равен функции $\beta(\alpha) \equiv \alpha$. Предположим теперь, что существует отображение R^{ν}_{m-1}, обратное ∂, порядок которого не зависит от семейства $\mathscr{M}$. Рассмотрим диаграмму (7). Согласно теореме 1 § 2 и лемме 2 этого параграфа для любого $\nu \geqslant -1$ существует отображение $T^{\nu}\colon {}^{\nu}\mathscr{H}^{m-1}_{\mathscr{M}} \to {}^{\nu}\mathscr{H}^{m-1}_{\mathscr{M}}/{}^{\nu}\mathscr{H}^{m}_{\mathscr{M}}$, обратное отображению $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$, порядок которого не зависит от семейства $\mathscr{M}$. Поэтому к диаграмме (7) можно применить замечание § 2 гл. I, согласно которому для любого $\nu \geqslant -1$ существует отображение R^{ν}_{m}, обратное ∂, порядок которого зависит лишь от порядков R^{ν}_{m-1} и T^{ν} и, следовательно, не зависит от $\mathcal{M}$. Таким образом, мы провели индукцию по числу m и можем утверждать, что существует отображение R_n^ν, $\nu \geqslant -1$, обратное ∂, порядок которого не зависит от $\mathcal{M}$. Наконец, из предложения 2 § 3 следует, что изоморфизмы ${}^\nu\mathcal{H}^n_{\mathcal{M}} \cong {}^\nu\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ устанавливаются с помощью отображений, порядки которых не зависят от $\mathcal{M}$. Эти отображения (точнее, ассоциированные с ними) в надлежащей композиции с отображением R_n^ν дают искомое отображение R^ν. Понятно, что порядок построенного таким образом отображения R^ν не зависит от семейства $\mathcal{M}$. Тем самым наше утверждение доказано.

4°. Когомологии аналитических коцепей в ограниченной области. Хорошо известно, что в любой псевдовыпуклой области когомологии аналитических коцепей тривиальны. Мы установим сейчас вариант этого классического результата, обратив внимание на оценку норм соответствующих операторов.

Пусть Ω — область в C^n, а U — элементарное покрытие. Рассмотрим норму

$$\|\varphi\|^0_{\Omega, U} = \sup_{z_0, \ldots, z_\nu} \sup_{U_{z_0, \ldots, z_\nu}} |\varphi|, \qquad U_{z_0, \ldots, z_\nu} = U_{z_0} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \cap \Omega,$$

заданную на коцепях на покрытии $U \cap \Omega$.

Теорема 2. *Пусть ω — выпуклая область диаметра не больше 1, $0 < r \leqslant 1$, Ω — r-окрестность ω, а U и V — элементарные покрытия параметра нуль радиусов $2r$ и r. Для всякой голоморфной коцепи φ на покрытии $U \cap \Omega$ с конечной нормой $\|\varphi\|^0_{\Omega, U}$ такой, что $\partial\varphi = 0$, существует голоморфная коцепь ψ на $V \cap \omega$ такая, что $\partial\psi = \varphi$ и*

$$\|\psi\|^0_{\omega, V} \leqslant \frac{C}{r^n} \|\varphi\|^0_{\Omega, U}, \tag{8.4}$$

где константа C не зависит от ω и r.

Доказательство. Для любых целых $\nu \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ рассмотрим пространство ${}^\nu L^k$, образованное коцепями F порядка ν на покрытии $U \cap \Omega$, компонентами которых являются ${}''d$-формы порядка k (см. 7°, § 2) с квадратично суммируемыми коэффициентами:

$$F = \sum_{z_0, \ldots, z_\nu} \left(\sum_{j_1, \ldots, j_k} f^{j_1, \ldots, j_k}_{z_0, \ldots, z_\nu} d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_k} \right) U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}.$$

Топологию в ${}^\nu L^k$ определим при помощи нормы

$$\|F\|_{\Omega, U} = \sup_{z_0, \ldots, z_\nu} \left| \sum_{j_1, \ldots, j_k} \left\| f^{j_1, \ldots, j_k}_{z_0, \ldots, z_\nu} \right\|^2_{L_2(U_{z_0, \ldots, z_\nu})} \right|^{1/2}.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & {}^1H(U) & \longrightarrow & {}^1L^0 & \xrightarrow{''d} & {}^1L^1 & \xrightarrow{''d} & \ldots \\
 & & \partial\uparrow & & \partial\uparrow & & \partial\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & {}^0H(U) & \longrightarrow & {}^0L^0 & \xrightarrow{''d} & {}^0L^1 & \xrightarrow{''d} & \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & H(\Omega) & \longrightarrow & L^0 & \xrightarrow{''d} & L^1 & \xrightarrow{''d} & \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{9.4}$$

Здесь L^k, $k=0, 1, 2, \ldots,$ — ядро отображения ∂: ${}^0L^k \to {}^1L^k$, т. е. пространство $''d$-форм в Ω порядка k с квадратично суммируемыми коэффициентами, ${}^\nu H(U)$ — пространство голоморфных коцепей порядка ν на покрытии $U \cap \Omega$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\Omega, U} = \sup_{z_0, \ldots, z_\nu} \|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}\|_{L_2(U_{z_0, \ldots, z_\nu})}.$$

$H(\Omega)$ — пространство квадратично суммируемых в Ω голоморфных функций.

Проверим точность строк этой диаграммы. Пусть $F \in {}^\nu L^{k+1}$ и $''dF = 0$. Зафиксируем произвольным образом $z_0, \ldots, z_\nu$ и рассмотрим $''d$-форму

$$f = f_{z_0, \ldots, z_\nu} = \sum_{j_1, \ldots, j_k} f^{j_1, \ldots, j_k}_{z_0, \ldots, z_\nu} d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_k}.$$

Она имеет конечную норму $\|f\|_{U_{z_0, \ldots, z_\nu}}$ и удовлетворяет уравнению $''df = 0$. Согласно сформулированной в 7° § 2 теореме Хёрмандера существует $''d$-форма g такая, что

$$dg = f, \qquad \|g\|_{U_{z_0, \ldots, z_\nu}} \leqslant 12 \|f\|_{U_{z_0, \ldots, z_\nu}}. \tag{10.4}$$

Предполагая, что форма g антисимметрично зависит от $z_0, \ldots, z_\nu$, составим коцепь $G = \sum g U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}$. Из (10) следует, что

$$''dG = F, \qquad \|G\|_{\Omega, U} \leqslant 12 \|F\|_{\Omega, U}.$$

Тем самым мы установили точность всех строк диаграммы (9), исключая нижнюю. Точность нижней строки доказывается совершенно аналогично, если учесть, что норма $\|\cdot\|_{\Omega, U}$ на подпространстве $L^k \subset {}^0L^k$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_\Omega$.

Перейдем к столбцам. Для всякой коцепи $F \in {}^{\nu}L^k$ такой, что $\partial F = 0$, используя обозначения леммы 1, положим

$$g_{z_1, \ldots, z_\nu} = (\nu + 1) \int \left(h_z f_{z, z_1, \ldots, z_\nu}\right)' dz\, d\bar{z}.$$

Заметим, что $0 \leqslant h_z \leqslant 1$ и при любых фиксированных $z_1, \ldots, z_\nu$ подынтегральное выражение отлично от нуля лишь в случае $|z - z_1| \leqslant 2$. Поэтому квадрат правой части не превосходит

$$C \int \left| f_{z, z_1, \ldots, z_\nu} \right|^2 |dz\, d\bar{z}|,$$

где под $|f \ldots|^2$ мы понимаем $\sum \left| f^{j_1, \ldots, j_k}_{\ldots} \right|^2$, а C зависит лишь от n и ν. Отсюда

$$\int \left| g_{z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta) \right|^2 |d\zeta\, d\bar{\zeta}| \leqslant C \int \left| f_{z, z_1, \ldots, z_\nu}(\zeta) \right|^2 |d\zeta\, d\bar{\zeta}\, dz\, d\bar{z}|.$$

Поэтому оператор

$$F \to G = \sum g_{z_1, \ldots, z_\nu} U_{z_1} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu} \in {}^{\nu-1}L^k$$

определен и непрерывен. Как следует из выкладок леммы 1, $\partial G = F$. Тем самым мы установили точность всех столбцов диаграммы (9), кроме левого.

Точность левого столбца следует из теоремы 1 § 2 гл. I. Таким образом, мы можем утверждать, что для любой коцепи $\varphi \in {}^{\nu+1}H(U)$ такой, что $\partial\varphi = 0$, существует коцепь $\psi \in {}^{\nu}H(U)$ такая, что $\partial\psi = \varphi$ и

$$\|\psi\|_{\Omega, U} \leqslant C \|\varphi\|_{\Omega, U}. \tag{11.4}$$

Заметим, что мы вправе предполагать, что константа C в этом неравенстве не зависит от ω и r, так как этим свойством обладают константы, фигурирующие в предыдущих рассуждениях (см. 5° § 2 гл. I).

Правая часть (11), очевидно, не превосходит нормы $C \|\varphi\|^0_{\Omega, U}$. С другой стороны, каждая область $V_{z_0, \ldots, z_\nu} = V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap \omega$ принадлежит $U_{z_0, \ldots, z_\nu}$ вместе со своей r-окрестностью. Так как компоненты коцепи ψ голоморфны, из предложения 1 § 1 следует неравенство

$$\sup_{V_{z_0, \ldots, z_\nu}} \left| \psi_{z_0, \ldots, z_\nu} \right| \leqslant \frac{C}{r^n} \left\| \psi_{z_0, \ldots, z_\nu} \right\|_{L_2(U_{z_0, \ldots, z_\nu})},$$

где C не зависит от ω и r. Отсюда $\|\psi\|^0_{\omega, V} \leqslant C \|\psi\|_{\Omega, U}$. Комбинируя это неравенство с (11), приходим к (8). ■

5°. Примеры нетривиальных $\mathcal{M}$-когомологий. В этом пункте мы выскажем некоторые соображения об общей задаче: описание всех семейств мажорант $\mathcal{M}$, отвечающих тривиальным $\mathcal{M}$-когомологиям. Конечно, семейства типа $\mathcal{T}$ далеко не исчерпывают всех семейств, для которых $\mathcal{M}$-когомологии тривиальны. Например, известная теорема Ока — Картана — Серра применительно к пучку ростков голоморфных функций дает другой пример таких семейств. Более общий класс таких семейств мажорант описан в работе Хёрмандера [2].

Сейчас мы приведем два примера семейств мажорант противоположного свойства, отвечающих нетривиальным $\mathcal{M}$-когомологиям. В первом примере семейство $\mathcal{M}$ будет выбрано так, что последовательность (5.3) не будет алгебраически точной в члене ${}^1\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Во втором примере отображение ∂: ${}^0\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \to {}^1\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ не будет являться гомоморфизмом.

Пример 1. Пусть $n = 1$, а

$$M_\alpha(z) = (|z| + 1)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{\alpha}|\operatorname{Im} z|^{1+\varepsilon}\right), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Нетрудно убедиться в том, что последовательность функций $M_\alpha(z)$ образует семейство мажорант. Пусть $U = \{U_z\}$ — некоторое элементарное покрытие параметра нуль, R_+ — открытая полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а R_- — замкнутая полуплоскость $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Рассмотрим следующую голоморфную коцепь первого порядка на покрытии U:

$$\varphi = \sum \varphi_{z_1, z_2} U_{z_1} \wedge U_{z_2},$$

где

$$\varphi_{z_1, z_2}(z) = \begin{cases} 0, & z_1, z_2 \in R_\pm; \\ 1, & z_1 \in R_+, \quad z_2 \in R_-, \qquad z \in U_{z_1} \cap U_{z_2}; \\ -1, & z_1 \in R_-, \quad z_2 \in R_+. \end{cases}$$

Ясно, что компоненты коцепи φ отличны от нуля лишь в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant r(U)$ и ограничены в совокупности. Отсюда следует, что функция φ принадлежит пространству ${}^1\mathcal{H}_1(U)$. Легко проверить, что $\partial\varphi = 0$, следовательно, $\varphi \in {}^1\mathfrak{Z}_1(U)$.

Покажем, что каково бы ни было покрытие V и натуральное α, не существует коцепи $\psi \in {}^0\mathcal{H}_\alpha(V)$ такой, что $\partial\psi = \varphi$. Отсюда будет вытекать, что последовательность (5.4) не является алгебраически точной в члене ${}^1\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Предположим противное. Пусть на некотором покрытии $V = \{V_z\}$ существует коцепь $\psi = \sum \psi_z V_z \in {}^0\mathcal{H}_\alpha(V)$ такая, что $\partial\psi = \varphi$. Из этого равенства следует, что для любых $z_1, z_2 \in R_+$ или $z_1, z_2 \in R_-$, $\psi_{z_1} \equiv \psi_{z_2}$ в $V_{z_1} \cap V_{z_2}$. Следовательно, функции ψ_z с $z \in R_\pm$ суть сужения некоторой голоморфной функции $\psi_\pm$, определенной в $R_\pm$. Из включения $\psi \in {}^0\mathcal{H}_\alpha(V)$ вытекают неравенства

$$|\psi_\pm(z)| \leqslant C(|z| + 1)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{\alpha}|\operatorname{Im} z|^{1+\varepsilon}\right).$$

Отсюда следует, что $\psi_\pm \equiv 0$, т. е. $\psi = 0$. Поэтому равенство $\partial\psi = \varphi$ не может иметь места.

Пример 2. Пусть снова $n = 1$ и $h(\sigma)$ — некоторая неотрицательная, не равная тождественно нулю, бесконечно дифференцируемая функция в R^1 с носителем, заключенным в отрезке $[-1, 1]$. Как известно, преобразование Фурье такой функции удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{h}(z)| \leqslant \mu(x) \exp(|y|), \qquad z = x + iy,$$

где $\mu(x)$ — некоторая положительная функция, убывающая на бесконечности быстрее любой степени $|x|$. Положим

$$\mu_\alpha(x) = \sup\{\mu(x'),\ |x-x'| \leqslant 1 - 2^{-\alpha}\}$$

и

$$M_\alpha(z) = \begin{cases} (|z|+1)^{\alpha-1}\mu_\alpha(x)\exp(|y|), & |x| \geqslant |y|, \quad \varepsilon>0,\ \alpha=1,2,\ldots, \\ (|z|+1)^{\alpha-1}\mu_\alpha(x)\exp[|y|+(1+\varepsilon)|y-x|], & |y| \geqslant |x|. \end{cases}$$

Покажем, что отображение ∂: ${}^0\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \to {}^1\mathscr{H}_{\mathcal{M}}$ не является гомоморфизмом. Предположим противное: ∂ есть гомоморфизм. Тогда, в частности, если $U=\{U_z\}$ — элементарное покрытие параметра нуль радиуса $\frac{1}{2}$, то должны существовать покрытие V, натуральное α и непрерывный оператор

$$R\colon {}^1\mathscr{B}_1(U) \to {}^0\mathscr{H}_\alpha(V)/{}^0\mathfrak{Z}_\alpha(V)$$

такой, что композиция ∂R есть тождественное отображение. Из непрерывности оператора R вытекает неравенство

$$\inf\left\{\|\varphi - \partial\chi\|^0_{\alpha,V},\ \chi\in\mathscr{H}_\alpha\right\} \leqslant C\,\|\partial\varphi\|^0_{1,U},\ \varphi\in{}^0\mathscr{H}_1(U). \tag{12.4}$$

Мы покажем, что это неравенство не может иметь места, построив последовательность функций, для которых правая часть (12) есть бесконечно малая величина относительно левой.

Для каждого натурального $\lambda \geqslant 2$ рассмотрим коцепь

$$\psi^\lambda = \sum \psi_{z_1,z_2} U_{z_1} \wedge U_{z_2},$$

компоненты которой определяются следующим образом. Пусть S_λ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в точке $i\lambda$. Тогда

$$\psi_{z_1,z_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{\tilde h(z)}{z-i\lambda}, & z_1 \bar\in S_\lambda, \quad z_2 \in S_\lambda, \\ -\dfrac{\tilde h(z)}{z-i\lambda}, & z_1 \in S_\lambda, \quad z_2 \bar\in S_\lambda; \quad z\in U_{z_1}\cap U_{z_2}. \end{cases}$$

$$\psi_{z_1,z_2}(z) = 0 \begin{cases} z_1, z_2 \in S_\lambda, \\ z_1, z_2 \bar\in S_\lambda. \end{cases}$$

Очевидно, для любых z_1 и z_2

$$|\psi_{z_1,z_2}(z)| \leqslant 2\,|\tilde h(z)| \leqslant 2\mu(x)\exp(|y|).$$

Отсюда следует, что коцепь ψ^λ принадлежит пространству ${}^1\mathscr{H}_1(U)$. Оценим ее норму. Так как любая ее компонента отлична от нуля лишь в $\frac{3}{2}$-окрестности точки $i\lambda$, то

$$\|\psi^\lambda\|^0_{1,U} = \sup_{z_1,z_2}\ \sup_{U_{z_1}\cap U_{z_2}} \frac{|\psi_{z_1,z_2}(z)|}{M_1(z)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\frac12\leqslant|z-i\lambda|\leqslant\frac32} \frac{|\tilde h(z)|}{|z-i\lambda|\,\mu'(x)\exp(|y|+(1+\varepsilon)|y-x|)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{\frac12\leqslant|z-i\lambda|\leqslant\frac32} \frac{\exp(|y|)}{\exp(|y|+(1+\varepsilon)|y-x|)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left(-(1+\varepsilon)\left|\lambda-\frac{3}{2}\right|\right). \tag{13.4}$$

С другой стороны, $\psi^\lambda = \partial\varphi^\lambda$, где

$$\varphi^\lambda = \sum \varphi_\zeta U_\zeta, \quad \varphi_\zeta = \begin{cases} \dfrac{\tilde{h}(z)}{z - i\lambda} & \text{в} \quad U_\zeta, \ \zeta \bar{\in} S_\lambda, \\ 0 & \text{в} \quad U_\zeta, \ \zeta \in S_\lambda. \end{cases}$$

Коцепь φ^λ принадлежит пространству ${}^0\mathcal{H}_1(U)$, так как

$$|\varphi_\zeta(z)| \leqslant 2\,|\tilde{h}(z)| \leqslant 2\mu(x)\exp(|y|) \leqslant 2M_1(z).$$

Оценим снизу левую часть (12) с $\varphi = \varphi^\lambda$. Из равенства Парсеваля для любой функции $\chi \in \mathcal{H}_\alpha$ имеет место неравенство

$$\|\varphi^\lambda - \partial\chi\|_\alpha^0 \geqslant \sup_{|z - i\lambda| \geqslant \frac{1}{2}} \left| \frac{\tilde{h}(z)}{z - i\lambda} - \chi(z) \right| \frac{1}{M_\alpha(z)} \geqslant$$

$$\geqslant C \sup_x (|x| + 1) \left| \frac{\tilde{h}(x)}{x - i\lambda} - \chi(x) \right| \geqslant C' \left\| \frac{\tilde{h}(x)}{x - i\lambda} - \chi(x) \right\|_{L_2} =$$

$$= C'' \left\| F^{-1}\left[\frac{\tilde{h}(x)}{x - i\lambda} \right] - F^{-1}[\chi(x)] \right\|_{L_2}, \qquad (14.4)$$

где F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье. Из принципа Фрагмена — Линделефа следует, что любая функция χ, принадлежащая пространству $\mathcal{H}_\alpha$, т. е. удовлетворяющая неравенству

$$|\chi(z)| \leqslant CM_\alpha(z), \qquad (15.4)$$

удовлетворяет также неравенству

$$|\chi(z)| \leqslant C' \exp(|y|). \qquad (16.4)$$

Следовательно, обратное преобразование Фурье функции χ есть некоторая бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой принадлежит отрезку $[-1, 1]$. Отсюда для любой функции $\chi \in \mathcal{H}_\alpha$ правая часть (14) не меньше $\left\| F^{-1}\left[\dfrac{\tilde{h}(x)}{x - i\lambda}\right] \right\|_{L_2(R_+)}$, где R_+ есть пара лучей $|\sigma| > 1$. Обратное преобразование Фурье произведения $\dfrac{\tilde{h}(x)}{x - i\lambda}$ есть свертка

$$h(\sigma) * F^{-1}\left[\frac{1}{x - i\lambda}\right] = h(\sigma) * \theta_\lambda(\sigma), \quad \theta_\lambda(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma > 0, \\ ie^{\lambda\sigma}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

Так как функция $h(\sigma)$ неотрицательна, свертка $-ih(\sigma) * \theta_\lambda(\sigma)$ также неотрицательна и $-ih(\sigma) * \theta_\lambda(\sigma) = be^{\lambda\sigma}$, $\sigma \leqslant -1$ с некоторым $b > 0$. Поэтому

$$\|h(\sigma) * \theta_\lambda(\sigma)\|_{\alpha_2(R_+)} \geqslant \frac{b}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-\lambda}.$$

Учитывая это неравенство в (14), окончательно получаем

$$\inf\left\{ \|\varphi^\lambda - \partial\chi\|_{\alpha, V}^0, \ \chi \in \mathcal{H}_\alpha \right\} \geqslant \frac{b}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-\lambda}$$

для любого λ. Сопоставляя это неравенство с оценкой (13), приходим к противоречию с неравенством (12).

Примеры 1 и 2 можно, конечно, обобщать в различных направлениях. Отметим без доказательства лишь одно из таких обобщений. Пусть $i(\varphi)$ — некоторая непрерывная периодическая функция на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда семейство мажорант

$$M_\alpha(z) = \exp\left[\left(i(\arg z) - \frac{1}{\alpha}\right)|z|\right], \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{17.4}$$

определяет тривиальные $\mathscr{M}$-когомологии в том и только том случае, когда функция $i(\varphi)$ тригонометрически выпукла.

Это утверждение более отчетливо иллюстрирует идею примеров 1 и 2, заключающуюся в том, что нетривиальные $\mathscr{M}$-когомологии возникают тогда, когда семейство мажорант $\mathscr{M}$ в определенном смысле не соответствует запасу функций пространства $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}} = \lim\limits_{\rightarrow} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}$. Так, в примере 1 пространство $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}}$ состоит из единственной функции, равной тождественно нулю. В примере 2 это несоответствие заключается в том, что функции пространства $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}}$ на самом деле удовлетворяют оценке (16), улучшающей оценку (15) в области $|y| \gg |x|$. Сформулированное в конце утверждение показывает, что $\mathscr{M}$-когомологии, определенные семейством мажорант (17), тривиальны тогда и только тогда, когда существует целая функция первого порядка роста, индикатрисса которой равна $i(\varphi)$. В связи с этими наблюдениями естественно предположить, что справедливо следующее необходимое условие того, что семейство $\mathscr{M}$ отвечает тривиальным $\mathscr{M}$-когомологиям: функции M_α нельзя существенно уменьшить, не изменяя запаса функций пространства $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}}$, или более точно: не существует такого семейства мажорант $\mathscr{M}'$, что $\overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}'} = \overline{\mathscr{H}}_{\mathscr{M}}$, но $\overline{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{M}'} \subset \overline{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{M}}$ и $\overline{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{M}'} \neq \mathscr{H}^0_{\mathscr{M}}$. По-видимому, достаточное условие тривиальности $\mathscr{M}$-когомологий близко к этому необходимому.

§ 5. Когомологии, связанные с $\mathscr{P}$-матрицей

1°. Формулировка теоремы. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое семейство мажорант и ${}^\nu\mathscr{H}_{\mathscr{M}} = \{{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha),\ \alpha=1, 2, \ldots\}$, $\nu = -1, 0, 1, \ldots,$ — соответствующие семейства пространств. Пусть, далее, $p\colon \mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$ — некоторая $\mathscr{P}$-матрица, т. е. некоторая матрица размера $t \times s$, образованная многочленами в C^n. Для любых ν, α и покрытия U умножение голоморфных функций на покрытии U на матрицу p определяет непрерывный оператор

$$p\colon [{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U)]^s \to [{}^\nu\mathscr{H}_{\alpha+\mu}(U)]^t, \tag{1.5}$$

где μ — наивысший порядок элементов матрицы p. Эти отображения, очевидно, коммутируют с тождественными отображениями пространств ${}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U)$. В частности, при любом α коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
[{}^\nu\mathscr{H}_{\alpha+1}(U_{\alpha+1})]^s & \xrightarrow{p} & [{}^\nu\mathscr{H}_{\alpha+1+\mu}(U_{\alpha+1+\mu})]^t \\
\uparrow & & \uparrow \\
[{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^s & \xrightarrow{p} & [{}^\nu\mathscr{H}_{\alpha+\mu}(U_{\alpha+\mu})]^t
\end{array}$$

Отсюда следует, что горизонтальные отображения в этой диаграмме являются компонентами отображения семейств

$$p\colon \left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\right]^{s} \to \left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\right]^{t}. \tag{2.5}$$

Пусть $\mathscr{D}$ — p-оператор, построенный в теореме 1 § 4 гл. II с $m=n$. Через $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U)\right]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ обозначим подпространство в $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U)\right]^{t}$, образованное коцепями φ такими, что $\mathscr{D}(z)\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}(z)\equiv 0$ для всех $z_0, \ldots, z_\nu$. Через $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\right]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ обозначим подсемейство в семействе $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\right]^{t}$, образованное подпространствами $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U_\alpha)\right]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ Из свойства p-оператора $\mathscr{D}$ вытекает, что образ отображения (1) принадлежит подпространству $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha+\mu}(U)\right]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Поэтому образ отображения (2) принадлежат подсемейству $\left[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\right]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Содержание параграфа составляет следующая

Теорема. *Для любого семейства мажорант $\mathscr{M}$ типа $\mathscr{J}$ и $\mathscr{P}$-матрицы p последовательность*

$$[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^{s} \xrightarrow{p} [\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \to 0 \tag{3.5}$$

точна.

Доказательству предпошлем следующие конструкции.

2°. Вспомогательные нормы и пространства. Пусть $Z=(Z_1, \ldots \ldots, Z_n)$ — произвольная точка пространства C^n, а $R=(R_1, \ldots, R_n)$ — произвольная точка куба $K=\left\{R\colon\ 0<R_i\leqslant\frac{1}{2},\ i=1, \ldots, n\right\}$. Через $e^{Z, R}$ мы обозначим открытый эллипсоид в C^n, определяемый неравенством

$$\sum \frac{|z-Z_i|^2}{R_i^2} < 1.$$

Величины $R_1, \ldots, R_n$ мы будем называть полуосями эллипсоида $e^{Z, R}$. Для любого натурального α положим $e_{\alpha}^{Z, R}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)e^{Z, R}$. Через $U_{\alpha}^{Z, R}$ мы будем обозначать элементарное покрытие C^n параметра нуль радиуса $\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha}=\left(\frac{R_1 \ldots R_n}{|Z|+1}\right)^{\alpha}$. Для любых ν и α рассмотрим норму

$$\|\varphi\|_{\alpha}^{Z, R} = \sup_{z_0, \ldots, z_\nu}\ \sup_{U_{z_0}\cap\ldots\cap U_{z_\nu}\cap\Omega_\alpha} \left|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}(\zeta)\right|; \quad \{U_z\}=U_{\alpha}^{Z, R},$$

определенную на голоморфных коцепях ν-го порядка на покрытии $U_{\alpha}^{Z, R} \cap e_{\alpha}^{Z, R}$. Через ${}^{\nu}E_{\alpha}^{Z, R}$ обозначим пространство голоморфных коцепей ν-го порядка на покрытии $U_{\alpha}^{Z, R} \cap e_{\alpha}^{Z, R}$, для которых эта норма конечна. В частности, ${}^{-1}E_{\alpha}^{Z, R}$ есть пространство обычных функций, голоморфных и ограниченных на $e_\alpha^{Z, R}$. Это пространство мы чаще будем обозначать более коротко $E_\alpha^{Z, R}$.

Для любого $\nu \geqslant -1$ рассмотрим пространство $(C^n \times K, {}^\nu E_\alpha^{Z, R})$ *), образованное всевозможными функциями $\Phi = \varphi^{Z, R}$, определенными на $C^n \times K$ такими, что $\varphi^{Z, R} \subset {}^\nu E_\alpha^{Z, R}$ для любых $Z \in C^n$ и $R \in K$. Подпространство этого пространства, образованное функциями, для которых конечна норма

$$^\pi\|\Phi\|_\alpha = \sup_{Z, R} \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha-1} \|\varphi^{Z, R}\|_\alpha^{Z, R},$$

обозначим через ${}^\nu\Pi_\alpha$.

При фиксированных Z и R пространства ${}^\nu E_\alpha^{Z, R}$ образуют возрастающее семейство относительно тождественных отображений. Действительно, если $\alpha' > \alpha$, то $e_{\alpha'}^{Z, R} \subset e_\alpha^{Z, R}$, а покрытие $U_{\alpha'}^{Z, R}$ вписано в $U_\alpha^{Z, R}$. При этом норма $\|\cdot\|_\alpha^{Z, R}$ есть невозрастающая функция α. Следовательно, пространства ${}^\nu\Pi_\alpha$ также образуют возрастающее семейство, которое мы обозначим через ${}^\nu\Pi$, и норма $^\pi\|\cdot\|_\alpha$ есть невозрастающая функция α.

Описанный формализм мы будем применять в следующей ситуации. Пусть для любых Z и R заданы некоторые подпространства $F^{Z, R} \subset {}^\nu E_\alpha^{Z, R}$ и $G^{Z, R} \subset {}^\mu E_{\alpha'}^{Z, R}$ и определен оператор

$$L_{Z, R}\colon F^{Z, R} \to {}^\mu E_{\alpha'}^{Z, R} / G^{Z, R},$$

непрерывный в естественных топологиях. Эта серия операторов задает отображение

$$L^\pi\colon \Phi = \varphi^{Z, R} \to \Psi = L_{Z, R}\varphi^{Z, R},$$

переводящее функции, определенные на $C^n \times K$ со значениями в пространствах $F^{Z, R}$, в функции, определенные на том же множестве, со значениями в факторпространствах ${}^\mu E_{\alpha'}^{Z, R} / G^{Z, R}$. Очевидно, что функции со значениями в пространствах ${}^\mu E_{\alpha'}^{Z, R} / G^{Z, R}$ можно рассматривать как элементы факторпространства $(C^n \times K, {}^\mu E_{\alpha'}^{Z, R})$ по его подпространству $(C^n \times K, G^{Z, R})$. Такое соответствие линейно и взаимно однозначно. Поэтому мы можем сформулировать следующее утверждение,

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — подпространства в ${}^\nu\Pi_\alpha$ и ${}^\mu\Pi_{\alpha'}$, образованные функциями на $C^n \times K$, значения которых*

---

*) K — введенный выше куб.

принадлежат соответственно подпространствам $F^{Z,R}$ *и* $G^{Z,R}$. *Серия операторов* $L_{Z,R}$ *определяет отображение*

$$L^{\pi}\colon \mathcal{F} \to {}^{\mu}\Pi_{\alpha'}/\mathcal{G}$$

в том и только том случае, когда выполнено неравенство

$$\|L_{Z,R}\| \leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{\alpha'-\alpha}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Нормы в пространствах ${}^{\mu}E_{\alpha'}^{Z,R}/G^{Z,R}$ и ${}^{\mu}\Pi_{\alpha'}/\mathcal{G}$ по определению записываются следующим образом:

$$^{*}\|\varphi\|_{\alpha'}^{Z,R} = \inf\left\{\|\varphi-\psi\|_{\alpha'}^{Z,R},\ \psi \in G^{Z,R}\right\},$$

$$^{*}\|\Phi\|_{\alpha'} = \inf\left\{{}^{\pi}\|\Phi-\Psi\|_{\alpha'},\ \Psi \in \mathcal{G}\right\}.$$

Поэтому непрерывность оператора L^{π} означает выполнение неравенства

$$^{*}\|L^{\pi}\Phi\|_{\alpha'} = \inf_{\Psi\in\mathcal{G}} \sup_{Z,R}\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha'-1} \|L_{Z,R}\varphi^{Z,R}-\psi^{Z,R}\|_{\alpha'}^{Z,R} \leqslant$$
$$\leqslant \|L^{\pi}\| \sup_{Z,R}\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha-1} \|\varphi^{Z,R}\|_{\alpha}^{Z,R}, \tag{5.5}$$

где $\Phi=\varphi^{Z,R}$, а $\Psi=\psi^{Z,R}$. Для любых функций $\varphi \in F^{Z,R}$ и $\psi \in G^{Z,R}$ мы можем рассмотреть функции $\Phi \in \mathcal{F}$ и $\Psi \in \mathcal{G}$, равные соответственно φ и ψ в точке (Z, R) и нулю в остальных точках. Подставляя такие функции в неравенство (5), мы приходим к неравенству

$$\inf\left\{\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha'-1} \|L_{Z,R}\varphi-\psi\|_{\alpha'}^{Z,R},\ \psi\in G^{Z,R}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \|L^{\pi}\|\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha-1} \|\varphi\|_{\alpha}^{Z,R}, \tag{6.5}$$

откуда

$$^{*}\|L_{Z,R}\varphi\|_{\alpha'}^{Z,R} \leqslant \|L^{\pi}\|\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{\alpha'-\alpha} \|\varphi\|_{\alpha}^{Z,R},$$

что эквивалентно (4). Заметим, что совокупность неравенств (6) с $Z\in C^n$, $R\in K$ эквивалентна неравенству (5). ■

3°. Кограничный оператор. Оператор ∂: ${}^{\nu}E_{\alpha}^{Z,R} \to {}^{\nu+1}E_{\alpha}^{Z,R}$, как легко увидеть из формул § 3, имеет норму, не превосходящую единицы. Следовательно, определен оператор ∂: ${}^{\nu}\Pi_{\alpha} \to {}^{\nu+1}\Pi_{\alpha}$, норма которого также не превосходит единицы. Совокупность таких операторов определяет отображение семейств $\partial=\partial^{\nu}$: ${}^{\nu}\Pi \to {}^{\nu+1}\Pi$. Ядра рассмотренных в этом пункте отображений обозначим соответственно через ${}^{\nu}\mathfrak{Z}_{\alpha}^{Z,R}$, ${}^{\nu}\mathfrak{Z}_{\alpha}$ и ${}^{\nu}\mathfrak{Z}$.

Лемма 1. *Последовательность*

$$0 \to {}^{-1}\Pi \xrightarrow{\partial^{-1}} {}^{0}\Pi \xrightarrow{\partial^{0}} {}^{1}\Pi \to \ldots \to {}^{\nu}\Pi \xrightarrow{\partial^{\nu}} {}^{\nu+1}\Pi \to \ldots \qquad (7.5)$$

точна.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом α, $\nu \geqslant 0$, Z и R. Выберем любую коцепь $\varphi \in {}^{\nu+1}E_\alpha^{Z, R}$ такую, что $\partial\varphi = 0$. По определению коцепь φ определена на $U_\alpha^{Z, R} \cap e_\alpha^{Z, R}$, где $U_\alpha^{Z, R}$ — элементарное покрытие параметра нуль радиуса $\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^\alpha$. Применим теорему 2 § 4, положив в ней $\omega = e_{\alpha+1}^{Z, R}$, $V = U_{\alpha+1}^{Z, R}$, $r = \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha+1}$. Область $e_\alpha^{Z, R}$ содержит r-окрестность ω, так как $r \leqslant 2^{-\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$, а радиус покрытия $U_\alpha^{Z, R}$ не меньше $2r$. Следовательно, эта теорема применима к коцепи φ. Согласно этой теореме существует голоморфная коцепь ψ на покрытии $U_{\alpha+1}^{Z, R} \cap e_{\alpha+1}^{Z, R}$ такая, что $\partial\psi = \varphi$ и

$$\|\psi\|_{\alpha+1}^{Z, R} \leqslant \frac{c}{r^n} \|\varphi\|_\alpha^{Z, R} = C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^n \|\varphi\|_\alpha^{Z, R}.$$

В силу предложения 1 отсюда следует, что определен непрерывный оператор

$$L:\ {}^{\nu+1}\mathfrak{Z}_\alpha \to {}^{\nu}\Pi_{\alpha+n} / {}^{\nu}\mathfrak{Z}_{\alpha+n},$$

обратный оператору ∂. ■

4°. Оператор p в семействах ${}^{\nu}\Pi$. Для упрощения записей на протяжении этого параграфа мы в обозначениях вида $[{}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}]^k$, $[{}^{\nu}\Pi_\alpha]^k$ и т. д. будем опускать квадратные скобки и индекс k, т. е. писать просто ${}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}$, ${}^{\nu}\Pi_\alpha$ и т. д.

Умножение на матрицу $p(z)$ есть, очевидно, непрерывный оператор в пространстве ${}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}$ (в полных обозначениях речь идет об операторе p: $[{}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}]^s \to [{}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}]^t$). При этом

$$\|p\varphi\|_\alpha^{Z, R} \leqslant \sup_{e_\alpha^{Z, R}} |p(z)| \|\varphi\|_\alpha^{Z, R} \leqslant C(|Z|+1)^\mu \|\varphi\|_\alpha^{Z, R},$$

где константа C не зависит от Z и R. Поэтому операция умножения функций на $C^n \times K$ со значениями в пространствах ${}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}$ на матрицу p определяет непрерывный оператор p: ${}^{\nu}\Pi_\alpha \to {}^{\nu}\Pi_{\alpha+\mu}$. Совокупность таких операторов определяет отображение семейств p: ${}^{\nu}\Pi \to {}^{\nu}\Pi$.

Через ${}^{\nu}E_\alpha^{Z, R} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$, ${}^{\nu}\Pi_\alpha \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ мы обозначим подпространство соответственно в пространствах $[{}^{\nu}E_\alpha^{Z, R}]^t$, $[{}^{\nu}\Pi_\alpha]^t$, образованное функциями φ, $\Phi = \varphi^{Z, R}$ такими, что $\mathscr{D}\varphi = 0$, $\mathscr{D}\varphi^{Z, R} = 0$ для всех $Z \in C^n$, $R \in K$. Через ${}^{\nu}\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ обозначим подсемейство в $[{}^{\nu}\Pi]^t$, образованное подпространствами ${}^{\nu}\Pi_\alpha \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$. Аналогичный смысл мы придадим обозначениям ${}^{\nu}\Pi \cap \operatorname{Ker} p\,\partial$, ${}^{\nu}\mathfrak{Z} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ и т. д.

Лемма 2. *Последовательность*

$$ {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} p\,\partial \xrightarrow{p} {}^0\mathfrak{Z} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \to 0 \tag{8.5} $$

точна.

Доказательство. Опишем сначала его идею. Всякий элемент пространства ${}^0\mathfrak{Z}_\alpha \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ есть по определению функция на $C^n \times K$, значениями которой являются функции $\varphi \in E_\alpha^{Z, R}$ такие, что $\mathscr{D}\varphi \equiv 0$. Каждую такую функцию φ мы можем записать в виде $p\mathscr{G}(z)\varphi$, где $\mathscr{G}(z)\varphi$ — аналитическая функция в окрестности произвольной точки $z \in e_{\alpha+1}^{Z, R}$. Таким образом, мы имеем $\varphi = p\psi$, где ψ — коцепь нулевого порядка на некотором покрытии $e_{\alpha+1}^{Z, R}$. Взяв сужение ψ на подходящем вписанном покрытии, мы получим $\psi \in {}^0E_{\alpha'}^{Z, R} \cap \operatorname{Ker} p\,\partial$, что приведет нас к цели после оценки $|\psi|$.

Для доказательства мы применим более общую конструкцию, которая будет использована также в другом месте.

Зафиксируем произвольным образом натуральное α и точки $Z \in C^n$ и $R \in K$. Пусть φ — произвольная функция пространства $E_\alpha^{Z, R}$, т. е. ограниченная голоморфная функция в $e_\alpha^{Z, R}$. Далее, пусть $\mathscr{D}$ и $\mathscr{G}$ — p-операторы, построенные в теореме 1 § 4 гл. II для случая $m = n$. Применив разложение (1.4) этой теоремы к функции φ в произвольной точке $z \in e_\alpha^{Z, R}$, мы получим равенство

$$ \varphi(\zeta) = \chi_z(\zeta) + p(\zeta)\psi_z(\zeta), \qquad \chi_z = \mathscr{D}(z)\varphi, \qquad \psi_z = \mathscr{G}(z)\varphi. \tag{9.5} $$

Оценим функции χ_z, ψ_z для точек $z \in e_{\alpha+1}^{Z, R}$. Так как

$$ \rho\left(e_{\alpha+1}^{Z, R}, \mathrm{C}e_\alpha^{Z, R}\right) > \varepsilon = \frac{R^1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, $$

каждая такая точка принадлежит $e_\alpha^{Z, R}$ вместе со своей ε-окрестностью, следовательно, функция φ голоморфна и ограничена в ε-окрестности точки z. Согласно следствию 1 § 4 гл. II операторы $\mathscr{D}(z)$ и $\mathscr{G}(z)$ переводят функции, голоморфные в ε-окрестности точки z, в функции, голоморфные в εr_z-окрестности этой точки, причем их нормы не превосходят величины $(\varepsilon^K r_z)^{-1}$, где $r_z = C\theta^q(z, \mathscr{N})$, а $\mathscr{N}$ — некоторое алгебраическое разбиение C^n. Отсюда следует, что для любого $z \in e_{\alpha+1}^{Z, R}$ функции χ_z и ψ_z голоморфны в окрестности S_z точки z радиуса εr_z и

$$ \max\left[\sup_{S_z}|\chi_z|, \ \sup_{S_z}|\psi_z|\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^K r_z} \sup_{e_\alpha^{Z, R}} |\varphi| = \frac{1}{\varepsilon^K r_z} \|\varphi\|_\alpha^{Z, R}. \tag{10.5} $$

Для каждой точки $z \in C^n$ построим шар S_z радиуса εr_z. Согласно предложению 1 § 3 в покрытие $S = \{S_z,\ z \in C^n\}$ можно вписать элементарное покрытие $V = \{V_z\}$ некоторого параметра ρ и радиуса $b\varepsilon^q$, причем величины ρ, b и q не зависят от ε. Пусть некоторый шар V_z пересекается с эллипсоидом $e^{Z,R}_{\alpha+2}$. Так как покрытие V вписано в покрытие S, этот шар принадлежит некоторому шару $S_{z'}$. Радиус последнего равен $\varepsilon r_{z'} \leqslant \varepsilon \leqslant \rho\left(e^{Z,R}_{\alpha+2}, \mathbf{C}e^{Z,R}_{\alpha+1}\right)$, следовательно, точки z и z' принадлежат $e^{Z,R}_{\alpha+1}$. Отсюда следует, что покрытие $V \cap e^{Z,R}_{\alpha+2}$ вписано в покрытие $\{S_z,\ z \in e^{Z,R}_{\alpha+1}\}$, а радиусы шаров V_z, пересекающихся с $e^{Z,R}_{\alpha+2}$, не меньше чем

$$b\varepsilon^q(|Z|+2)^{-\rho} \geqslant b'\left(\frac{\varepsilon}{|Z|+1}\right)^{q'},$$

где $b' = 2^{-\rho}b$, а $q' = \max(q, \rho)$. Так как $R^1 \leqslant \frac{1}{2}$, то можно найти достаточно большую константу Q, не зависящую от Z и R такую, что $b'\left(\frac{\varepsilon}{|Z|+1}\right)^{q'} \geqslant \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{Q}$. Из этого неравенства вытекает, что покрытие $U^{Z,R}_Q \cap e^{Z,R}_{\alpha+2}$ вписано в $V \cap e^{Z,R}_{\alpha+2}$ и тем более покрытие $U^{Z,R}_{\alpha'} \cap e^{Z,R}_{\alpha'}$, где $\alpha' = \max(\alpha+2, Q)$, вписано в $V \cap e^{Z,R}_{\alpha+2}$ и поэтому в $\{S_z,\ z \in e^{Z,R}_{\alpha+1}\}$. Следовательно, определены сужения χ', ψ' коцепей $\sum \chi_z S_z$ и $\sum \psi_z S_z$ на покрытии $U^{Z,R}_{\alpha'} \cap e^{Z,R}_{\alpha'}$. Из равенства (9)

$$\partial\varphi = \chi' + p\psi'. \tag{11.5}$$

Положим $\chi' = \sum \chi'_z U_z$ и $\psi' = \sum \psi'_z U_z$, где $\{U_z\} = U^{Z,R}_{\alpha'} \cap e^{Z,R}_{\alpha'}$. Если некоторая область U_z этого покрытия принадлежит шару $S_{z'}$, то соответствующий шар покрытия $U^{Z,R}_Q$ также принадлежит $S_{z'}$ и, следовательно, $\varepsilon r_{z'} \geqslant \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^Q$, откуда $r_{z'} \geqslant \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^Q$, так как $\varepsilon \leqslant 1$. Поэтому

$$\sup_{U_z} |\chi'_z| \leqslant \sup_{S_{z'}} |\chi_{z'}| \leqslant \left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^Q r_{z'} \sup_{S_{z'}} |\mathscr{D}(z')\varphi|. \tag{12.5}$$

Комбинируя это неравенство с (10), мы получаем

$$\|\chi'\|^{Z,R}_{\alpha'} \leqslant C'\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{Q'} \|\varphi\|^{Z,R}_{\alpha}.$$

Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$\|\psi'\|^{Z,R}_{\alpha'} \leqslant C''\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{Q'} \|\varphi\|^{Z,R}_{\alpha}. \tag{13.5}$$

Подчеркнем, что константы C', C'' и Q' не зависят от Z и R.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть φ' — произвольный элемент пространства ${}^0\mathfrak{Z}^{Z,R}_{\alpha} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Его можно записать в виде $\partial\varphi$,

$\varphi \in E_\alpha^{Z,R}$, причем $\|\varphi\|_\alpha^{Z,R} = \|\varphi'\|_\alpha^{Z,R}$. Применив к функции φ равенство (11), мы получим $\varphi = p\psi'$, так как по условию $\mathscr{D}\varphi' \equiv 0$. Таким образом, мы построили непрерывный оператор

$$L_{Z,R}\colon {}^0\mathfrak{Z}_\alpha^{Z,R} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \ni \varphi' \to \psi' \in {}^0E_{\alpha'}^{Z,R}$$

такой, что композиция $pL_{Z,R}$ есть тождественное отображение. При этом из неравенства (13) следует, что его норма не превосходит величины $C''\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{Q'}$. Поэтому согласно предложению 1 совокупность этих операторов определяет непрерывный оператор L^π: ${}^0\mathfrak{Z}_\alpha \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \to {}^0\Pi_{\alpha'}$ такой, что композиция pL^π есть тождественный оператор. Из равенства $\partial pL^\pi = p\,\partial L^\pi = 0$ следует, что образ L^π принадлежит ядру оператора $p\partial_0$, т. е. подпространству ${}^0\Pi_{\alpha'} \cap \operatorname{Ker} p\partial$. Так как оператор L^π построен для любого натурального α, точность последовательности (8) доказана. ■

5°. Лемма 3. *При любом $\nu \geqslant -1$ последовательность*

$${}^\nu\Pi \xrightarrow{p} {}^\nu\Pi \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \to 0 \qquad (14.5)$$

точна.

Доказательство мы проведем индукцией по когомологической размерности $\delta(\operatorname{Ker} p)$ $\mathscr{P}$-модуля $\operatorname{Ker}\{p\colon \mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t\}$ *). Положим $\delta = \delta(\operatorname{Ker} p)$ и предположим, что лемма доказана для любой матрицы q с $\delta(\operatorname{Ker} q) < \delta$ (если $\delta = -1$, т. е. $\operatorname{Ker} p = 0$, такое предположение нам не потребуется). Согласно определению числа δ существует точная последовательность $\mathscr{P}$-отображений вида

$$0 \to \mathscr{P}^{s_\delta} \xrightarrow{q_\delta} \mathscr{P}^{s_{\delta-1}} \xrightarrow{q_{\delta-1}} \ldots \xrightarrow{q_1} \mathscr{P}^{s_0} \xrightarrow{q_0} \mathscr{P}^s \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t. \qquad (15.5)$$

Заметим, что по предположению индукции лемма справедлива для любой матрицы q_i, $i = 0, \ldots, \delta$, так как $\delta(\operatorname{Ker} q_i) < \delta$.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму (16.5) на стр. 145. Сейчас нас будет интересовать лишь выделенный фрагмент этой диаграммы. Нам предстоит доказать точность левого столбца этого фрагмента. Пусть $\mathscr{D}^j$ — q_j-оператор, где $j = 0, \ldots, \delta+1$, причем мы полагаем $q_{\delta+1} = 0$. Согласно следствию 2 § 4 гл. II для любой точки $Z \in C^n$ имеет место равенство $\mathscr{O}_z^{s_{j-1}} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}^j = \mathscr{O}_z^{s_{j-1}} \cap \operatorname{Ker} q_{j-1}$ **) в очевидных обозначениях. Отсюда следует, что для любого ν ${}^\nu\Pi \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}^j = {}^\nu\Pi \cap \operatorname{Ker} q_{j-1}$. Поскольку по предположению индукции наша лемма верна для всех матриц q_j, отсюда вытекает точность всех последовательностей

$${}^\nu\Pi \xrightarrow{q_j} {}^\nu\Pi \cap \operatorname{Ker} q_{j-1} \to 0, \quad j = 0, \ldots, \delta+1 \qquad (q_{-1} = p). \quad (17.5)$$

---

*) Функция $\delta(M)$ была определена в гл. I, § 3.

**) $\mathscr{O}_z$ — пространство аналитических функций в окрестности z (см. гл. II § 1).

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & {}^1\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r, "i"] & {}^1\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & {}^2\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} & & \\
0 \arrow[r] & {}^1\mathfrak{z} \arrow[u, "p"] \arrow[r] & {}^1\Pi \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\partial"] & {}^2\Pi \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\partial"] & \cdots & \\
 & {}^1\mathfrak{z} \arrow[u, "q_0"] \arrow[r] & {}^1\Pi \arrow[u, "q_0"] \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[u, "q_0"] \arrow[r, "\partial"] & {}^{\delta+2}\Pi \arrow[u, "q_{\delta-1}"] \arrow[r, "\partial"] & {}^{\delta+3}\Pi \\
 & & \cdots \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "\partial"] & {}^{\delta+1}\Pi \arrow[u, "q_\delta"] \arrow[r, "\partial"] & {}^{\delta+2}\Pi \arrow[u, "q_\delta"] \arrow[r, "\partial"] & {}^{\delta+3}\Pi \arrow[u, "q_\delta"] \\
 & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{16.5}
$$

Тем самым мы установили, что все столбцы диаграммы (16), начиная со второго, алгебраически точны, а все отображения q_j, $j = 0, \ldots, \delta$, этих столбцов суть гомоморфизмы. Точность строк этой диаграммы следует из леммы 1. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, находим, что левый столбец алгебраически точен, а q_0 в нем — гомоморфизм.

Рассмотрим, далее, новую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & {}^{-1}\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r, "\partial^{-1}"] & {}^0\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r, "\partial^0"] & 0 & \\
 & {}^{-1}\Pi \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\partial^{-1}"] & {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} p\,\partial \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\partial^0"] & {}^1\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} p \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & & {}^0\Pi \arrow[u, "q_0"] \arrow[r, "\partial^0"] & {}^1\mathfrak{z} \arrow[u, "q_0"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{18.5}
$$

Установив точность левого столбца, мы докажем нашу лемму для случая $\nu = -1$. Из леммы 1 следует точность второй и четвертой строк. Докажем точность третьей строки. Отображение ∂^{-1} этой строки совпадает с отображением ∂^{-1} последовательности (7) и поэтому является гомоморфизмом. Ядро отображения ∂^0 совпадает с подсемейством ${}^0\mathfrak{Z}$. Поэтому алгебраическая точность третьей строки в члене ${}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} p\partial$ следует из точности (7). Из точности (7) вытекает также, что отображение ∂^0 есть эпиморфизм. Остается показать, что это отображение есть гомоморфизм. Для этого мы рассмотрим еще одну коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^0\Pi/{}^0\mathfrak{Z} \arrow[r, "\partial^0"] & {}^1\mathfrak{Z} \\
 & {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} p\partial/{}^0\mathfrak{Z} \arrow[u] \arrow[r, "\breve{\partial}^0"] & {}^1\mathfrak{Z} \cap \operatorname{Ker} p \arrow[u] \\
 & & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме все отображения, за исключением, быть может, интересующего нас отображения $\breve{\partial}^0$ суть гомоморфизм. Отразив эту диаграмму от биссектрисы первой координатной четверти, мы получим диаграмму типа диаграммы (2.2) гл. I с $M_1 = 0$. Применив утверждение Б) леммы 1 § 2 гл. I, мы установим, что отображение $\breve{\partial}^0$ также является гомоморфизмом. Тем самым точность третьей строки диаграммы (18) полностью доказана.

Перейдем к столбцам диаграммы (18). Точность третьего столбца вытекает из свойства левого столбца диаграммы (16). Точность второго столбца в члене ${}^0\mathfrak{Z} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ следует из леммы 2, а его точность в члене ${}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} p\partial$ вытекает из точности последовательности (17) с $j = 0$. Таким образом, мы снова вправе применить теорему 1 § 2 гл. I, из которой следует точность первого столбца. Тем самым мы установили точность (14) с $\nu = -1$.

Основываясь на доказанном, мы установим точности последовательности (14) для любого $\nu \geqslant 0$. Из точности (14) с $\nu = -1$ следует, что существует непрерывный оператор

$$B\colon\ {}^{-1}\Pi_1 \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \to {}^{-1}\Pi_a/{}^{-1}\Pi_a \cap \operatorname{Ker} p, \qquad a \geqslant 1,$$

такой, что композиция $pB\colon\ {}^{-1}\Pi_1 \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \to {}^{-1}\Pi_{a+\mu} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ есть тождественное отображение. В соответствии с предложением 1 оператор B порождает серию операторов

$$B_{Z,\,R}\colon\ E_1^{Z,\,R} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \to E_a^{Z,\,R}/E_a^{Z,\,R} \cap \operatorname{Ker} p$$

таких, что композиция $pB_{Z,R}$ есть тождественное отображение для любых Z и R, причем

$$\|B_{Z,R}\| \leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{a-1}. \tag{19.5}$$

Зафиксируем величины $\nu \geqslant 0$, α, Z и R. Пусть натуральное b выбрано так, что $2^{-b} \leqslant \frac{b}{3\alpha(\alpha+b)}$. Тогда

$$\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha+b} \leqslant \frac{1}{3}\rho\left(e^{Z,R}_{\alpha+b}, \mathbf{C}e^{Z,R}_{\alpha}\right),$$

так как $R^1 \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому, если шар V_z покрытия $U^{Z,R}_{\alpha+b}$ пересекается с эллипсоидом $e^{Z,R}_{\alpha+b}$, то шар $2V_z$ принадлежит $e^{Z,R}_{\alpha}$. Так как $b \geqslant 2$, то $V_z \subset \frac{1}{4}U_z$, где U_z — шар покрытия $U^{Z,R}_{\alpha}$. Пусть $z_0, \ldots, z_\nu$ — произвольные точки такие, что пересечение $V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap e^{Z,R}_{\alpha+b}$ не пусто. Из сказанного выше вытекают включения

$$V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap e^{Z,R}_{\alpha+b} \subset V_{z_0} \subset e^{z_0,r}_{a} \subset e^{z_0,r}_{1} =$$
$$= 2V_{z_0} \subset U_{z_0} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \cap e^{Z,R}_{\alpha}, \text{ где } r = r\left(U^{Z,R}_{\alpha+b}\right) = \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{\alpha+b}.$$

Пусть $\varphi = \sum \varphi_{z_0,\ldots,z_\nu} U_{z_0} \wedge \ldots \wedge U_{z_\nu}$ — произвольный элемент пространства ${}^{\nu}E^{Z,R}_{\alpha} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$. Сужение функции $\varphi_{z_0,\ldots,z_\nu}$ на шаре $e^{z_0,r}_{1}$ есть элемент пространства $E^{z_0,r}_{1} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$. Применив к этому элементу оператор $B_{z_0,r}$, мы получим некоторый класс смежностей $\in E^{z_0,r}_{a}/E^{z_0,r}_{a} \cap \operatorname{Ker} p$. Пусть $\psi_{z_0,\ldots,z_\nu}$ — произвольный элемент этого класса. Из (19)

$$\inf\left\{\sup_{e^{z_0,r}_{a}} |\psi_{z_0,\ldots,z_\nu} - \chi|, \ \chi \in E^{z_0,r}_{a} \cap \operatorname{Ker} p\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{|z_0|+1}{r}\right)^{a-1} \sup_{e^{z_0,r}_{1}} |\varphi_{z_0,\ldots,z_\nu}|. \tag{20.5}$$

Сужая каждую функцию $\psi_{z_0,\ldots,z_\nu}$ в области $V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap e^{Z,R}_{\alpha+b}$, мы построим коцепь $\psi = \sum \psi_{z_0,\ldots,z_\nu} V_{z_0} \wedge \ldots \wedge V_{z_\nu}$ на покрытии $U^{Z,R}_{\alpha+b} \cap e^{Z,R}_{\alpha+b}$. (Мы можем, конечно, считать, что функция $\psi_{z_0,\ldots,z_\nu}$ кососимметрично зависит от своих индексов.) Из свойства оператора $B_{z_0,r}$

$$p\psi = \varphi. \tag{21.5}$$

В силу неравенства (20)

$$\inf\{\|\psi-\chi\|_{a+b}^{Z,R},\ \chi\in{}^{\nu}E_{a+b}^{Z,R}\cap\operatorname{Ker}p\}\leqslant C\sup_{e_{\alpha}^{Z,R}}\left(\frac{|z_0|+1}{r}\right)^{a-1}\|\varphi\|_{a}^{Z,R}. \tag{22.5}$$

Заметим, что слева стоит норма коцепи ψ как элемента фактор-пространства ${}^{\nu}E_{\alpha+b}^{Z,R}/{}^{\nu}E_{\alpha+b}^{Z,R}\cap\operatorname{Ker}p$. Оценим второй сомножитель правой части. Так как $|z_0-Z|\leqslant 1$, то $|z_0|+1\leqslant 2(|Z|+1)$. Учитывая это в (22) и подставляя выражение r, приходим к неравенству

$$^{*}\|\psi\|_{a+b}^{Z,R}\leqslant C'\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{q}\|\varphi\|_{a}^{Z,R}.$$

Отсюда в силу предложения 1 вытекает, что серия операторов $A_{Z,R}$: $\varphi\to\psi$ определяет непрерывный оператор

$$A^{\pi}\colon\ {}^{\nu}\Pi_{\alpha}\cap\operatorname{Ker}\mathscr{D}\to{}^{\nu}\Pi_{\alpha'},\quad \alpha'=\alpha+b+q,$$

причем из (21) следует, что композиция pA^{π} есть тождественное отображение. Тем самым точность последовательности (14) установлена при любом ν. ■

6°. Следствия леммы 3. Отметим два следствия, которые мы будем использовать в следующем параграфе.

Следствие 1. *Пусть $r(z)$ — некоторая степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, не превосходящая функции r_z, фигурирующей в следствии 1 § 4 гл. II. Тогда для любых Z и R и функции φ, голоморфной и ограниченной в $2e^{Z,R}$, имеет место равенство $\varphi=\varphi_{\mathscr{D}}+p\psi$, где $\varphi_{\mathscr{D}}$ и ψ — функции, голоморфные в $e^{Z,R}$, причем*

$$\sup_{e^{Z,R}}|\varphi_{\mathscr{D}}|\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^{q}\sup\left\{r(z)\sup_{|\xi|\leqslant R^{\nu}r(z)}|\mathscr{D}(z,\xi)\varphi(z)|,\ z\in 2e^{Z,R},\ r(z)\geqslant\right.$$

$$\left.\geqslant c\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^{q}\right\} \tag{23.5}$$

с некоторыми константами C, c и q, не зависящими от Z и R.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (16) целиком. В силу леммы 3 все ее столбцы, начиная со второго, точны. Из леммы 1 вытекает точность всех строк, начиная с третьей. Очевидно, что вторая строка алгебраически точна, а отображение i есть гомоморфизм. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, устанавливаем точность левого столбца этой диаграммы.

Рассмотрим новую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
{}^0\mathfrak{z} \arrow[u] \arrow[r] & {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial / {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
{}^0\mathfrak{z} \arrow[u] \arrow[r] & {}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & {}^1\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & {}^0\Pi \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\partial"] & {}^1\mathfrak{z} \arrow[u, "p"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Точность третьего столбца этой диаграммы следует из точности левого столбца диаграммы (16). Точность второго столбца вытекает из леммы 3. Точность третьей строки следует из леммы 1. Рассмотрим вторую строку. Ее алгебраическая точность в члене ${}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial$ очевидна. Отображение ∂ второй строки есть эпиморфизм, поскольку из леммы 1 $\partial({}^0\Pi \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial) = {}^1\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}$. Отображение ∂ есть гомоморфизм, так как отображение ∂^0 последовательности (7) является гомоморфизмом. Таким образом, мы установили точность второй строки. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, мы заключаем, что первая строка также точна. Из точности первой строки следует, что для любого α существует непрерывный оператор

$$I\colon\ {}^0\Pi_\alpha \cap \mathcal{D}\partial / {}^0\Pi_\alpha \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \to {}^0\mathfrak{z}_\beta / {}^0\mathfrak{z}_\beta \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}, \qquad \beta = \beta(\alpha),$$

обратный тождественному отображению. Рассуждения, аналогичные предложению 1, показывают, что оператор I порождает серию операторов

$$I_{Z,R}\colon\ {}^0E_\alpha^{Z,R} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial / {}^0E_\alpha^{Z,R} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \to {}^0\mathfrak{z}_\beta^{Z,R} / {}^0\mathfrak{z}_\beta^{Z,R} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}, \tag{24.5}$$

нормы которых оцениваются функцией вида $C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^q$.

Пусть φ — произвольная функция, принадлежащая $E_1^{Z,R}$. Применим к ней рассуждения леммы 2. Из разложения (11) $\partial\chi' = -p\partial\psi'$. Поэтому коцепь χ' принадлежит пространству ${}^0E_{\alpha'}^{Z,R} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}\partial$. Заменим в (24) α на α' и рассмотрим коцепь χ' как элемент фактор-пространства, стоящего слева. Пусть $\varphi' \in {}^0\mathfrak{z}_{\beta'}^{Z,R}$, $\beta' = \beta(\alpha')$ — коцепь, пробегающая образ χ' при отображении $I_{Z,R}$. Из оценки нормы оператора $I_{Z,R}$ вытекает неравенство

$$\inf \|\varphi'\|_{\beta'}^{Z,R} \leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^q \|\chi'\|_{\alpha'}^{Z,R}. \tag{25.5}$$

Из свойства оператора $I_{Z,R}$ вытекает равенство

$$\mathcal{D}(\partial\varphi - \varphi') = 0. \tag{26.5}$$

Из неравенства (25) следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти коцепь $\varphi' \in I_{Z,\,R}\chi'$ такую, что

$$\|\varphi'\|_{\beta'}^{Z,\,R} \leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^q \|\chi'\|_{\alpha'}^{Z,\,R} + \varepsilon. \tag{27.5}$$

Если первое слагаемое правой части отлично от нуля, то мы можем считать, что ε равно этому слагаемому. В таком случае мы получим неравенство

$$\|\varphi'\|_{\beta'}^{Z,\,R} \leqslant 2C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^q \|\chi'\|_{\alpha'}^{Z,\,R}. \tag{28.5}$$

Предположим теперь, что первое слагаемое правой части (27) равно нулю. Тогда из (11) $\partial\varphi = p\psi'$ и, следовательно, $\mathscr{D}(z)\varphi(z) \equiv 0$ в $e_{\alpha'}^{Z;\,R}$. Поэтому мы можем положить $\varphi' \equiv 0$, что снова приводит нас к (26) и (28). Через $\varphi_{\mathscr{D}} \in E_{\beta'}^{Z,\,R}$ обозначим такую функцию, что $\varphi' = \partial\varphi_{\mathscr{D}}$.

Оценим величину $\|\chi'\|_{\alpha'}^{Z,\,R}$ с помощью неравенства (12). Заметим, что при построении разложения (11) мы можем заменить функцию r_z на $r(z)$, так как по условию функция $r(z)$ обладает тем свойством функции r_z, которое было использовано в 4°. Поэтому из (12) мы можем извлечь неравенство

$$\|\chi'\|_{\alpha'}^{Z,\,R} \leqslant C\left(\frac{|Z|+1}{R}\right)^Q \times$$
$$\times \sup\left\{r(z) \sup_{|\xi| \leqslant \varepsilon r(z)} |\mathscr{D}(z,\,\xi)\varphi(z)|,\ z \in e_1^{Z,\,R},\ r(z) \geqslant \left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^Q\right\}.$$

Это неравенство в сочетании с (28) дает (23). Из (26) следует, что $\varphi - \varphi_{\mathscr{D}} \in E_{\beta'}^{Z,\,R} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Поэтому в силу леммы 3 $\varphi - \varphi_{\mathscr{D}} = p\psi$, где $\psi \in E_{\beta''}^{Z,\,R}$. ■

Следствие 2. *Пусть V — некоторое элементарное покрытие параметра нуль и φ — некоторая коцепь нулевого порядка на этом покрытии, голоморфная и ограниченная на некотором открытом шаре S такая, что $\mathscr{D}\partial\varphi = 0$. Тогда в шаре $\frac{1}{2}S$ существует ограниченная голоморфная функция ψ такая, что $\mathscr{D}(\varphi - \partial\psi) = 0$.*

Доказательство. Коцепь φ по условию принадлежит пространству ${}^cE_1^{z,\,r} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}\partial$, где z — центр шара S, а $2r$ — его радиус. Пусть $\psi' \in {}^0\mathfrak{Z}_{\beta(1)}^{Z,\,R}$ — произвольный представитель класса $I_{z,\,r}\varphi$. Легко видеть, что функция $\psi \in E_{\beta(1)}^{z,\,r}$ такая, что $\partial\psi = \psi'$ является искомой. ■

7°. Лемма 4. *Для любого семейства мажорант $\mathcal{M}$ и целого $\nu \geqslant 0$ точна последовательность*

$$[{}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s} \xrightarrow{p} [{}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \to 0. \tag{29.5}$$

Доказательство этой леммы аналогично рассуждениям 6°. Зафиксируем целые числа $\nu \geqslant 0$ и α. Положим $U_\alpha = \{U_z\}$ и $U_{\alpha+2} = \{V_z\}$. Пусть точки $z_0, \ldots, z_\nu$ таковы, что пересечение $V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap \Omega_{\alpha+2}$ не пусто. Поскольку $r(U_{\alpha+2}) \leqslant \frac{1}{4} r(U_\alpha) = \frac{\varepsilon_\alpha}{4}$, имеют место включения

$$V_{z_0} \cap \ldots \cap V_{z_\nu} \cap \Omega_{\alpha+2} \subset V_{z_0} \subset e_a^{z_0, r} \subset e_1^{z_0, r} =$$
$$= 2V_{z_0} \subset U_{z_0} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \cap \Omega_\alpha, \quad r = r(U_{\alpha+2}).$$

Пусть φ — произвольная коцепь из пространства ${}^{\nu}\mathcal{H}_\alpha(U_\alpha) \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}$ и $\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ — ее компонента, отвечающая областям $U_{z_0}, \ldots, U_{z_\nu}$. К ее сужению на $e_1^{z_0, r}$ применим оператор $B_{z_0, r}$, построенный в п. 5°. Пусть $\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ — некоторый представитель класса $B_{z_0, r}\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}$. Из неравенства (19)

$$\inf\left\{\sup_{e^{z_0, r}} \left|\psi_{z_0, \ldots, z_\nu} - \chi\right|, \ \chi \in E_a^{z_0, r}\right\} \leqslant C(|z_0| + 1)^{a-1} \sup_{e_1^{z_0, r}} \left|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}\right|.$$

Отсюда, поскольку $r < \varepsilon_{\alpha+1} < \varepsilon_\alpha$,

$$\inf_\chi \sup \frac{|\psi_{z_0, \ldots, z_\nu} - \chi|}{(|z| + 1)^{a-1} M_{\alpha+2}(z)} \leqslant C \sup \frac{|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}|}{M_\alpha(z)}.$$

Полагая $\psi = \sum \psi_{z_0, \ldots, z_\nu} V_{z_0} \wedge \ldots \wedge V_{z_\nu}$ (мы выбираем $\psi_{z_0, \ldots, z_\nu}$ так, чтобы эта функция кососимметрично зависела от $z_0, \ldots, z_\nu$), приходим к неравенству

$$\inf \|\psi - \chi\|^0_{\alpha', U_{\alpha'}} \leqslant C \|\varphi\|^0_{\alpha, U_\alpha}, \quad \alpha' = \alpha + a + 1, \tag{30.5}$$

где нижняя грань берется по коцепям $\chi \in {}^{\nu}\mathcal{H}_{\alpha'}(U_{\alpha'})$ таким, что $p\chi = 0$. Из свойства оператора $B_{z_0, r}$, $p\psi = \varphi$. Это соотношение в сочетании с неравенством (30) влечет точность последовательности (29). ■

8°. Доказательство теоремы. Пусть $\mathcal{M}$ — семейство мажорант типа $\mathcal{J}$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & {}^{\delta+2}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "q_\delta"] & {}^{\delta+2}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "q_{\delta-1}"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & {}^{\delta+1}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "q_\delta"] & {}^{\delta+1}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "q_{\delta-1}"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & {}^{\delta}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "q_\delta"] & {}^{\delta}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "q_{\delta-1}"] & \ldots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots \arrow[r, "q_1"] & {}^{1}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "q_0"] & {}^{1}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & {}^{1}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r, "q_1"] & {}^{0}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "q_0"] & {}^{0}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p"] & {}^{0}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r, "q_1"] & \mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "q_0"] & \mathscr{H}_{\mathcal{M}} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \mathscr{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{31.5}
$$

где q_j, $j = 0, \ldots, \delta$, суть $\mathscr{P}$-матрицы из (15). Так как для любого $j = 0, \ldots, \delta$ ${}^{v}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}^j = {}^{v}\mathscr{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} q_{j-1}$, точность всех строк, кроме нижней, вытекает из леммы 4. Точность всех столбцов, кроме правого, вытекает из следствия 2 § 4. Очевидно, что правый столбец точен в двух нижних членах. Применяя теорему 1 § 2 гл. I к выделенному фрагменту, мы устанавливаем точность нижней строки в последнем члене. ■

9°. Замечание и следствие. Отображение

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \to \mathcal{H}_{\mathcal{M}} / \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} p, \tag{32.5}$$

обратное отображению p, построенное в этой теореме, имеет порядок, не зависящий от семейства мажорант $\mathcal{M}$. Действительно, для любого $\nu \geqslant 0$ отображение p^{-1}: ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D} \to {}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} / {}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \cap \operatorname{Ker} p$, построенное в лемме 4, имеет порядок $\alpha \to \alpha + a + 1$, не зависящий от $\mathcal{M}$. Поэтому аналогичные отображения q_j^{-1} также имеют порядки, не зависящие от $\mathcal{M}$. Из замечания § 4 следует, что отображения, обратные отображениям ∂ столбцов диаграммы (31) (кроме последнего столбца), имеют порядки, не зависящие от $\mathcal{M}$. Поэтому на основании замечания § 2 гл. I мы заключаем, что порядок отображения (32) также не зависит от $\mathcal{M}$.

Следствие 3. *Правый столбец диаграммы* (31) *точен.*

Действительно, как мы установили, все остальные столбцы и все строки этой диаграммы точны. Чтобы установить точность правого столбца, достаточно применить теорему 1 § 2 гл. I. ■

Глава IV

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Центральное место в этой главе занимает изучение нетеровских операторов: §§ 3 и 4. Их роль определяется теоремой § 3, доказательство которой основано на конструкции § 2. Результаты этих параграфов в комбинации с теоремой о тривиальности когомологий, полученной в предыдущей главе, приводят к теореме 2 § 5, которая содержит описание факторпространств $\mathscr{H}^t_{\mathscr{M}}/p\mathscr{H}^s_{\mathscr{M}}$ в терминах нетеровских операторов, локализованных на многообразии N. Основная теорема, находящаяся в § 5, представляет результат теоремы 2 в инвариантном виде.

§ 1. Некоторые свойства конечных $\mathscr{P}$-модулей

1°. Примарные представления. В этом пункте мы напомним некоторые известные определения и теоремы*). Через $\mathscr{P}$ мы продолжаем обозначать кольцо всех полиномов с комплексными коэффициентами от переменных $z \in C^n$. Пусть $\mathscr{J}$ — некоторый идеал в кольце $\mathscr{P}$. Через $N(\mathscr{J})$ обозначим алгебраическое многообразие в C^n, образованное общими корнями многочленов, принадлежащих $\mathscr{J}$. Если N — некоторое алгебраическое многообразие в C^n, то через $\mathscr{J}(N)$ мы обозначим идеал в $\mathscr{P}$, образованный всеми многочленами, обращающимися в нуль на N. Идеал $\mathscr{J} \subset \mathscr{P}$ называется простым, если из $fg \in \mathscr{J}$, где f и g — многочлены, вытекает, что, по крайней мере, один из этих многочленов принадлежит $\mathscr{J}$. Многообразие N неприводимо тогда и только тогда, когда идеал $\mathscr{J}(N)$ простой.

Зафиксируем некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль E. Пусть $\mathfrak{p}$ — подмодуль модуля E. *Радикалом подмодуля* $\mathfrak{p}$ называется идеал $\mathfrak{r}_E(\mathfrak{p})$ в $\mathscr{P}$, образованный многочленами f, обладающими следующим свойством: существует натуральное ρ такое, что $f^\rho F \in \mathfrak{p}$ для любого $F \in E$. *Алгебраическое многообразие* $N(\mathfrak{p}) \overset{\text{опр.}}{=} N(\mathfrak{r}_E(\mathfrak{p}))$ назовем *ассоциированным с подмодулем* $\mathfrak{p}$. Подмодуль $\mathfrak{p}$ называется *при-*

*) См., например, Зарисский и Самюэль [1].

марным, если из включения $fF \in \mathfrak{p}$, где $f \in \mathscr{P}$, а $F \in E$, вытекает, что либо $F \in \mathfrak{p}$, либо $f \in \mathfrak{r}_E(\mathfrak{p})$. Радикал примарного подмодуля $\mathfrak{p}$ является простым идеалом, следовательно, ассоциированное с $\mathfrak{p}$ многообразие $N(\mathfrak{p})$ неприводимо. Всякий идеал $\mathscr{J}$ в кольце $\mathscr{P}$ можно рассматривать как подмодуль модуля $\mathscr{P}$. Ассоциированное с ним многообразие совпадает с многообразием $N(\mathscr{J})$, введенным выше.

Каждый подмодуль $\mathfrak{p} \subset E$ имеет, по крайней мере, одно приведенное примарное представление, т. е. может быть представлен в виде пересечения

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l \tag{1.1}$$

примарных подмодулей $\mathfrak{p}_\lambda \subset E$, $\lambda = 0, \ldots, l$, таким образом, что ни один из этих модулей не содержит пересечения других и все идеалы $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$ различны. При этом идеалы $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$ определяются по модулю $\mathfrak{p}$ однозначно. *Совокупность многообразий* $N^\lambda \overset{\text{опр.}}{=} N(\mathfrak{p}_\lambda)$, $\lambda = 0, \ldots, l$, мы назовем *ассоциированной с подмодулем* $\mathfrak{p} \subset E$. Если разложение (1) фиксировано, то модули $\mathfrak{p}_\lambda$ называются примарными компонентами подмодуля $\mathfrak{p}$.

Пусть N — некоторое алгебраическое многообразие в C^n. Напишем приведенное примарное представление для идеала $\mathscr{J}(N)$, который рассматриваем как подмодуль $\mathscr{P}$. Тогда $N = \bigcup N^\lambda$ есть разложение этого многообразия на неприводимые компоненты.

Пусть M — произвольный конечный $\mathscr{P}$-модуль. *Многообразием, ассоциированным с модулем* M, мы назовем многообразие $N(M) \overset{\text{опр.}}{=} N(\mathfrak{r}_M(0))$, ассоциированное с его нулевым подмодулем. Пусть

$$0 = M_0 \cap \ldots \cap M_l$$

— приведенное примарное представление этого подмодуля. Из сказанного выше следует, что совокупность многообразий $N^\lambda = N(\mathfrak{r}_M(M_\lambda))$, ассоциированных с подмодулями M_λ модуля M, зависит лишь от модуля M. Эту совокупность назовем *ассоциированной* с M. Понятия многообразий, ассоциированных с подмодулем и модулем, связаны между собой следующим образом.

Предложение 1. *Пусть $M \cong E/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — некоторый подмодуль модуля E. Тогда совокупность многообразий N^λ, ассоциированная с модулем M, совпадает с совокупностью многообразий, ассоциированной с подмодулем $\mathfrak{p} \subset E$.*

Доказательство. Пусть (1) — приведенное примарное представление подмодуля $\mathfrak{p}$. Профакторизовав это равенство по модулю $\mathfrak{p}$, мы получим следующее равенство:

$$0 = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l/\mathfrak{p}$$

подмодулей M. Покажем, что это равенство есть приведенное примарное представление нулевого подмодуля модуля M. Установим сначала, что каждый подмодуль $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p} \subset M$ примарный. Пусть $fF \in \mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}$, где $f \in \mathcal{P}$, а $F \in M \setminus \mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}$. Выберем некоторый представитель $F' \in F$. Так как $fF' \in \mathfrak{p}_\lambda$, но $F' \bar{\in} \mathfrak{p}_\lambda$, то $f \in \mathfrak{r}_E(\mathfrak{p}_\lambda)$. Обратно, всякий многочлен из идеала $\mathfrak{r}_E(\mathfrak{p}_\lambda)$, очевидно, принадлежит $\mathfrak{r}_M(\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p})$. Отсюда следует, что каждый подмодуль $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}$ примарный и $\mathfrak{r}_M(\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}) = \mathfrak{r}_E(\mathfrak{p}_\lambda)$. Остается показать, что ни один из модулей $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}$ не содержит пересечения других. Это вытекает из того, что ни один из модулей $\mathfrak{p}_\lambda$ не содержит пересечения других модулей $\mathfrak{p}_\lambda$. ■

Предложение 2. *Пусть p: $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$ — произвольная $\mathcal{P}$-матрица, а $M = \mathcal{P}^t/p\mathcal{P}^s$. Тогда совпадают следующие четыре множества в C^n:*

1) *многообразие $N(M)$, ассоциированное с M,*

2) *множество точек z, в которых $M \otimes \mathcal{O}_z \neq 0$,*

3) *множество точек z, в которых* $\operatorname{rang} p(z) < t$,

4) *множество, на котором p-оператор $\mathcal{D}(z)$ $(m = n)$ отличен от нуля.*

Доказательство. Эти множества мы обозначим соответственно через N_1, N_2, N_3, N_4. Мы последовательно установим включения

$$N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset N_4 \supset N_1.$$

Прежде чем перейти к их доказательству, отметим следующие изоморфизмы:

$$M \otimes \mathcal{O}_z \cong \mathcal{P}^t \otimes \mathcal{O}_z / p\mathcal{P}^s \otimes \mathcal{O}_z \cong \mathcal{O}_z^t / p\mathcal{O}_z^s. \tag{2.1}$$

Они следуют из результатов 2° § 3 гл. I, поскольку $\mathcal{O}_z$ — плоский $\mathcal{P}$-модуль (см. предложение 3 § 1 гл. II).

Установим первое включение $N_1 \supset N_2$. Пусть $z \bar{\in} N_1$; тогда существует многочлен $f \in \mathcal{P}$, отличный от нуля в точке z, такой, что $f\mathcal{P}^t \subset p\mathcal{P}^s$. Поскольку $f(z) \neq 0$, то функция f^{-1} принадлежит $\mathcal{O}_z$. Поэтому для любого $\varphi \in \mathcal{O}_z^t$ мы имеем

$$\varphi = \varphi f^{-1} \cdot f \subset p\mathcal{O}_z^s.$$

Отсюда, учитывая (2), мы заключаем, что $M \otimes \mathcal{O}_z = 0$, т. е. $z \bar{\in} N_2$, что доказывает первое включение.

Перейдем ко второму. Пусть $z \in N_3$. Тогда $\operatorname{rang} p(z) < t$, и, следовательно, существует вектор $\zeta \in C^t$, не представимый в виде $p(z)\lambda$, где $\lambda \in C^s$. Рассматривая этот вектор как элемент пространства $\mathcal{O}_z^t$, мы заключаем, что он не принадлежит подпространству $p\mathcal{O}_z^s$. Отсюда $\mathcal{O}_z^t \neq p\mathcal{O}_z^s$ и, следовательно, $M \otimes \mathcal{O}_z \neq 0$, т. е. $z \in N_2$, ч. и т. д.

Докажем третье включение: $N_3 \supset N_4$. Пусть $z \in N_4$; в таком случае $\mathcal{D}(z) \neq 0$ и, следовательно, базисное множество $\mathcal{J}(z)$ не совпадает с Z_+^n (см. замечание 2 § 4 гл. II). Поэтому нулевой коэффициент $\mathscr{D}_0(z)$ оператора $\mathscr{D}(z)$ отличен от нуля. Из неравенства (29.4) гл. II следует, что функционал $\mathscr{D}_0(z)$ имеет нулевой порядок, т. е. равен $v'\delta_0$, где $v \in C^t$. Из свойства p-оператора вытекает, что $\mathscr{D}_0(z)\, p(z)\varphi = 0$ для любого $\varphi \in \mathscr{E}_z^s$, откуда $v'p(z) = 0$, что влечет неравенство $\operatorname{rang} p(z) < t$.

Установим последнее включение: $N_4 \supset N_1$. Пусть $z \in N_4$, т. е. $\mathscr{D}(z) = 0$. Пусть, далее, $\{e_\tau\}$ — канонический базис модуля $\mathscr{P}^t$ (т. е. совокупность столбцов единичной матрицы). При любом τ мы имеем $\mathscr{D}(z)\, e_\tau = 0$, откуда согласно следствию 1 § 4 гл. II $e_\tau \in p\mathscr{E}_z^s$. Поэтому из предложения 4 § 1 гл. II вытекает, что столбцы e_τ принадлежат pR_z^s, где R_z — кольцо рациональных функций в C^n со знаменателями, не равными нулю в точке z. Следовательно, можно подобрать такой многочлен f, отличный от нуля в z, что $fe_\tau \in p\mathscr{P}^s$ для любого τ. Откуда $f\mathscr{P}^t \subset p\mathscr{P}^s$, следовательно, $f \in \mathfrak{r}(M)$. Так как $f(z) \neq 0$, точка z не принадлежит многообразию $N(M)$, ч. и т. д. ■

Множество, о котором идет речь в предложении 2, мы будем называть также *многообразием, ассоциированным с матрицей p*, и обозначим его через $N(p)$. Таким образом, для любой $\mathscr{P}$-матрицы p термины: многообразие, ассоциированное с p, многообразие, ассоциированное с подмодулем $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$, и многообразие, ассоциированное с модулем $M = \mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s$, имеют одинаковый смысл.

Предложение 3*). *Пусть M и L — произвольные конечные $\mathscr{P}$-модули. Тогда*

$$N(M \otimes L) = N(M) \cap N(L).$$

2°. Разложение p-оператора, отвечающее разложению подмодуля $p\mathscr{P}^s$.

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{P}$-матрицы p, p_1 и p_2 размеров $t \times s$, $t \times s_1$ и $t \times s_2$ таковы, что*

$$p\mathscr{P}^s = p_1\mathscr{P}^{s_1} \cap p_2\mathscr{P}^{s_2}. \tag{3.1}$$

Пусть, далее,

$$\mathscr{D},\ \mathscr{G};\ \mathscr{D}_1,\ \mathscr{G}_1;\ \mathscr{D}_2,\ \mathscr{G}_2;\ \mathscr{D}_{12},\ \mathscr{G}_{12}$$

— операторы, отвечающие соответственно $\mathscr{P}$-матрицам p, p_1, p_2 и $p_1 \oplus p_2$ (с $m = n$). В таком случае имеет место равенство

$$\mathscr{D} = \Lambda_1\mathscr{D}_1 + \Lambda_2\mathscr{D}_2,$$

где Λ_1 и Λ_2 — некоторые многочлены с целочисленными коэффициентами от операторов $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{G}_{12}$, p_1, p_2 и проекционного оператора π_1: $\mathscr{G}^{s_1+s_2} \to \mathscr{G}^{s_1}$.

---

*) Доказательство следует из Серр [4], предложение 10 гл. I.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z \in C^n$ и положим $\mathscr{D} = \mathscr{D}(z)$, $\mathscr{G} = \mathscr{G}(z)$ и т. д. Пусть φ — произвольный элемент пространства $\mathscr{S}^t$. Из равенства

$$\varphi - \mathscr{D}_1\varphi = p_1\mathscr{G}_1\varphi = \mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) + p_2\mathscr{G}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) \tag{4.1}$$

видно, что ряд $\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi)$ принадлежит арифметической сумме подпространств

$$p_1\mathscr{S}^{s_1} + p_2\mathscr{S}^{s_2} = (p_1 \oplus p_2)\, \mathscr{S}^{s_1+s_2},$$

следовательно,

$$\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) = (p_1 \oplus p_2)\, \mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) =$$
$$= p_1\pi_1\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) + p_2\pi_2\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi).$$

Подставим это выражение в правую часть (4) и перенесем слагаемое $p_1\pi_1\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi)$ влево. В результате мы получим равенство

$$\varphi' \overset{\text{опр.}}{=} \varphi - \mathscr{D}_1\varphi - p_1\pi_1\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) =$$
$$= p_1\mathscr{G}_1\varphi - p_1\pi_1\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) =$$
$$= p_2\pi_2\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi) + p_2\mathscr{G}_2(\varphi - \mathscr{D}_1\varphi), \tag{5.1}$$

из которого следует, что ряд φ' принадлежит пересечению $p_1\mathscr{S}^{s_1} \cap p_2\mathscr{S}^{s_2}$. Так как $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{S}$ плоский, то $p\mathscr{S}^s = p\mathscr{P}^s \otimes \mathscr{S}$ для любой $\mathscr{P}$-матрицы p (см. 2° § 3 гл. I). Поэтому из равенства (3) и предложения 4 § 3 гл. I следует, что пересечение $p_1\mathscr{S}^{s_1} \cap p_2\mathscr{S}^{s_2}$ совпадает с $p\mathscr{S}^s$. Отсюда $\mathscr{D}\varphi' = 0$. Поэтому, применив оператор $\mathscr{D}$ к левой части (5), мы получим соотношение

$$\mathscr{D}\varphi = (\mathscr{D} - \mathscr{D}p_1\pi_1\mathscr{G}_{12}\mathscr{D}_2)\,\mathscr{D}_1\varphi + (\mathscr{D}p_1\pi_1\mathscr{G}_{12})\,\mathscr{D}_2\varphi,$$

которое является искомым разложением. ■

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{P}$-матрицы $p, p_0, \ldots, p_l$ таковы, что*

$$p\mathscr{P}^s = p_0\mathscr{P}^{s_0} \cap \ldots \cap p_l\mathscr{P}^{s_l}.$$

Тогда p-оператор $\mathscr{D}$ допускает следующее разложение:

$$\mathscr{D} = \sum \Lambda_\lambda \mathscr{D}^\lambda, \tag{6.1}$$

где $\mathscr{D}^\lambda$, $\lambda = 0, \ldots, l$, — p_λ-оператор, а Λ_λ — некоторые операторы в $\mathscr{S}^t$, обладающие следующим свойством: для любого $z \in C^n$ и δ, $0 < \delta \leqslant 1$, $\Lambda_\lambda(z)$ есть непрерывный оператор из $\mathfrak{S}_\delta^t$ в $\mathfrak{S}_{\delta\rho}^t$ с нормой, не превосходящей $\delta^{-q}\rho^{-1}$, где $\rho = \rho(z)$ — некоторая степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, а $q \geqslant 1$ — константа.

Доказательство. Многократно применяя предложение 4, мы получим разложение (6), в котором Λ_λ суть некоторые многочлены от операторов, отвечающих матрицам p_λ, $p_0 \oplus \ldots \oplus p_\lambda$, $\lambda = 0, \ldots, l$, самих этих матриц и проекционных операторов, определяющих разложение $\mathscr{S}^{s_0+\ldots+s_l}$ в прямую сумму $\mathscr{S}^{s_0} \oplus \ldots \oplus \mathscr{S}^{s_l}$. Каждый из таких операторов удовлетворяет условию: при любом δ, $0 < \delta \leqslant 1$, он действует из $\mathfrak{S}_\delta^\gamma$ в $\mathfrak{S}_{\delta\rho'}^\sigma$, где ρ' — степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, с нормой, не превосходящей $\delta^{-q'}\rho'^{-1}$, где q' — константа. Любой многочлен от таких операторов обладает аналогичным свойством в силу предложения 3 § 3 гл. II. ■

3°. Размерность $\mathscr{P}$-модулей и алгебраических многообразий. Пусть $N \subset C^n$ — некоторое алгебраическое многообразие. Число $d \geqslant 0$ называется *размерностью* N, если любой $d+1$ многочлен $f_1, \ldots, f_{d+1}$ является алгебраически зависимым в кольце $\mathscr{P}/\mathscr{J}(N)$ (т. е. существует многочлен $F \neq 0$ от $d+1$ переменного такой, что $F(f_1, \ldots \ldots, f_{d+1}) \equiv 0$) и существует d многочленов, не являющихся алгебраически зависимыми в $\mathscr{P}/\mathscr{J}(N)$. Если $\mathfrak{p}$ — подмодуль модуля E, его *размерностью* называется размерность ассоциированного многообразия $N(\mathfrak{p})$. Подмодуль $\mathfrak{p}$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность. Это определение не зависит от выбора представления (1), так как в нем фигурируют лишь радикалы примарных компонент. *Размерностью* конечного $\mathscr{P}$-модуля M называется размерность ассоциированного с ним многообразия $N(M)$.

Выберем некоторое целое число m, лежащее между 1 и n, и разобьем переменные z на две группы $v = (z_1, \ldots, z_m)$ и $w = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$. Пространство C^n представим в виде прямого произведения координатных подпространств $C_v = C^m$ и $C_w = C^{n-m}$.

Предложение 5. *Пусть $N \subset C^n$ — некоторое алгебраическое многообразие размерности d. Тогда либо*

I) *N принадлежит многообразию вида $C_v \times \mu$, где μ — собственное подмногообразие C_w, либо*

II) *переменные z можно разбить на две группы v' и $w' \in C^d$ так, что группа w' содержит группу w и существует собственное алгебраическое подмногообразие $\delta \subset C_{w'}$ такое, что множество $N \setminus N_\delta$, где $N_\delta = N \cap (C_{v'} \times \delta)$ в окрестности каждой своей точки является графиком голоморфной функции $v' = v'(w')$, где*

$$|\operatorname{grad} v'(w')| \leqslant c\theta^q(w', \delta)\,^{*)} \tag{7.1}$$

с некоторыми c и q, не зависящими от этой точки.

Доказательство. Допустим, что одночлены $z_{m+1}, \ldots, z_n$ как элементы кольца $\mathscr{P}/\mathscr{J}(N)$ алгебраически зависимы. Это означает,

---

*) Для любого множества $\Delta \subset C^n$ мы полагаем $\theta(\zeta, \Delta) = \rho(\zeta, \Delta)(|\zeta|+1)^{-2}$.

что существует многочлен $F(z_{m+1}, \ldots, z_n) \in \mathcal{J}(N)$, не равный тождественно нулю. Следовательно, имеет место случай I).

Предположим теперь, что одночлены $z_{m+1}, \ldots, z_n$ алгебраически независимы в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(N)$. Дополним их некоторыми из одночленов $z_1, \ldots, z_m$ — пусть для простоты одночленами $z_{h+1}, \ldots, z_m$ так, чтобы получилась максимальная система алгебраически независимых одночленов. Положим $v' = (z_1, \ldots, z_h)$ и $w' = (z_{h+1}, \ldots, z_n)$. Так как система w' максимальна, то $n - h = d$ и любой одночлен z_l с $l \leqslant h$ алгебраически зависит от одночленов w' в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(N)$, т. е. существует многочлен $f_l(z_l, w')$, принадлежащий идеалу $\mathcal{J}(N)$, т. е. обращающийся в нуль на N. Следовательно, многообразие N лежит внутри многообразия N', определяемого системой уравнений

$$f_1(z_1, w') = \ldots = f_h(z_h, w') = 0, \qquad h = n - d. \tag{8.1}$$

Пусть $d_l(w')$ — дискриминант многочлена f_l относительно z_l. Мы можем предполагать, что многочлены f_l не имеют кратных делителей и поэтому $d_l \not\equiv 0$. Пусть δ_l — многообразие корней d_l. Положим $\delta' = \bigcup \delta_l$. Выберем любую точку z, принадлежащую многообразию N', не лежащую на $C_{v'} \times \delta'$. Производная f_l по z_l в этой точке ни при каком l не обращается в нуль. Поэтому векторы $\operatorname{grad} f_l$, $l = 1, \ldots h$, в окрестности z линейно независимы. Следовательно, согласно теореме о неявной функции многообразие N' в окрестности z является графиком голоморфной функции $v' = v'(w') \overset{\text{опр.}}{=} (z_1(w'), \ldots z_h(w'))$, причем

$$\frac{\partial z_l(w')}{\partial z_j} = \frac{\partial f_l(z)}{\partial z_j} : \frac{\partial f_l(z)}{\partial z_l}, \qquad j = h+1, \ldots, n.$$

Так как знаменатель отличен от нуля на $N' \setminus (C_{v'} \times \delta)$, используя следствие 2 § 3 гл. I, мы можем оценить правую часть функцией вида $C\theta^q(z, C_{v'} \times \delta')$. Из тождества $f_l(z_l(w'), w') \equiv 0$ следует, что функция $|z_l(w')|$ оценивается величиной вида $C\theta^q(w', \delta')$. Отсюда

$$C\theta^q(z, C_{v'} \times \delta')|_{N'} \leqslant C\theta^q(w', \delta'),$$

что влечет неравенство (12), если $\delta \supset \delta'$.

Разложим многообразие N на неприводимые компоненты. Как известно, любое неприводимое многообразие размерности d в любой своей точке, за исключением некоторого собственного подмногообразия, является регулярной поверхностью размерности d. Пусть N_l — некоторая d-мерная неприводимая компонента многообразия N, а N_l^* — подмногообразие нерегулярных точек этой компоненты. Из сказанного следует, что множество $N_l \setminus N_l^*$ в окрестности любой своей точки совпадает с многообразием $N' \setminus (C_{v'} \times \delta')$. Попарные пересечения множеств вида $N_l \setminus N_l^*$ принадлежат $C_{v'} \times \delta'$, так как все точки многообразия $N' \setminus (C_{v'} \times \delta')$ регулярны. Если N_l — неприводимая компонента N размерности ниже d, то положим $N_i^* = N_i$. Пусть γ_i — проекция на $C_{w'}$ многообразия N_i^*. Положим $\gamma = \bigcup \gamma_i$ и $\delta = \delta' \bigcup \gamma$.

Остается показать, что δ есть собственное подмногообразие $C_{w'}$. Для этого достаточно установить, что размерность каждого из многообразий N_i^* меньше d. Действительно, если это так, то одночлены w' алгебраически зависимы в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(N_i^*)$, и, следовательно, существует не равный тождественно нулю многочлен $g(w') \in \mathcal{J}(N_i^*)$, откуда $\gamma_i \neq C_{w'}$. Покажем, что размерность каждого многообразия N_i^* меньше d. Если размерность компоненты N_i меньше d, то по определению $N_i^* = N_i$ и, следовательно, наше утверждение доказано. Если размерность N_i равна d, то наше утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть L — некоторое неприводимое многообразие размерности d, принадлежащее многообразию* (8). *Любое собственное подмногообразие $K \subset L$ имеет размерность, меньшую d.*

Доказательство. Так как по условию идеал $\mathcal{J}(K)$ строго больше идеала $\mathcal{J}(L)$, то существует многочлен $q \in \mathcal{J}(K) \setminus \mathcal{J}(L)$. Поскольку L принадлежит многообразию (8), одночлены z_l, $l \leqslant h$, алгебраически зависят от одночленов w' в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(L)$. Следовательно, многочлен q также алгебраически зависит от w' в этом кольце, т. е.

$$\lambda_k q^k + \ldots + \lambda_1 q + \lambda_0 \in \mathcal{J}(L), \tag{9.1}$$

где $\lambda_k, \ldots, \lambda_1, \lambda_0$ — некоторые многочлены от w', из которых хотя бы один не есть нуль. Если $\lambda_0 = 0$, то мы можем разделить левую часть (9) на q. Включение (9) сохранится, так как идеал $\mathcal{J}(L)$ простой и $q \notin \mathcal{J}(L)$. Поэтому мы можем считать, что λ_0 не есть нуль. Из (9) следует, что многочлен λ_0 принадлежит идеалу $\mathcal{J}(K)$, следовательно, одночлены w' алгебраически зависимы в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(K)$. ■

Многообразие N_δ мы будем называть *дискриминантным относительно переменных v'.*

4°. Нормально расположенные многообразия и модули.

Определение. Скажем, что *алгебраическое многообразие $N \subset C^n$ нормально расположено в данной системе координат в C^n*, если оно принадлежит многообразию корней системы уравнений

$$f_1(z_1, w') = \ldots = f_h(z_h, w') = 0, \qquad w' = (z_{h+1}, \ldots, z_n), \tag{10.1}$$

где f_l, $l = 1, \ldots, h$, — многочлен, коэффициент которого при старшей степени z_l равен единице, а $d = n - h$ — размерность N. Скажем, что *подмодуль $\mathfrak{p} \subset E$ нормально расположен*, если нормально расположено многообразие $N(\mathfrak{p})$.

Иными словами, многообразие N размерности d нормально расположено в C^n, если одночлены $z_1, \ldots, z_h$ являются целыми алгебраическими относительно величин w' в кольце $\mathcal{P}/\mathcal{J}(N)$. Как известно, такого положения можно всегда добиться, выбрав надлежащим образом систему координат, следовательно, для любого многообразия можно найти систему координат, в которой оно нормально расположено. Более того, системы координат, не обладающие этим свойством, образуют нигде не плотное подмножество *).

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{p} \subset E$ — некоторый подмодуль, причем многообразие $N(\mathfrak{p})$ принадлежит многообразию* (10). *Для того чтобы модуль $\mathfrak{p}$ был несмешанным размерности d, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $q(w') \not\equiv 0$ из $qF \in \mathfrak{p}$, $F \in E$ следовало $F \in \mathfrak{p}$.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что некоторая примарная компонента $\mathfrak{p}_\lambda$ модуля $\mathfrak{p}$ имеет размерность, меньшую d. Тогда существует многочлен $q(w') \in \mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$, не равный тождественно нулю. Так как представление (1) приведенное, множество $\bigcap_{\nu \neq \lambda} \mathfrak{p}_\nu \setminus \mathfrak{p}_\lambda$ не пусто. Пусть F — некоторый элемент этого множества. Из определения идеала $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$ следует, что $q^\rho F \in \mathfrak{p}_\lambda$ с некоторым натуральным ρ. Отсюда $q^\rho F \in \mathfrak{p}$, в то время как $F \bar{\in} \mathfrak{p}$. Достаточность установлена.

Необходимость. Предположим, что существует многочлен $q(w') \not\equiv 0$ и элемент $F \in E \setminus \mathfrak{p}$ такие, что $qF \in \mathfrak{p}$. Пусть для определенности $F \bar{\in} \mathfrak{p}_l$. Тогда $q \in \mathfrak{r}(\mathfrak{p}_l)$, поскольку модуль $\mathfrak{p}_l$ примарный. Это означает, что одночлены w' алгебраически зависимы в кольце $\mathcal{P}/\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_l)$. С другой стороны, согласно условию одночлены z_l, $l \leqslant h$, алгебраически зависят от одночленов w' в этом кольце. Следовательно, размерность идеала $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_l)$ меньше d. ■

5°. Сужение модулей на подпространствах в C^n. Через $\mathcal{P}_v$, $\mathcal{P}_{v'}$ и т. д. мы будем обозначать кольца многочленов с комплексными коэффициентами от переменных v, v' и т. д. В частности, $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}$. Для любой точки $W \in C_w$ определим отображение

$$\mathcal{P}^t \ni F \to F_W \in \mathcal{P}^t_v, \tag{11.1}$$

относящее вектор-многочлену F его сужение на подпространстве $w = W$. Это отображение есть отображение колец в случае $t = 1$ и модулей над этими кольцами в общем случае. Если $\mathfrak{p}$ — подмодуль $\mathcal{P}^t$, то через $\mathfrak{p}_W$ обозначим его образ при отображении (11). Очевидно, что $\mathfrak{p}_W$ есть подмодуль модуля $\mathcal{P}^t_v$. Если p: $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$ — некоторая $\mathcal{P}$-матрица, то через p_W обозначим $\mathcal{P}_v$-матрицу, являющуюся

*) См., например, Зарисский и Самюэль [1].

сужением p на подпространстве $w = W$. Предположим, что $\mathfrak{p} = p\mathscr{P}^s$, тогда $\mathfrak{p}_w = p_w\mathscr{P}_v^s$.

Лемма 2. *При любом W многообразие $N(\mathfrak{p}_W)$ совпадает с пересечением многообразия $N(\mathfrak{p})$ и подпространства $w = W$.*

Доказательство. При $t = 1$ ядром отображения (11) является идеал $\mathscr{J}$, образованный многочленами, обращающимися в нуль на подпространстве $w = W$, следовательно, это отображение устанавливает изоморфизм колец $\mathscr{P}/\mathscr{J}$ и $\mathscr{P}_v$. При произвольном t отображение (11) устанавливает изоморфизм модулей $\mathscr{P}^t/\mathscr{J}^t$ и $\mathscr{P}_v^t$ над этими кольцами. Поэтому образ естественного отображения $\mathfrak{p} \to \mathscr{P}^t/\mathscr{J}^t$ изоморфен модулю $\mathfrak{p}_W$. С другой стороны, этот образ равен $[\mathfrak{p} + \mathscr{J}^t]/\mathscr{J}^t$. Следовательно, многообразие, ассоциированное с этим подмодулем, равно $N(\mathfrak{p}_W)$. Положив в предложении 1 $E = \mathscr{P}^t/\mathscr{J}^t$, мы получим равенство $N(\mathfrak{p}_W) = N(M)$, где

$$M = [\mathscr{P}^t/\mathscr{J}^t]/[\mathfrak{p} + \mathscr{J}^t/\mathscr{J}^t] \cong \mathscr{P}^t/[\mathfrak{p} + \mathscr{J}^t].$$

Согласно предложению 3 § 3 гл. I этот модуль равен $\mathscr{P}^t/\mathfrak{p} \otimes \mathscr{P}/\mathscr{J}$. Из предложения 3 вытекает, что $N(M)$ есть пересечение многообразия $N(\mathscr{P}^t/\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p})$ и многообразия, ассоциированного с идеалом $\mathscr{J}$. Последнее, очевидно, совпадает с подпространством $w = W$. ■

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{p}$ — несмешанный подмодуль модуля $\mathscr{P}^t$ размерности $d = n - h$, $h \leqslant m$, нормально расположенный в данной системе координат. В пространстве C_w существует множество $\mathscr{M}$ первой категории такое, что если $w \overline{\in} \mathscr{M}$, то подмодуль $\mathfrak{p}_W \subset \mathscr{P}_v^t$ несмешанный размерности $m - h$, нормально расположенный в C_v.*

Доказательство. Так как по условию многообразие $N(\mathfrak{p})$ принадлежит многообразию вида (10), то из леммы 3 вытекает, что многообразие $N(\mathfrak{p}_W)$ принадлежит многообразию решений системы

$$f_1(z_1, w'', w) = \ldots = f_h(z_h, w'', w) = 0, \qquad w = \text{const},$$

где $w'' = (z_{h+1}, \ldots, z_m)$. Поэтому в силу предложения 6 для того, чтобы доказать, что подмодуль $\mathfrak{p}_W$ несмешанный размерности $m - h$, достаточно установить, что для любого многочлена $q(w'') \not\equiv 0$ из $qf \in \mathfrak{p}_W$ вытекает $f \in \mathfrak{p}_W$. Установив этот факт, мы тем самым покажем также, что подмодуль $\mathfrak{p}_W$ нормально расположен.

Через Ω обозначим алгебраическое замыкание поля R_w рациональных функций от переменных w. Расширяя основное поле C до поля Ω, мы расширим кольцо $\mathscr{P}_v$ до кольца $\Omega[v]$, кольцо $\mathscr{P}_{w'}$ до кольца $\Omega[w'']$, а подмодуль $\mathfrak{p} \subset \mathscr{P}^t$ — до подмодуля $\pi \subset \Omega^t[v]$. Пусть $\mathfrak{p} = p\mathscr{P}^s$ с некоторой $\mathscr{P}$-матрицей p. Тогда $\pi = p\Omega^s[v]$. Установим следующее утверждение.

(H). *Для любого отличного от нуля многочлена* $q \in \Omega[w'']$ *и элемента* $f \in \Omega^t[v]$ *такого, что* $qf = pg$, *где* $g \in \Omega^s[v]$, *существует элемент* $g' \in \Omega^s[v]$ такой, что $f = pg'$.

Так как поле Ω алгебраично над R_w и, следовательно, над $\mathcal{P}_w$, а одночлены w'', очевидно, алгебраичны над $\mathcal{P}_{w'}$, многочлен $q \in \Omega[w'']$ алгебраичен над $\mathcal{P}_{w'}$, т. е. удовлетворяет некоторому уравнению вида

$$\lambda_k q^k + \ldots + \lambda_1 q + \lambda_0 = 0, \tag{12.1}$$

где $\lambda_k, \ldots, \lambda_0 \in \mathcal{P}_{w'}$. Если $\lambda_0 = 0$, то мы можем поделить левую часть на $q \neq 0$. Поэтому мы можем считать, что $\lambda_0 \neq 0$. Из (12) вытекает, что

$$\lambda_0 f = p\gamma \tag{13.1}$$

с некоторым $\gamma \in \Omega^s[v]$. Рассмотрим поле Ω как векторное пространство над полем R_w. В его подпространстве, натянутом на коэффициенты многочленов, образующих векторы f и γ, выберем базис $\{\omega_\alpha \in \Omega\}$. Разлагая эти коэффициенты по этому базису, мы перепишем (13) в виде

$$\frac{1}{\Delta} \sum \omega_\alpha (\lambda_0 f_\alpha - p\gamma_\alpha) = 0, \tag{14.1}$$

где $f_\alpha \in \mathcal{P}^t$, $\gamma_\alpha \in \mathcal{P}^s$, а $\Delta \in \mathcal{P}_w$. Так как величины ω_α линейно независимы над R_w, то из равенства (14) вытекает, что $\lambda_0 f_\alpha = p\gamma_\alpha$, т. е. $\lambda_0 f_\alpha \in \mathfrak{p}$ для всех α. По предположению, модуль $\mathfrak{p}$ несмешанный размерности d и нормально расположен. Поэтому из предложения 6 следует, что $f_\alpha \in \mathfrak{p}$ для всех α и, следовательно, $f = \frac{1}{\Delta} \sum \omega_\alpha f_\alpha \in \pi$, ч. и т. д. Итак, утверждение (H) установлено.

Для любого вектора $j \in \Omega^k[v]$ или $j \in \mathcal{P}_v^k$ через $\deg j$ обозначим наивысший порядок образующих его многочленов. Пусть σ — произвольное натуральное число. Через (H_σ) обозначим частный случай утверждения (H), который выделяется условием $\deg g \leqslant \sigma$. Покажем, что существует такое натуральное $\tau \geqslant \sigma$, что утверждение (H_σ) можно переформулировать так.

(H_σ). *Из* $qf = pg$, $q \neq 0$, $\deg g \leqslant \sigma$ *вытекает* $f = pg'$, $\deg g' \leqslant \tau$.

Действительно, пусть μ — наивысший порядок элементов матрицы p. Тогда $\deg pg \leqslant \sigma + \mu$ и, следовательно, $\deg q \leqslant \sigma + \mu$ и $\deg f \leqslant \sigma + \mu$. Для каждого целого $k \geqslant 0$ рассмотрим подпространство $\Omega_k[v]$ в $\Omega[v]$, образованное элементами j с $\deg j \leqslant k$. Оно конечномерно (как линейное пространство над полем Ω). Из сказанного выше вытекает, что вектор f принадлежит пересечению $\Omega^t_{\sigma+\mu}[v] \cap p\Omega^s[v]$. Это пересечение конечномерно и является объединением возрастающей последовательности подпространств $\Omega^t_{\sigma+\mu}[v] \cap p\Omega^s_\tau[v]$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому оно совпадает с одним из пространств $\Omega^t_{\sigma+\mu}[v] \cap p\Omega^s_\tau[v]$ ч. и т. д.

Следующим шагом мы запишем утверждение (H_σ) в аналитической форме. Для этого мы сначала проанализируем следующее условие:

$$f = pg, \quad g \in \Omega^s[v], \quad \deg g \leqslant \sigma. \tag{15.1}$$

Поскольку $\deg f \leqslant \sigma + \mu$, мы можем переписать это условие эквивалентным образом, приравняв коэффициенты в обеих частях равенства (15) при равных степенях неизвестных до порядка $\sigma + \mu$. Тем самым мы получим систему линейных уравнений над полем Ω:

$$F = PG. \tag{16.1}$$

Здесь F и G — векторы, образованные коэффициентами многочленов, входящих в f и g, а P — некоторая матрица, элементами которой являются некоторые линейные функции с целочисленными коэффициентами от коэффициентов многочленов матрицы p. Заметим, что вид системы (16) не зависит от основного поля.

Пусть r — ранг матрицы P. Согласно теореме Кронеккера — Капелли условие разрешимости системы (16) заключается в том, что ранг расширенной матрицы также равен r. Это условие можно записать в виде системы равенств

$$M_l^\sigma(f, p) = 0,$$

где M_l^σ — всевозможные миноры порядка $r+1$ расширенной матрицы. Отметим, что миноры $M_l^\sigma(f, p)$ суть многочлены от элементов вектора F и матрицы P. Таким образом, утверждение (H_σ) можно переписать так:

$$M_l^\sigma(qf, p) = 0, \quad \forall l, \ q \neq 0 \Longrightarrow M_j^\tau(f, p) = 0, \ \forall j. \tag{17.1}$$

Условие $q \neq 0$ означает, что не все коэффициенты q_l многочлена q равны нулю. Поскольку $\deg q \leqslant \sigma + \mu$, достаточно иметь дело лишь с коэффициентами q_l, для которых $|l| \leqslant \sigma + \mu$. Следовательно, утверждение (17) эквивалентно такому:

$$M_k^\sigma(qf, p) = 0, \ \forall k \Longrightarrow q_l M_j^\tau(f, p) = 0, \ \forall l, j, \qquad |l| \leqslant \sigma + \mu. \tag{18.1}$$

Через Q обозначим вектор, образованный коэффициентами q_l с $|l| \leqslant \sigma + \mu$. Величины $M_k^\sigma(qf, p)$ и $q_l M_j^\tau(f, p)$ суть многочлены от переменных F и Q, значения которых принадлежат полю Ω. Утверждение (18) означает, что из обращения в нуль многочленов $M_k^\sigma(qf, p)$ вытекает обращение в нуль многочленов $q_l M_j^\tau(f, p)$. Так как поле Ω алгебраически замкнуто, из теоремы Гильберта о корнях *) вытекает.

*) См., например, Ван дер Варден [1].

что для любых i и j существует натуральное ρ и многочлены $a_k \in \Omega[v]$ такие, что

$$[q_i M_j^\tau(f,\ p)]^\rho = \sum_k a_k M_k^\sigma(qf,\ p). \tag{19.1}$$

Заметим, что в этом равенстве коэффициенты всех многочленов, за исключением, быть может, многочленов a_k, принадлежат $\mathscr{P}_w$. В пространстве Ω выберем конечное число линейно независимых (над R_w) элементов ω_α так, чтобы один из них был единицей, а натянутое на них пространство содержало все коэффициенты многочленов a_k. Разложим коэффициенты многочленов a_k по этим элементам и отбросим все члены, не принадлежащие R_w. Понятно, что равенство (19) при этом не нарушится. Таким образом, мы можем считать, что коэффициенты многочленов a_k при любых i, j, k принадлежат R_w. Через $\mu'_\sigma \subset C_w$ обозначим многообразие корней наименьшего общего знаменателя всех этих коэффициентов.

Зафиксируем произвольное $w \in C_w \setminus \mu'_\sigma$ и рассмотрим следующее условие:

$$f = p_w g, \quad g \in \mathscr{P}_v^s, \qquad \deg g \leqslant \sigma, \tag{20.1}$$

налагаемое на векторы $f \in \mathscr{P}_v^t$. Используя аналогию с условием (15), мы заключаем, что условие (20) эквивалентно разрешимости системы линейных уравнений над полем C

$$F = P_w G, \tag{21.1}$$

где F и G — векторы, образованные коэффициентами f и g, а P_w — значение матрицы P при фиксированном w. Так как ранг матрицы P равен r, то ранг матрицы P_w также равен r, если точка w не принадлежит некоторому собственному алгебраическому подмногообразию $\mu''_\sigma \subset C_w$.

Предположим, что $w \notin \mu''_\sigma$. Тогда разрешимость системы (21) эквивалентна выполнению системы равенств $M_k^\sigma(f,\ p_w) = 0$, $\forall k$. Положим $\mathscr{M} = \bigcup_\sigma \left(\mu'_\sigma \bigcup \mu''_\sigma\right)$ и допустим, что $w \notin \mathscr{M}$. Тогда мы вправе зафиксировать в точке w коэффициенты в равенства (19). Так как это равенство справедливо для всех i и j, мы приходим к следующему утверждению:

$$M_k^\sigma(qf,\ p_w) = 0, \quad \forall k \Rightarrow q_i M_j^\tau(f,\ p_w) = 0, \quad \forall i,\ j.$$

Эта импликация означает, что для любых $q \in \mathscr{P}_w$, и $f \in \mathscr{P}_v^t$ из $qf = p_w g$, где $g \in \mathscr{P}_v^s$, $\deg g \leqslant \sigma$, вытекает $f = pg'$, где $g' \in \mathscr{P}_v^s$, $\deg g' \leqslant \tau$. Так как число σ произвольно, мы заключаем, что модуль $\mathfrak{p}_w = p_w \mathscr{P}_v^s$ несмешанный размерности $m - h$. Остается заметить, что множество $\mathscr{M}$ первой категории, поскольку она является объединением счетного числа нигде не плотных множеств μ'_σ и μ''_σ. ■

Пусть $\mathscr{S}$ — пространство степенных рядов от переменных $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Если L — некоторое подпространство в $\mathscr{S}^t$, то через $\eta_m L$ мы обозначим подпространство в L, образованное рядами вида $\eta_m \varphi$, где $\varphi \in L$.

Теорема 2. *Пусть p: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$ — некоторая $\mathscr{P}$-матрица такая, что $p\mathscr{P}^s$ — несмешанный подмодуль $\mathscr{P}^t$ размерности $d > n - m$, нормально расположенный в C^n. Тогда в пространстве C_w существует собственное алгебраическое подмногообразие μ такое, что для любой точки $Z \in C^n \setminus (C_v \times \mu)$ имеет место равенство*

$$p(Z)\mathscr{S}^s \cap \eta_m \mathscr{S}^t = \eta_m p(Z)\mathscr{S}^s. \tag{22.1}$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы существует подмножество $\mathscr{M} \subset C_w$ первой категории такое, что для любой точки $w \overline{\in} \mathscr{M}$ подмодуль $\mathfrak{p}_w = p_w \mathscr{P}^s_v$ модуля $\mathscr{P}^t_v$ несмешанный размерности $m - h$, нормально расположенный в C_v. Согласно предложению 6 отсюда вытекает, что для любого $Z_m \in C^1$ из $(z_m - Z_m) f \in \mathfrak{p}_w$ следует $f \in \mathfrak{p}_w$ $(m > h = n - d)$. Тем самым мы установили равенство

$$\mathfrak{p}_w \cap (z_m - Z_m)\mathscr{P}^t_v = (z_m - Z_m)\mathfrak{p}_w, \qquad w \overline{\in} \mathscr{M}. \tag{23.1}$$

Пространство C^n вложим в пространство $C^{n+1} = C^n \times C^1$, точки которого мы будем обозначать парами (z, Z_m). Каждый многочлен в C^n мы можем рассматривать как многочлен в C^{n+1}, постоянный относительно Z_m. Тем самым мы получаем отображение кольца $\mathscr{P} = \mathscr{P}_z$ в кольце $\mathscr{P}' = \mathscr{P}_{z, Z_m}$ многочленов от переменных z, Z_m. Через $\breve{p}$ обозначим $\mathscr{P}'$-матрицу $(z_m - Z_m)p$, а через e — единичную матрицу порядка t. Применяя теорему 1 § 4 гл. II к $\mathscr{P}'$-матрицам p, $\breve{p}$, $(z_m - Z_m)e$, $p \oplus (z_m - Z_m)e$, мы построим операторы

$$d,\ g;\quad \breve{d},\ \breve{g};\quad d^0,\ g^0;\quad d',\ g', \tag{24.1}$$

действующие из пространства $\mathscr{S}^t$ в пространство $\mathscr{S}^{t'}$, где t' равно t, s, $t + s$, и обладающие следующим свойством: существует алгебраическое разбиение $\mathscr{N} = \{N_\nu\}$ пространства C^n такое, что на каждом множестве $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$ коэффициенты всех этих операторов суть рациональные всюду конечные функции (на самом деле теорема 1 § 4 гл. II обеспечивает существование такого разбиения для каждой из перечисленных выше матриц — чтобы построить общее разбиение, достаточно применить предложение 3 § 3 гл. II).

Из (23) и предложения 4 вытекает равенство

$$\breve{d}(z, Z_m) = \lambda(z, Z_m) d(z, Z_m) + \lambda^0(z, Z_m) d^0(z, Z_m), \quad w \overline{\in} \mathscr{M}. \tag{25.1}$$

где λ и λ^0 — некоторые многочлены от операторов (24), матриц p, $(z_m - Z_m)e$ и проекционного оператора $\mathcal{S}^{s+t} \to \mathcal{S}^s$. Отсюда вытекает, что коэффициенты операторов λ и λ^0 суть рациональные всюду конечные функции на каждом из множеств $N_\nu \setminus N_{\nu+1}$.

Зафиксируем произвольным образом индекс $\nu \geqslant 0$ и разложим многообразие N_ν на неприводимые компоненты. Пусть N' — некоторая его компонента, не принадлежащая $N_{\nu+1}$. Координаты в пространстве C^{n+1} разобьем на две группы $\check{v} = (v, Z_m)$ и w и применим к многообразию N' предложение 5. Предположим, что для этого многообразия имеет место случай II). Тогда многообразие N', за исключением его дискриминантного подмногообразия N_δ, проектируется в открытое подмножество в $C_{w'}$ и, следовательно, в открытое подмножество в C_w. Следовательно, множество $C_w \setminus \mathcal{M}$ всюду плотно в проекции $N' \setminus N_\delta$ на C_w. Поэтому множество $C^{n+1} \setminus (C_v \times \mathcal{M} \times C^1)$ всюду плотно в $N' \setminus N_\delta$. Заметим, что подмногообразие N_δ, равно как и подмногообразие $N' \cap N_{\nu+1}$, нигде не плотны в N'. Это вытекает из леммы 2, поскольку многообразие N' неприводимое. Отсюда следует, что множество $C^{n+1} \setminus (C_v \times \mathcal{M} \times C^1)$ всюду плотно в $N' \setminus N_\delta$. Так как на этом множестве имеет место равенство (25), причем обе его части имеют в качестве коэффициентов рациональные функции на $N' \setminus N_{\nu+1}$, отличные от бесконечности, то это равенство выполняется на всем множестве $N' \setminus N_{\nu+1}$.

Через μ_ν обозначим проекцию на C_w объединения тех неприводимых компонент многообразия N_ν, для которых имеет место случай I) предложения 5. По доказанному равенство (25) справедливо для всех точек $w \notin \mu = \bigcup \mu_\nu$. Покажем, что многообразие μ удовлетворяет условию теоремы. В самом деле, левая часть (22) всегда содержит правую. Пусть $w \notin \mu$. Так как операторы d и d^0 обращаются в нуль на левой части (22), оператор $\check{d}$ в силу (25) также равен нулю на левой части. По свойству оператора $\check{d}$ это означает, что левая часть принадлежит правой. ■

§ 2. Локальные p-операторы

Начиная с этого параграфа, вплоть до конца главы мы зафиксируем произвольную $\mathcal{P}$-матрицу p: $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$. Напомним, что кольцо $\mathcal{P}$ мы интерпретируем как кольцо многочленов с комплексными коэффициентами, заданных в C^n. Точки пространства C^n мы будем обозначать через $z = (z_1, \ldots, z_n)$ или $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Букву z мы будем применять чаще для обозначения фиксированной точки, в которой берется то или иное p-разложение. Буква ξ всегда будет обозначать активные переменные — переменные, по которым действуют операторы, фигурирующие в этих разложениях.

Содержание этого параграфа заключается в том, что, исходя из p-разложения, отвечающего некоторому значению параметра m, мы построим p-разложение, отвечающее большему значению m, обладающее некоторым свойством локальности, о котором мы скажем ниже.

1°. Исходное p-разложение. Сейчас мы частично воспроизведем основную теорему гл. II. Зафиксируем произвольное целое число m, заключенное между 0 и $n-1$. Положим $\eta=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$; величину η мы будем рассматривать также, как точку в C^n, находящуюся в соответствующем координатном подпространстве. Согласно упомянутой выше теореме, примененной к матрице p и переменным η, тождественный оператор E_η в пространстве $\mathcal{S}^t[\eta]$ при любом $z \in C^n$ допускает следующее разложение:

$$E_\eta = d^m(z) + p(z+\eta)\, g^m(z), \tag{1.2}$$

причем p-операторы d^m и g^m, в частности, обладают следующими свойствами:

1. *Оператор $d^m(z)$ обращается в нуль на подпространстве $p(z)\mathcal{S}^s[\eta]$.*

2. *Коэффициенты $d_i^j = \delta_i d^m \eta^j$ и $g_i^j = \delta_i g^m \eta^j$ этих операторов отличны от нуля лишь, если*

$$L(j) \geqslant L(i) - l, \quad l = -L(Ke_m) \geqslant 0,$$

где *K — константа, а L: $Z^m \to Z^m$ — линейный оператор, построенные в гл.* II.

3. *Имеет место неравенство*

$$\max\{|d_i^j|, |g_i^j|\} \leqslant a^{|L(j)-L(i)+l|+1},$$

где $a \geqslant 1$ — некоторая степенная функция на некотором алгебраическом разбиении $\mathcal{N}^m$ пространства C^n. Следствием этого свойства является свойство

4. *При любом ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, d^m и g^m суть непрерывные операторы из $\mathfrak{S}_\varepsilon^t$ соответственно в $\mathfrak{S}_{\varepsilon\rho}^t$ и $\mathfrak{S}_{\varepsilon\rho}^s$, причем*

$$\|d^m\varphi\|_{\varepsilon\rho} \leqslant \frac{1}{\rho}\|\varphi\|_\varepsilon, \quad \|g^m\varphi\|_{\varepsilon\rho} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^K\rho}\|\varphi\|_\varepsilon, \tag{2.2}$$

где $\rho=\rho_m(z)$ — некоторая степенная функция на разбиении $\mathcal{N}^m$.

2°. Тензорное произведение операторов над пространствами степенных рядов. Зафиксируем теперь произвольное целое число m^*, удовлетворяющее неравенствам $m<m^*\leqslant n$. Рассмотрим следующие группы переменных $\omega=(\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m^*})$ и $\eta^*=(\eta, \omega)=(\xi_1, \ldots, \xi_{m^*})$ и соответствующие пространства степенных рядов $\mathcal{S}[\omega]$ и $\mathcal{S}[\eta^*]$; $\mathcal{S}[\eta]$ и $\mathcal{S}[\omega]$ суть подпространства в пространстве $\mathcal{S}[\eta^*]$, которое мы для краткости будем обозначать одной буквой $\mathcal{S}$.

Определим сначала операцию тензорного произведения функционалов над пространствами $\mathscr{S}[\eta]$ и $\mathscr{S}[\omega]$. Через δ_l^η, $l \in Z_+^m$ и δ_j^ω, $j \in Z_+^\mu$, $\mu = m^* - m$, мы обозначим базисные функционалы над этими пространствами. Положим

$$\delta_l^\eta \otimes \delta_j^\omega \overset{\text{опр.}}{=\!=} \delta_{(l,\, j)}, \qquad (l,\, j) \in Z_+^{m^*},$$

где $\delta_{(l,\, j)}$ — базисный функционал над $\mathscr{S}$. Распространяя это определение по линейности, мы для функционала f над $\mathscr{S}^a[\eta]$ со значениями в C^b и функционала g над $\mathscr{S}^\alpha[\omega]$ со значениями в C^β положим

$$f \otimes g = \sum f^l \delta_l^\eta \otimes \sum g^j \delta_j^\omega = \sum f^l \otimes g^j \delta_{(l,\, j)}.$$

$f \otimes g$ есть, очевидно, функционал над $\mathscr{S}^{a\alpha}$ со значениями в $C^{b\beta}$.

Пусть теперь A: $\mathscr{S}^a[\eta] \to \mathscr{S}^b$ и B: $\mathscr{S}^\alpha[\omega] \to \mathscr{S}^\beta$ — произвольные операторы. Их тензорное произведение мы определим так:

$$A \otimes B = \sum \eta^{*l} A_l(\delta^\eta) \otimes \sum \eta^{*j} B_j(\delta^\omega) = \sum \eta^{*l+j} A_l(\delta^\eta) \otimes B_j(\delta^\omega).$$

Полученный оператор действует из $\mathscr{S}^{a\alpha}$ в $\mathscr{S}^{b\beta}$.

Остановимся на одном частном случае тензорного произведения операторов. Прежде всего отметим, что всякий ряд $\varphi \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}[\eta^*]$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathscr{S}[\eta]$, аналитически зависящий от параметров ω в некоторой окрестности нуля; в этом случае мы запишем $\varphi = \varphi(\omega)$. Далее рассмотрим систему операторов

$$\delta_l^\eta \otimes E_\omega = \sum_{j \in Z_+^\mu} \omega^j \delta_{(l,\, j)} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}[\omega].$$

Очевидно, что действие оператора $\delta_l^\eta \otimes E_\omega$ на ряд $\varphi \in \mathfrak{S}$ заключается в том, что к ряду $\varphi(\omega) \in \mathscr{S}[\eta]$ применяется функционал δ_l^η:

$$(\delta_l^\eta \otimes E_\omega)\varphi = \delta_l^\eta \varphi(\omega). \tag{3.2}$$

Пусть A: $\mathscr{S}[\eta] \to \mathscr{S}$ — произвольный оператор, переводящий пространство $\mathfrak{S}[\eta]$ в $\mathfrak{S}$. Запишем его в виде $\sum \eta^l A_l^j(\omega)\delta_j^\eta$, где $A_l^j(\omega) \in \mathfrak{S}[\omega]$ и предположим дополнительно, что все ряды $A_l^j(\omega)$ сходятся в некоторой общей окрестности нуля. В таком случае сумму $\sum \eta^l A_l^j(\omega)\delta_j^\eta$ можно рассматривать как оператор в $\mathscr{S}[\eta]$, аналитически зависящий от ω в этой окрестности; в соответствии с этим оператор A мы обозначим так: $A(\omega)$. Тогда из (3) вытекает важная для нас формула

$$(A \otimes E_\omega)\varphi = A(\omega)\varphi(\omega), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}.$$

Сделаем еще одно замечание. Пусть A — оператор в $\mathscr{S}[\eta]$. Допуская неточность в обозначениях, мы будем иногда рассматривать его как оператор в $\mathscr{S}$. При этом действие его будет заключаться в том, что у ряда $\varphi \in \mathscr{S}$ отбрасываются члены, содержащие ω, затем применяется оператор A, а полученный ряд, принадлежащий $\mathscr{S}[\eta]$, рассматривается как элемент объемлющего пространства $\mathscr{S}$.

3°. Формулировка теоремы. Через $\omega\mathscr{S}^k$ обозначим подпространство в $\mathscr{S}^k$, образованное рядами вида $\sum_1^\mu \omega_i \varphi_i$, где все $\varphi_i \in \mathscr{S}^k$, и мы полагаем $\omega_i = \xi_{m+i}$, $i = 1, \ldots, \mu$. Через $p(z)\omega\mathscr{S}^s$ обозначим образ отображения $p(z)$: $\omega\mathscr{S}^s \to \mathscr{S}^t$.

Теорема. *Пусть в данной точке $z \in C^n$ выполнено соотношение*

$$p(z)\mathscr{S}^s \cap \omega\mathscr{S}^t = p(z)\omega\mathscr{S}^s.$$

Тогда тождественный оператор в $\mathscr{S}^t$ допускает разложение

$$E = \mathscr{D}^*(z) + p(z+\eta^*)\mathscr{G}^*(z), \tag{4.2}$$

в котором

$$\mathscr{D}^*(z) = d^*(z) \otimes E_\omega, \qquad \mathscr{G}^*(z) = g^*(z) \otimes E_\omega, \tag{5.2}$$

а $d^*(z)$ и $g^*(z)$ суть операторы, действующие из $\mathscr{S}^t[\eta]$ соответственно в $\mathscr{S}^t$ и $\mathscr{S}^s$, причем

I. *Оператор $\mathscr{D}^*(z)$ обращается в нуль на подпространстве $p(z)\mathscr{S}^s$.*

II. *Для любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\mathscr{D}^*(z)$ есть непрерывный оператор, действующий из $\mathfrak{S}^t_\varepsilon$ в $\mathfrak{S}^t_{\varepsilon q_{\rho^*}}$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|\mathscr{D}^*(z)\varphi\|_{\varepsilon q_{\rho^*}} \leqslant \frac{1}{\rho^*}\|\varphi\|_\varepsilon,$$

где q — константа, а $\rho^* = \rho^*(z)$ — некоторая степенная функция на разбиении $\mathscr{N}^m$.

Замечание. Из сказанного во 2° следует, что оператор $\mathscr{D}^*$ действует по формуле

$$\mathscr{D}^*\varphi = d^*(\omega)\varphi(\omega), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}^t.$$

Иными словами, функция $\mathscr{D}^*\varphi$ при произвольном фиксированном значении параметра $\omega = \omega_0$ является результатом применения оператора d^*, в котором мы также фиксируем $\omega = \omega_0$, к сужению функции φ на подпространстве $\omega = \omega_0$. Отсюда, в частности, следует, что значение функции $\mathscr{D}^*\varphi$ на подпространстве $\omega = \omega_0$ зависит от значений функции φ лишь на этом подпространстве. Это свойство локальности оператора $\mathscr{D}^*$ лежит в основе дальнейших рассуждений гл. IV.

Отметим еще два свойства разложения (4), которые важны в других его приложениях. Пусть $\mathscr{T}$ — базисное множество, отвечающее разложению (1).

III. *Образ оператора $\mathscr{D}^*$ принадлежит пространству $\mathscr{S}^t_{\mathscr{T} \times Z^\mu_+}$, где $\mathscr{T} \times Z^\mu_+$ — подмножество в $tZ^{m^*}_+$, образованное парами $(\tau, (i, j))$, где $(\tau, i) \in \mathscr{T}$, а $j \in Z^\mu_+$.*

IV. *Оператор $\mathscr{G}^*$ обращается в нуль на $\mathscr{S}^t_{\mathscr{G}\times Z^\mu_+}$.* Для доказательства этих утверждений достаточно заметить, что в силу формул 7° $\mathscr{D}^* = (d^m \otimes E_\omega) A$, а $\mathscr{G}^* = B(g^m \otimes E_\omega)$, где A и B — некоторые операторы.

4°. Доказательство теоремы. Заменив в разложении (1) многочлен $p(z+\eta)$ на $p(z+\eta^*)$, мы получим

$$E_\eta = d(z) + p(z+\eta^*) g(z) + R(z) \qquad (d = d^m,\ g = g^m), \tag{6.2}$$

где

$$R(z) = [p(z+\eta) - p(z+\eta^*)] g(z).$$

Оператор $R(z)$ действует из $\mathscr{S}^t[\eta]$ в $\mathscr{S}^t$ и, очевидно, не содержит членов, не зависящих от ω. Следующий и важнейший шаг доказательства заключается в применении метода последовательных приближений к равенству (6) с тем, чтобы исключить в этом равенстве слагаемое $R(z)$. Аналитически этот метод состоит в том, что мы умножим обе части (6) справа на ряд Неймана для оператора $R(z)$. Самое существенное в этом методе — доказательство сходимости ряда Неймана как оператора в пространствах сходящихся рядов.

Для каждого натурального k положим

$$R^k(z) = \overbrace{[R(z) \otimes E_\omega] \ldots [R(z) \otimes E_\omega]}^{k-1 \text{ скобка}} R(z), \qquad R^0(z) = E_\eta.$$

Очевидно также, что при любом $k \geqslant 1$ оператор $R^k(z)$ не содержит членов с ω^l, $|l| < k$. Поэтому ряд

$$N(z) = R^0(z) + R^1(z) + \ldots + R^k(z) + \ldots \tag{7.2}$$

сходится как оператор из $\mathscr{S}^t[\eta]$ в $\mathscr{S}^t$. Этот ряд мы назовем рядом Неймана для оператора R. Очевидно, что ряд

$$N \otimes E_\omega = E + R \otimes E_\omega + [R \otimes E_\omega]^2 + \ldots + [R \otimes E_\omega]^k + \ldots$$

удовлетворяет соотношениям

$$[(E_\eta - R) \otimes E_\omega][N \otimes E_\omega] = E, \quad [N \otimes E_\omega][E_\eta - R] = E_\eta. \tag{8.2}$$

5°. Сходимость ряда Неймана в пространстве $\mathfrak{S}^t$.

Лемма. *Для любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, ряд Неймана (7) сходится как непрерывный оператор из $\mathfrak{S}^t_\varepsilon[\eta]$ в $\mathfrak{S}^t_{\varepsilon^q \rho_0}$, причем*

$$\|N(z)\varphi\|_{\varepsilon^q \rho_0} \leqslant C \|\varphi\|_\varepsilon,$$

где C и q — некоторые константы, не зависящие от z и ε, а $\rho_0 = \rho_0(z)$ — некоторая степенная функция на разбиении $\mathscr{N}^m$.

Доказательство леммы. Для каждой пары l, $j \in Z^m_+$ положим $R^{k,j}_l = \delta^\eta_l R^k(\omega) \eta^j$. Каждый коэффициент $R^{k,j}_l$ есть многочлен по ω, коэффициентами которого являются матрицы размера $t \times t$

с элементами из C. Оценим эти коэффициенты, предполагая, что $|\omega| \leqslant 1$.

Индуктивное предложение.

$$R_i^{k,j} \neq 0, \text{ лишь если } L(j) \geqslant L(i) - kl; \tag{a_k}$$

$$|R_i^{k,j}(\omega)| \leqslant \frac{|\omega|^k}{(k!)^m} [L(j) - L(i) + k(l+e)]^k A^{|L(j)-L(i)+k(l+e)|}, \tag{b_k}$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in Z^m$, *а* $A \geqslant 2\sqrt{m}$ — *некоторая степенная функция на разбиении* $\mathscr{N}^m$. Здесь и в дальнейшем через $[l]^k$, где $i \in R^m$, мы обозначаем выражение $(l_1 \cdot \ldots \cdot l_m)^k$.

Доказательство индуктивного предложения. При $k = 0$ мы имеем по определению $R_i^{0,j} = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронеккера. Следовательно, утверждения (a_0) и (b_0) справедливы. Предполагая справедливость (a_k) и (b_k), мы докажем (a_{k+1}) и (b_{k+1}).

Рассмотрим многочлен

$$r(z, \eta^*) = p(z + \eta) - p(z + \eta^*).$$

При каждом $l \in Z_+^m$ многочлен $r_l(z, \omega) = \delta_l^\eta r(z, \eta, \omega)$ не содержит членов без ω. Поэтому, учитывая, что $|\omega| \leqslant 1$, мы вправе написать неравенство

$$\sum_l |r_l(z, \omega)| \leqslant |\omega| M(z), \tag{9.2}$$

где $M(z)$ — подходящая функция вида $C(|z| + 1)^q$. Степенную функцию A мы определим из условия

$$A \geqslant \max\{a(M+1), 2\sqrt{m}\} \quad (a \text{ — функция из условия } 3,1^\circ).$$

Коэффициенты оператора $(g \otimes E_\omega) R^k$ мы обозначим так: $(gR^k)_i^j \overset{\text{опр.}}{=} \delta_i^\eta (g \otimes E_\omega) R^k \eta^j$. Очевидно, что $(gR^k)_i^j = \sum_\alpha g_i^\alpha R_\alpha^{k,j}$. Отсюда, а также из свойства $3,1^\circ$

$$|(gR^k)_i^j| \leqslant \sum_\alpha |g_i^\alpha| \cdot |R_\alpha^{k,j}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\omega|^k}{(k!)^m} a \cdot A^{|L(j)-L(i)+k(l+e)+l|} \cdot \sum_{\alpha \in \pi_{ij}} [L(j) - L(\alpha) + k(l+e)]^k, \tag{10.2}$$

где π_{ij} — множество тех α, для которых одновременно $g_i^\alpha \neq 0$ и $R_\alpha^{k,j} \neq 0$. Из свойства $2,1^\circ$ и (a_k) следует, что множество π_{ij} принадлежит множеству точек α, для которых выполнены неравенства $L(j) + kl \geqslant L(\alpha) \geqslant L(i) - l$. Отсюда, в частности, следует, что

$$(gR^k)_i^j \neq 0, \text{ лишь если } L(j) \geqslant L(i) - (k+1) l. \tag{11.2}$$

Положив $\lambda_0 = L(j) + k(l+e)$ и сделав в сумме, стоящей в (10) справа, замену $\lambda = L(\alpha)$, мы придем к следующей бо́льшей сумме:

$$\sum \left\{ [\lambda_0 - \lambda]^k, \quad \lambda \in Z_+^m, \quad \lambda_0 \geqslant \lambda \geqslant L(i) - l \right\}. \tag{12.2}$$

Эту сумму в свою очередь мы оценим сейчас подходящим интегралом от функции $[\lambda_0 - \lambda]^k$. Эта функция, очевидно, не убывает при убывании координат точки λ. Следовательно, ее значение в произвольной точке $\lambda \leqslant \lambda_0$ не превосходит ее интеграла по единичному кубу с вершинами в точках λ и $\lambda - e$. Поэтому сумма (12) не больше интеграла

$$\int [\lambda_0 - \lambda]^k \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m,$$

взятого в пределах $\lambda_0 \geqslant \lambda \geqslant L(l) - l - e$. Этот интеграл, как нетрудно подсчитать, равен

$$\frac{1}{(k+1)^m} [\lambda_0 - L(i) + l + e]^{k+1} = \\ = \frac{1}{(k+1)^m} [L(j) - L(l) + (k+1)(l+e)]^{k+1}.$$

Суммируя сказанное, мы приходим к неравенству

$$|(gR^k)_i^j| \leqslant \\ \leqslant \frac{|\omega|^k}{((k+1)!)^m} [L(j) - L(i) + (k+1)(l+e)]^{k+1} \cdot a \cdot A^{|L(j) - L(i) + k(l+e) + l|}. \tag{13.2}$$

Чтобы получить оператор R^{k+1}, мы должны умножить $(g \otimes E_\omega) R^k$ на многочлен $r(z, \eta^*)$. Поэтому

$$R_i^{k+1, j} = \sum_\alpha r_\alpha (gR^k)_{i-\alpha}^j. \tag{14.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $R_i^{k+1, j} \neq 0$, лишь если $(gR^k)_{i-\alpha}^j \neq 0$ при некотором $\alpha \geqslant 0$. Согласно (11) последнее неравенство может быть выполнено лишь при условии

$$L(j) \geqslant L(i - \alpha) - (k+1) l = L(l) - L(\alpha) - (k+1) l.$$

Так как $-L(\alpha) \geqslant 0$ согласно предложению 1 § 2 гл. II, отсюда следует, что $L(j) \geqslant L(i) - (k+1) l$. Тем самым утверждение (a_{k+1}) доказано.

Далее из (14), (9) и (13) мы имеем

$$|R_i^{k+1,\,j}| \leqslant \sum_{\alpha\geqslant 0} |r_\alpha| \cdot \max_{\alpha\geqslant 0} |(gR^k)_{i-\alpha}^j| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\omega|^{k+1}}{[(k+1)!]^m} [L(j)-L(i)+(k+1)(l+e)]^{k+1} \times$$

$$\times aMA^{|L(j)-L(i)+k(l+e)+l|}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что координаты точки $-L(i-\alpha)$ достигают своих наибольших значений на множестве $\alpha \geqslant 0$ при $\alpha = 0$. Учитывая, что $aM \leqslant A \leqslant A^{|e|}$, мы получаем окончательно

$$|R_i^{k+1,\,j}| \leqslant \frac{|\omega|^{k+1}}{[(k+1)!]^m} [L(j)-L(i)+(k+1)(l+e)]^{k+1} \times$$

$$\times A^{|L(j)-L(i)+(k+1)(l+e)|}.$$

Тем самым доказательство индуктивного предложения закончено. ■

6°. Доказательство леммы. Оценим результат действия оператора R^k на произвольный ряд $\varphi \in \mathfrak{S}_\varepsilon^t$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Запишем этот ряд в виде $\varphi = \varphi(\omega) = \sum \eta^l \varphi_l(\omega)$, где $\varphi_l(\omega) \in \mathfrak{S}^t[\omega]$. При $|\omega| \leqslant \varepsilon/2$ этот ряд равномерно сходится в шаре $|\eta| \leqslant \varepsilon/2$ и ограничен по модулю величиной $\|\varphi\|_\varepsilon$. Поэтому из предложения 2 § 1 гл. II мы получаем неравенство

$$\sup_{|\omega| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}} |\varphi_l(\omega)| \leqslant \left(\frac{2\sqrt{m}}{\varepsilon}\right)^{|l|} \|\varphi\|_\varepsilon.$$

Далее мы имеем

$$R^k\varphi = \sum_l \eta^l \sum_j R_l^{k,\,j} \varphi_j.$$

Оценим каждое слагаемое внешней суммы, предполагая, что $|\eta| \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — пока не определенный параметр:

$$\left|\eta^l \sum_j R_l^{k,\,j} \varphi_j\right| \leqslant \|\varphi\|_\varepsilon \cdot \frac{|\omega|^k}{(k!)^m} \sum_{L(j)\geqslant L(l)-kl} [L(j)-L(l)+k(l+e)]^k \times$$

$$\times \delta^{|l|} A^{|L(j)-L(l)+k(l+e)|} \cdot \left(\frac{2\sqrt{m}}{\varepsilon}\right)^{|j|}. \qquad (15.2)$$

Оценим теперь сумму, стоящую справа. Отметим неравенства

$$|l| \leqslant |-L(l)| \leqslant \|L\| \cdot |l|, \qquad l \geqslant 0.$$

Левое из них вытекает из того, что m-я координата точки $-L(l)$ равна $|l|$, а остальные неотрицательны согласно предложению

§ 2 гл. II. Правое вытекает из того, что L — ограниченный оператор в конусе Z_+^m, наделенном нормой $l \to |l|$. Положим

$$\delta = \frac{1}{2} e^{-m} \cdot \varepsilon \cdot A^{-\|L\|}.$$

В таком случае произведение трех последних сомножителей в правой части (15) не превосходит

$$2^{-|l|} \cdot e^{-m|l|} \cdot \varepsilon^{|l|-|j|} \cdot \left(\frac{2\sqrt{m}}{A}\right)^{|j|} \cdot A^{|k(l+e)|}. \tag{16.2}$$

Так как $A \geqslant 2\sqrt{m}$ согласно индуктивному предложению, сомножитель $\left(\frac{2\sqrt{m}}{A}\right)^{|j|}$ можно отбросить, не уменьшив само выражение.

Из неравенства $L(j) \geqslant L(l) - kl$, при котором происходит суммирование в правой части (15), вытекает, что $-|j| \geqslant -|l| - k|l|$ и, следовательно, $|l| - |j| \geqslant -k|l|$. Поэтому величина (16) не превосходит произведения $2^{-|l|} \cdot e^{-m|l|} \cdot \varepsilon^{-k|l|} \cdot A^{|k(l+e)|}$. Из неравенства $|l| + k|l| \geqslant |j|$ вытекает также, что число слагаемых в сумме в (15) не превосходит $(|l| + k|l| + 1)^m$. Далее, величина $[L(j) - L(l) + k(l+e)]^k$ при $j \geqslant 0$ достигает своего наибольшего значения при $j = 0$. Следовательно, это наибольшее значение равно $[\Lambda]^k$, где $\Lambda = -L(l) + k(l+e)$. Так как все координаты точки Λ неотрицательны, то $[\Lambda]^k \leqslant (|\Lambda|)^{km}$. В итоге мы установили, что сумма в правой части (15) не превосходит выражения

$$(|l| + k|l| + 1)^m |-L(l) + k(l+e)|^{km} \cdot 2^{-|l|} \cdot e^{-m|l|} \times$$
$$\times \varepsilon^{-k|l|} A^{k|l+e|} \leqslant 2^{-|l|} (B(|l| + k + 1))^{(k+1)m} e^{-m|l|} \left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{kB}, \tag{17.2}$$

где B — некоторая достаточно большая константа, зависящая лишь от m.

Найдем наибольшее значение произведения второго и третьего сомножителя правой части при $l \geqslant 0$. Рассматривая $|l|$ как непрерывный параметр, продифференцируем это произведение по $|l|$. Эта производная равна

$$\left(\frac{(k+1)m}{|l| + k + 1} - m\right)(B(|l| + k + 1))^{(k+1)m} e^{-m|l|}.$$

Очевидно, что первая скобка отрицательна, следовательно, отрицательно все выражение. Отсюда вытекает, что произведение второго и третьего сомножителя правой части (17) убывает при $|l| \geqslant 0$ и, следовательно, не превосходит своего значения при $|l| = 0$, т. е.

величины $(B(k+1))^{(k+1)m}$. Поэтому правая часть (15) не больше чем

$$2^{-|i|}\|\varphi\|_\varepsilon B^m\left(\frac{|\omega|B^mA^B}{\varepsilon^B}\right)^k\left(\frac{(k+1)^{(k+1)}}{k!}\right)^m. \tag{18.2}$$

Из формулы Стирлинга следует, что отношение $(k+1)^{(k+1)}/k!$ не превосходит $C3^k$, где C — некоторая абсолютная константа, а поэтому выражение (18) не больше чем

$$2^{-|i|}C\|\varphi\|_\varepsilon\left(\frac{|\omega|\mathcal{A}}{\varepsilon^B}\right)^k, \text{ где } \mathcal{A}=B^mA^B,$$

а константа C зависит лишь от m. Отсюда окончательно

$$\|R^k(\omega)\varphi(\omega)\|_\delta\leqslant\sup_{|\eta|\leqslant\delta}\sum_i|\eta^i\sum_j R_i^{k,j}\varphi_j|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_i 2^{-|i|}C\|\varphi\|_\varepsilon\left(\frac{|\omega|\mathcal{A}}{\varepsilon^B}\right)^k=C'\|\varphi\|_\varepsilon\left(\frac{|\omega|\mathcal{A}}{\varepsilon^B}\right)^k.$$

Предполагая, что $\dfrac{|\omega|\mathcal{A}}{\varepsilon^B}\leqslant\dfrac{1}{2}$, т. е. $|\omega|\leqslant\delta'=\dfrac{\varepsilon^B}{2\mathcal{A}}$, мы получаем

$$\sup_{|\omega|\leqslant\delta'}\|\sum_k R^k(\omega)\varphi(\omega)\|_\delta\leqslant\sup_{|\omega|\leqslant\delta'}\sum_k\|R^k(\omega)\varphi(\omega)\|_\delta\leqslant C''\|\varphi\|_\varepsilon. \tag{19.2}$$

Таким образом, ряд $\sum R^k\varphi$ абсолютно сходится в пространстве $\mathcal{G}_\delta^l[\eta]$ и аналитически зависит от параметров ω в шаре $|\omega|\leqslant\delta'$. Следовательно, сумма ряда $\sum R^k\varphi$ является аналитической функцией переменных η^* в произведении шаров $\{|\eta|\leqslant\delta\}$ и $\{|\omega|\leqslant\delta'\}$. Произведение этих шаров содержит шар вида $\{\eta^*:|\eta^*|\leqslant\varepsilon^q\rho_0\}$, где q — подходящая константа, а ρ_0 — некоторая степенная функция на разбиении $\mathcal{N}^m$. Ввиду неравенства (19) доказательство леммы закончено. ■

7°. Конструкция локального p-разложения. Положим

$$d^*(z)=[d(z)\otimes E_\omega]N(z),\quad g^*(z)=[g(z)\otimes E_\omega]N(z),$$

а операторы $\mathcal{D}^*$ и $\mathcal{G}^*$ определим из формул (5). Из свойства 3 оператора d (см. 1°) и леммы вытекает, что оператор $\mathcal{D}^*$ удовлетворяет условию II теоремы.

Далее из формул (6) и (8) мы имеем

$$\mathcal{D}^*(z)+p(z+\eta^*)\,\mathcal{G}^*(z)=[d^*(z)+p(z+\eta^*)g^*(z)]\otimes E_\omega=$$
$$=[(d(z)+p(z+\eta^*)g(z))\otimes E_\omega][N(z)\otimes E_\omega]=$$
$$=[(E_\eta-R(z))\otimes E_\omega][N(z)\otimes E_\omega]=E,$$

откуда следует (4).

Таким образом, остается показать, что оператор $\mathscr{D}^*(z)$ обращается в нуль на подпространстве $p(z)\mathscr{S}^s$. Пусть φ — произвольный элемент этого подпространства. Очевидно, что ряд $E_\eta\varphi$ (полученный отбрасыванием всех членов, содержащих ω) принадлежит подпространству $p(z)\mathscr{S}^s[\eta]$. Поэтому

$$d(z)\varphi = 0. \tag{20.2}$$

Положим $\psi = [E_\eta - R(z)]\varphi$. Так как оператор $R(z)$ не содержит членов нулевого порядка относительно ω, то ряд $\varphi' = \varphi - \psi = R(z)\varphi$ также не содержит таких членов. Из (8) и (20)

$$\mathscr{D}^*(z)\psi = [d(z)\otimes E_\omega][N(z)\otimes E_\omega][E_\eta - R(z)]\varphi =$$
$$= [d(z)\otimes E_\omega]E_\eta\varphi = d(z)\varphi = 0.$$

Применив к ψ разложение (4), мы получим

$$\psi = p(z+\eta^*)\mathscr{G}^*(z)\psi \in p(z)\mathscr{S}^s.$$

Таким образом, ряд $\varphi' = \varphi - \psi$ принадлежит подпространству $p(z)\mathscr{S}^s$, не содержит членов без ω и удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{D}^*(z)\varphi' = \mathscr{D}^*(z)\varphi.$$

Так как ряд φ' принадлежит пересечению $p(z)\mathscr{S}^s \cap \omega\mathscr{S}^t$, то в силу условия теоремы он может быть записан в виде

$$\varphi' = \sum \omega_i\varphi_i, \qquad \varphi_i \in p(z)\mathscr{S}^s.$$

С другой стороны, оператор $d^*(z)$ не содержит функционалов δ_j^ω, следовательно, оператор $\mathscr{D}^*(z)$ коммутирует с умножением на ω_i, $i = 1, \ldots, \mu$, откуда

$$\mathscr{D}^*(z)\varphi' = \sum \omega_i \mathscr{D}^*(z)\varphi_i.$$

Применяя к каждому ряду φ_i, $i = 1, \ldots, \mu$, предыдущие рассуждения, мы построим ряды φ_i', не содержащие членов без ω, принадлежащие подпространству $p(z)\mathscr{S}^s$ и такие, что

$$\mathscr{D}^*(z)\varphi_i' = \mathscr{D}^*(z)\varphi_i.$$

Положим $\varphi'' = \sum \omega_i\varphi_i'$. Тогда

$$\mathscr{D}^*(z)\varphi'' = \sum \omega_i\mathscr{D}^*(z)\varphi_i' = \sum \omega_i\mathscr{D}^*(z)\varphi_i = \mathscr{D}^*(z)\varphi,$$

причем ряд φ'' не содержит уже членов с ω^l, где $|l| < 2$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы для любого $k > 0$ построим ряд $\varphi^{(k)} \in \in p(z)\mathscr{S}^s$, не содержащий членов с ω^l, $|l| < k$ такой, что

$$\mathscr{D}^*(z)\varphi^{(k)} = \mathscr{D}^*(z)\varphi.$$

Так как $\mathscr{D}^*(z)$ есть оператор в $\mathscr{S}^t$, каждый его коэффициент $\delta_i\mathscr{D}^*(z)$ есть функционал над $\mathscr{S}^t$ конечного порядка и, следовательно, обращается в нуль на $\varphi^{(k)}$ при достаточно большом k. Отсюда $\mathscr{D}^*(z)\varphi = 0$, ч. и т. д. ■

§ 3. Основное неравенство для оператора $\mathscr{D}$

1°. Нетеровский оператор. Предположим, что матрица p такова, что подмодуль $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$ примарный. В C^n выберем некоторую систему координат $z = (z_1, \ldots, z_n)$, в которой ассоциированное многообразие $N = N(p)$ нормально расположено. Положим

$$\dim N = d = n - h, \quad v' = (z_1, \ldots, z_h), \quad w' = (z_{h+1}, \ldots, z_n),$$
$$\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_h).$$

В силу нормальности выбранной системы координат многообразие N принадлежит многообразию вида (10.1). Поэтому его пересечение $N_{w'}$ с любым подпространством вида $w' = W'$ состоит из конечного числа точек. С другой стороны, в силу леммы 2 § 1 это пересечение $N_{W'}$ является многообразием, ассоциированным с подмодулем $p_{W'}\mathscr{P}^s_{v'}$ модуля $\mathscr{P}^t_{v'}$. Поэтому этот подмодуль — нульмерный. Следовательно, мы можем применить к этому подмодулю известную теорему Нетера *), которая утверждает, что необходимое и достаточное условие принадлежности полинома $f \in \mathscr{P}^t_{v'}$ подмодулю $p_{W'}\mathscr{P}^s_{v'}$ заключается в том, что в каждой точке $V' \in N_{W'}$ его ряд Тейлора $f(V' + \eta')$ принадлежит подпространству $p(Z)\mathscr{S}^s[\eta']$; здесь мы полагаем $Z = (V', W')$. Это условие называется условием Нетера.

С другой стороны, согласно свойству оператора d^h (см. § 2) условие

$$d^h(Z)f = \sum \eta'^{\tau, i} d^h_{\tau, i}(Z) f = 0, \qquad d^h_{\tau, i} = \delta_{\tau, i} d^h \tag{1.3}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд $f(V' + \eta')$ принадлежал $p(Z)\mathscr{S}^s[\eta']$, т. е. условие (1) совпадает с условием Нетера. Известно, что условие Нетера можно переписать в следующем виде:

$$f \in p(Z)\mathscr{S}^s[\eta'] + m^t_{\varkappa+1}$$

с некоторым $\varkappa \geqslant 0$. В частности, всякий полином, обращающийся в нуль, в точке V' с кратностью не ниже $\varkappa + 1$, удовлетворяет условию Нетера в этой точке. Следовательно, порядки функционалов $d^h_{\tau, i}$ в (1) не превосходят $\varkappa$. С другой стороны, из замечания 1 § 4 гл. II $d^h_{\tau, i}\eta'^{\tau, i} = 1$ для любого $(\tau, i) \in tZ^h_+ \setminus \mathscr{G}$.

*) См., например, Ван дер Варден [1].

Следовательно, порядок каждого ненулевого функционала $d^h_{\tau, l}$ в точности равен $|l|$. Поэтому в сумме (1) присутствуют члены лишь с $|l| \leqslant \varkappa$. Следовательно, условие Нетера в точке V' можно записать так: $d^h_{\tau, l}(Z) f = 0$, $|l| \leqslant \varkappa$.

Пусть $\mathcal{N}^h = \{N^h_\nu\}$ — алгебраическое разбиение, отвечающее p-оператору d^h (см. § 2). Функционалы $d^h_{\tau, l}(z)$ имеют рациональные всюду конечные коэффициенты на каждом множестве $N^h_\nu \setminus N^h_{\nu+1}$. Так как условие Нетера содержательно лишь в точках $V' \in N_{W'}$, то функционалы $d^h_{\tau, l}$ не все равны нулю лишь на многообразии N. Найдем такое ν, что $N^h_\nu \supset N$, но $N^h_{\nu+1} \not\supset N$. Коэффициенты функционалов $d^h_{\tau, l}$ суть рациональные всюду конечные функции на множестве $N \setminus N^h_{\nu+1}$. Так как в каждой точке $z \in N$ лишь конечное число этих функционалов отлично от нуля, то лишь конечное число e этих функционалов отлично от тождественного нуля на $N \setminus N^h_{\nu+1}$. Пусть $\Delta(z)$ — произведение знаменателей коэффициентов этих функционалов. Через N^* обозначим объединение многообразия $N^h_{\nu+1} \cap N$ и пересечения N с многообразием корней $\Delta(z)$. N^* есть собственное подмногообразие неприводимого многообразия N и, следовательно, имеет меньшую размерность согласно лемме 1 § 1. На множестве $N \setminus N^*$ многочлен $\Delta(z)$ не обращается в нуль. Положим

$$d_{\tau, l}(z, D) = \Delta(z) d^h_{\tau, l}(z, D).$$

Здесь $d^h_{\tau, l}(z, D)$ — дифференциальный оператор, полученный из функционала $d^h_{\tau, l}(z)$ заменой в его разложении функционалов $\delta^{\eta'}_l$ на операторы $\frac{1}{l!} D^l_{v'}$. Расположив (векторные) операторы $d_{\tau, l}(z, D)$ в столбец, мы получим матрицу размера $e \times t$. Эту матрицу мы обозначим через $d(z, D)$ и назовем ***нетеровским оператором, ассоциированным с матрицей*** p.

2°. Основное неравенство. Через U_ε, где $\varepsilon > 0$, обозначим замкнутый шар в C^n радиуса ε с центром в начале координат.

Теорема. *Если подмодуль $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ примарный, то p-оператор $\mathcal{D} = d^n$ удовлетворяет следующему неравенству*:

$$\varepsilon^q r(Z) \sup \{|\mathcal{D}(Z, \xi) \varphi(Z)|, \quad |\xi| \leqslant \varepsilon^q r(Z)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \{|d(z, D) \varphi(z)|, \quad z \in N \cap (Z + U_\varepsilon), \quad \rho(z, L) \geqslant \varepsilon^q r(Z)\}. \quad (2.3)$$

Точка $Z \in C^n$, число ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, и функция φ, голоморфная в $Z + U_\varepsilon$, произвольны. L — произвольное собственное алгебраическое подмногообразие N, $r(Z)$ — некоторая степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, не зависящем от L; $q \geqslant 1$.

Доказательство. Скажем, что алгебраическое разбиение $\mathscr{M}$ более частое, чем алгебраическое разбиение $\mathscr{L}$, если имеет место неравенство $c\theta^q(z, \mathscr{M}) \leqslant \theta(z, \mathscr{L})$ с некоторыми положительными c и q.

Индуктивное предложение. *Пусть m — целое число, заключенное между h и n. Положим $v=(z_1, \ldots, z_m)$, $w=(z_{m+1}, \ldots, z_n)$, $\eta=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$.* Имеет место неравенство

$$\varepsilon^{q_m} r_m(Z) \sup \{ |d^m(Z, \eta)\varphi(Z)|, \quad |\eta| \leqslant \varepsilon^{q_m} r_m(Z) \} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \{ |d(z, D)\varphi(z)|, \quad z \in N \cap (Z+U_\varepsilon), \quad \rho(z, L) \geqslant \varepsilon^{q_m} r_m(z) \}. \tag{3.3}$$

Здесь Z — произвольная точка, не принадлежащая многообразию $C_v \times \mu_m$, где μ_m — некоторое собственное подмногообразие C_w, функция φ голоморфна в $Z+U_\varepsilon$, $0<\varepsilon \leqslant 1$, $r_m(Z) \leqslant \rho_m(Z)$ — некоторая степенная функция на некотором разбиении $\mathscr{N}^m$, более частом чем $\mathscr{N}^m$, а q_m — положительная константа.

При $m=n$ из этого неравенства вытекает теорема. Докажем индуктивное предложение. Рассмотрим сначала случай $h=n$. В этом случае многообразие N, будучи неприводимым и нульмерным, сводится к одной точке. Следовательно, подмногообразие L пусто, а $\Delta(z) \equiv 1$. Поэтому неравенство (3) очевидно.

Предположим теперь, что $h<n$. Зафиксируем некоторое целое m, $h \leqslant m < n$, и предположим, что индуктивное предложение справедливо для этого числа m. Докажем его для $m+1$.

3°. Две леммы.

Лемма 1. *Существуют алгебраическое разбиение $\hat{\mathscr{N}} = \{\hat{N}_\nu\}$ и целое ν_0, удовлетворяющие следующим условиям.*

1. *Разбиение $\hat{\mathscr{N}}$ более частое, чем $\hat{\mathscr{N}}^m$.*

2. *Если $\nu < \nu_0$, то для многообразия $\hat{N}_\nu$ имеет место утверждение* II *предложения* 5 § 1 (относительно разбиения (v, w)), *причем его дискриминантное подмногообразие принадлежит $\hat{N}_{\nu+1}$.*

3. *Имеют место включения*

$$C_v \times \mu_m \subset \hat{N}_{\nu_0} \subset C_v \times \lambda_m,$$

где λ_m — некоторое собственное подмногообразие в C_w.

Доказательство. Пусть $\hat{\mathscr{N}}^m = \{\hat{N}_\nu^m\}$. Положим $\hat{N}_0 = C^n$. Допустим, что для некоторого целого $k \geqslant 0$ мы построили убывающую последовательность многообразий $\hat{N}_0, \ldots, \hat{N}_k$, содержащих $C_v \times \mu_m$, удовлетворяющих условию 2 с $\nu=0, \ldots, k-1$. Построим многообразие $\hat{N}_{k+1}$ так, чтобы удовлетворить условиям 2 или 3 с $\nu=k$. К многообразию $\hat{N}_k$ применим предложение 5 § 1.

Предположим, что для него имеет место утверждение I. Тогда мы можем положить $\nu_0 = k$.

Теперь допустим, что для многообразия $\hat{N}_k$ справедливо утверждение II предложения 5 § 1. Пусть N' — некоторая неприводимая компонента $\hat{N}_k$, для которой также справедливо утверждение II, а N_δ — ее дискриминантное подмногообразие. Через $\hat{N}_{k+1}$ мы обозначим объединение остальных неприводимых компонент многообразия $\hat{N}_k$, наибольшего из многообразий $\hat{N}_k \cap N^m_\nu$, не содержащих N', а также многообразий N_δ и $C_v \times \mu_m$. Понятно, что, построив многообразие $\hat{N}_{k+1}$, мы удовлетворили условию 2 с $\nu = k$, причем мы считаем, что $k < \nu_0$.

Так как многообразие $\hat{N}_{k+1}$ строго меньше $\hat{N}_k$, то, продолжая это построение, мы придем к такому многообразию $\hat{N}_k$, для которого справедливо утверждение I предложения 5 § 1. Положив $\nu_0 = k$, мы удовлетворим условие 3. Далее, через $\hat{N}_{\nu_0+1}$ мы обозначим наибольшее из многообразий $\hat{N}_{\nu_0} \cap \hat{N}^m_\nu$, не содержащих $\hat{N}_{\nu_0}$, через $\hat{N}_{\nu_0+2}$ — наибольшее из многообразий $\hat{N}_{\nu_0+1} \cap \hat{N}^m_\nu$, не содержащих $\hat{N}_{\nu_0+1}$ и т. д. Искомое разбиение $\hat{\mathcal{N}} = \{\hat{N}_k\}$ построено. Остается проверить выполнение условия 1. Из построения видно, что для любого ν можно найти такое ν', что $\hat{N}_\nu \setminus \hat{N}_{\nu+1} \subset \hat{N}^m_{\nu'} \setminus \hat{N}^m_{\nu'+1}$. Из этого включения, а также из предложения 2 § 3 гл. II следует, что на множестве $\hat{N}_\nu \setminus \hat{N}_{\nu+1}$ имеет место неравенство

$$\rho(z, \hat{N}_{\nu+1}) \leqslant \rho(z, \hat{N}_\nu \cap \hat{N}^m_{\nu'+1}) \leqslant C\left(\frac{\rho(z, \hat{N}^m_{\nu'+1})}{|z|^2+1}\right)^q$$

с некоторыми положительными C и q. Отсюда вытекает неравенство $c\theta^q(z, \hat{\mathcal{N}}) \leqslant \theta(z, \hat{\mathcal{N}}^m)$, где $c > 0$ и $q > 0$, которое означает, что разбиение $\hat{\mathcal{N}}$ более частое, чем $\hat{\mathcal{N}}^m$. ∎

Лемма 2. *В каждой точке $Z \in C^n \setminus \hat{N}_{\nu_0}$ тождественный оператор E в пространстве $\mathfrak{G}^t[\xi]$ допускает следующее разложение:*

$$E = \mathcal{D}^m(Z) + p(Z)\,\mathcal{G}^m(Z), \tag{4.3}$$

где для любого числа β, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mathcal{D}^m(Z)$ и $\mathcal{G}^m(Z)$ суть операторы из $\mathfrak{G}^t_\beta$ в $\mathfrak{G}^t_{\beta\hat{r}}$, соответственно в $\mathfrak{G}^s_{\beta\hat{r}}$, причем оператор $\mathcal{D}^m$ удовлетворяет неравенству

$$\hat{r}\sup\{|\mathcal{D}^m(Z, \xi)\varphi(Z)|,\ \ |\xi| \leqslant \beta\hat{r}\} \leqslant \sup\{r_m(z)\,|d^m(z, \eta)\varphi(z)|,$$
$$|z - Z| \leqslant \beta,\ \ \hat{r} \leqslant r_m(z),\ \ |\eta| \leqslant \beta r_m(z)\}, \tag{5.3}$$

где φ — произвольная функция, голоморфная в $Z + U_\beta$, а $\hat{r} = \hat{r}(Z)$ — некоторая степенная функция на разбиении $\hat{\mathcal{N}}$, причем $\hat{r}(Z) \leqslant \leqslant r_m(Z)$.

Доказательство. Множество $C^n \setminus \widehat{N}_{\nu_0}$ есть объединение множеств $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$ с $\nu < \nu_0$. Зафиксируем произвольное $\nu < \nu_0$ и докажем лемму для точек множества $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$. Из леммы 1 следует, что существует разбиение переменных z на две группы $\widehat{v}$ и $\widehat{w}$ такое, что группа $\widehat{w}$ содержит переменные группы w, а множество $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$ в окрестности любой своей точки является графиком некоторой голоморфной функции $\widehat{v} = \widehat{v}(\widehat{w})$, удовлетворяющей неравенству

$$|\operatorname{grad} \widehat{v}(\widehat{w})| \leqslant c\theta^{-q}(\widehat{w}, \widehat{\mu}), \tag{6.3}$$

где $\widehat{\mu}$ — проекция на $C_{\widehat{w}}$ дискриминантного подмногообразия $\widehat{N}_\nu$.

Пусть Z — произвольная точка множества $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$, а $(\widehat{V}, \widehat{W})$ ее $(\widehat{v}, \widehat{w})$-координаты. Рассмотрим в $C_{\widehat{w}}$ шар $\widehat{U}$ с центром в точке $\widehat{W}$ радиуса $\frac{1}{2}\rho(\widehat{W}, \widehat{\mu})$. Он, очевидно, не пересекается с $\widehat{\mu}$, следовательно, над каждой его точкой множество $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$ состоит из конечного числа кусков, каждый из которых является графиком голоморфной функции вида $\widehat{v} = \widehat{v}(\widehat{w})$. Голоморфную функцию такого вида, определяющую множество $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$ в окрестности точки Z, мы можем продолжить по аналитичности на весь шар $\widehat{U}$. Тем самым мы получим голоморфную поверхность вида $\widehat{v} = \widehat{v}(\widehat{w})$, $\widehat{w} \in \widehat{U}$ которая в своей окрестности совпадает с той частью множества $\widehat{N}_\nu \setminus \widehat{N}_{\nu+1}$, которая лежит над $\widehat{U}$.

Для каждой точки $z \in C_{\widehat{v}} \times \widehat{U}$ через $z_0(z)$ обозначим ее проекцию на эту поверхность параллельно осям $\widehat{v}$, т. е. точку $(\widehat{v}(\widehat{w}), \widehat{w})$, где $z = (\widehat{v}, \widehat{w})$. Построим степенную функцию $\widehat{r} = \widehat{r}(Z) = \widehat{c}\theta^{\widehat{q}}(Z, \widehat{\mathscr{N}})$ так, чтобы для любого числа β, $0 < \beta \leqslant 1$, и точки $z \in Z + U_{\beta\widehat{r}}$ были выполнены неравенства

$$|z - Z| \leqslant \frac{1}{2}\theta(\widehat{W}, \widehat{\mu}), \tag{7.3}$$

откуда вытекает, что $z \in C_{\widehat{v}} \times \widehat{U}$,

$$\theta(z_0(z), \widehat{\mathscr{N}}) \geqslant \frac{1}{2}\theta(Z, \widehat{\mathscr{N}}), \tag{8.3}$$

$$|z_0(z) - Z| \leqslant \frac{\beta}{8} r_m(z_0(z)) \tag{9.3}$$

и

$$|z - z_0(z)| \leqslant \frac{\beta}{4} r_m(z_0(z)). \tag{10.3}$$

Мы имеем $\rho(\hat{w}, \hat{\mu}) = \rho(z, C_{\hat{v}} \times \hat{\mu})$. Из включения $\hat{N}_{\nu+1} \supset (C_{\hat{v}} \times \hat{\mu}) \cap \hat{N}_\nu$ и предложения 2 § 3 гл. II вытекает неравенство

$$c\left(\frac{\rho(z, \hat{N}_{\nu+1})}{|z|^2+1}\right)^q \leqslant \rho(\hat{w}, \hat{\mu}).$$

Следовательно, выбрав $\hat{c}$ и $\hat{q}$ подходящим образом, мы получим неравенство $\hat{r} \leqslant \frac{1}{4}\theta(\hat{W}, \hat{\mu})$. Тем самым неравенство (7) установлено. Если число $\hat{c}$ достаточно мало, а $\hat{q} \geqslant 0$, то $\hat{r} \leqslant \frac{1}{4}$. Отсюда

$$\theta(\hat{w}, \hat{\mu}) = \frac{\rho(\hat{w}, \hat{\mu})}{|\hat{w}|^2+1} \geqslant \frac{\frac{3}{4}\rho(\hat{W}, \hat{\mu})}{\frac{5}{4}|\hat{W}|^2+\frac{3}{2}} \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho(\hat{W}, \hat{\mu})}{|\hat{W}|^2+1} = \frac{1}{2}\theta(\hat{W}, \hat{\mu}) \tag{11.3}$$

при условии $|w - W| \leqslant \hat{r}$. Из неравенств (6) и (11) следует, что при этом условии

$$|\operatorname{grad} \hat{v}(\hat{w})| \leqslant c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}).$$

Так как $\hat{V} = \hat{v}(\hat{W})$, то

$$|\hat{v}(\hat{w}) - \hat{V}| = |\hat{v}(\hat{w}) - \hat{v}(\hat{W})| \leqslant$$
$$\leqslant |\hat{w} - \hat{W}| \sup\{|\operatorname{grad} \hat{v}(\hat{w})|, |\hat{w} - \hat{W}| \leqslant \hat{r}\} \leqslant |\hat{w} - \hat{W}|\, c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}),$$

откуда

$$|z_0(z) - Z| = |(\hat{v}(\hat{w}) - \hat{V}, \hat{w} - \hat{W})| \leqslant |z - Z|\left(c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}) + 1\right).$$

Таким образом, если выполнено неравенство

$$\hat{r}\left(c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}) + 1\right) \leqslant \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\theta(Z, \mathscr{N})\right),$$

то неравенство (8) также имеет место. Подобрав константы $\hat{c}$ и $\hat{q}$ надлежащим образом, мы удовлетворим и это неравенство.

Аналогичным образом, чтобы получить неравенство (9), достаточно функцию $\hat{r}$ подчинить условию

$$\beta\hat{r}\left(c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}) + 1\right) \leqslant \frac{\beta}{8} r_m(z_0(z)). \tag{12.3}$$

Так как разбиение $\mathscr{N}$ более частое, чем $\mathscr{N}^m$, а на множестве $Z + U_{\beta\hat{r}}$ имеет место неравенство (8), то $r_m(z_0(z)) \geqslant c''\theta^{q''}(Z, \mathscr{N})$ с некоторыми $c'' > 0$ и q''. Следовательно, для выполнения неравенства (12) достаточно, чтобы

$$\hat{r}\left(c'\theta^{-q'}(\hat{W}, \hat{\mu}) + 1\right) \leqslant \frac{1}{8} c''\theta^{q''}(Z, \mathscr{N}).$$

Это неравенство также можно удовлетворить подходящим подбором констант $\hat{c}$ и $\hat{q}$. Заметим, что из неравенства (12) в области $Z+U_{\beta\hat{r}}$ мы имеем $|z-Z|\leqslant\beta\hat{r}\leqslant\frac{\beta}{8}r_m(z_0(z))$, что в сочетании с (9) влечет неравенство (10). Итак, искомая функция $\hat{r}$ построена.

Пусть φ — произвольная функция, голоморфная в $Z+U_\beta$, а z — произвольная точка шара $Z+U_{\beta\hat{r}}$. Из неравенства (9) $|z_0(z)-Z|\leqslant\frac{\beta}{8}$ (так как $r_m\leqslant 1$), следовательно, функция φ голоморфна в $\frac{\beta}{2}$-окрестности точки $z_0(z)$. Положим

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^m(Z,\ z-Z)\varphi(Z)&=d^m(z_0(z),\ \hat{v}-\hat{v}(\hat{w}))\varphi(z_0(z)),\\ \mathscr{G}^m(Z,\ z-Z)\varphi(Z)&=g^m(z_0(z),\ \hat{v}-\hat{v}(\hat{w}))\varphi(z_0(z)).\end{aligned}\tag{13.3}$$

Здесь $\hat{v}-\hat{v}(\hat{w})$ — вектор пространства $C_{\hat{v}}$, рассматриваемого как координатное подпространство в C_v. Из неравенства (2.2) следует, что правые части (13) при любом $\hat{w}$ голоморфны по $\hat{v}$ в шаре

$$|\hat{v}-\hat{v}(\hat{w})|\leqslant\beta r_m(z_0(z)),\tag{14.3}$$

так как $r_m(z_0(z))\leqslant\rho_m(z_0(z))$. Заметим, что из (10) вытекает, что это неравенство заведомо выполнено, если $z\in Z+U_{\beta\hat{r}}$.

Функции (13) голоморфны также по $\hat{w}$, если $z\in Z+U_{\beta\hat{r}}$. Действительно, эти функции суть суммы абсолютно сходящихся в области (14) рядов

$$\sum(\hat{v}-\hat{v}(\hat{w}))^l d_l^m(z_0(z))\varphi(z_0(z)),$$
$$\sum(\hat{v}-\hat{v}(\hat{w}))^l g_l^m(z_0(z))\varphi(z_0(z)),$$

в которых функция $\varphi(z_0(z))$ и коэффициенты функционалов $d_l^m(z_0(z))$ и $g_l^m(z_0(z))$ суть голоморфные функции $z_0(z)$ и, следовательно, голоморфные функции z.

Итак, мы доказали, что функции (13) голоморфны в $Z+U_{\beta\hat{r}}$. Более того, мы установили, что $\mathscr{G}^m$ есть непрерывный оператор из $\mathfrak{G}_\beta^t$ в $\mathfrak{G}_{\beta\hat{r}}^s$. Неравенство (5) вытекает из (13), (12) и (9). ■

4°. Доказательство индуктивного предложения. Положим $v^*=(z_1,\ldots,z_{m+1})=(v,z_{m+1})$, $w^*=(z_{m+2},\ldots,z_n)$, $\eta^*=(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1})$, а через C_{v^*} и C_{w^*} обозначим соответствующие координатные подпространства в C^n.

Пусть $q(w)$ — некоторый отличный от тождественного нуля многочлен, образующийся в нуль на многообразии λ_m, построенном в лемме 1. Пусть λ — многообразие корней q, ν — его порядок относительно z_{m+1} и $q_0(w^*)$ — старший коэффициент. Если $m=h$, то многочлен q мы подчиним дополнительным условиям: он обращается в нуль на L и $q_0(w^*)\equiv\text{const}\neq 0$. Последнее условие можно удовлетворить, выбрав подходящим образом систему координат в пространстве C_w. Заметим, что замена координат в этом пространстве не влияет на предыдущие рассуждения с $m=h$.

Применим теорему 2 § 1 к матрице p и разбиению переменных z на группы v^* и w^*. Пусть $\mu\subset C_{w^*}$ — многообразие, возникающее в этой теореме. Через μ_{m+1} обозначим объединение μ и многообразия корней q_0. Пусть $\check{\mathscr{N}}=\{\check{N}_\nu\}$ — произведение разбиений $\hat{\mathscr{N}}$, $\mathscr{N}^{m+1}$, $\mathscr{N}^n$ и разбиения $C^n\supset C_{v^*}\times\mu_{m+1}\supset\phi$. Отметим, что если $m=h$, то $q_0\equiv\text{const}\neq 0$ и поэтому многообразие μ_{m+1}, а следовательно, и разбиение $\check{\mathscr{N}}$ не зависят от многообразия L.

Пусть $Z=(V,\ Z_{m+1},\ W^*)$ — произвольная точка множества $C^n\setminus(C_{v^*}\times\mu_{m+1})$, а ε — произвольное положительное число, не превосходящее единицы. Рассмотрим комплексную прямую l, параллельную оси z_{m+1}, определяемую уравнениями $v=V$, $w^*=W^*$. На этой прямой находится ν корней многочлена $q(w)$. Рассмотрим $\nu+1$ окружность $|z_{m+1}-Z_{m+1}|=\gamma\frac{k}{\nu+1}$, $k=1,\ \ldots,\ \nu+1$, расположенную на прямой l. Здесь γ — некоторая, пока не определенная величина, не превосходящая $\varepsilon/4$. По крайней мере, одна из этих окружностей S находится на расстоянии, не меньшем $\gamma\frac{1}{2(\nu+1)}$ от корней многочлена q, расположенных на l. На этой прямой $|q(w)|$ равен произведению расстояний от точки w до этих корней, умноженному на $|q_0(W^*)|$. Следовательно, на S

$$|q(w)|\geqslant|q_0(W^*)|\left(\frac{\gamma}{2(\nu+1)}\right)^\nu.$$

Так как корни многочлена q_0 принадлежат μ_{m+1}, то из правого неравенства (8.3) гл. II следует, что

$$|q_0(W^*)|\geqslant C\theta^q(W^*,\ \mu_{m+1})\geqslant C\theta^q(Z,\ C_{v^*}\times\mu_{m+1})\geqslant c_1\theta^{q_1}(Z,\ \check{\mathscr{N}}).$$

Поэтому $|q(w)|\geqslant c_2(\gamma\theta(Z,\ \check{\mathscr{N}}))^{q_2}$ с некоторыми положительными c_2 и q_2. Отсюда в силу левого неравенства (8.3) гл. II расстояние от S до многообразия корней q не меньше $\delta=c_3(\gamma\theta(Z,\ \check{\mathscr{N}}))^{q_3}$, где c_3 и q_3 — некоторые положительные константы. Будем предполагать, что эти константы выбраны так, что $\delta\leqslant\varepsilon$. Поскольку многочлен q зависит лишь от переменных w, расстояние от цилиндра $C_v\times S$ до многообразия корней q также не меньше δ.

Пусть z^0 — произвольная точка окружности S, а $e^{z^0,R}$ — в соответствии с обозначениями § 5 гл. III — комплексный эллипсоид с центром в точке z^0, полуосями, параллельными осям координат и равными $R_1=\ \ldots\ =R_m=\varepsilon/8$, $R_{m+1}=\ldots=R_n=\delta/8$. Так как эллипсоид $2e^{z^0, R}$ находится в $\frac{\delta}{2}$-окрестности цилиндра $C_v \times S$, его расстояние до многообразия корней q не меньше $\delta/2$. Поскольку радиус S не превосходит $\varepsilon/4$, а диаметр $2e^{z^0, R}$ не больше $\varepsilon/4$, то эллипсоид $2e^{z^0, R}$ вместе с некоторой окрестностью находится в шаре $Z+U_\varepsilon$.

Пусть φ — некоторая голоморфная в $Z+U_\varepsilon$ функция. Из сказанного выше следует, что она голоморфна в окрестности $2e^{z^0, R}$ и, следовательно, принадлежит пространству $E_1^{z^0, R}$ (см. § 5 гл. III). Рассмотрим функцию $r_z = \hat{r}\rho_n$, где мы полагаем $\hat{r} = \hat{r}(z)$ и $\rho_n = \rho_n(z)$. Она является степенной на произведении разбиений $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^n$ и не превосходит ρ_n (так как $\hat{r} \leqslant 1$). Поэтому мы можем подставить эту функцию в следствие 1 § 5 гл. III. Применив это следствие к функции φ, мы получим разложение

$$\varphi = \varphi_{\mathcal{D}} + p\psi, \tag{15.3}$$

в котором $\varphi_{\mathcal{D}}$ и ψ — голоморфные в $e^{z^0, R}$ функции, причем

$$\sup\left\{\left|\varphi_{\mathcal{D}}(z)\right|,\ z \in e^{z^0, R}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{|z^0|+1}{R}\right)^q \sup\left\{\hat{r}\rho_n \left|d^n(z, \xi)\varphi(z)\right|,\ z \in 2e^{z^0, R},\right.$$
$$\left.\hat{r}\rho_n \geqslant c\left(\frac{R}{|z^0|+1}\right)^q,\ |\xi| \leqslant R^1\hat{r}\rho_n\right\}.$$

Правую часть этого неравенства мы оценим с помощью функции $\mathcal{D}^m(z)\varphi(z)$. Для этого применим разложение (4) к функции φ в произвольной точке $z \in 2e^{z^0, R}$, а затем подействуем оператором d^n. В результате мы получим равенство

$$d^n(z, \xi)\varphi(z) = d^n(z, \xi)\mathcal{D}^m(z)\varphi(z).$$

Положив в (2.2) $m=n$ и $\varepsilon = R^1\hat{r}$, мы приходим к неравенству

$$\sup\left\{\left|d^n(z, \xi)\varphi(z)\right|,\ |\xi| \leqslant R^1\hat{r}\rho_n\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho_n}\sup\left\{\left|\mathcal{D}^m(z, \xi)\varphi(z)\right|,\ |\xi| \leqslant R^1\hat{r}\right\}. \tag{16.3}$$

Полагая в (5) $\beta = R^1$, оценим правую часть (16) величиной

$$\frac{1}{\rho_n}\sup\left\{r_m(\zeta)\left|d^m(\zeta, \eta)\varphi(\zeta)\right|,\ |\zeta - z| \leqslant \beta,\ \hat{r} \leqslant r_m(\zeta),\ |\eta| \leqslant \beta r_m(\zeta)\right\}.$$

Таким образом, окончательно

$$\sup\left\{\left|\varphi_{\mathcal{D}}(z)\right|,\ z \in e^{z^0, R}\right\} \leqslant H(\varphi), \tag{17.3}$$

где

$$H(\varphi)=\frac{1}{\sigma}\sup\{r_m(\zeta)\,|\,d^m(\zeta,\ \eta)\,\varphi(\zeta)\,|,$$
$$z\in 2e^{z^0,R},\ \hat{r}\rho_n\geqslant\sigma,\ |\zeta-z|\leqslant\beta,\ \hat{r}\leqslant r_m(\zeta),\ |\eta|\leqslant\beta r_m(\zeta)\},$$

а $\sigma=\sigma(Z)=c\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^q$ с некоторыми положительными c и q.

Используем теперь теорему § 2, положив в ней $m^*=m+1$. Это возможно, так как по условию точка W^* не принадлежит μ, и поэтому в силу теоремы 2 § 1

$$p(Z)\mathscr{S}^s\cap\xi_{m+1}\mathscr{S}^t=p(Z)\,\xi_{m+1}\mathscr{S}^s,\quad \mathscr{S}=\mathscr{S}[\eta^*].$$

Согласно теореме § 2 имеет место разложение

$$E_{\eta^*}=\mathscr{D}^*(Z)+p(Z)\,\mathscr{G}^*(Z),\tag{18.3}$$

где $\mathscr{D}^*(Z)$ и $\mathscr{G}^*(Z)$ суть операторы из $\mathscr{S}^t$ соответственно в $\mathscr{S}^t$ и $\mathscr{S}^s$, причем оператор $\mathscr{D}^*$ обладает следующими свойствами.

1. *Для любого* α, $0<\alpha\leqslant 1$, *оператор* $\mathscr{D}^*(Z)$ *действует из* $\mathcal{G}^t_\alpha$ *в* $\mathcal{G}^t_{\alpha^q\rho^*}$ *с нормой, не превосходящей* $\frac{1}{\rho^*}$, *где* $\rho^*=\rho^*(Z)$ — *некоторая степенная функция на разбиении* $\mathscr{N}^m$, *а* $q\geqslant 1$ — *константа.*

2. *Оператор* $\mathscr{D}^*(Z)$ *обращается в нуль на подпространстве* $p(Z)\mathscr{S}^s$.

3. *Для любого* t, $|t|\leqslant\alpha^q\rho^*$, *значение функции* $\mathscr{D}^*(Z,\ \eta^*)\varphi$, *где* $\varphi\in\mathcal{G}^t_\alpha$, *на подпространстве* $\xi_{m+1}=t$ *зависит лишь от значений функции* φ *на этом же подпространстве.*

Следующий, центральный шаг доказательства заключается в том, чтобы оценить действие оператора $\mathscr{D}^*(Z)$ на φ через верхнюю грань величины $H(\varphi)$ на окружности S в форме неравенства (23). Далее, выражая оператор d^{m+1} через $\mathscr{D}^*$ и подставляя в это неравенство, мы после некоторых упрощений совершим переход от m к $m+1$ в индуктивном предложении. Пусть z^0_{m+1} есть z_{m+1}-координата точки z^0. В равенстве (15) положим $w=(z^0_{m+1},\ W^*)$:

$$\varphi(v,\ z^0_{m+1},\ W^*)=\varphi_{\mathscr{D}}(v,\ z^0_{m+1},\ W^*)+p(v,\ z^0_{m+1},\ W^*)\,\psi(v,\ z^0_{m+1},\ W^*).\tag{19.3}$$

Функции $\varphi_{\mathscr{D}}(v,\ z^0_{m+1},\ W^*)$ и $\psi(v,\ z^0_{m+1},\ W^*)$, рассматриваемые как функции переменных v^*, постоянные относительно z_{m+1}, обозначим соответственно через $\hat{\varphi}_{\mathscr{D}}(v^*)$ и $\hat{\psi}(v^*)$. Из (19)

$$\varphi(v^*,\ W^*)|_{z_{m+1}=z^0_{m+1}}=\{\hat{\varphi}_{\mathscr{D}}(v^*)+p(v^*,\ W^*)\,\hat{\psi}(v^*)\}\,|_{z_{m+1}=z^0_{m+1}}.\tag{20.3}$$

Так как функция φ голоморфна в $Z+U_\varepsilon$, а функции $\varphi_{\mathscr{D}}$ и ψ — в $e^{z^0, R}$, функции (20) голоморфны по v^* в $\frac{\varepsilon}{8}$-окрестности точки $V^*=(V, Z_{m+1})$. Применим к этим функциям в точке V^* оператор $\mathscr{D}^*(Z)$. Согласно его свойству 1 мы получим функции

$$\mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\varphi(Z), \ \mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\left\{\widehat{\varphi}_{\mathscr{D}}(V^*)+p(Z)\widehat{\psi}(V^*)\right\}, \tag{21.3}$$

голоморфные в шаре

$$|v^*-V^*|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^q\rho^*. \tag{22.3}$$

Константе γ, фигурирующей в конструкции окружности S, мы придадим сейчас фиксированное значение: $\gamma=\varepsilon^q\rho'$, $\rho'=8^{-q-1}\rho^*$. При этом мы предполагаем, что $\rho^*\leqslant 1$, $q\geqslant 1$, следовательно, $\gamma\leqslant\varepsilon/4$, как это предполагалось ранее. Очевидно, что любая точка окружности S принадлежит шару (22) вместе со своей γ-окрестностью. Поэтому функции (21) голоморфны в γ-окрестности S.

Функции (21), вообще говоря, не совпадают, однако согласно свойству 3 оператора $\mathscr{D}^*(Z)$ значения этих функций при $z_{m+1}=z^0_{m+1}$ зависят лишь от значений функций (20) при $z_{m+1}=z^0_{m+1}$. Поэтому из равенства (20) и свойства 2

$$\mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\varphi(Z)\big|_{z_{m+1}=z^0_{m+1}}=\mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\varphi_{\mathscr{D}}(Z)\big|_{z_{m+1}=z^0_{m+1}}.$$

Применив свойство 1 с $\alpha=\frac{\varepsilon}{8}$ и неравенство (17), мы получим

$$\sup\left\{\left|\mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\varphi(Z)\big|_{z_{m+1}=z^0_{m+1}}\right|, |v-V|\leqslant\varepsilon^q\rho'\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\rho^*(Z)}\sup\left\{\left|\widehat{\varphi}_{\mathscr{D}}(v^*)\right|, |v-V|\leqslant\frac{\varepsilon}{8}\right\}\leqslant\frac{1}{\rho^*(Z)}H(\varphi).$$

Перейдем в этом неравенстве к верхней грани по окружности S. Слева мы получим верхнюю грань функции $\mathscr{D}^*(Z, v^*-V^*)\varphi(Z)$ на множестве $u\times S$, где u — шар в C_v радиуса $\varepsilon^q\rho'$ с центром в точке V. Так как эта функция голоморфна в шаре (22), содержащем множество $u\times S$, эта верхняя грань не меньше верхней грани по множеству $u\times U$, где U — круг, ограниченный окружностью S. Множество $u\times U$, очевидно, содержит шар $|v^*-V^*|\leqslant\gamma^*=\frac{\gamma}{2(\nu+1)}$. Итак,

$$\sup\{|\mathscr{D}^*(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*|\leqslant\gamma^*\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\rho^*}\sup\{H(\varphi), z^0\in S\} \qquad (\eta^*=v^*-V^*). \tag{23.3}$$

Действуя разложением (18) на функцию $\varphi(Z+\eta^*)$, а затем применяя оператор $d^{m+1}(Z)$, мы получим

$$d^{m+1}(Z, \eta^*)\varphi(Z) = d^{m+1}(Z, \eta^*)\mathscr{D}^*(Z)\varphi(Z).$$

В силу неравенства (2.2) обе части этого неравенства абсолютно сходятся при $|\eta^*| \leqslant \varepsilon^q \rho''$, где $\rho'' = \rho''(Z)$ — некоторая степенная функция на $\mathscr{N}$. При этом из (23)

$$\sup\{|d^{m+1}(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*| \leqslant \varepsilon^q\rho''\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho''}\sup\{|\mathscr{D}^*(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*| \leqslant \gamma^*\} \leqslant \frac{1}{\rho''\rho^*}\sup\{H(\varphi), z^0 \in S\} =$$
$$= \frac{1}{\rho''\rho^*\sigma}\sup\{r_m(\zeta)|d^m(\zeta, \eta)\varphi(\zeta)|, z^0 \in S, z \in 2e^{z^0, R},$$
$$\hat{r}(z)\rho_n(z) \geqslant \sigma, |\zeta - z| \leqslant \beta, \hat{r}(z) \leqslant r_m(\zeta), |\eta| \leqslant \beta r_m(\zeta)\}. \quad (24.3)$$

В правой части этого неравенства

$$|\zeta - Z| \leqslant |\zeta - z| + |z - z^0| + |z^0 - Z| \leqslant \beta +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{4} + \gamma \leqslant R^1 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \varepsilon,$$

а

$$r_m(\zeta) \geqslant \hat{r}(z) \geqslant \hat{r}(z)\rho_n(z) \geqslant \sigma(Z) = c\left(\frac{R}{|Z|+1}\right)^q \geqslant \varepsilon^{q'} r^*(Z),$$

где $r^*(Z)$ — некоторая подходящая степенная функция на $\mathscr{N}$. Следовательно, из (24) вытекает неравенство

$$\rho''\rho^*\sigma\sup\{|d^{m+1}(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*| \leqslant \varepsilon^q\rho''\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{r_m(\zeta)|d^m(\zeta, \eta)\varphi(\zeta)|, |\zeta - Z| \leqslant \varepsilon, r_m(\zeta) \geqslant \varepsilon^{q'} r^*(Z),$$
$$|\eta| \leqslant \varepsilon r_m(\zeta)\}. \quad (25.3)$$

Предположим теперь, что $m > h$. Тогда, применяя индуктивное предложение для оценки правой части (25), мы получим неравенство

$$\rho''\rho^*\sigma\sup\{|d^{m+1}(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*| \leqslant \varepsilon^q\rho''\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{|d(\zeta', D)\varphi(\zeta')|, \zeta' \in N \cap (\zeta + U_\varepsilon), \rho(\zeta', L) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon^{qm} r_m(\zeta), |\zeta - Z| \leqslant \varepsilon, r_m(\zeta) \geqslant \varepsilon^{q'} r^*(Z)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{|d(\zeta', D)\varphi(\zeta')|, \zeta' \in N \cap (Z + U_{2\varepsilon}), \rho(\zeta', L) \geqslant \varepsilon^{q'+qm} r^*(Z)\}.$$
$$(26.3)$$

Заменив здесь 2ε на ε, мы придем к неравенству (3) с $m+1$ вместо m, некоторой подходящей степенной функцией r_{m+1} на разбиении $\mathscr{N}$ и константой $q_{m+1} \geqslant 1$.

Пусть теперь $m=h$. Тогда неравенство (25) можно уточнить следующим образом. Поскольку многочлен q обращается в нуль на L, то $\rho(2e^{z^0, R}, L)\geqslant\frac{\delta}{2}$. Так как в правой части (24) $|\zeta-z|\leqslant\beta=R^1\leqslant\frac{\delta}{4}$, то $\rho(\zeta, L)\geqslant\frac{\delta}{4}$. Следовательно, в правой части (25) верхнюю грань мы можем распространить лишь на те ζ, для которых

$$|\zeta-Z|\leqslant\varepsilon, \qquad \rho(\zeta, L)\geqslant\varepsilon^{q^*}r^*(Z).$$

Здесь константу q^* и степенную функцию r^* на разбиении $\tilde{\mathscr{N}}^*$ мы выбираем таким образом, чтобы $\varepsilon^{q^*}r^*(Z)\leqslant\frac{\delta}{4}$. Далее мы имеем

$$d^h(\zeta, \eta)\varphi(\zeta)=\sum_{|l|\leqslant\varkappa}\eta^{\tau, l}d^h_{\tau, l}(\zeta, D)\varphi(\zeta), \tag{27.3}$$

откуда

$$\sup\{|d^h(\zeta, \eta)\varphi(\zeta)|, |\eta|\leqslant\varepsilon\}\leqslant e\max_{\tau, l}|d^h_{\tau, l}(\zeta, D)\varphi(\zeta)|,$$

так как $\varepsilon\leqslant 1$. Следовательно, из (25)

$$\rho''\rho^*\sigma\sup\{|d^{h+1}(Z, \eta^*)\varphi(Z)|, |\eta^*|\leqslant\varepsilon^q\rho''\}\leqslant$$
$$\leqslant e\max_{\tau, l}\sup\{r_h(\zeta)|d^h_{\tau, l}(\zeta, D)\varphi(\zeta)|, |\zeta-Z|\leqslant\varepsilon, \rho(\zeta, L)\geqslant\varepsilon^{q^*}r^*(Z)\}. \tag{28.3}$$

Вспомним теперь, что выбор разбиения $\mathscr{N}^h$ и функции r_h ничем не ограничен. Положим $\mathscr{N}^h=\mathscr{N}^h$, а функцию r_h подчиним условию $r_h(z)\leqslant\Delta(z)$, $z\in N\setminus N^*$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что многообразие L содержит N^*. В таком случае правая часть (28) не превосходит величины

$$\sup\{|d(\zeta, D)\varphi(\zeta)|, \quad |\zeta-Z|\leqslant\varepsilon, \quad \rho(\zeta, L)\geqslant\varepsilon^{q^*}r^*(Z)\}.$$

Тем самым мы установили индуктивное предложение для $m+1=h+1$. Итак, индуктивное предложение доказано для всех m, и, следовательно, доказательство теоремы закончено. ■

5°. Нетеровские операторы для произвольной $\mathscr{P}$-матрицы. Пусть p: $\mathscr{P}^s\to\mathscr{P}^t$ — произвольная $\mathscr{P}$-матрица. Напишем приведенное примарное представление для подмодуля $p\mathscr{P}^s\subset\mathscr{P}^t$:

$$p\mathscr{P}^s=\mathfrak{p}_0\cap\ldots\cap\mathfrak{p}_l.$$

Для любого λ мы можем найти $\mathscr{P}$-матрицу p_λ: $\mathscr{P}^{s_\lambda}\to\mathscr{P}^t$ такую, что $p_\lambda\mathscr{P}^{s_\lambda}=\mathfrak{p}_\lambda$. Так как модуль $\mathfrak{p}_\lambda$ примарный, к матрице p_λ применимы построения 1°. Пусть N^λ и $d^\lambda(z, D)$—ассоциированные с p_λ многообразие и нетеровский оператор. Набор многообразий N^λ и операторов $d^\lambda(z, D)$, $\lambda = 0, \ldots, l$ мы назовем *ассоциированным с матрицей* p.

Следствие 1. *p-оператор $\mathscr{D}$ удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\varepsilon^q r(Z) \sup\{|\mathscr{D}(Z, \xi)\varphi(Z)|, |\xi| \leqslant \varepsilon^q r(Z)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_\lambda \sup\left\{ d^\lambda(z, D)\varphi(z)\right|, z \in N^\lambda(Z+U_\varepsilon), \rho(z, L^\lambda) \geqslant \varepsilon^q r(Z)\big\}. \tag{29.3}$$

Здесь точка $Z \in C^n$, число ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, и функция φ, голоморфная в $Z+U_\varepsilon$, произвольны. L^λ — произвольное собственное подмногообразие N^λ, $\lambda = 0, \ldots, l$, $r(Z)$ — некоторая степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, не зависящем от L^λ, а $q \geqslant 1$ — константа.

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}^\lambda$ — p_λ-оператор, $\lambda = 0, \ldots, l$. Из следствия 1 § 1 вытекает равенство

$$\mathscr{D}(Z) = \sum \Lambda_\lambda(Z)\mathscr{D}^\lambda(Z),$$

где $\Lambda_\lambda(Z)$ — некоторые операторы в $\mathscr{G}^t$, которые при любом δ, $0 < \delta \leqslant 1$, действуют из $\mathscr{G}^t_\delta$ в $\mathscr{G}^t_{\delta\rho}$ с нормой, не превосходящей $\delta^{-q}\rho^{-1}$, где $\rho = \rho(Z)$ — некоторая степенная функция на некотором разбиении $\mathscr{N}'$. Отсюда для любой функции ρ, голоморфной в $Z+U_\delta$, имеет место неравенство

$$\delta^q \rho \sup\{|\mathscr{D}(Z, \xi)\varphi(Z)|, |\xi| \leqslant \delta\rho\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_\lambda \sup\left\{|\mathscr{D}^\lambda(Z, \xi)\varphi(Z)|, |\xi| \leqslant \delta\right\}. \tag{30.3}$$

Применив теорему к матрицам p_λ, мы при любом λ получим неравенство

$$\varepsilon^{q_\lambda} r_\lambda(Z) \sup\left\{|\mathscr{D}^\lambda(Z, \xi)\varphi(Z)|, |\xi| \leqslant \varepsilon^{q_\lambda} r_\lambda(Z)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\left\{|d^\lambda(z, D)\varphi(z)|, z \in N^\lambda \cap (Z+U_\varepsilon), \rho(z, L^\lambda) \geqslant \varepsilon^{q_\lambda} r_\lambda(Z)\right\} \tag{31.3}$$

на функциях φ, голоморфных в $Z+U_\varepsilon$. Здесь $r_\lambda(Z)$ — степенная функция на некотором разбиении N^λ. Положим $q = \max q_\lambda$, через $\mathscr{N}$ обозначим произведение всех разбиений $\mathscr{N}^\lambda$, $\mathscr{N}'$ и подберем степенную функцию r на $\mathscr{N}$ такую, что $r \leqslant \min r_\lambda$. Подставим $\delta = \varepsilon^q r(Z)$ в (30) и скомбинируем это неравенство с неравенствами (31). Мы придем к неравенству (29), в котором r — степенная функция на разбиении $\mathscr{N}$. ■

§ 4. Нетеровские операторы

Приведенная в § 3 конструкция нетеровских операторов допускает большой произвол. Например, выбор другой системы координат в C^n приводит к другим нетеровским операторам. Понятно, что существуют и другие способы построения операторов $d(z, D)$, удовлетворяющих теореме § 3. Сейчас мы опишем некоторые классы дифференциальных операторов, обладающих этим свойством.

1°. Нетеровские операторы в широком смысле слова. Зафиксируем $\mathcal{P}$-матрицу p: $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^t$.

Определение 1. Предположим, что подмодуль $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ примарный. Матрицу $\partial(z, D)$ размера $E \times t$ назовем *нетеровским оператором* (в широком смысле слова), *ассоциированным с матрицей* p, если

I. Эта матрица образована дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами.

II. Существует собственное алгебраическое подмногообразие N_* многообразия $N = N(p)$ такое, что для любой точки $Z \in N \setminus N_*$ условие

$$\partial(z, D)\varphi(z)|_N = 0$$

необходимо и достаточно, для того чтобы функция $\varphi \in \mathscr{O}_Z^t$ принадлежала $p\mathscr{O}_Z^s$.

Многообразие N_* мы будем называть исключительным.

Из теоремы § 3 следует, что оператор $d(z, D)$, построенный в 1°, является нетеровским в широком смысле слова при любом выборе системы координат в C^n, в которой подмодуль $p\mathcal{P}^s$ нормально расположен, причем $N_* = \phi$. На самом деле теорема § 3 сохраняет силу при замене оператора $d(z, D)$ на любой нетеровский оператор в широком смысле слова. Мы установим частный результат, достаточный для наших целей.

Теорема. *Пусть $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ — примарный подмодуль размерности $n - h$, нормально расположенный в системе координат $z = (v, w)$, где $v = (z_1, \ldots, z_h)$, а $w = (z_{h+1}, \ldots, z_n)$. Пусть, далее, $\partial(z, D)$ — нетеровский оператор в широком смысле слова, содержащий дифференцирования лишь по переменным v. Тогда теорема* § 3 *сохраняет силу при замене оператора $d(z, D)$ на оператор $\partial(z, D)$.*

Доказательство. Покажем, что существует матрица Λ, образованная рациональными функциями, такая, что

$$d(z, D) = \Lambda(z)\,\partial(z, D). \tag{1.4}$$

В каждом элементе матрицы $\partial(z, D)$ операторы $\frac{1}{i!} D_v^i$ заменим на функционалы δ_i^η, $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_h)$. Мы получим матрицу $\partial(z, \delta)$, строки которой суть линейные функционалы $\partial_k(z,\ \delta)$: $\mathcal{S}'[\eta]\to C$, $k=1,\ \ldots,\ E$. Пусть γ — наивысший порядок этих функционалов. Рассмотрим матрицу

$$\{\partial_k(z,\ \delta)\,\eta^{\tau,\ i},\quad 1\leqslant k\leqslant E,\ |i|\leqslant\gamma,\ 1\leqslant\tau\leqslant t\}\tag{2.4}$$

размера $E\times t\sum_\gamma$. Пусть M — некоторый минор этой матрицы максимального порядка ρ, не являющийся тождественно вырожденным. Так как матрица (2) образована многочленами, минор M не вырожден на множестве $N\setminus N'$, где N' — некоторое собственное подмногообразие многообразия N. Пусть $\alpha_\sigma=(\tau_\sigma,\ i_\sigma)\in tZ_+^h$, $\sigma=1,\ \ldots,\ \rho$ — номера столбцов, а $1,\ \ldots,\ \rho$ — номера строк, образующих минор M. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_1^\rho\lambda_k(z)\,\partial_k(z,\ \delta)\,\eta^{\alpha_\sigma}=d(z,\ \delta)\,\eta^{\alpha_\sigma},\qquad\sigma=1,\ \ldots,\ \rho,\tag{3.4}$$

относительно неизвестных векторов $\lambda_k(z)$ порядка e (по числу компонент вектора $d(z,\ \delta)\,\eta^{\alpha_\sigma}$). Эта система имеет решение, образованное рациональными функциями, в знаменателях которых стоит многочлен $\det M$. Положим $\lambda_k(z)\equiv 0$ для $k=\rho+1,\ \ldots,\ E$. Покажем, что

$$\sum_1^E\lambda_k(z)\,\partial_k(z,\ \delta)=d(z,\ \delta)\tag{4.4}$$

на множестве $N\setminus N''$, где $N''=N'\cup N_*\cup N_\delta$, а N_δ — дискриминантное подмногообразие N относительно v.

Зафиксируем произвольную точку $Z\in N\setminus N''$. В окрестности Z многообразие N задается уравнением $v=v(w)$, где $v(w)$ — голоморфная функция. Поскольку оператор $\partial(z,\ D)$ содержит дифференцирования лишь по v, то в окрестности Z

$$\partial(z,\ D)(v-v(w))^{\tau,\ i}\big|_N=\partial(z,\ \delta)\,\eta^{\tau,\ i},\qquad(\tau,\ i)\in tZ_+^h,$$

где $(v-v(w))^{\tau,\ i}=(v-v(w))^i e_\tau$, а e_τ — столбец с номером τ единичной матрицы порядка t. Из конструкции оператора $d(z,\ D)$ видно, что он содержит дифференцирования лишь по v и, следовательно, обладает аналогичным свойством.

Зафиксируем произвольную пару $(\tau,\ i)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\sum_\sigma\mu_\sigma(z)\,\partial_k(z,\ \delta)\,\eta^{\alpha_\sigma}=\partial_k(z,\ \delta)\,\eta^{\tau,\ i},\qquad k=1,\ \ldots,\ \rho,$$

относительно функций $\mu_\sigma(w)$, определенных в окрестности W, где $Z=(V,\ W)$. Эта система разрешима, а ее решение есть голоморфная в окрестности W функция, поскольку матрица этой системы есть невырожденный на $N \setminus N'$ минор M. Следовательно,

$$\partial_k(z, \delta)\left(\eta^{\tau, l} - \sum_{\sigma} \mu_\sigma(w)\eta^{\alpha_\sigma}\right) = 0 \tag{5.4}$$

для всех $k = 1, \ldots, \rho$, а также для $k = \rho + 1, \ldots, E$, поскольку строки $\partial_k(z, \delta)$ с $k = 1, \ldots, \rho$ образуют базис среди всех сторон матрицы $\partial(z, \delta)$. Отсюда $\partial(z, D) f(z)|_N = 0$, где

$$f(z) = (v - v(w))^{\tau, l} - \sum_{\sigma} \mu_\sigma(w)(v - v(w))^{\alpha_\sigma} \in \mathcal{O}_Z^l.$$

Так как $\partial(z, D)$ — нетеровский оператор в широком смысле слова, отсюда следует, что $f \in p\mathcal{O}_Z^s$. Поэтому $d(z, D) f(z)|_N = 0$. Так как это равенство выполнено, в частности, в точке Z, то

$$d(Z, \delta)\left(\eta^{\tau, l} - \sum_{\sigma} \mu_\sigma(W)\eta^{\alpha_\sigma}\right) = 0.$$

Комбинируя это равенство с равенствами (3) и (5), получаем

$$\left[\sum_1^E \lambda_k(Z)\partial_k(Z, \delta) - d(Z, \delta)\right]\eta^{\tau, l} = 0.$$

Поскольку пара (τ, l) произвольна, то величина, стоящая в квадратных скобках, равна нулю. Так как точка $Z \in N \setminus N''$ произвольна, отсюда вытекает равенство (4).

Из равенства (4) следует равенство (1), в котором $\Lambda(z)$ — матрица, образованная рациональными функциями, отличными от бесконечности на $N \setminus N''$. В теореме § 3 многообразие L выберем так, чтобы $N'' \subset L$. В силу предложения 2 § 3 гл. II для любого $Z \in N$ и ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, на множестве $N_\varepsilon = [N \cap (Z + U_\varepsilon)] \setminus [L + U_{\varepsilon^{q_r}}]$ имеет место неравенство

$$|\Lambda(z)| \leqslant c\theta^{-q}(z, L) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{q'} r^{q'}}, \qquad r = r(Z).$$

Используя это неравенство для оценки правой части (2.3), мы получим

$$\sup\{|d(z, D)\varphi(z)|,\ z \in N_\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{q'} r^{q'}} \sup\{|\partial(z, D)\varphi(z)|,\ z \in N_\varepsilon\}. \tag{6.4}$$

Учитывая это неравенство в оценке (2.3) и умножая обе части этой оценки на $\varepsilon^{q'} r^{q'}$, мы придем к аналогичной оценке, в которой роль оператора $d(z, D)$ играет оператор $\partial(z, D)$. ■

Нетеровские операторы, удовлетворяющие условию этой теоремы, мы будем называть *нормальными*.

2°. Свойства нормальных нетеровских операторов. Заметим, что класс нетеровских операторов, ассоциированных с данной матрицей p, зависит лишь от подмодуля $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$. Действительно, поскольку $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{E}_Z$ плоский, имеет место равенство

$$p\mathscr{E}_Z^s = p\mathscr{P}^s \otimes \mathscr{E}_Z,$$

т. е. пространство $p\mathscr{E}_Z^s$ зависит лишь от $p\mathscr{P}^s$. Следовательно, мы можем говорить о нетеровских операторах, ассоциированных с данным примарным подмодулем $\mathfrak{p} \subset \mathscr{P}^t$.

Пусть $\mathfrak{p} = p\mathscr{P}^s$ — произвольный подмодуль модуля $\mathscr{P}^t$ и

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l \tag{7.4}$$

— некоторое приведенное примарное представление этого подмодуля. Пусть, далее, $\partial^\lambda(z, D)$, $\lambda = 0, \ldots, l$, — нетеровские операторы, ассоциированные с подмодулями $\mathfrak{p}_\lambda$. Их совокупность мы назовем *ассоциированной с подмодулем* $\mathfrak{p} \subset \mathscr{P}^t$ *и матрицей* p. До конца этого пункта мы зафиксируем произвольную матрицу p и некоторый ассоциированный с ней набор нормальных нетеровских операторов. Пусть $\{N^\lambda\}$ — ассоциированный набор многообразий.

Следствие 1. *Следствие* 1 § 3 *сохраняет свою силу при замене операторов* $d^\lambda(z, D)$ *на операторы* $\partial^\lambda(z, D)$.

Доказательство. Согласно теореме этого параграфа мы можем заменить операторы $d^\lambda(z, D)$ на операторы $\partial^\lambda(z, D)$ в неравенстве (31.3). Это видоизмененное неравенство приводит к неравенству (29.3), в котором проведена аналогичная замена. ■

Следствие 2. *Для любой точки* $Z \in N(p)$ *выполнение равенств*

$$\partial^\lambda(z, D)\varphi(z)\Big|_{N^\lambda} = 0, \qquad \lambda = 0, \ldots, l, \tag{8.4}$$

является необходимым и достаточным условием того, что функция $\varphi \in \mathscr{E}_Z^t$ *принадлежит подпространству* $p\mathscr{E}_Z^s$.

Доказательство. Если равенства (8) имеют место, то согласно следствию 1 $\mathscr{D}(Z)\varphi(Z) = 0$, откуда $\varphi \in p\mathscr{E}_Z^s$. Обратно, пусть $\varphi \in p\mathscr{E}_Z^s$. Тогда из свойства нетеровских операторов следует, что при любом λ равенство (8) имеет место на множестве $N^\lambda \setminus N_*^\lambda$, где N_*^λ — исключительное подмногообразие N^λ. Так как это подмногообразие собственное, а многообразие N^λ неприводимо, то N_*^λ нигде не плотно в N^λ. Поэтому из непрерывности коэффициентов оператора $\partial^\lambda(z, D)$ следует, что равенство (8) выполнено на всем многообразии N^λ. ■

Следствие 3. *Пусть* B — *некоторое множество точек в* C^n *такое, что на каждом многообразии* N^λ, $\lambda = 0, \ldots, l$, *лежит,* *по крайней мере, одна из точек этого множества. Пусть, далее, $\mathcal{M}$ — некоторое семейство мажорант типа $\mathcal{J}$ такое, что $M_\alpha(z) < \infty$ для всех $z \in C^n$ и α. Тогда для того чтобы функция $\varphi \in [\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^t$ принадлежала подпространству $p[\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^s$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух эквивалентных условий:*

I. *Для каждого $Z \in B$*

$$\mathcal{D}(Z)\varphi(Z) = 0.$$

II. *В окрестности каждой точки B имеют место равенства* (8).

Любое из этих условий является также необходимым и достаточным для того, чтобы многочлен $\varphi \in \mathcal{P}^t$ принадлежал $p\mathcal{P}^s$.

Доказательство. Эквивалентность условий I и II вытекает из следствия 2. Необходимость их очевидна. Докажем достаточность условия II. Так как $\Omega_\alpha = C^n$ при любом α, все функции пространства $[\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^t$ целые. При любом λ коэффициенты оператора $\partial^\lambda(z, D)$ суть многочлены, поэтому для любой функции $\varphi \in [\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^t$ функция $\partial^\lambda(z, D)\varphi(z)$ голоморфна на регулярной части многообразия N^λ. По условию равенство (8) выполнено в окрестности некоторой точки $Z \in N^\lambda$. Так как регулярные точки алгебраического многообразия всюду плотны, равенство (8) имеет место в окрестности некоторой регулярной точки Z' многообразия N^λ. По свойству аналитических функций это равенство продолжает выполняться во всех точках этого многообразия, которые можно соединить с Z' кривой, лежащей в регулярной части N^λ. Но, как известно, регулярная часть неприводимого многообразия связна *). Следовательно, равенство (8) справедливо на всей регулярной части, а поэтому, и на всем многообразии N^λ.

Итак, $\partial^\lambda(z, D)\varphi(z) = 0$ тождественно на N^λ, $\lambda = 0, \ldots, l$. Из следствия 2 вытекает, что $\mathcal{D}(z)\varphi(z) \equiv 0$, т. е. $\varphi \in [\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}$. В силу теоремы § 5 гл. III подпространство $[\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}$ совпадает с подпространством $p[\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^s$, следовательно $\varphi \in p[\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{M}}}]^s$, ч. и т. д. Если $\varphi \in \mathcal{P}^t$, то из равенства $\mathcal{D}(z)\varphi(z) \equiv 0$ вытекает, что $\varphi \in p\mathcal{O}_z^s$ при любом $z \in C^n$. Отсюда $\varphi \in p\mathcal{P}^s$ в силу предложения 4 § 1 гл. II. ■

3°. Нормальные нетеровские операторы в некоторых частных случаях. Рассмотрим представление (7). Предположим, что в этом представлении присутствует n-мерная примарная компонента. Так как многообразие, ассоциированное с n-мерным примарным модулем,

---

*) См., например, Эрве [1].

есть C^n, в представлении (7) не более одной n-мерной компоненты, поскольку по условию радикалы модулей $\mathfrak{p}_\lambda$ и, следовательно, многообразия $N(\mathfrak{p}_\lambda)$ все различны. n-мерную примарную компоненту в (7) будем обозначать через $\mathfrak{p}_0$. Если такая компонента отсутствует, положим $\mathfrak{p}_0 = \mathcal{P}^t$.

Предложение 1. *Пусть p_1 — такая $\mathcal{P}$-матрица, что точна последовательность*

$$\mathcal{P}^{t_2} \xrightarrow{p_1'} \mathcal{P}^t \xrightarrow{p'} \mathcal{P}^s \tag{9.4}$$

(p_1' и p' — матрицы, транспонированные по отношению к p_1 и p). *Тогда матрица $p_1(z)$ может служить нормальным нетеровским оператором, ассоциированным с подмодулем $\mathfrak{p}_0 \subset \mathcal{P}^t$.*

Доказательство. Установим точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}_0 \longrightarrow \mathcal{P}^t \xrightarrow{p_1} \mathcal{P}^{t_2}. \tag{10.4}$$

Подмодуль $\mathfrak{p}_0 \subset \mathcal{P}^t$ характеризуется тем, что для любого его элемента F можно найти многочлен $f \neq 0$ такой, что $fF \in p\mathcal{P}^s$. Из точности (9) $p_1 p = 0$. Отсюда $p_1 fF = 0$ и, следовательно, $p_1 F = 0$, так как $f \neq 0$. Поэтому последовательность (10) полуточна.

Пусть $F \in \mathcal{P}^t$ — произвольный элемент, который аннулируется матрицей p_1. Чтобы показать, что $F \in \mathfrak{p}_0$, достаточно найти многочлен $f \neq 0$ такой, что $fF \in p\mathcal{P}^s$. Пусть $\hat{p}$ — некоторый невырожденный тождественно минор матрицы p максимального ранга ρ, а $p_1, \ldots, p_\rho$ — строки этой матрицы, на которых лежит этот минор. Предположим для простоты, что минор $\hat{p}$ лежит в первых ρ столбцах. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} p_\tau G = \det \hat{p} \cdot F_\tau, \quad F = (F_1, \ldots, F_t), \\ G = (G_1, \ldots, G_\rho, 0, \ldots, 0), \quad \tau = 1, \ldots, \rho. \end{gathered} \tag{11.4}$$

Эта система, очевидно, имеет решение $G \in \mathcal{P}^s$. Покажем, что ее решение удовлетворяет также системе

$$pG = \det \hat{p} F. \tag{12.4}$$

Так как на строках $p_1, \ldots, p_\rho$ лежит минор матрицы p максимального ранга, любая другая строка p_τ, $\tau = \rho + 1, \ldots, t$, матрицы p выражается через эти строки следующим образом: $ap_\tau = a_1 p_1 + \ldots$ $\ldots + a_\rho p_\rho$, где a и $a_1, \ldots, a_\rho$ — некоторые многочлены, причем $a \neq 0$. Это равенство можно записать в виде $A'p = 0$ с соответствующим столбцом $A \in \mathcal{P}^t$. Покажем, что $A'F = 0$. Из равенства $A'p = 0$ вытекает, что $p'A = 0$. Поэтому из точности (9) $A \in p_1'\mathcal{P}^{t_2}$, т. е. $A = p_1'B$, где $B \in \mathcal{P}^{t_2}$. Отсюда $A' = B'p_1$ и, следовательно, $A'F = B'p_1 F = 0$, что и требовалось доказать. Этот факт в сочетании с (11) влечет равенства $ap_\tau G = a \det \hat{p} F_\tau$. Поскольку $a \neq 0$, отсюда вытекает, что $p_\tau G = \det \hat{p} F_\tau$. Так как τ произвольно, равенство (12) доказано. Тем самым точность (10) установлена.

Умножив последовательность (10) тензорно на плоский $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{G}_z$, мы получим точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{p}_0 \otimes \mathscr{G}_Z \to \mathscr{G}_Z^t \xrightarrow{p_1} \mathscr{G}_Z^{t_1}.$$

Из ее точности вытекает, что матрица $p_1(z)$ является нетеровским оператором, ассоциированным с $\mathfrak{p}_0$. Его нормальность очевидна. ■

Предложение 2. *Пусть*

$$\mathscr{P}^s \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t \xrightarrow{r} \mathscr{P}^v. \qquad (13.4)$$

— точная последовательность $\mathscr{P}$-отображений. Тогда подмодуль $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$ примарный размерности n, а r — нормальный нетеровский оператор, ассоциированный с этим модулем.

Доказательство. Пусть $fF \in p\mathscr{P}^s$, где $f \in \mathscr{P}$, а $F \in \mathscr{P}^t$. Из точности (13) $rfF = 0$, откуда либо $f = 0$, либо $rF = 0$, т. е. $F \in p\mathscr{P}^s$. Поэтому подмодуль $p\mathscr{P}^s$ примарный, а его радикалом является нулевой идеал, т. е. размерность подмодуля $p\mathscr{P}^s$ равна n. Так как $\mathscr{G}_z$ — плоский $\mathscr{P}$-модуль, из точности (13) вытекает точность последовательности

$$\mathscr{G}_z^s \xrightarrow{p} \mathscr{G}_z^t \xrightarrow{r} \mathscr{G}_z^v.$$

Точность последней означает, что матрица r является нетеровским оператором, ассоциированным с $p\mathscr{P}^s$. Нормальность этого оператора очевидна. ■

Предложение 3. *Пусть $s = t = 1$, а коэффициент многочлена p при старшей степени z_1 есть константа. Пусть*

$$p = p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}$$

— разложение многочлена p в произведение степеней неприводимых многочленов, а N^λ — многообразие корней p_λ, $\lambda = 1, \ldots, l$. Тогда с p ассоциирован набор многообразий N^λ и нормальных нетеровских операторов

$$d^\lambda(z, D) = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial z_1^i}, \ i = 0, \ldots, \alpha_\lambda - 1 \right\}, \qquad \lambda = 1, \ldots, l.$$

Доказательство. Установим равенство

$$p\mathscr{P} = p_1^{\alpha_1}\mathscr{P} \cap \ldots \cap p_l^{\alpha_l}\mathscr{P} \qquad (14.4)$$

и покажем, что оно является приведенным примарным представлением идеала $p\mathscr{P}$. Левая часть, очевидно, принадлежит правой. Обратно, если многочлен f принадлежит правой части, он делится на каждый из многочленов $p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ и, следовательно, делится на их произведение, поскольку они взаимно просты, т. е. принадлежит левой части. Тем самым равенство (14) установлено. Заметим, что при любом λ идеал $p_\lambda^{\alpha_\lambda}\mathscr{P}$ примарный, а его радикал равен $p_\lambda\mathscr{P}$. В самом деле, если произведение многочленов f и g делится на $p_\lambda^{\alpha_\lambda}$, но g не делится на p_λ, то многочлен f обязан делиться на $p_\lambda^{\alpha_\lambda}$. Обратно, если g делится на p_λ, то $g^{\alpha_\lambda} \in p_\lambda^{\alpha_\lambda}\mathscr{P}$. Все радикалы $p_\lambda\mathscr{P}$, $\lambda = 1, \ldots, l$, различны, поскольку различны многочлены p_λ, и никакой из этих идеалов не может содержать пересечения других, так как в противном случае соответствующий неприводимый многочлен p_λ делил бы произведение других неприводимых многочленов. Итак, (14) есть приведенное примарное представление $p\mathscr{P}$.

Многообразие, ассоциированное с идеалом $p_\lambda\mathscr{P}$, есть N^λ; это многообразие нормально расположено, так как старший коэффициент многочлена p по z_1 есть по условию константа. Пусть N_δ^λ — дискриминантное подмногообразие N^λ по отношению к z_1, т. е. подмножество, где равна нулю производная p'_λ по z_1. Зафиксируем произвольную точку $Z \in N^\lambda \setminus N_\delta^\lambda$. В ее окрестности множество $N^\lambda \setminus N_\delta^\lambda$ определяется уравнением $z_1 = \zeta(z')$, где $\zeta(z')$ — голоморфная функция переменных $z' = (z_2, \ldots, z_n)$. Условие

$$d^\lambda(z, D)\varphi(z)\big|_{N^\lambda} = 0, \qquad \varphi \in \mathscr{O}_Z,$$

означает, что при каждом фиксированном z', φ как функция z_1 обращается в точке $z_1 = \zeta(z')$ в нуль с кратностью не ниже α_λ. Так как $p'_\lambda(Z) \neq 0$, это условие необходимо и достаточно для того, чтобы функция φ могла быть записана в виде $p_\lambda^{\alpha_\lambda}\psi$, где $\psi \in \mathscr{O}_Z$. Тем самым мы проверили выполнение определения 1 для матрицы $p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ и оператора $d^\lambda(z, D)$ с $N_* = N_\delta^\lambda$, т. е. $d^\lambda(z, D)$ есть нетеровский оператор. Нормальность его очевидна. ∎

Предложение 4. *Пусть матрица p такова, что модуль $M = \mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s$ нульмерный. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Совокупность точек z^λ, $\lambda = 1, \ldots, l$, множества $N(p)$ образует набор алгебраических многообразий, ассоциированный с матрицей p.*

2. *Пусть $\mathscr{D}(z)$ — p-оператор, а $\mathscr{J}(z)$ — соответствующее базисное множество. Для каждого λ через $d^\lambda(D)$ обозначим столбец, образованный дифференциальными операторами $\mathscr{D}_{\tau, i}(z^\lambda, D)$*

с $(\tau, i) \in tZ_+^n \setminus \mathcal{G}(z^\lambda)$ *). *Совокупность дифференциальных операторов* $d^\lambda(D)$ *образует набор нормальных нетеровских операторов, ассоциированных с* p.

3. *Пусть* $l_\lambda = |tZ_+^n \setminus \mathcal{G}(z^\lambda)|$ — *число элементов в столбце* d^λ. *Сумма* $l = \sum l_\lambda$ *равна размерности модуля* M *как линейного пространства над полем* C.

Доказательство. Из конструкции оператора $d^\lambda(D)$ и следствия 1 § 4 гл. II вытекает, что при любом λ справедливо следующее утверждение:

$$d^\lambda(D)\varphi(z^\lambda) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{O}_{z^\lambda}^t \Longleftrightarrow \varphi \in p\mathcal{O}_{z^\lambda}^s. \tag{15.4}$$

Для каждого λ положим $\mathfrak{p}_\lambda = \mathcal{P}^t \cap p\mathcal{O}_{z^\lambda}^s$. Очевидно, что $\mathfrak{p}_\lambda$ есть подмодуль модуля $\mathcal{P}^t$. Покажем, что этот подмодуль примарный, а его радикал совпадает с идеалом I_λ, образованным всеми многочленами, равными нулю в точке z^λ.

Пусть $\varkappa_\lambda$ — порядок дифференциального оператора d^λ. Очевидно, что для любого многочлена $f \in I_\lambda$ и столбца $F \in \mathcal{P}^t$ столбец $\varphi = f^{\varkappa_\lambda + 1}F$ удовлетворяет условию (15) и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{p}_\lambda$. Отсюда мы заключаем, что $I_\lambda \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$. Так как идеал I_λ максимальный, а радикал $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$ отличен от всего кольца $\mathcal{P}$, поскольку $\mathfrak{p}_\lambda \neq \mathcal{P}^t$, то $I_\lambda = \mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda)$, ч. и т. д.

Остается показать, что подмодуль $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathcal{P}^t$ примарный. Пусть $fF \in \mathfrak{p}_\lambda$, где $f \in \mathcal{P}$, а $F \in \mathcal{P}^t$. Если многочлен f не принадлежит $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}_\lambda) = I_\lambda$, то он обратим в кольце $\mathcal{O}_{z^\lambda}$, следовательно, $F = \frac{1}{f} fF \in p\mathcal{O}_{z^\lambda}$, т. е. $F \in \mathfrak{p}_\lambda$. Отсюда вытекает примарность подмодуля $\mathfrak{p}_\lambda$. Из всего сказанного следует, что точка z^λ есть алгебраическое многообразие, а $d^\lambda(D)$ — нормальный нетеровский оператор, ассоциированный с этим подмодулем.

Установим теперь равенство

$$\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l = p\mathcal{P}^s. \tag{16.4}$$

То, что левая часть содержит правую, очевидно. Обратно, если столбец $F \in \mathcal{P}^t$ принадлежит левой части, то он принадлежит $p\mathcal{O}_z^s$ для любой точки $z \in C^n$. Отсюда согласно предложению 1 § 4 гл. II следует, что $F \in p\mathcal{P}^s$. Тем самым равенство (16) доказано. Заметим, что все модули в левой части являются примарными подмодулями в $\mathcal{P}^t$ и ни один из них не содержит пересечения остальных.

*) Множество $tZ_+^n \setminus \mathcal{G}(z^\lambda)$ конечно, поскольку модуль M нульмерный (см. рассуждения 1° § 3).

Следовательно, (16) есть приведенное примарное представление подмодуля $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$, что завершает доказательство утверждений 1 и 2.

Докажем третье утверждение. Согласно замечанию 2 § 4 гл. II при любом λ все дифференциальные операторы $\mathscr{D}_{\tau, i}(z^\lambda, D)$ с $(\tau, i) \in \in tZ_+^n \setminus \mathscr{J}(z^\lambda)$ линейно независимы. Поэтому линейно независимыми являются все $l = \sum l_\lambda$ линейных условий

$$\mathscr{D}_{\tau, i}(z^\lambda, D) F(z^\lambda) = 0, \quad (\tau, i) \in tZ_+^n \setminus \mathscr{J}(z^\lambda), \quad \lambda = 1, \ldots, l.$$

По доказанному они выделяют подпространство $p\mathscr{P}^s$ в пространстве $\mathscr{P}^t$. Следовательно, число этих условий равно размерности факторпространства $\mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s$. ■

4°. Пример $\mathscr{P}$-матрицы, для которой не существует нетеровского оператора с постоянными коэффициентами. Допустим, что подмодуль $p\mathscr{P}^s$ примарный. Для приложений важно знать, существует ли для этого подмодуля хотя бы один нетеровский оператор с постоянными коэффициентами. Выше мы установили с помощью предложения 3, что такой оператор в случае $s = t = 1$ всегда существует. В общем случае это не так, даже при $t = 1$. В качестве примера мы рассмотрим $\mathscr{P}$-матрицу

$$p = (z_1^2, z_2^2, z_2 - z_1 z_3), \qquad n = 3, \ s = 3, \ t = 1.$$

Соответствующее многообразие $N = N(p)$ есть, очевидно, ось z_3.

Покажем, что для этой матрицы не существует нетеровского оператора с постоянными коэффициентами (несколько позже мы покажем, что подмодуль $p\mathscr{P}^s$ примарный). Предположим противное. Пусть $d = (d_1(D), \ldots, d_e(D))$ — некоторый нетеровский оператор с постоянными коэффициентами. Каждый оператор $d_\alpha(D)$ запишем в виде

$$d_\alpha(D) = \sum_0^\varkappa \frac{\partial^i}{\partial z_3^i} d_\alpha^i(D'), \qquad D' = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right).$$

Так как все многочлены идеала $p\mathscr{P}^3$ обращаются в нуль на оси z_3, все операторы

$$\frac{\partial^i}{\partial z_3^i} d_\alpha^i(D'), \qquad i > 0,$$

обращаются в нуль на этом идеале. Поэтому все операторы $d_\alpha^0(D')$ также обращаются в нуль на идеале $p\mathscr{P}^s$. Заметим, что идеалу $p\mathscr{P}^s$ принадлежат все многочлены вида $z_1^{i_1} \cdot z_2^{i_2}$, $i_1 + i_2 \geqslant 2$, поскольку этому идеалу принадлежат многочлены z_1^2, z_2^2 и $z_1 z_2 = z_1(z_2 - z_1 z_3) + z_3 z_1^2$. Следовательно, все операторы $d_\alpha^0(D')$ имеют порядок не выше первого.

Отбросив у них члены нулевого порядка, мы получим однородные дифференциальные операторы $\hat{d}_\alpha$ первого порядка, которые также обращаются в нуль на $p\mathscr{P}^3$. Пусть λ — число линейно независимых операторов $\hat{d}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, e$. Предположим, что $\lambda = 0$, т. е. все операторы $\overset{0}{d}_\alpha$ нулевого порядка. В таком случае все операторы $d_\alpha(D)$ обращаются в нуль на одночлене z_1, не принадлежащем подпространству $p\overset{3}{\mathscr{O}}{}_Z^{\boldsymbol\cdot}$ ни при каком $Z \in N$. Это противоречит предположению, что оператор d нетеровский.

Таким образом, мы пришли к выводу, что $\lambda > 0$. Следовательно, один из операторов $\hat{d}_\alpha$ имеет вид $a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, где либо a_1, либо a_2 отлично от нуля. Но в этом случае

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(z_2 - z_1 z_3) = a_2 - a_1 z_3.$$

Функция $a_2 - a_1 z_3$, очевидно, не равна тождественно нулю на N, что противоречит предположению о том, что оператор $d(D)$ нетеровский. Полученное противоречие показывает, что для матрицы p не существует нетеровского оператора с постоянными коэффициентами.

Для этой матрицы, однако, весьма просто построить нетеровский оператор с переменными коэффициентами. Например, оператор

$$\partial(z, D) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

является нетеровским. Докажем это. Так как результат применения этого оператора к многочленам z_1^2, z_2^2 и $z_2 - z_1 z_3$ равен нулю на N, этот оператор обращается в нуль на $p\overset{3}{\mathscr{O}}_Z$ для любого $Z \in N$. Обратно, пусть известно, что

$$\partial(z, D)\varphi(z)|_N = 0, \quad \varphi \in \mathscr{O}_Z. \tag{17.4}$$

Покажем, что функция φ принадлежит $p\overset{3}{\mathscr{O}}_Z$. Для этого разложим эту функцию в окрестности точки $Z = (0, 0, Z_3) \in N$ в ряд по степеням z_1 и z_2

$$\varphi(z) = \sum_{i, j} \varphi_{ij}(z_3)\, z_1^i z_2^j.$$

Здесь $\varphi_{ij}(z_3)$ — некоторые функции, голоморфные в окрестности точки Z_3. Из (17) вытекают равенства

$$\varphi_{00}(z_3) \equiv 0, \qquad \varphi_{10}(z_3) + z_3\varphi_{01}(z_3) \equiv 0,$$

откуда

$$\varphi(z) = (z_2 - z_1 z_3)\,\varphi_{01}(z_3) + \sum_{i+j \geqslant 2} \varphi_{ij}(z_3)\, z_1^i z_2^j.$$

Второе слагаемое можно представить в виде

$$z_1^2\psi_1(z) + z_1 z_2 \psi_2(z) + z_2^2 \psi_3(z),$$

где ψ_1, ψ_2 и ψ_3 — некоторые функции, голоморфные в окрестности Z. Следовательно, мы установили, что функция φ принадлежит пространству $p\mathcal{P}^3 \otimes \mathcal{O}_Z = p\mathcal{O}_Z^3$. Поэтому условие (17) действительно необходимо и достаточно для того, чтобы $\varphi \in p\mathcal{O}_Z^3$.

Остается показать, что подмодуль $p\mathcal{P}^3$ примарный. Заметим, что проведенные выше рассуждения показывают также, что условие (17) в применении к многочленам $\varphi \in \mathcal{P}$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\varphi \in p\mathcal{P}^3$. Найдем радикал идеала $p\mathcal{P}^3$. Если многочлен f обращается в нуль на оси z_3, то $f^2 g \in p\mathcal{P}^3$ для любого многочлена $g \in \mathcal{P}$. Обратно, если многочлен f принадлежит $\mathfrak{r}(p\mathcal{P}^3)$, то некоторая его степень принадлежит $p\mathcal{P}^3$. Следовательно, обращается в нуль на оси z_3. Таким образом, идеал $\mathfrak{r}(p\mathcal{P}^3)$ образован многочленами, обращающимися в нуль на оси z_3. Пусть произведение fg принадлежит $p\mathcal{P}^3$, но многочлен f не обращается тождественно в нуль на оси z_3. Тогда из равенства $\partial(z, D) fg|_N = 0$ вытекает, что $\partial(z, D) g|_N = 0$, откуда $g \in p\mathcal{P}^3$. Следовательно, идеал $p\mathcal{P}^3$ действительно примарный.

5°. Нетеровские операторы, ассоциированные с произвольным конечным $\mathcal{P}$-модулем.

Определение 2. *Пусть M — некоторый конечный $\mathcal{P}$-модуль. Выберем некоторое представление этого модуля в виде*

$$M \cong \mathcal{P}^t/\mathfrak{p}. \tag{18.4}$$

Ассоциированным с M набором нетеровских операторов мы назовем набор нетеровских операторов, ассоциированный с подмодулем $\mathfrak{p} \subset \mathcal{P}^t$.

Ассоциированный с M набор нетеровских операторов, конечно, зависит от выбора представления (18) (а также от выбора примарного представления подмодуля $\mathfrak{p}$). Поэтому, говоря об этом наборе, мы будем указывать соответствующее представление модуля M. В следующем параграфе мы покажем, что выбор представления (18) несущественно влияет на вид нормальных нетеровских операторов, ассоциированных с M. Заметим, что из предложения 1 § 1 следует, что совокупность многообразий N^λ, ассоциированная с подмодулем $\mathfrak{p}$, не зависит от представления (18), так как является характеристикой самого модуля M.

Предложение 5. *Пусть z и w — две группы комплексных переменных. Пусть, далее,*

$$M \cong \mathcal{P}_z^t / p\mathcal{P}_z^s, \qquad L \cong \mathcal{P}_w^\tau / q\mathcal{P}_w^\sigma$$

— произвольные $\mathcal{P}_z$- и $\mathcal{P}_w$-модули, а $\{N^\lambda \subset C^n, \partial^\lambda(z, D), \lambda = 0, \ldots, l\}$ и $\{K^\mu \subset C^\nu, g^\mu(w, D), \mu = 0, \ldots, m\}$ — совокупности многообразий и нетеровских операторов, ассоциированные с этими модулями. Рассматривая матрицы p и q как $\mathcal{P}$-матрицы, где

$\mathcal{P}=\mathcal{P}_{z,w}$, построим $\mathcal{P}$-модули $\mathcal{M}=\mathcal{P}^t/p\mathcal{P}^s$ и $\mathcal{L}=\mathcal{P}^\tau/q\mathcal{P}^\sigma$. Тогда

$$\mathrm{Tor}_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})=0, \qquad i\geqslant 1,$$

а $\{N^\lambda\times K^\mu\subset C^{n+\nu},\ \partial^\lambda\otimes g^\mu,\ \lambda=0, \ldots, l;\ \mu=0, \ldots, m\}$ *— есть совокупность многообразий и нетеровских операторов, ассоциированная с модулем $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}$, представленным в виде*

$$\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}\cong\mathcal{P}^{t\tau}/[p\mathcal{P}^{s\tau}+q\mathcal{P}^{t\sigma}]$$

(см. предложение 3 § 3 гл. I). *Если операторы* ∂^λ и g^μ *нормальные, то операторы $\partial^\lambda\otimes g^\mu$ также нормальные.*

Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю.

§ 5. Основная теорема

1°. Голоморфные p-функции.

Определение. Пусть p: $\mathcal{P}^s\to\mathcal{P}^t$ — некоторая $\mathcal{P}$-матрица,

$$p\mathcal{P}^s=\mathfrak{p}_0\cap\ldots\cap\mathfrak{p}_l$$

— некоторое приведенное примарное представление подмодуля $p\mathcal{P}^s\subset\mathcal{P}^t$, а $d=\{d^\lambda(z, D),\ \lambda=0, \ldots, l\}$ — ассоциированный набор нормальных нетеровских операторов. Пусть, далее, Ω — некоторая область в C^n. *Голоморфной в Ω p-функцией* мы назовем любой набор $f=\{f^\lambda,\ \lambda=0, \ldots, l\}$ функций, определенных на множествах $N^\lambda\cap\Omega$, где $N^\lambda=N(\mathfrak{p}_\lambda)$, удовлетворяющих следующему условию. Для любой точки $Z\in\Omega$ найдется голоморфная функция $F_Z\in\mathcal{O}_Z^t$ такая, что в окрестности Z

$$f^\lambda(z)=d^\lambda(z, D)F_Z(z)|_{N^\lambda}, \qquad \lambda=0, \ldots, l.$$

Функции f^λ, $\lambda=0, \ldots, l$, мы будем называть компонентами p-функции f.

Пусть $\mathcal{M}=\{M_\alpha(z)\}$ — некоторое семейство мажорант в C^n и Ω_α, $\alpha=1, 2, \ldots,$ — области, в которых функции M_α конечны. Для каждого α рассмотрим нормированное пространство $\mathcal{H}_\alpha\{p, d\}$, образованное голоморфными в Ω_α p-функциями, для которых конечна следующая норма:

$$\|f\|_\alpha=\max_\lambda\sup_{N^\lambda}\frac{|f^\lambda(z)|}{M_\alpha(z)}.$$

Если $\alpha'\geqslant\alpha$, то определено и непрерывно тождественное отображение $\mathcal{H}_\alpha\{p, d\}\to\mathcal{H}_{\alpha'}\{p, d\}$. Следовательно, пространства $\mathcal{H}_\alpha\{p, d\}$, $\alpha=1, 2, \ldots,$ образуют возрастающую последовательность. т. е. семейство пространств. Это семейство мы обозначим через $\mathcal{H}_\mathcal{M}\{p, d\}$.

Иногда для краткости мы будем писать $\mathscr{H}_\alpha\{p\}$ и $\mathscr{H}_\mathscr{M}\{p\}$ вместо $\mathscr{H}_\alpha\{p, d\}$ и $\mathscr{H}_\mathscr{M}\{p, d\}$.

2°. Изоморфное описание семейства $\mathscr{H}_\mathscr{M}\{p, d\}$. Напомним, что в § 3 гл. III мы рассмотрели семейства ${}^\nu\mathscr{H}_\mathscr{M}$, $\nu = 0, 1, \ldots$. Для любого $\nu \geqslant 0$ ${}^\nu\mathscr{H}_\mathscr{M}$ есть семейство пространств ${}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, где U_α — элементарное покрытие параметра нуль радиуса ε_α, а ${}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)$ — пространство голоморфных коцепей ν-го порядка на покрытии $U_\alpha = \{U_z\}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{\alpha, U_\alpha} = \sup_{z_0, \ldots, z_\nu} \sup\left\{\frac{|\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu}|}{M_\alpha},\ z \in U_{z_0} \cap \ldots \cap U_{z_\nu} \cap \Omega_\alpha\right\}.$$

Пусть $\mathscr{D}$ — p-оператор. Через $[{}^\nu\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ мы обозначили подсемейство $[{}^\nu\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t$, образованное подпространствами $[{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Напомним, что $[{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ есть подпространство в $[{}^\nu\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t$, образованное коцепями φ такими, что $\mathscr{D}\varphi_{z_0, \ldots, z_\nu} \equiv 0$ для любых $z_0, \ldots, z_\nu$.

Очевидно, что кограничный оператор ∂: $[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \to [{}^1\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t$ переводит подпространство $[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ в $[{}^1\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ и, следовательно, порождает оператор, действующий в соответствующих факторпространствах. Через $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$ мы обозначим ядро последнего:

$$\mathfrak{Z}_\alpha(p) = \operatorname{Ker}\{[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t/[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \xrightarrow{\partial} \\ \to [{}^1\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t/[{}^1\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}\}.$$

Через $\mathfrak{Z}_\mathscr{M}(p)$ обозначим семейство, образованное пространствами $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$ и их тождественными отображениями. Очевидно, что $\mathfrak{Z}_\mathscr{M}(p)$ есть ядро отображения

$$\partial:\ [{}^0\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t/[{}^0\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \to [{}^1\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t/[{}^1\mathscr{H}_\mathscr{M}]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}. \tag{1.5}$$

Зафиксируем произвольное натуральное α. Пусть Φ — некоторый элемент пространства $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$. По определению этого пространства Φ есть класс смежности, принадлежащий факторпространству $[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t/[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$, образованный коцепями $\varphi = \sum \varphi_Z U_Z$ такими, что $\partial\varphi \in [{}^1\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$. Из этого включения следует, что функции

$$f^\lambda(z) = d^\lambda(z, D)\varphi_Z(z)\big|_{N^\lambda}, \qquad \lambda = 0, \ldots, l,$$

не зависят от $Z \in \Omega_\alpha$ и, следовательно, являются компонентами некоторой голоморфной в Ω_α p-функции f. Если коцепь φ сама принадлежит подпространству $[{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$, то $f^\lambda \equiv 0$, следовательно, функция f зависит лишь от класса Φ. Таким образом, мы построили оператор d: $\Phi \to f$, относящий элементам пространства $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$, голоморфные p-функции в области Ω_α. Этот оператор мы будем называть нетеровским.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное семейство мажорант. Тогда нетеровский оператор определяет отображение семейств*

$$d\colon\ \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p) \to \mathscr{H}_{\mathcal{M}}\{p,\ d\}, \tag{2.5}$$

которое является изоморфизмом.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом α. Пусть Φ — произвольный элемент пространства $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$. Оценим функцию $f = d\Phi$ в области $\Omega_{\alpha+1}$. По определению нормы в пространстве $\mathfrak{Z}_\alpha(p)$ для любого положительного ε можно найти представитель $\varphi \in \Phi$ такой, что $\|\varphi\|_\alpha \leqslant \|\Phi\|_\alpha + \varepsilon$. Пусть $\varphi = \sum \varphi_Z U_Z$. Для любой точки $Z \in \Omega_{\alpha+1}$ функция φ_Z ограничена и голоморфна в ε_α-окрестности этой точки. Пусть $\varkappa^\lambda$ — порядок оператора $d^\lambda(z,\ D)$ как многочлена от z и D. Из теоремы Коши вытекает неравенство

$$\max_\lambda |f^\lambda(Z)| \leqslant \max_\lambda \sum_{|i| \leqslant \varkappa_\lambda} |d^\lambda(Z,\ \delta)\,\xi^i|\,|\delta_i \varphi_Z(Z)| \leqslant$$
$$\leqslant C(|Z|+1)^\varkappa \sup\{|\varphi_Z(z)|,\ |z - Z| \leqslant \varepsilon_\alpha\} \leqslant$$
$$\leqslant C(|Z|+1)^\varkappa M_{\alpha+1}(Z)\|\varphi\|_\alpha \leqslant CM_{\alpha'}(Z)\|\varphi\|_\alpha.$$
$$\varkappa = \max \varkappa^\lambda, \quad \alpha' = \alpha + 1 + \varkappa.$$

Отсюда

$$\|f\|_{\alpha'} \leqslant C\|\varphi\|_\alpha \leqslant C(\|\Phi\|_\alpha + \varepsilon).$$

Так как функция f зависит лишь от класса Φ, это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, следовательно, слагаемое ε в правой его части может быть опущено. Таким образом, мы установили, что отображение

$$d\colon\ \mathfrak{Z}_\alpha(p) \ni \Phi \to d\Phi \in \mathscr{H}_{\alpha'}\{p,\ d\} \tag{3.5}$$

определено и непрерывно. Совокупность таких отображений определяет отображение семейств (2).

Покажем, что отображение (2) является мономорфизмом. Пусть элемент $\Phi \in \mathfrak{Z}_\alpha(p)$ принадлежит ядру отображения (3), т. е. $d\varphi = 0$ для любого представителя $\varphi \in \Phi$. Из следствия 2 § 4 вытекает, что $\mathscr{D}\varphi_Z = 0$, т. е. $\varphi \in [{}^0\mathscr{H}_\alpha(U_\alpha)]^t \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$, откуда $\Phi = 0$, ч. и т. д.

Построим отображение, обратное (2). Зафиксируем α. Пусть $f = \{f^\lambda\}$ — произвольная голоморфная p-функция, принадлежащая пространству $\mathscr{H}_\alpha\{p,\ d\}$. Положим $U_{\alpha+3} = \{U_Z\}$. По определению U_Z есть окрестность точки Z радиуса $\varepsilon_{\alpha+3} \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon_\alpha$. Пусть точка Z принадлежит $\Omega_{\alpha+1}$. Тогда $4U_Z \subset\subset \Omega_\alpha$, поэтому из определения голоморфной p-функции вытекает, что можно найти элементарное покрытие V параметра нуль достаточно малого радиуса и голоморфную коцепь F нулевого порядка на покрытии $V \cap 4U_Z$ такую, что $dF \doteq f$.

Используя следствие 2 § 5 гл. III, мы найдем голоморфную на $2U_Z$ функцию φ такую, что $\mathscr{D}(\partial\varphi - F) = 0$. К функции φ применим следствие 1 того же параграфа. Тем самым мы представим функцию φ в виде суммы $\varphi_Z + p\psi$, где φ_Z и ψ — голоморфные в U_Z функции, причем

$$\sup\{|\varphi_Z(z)|,\ z \in U_Z\} \leqslant \\ \leqslant C(|Z|+1)^q \sup\{r(z)|\mathscr{D}(z, \xi)\varphi(z)|,\ z \in 2U_Z,\ |\xi| \leqslant \varepsilon r(z)\}, \quad (4.5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha+3}$, а $r(z)$ — степенная функция на некотором алгебраическом разбиении, фигурирующая в неравенстве (2.3). (Использование функции $r(z)$ в этом неравенстве законно, так как мы, конечно, можем считать, что эта функция не превосходит функции r_z, фигурирующей в следствии 1 § 4 гл. II.) В силу неравенства (2.3) правая часть (4) не превосходит выражения

$$C(|Z|+1)^q \max_\lambda \sup\left\{\left|d^\lambda(z, D)\varphi(z)\right|,\ z \in N^\lambda \cap 4U_Z\right\}.$$

Заметим, что

$$d^\lambda(z, D)\varphi(z) = d^\lambda(z, D)F = f^\lambda(z), \qquad \lambda = 0, \ldots, l. \quad (5.5)$$

Поэтому мы приходим к неравенству

$$\sup\{|\varphi_Z(z)|,\ z \in U_Z\} \leqslant C(|Z|+1)^q \max_\lambda \sup\left\{\left|f^\lambda(z)\right|,\ z \in N^\lambda \cap 4U_Z\right\}.$$

Так как диаметр шара $4U_Z$ меньше ε_α, то мы вправе написать неравенство

$$\sup_z \frac{|\varphi_Z(z)|}{(|z|+1)^q M_{\alpha+1}(z)} \leqslant C \max_\lambda \sup_z \frac{|f^\lambda(z)|}{M_\alpha(z)}.$$

Положив $\varphi = \sum \varphi_Z U_Z$, мы получим коцепь нулевого порядка на покрытии $U_{\alpha+3}$, удовлетворяющую неравенству

$$\|\varphi\|_{\alpha',\, U_{\alpha'}} \leqslant C\|f\|_\alpha, \quad \alpha' = \alpha + 3 + [q]. \quad (6.5)$$

Поэтому коцепь φ принадлежит пространству ${}^0\mathscr{H}_{\alpha'}(U_{\alpha'})$, а из (5) следует, что $d\varphi = f$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\mathscr{D}\,\partial\varphi = 0$, следовательно, коцепь φ можно рассматривать как элемент пространства $\mathfrak{Z}_{\alpha'}(p)$. Таким образом, мы построили соответствие

$$\mathscr{H}_\alpha\{p, d\} \ni f \to \varphi \in \mathfrak{Z}_{\alpha'}(p),$$

обладающее тем свойством, что $d\varphi = f$. Так как оператор d взаимно однозначен, это соответствие однозначно и, следовательно, линейно. Из неравенства (6) вытекает, что оно является непрерывным оператором. Совокупность таких операторов определяет отображение семейств, обратное (2). ■

Теорема 2. *Пусть p: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$ — произвольная $\mathscr{P}$-матрица, а $\mathscr{M}$ — семейство мажорант типа $\mathscr{J}$. Тогда последовательность семейств*

$$[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \xrightarrow{d} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\} \to 0 \tag{7.5}$$

точна. Отображение d, фигурирующее в этой последовательности, является композицией тождественного отображения

$$[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \to \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p) \tag{8.5}$$

и отображения (2).

Доказательство. Из сказанного в начале этого пункта вытекает, что кограничный оператор в последовательности (5.3) гл. III действует из подсемейства $[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ в подсемейство $[{}^{\nu+1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ и, следовательно, определяет отображение соответствующих факторсемейств. Все эти отображения изобразим на коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & {[{}^{1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u] & {[{}^{1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]} \arrow[r] \arrow[u] & {[{}^{1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t/[{}^{1}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[{}^{0}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {[{}^{0}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {[{}^{0}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t/[{}^{0}\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & {[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t/[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}} \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{9.5}$$

Точность всех строк этой диаграммы очевидна. Точность второго столбца вытекает из следствия 2 § 4 гл. III. Точность первого столбца есть содержание следствия 3 § 5 гл. III. Основываясь на теореме 1 § 2 гл. II, заключаем, что правый столбец также точен.

Из точности этого столбца во втором снизу члене вытекает, что семейство $[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t/[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ изоморфно ядру (1), т. е. семейству $\mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p)$, причем изоморфизм устанавливается при помощи отображения (8). Учитывая изоморфизм теоремы 1, мы приходим к изоморфизму

$$[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t/[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D} \overset{d}{\cong} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\}. \tag{10.5}$$

Отсюда следует, что отображение d в (7) является гомоморфизмом и эпиморфизмом, а его ядро есть подсемейство $[\mathscr{H}_{\mathscr{M}}]^t \cap \operatorname{Ker} \mathscr{D}$. В силу теоремы § 5 гл. III это подсемейство есть образ отображения p

в (7) и это отображение также является гомоморфизмом. Тем самым точность последовательности (7) доказана. ■

Замечание. Покажем, что отображения d и d^{-1}, устанавливающие изоморфизм (10), имеют порядки, не зависящие от семейства $\mathcal{M}$. Для этого нам нужно вернуться к началу параграфа.

Из доказательства теоремы 1 видно, что отображения, устанавливающие изоморфизм (2), имеют порядки, не зависящие от $\mathcal{M}$. Обратимся теперь к диаграмме (9). По доказанному все отображения вида $\operatorname{Ker}\partial \to \operatorname{Coim}\partial$, обратные отображениям, обозначенным буквой ∂, имеют порядки, не зависящие от $\mathcal{M}$. Для отображений ∂ второго столбца это установлено в 3° § 4 гл. III, а для отображений первого столбца это следует из 9° § 5 гл. III. Из замечания § 2 гл. I вытекает, что аналогичным свойством обладают отображения, обратные отображениям ∂ третьего столбца, и, в частности, отображения, устанавливающее изоморфизм

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(p) \cong [\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} / [\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{D}. \tag{11.5}$$

Заметим, что порядок ∂ также не зависит от $\mathcal{M}$.

Отображения, устанавливающие изоморфизм (10), являются композициями отображений, устанавливающих изоморфизмы (2) и (11). Тем самым сформулированное выше замечание установлено.

3°. Дополнение к теореме 2. Сделанное выше замечание позволяет сформулировать теорему 2 в более сильной форме. Введем следующее определение. Бесконечную в обе стороны последовательность функций $\mathcal{M} = \{M_\alpha(z),\ \alpha = \ldots -1, 0, 1, \ldots\}$, заданных в C^n, назовем *полным семейством мажорант*, если для любого целого β последовательность $\mathcal{M}_\beta = \{M_{\beta+\alpha}(z),\ \alpha = 1, 2, \ldots\}$ является семейством мажорант. Скажем, что $\mathcal{M}$ есть полное семейство мажорант типа $\mathcal{J}$, если для любого целого β $\mathcal{M}_\beta$ есть семейство мажорант *типа* $\mathcal{J}$.

Построения § 1 гл. III, а также 1° и 2° этого параграфа очевидным образом переносятся на полные семейства мажорант $\mathcal{M}$. В частности, если $\mathcal{M}$ — полное семейство мажорант, то $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ есть бесконечное в обе стороны семейство пространств $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, где $\mathcal{H}_\alpha$ есть пространство голоморфных в Ω_α функций с конечной нормой $\|\cdot\|_\alpha^0$ (см. (1.1) гл. III). Аналогичный смысл имеет символ $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{p, d\}$. Семейства $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{p, d\}$ и т. д., отвечающие полному семейству мажорант $\mathcal{M}$, мы будем называть *полными семействами*. Матрица p и ассоциированный с ней нетеровский оператор d определяют отображения (7), где $\mathcal{M}$ — любое полное семейство мажорант. Отметим, что порядок каждого из этих отображений есть функция вида $\alpha \to \alpha + a$, где a — некоторая константа, зависящая лишь от p и d. Действительно, для отображения p константа a

равна $\mu = \deg p$, а для отображения d согласно (6) она равна $3+[q]$. Сформулируем теперь интересующее нас утверждение.

Дополнение. *Пусть $\mathcal{M}$ — полное семейство мажорант типа $\mathcal{J}$. Тогда последовательность* (7) *точна и, более того, определены отображения полных семейств*

$$d^{-1}\colon \mathscr{H}_{\mathcal{M}}\{p,\ d\} \to \mathscr{H}^t_{\mathcal{M}}/\mathrm{Ker}\, d,$$

$$p^{-1}\colon \mathrm{Ker}\, d \to \mathscr{H}^s_{\mathcal{M}}/\mathrm{Ker}\, p,$$

обратные отображениям d и p в (7), *порядки которых имеют вид $\alpha \to \alpha + A$, где константа A зависит лишь от p и d.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное целое β и рассмотрим семейство мажорант $\mathcal{M}_\beta$, образованное функциями $M_{\beta+\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$. По условию это семейство типа $\mathcal{J}$. Следовательно, согласно теореме 2 определено отображение

$$d^{-1}\colon \mathscr{H}_{\mathcal{M}_\beta}\{p,\ d\} \to \mathscr{H}^t_{\mathcal{M}_\beta}/\mathrm{Ker}\, d,$$

обратное d. В силу замечания к теореме 2 функция $\alpha \to \gamma(\alpha)$, являющаяся порядком отображения d^{-1}, не зависит от семейства $\mathcal{M}_\beta$, т. е. зависит лишь от p и d.

Через $\mathscr{H}'_\alpha$ и $\mathscr{H}'_\alpha\{p,\ d\}$ мы обозначим пространства, образующие семейства $\mathscr{H}_{\mathcal{M}_\beta}$ и $\mathscr{H}_{\mathcal{M}_\beta}\{p,\ d\}$. Пусть

$$(d^{-1})'_1\colon \mathscr{H}'_1\{p,\ d\} \to [\mathscr{H}'_\gamma]^t/(\mathrm{Ker}\, d)'_\gamma,$$

$$(\mathrm{Ker}\, d)'_\gamma = \mathrm{Ker}\left\{[\mathscr{H}'_\gamma]^t \xrightarrow{d} \mathscr{H}'_{\gamma+a}\{p,\ d\}\right\}, \qquad \gamma = \gamma(1)$$

— первая компонента отображения d^{-1}. Заметим, что пространства $\mathscr{H}'_1\{p,\ d\}$ и $\mathscr{H}'_\gamma$ являются также компонентами семейств $\mathscr{H}_{\mathcal{M}}\{p,\ d\}$ и $\mathscr{H}_{\mathcal{M}}$ соответственно с номерами $\beta+1$ и $\beta+\gamma$. Поэтому отображение $(d^{-1})'_1$ мы можем переписать так:

$$\mathscr{H}_{\beta+1}\{p,\ d\} \to \mathscr{H}^t_{\beta+\gamma}/(\mathrm{Ker}\, d)_{\beta+\gamma}.$$

Обозначим это отображение через $(d^{-1})_{\beta+1}$. Поскольку композиция отображений $(d^{-1})'_1$ и d есть тождественное отображение, действующее из $\mathscr{H}'_1\{p,\ d\}$ в $\mathscr{H}'_{\gamma+a}\{p,\ d\}$, а отображение d, определенное на $[\mathscr{H}'_\gamma]^t/(\mathrm{Ker}\, d)'_\gamma$, взаимно однозначно, отображения $(d^{-1})_\beta$ образуют отображение семейств d^{-1}. Оно является искомым, поскольку его порядок равен функции $\alpha \to \alpha + \gamma - 1$, где $\gamma = \gamma(1)$ — величина, зависящая лишь от p и d.

Аналогичным образом строится искомое отображение p^{-1}. ■

4°. Инвариантность понятия голоморфных p-функций. Согласно определению 1 понятие голоморфных p-функций зависит не только от самой матрицы p, но также и от выбора ассоциированного с ней набора нормальных нетеровских операторов. Сейчас мы покажем, что по существу содержание этого понятия зависит лишь от $\mathscr{P}$-модуля $M \cong \operatorname{Coker} p = \mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s$. Заметим, что в силу теоремы 1 семейство $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\}$ пространств голоморфных p-функций изоморфно семейству $\mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p)$, которое зависит лишь от матрицы p и не зависит от конструкции нетеровских операторов. Инвариантность понятия голоморфных p-функций заключается в том, что для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля M и любого семейства мажорант $\mathscr{M}$ семейства $\mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p)$ с матрицами p такими, что $\operatorname{Coker} p \cong M$, оказываются связанными между собой естественными изоморфизмами.

Предложение 1.

I. *Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое семейство мажорант, а $f: M \to M'$ — некоторое отображение конечных $\mathscr{P}$-модулей, причем $M \cong \mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s$ и $M' \cong \mathscr{P}^{t'}/p'\mathscr{P}^{s'}$ с некоторыми $\mathscr{P}$-матрицами p и p'. Тогда определено отображение семейств $f_p^{p'}: \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p) \to \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p')$, зависящее лишь от f, p и p', удовлетворяющее следующим условиям.*

II. *Если f есть изоморфизм и $p = p'$, то $f_p^{p'}$ также является изоморфизмом.*

III. *Если*

$$\begin{tikzcd} & M'' & \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] & & M' \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

— некоторая коммутативная диаграмма отображений конечных $\mathscr{P}$-модулей, то для любых $\mathscr{P}$-матриц p, p', p'', коядра которых совпадают соответственно с M, M', M'', диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p'') & \\ \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p) \arrow[ur, "h_p^{p''}"] \arrow[rr, "f_p^{p'}"] & & \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p') \arrow[ul, "g_{p'}^{p''}"'] \end{tikzcd}$$

также коммутативна.

Доказательство. Пусть задано отображение $f: M \to M'$. Построим отображение $f_p^{p'}$. В силу предложения 1 § 3 гл. I существуют $\mathscr{P}$-матрицы f_0 и f_1 такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}^{s'} \arrow[r, "p'"] & \mathscr{P}^{t'} \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \\ \mathscr{P}^{s} \arrow[r, "p"] \arrow[u, "f_1"] & \mathscr{P}^{t} \arrow[r] \arrow[u, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0 \end{tikzcd} \tag{12.5}$$

коммутативна. Из ее коммутативности вытекает соотношение $f_0 p = p' f_1$. Отсюда легко видеть, что оператор умножения на матрицу f_0 в пространстве $\mathscr{O}_Z^t$ (точка $Z \in C^n$ произвольна) переводит подпространство $p\mathscr{O}_Z^s$ в подпространство $p'\mathscr{O}_Z^{s'} \subset \mathscr{O}_Z^{t'}$. Для любого натурального α

оператор умножения на матрицу f_0 определяет непрерывное отображение

$$[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U_{\alpha})]^{t} \to [{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha+m}(U_{\alpha+m})]^{t'}, \tag{13.5}$$

где m — наивысший порядок этой матрицы. Пусть $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ — соответственно p и p'-операторы. Если коцепь φ принадлежит подпространству $[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U_{\alpha})]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$, то согласно свойству оператора $\mathscr{D}$ при любом $Z \in C^n$ коцепь φ принадлежит $p\mathfrak{S}_Z^s$ (т. е. каждая ее компонента принадлежит $p\mathfrak{S}_Z^s$). Поэтому коцепь $f_0\varphi$ принадлежит $[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha+m}(U_{\alpha+m})]^{t'} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}'$. Таким образом, мы установили, что отображение (13) переводит подпространство $[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha}(U_{\alpha})]^{t} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ в $[{}^{\nu}\mathscr{H}_{\alpha+m}(U_{\alpha+m})]^{t'} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}'$ и, следовательно, определяет отображение соответствующих факторпространств. Совокупность таких отображений образует отображение семейств

$$\check{f}_0\colon\ {}^{\nu}\mathscr{H}^{t}_{\mathscr{M}}/{}^{\nu}\mathscr{H}^{t}_{\mathscr{M}} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D} \to {}^{\nu}\mathscr{H}^{t'}_{\mathscr{M}}/{}^{\nu}\mathscr{H}^{t'}_{\mathscr{M}} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{D}'. \tag{14.5}$$

Понятно, что такого рода отображения коммутируют с когграничными отображениями вида (1). Поэтому отображение (14) переводит $\mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p)$ в $\mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p')$, т. е. определяет искомое отображение

$$f_p^{p'}\colon\ \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p) \to \mathfrak{Z}_{\mathscr{M}}(p').$$

Покажем, что это отображение зависит лишь от f, p и p' и не зависит от матриц f_0 и f_1. Любую пару матриц (f_0, f_1), делающую диаграмму (12) коммутативной, назовем соответствующей отображению f. Пусть (f_0, f_1) и (g_0, g_1) — две пары матриц, соответствующих отображению f. Согласно предложению 1 § 3 гл. I имеет место равенство $f_0 = g_0 + p'\mu$, где μ — некоторая $\mathscr{P}$-матрица размера $s' \times t$. Так как образ отображения $p'\mu\colon {}^{\nu}\mathscr{H}^{t}_{\mathscr{M}} \to {}^{\nu}\mathscr{H}^{t'}_{\mathscr{M}}$ принадлежит подсемейству $p'\,{}^{\nu}\mathscr{H}^{s'}_{\mathscr{M}}$, при переходе к отображению вида (14), мы получим нулевое отображение. Отсюда $\check{f}_0 = \check{g}_0$, ч. и т. д.

Установим свойство II. Пусть отображение f есть изоморфизм и $p = p^{*}$. В этом случае в качестве f_0 и f_1 можно выбрать единичные матрицы соответствующих размеров. Понятно, что ассоциированное отображение $\check{f}_0$ является тождественным.

Установим третье свойство. Пусть (f_0, f_1) и (g_0, g_1) — пары, соответствующие отображениям f и g. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{P}^{s''} & \xrightarrow{p''} & \mathscr{P}^{t''} & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0\\
\uparrow{\scriptstyle g_1} & & \uparrow{\scriptstyle g_0} & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\
\mathscr{P}^{s'} & \xrightarrow{p'} & \mathscr{P}^{t'} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0\\
\uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f_0} & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\
\mathscr{P}^{s} & \xrightarrow{p} & \mathscr{P}^{t} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

видно, что пара $(g_0 f_0, g_1 f_1)$ соответствует отображению $gf = h$. По определению отображение $h_p^{p''}$ ассоциировано с матрицей $g_0 f_0$ и, следовательно, является композицией отображений $f_p^{p'}$ и $g_{p'}^{p''}$, ассоциированных с матрицами f_0 и g_0. ■

Пусть отображение f: $M \to M'$ есть изоморфизм. Тогда из предложения следует существование отображений

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p) \underset{(f^{-1})^{p}_{p'}}{\overset{f^{p'}_{p}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p'), \tag{15.5}$$

причем композиции $f_p^{p'}(f^{-1})_{p'}^{p}$ и $(f^{-1})_{p'}^{p} f_p^{p'}$ являются тождественными отображениями. Таким образом, отображения (15) устанавливают изоморфизм семейств $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p)$ и $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p')$. Тем самым для любой пары $\mathcal{P}$-матриц p и p' таких, что $\operatorname{Coker} p \cong \operatorname{Coker} p' \cong M$, мы установили изоморфизм соответствующих семейств $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p)$, $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p')$. Эти изоморфизмы согласованы в том смысле, что для любых трех матриц p, p' и p'', коядра которых изоморфны M, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p'') \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p')
\end{tikzcd}$$

образованная этими изоморфизмами, коммутативна. (Ее коммутативность следует из свойства III.)

Таким образом, для любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M мы установили согласованные изоморфизмы вида (15) между всеми свойствами $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p)$, для которых $\operatorname{Coker} p \cong M$. Совокупность этих семейств и изоморфизмов вида (15) мы будем рассматривать как новый объект, который обозначим символом $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(M)$. Изоморфизмы вида (15) будем называть внутренними.

Пусть f: $M \to M'$ — некоторое отображение конечных $\mathcal{P}$-модулей. Согласно предложению 1 любым двум матрицам p и p', коядра которых изоморфны M и M', отвечает отображение $f_p^{p'}$, причем если q и q' — другие матрицы, коядра которых изоморфны M и M', то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p) \arrow[r, "f_p^{p'}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(p') \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(q) \arrow[r, "f_q^{q'}"] & \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(q')
\end{tikzcd}$$

в которой по вертикали стоят внутренние изоморфизмы, коммутативна. Совокупность таких отображений $f_p^{p'}$ мы назовем отображением соответствующих объектов.

Сделаем последний шаг. Для каждого конечного $\mathscr{P}$-модуля M рассмотрим новый объект $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\}$, образованный семейством $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\}$, где $\mathrm{Coker}\, p \cong M$. Такие семейства связаны между собой изоморфизмами, которые являются композициями изоморфизмов вида (2) и (15). Если задано отображение модулей $f\colon M \to M'$, выбраны матрицы p и p', коядра которых изоморфны M и M', и построены соответствующие нетеровские операторы d и d', то мы можем построить отображение $f_{p,d}^{p',d'}\colon \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p', d'\}$, которое определяется из условия, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\} \arrow[r, "f_{p,d}^{p',d'}"] & \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p', d'\} \\
\mathscr{Z}_{\mathscr{M}}(p) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "f_p^{p'}"] & \mathscr{Z}_{\mathscr{M}}(p') \arrow[u, "d'"']
\end{tikzcd}$$

была коммутативна. Из построения видно, что такие отображения коммутируют с внутренними изоморфизмами объектов $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\}$ и $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\}$. Совокупность таких отображений мы будем обозначать так: $f_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\}$. Таким образом мы построили функтор

$$M \rightsquigarrow \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\}, \tag{16.5}$$

относящий каждому конечному $\mathscr{P}$-модулю M объект $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\}$, а каждому отображению f таких модулей отображение $f_{\mathscr{M}}$ соответствующих объектов.

Охарактеризуем объект $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\}$ в случае $M = \mathscr{P}^t$, $t \geqslant 0$. Чтобы это сделать, мы опишем наиболее простое семейство, принадлежащее этому объекту. Таковым является семейство $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p\}$, где p — матрица размера $t \times 1$, состоящая из нулей. Понятно, что коядро такой матрицы равно $\mathscr{P}^t$. Из точности последовательности

$$\mathscr{P} \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t \xrightarrow{e} \mathscr{P}^t,$$

где e — единичная матрица, в силу предложения § 4 следует, что матрица e является нормальным нетеровским оператором, ассоциированным с p, причем $N(p) = C^n$. Так как $\mathrm{Ker}\, e = 0$, изоморфизм (10) записывается следующим образом:

$$\mathscr{H}_{\mathscr{M}}^t \xrightarrow{e} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, e\}.$$

Таким образом, семейство $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, e\}$ совпадает с $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}^t$. Пусть $f\colon \mathscr{P}^t \to \mathscr{P}^{t'}$ — некоторая $\mathscr{P}$-матрица. Как мы только что установили, объекты $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\mathscr{P}^t\}$, $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\mathscr{P}^{t'}\}$ содержат семейства $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}^t$, $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}^{t'}$, отвечающие нулевым матрицам p и p'. Нетрудно заметить, что соответствующее отображение $f_p^{p'}\colon \mathscr{H}_{\mathscr{M}}^t \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}^{t'}$ совпадает с умножением на матрицу f.

Пусть задана последовательность

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \tag{17.5}$$

отображений конечных $\mathscr{P}$-модулей. Ей отвечает последовательность

$$\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\} \xrightarrow{f_{\mathscr{M}}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\} \xrightarrow{g_{\mathscr{M}}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M''\}. \tag{18.5}$$

Скажем, что эта последовательность точна, если точна любая последовательность вида

$$\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p'\} \xrightarrow{f_{p'}^{p}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p\} \xrightarrow{g_{p}^{p''}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p''\},$$

где матрицы p, p', p'' выбраны так, что их коядра изоморфны модулям M, M', M''. Из сказанного выше вытекает, что если такая последовательность точна при некотором специальном выборе матриц p, p', p'', то она точна при любом другом выборе этих матриц, подчиненных сформулированному выше условию. Теперь может быть сформулирована

5°. Основная теорема. *Для любого семейства мажорант* $\mathscr{M}$ *типа* $\mathscr{J}$ *функтор* (16) *точен, т. е. любой точной последовательности вида* (17) *отвечает точная последовательность* (18).

Доказательство. Предположим сначала, что точна последовательность

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$

Согласно лемме § 3 гл. I такую последовательность можно вложить в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \mathscr{P}^{s''} \arrow[r, "p''"] \arrow[u] & \mathscr{P}^{t''} \arrow[r] \arrow[u] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \mathscr{P}^{s} \arrow[r, "p"] \arrow[u] & \mathscr{P}^{t} \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \mathscr{P}^{s'} \arrow[r, "p'"] \arrow[u] & \mathscr{P}^{t'} \arrow[r] \arrow[u] & M' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{19.5}$$

в которой все строки и столбцы точны. Рассмотрим другую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & \\
\mathscr{H}^{s''}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "p''"] & \mathscr{H}^{t''}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "d''"] & \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p'', d''\} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\mathscr{H}^{s}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \mathscr{H}^{t}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p, d\} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\mathscr{H}^{s'}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "p'"] & \mathscr{H}^{t'}_{\mathscr{M}} \arrow[u] \arrow[r, "d'"] & \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p', d'\} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{20.5}$$

Из точности столбцов диаграммы (19) и теоремы § 5 гл. III вытекает точность столбцов диаграммы (20), кроме правого. Точность ее строк следует из теоремы 2 этого параграфа. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, устанавливаем точность правого столбца. В силу замечания, сделанного в конце 4°, мы можем заключить, что точна последовательность

$$0 \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\} \xrightarrow{f_{\mathscr{M}}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\} \xrightarrow{g_{\mathscr{M}}} \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M''\} \to 0. \tag{21.5}$$

Пусть теперь мы имеем произвольную точную последовательность (17). В силу точности последовательностей

$$0 \to \operatorname{Coim} f \xrightarrow{\bar{f}} M \xrightarrow{\check{g}} \operatorname{Im} g \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Ker} f \longrightarrow M' \longrightarrow \operatorname{Coim} f \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Im} g \to M'' \to \operatorname{Coker} g \to 0$$

точны также последовательности

$$0 \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Coim} f\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Im} g\} \to 0,$$
$$\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Coim} f\} \to 0 \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Im} g\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M''\}.$$

Отсюда следует, что отображения

$$f_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M'\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Coim} f\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\},$$
$$g_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{\operatorname{Im} g\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{M''\}$$

суть гомоморфизмы и $\operatorname{Im} f_{\mathscr{M}} \sim \operatorname{Ker} g_{\mathscr{M}}$ (т. е. этими свойствами обладают соответствующие представители из множеств $f_{\mathscr{M}}$ и $g_{\mathscr{M}}$). ■

6°. Замечания.

Замечание 1. Теорема 2 является частным случаем основной теоремы, отвечающим точной последовательности

$$\mathscr{P}^s \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t \to M \to 0.$$

Замечание 2. Сформулируем одно уточнение основной теоремы. Пусть f: $M \to M'$ — некоторое отображение конечных модулей, а p и p' — $\mathscr{P}$-матрицы, коядра которых изоморфны M и M'. Тогда для любого семейства мажорант $\mathscr{M}$ типа $\mathscr{J}$ отображение $f_{p,\,d}^{p',\,d'}$: $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p,\ d\} \to \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{p',\ d'\}$ является гомоморфизмом, причем порядок этого отображения и его обратного не зависит от $\mathscr{M}$.

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Глава V

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В § 1 мы продолжим изучение семейств линейных топологических пространств, начатое в § 1 гл. I. Мы рассмотрим специальные типы пространств: пространства Фреше и Шварца. Основное внимание будет уделено изучению операций индуктивного и проективного пределов. В §§ 2 и 3 изложена теория обобщенных функций и преобразований Фурье в форме, приспособленной для наших целей.

§ 1. Предельный переход в семействах линейных пространств

Под линейным пространством или просто пространством мы будем понимать линейное топологическое локально выпуклое пространство, сокращенно л. т. п., над полем C комплексных чисел. Заметим, что это понятие есть частный случай понятия топологического модуля в смысле § 1 гл. I. Сейчас мы введем возрастающие и убывающие семейства л. т. п. более общего типа, чем в § 1 гл. I.

1°. Возрастающие семейства л. т. п. Множество $\mathcal{A}$ назовем *направленным*, если в нем введено отношение порядка $<$ $(\leqslant)$, подчиненное следующему условию: для любых α и α' из $\mathcal{A}$ найдется элемент $\alpha'' \in \mathcal{A}$ такой, что $\alpha, \alpha' \leqslant \alpha''$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое направленное множество. *Возрастающим семейством л. т. п., заданным на* $\mathcal{A}$, мы назовем систему $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$, образованную функцией X_α, определенной на $\mathcal{A}$, значениями которой являются л. т. п., и набором непрерывных отображений $i_\alpha^{\alpha'}$: $X_\alpha \to X_{\alpha'}$ определенных для любых α и $\alpha' \geqslant \alpha$, удовлетворяющих условиям

(i) для любого α отображение i_α^α тождественное, и

(ii) для любых $\alpha < \alpha' < \alpha''$ выполнено соотношение $i_{\alpha'}^{\alpha''} i_\alpha^{\alpha'} = i_\alpha^{\alpha''}$.

Всякому возрастающему семейству $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ отвечает его индуктивный предел. Дадим точное определение. Рассмотрим объединение $\bigcup X_\alpha$ всех пространств X_α и введем в нем отношение эквивалентности. Элементы $x_\alpha \in X_\alpha$ и $x_{\alpha'} \in X_{\alpha'}$ объявим эквивалентными, если существует такое $\alpha'' \geqslant \alpha, \alpha'$, что $i_\alpha^{\alpha''} x_\alpha = i_{\alpha'}^{\alpha''} x_{\alpha'}$. Как легко проверить, это отношение действительно является эквивалентностью. Множество классов эквивалентностей элементов из $\bigcup X_\alpha$ мы обозначим через $\vec{X}$. Введем линейные операции в этом множестве. Умножение на скаляр класса эквивалентностей определим как умножение на этот скаляр принадлежащих этому классу элементов. Определим сложение в $\vec{X}$. Пусть $x_\alpha \in X_\alpha$ и $x_{\alpha'} \in X_{\alpha'}$ — произвольные элементы из $\bigcup X_\alpha$. Выберем элемент $\alpha'' \in \mathcal{A}$ такой, что $\alpha, \alpha' \leqslant \alpha''$, и рассмотрим сумму $i_\alpha^{\alpha''} x_\alpha + i_{\alpha'}^{\alpha''} x_{\alpha'}$. Класс эквивалентностей, содержащий эту сумму, однозначно определяется классами, содержащими x_α и $x_{\alpha'}$. Введенные таким образом линейные операции в $\vec{X}$ превращают это множество в линейное пространство.

Для каждого α соответствие, относящее элементу $x_\alpha \in X_\alpha$ содержащий его класс эквивалентностей, обозначим через i_α. Это соответствие определяет линейное отображение i_α: $X_\alpha \to \vec{X}$, которое мы будем называть *каноническим*. Заметим, что для любых α и $\alpha' > \alpha$ выполнено соотношение $i_{\alpha'} i_\alpha^{\alpha'} = i_\alpha$.

Определим топологию в $\vec{X}$. Эта топология удовлетворяет условию: она является наиболее сильной из всех локально выпуклых топологий в $\vec{X}$, при которых все отображения i_α непрерывны. В соответствии с этим окрестностью нуля в $\vec{X}$ мы назовем любое множество, содержащее выпуклое множество U, прообраз которого $i_\alpha^{-1}(U)$ при любом α есть окрестность нуля в X_α. Построенное, таким образом, л. т. п. мы будем обозначать так:

$$\vec{X} = \lim_{\to} X = \lim_{\to} \{X_\alpha, \ i_\alpha^{\alpha'}\}.$$

Отметим, что объединение всех подпространств в $i_\alpha(X_\alpha)$ в $\vec{X}$ совпадает со всем $\vec{X}$.

2°. Убывающие семейства л. т. п.

Определение 2. *Убывающим семейством л. т. п., заданным на направленном множестве $\mathcal{A}$*, мы назовем систему $X = \{X_\alpha, \ i_\alpha^{\alpha'}\}$, образованную функцией X_α, определенной на $\mathcal{A}$, значениями которой являются л. т. п., и набором линейных непрерывных отображений $i_\alpha^{\alpha'}$: $X_\alpha \to X_{\alpha'}$, определенных для любых α' и $\alpha \geqslant \alpha'$, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям (i) и (ii) из определения 1.

Всякое убывающее семейство л. т. п. имеет проективный предел, который мы сейчас определим. *Нитью* мы назовем любое множество вида

$$x = \{x_\alpha \in X_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\},$$

в котором элементы x_α удовлетворяют соотношениям $i_\alpha^{\alpha'} x_\alpha = x_{\alpha'}$ для любых α' и $\alpha \geqslant \alpha'$. Множество всех нитей обозначим через $\overleftarrow{X}$. Нити можно почленно умножать на скаляры и складывать, следовательно, множество $\overleftarrow{X}$ является линейным пространством.

Через i^α: $\overleftarrow{X} \to X_\alpha$ обозначим линейную операцию, относящую нити $\{x_\alpha\}$ ее элемент x_α. Эту операцию мы назовем *канонической*. Топология, которая вводится в $\overleftarrow{X}$, является наиболее слабой из всех топологий, при которых каждое из отображений i^α непрерывно. А именно, окрестностью нуля в $\overleftarrow{X}$ объявляется любое множество, содержащее множество вида $(i^\alpha)^{-1}(U_\alpha)$, где U_α — окрестность нуля в X_α. Построенное л. т. п. обозначается так:

$$\overleftarrow{X} = \lim_{\leftarrow} X = \lim_{\leftarrow} \{X_\alpha,\ i_\alpha^{\alpha'}\}.$$

3°. Конфинальное подсемейство. Пусть $\mathcal{A}$ — направленное множество. *Конфинальным* мы назовем любое его подмножество $\mathcal{A}'$, удовлетворяющее условию: для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ найдется элемент $\alpha' \in \mathcal{A}'$ такой, что $\alpha \leqslant \alpha'$. Конфинальное подмножество $\mathcal{A}'$ с индуцированным отношением порядка, очевидно, является направленным.

Пусть $X = \{X_\alpha,\ i_\alpha^{\alpha'}\}$ — некоторое семейство л. т. п. (возрастающее или убывающее), заданное на $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}'$ — конфинальная часть множества $\mathcal{A}$. *Конфинальным подсемейством* в X мы назовем семейство (соответственно возрастающее или убывающее), образованное пространствами X_α и отображениями $i_\alpha^{\alpha'}$ с α, $\alpha' \in \mathcal{A}'$.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — направленное множество, $\mathcal{A}'$ — его конфинальное подмножество, $X = \{X_\alpha,\ i_\alpha^{\alpha'}\}$ — семейство, заданное на $\mathcal{A}$, а X' — соответствующее конфинальное семейство. Тогда существуют естественные изоморфизмы*

$$\overrightarrow{X} \cong \overrightarrow{X}', \qquad \overleftarrow{X} \cong \overleftarrow{X}'$$

соответственно, если семейство X возрастающее или убывающее.

Доказательство. Пусть X — возрастающее семейство. Включение $\bigcup_{\mathcal{A}'} X_\alpha \subset \bigcup_{\mathcal{A}} X_\alpha$ сохраняет отношение эквивалентности и, следовательно, определяет линейное отображение $\overrightarrow{X}' \to \overrightarrow{X}$. Это отображение, как легко видеть, непрерывно. Построим обратное отображение. Пусть $x_\alpha \in X_\alpha$ — произвольный элемент из $\bigcup\limits_{\mathcal{A}} X_\alpha$. Выберем некоторое $\alpha' \in \mathcal{A}'$ такое, что $\alpha \leqslant \alpha'$. Элемент $i_\alpha^{\alpha'} x_\alpha$ принадлежит $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'} X_\alpha$ и эквивалентен x_α. Тем самым мы построили обратное линейное отображение $\vec{X} \to \vec{X}'$. Его непрерывность также очевидна.

Пусть теперь X — убывающее семейство. Каждой нити $\{x_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\} \in \overleftarrow{X}$ отнесем нить $\{x_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}'\} \in \overleftarrow{X}'$, являющуюся ее подмножеством. Это соответствие является линейным отображением из $\overleftarrow{X}$ в $\overleftarrow{X}'$. Обратно, пусть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}'\}$ — некоторая нить, принадлежащая $\overleftarrow{X}'$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ выберем некоторое $\alpha' \in \mathcal{A}'$ такое, что $\alpha \leqslant \alpha'$, и положим $x_\alpha = i_{\alpha'}^{\alpha} x_{\alpha'}$. Элемент $x_\alpha \in X_\alpha$, очевидно, не зависит от выбора α', а их совокупность образует нить, принадлежащую $\overleftarrow{X}$. Тем самым мы построили обратное линейное отображение $\overleftarrow{X}' \to \overleftarrow{X}$. Очевидно, что оба эти отображения непрерывны. ■

4°. Счетные семейства. В дальнейшем чаще всего мы будем встречаться с возрастающими и убывающими семейства л. т. п., заданными на множестве Z_+ натуральных чисел, упорядоченных по возрастанию. Другой важный для нас частный случай есть семейство л. т. п. в смысле § 1 гл. I, т. е. возрастающее семейство, заданное на множестве Z всех целых чисел. В множестве Z можно ввести два отношения порядка — по возрастанию целых чисел и по убыванию. В обоих случаях множество Z оказывается направленным. Следовательно, всякое семейство л. т. п. в смысле § 1 гл. I является одновременно возрастающим и убывающим и поэтому имеет два предела — индуктивный и проективный.

Заметим теперь, что всякое убывающее или возрастающее семейство л. т. п., заданное на Z_+, можно рассматривать как семейство (т. е. семейство в смысле § 1 гл. I). Действительно, если $\{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — возрастающее семейство л. т. п., заданное на Z_+, то, дополнив его нулевыми пространствами X_α и нулевыми отображениями $i_\alpha^{\alpha'}$ для всех целых $\alpha \leqslant 0$, мы получим возрастающее семейство, заданное на Z. Если $\{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — убывающее семейство, заданное на Z_+, то, положив

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_{-\alpha}, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha \geqslant 0, \end{cases} \qquad j_\alpha^{\alpha'} = \begin{cases} i_{-\alpha}^{-\alpha'}, & \alpha \leqslant \alpha' < 0, \\ 0, & \alpha \geqslant 0, \end{cases}$$

мы получим возрастающее семейство, заданное на Z. Это замечание позволит нам иногда ограничиться рассмотрением семейств л. т. п. вместо параллельного рассмотрения возрастающих и убывающих семейств, заданных на Z_+.

В дальнейшем семейства, заданные на Z_+, мы будем называть просто убывающими или возрастающими семействами, а возрастающие семейства, заданные на Z, — просто семействами.

Отметим одно общее свойство предельных переходов в семействах. Пусть X — некоторое семейство, а X' и X'' — эквивалентные между собой подсемейства. Согласно определению § 1 гл. I это означает, что существуют тождественные отображения I', I'' семейства X такие, что $I'X' = I''X''$. В таком случае, как легко проверить, пределы семейств X' и X'' совпадают, т. е. $\overrightarrow{X}' \cong \overrightarrow{X}''$ и $\overleftarrow{X}' \cong \overleftarrow{X}''$. Пусть теперь X' и X'' — произвольные эквивалентные между собой семейства, ассоциированные с X. Это означает, что $X' = X_1'/X_0'$, а $X'' = X_1''/X_0''$, где X_0', X_1', X_0'', X_1'' — подсемейства X, причем $X_0' \sim X_0''$, а $X_1' \sim X_1''$. В этом случае, как мы установили в § 1 гл. I, существует тождественное отображение I' семейства X', переводящее его в X'' и обратно. Отсюда легко вывести, что пределы семейств X' и X'' совпадают. Отсюда мы заключаем, что переход к индуктивному, а также к проективному пределу есть операция, определенная на классах эквивалентных семейств.

5°. Общие свойства пределов. Напомним, что л. т. п. E называется пространством Фреше или $\mathcal{F}$-пространством, если E — полное метрическое пространство.

Предложение 2. *Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — убывающее семейство, в котором все X_α суть пространства Фреше. Тогда проективный предел $\overleftarrow{X}$ также является пространством Фреше. Если при каждом α образ отображения $i_{\alpha+1}^\alpha$: $X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ плотен в X_α, то при любом α образ отображения i^α: $\overleftarrow{X} \to X_\alpha$ также плотен в X_α.*

Доказательство. Покажем сначала, что пространство $\overleftarrow{X}$ отделимо. Пусть x — произвольный элемент этого пространства, отличный от нуля. При некотором α элемент $x_\alpha = i^\alpha x \in X_\alpha$ также отличен от нуля. Так как пространство X_α является пространством Фреше, оно отделимо, следовательно, в X_α имеется окрестность нуля U_α, не содержащая x_α. Ее прообраз при отображении i^α является окрестностью нуля в $\overleftarrow{X}$ и не содержит x. Таким образом, элемент x отделим от нуля. Так как этот элемент $x \neq 0$ произволен, пространство $\overleftarrow{X}$ отделимо, ч. и т. д.

Так как X_α для любого α есть метрическое пространство, оно имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля U_α^l, $l = 1, 2, \ldots$ Прообразы $(i^\alpha)^{-1}(U_\alpha^l)$, $\alpha, l = 1, 2, \ldots$, всех этих окрестностей образуют счетную фундаментальную систему окрестностей нуля в $\overleftarrow{X}$. Поскольку по доказанному пространство $\overleftarrow{X}$ отделимо, отсюда следует, что оно — метрическое.

Остается показать, что $\overleftarrow{X}$ полно. Пусть $\{x^i\}$ — фундаментальная последовательность в $\overleftarrow{X}$. При любом α последовательность $i^\alpha x^i$ фундаментальна в X_α и, следовательно, имеет предел $x_\alpha \in X_\alpha$, так как X_α полно. Из равенства $i^\alpha_{\alpha+1} i^{\alpha+1} x^i = i^\alpha x^i$ переходом к пределу по i получаем $i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1} = x_\alpha$. Следовательно, элементы x_α образуют нить, которая отвечает некоторому элементу $x \in \overleftarrow{X}$. Так как при любом α последовательность $i^\alpha x^i$ сходится к x_α в X_α, то последовательность x^i сходится к x в $\overleftarrow{X}$. Тем самым полнота $\overleftarrow{X}$ доказана.

Перейдем ко второму утверждению. Пусть $\rho_\alpha(\cdot\,,\ \cdot)$ — метрика в X_α. Для удобства будем считать, что метрика ρ_α есть неубывающая функция α, т. е. для любого α имеет место неравенство

$$\rho_\alpha\left(i^\alpha_{\alpha+1} x,\ i^\alpha_{\alpha+1} y\right) \leqslant \rho_{\alpha+1}(x,\ y),\quad x,\ y \in X_{\alpha+1}.$$

Если это не так, ρ_α можно заменить эквивалентной метрикой

$$\rho'_\alpha(x,\ y) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \rho_\beta\left(i^\beta_\alpha x,\ i^\beta_\alpha y\right),\qquad x,\ y \in X_\alpha.$$

Покажем, например, что $i^1(\overleftarrow{X})$ плотно в X_1. Выберем произвольный элемент $x_1 \in X_1$, число $\varepsilon > 0$ и найдем элемент $x \in \overleftarrow{X}$ такой, что $\rho_1(x_1,\ i^1 x) \leqslant \varepsilon$. Используя условие, мы можем по индукции построить последовательность элементов $x_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha = 2,\ 3,\ \ldots$, такую, что

$$\rho_\alpha\left(x_\alpha,\ i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\alpha},\qquad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.1}$$

Зафиксируем $\beta \geqslant 1$ и рассмотрим последовательность элементов $x^\beta_\alpha = i^\beta_\alpha x_\alpha$ с $\alpha \geqslant \beta$. Из неравенства (1), учитывая возрастание метрики ρ_α, мы получаем

$$\rho_\beta\left(x^\beta_\alpha,\ x^\beta_{\alpha+1}\right) \leqslant \rho_\alpha\left(x_\alpha,\ i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\alpha}, \tag{2.1}$$

следовательно, последовательность $\{x^\beta_\alpha\}$ фундаментальна в X_β. Пусть x^β — ее предел. Из соотношения $i^\beta_{\beta+1} x^{\beta+1}_\alpha = x^\beta_\alpha$ переходом к пределу по α получаем $i^\beta_{\beta+1} x^{\beta+1} = x^\beta$, т. е. элементы x^β образуют нить, которую мы обозначим через $x \in \overleftarrow{X}$. Суммируя неравенства (2) с $\beta = 1$, получаем желаемое неравенство

$$\rho_1\left(x_1,\ i^1 x\right) = \rho_1\left(x_1,\ x^1\right) \leqslant \sum_1^\infty \rho_1\left(x^1_\alpha,\ x^1_{\alpha+1}\right) \leqslant \varepsilon. \ \blacksquare$$

6°. Двойственность в семействах л. т. п. Пусть E — некоторое л. т. п. Его сопряженное пространство E^* мы будем всегда наделять сильной топологией, т. е. топологией, в которой поляры *) ограниченных множеств из E образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Если φ: $E \to F$ — некоторое непрерывное отображение л. т. п., то сопряженное отображение φ^*: $F^* \to E^*$, действующее по формуле $(\varphi^* f', e) = (f', \varphi e)$, также непрерывно.

Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — некоторое возрастающее семейство л. т. п. Рассмотрим совокупность сопряженных пространств X_α^* и сопряженных отображений

$$j_\alpha^{\alpha'} = (i_{\alpha'}^{\alpha})^*: \ X_\alpha^* \to X_{\alpha'}^*.$$

Эти пространства и отображения, очевидно, удовлетворяют условиям определения 2 п, следовательно, образуют убывающее семейство, которое мы назовем сопряженным и обозначим через X^*. Аналогичным образом для каждого убывающего семейства X определяется сопряженное возрастающее семейство X^*.

Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — возрастающее семейство, а B_α — ограниченное подмножество одного из пространств X_α. Его образ $i_\alpha(B_\alpha) \subset \overrightarrow{X}$, очевидно, поглощается любой окрестностью нуля в $\overrightarrow{X}$ и, следовательно, ограничен в $\overrightarrow{X}$. Скажем, что семейство X *регулярно*, если справедливо обратное утверждение: всякое ограниченное в $\overrightarrow{X}$ множество при некотором α равно $i_\alpha(B_\alpha)$, где B_α — ограниченное подмножество X_α.

Предложение 3. *Пусть X — регулярное возрастающее семейство. Тогда имеет место естественный изоморфизм*

$$(\overrightarrow{X})^* \cong \overleftarrow{X}^* = \varprojlim \{X_\alpha^*, \ j_\alpha^{\alpha'} = (i_{\alpha'}^{\alpha})^*\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть f — произвольный непрерывный функционал над $\overrightarrow{X}$. Поскольку каноническое отображение i_α: $X_\alpha \to \overrightarrow{X}$ непрерывно, мы можем рассмотреть непрерывный функционал $f_\alpha = i_\alpha^* f \in X_\alpha^*$. Совокупность этих функционалов, очевидно, образует нить в семействе X^* и, следовательно, является элементом предела $\overleftarrow{X}^*$. Обратно, пусть $\{f_\alpha \in X_\alpha^*\}$ — некоторая нить, являющаяся элементом $\overleftarrow{X}^*$. Рассмотрим функционал над $\overrightarrow{X}$, действующий по формуле

$$(f, i_\alpha x_\alpha) = (f_\alpha, x_\alpha), \qquad x_\alpha \in X_\alpha.$$

Этот функционал, очевидно, линеен и непрерывен и, следовательно, является элементом $(\overrightarrow{X})^*$. Тем самым мы установили алгебраический изоморфизм (3).

*) Полярой множества $G \subset E$ называется совокупность всех функционалов $f \in E^*$, удовлетворяющих условию $|(f, x)| \leqslant 1 \ \forall x \in G$.

Покажем, что этот изоморфизм является топологическим. По определению поляры ограниченных множеств $B \subset \overrightarrow{X}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $(\overrightarrow{X})^*$. С другой стороны, в каждом пространстве X_α^* фундаментальную систему окрестностей нуля образуют поляры ограниченных множеств $B_\alpha \subset X_\alpha$. Следовательно, множества вида $(j^\alpha)^{-1}(B_\alpha^0)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\overleftarrow{X}^*$ (j^α — каноническое отображение в семействе X^*). Заметим теперь, что $(j^\alpha)^{-1}(B_\alpha^0) = (i_\alpha(B_\alpha))^0$. Остается добавить, что согласно условию классы множеств вида B и $i_\alpha(B_\alpha)$ совпадают. Отсюда вытекает совпадение топологий в левой и правой частях (3). ■

Предложение 4. *Пусть X — возрастающее семейство, образованное рефлексивными банаховыми пространствами. Тогда предел $\overrightarrow{X}$ также рефлексивен и имеет место изоморфизм* (3).

Если X — убывающее семейство, образованное рефлексивными банаховыми пространствами, то предел $\overleftarrow{X}$ также рефлексивен и имеет место изоморфизм $(\overleftarrow{X})^* \cong \overrightarrow{X}^*$.

Доказательство. Как известно, возрастающее семейство, образованное рефлексивными банаховыми пространствами, регулярно, и его предел рефлексивен *). Изоморфизм (3) вытекает из предложения 3. Пусть теперь X — убывающее семейство, образованное рефлексивными банаховыми пространствами. Сопряженное семейство X^* возрастающее и также состоит из рефлексивных банаховых пространств. По доказанному выше предел $\overrightarrow{X}^*$ рефлексивен и $(\overrightarrow{X}^*)^* \cong \overleftarrow{X}$. Переходя в этом изоморфизме к сопряженным пространствам, получаем $(\overleftarrow{X})^* \cong \overrightarrow{X}^*$, ч. и т. д. ■

7°. Пространства Шварца. Напомним, что отображение $\varphi: E \to F$ линейных топологических пространств называется компактным или вполне непрерывным, если оно переводит некоторую окрестность нуля в относительно компактное множество **). Если E и F — гильбертовы пространства, то сопряженное отображение $\varphi^*: F^* \to E^*$ компактно тогда и только тогда, когда компактно само φ.

Л. т. п. E называется *пространством Шварца*, если для любой окрестности нуля U в E найдется окрестность нуля V, которая при любом $\varepsilon > 0$ допускает конечную εU-сеть, т. е. может быть покрыта конечным числом сдвигов множества εU.

---

*) См. Канторович и Акилов [1].

**) Множество K в л. т. п. E называется относительно компактным, если его замыкание компактно, или, иначе, если оно может быть покрыто конечным числом сдвигов любой окрестности нуля.

Если E — пространство Шварца, то любое ограниченное множество B в E относительно компактно. Действительно, пусть U — произвольная окрестность нуля в E, а V — некоторая окрестность нуля, допускающая при любом $\varepsilon > 0$ конечную εU-сеть. Так как множество B ограничено, оно содержится в λV при некотором $\lambda > 0$ и, следовательно, допускает конечную U-сеть. Так как окрестность нуля U произвольна, множество B относительно компактно, ч. и т. д.

Наибольший интерес для нас представляют пространства Шварца, являющиеся в то же время пространствами Фреше. Такие пространства будут возникать у нас как проективные пределы.

Предложение 5. *Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ — убывающее семейство, обладающее следующими свойствами: при любом α X_α есть $\mathcal{F}$-пространство, отображение $i_{\alpha+1}^\alpha$ компактно, а его образ плотен в X_α. Тогда $\overleftarrow{X}$ есть $\mathcal{F}$-пространство Шварца.*

Доказательство. Согласно предложению 2 $\overleftarrow{X}$ есть $\mathcal{F}$-пространство и при любом α образ отображения i^α: $\overleftarrow{X} \to X_\alpha$ плотен в X_α. Пусть U — произвольная окрестность нуля в $\overleftarrow{X}$. Она содержит окрестность вида $(i^\alpha)^{-1}(U_\alpha)$, где U_α — некоторая окрестность нуля в X_α. Пусть $U_{\alpha+1}$ — некоторая окрестность нуля в $X_{\alpha+1}$ такая, что $i_{\alpha+1}^\alpha(U_{\alpha+1})$ есть относительно компактное множество в X_α. Положим $V = (i^{\alpha+1})^{-1}(U_{\alpha+1})$ и покажем, что окрестность V при любом $\varepsilon > 0$ допускает конечную εU-сеть.

Поскольку множество $i_{\alpha+1}^\alpha(U_{\alpha+1})$ относительно компактно в X_α, оно принадлежит конечному объединению вида $\bigcup\limits_\lambda \left(x_\alpha^\lambda + \frac{\varepsilon}{2} U_\alpha\right)$, где все $x_\alpha^\lambda \in X_\alpha$. Выберем элементы $x^\lambda \in \overleftarrow{X}$ так, чтобы для всех λ $i^\alpha x^\lambda - x_\alpha^\lambda \in \frac{\varepsilon}{2} U_\alpha$. Тогда

$$i_{\alpha+1}^\alpha(U_{\alpha+1}) \subset \bigcup_\lambda (i^\alpha x^\lambda + \varepsilon U_\alpha).$$

Применив к обеим частям операцию $(i^\alpha)^{-1}$, мы получим включение $V \subset \bigcup (x^\lambda + \varepsilon U)$. Тем самым конечная εU-сеть для множества V построена. ■

Отметим, что всякое $\mathcal{F}$-пространство Шварца рефлексивно. Действительно, согласно общему критерию *) для того, чтобы $\mathcal{F}$-пространство было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое ограниченное множество было слабо компактно. Из сделанного выше замечания следует, что в $\mathcal{F}$-пространстве Шварца всякое замкнутое ограниченное множество компактно и тем более слабо компактно, что и влечет его рефлексивность.

---

*) См., например, Бурбаки [1], гл. IV, § 3, п° 3.

Пусть E — некоторое л. т. п., а F — его подпространство. Как легко сообразить, полярой подпространства F является подпространство $F^0 \subset E^*$, образованное всеми функционалами, обращающимися в нуль на F. Если пространство E рефлексивно, то вторая поляра F^{00} есть подпространство в E, причем $F \subset F^{00}$. Для того чтобы имело место равенство $F = F^{00}$, необходимо и достаточно, чтобы подпространство F было замкнуто.

Пусть F — замкнутое подпространство пространства E. Установим следующие алгебраические изоморфизмы *):

$$F^* \cong E^*/F^0, \qquad F^0 \cong (E/F)^*. \tag{4.1}$$

Всякий непрерывный функционал над подпространством F по теореме Хана — Банаха можно продолжить до непрерывного функционала над всем пространством E. Это продолжение определяется с точностью до функционала, равного нулю на F. Тем самым мы определили линейное отображение $F^* \to E^*/F^0$. Обратно, всякий элемент факторпространства E^*/F^0 можно рассматривать как непрерывный функционал над F. Следовательно, первый изоморфизм (4) установлен.

Построим второй изоморфизм. Всякому функционалу $f \in F^0$ можно отнести функционал $\check{f}$ над факторпространством E/F, который мы будем называть ассоциированным с f. Обратно, всякий функционал над E/F можно рассматривать как элемент E^*, обращающийся в нуль на F.

Значение класса $\mathcal{F}$-пространств Шварца определяется следующим утверждением.

Предложение 6**). *Пусть E есть $\mathcal{F}$-пространство Шварца, а F — его замкнутое подпространство. Тогда F и E/F суть $\mathcal{F}$-пространства Шварца, а алгебраические изоморфизмы* (4) *являются топологическими.*

Отметим, что в предположениях этого предложения все пространства в (4) рефлексивны. Поэтому переходя в (4) к сопряженным изоморфизмам, мы получим $F \cong (E^*/F^0)^*$, $(F^0)^* \cong E/F$. Эти изоморфизмы показывают, что предложение 6 справедливо также для любого пространства E^*, сопряженного к $\mathcal{F}$-пространству Шварца, и любого замкнутого подпространства F^0.

8°. Двойственность в точных последовательностях л. т. п. Напомним некоторые определения § 1 гл. I. Непрерывное отображение φ: $E \to F$ линейных топологических пространств называется *гомоморфизмом*, если ассоциированное с ним отображение φ: $\operatorname{Coim} \varphi = E/\operatorname{Ker} \varphi \to \operatorname{Im} \varphi$ является топологическим изоморфизмом. Для того чтобы отображение φ было гомоморфизмом, необходимо и до-

*) Напомним, что если противное не оговорено, мы наделяем всякое подпространство $F \subset E$ индуцированной топологией, а факторпространство E/F — канонической топологией.

**) Доказательство см. Гротендик [1].

статочно, чтобы образ любой окрестности нуля $U \subset E$ был окрестностью нуля в $\operatorname{Im}\varphi$.

Последовательность отображений л. т. п.

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G \tag{5.1}$$

мы называем *алгебраически точной*, если $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Эта последовательность была названа *точной*, если она алгебраически точна, а отображения φ и ψ суть гомоморфизмы. Отображение ψ в этой последовательности мы назовем (*алгебраическим*) *мономорфизмом*, если последовательность (5) (алгебраически) точна, а $\varphi = 0$. Отображение φ в (5) мы назовем (*алгебраическим*) *эпиморфизмом*, если последовательность (5) (алгебраически) точна, а $\psi = 0$. Иными словами, алгебраическая мономорфность отображения φ: $E \to F$ означает, что оно взаимно однозначно, а его алгебраическая эпиморфность — то, что оно действует на F. Для того чтобы отображение φ было мономорфизмом (эпиморфизмом), необходимо и достаточно, чтобы оно было алгебраическим мономорфизмом (алгебраическим эпиморфизмом) и в то же время являлось гомоморфизмом.

Предложение 7.

I. *Пусть E и F суть $\mathcal{F}$-пространства, а φ: $E \to F$ — непрерывное отображение. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

а) φ *есть гомоморфизм*,

б) *подпространство* $\operatorname{Im}\varphi$ *замкнуто в* F,

б*) *подпространство* $\operatorname{Im}\varphi^*$ *замкнуто в* E^*.

II. *Если E и F суть $\mathcal{F}$-пространства Шварца, то эти условия эквивалентны также следующему*:

а*) φ^* *есть гомоморфизм*.

Доказательство. Эквивалентность первых трех условий есть известный факт *). Докажем второе утверждение предложения. Предположим, что выполнены условия а), б) и б*). Условие а) означает, что отображение $\check{\varphi}$: $E/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$, ассоциированное с φ, есть изоморфизм. Следовательно, изоморфизмом является сопряженное отображение $(\check{\varphi})^*$: $(\operatorname{Im}\varphi)^* \to (E/\operatorname{Ker}\varphi)^*$. Из предложения 6 вытекают изоморфизмы $(\operatorname{Im}\varphi)^* \cong F^*/(\operatorname{Im}\varphi)^0$ (так как $\operatorname{Im}\varphi$ замкнуто) и $(E/\operatorname{Ker}\varphi)^* \cong$ $\cong (\operatorname{Ker}\varphi)^0$. Учитывая эти изоморфизмы и соотношения $(\operatorname{Im}\varphi)^0 = \operatorname{Ker}\varphi^*$ и $(\operatorname{Ker}\varphi)^0 = \operatorname{Im}\varphi^*$ (так как $\operatorname{Im}\varphi^*$ замкнуто), мы преобразуем отображение $(\check{\varphi})^*$ к виду $F^*/\operatorname{Ker}\varphi^* \to \operatorname{Im}\varphi^*$. Как легко проверить, полученное отображение ассоциировано с φ^*. Тем самым мы установили, что φ^* — гомоморфизм.

Обратно, пусть известно, что φ^* — гомоморфизм, т. е. ассоциированное отображение $\check{\varphi}^*$: $F^*/\operatorname{Ker}\varphi^* \to \operatorname{Im}\varphi^*$ является изоморфизмом.

---

*) См. Дьедонне и Шварц [1].

Согласно предложению 6 сопряженное с $F^*/\operatorname{Ker}\varphi^*$ пространство изоморфно замкнутому подпространству $(\operatorname{Ker}\varphi^*)^0 \subset F$ и, следовательно, само является $\mathcal{F}$-пространством Шварца. Так как оно рефлексивно, то пространство $F^*/\operatorname{Ker}\varphi^*$ сопряжено с этим $\mathcal{F}$-пространством и, следовательно, полно. Поскольку пространство $\operatorname{Im}\varphi^*$ изоморфно $F^*/\operatorname{Ker}\varphi^*$, оно также полно и, следовательно, является замкнутым подпространством в E^*, т. е. выполнено условие б*). ■

Предложение 8.

I. *Пусть*

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G \tag{6.1}$$

— последовательность непрерывных отображений л. т. п. Если эта последовательность алгебраически точна, а ψ *есть гомоморфизм, то сопряженная последовательность*

$$E^* \xleftarrow{\varphi^*} F^* \xleftarrow{\psi^*} G^* \tag{7.1}$$

алгебраически точна.

II. *Пусть* E, F *и* G *суть* $\mathcal{F}$*-пространства Шварца. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

а) *последовательность* (6) *точна,*

б) *последовательность* (6) *алгебраически точна, а подпространство* $\operatorname{Im}\psi$ *замкнуто,*

а*) *последовательность* (7) *точна,*

б*) *последовательность* (7) *алгебраически точна, а подпространство* $\operatorname{Im}\varphi^*$ *замкнуто.*

Доказательство. Установим первое утверждение. Из равенства $\varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^* = 0$ вытекает включение $\operatorname{Im}\psi^* \subset \operatorname{Ker}\varphi^*$. Докажем обратное включение. Пусть f' — произвольный элемент $\operatorname{Ker}\varphi^*$. Иными словами, f' есть непрерывный функционал над F, обращающийся в нуль на $\operatorname{Im}\varphi$. Из алгебраической точности (6) следует, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Поэтому функционалу f' отвечает ассоциированный функционал $\check{f}$ над $F/\operatorname{Ker}\psi$. По условию отображение $\check{\psi}\colon F/\operatorname{Ker}\psi \to \operatorname{Im}\psi$, ассоциированное с ψ, является изоморфизмом. Положим $g' = (\check{\psi}^{-1})^*\check{f}$; g' есть непрерывный функционал над G, причем

$$(\psi^*g', f) = (g', \psi f) = (\check{f}, \check{\psi}^{-1}\psi f) = (f', f), \quad f \in F,$$

откуда $\psi^*g' = f' \in \operatorname{Im}\psi^*$. Тем самым мы установили включение $\operatorname{Ker}\varphi^* \subset \operatorname{Im}\psi^*$.

Второе утверждение является комбинацией первого утверждения и предыдущего предложения. ■

9°. Переход к пределу в отображениях семейств. Напомним некоторые определения § 1 гл. I. Пусть $X = \{X_\alpha, i_\alpha^{\alpha'}\}$ и $Y = \{Y_\alpha, j_\alpha^{\alpha'}\}$ — два семейства л. т. п. *Отображением* $\varphi\colon X \to Y$ мы назвали совокупность линейных непрерывных операторов $\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}$, определенных для каждого целого α таких, что для любых α и $\alpha' > \alpha$ имеет место коммутативное соотношение $\varphi_{\alpha'} i_\alpha^{\alpha'} = j_{\beta(\alpha)}^{\beta(\alpha')}\varphi_\alpha$. При этом функция $\alpha \to \beta(\alpha)$, называемая *порядком отображения* φ, должна быть монотонно возрастающей и стремиться к $\pm\infty$ вместе с α. Если φ: $X \to Y$ и ψ: $Y \to Z$ — два отображения семейств, порядки которых равны соответственно $\beta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$, то их *композицией* называется отображение $\psi\varphi$: $X \to Z$ порядка $\gamma(\beta(\alpha))$, компонентами которого являются операторы $\psi_{\beta(\alpha)}\varphi_\alpha$ (ψ_β и φ_α — компоненты ψ и φ). *Тождественным отображением* I: $X \to X$ называется отображение, компонентами которого являются операторы вида $i_\alpha^{\alpha'}$.

Предложение 9.

I. *Пусть* φ: $X \to Y$ — *отображение семейств. Тогда существуют и определены однозначно отображения* $\vec{\varphi}$: $\vec{X} \to \vec{Y}$ *и* $\overleftarrow{\varphi}$: $\overleftarrow{X} \to \overleftarrow{Y}$ *такие, что для любого* α *коммутативны следующие диаграммы:*

$$\begin{array}{ccc} \vec{X} & \xrightarrow{\vec{\varphi}} & \vec{Y} \\ {\scriptstyle i_\alpha}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j_\beta} \\ X_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & Y_\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overleftarrow{X} & \xrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} & \overleftarrow{Y} \\ {\scriptstyle i^\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^\beta} \\ X_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & Y_\beta \end{array} \qquad \beta = \beta(\alpha), \tag{8.1}$$

где i_α, j_β, i^α *и* j^β — *канонические отображения. Отображения* $\vec{\varphi}$ *и* $\overleftarrow{\varphi}$ *мы будем называть пределами* φ.

II. *Если* φ, φ': $X \to Y$ — *эквивалентные отображения* (см. § 1 гл. I), *то их пределы совпадают.*

III. *Для любых двух отображений* φ: $X \to Y$ *и* ψ: $Y \to Z$ *имеют место соотношения* $\overrightarrow{\psi\varphi} = \vec{\psi}\,\vec{\varphi}$ *и* $\overleftarrow{\psi\varphi} = \overleftarrow{\psi}\,\overleftarrow{\varphi}$.

Доказательство. Установим первое утверждение. Функция β: $\alpha \to \beta(\alpha)$, являющаяся порядком φ, по условию монотонна и стремится к $\pm\infty$ при $\alpha \to \pm\infty$. Поэтому образ отображения β: $Z \to Z$ является конфинальной частью Z при обоих отношениях порядка в Z, о которых мы говорили в 4°. Рассмотрим соответствующее конфинальное подсемейство $Y' = \{Y'_\alpha = Y_{\beta(\alpha)}\}$. Отображение φ можно рассматривать как отображение из X в Y', причем его порядок оказывается равным тождественной функции $\alpha \to \alpha$. С другой стороны, в силу предложения 1 оба предела подсемейства Y' изоморфны пределам семейства Y. Поэтому мы можем с самого начала предполагать, что $\beta(\alpha) \equiv \alpha$.

Построим отображение $\vec{\varphi}$. Для того чтобы диаграмма (8) была коммутативна, необходимо и достаточно, чтобы это отображение любой элемент вида $i_\alpha x_\alpha$ переводило в $j_\alpha\varphi_\alpha x_\alpha$. Покажем, что это условие корректно, т. е. что элемент $j_\alpha\varphi_\alpha x_\alpha$ не зависит от x_α, а лишь от $i_\alpha x_\alpha$.

Если $i_\alpha x_\alpha = i_{\alpha'} x_{\alpha'}$, то по определению существует некоторое $\alpha'' \geqslant \alpha, \alpha'$ такое, что $i_\alpha^{\alpha''} x_\alpha = i_{\alpha'}^{\alpha''} x_{\alpha'}$, откуда

$$j_\alpha^{\alpha''} \varphi_\alpha x_\alpha = \varphi_{\alpha''} i_\alpha^{\alpha''} x_\alpha = \varphi_{\alpha''} i_{\alpha'}^{\alpha''} x_{\alpha'} = j_{\alpha'}^{\alpha''} \varphi_{\alpha'} x_{\alpha'},$$

т. е. элементы $\varphi_\alpha x_\alpha$ и $\varphi_{\alpha'} x_{\alpha'}$ эквивалентны, следовательно, $j_\alpha \varphi_\alpha x_\alpha = j_{\alpha'} \varphi_{\alpha'} x_{\alpha'}$, ч. и т. д. Итак, мы установили, что линейное отображение $\overrightarrow{\varphi}$, делающее диаграмму (8) коммутативной, существует и единственно.

Покажем, что это отображение непрерывно. Пусть V — произвольная окрестность нуля в $\overrightarrow{Y}$, а $U = (\overrightarrow{\varphi})^{-1}(V)$. По определению топологии в индуктивном пределе $\overrightarrow{Y}$ множество $V_\alpha = i_\alpha^{-1}(V)$ при любом α является окрестностью нуля в Y_α. Так как отображение φ_α непрерывно, $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ есть окрестность нуля в X_α. С другой стороны, из коммутативности диаграммы (8) $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha) = i_\alpha^{-1}(U)$. Поскольку при любом α $i_\alpha^{-1}(U)$ есть окрестность нуля в X_α, то U есть окрестность нуля в $\overrightarrow{X}$, ч. и т. д.

Построим теперь отображение $\overleftarrow{\varphi}$. Пусть $x = \{x_\alpha\}$ — произвольная нить, принадлежащая $\overleftarrow{X}$. Элементы $\varphi_\alpha x_\alpha \in Y_\alpha$ также образуют нить. Это следует из выкладки:

$$j_\alpha^{\alpha'} \varphi_\alpha x_\alpha = \varphi_{\alpha'} i_\alpha^{\alpha'} x_\alpha = \varphi_{\alpha'} x_{\alpha'}, \qquad \alpha' > \alpha.$$

Мы полагаем $\overleftarrow{\varphi} x = \{\varphi_\alpha x_\alpha\}$. Такое определение отображения $\overleftarrow{\varphi}$ необходимо и достаточно для того, чтобы диаграмма (8) была коммутативна. Легко проверить, что это отображение непрерывно. Тем самым первое утверждение доказано.

Третье утверждение очевидно. Очевидно также, что пределы любого тождественного отображения суть тождественные операторы. Пусть теперь φ, φ': $X \to Y$ — эквивалентные отображения. По определению это означает, что существуют тождественные операторы J, J': $Y \to Y$ такие, что $J\varphi = J'\varphi'$. Из сказанного выше следует, что $\overrightarrow{J\varphi} = \overrightarrow{J}\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi}$, откуда $\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi}'$. Аналогичным образом, $\overleftarrow{\varphi} = \overleftarrow{\varphi}'$. ■

Отметим некоторые следствия предложения 9. Пусть I: $X \to X$ — единичное отображение, т. е. отображение, компонентами которого являются операторы i_α^α. Применим к нему доказанное предложение. Из коммутативности диаграмм (8) следует, что предельные отображения $\overrightarrow{I}$ и $\overleftarrow{I}$ — тождественные. Пусть теперь I — тождественное отображение семейства X. Оно эквивалентно единичному и поэтому из утверждения II вытекает, что пределы $\overrightarrow{I}$ и $\overleftarrow{I}$ также являются тождественными операторами.

Предположим, что отображения $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ устанавливают изоморфизм этих семейств. Покажем, что их пределы

$$\vec{X} \underset{\vec{\psi}}{\overset{\vec{\varphi}}{\rightleftarrows}} \vec{Y}, \qquad \overleftarrow{X} \underset{\overleftarrow{\psi}}{\overset{\overleftarrow{\varphi}}{\rightleftarrows}} \overleftarrow{Y}$$

также являются изоморфизмами. Действительно, по условию $\psi\varphi = I$ и $\varphi\psi = J$, где I и J — тождественные отображения. Используя утверждение III, мы получаем, что $\overrightarrow{\psi\varphi} = \vec{\psi}\vec{\varphi}$ и $\overrightarrow{\varphi\psi} = \vec{\varphi}\vec{\psi}$. С другой стороны, из сказанного выше следует, что отображения $\overrightarrow{\psi\varphi} = \vec{I}$ и $\overrightarrow{\varphi\psi} = \vec{J}$ суть тождественные операторы. Отсюда вытекает, что операторы $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ взаимно обратны, т. е. устанавливают изоморфизм. Аналогичные рассуждения показывают, что операторы $\overleftarrow{\varphi}$ и $\overleftarrow{\psi}$ также устанавливают изоморфизм.

Предложение 9 показывает, что операция перехода к индуктивному а также к проективному пределу есть функтор, действующий из категории классов эквивалентиых семейств л. т. п. и классов эквивалеитиых отображений этих семейств в категорию линейных топологических пространств. Сейчас мы докажем два предложения, характеризующие точность этих функторов.

10°. Переход к индуктивному пределу в точной последовательности.

Предложение 10. *Пусть*

$$0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0, \quad X = \{X_\alpha,\ i_\alpha^{\alpha'}\},$$
$$Y = \{Y_\alpha,\ j_\alpha^{\alpha'}\}, \quad Z = \{Z_\alpha,\ k_\alpha^{\alpha'}\} \tag{9.1}$$

— последовательность возрастающих семейств и их отображений, а

$$0 \to \vec{X} \xrightarrow{\vec{\varphi}} \vec{Y} \xrightarrow{\vec{\psi}} \vec{Z} \to 0 \tag{10.1}$$

— последовательность их индуктивных пределов.

I. А) *Если последовательность* (9) *алгебраически точна в члене* Y, *то последовательность* (10) *алгебраически точна в члене* $\vec{Y}$.

Б) *Если последовательность* (9) *точна в члене* Z, *то последовательность* (10) *точна в члене* $\vec{Z}$.

II. *Предположим, что последовательность* (9) *точна и выполнены следующие условия:*

а) *при любом* α *отображение* $k_\alpha^{\alpha+1}$ *взаимно однозначно,*

б) *при любом* α *отображение* $j_\alpha^{\alpha+1}$ *есть топологический мономорфизм,* в) *при любом* α *пространство* X_α *полно. Тогда подпространство* $\operatorname{Im}\vec{\varphi}$ *замкнуто.*

Замечания. Из утверждения I.А) вытекает, что переход к индуктивным пределам сохраняет алгебраическую точность любой последовательности возрастающих семейств.

Если в дополнении к условиям а), б) и в) утверждения II пространства $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ суть пространства Фреше или сопряженные к $\mathcal{F}$-пространствам Шварца, то из замкнутости $\operatorname{Im}\vec{\varphi}$ согласно предложению 7 следует точность последовательности (10).

Доказательству предложения мы предпошлем некоторые общие замечания. Предположим, что (9) — алгебраически точная последовательность семейств.

I. Из точности (9) следует, что $\psi\varphi \sim 0$, т. е. существует тождественное отображение K семейства Z такое, что $K\psi\varphi = 0$. Заменив отображение ψ на эквивалентное отображение $\psi' = K\psi$, мы получим соотношение $\psi'\varphi = 0$ и вместе с тем не нарушим точности (9) и не изменим предельных отображений $\vec{\psi}$ и $\overleftarrow{\psi}$. Поэтому мы можем считать, что уже для исходных отображений имеет место соотношение $\psi\varphi = 0$.

II. Пусть

$$\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}, \qquad \psi_\alpha\colon Y_\alpha \to Z_{\gamma(\alpha)}$$

— компоненты отображений φ и ψ. По условию функции $\beta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$, являющиеся порядками этих отображений, монотонно возрастают и стремятся к $\pm\infty$ вместе с α. Тем же свойством обладает сложная функция $\gamma(\beta(\alpha))$. Отсюда следует, что подсемейства

$$Y' = \left\{Y_{\beta(\alpha)},\ j_{\beta(\alpha)}^{\beta(\alpha')}\right\}, \qquad Z' = \left\{Z_{\gamma(\beta(\alpha))},\ k_{\gamma(\beta(\alpha))}^{\gamma(\beta(\alpha'))}\right\}$$

конфинальны соответственно семействам Y и Z. Если мы заменим в (9) семейства Y и Z на Y' и Z', то порядки отображений φ и ψ станут равны тождественной функции $\alpha \to \alpha$. При этом условия а) и б) не нарушатся, поскольку композиция взаимно однозначных отображений сама взаимно однозначна, а композиция мономорфизмов есть мономорфизм. Поэтому мы можем считать, что с самого начала у нас $\beta(\alpha) \equiv \gamma(\alpha) \equiv \alpha$.

III. По определению из точности последовательности (9) вытекает, что существуют отображения

$$\varphi^{-1}\colon \operatorname{Ker}\psi \to X, \qquad \psi^{-1}\colon Z \to Y/\operatorname{Ker}\psi \tag{11.1}$$

и тождественные отображения I, J, K соответственно семейств X, Y, Z такие, что

$$\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker} I, \qquad \varphi\varphi^{-1} = J, \qquad \psi\psi^{-1} = K. \tag{12.1}$$

Пусть $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$ — порядки отображений I, J, K. Отметим, что порядки отображений φ^{-1} и ψ^{-1} суть соответственно $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$. Выберем некоторую монотонно растущую функцию $\lambda(\alpha)$, стремящуюся к $\pm\infty$ вместе с α, которая при любом α удовлетворяет неравенствам

$$a(\lambda(\alpha)),\ b(\lambda(\alpha)),\ c(\lambda(\alpha)) \leqslant \lambda(\alpha+1). \tag{13.1}$$

Заменив отображения I, J, K, φ^{-1}, ψ^{-1} их композициями с подходящими тождественными отображениями, мы можем увеличить их порядки $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$ таким образом, чтобы неравенства (13) превратились в равенства. При этом соотношения (12), конечно, не нарушатся. После этого заменим семейства X, Y, Z на конфинальные семейства $\{X_{\lambda(\alpha)}\}$, $\{Y_{\lambda(\alpha)}\}$, $\{Z_{\lambda(\alpha)}\}$. В результате такой замены порядки всех отображений I, J, K, φ^{-1}, ψ^{-1} станут равными функции $\alpha\to\alpha+1$. Следовательно, мы можем считать, что этим свойством обладают отображения I, J, K, φ^{-1}, ψ^{-1}, построенные для исходной последовательности (9).

Доказательство предложения 10. Установим утверждение IA). Из равенства $\psi\varphi=0$ (см. замечание I) следует, что $\vec{\psi}\vec{\varphi}=0$, откуда $\operatorname{Im}\vec{\varphi}\subset\operatorname{Ker}\vec{\psi}$. Докажем обратное включение. Пусть y — произвольный элемент пространства $\vec{Y}$, принадлежащий $\operatorname{Ker}\vec{\psi}$. Поскольку $\vec{Y}=\bigcup\limits_{\alpha} j_\alpha(Y_\alpha)$, где j_α — канонические отображения, мы имеем $y=j_\alpha y_\alpha$ с некоторым $y_\alpha\in Y_\alpha$. Из равенства $\vec{\psi}y=0$ и соотношения $\vec{\psi}j_\alpha=k_\alpha\psi_\alpha$ (см. замечание II) следует, что $k_\alpha\psi_\alpha y_\alpha=0$. Это означает, что $k_\alpha^\beta\psi_\alpha y_\alpha=0$ для некоторого $\beta\geqslant\alpha$. Поскольку $k_\alpha^\beta\psi_\alpha y_\alpha=\psi_\beta j_\alpha^\beta y_\alpha$, элемент $j_\alpha^\beta y_\alpha$ принадлежит ядру ψ_β. Из соотношений (11) и (12) следует, что тождественное отображение J переводит $\operatorname{Ker}\psi$ в $\operatorname{Im}\varphi$, следовательно, его компонента $j_\beta^{\beta+1}$ переводит $\operatorname{Ker}\psi_\beta$ в $\operatorname{Im}\varphi_{\beta+1}$. Отсюда $j_\alpha^{\beta+1}y_\alpha=\varphi_{\beta+1}x_{\beta+1}$ с некоторым $x_{\beta+1}\in X_{\beta+1}$. Следовательно, $y=\vec{\varphi}x$, где $x=i_{\beta+1}x_{\beta+1}$, ч. и т. д.

Установим теперь утверждение IБ). По условию ассоциированное с ψ отображение $\hat{\psi}$: $Y/\operatorname{Ker}\psi\to Z$ является изоморфизмом. Предельное отображение

$$\vec{\hat{\psi}}\colon \overrightarrow{Y/\operatorname{Ker}\psi}\to\vec{Z}$$

согласно предложению 9 также является изоморфизмом. Пусть π: $Y\to Y/\operatorname{Ker}\psi$ — каноническое отображение семейства на его фактор-семейство, а

$$\vec{\pi}\colon \vec{Y}\to\overrightarrow{Y/\operatorname{Ker}\psi}$$

— его предел. Поскольку $\psi = \check{\psi}\pi$, то $\vec{\psi} = \vec{\check{\psi}}\vec{\pi}$. Таким образом, нам остается лишь показать, что $\vec{\pi}$ есть гомоморфизм. Это означает, что образ любой выпуклой окрестности нуля V в $\vec{Y}$ является окрестностью нуля в $\overrightarrow{Y/\mathrm{Ker}\,\psi}$.

Пусть для каждого α отображение π_α: $Y_\alpha \to Y_\alpha/\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$ есть компонента отображения π, а j'_α: $Y_\alpha/\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha \to \overrightarrow{Y/\mathrm{Ker}\,\psi}$ — каноническое отображение в факторсемействе $\overrightarrow{Y/\mathrm{Ker}\,\psi}$. Из равенства

$$j'_\alpha \pi_\alpha j_\alpha^{-1}(V) = \vec{\pi} j_\alpha j_\alpha^{-1}(V) \subset \vec{\pi}(V)$$

вытекает соотношение

$$\pi_\alpha\left(j_\alpha^{-1}(V)\right) \subset \left(j'_\alpha\right)^{-1}(\pi(V)). \tag{14.1}$$

Так как по условию при любом α $j_\alpha^{-1}(V)$ есть окрестность нуля в Y_α, а отображение π_α — гомоморфизм, левая часть включения (14) является окрестностью нуля в $Y_\alpha/\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$. Таким образом, при любом α множество $\left(j'_\alpha\right)^{-1}(\pi(V))$ является окрестностью нуля в $Y_\alpha/\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$. Поэтому множество $\pi(V)$, будучи выпуклым, является окрестностью нуля в $\overrightarrow{Y/\mathrm{Ker}\,\psi}$ ч. и т. д.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Прежде всего отметим, что из условия в) вытекает, что при любом α отображение $j_\alpha^{\alpha+1}$ переводит замыкание $\overline{\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha}$ подпространства $\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$ в $\mathrm{Ker}\,\psi_{\alpha+1}$. Для этого рассмотрим отображение $(\varphi^{-1})_\alpha$: $\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha \to X_{\alpha+1}$, являющееся компонентой φ^{-1}. Так как оно непрерывно, а пространство $X_{\alpha+1}$ полно, его можно продолжить по непрерывности на замыкание $\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$. Из непрерывности отображения $\varphi_{\alpha+1}$ следует, что соотношение $\varphi_{\alpha+1}\left(\varphi^{-1}\right)_\alpha = j_\alpha^{\alpha+1}$ сохранится при этом продолжении. Отсюда следует, что отображение $j_\alpha^{\alpha+1}$ переводит $\overline{\mathrm{Ker}\,\psi_\alpha}$ в подпространство $\mathrm{Im}\,\varphi_{\alpha+1} \subset \mathrm{Ker}\,\psi_{\alpha+1}$ ч. и т. д.

Докажем теперь замкнутость подпространства $\mathrm{Im}\,\vec{\varphi}$. Из алгебраической точности (10) следует, что $\mathrm{Im}\,\vec{\varphi} = \mathrm{Ker}\,\vec{\psi}$, следовательно, нам достаточно установить замкнутость $\mathrm{Ker}\,\vec{\psi}$. Последнее утверждение мы докажем так: для произвольного элемента $y \in \vec{Y}$, не принадлежащего $\mathrm{Ker}\,\vec{\psi}$, мы найдем окрестность нуля V в $\vec{Y}$ такую, что $y \notin \mathrm{Ker}\,\vec{\psi} + V$.

Элемент y принадлежит одному из пространств $j_\alpha(Y_\alpha)$. Пусть для простоты $y = j_1 y_1$, где $y_1 \in Y_1$. Для каждого α мы имеем $y = j_\alpha y_\alpha$, где $y_\alpha = j_1^\alpha y_1$. Так как по условию $y \notin \mathrm{Ker}\,\vec{\psi}$, то при любом α $y_\alpha \notin \mathrm{Ker}\,\psi_\alpha$. Заметим, что y_1 не принадлежит $\overline{\mathrm{Ker}\,\psi_1}$. Действительно, если это не так, то из сделанного выше замечания следует, что $y_2 \in \overline{\operatorname{Ker}\psi_2}$. Однако это включение противоречит выбору y. Итак, $y_1 \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_1}$. Так как подпространство $\overline{\operatorname{Ker}\psi_1}$ замкнуто, мы можем выбрать замкнутую выпуклую окрестность нуля V_1 в Y_1 такую, что $y_1 \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_1} + V_1$. Для каждого α положим $V_\alpha = j_1^\alpha(V_1)$. Покажем, что

$$y_2 \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_2} + V_2. \tag{15.1}$$

Предположим противное. Тогда согласно упомянутому замечанию $y_3 \in \operatorname{Ker}\psi_3 + V_3$, откуда $\psi_3 y_3 \in \psi_3(V_3)$, т. е. $k_1^3\psi_1 y_1 \in k_1^3\psi_1(V_1)$. Из условия а) следует, что отображение k_1^3 взаимно однозначно, поэтому $\psi_1 y_1 \in \psi_1(V_1)$, откуда $y_1 \in \operatorname{Ker}\psi_1 + V_1$, что противоречит выбору окрестности V_1. Тем самым соотношение (15) установлено.

Поскольку множество V_1 замкнуто в Y_1, а отображение j_1^2: $Y_1 \to \operatorname{Im} j_1^2$ в силу условия б) является изоморфизмом, то его образ V_2 замкнут в Y_2. Следовательно замкнутым является также множество $\overline{\operatorname{Ker}\psi_2} + V_2$. Поэтому из (15) следует, что существует выпуклая замкнутая окрестность нуля V_2' в Y_2 такая, что $y_2 \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_2} + V_2 + V_2'$. Заметим, что множество $V_2^* = V_2 + V_2'$ является выпуклой замкнутой окрестностью нуля в Y_2 и содержит $j_1^2(V_1)$. Далее, мы докажем, что $y_3 \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_3} + j_2^3(V_2^*)$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы для любого α найдем выпуклую окрестность нуля V_α^* в Y_α такую, что

$$j_\alpha^{\alpha+1}(V_\alpha^*) \subset V_{\alpha+1}^*, \quad \text{а} \quad y_\alpha \notin \overline{\operatorname{Ker}\psi_\alpha} + V_\alpha^*. \tag{16.1}$$

Множество $V = \bigcup\limits_\alpha j_\alpha(V_\alpha^*)$ является выпуклым, поскольку все окрестности V_α^* выпуклы и удовлетворяют первому включению (16). Его прообраз $j_\alpha^{-1}(V)$ содержит V_α^* и, следовательно, является окрестностью нуля в Y_α. Отсюда следует, что V есть окрестность нуля в $\vec{Y}$.

Остается показать, что $y \notin \operatorname{Ker}\vec{\psi} + V$. Допустим, что $y \in \operatorname{Ker}\vec{\psi} + V$. Тогда из равенств $V = \bigcup\limits_\alpha j_\alpha(V_\alpha^*)$ и $\operatorname{Ker}\vec{\psi} = \bigcup\limits_\alpha j_\alpha(\operatorname{Ker}\psi_\alpha)$ следует, что при некотором α $y_\alpha \in \operatorname{Ker}\psi_\alpha + V_\alpha^*$, что противоречит второму соотношению (16). Тем самым доказательство замкнутости $\operatorname{Ker}\vec{\psi}$ закончено. ■

Замечание 1. Условие б) мы использовали в доказательстве лишь в следующей форме: всякая замкнутая выпуклая окрестность нуля V_α в Y_α при отображении $j_\alpha^{\alpha+1}$ переходит в замкнутое множество. Поэтому условие б) мы можем заменить таким:

б′) все Y_α суть рефлексивные нормированные пространства. Действительно, согласно критерию рефлексивности нормированных пространств всякая замкнутая абсолютно выпуклая (в доказательстве предложения мы можем ограничиться абсолютно выпуклыми окрестностями) окрестность нуля V_α является слабо компактным множеством. Поэтому ее непрерывный образ $j_\alpha^{\alpha+1}(V_\alpha)$ слабо компактен в $Y_{\alpha+1}$ и, следовательно, замкнут, ч. и т. д.

Замечание 2. При условии б) или условии б′) мы можем также утверждать, что отображение $\vec{\varphi}\colon \vec{X} \to \operatorname{Im}\vec{\varphi}$ имеет ограниченное обратное, т. е. что отображение $(\vec{\varphi})^{-1}$ переводит ограниченное множество в ограниченное. Действительно, как известно *), возрастающее семейство Y является регулярным при выполнении условия б) или б′). Поэтому любое ограниченное множество в $\overrightarrow{\operatorname{Im}\varphi}$ имеет вид $j_\alpha(B_\alpha)$, где B_α — ограниченное множество в $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$. Применив к нему отображение $(\varphi^{-1})_\alpha$, мы получим множество $(\vec{\varphi})^{-1} j_\alpha(B_\alpha) = i_{\alpha+1}(\varphi^{-1})_\alpha B_\alpha$, ограниченное в $\vec{X}$ в силу непрерывности $(\varphi^{-1})_\alpha$, ч. и т. д.

11°. Переход к проективному пределу в точной последовательности семейств. Утверждение, дуальное предложению 10, формулируется более простым образом.

Предложение 11. *Пусть* (9) — *последовательность убывающих семейств и их отображений, а*

$$0 \to \overleftarrow{X} \xrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{\overleftarrow{\psi}} \overleftarrow{Z} \to 0 \qquad (17.1)$$

— *последовательность их проективных пределов.*

I. *Если последовательность* (9) *алгебраически точна в членах* X, Y, *а отображение* φ *есть гомоморфизм, то последовательность* (17) *алгебраически точна в членах* $\overleftarrow{X}$, $\overleftarrow{Y}$, *а* $\overleftarrow{\varphi}$ *есть гомоморфизм.*

II. *Предположим, что последовательность* (9) *точна и выполнены следующие условия*:

а) *при любом* α *образ отображения* $i_{\alpha+1}^{\alpha}\colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ *плотен в* X_α,

б) *при любом* α Y_α *есть пространство Фреше. Тогда последовательность* (17) *также точна.*

Доказательство. Учитывая, что всякое убывающее семейство есть частный случай семейства, мы примем соглашения I, II и III, сделанные в 10°, заменив в последнем из них $\alpha+1$ на $\alpha-1$. Небходимо отметить, что эти соглашения не нарушают условий а) и б). Действительно, чтобы допустить эти соглашения, мы должны были заменить семейства в (9) на конфинальные. Такая замена, оче-

*) См. Канторович и Акилов [1].

видно, не нарушает условия б). Поскольку любое отображение $i_\alpha^{\alpha'}$ является композицией отображений $i_\beta^{\beta-1}$, то из условия а) вытекает, что образ любого отображения $i_\alpha^{\alpha'}$ плотен в $X_{\alpha'}$. Следовательно, условие а) также сохраняется при переходе к конфинальному семейству.

Приступим к доказательству первого утверждения предложения. Покажем сначала, что отображение $\overleftarrow{\varphi}$ взаимно однозначно. Пусть x — произвольный элемент пространства $\operatorname{Ker}\overleftarrow{\varphi}$, а $\{x_\alpha\}$ — соответствующая нить. По условию $\varphi_\alpha x_\alpha = 0$ для всех α. Учитывая, что порядок отображения I равен функции $\alpha \to \alpha - 1$, из первого соотношения (12) (справедливого, поскольку (9) алгебраически точна в члене X) мы заключаем, что $i_\alpha^{\alpha-1} x_\alpha = 0$ для всех α. Поскольку $\{x_\alpha\}$ есть нить, то $i_\alpha^{\alpha-1} x_\alpha = x_{\alpha-1}$, следовательно, эта нить состоит из одних нулей, т. е. $x = 0$, ч. и т. д. Тем самым мы установили алгебраическую точность (17) в члене $\overleftarrow{X}$.

Покажем теперь, что $\overleftarrow{\varphi}$ есть гомоморфизм. Поскольку φ есть гомоморфизм, а последовательность (9) алгебраически точна в члене X, ассоциированное отображение $\check{\varphi}$: $X \to \operatorname{Im}\varphi$ является изоморфизмом семейств. Согласно предложению 9 предельное отображение $\overleftarrow{\check{\varphi}}$: $\overleftarrow{X} \to \overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$ является изоморфизмом пространств. Интересующее нас отображение $\overleftarrow{\varphi}$ является композицией изоморфизма $\overleftarrow{\check{\varphi}}$ и естественного отображения e: $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi} \to \operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$. Таким образом, остается показать, что e также есть изоморфизм.

Как легко заметить, пространства $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$ и $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$ алгебраически совпадают, а e есть тождественное отображение. Следовательно, нам остается установить совпадение топологий в этих пространствах. Пусть v — некоторая окрестность нуля в $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$. По определению она содержит множество вида $(j^\alpha)^{-1}(v_\alpha)$, где v_α — окрестность нуля в $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$, т. е. множество вида $V_\alpha \cap \operatorname{Im}\varphi_\alpha$, где V_α — окрестность нуля в Y_α. Рассматривая j^α как отображение из $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$ в $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$, мы получаем соотношения

$$v \supset (j^\alpha)^{-1}(v_\alpha) = (j^\alpha)^{-1}(V_\alpha \cap \operatorname{Im}\varphi_\alpha) = (j^\alpha)^{-1}(V_\alpha).$$

Множество $(j^\alpha)^{-1}(V_\alpha)$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$. Обратно, всякая окрестность нуля в $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$ содержит множество такого вида и, следовательно, содержит множество вида $(j^\alpha)^{-1}(v_\alpha)$, являющееся окрестностью нуля в $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$. Тем самым совпадение топологий в $\overleftarrow{\operatorname{Im}\varphi}$ и $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$ доказано. Следовательно, мы установили, что $\overleftarrow{\varphi}$ есть гомоморфизм.

Для завершения доказательства первого утверждения остается показать, что $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi} = \operatorname{Ker}\overleftarrow{\psi}$. Из равенства $\psi\varphi = 0$ вытекает, что $\overleftarrow{\psi}\overleftarrow{\varphi} = 0$, т. е. $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi} \subset \operatorname{Ker}\overleftarrow{\psi}$. Установим обратное включение. Пусть $y = \{y_\alpha\}$ — произвольный элемент $\operatorname{Ker}\overleftarrow{\psi}$. Из (11) и второго соотношения (12) следует, что отображение J, имеющее порядок $\alpha \to \alpha - 1$, переводит подсемейство $\operatorname{Ker}\psi$ в $\operatorname{Im}\varphi$. Поэтому для любого α элемент $y_\alpha = j^\alpha_{\alpha+1} y_{\alpha+1}$ принадлежит $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$, т. е. равен $\varphi_\alpha x_\alpha$, где $x_\alpha \in X_\alpha$. Покажем, что элементы $x'_\alpha = i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}$ образуют нить. Для любого α

$$\varphi_\alpha\left(x_\alpha - i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}\right) = \varphi_\alpha x_\alpha - j^\alpha_{\alpha+1}\varphi_{\alpha+1} x_{\alpha+1} = y_\alpha - j^\alpha_{\alpha+1} y_{\alpha+1} = 0,$$

поскольку элементы y_α образуют нить. Таким образом, разность $x_\alpha - i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}$ принадлежит ядру φ_α и, следовательно, принадлежит ядру $i^{\alpha-1}_\alpha$ согласно первому соотношению (12). Отсюда

$$x'_{\alpha-1} - i^{\alpha-1}_\alpha x'_\alpha = i^{\alpha-1}_\alpha\left(x_\alpha - i^\alpha_{\alpha+1} x_{\alpha+1}\right) = 0,$$

т. е. элементы x'_α образуют нить. Обозначим эту нить через x'. Из соотношения

$$\varphi_{\alpha-1} x'_{\alpha-1} = j^{\alpha-1}_\alpha \varphi_\alpha x_\alpha = j^{\alpha-1}_\alpha y_\alpha = y_{\alpha-1}$$

следует, что $\overleftarrow{\varphi} x' = y$, т. е. элемент y принадлежит $\operatorname{Im}\overleftarrow{\varphi}$, ч. и т. д. Тем самым доказательство первого утверждения закончено.

Перейдем ко второму утверждению. Пусть ρ_α — метрика в пространстве Y_α. Мы можем предполагать, что она является неубывающей функцией α (см. предложение 2).

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и элемент $z \in \overleftarrow{Z}$. Пусть $\{z_\alpha\}$ — нить, равная z, а

$$\psi^{-1}_\alpha\colon\ Z_\alpha \to Y_{\alpha-1}/\operatorname{Ker}\psi_{\alpha-1}, \qquad \alpha = 2, 3, \ldots,$$

— компоненты отображения ψ^{-1}. Для каждого α выберем некоторый представитель $y_\alpha \in \psi^{-1}_{\alpha+1} z_{\alpha+1}$. Согласно третьему соотношению (12) при любом α $\psi_\alpha y_\alpha = z_\alpha$. Отсюда

$$\psi_{\alpha-1}\left(y_{\alpha-1} - j^{\alpha-1}_\alpha y_\alpha\right) = \psi_{\alpha-1}\psi^{-1}_\alpha z_\alpha - k^{\alpha-1}_\alpha \psi_\alpha \psi^{-1}_{\alpha+1} z_{\alpha+1} =$$
$$= z_{\alpha-1} - k^{\alpha-1}_\alpha z_\alpha = 0,$$

т. е. разность $y_{\alpha-1} - j_\alpha^{\alpha-1} y_\alpha$ принадлежит ядру $\psi_{\alpha-1}$. Как мы отметили выше, отображение J переводит $\operatorname{Ker}\psi$ в $\operatorname{Im}\varphi$. Поэтому оператор $j_{\alpha-1}^{\alpha-2}$ переводит разность $y_{\alpha-1} - j_\alpha^{\alpha-1} y_\alpha$ в $\operatorname{Im}\varphi_{\alpha-2}$. Следовательно, положив $y'_\alpha = j_{\alpha+1}^\alpha y_{\alpha+1}$ при любом α, мы получим

$$j_\alpha^{\alpha-1} y'_\alpha - y'_{\alpha-1} \in \operatorname{Im}\varphi_{\alpha-1}. \tag{18.1}$$

Будем теперь строить последовательность элементов $y^*_\alpha \in Y_\alpha$, удовлетворяющую при любом β условиям:

$$\text{i)}\ \ y^*_\beta - y'_\beta \in \operatorname{Im}\varphi_\beta,$$

$$\text{ii)}\ \ \rho_{\beta-1}\left(j_\beta^{\beta-1} y^*_\beta,\ y^*_{\beta-1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\beta},$$

причем $y^*_1 = y'_1$. Допустим, что мы построили элементы y^*_β с $\beta < \alpha$ ($\alpha > 1$), удовлетворяющие этим условиям. Построим элемент y^*_α. Из (18) и (i) вытекает, что

$$j_\alpha^{\alpha-1} y'_\alpha - y^*_{\alpha-1} = \varphi_{\alpha-1} x_{\alpha-1}, \qquad x_{\alpha-1} \in X_{\alpha-1}. \tag{19.1}$$

Согласно условию а) элемент $x_{\alpha-1}$ можно приблизить элементами вида $i_\alpha^{\alpha-1} x'_\alpha$, где $x'_\alpha \in X_\alpha$. Выберем x'_α так, чтобы

$$\rho_{\alpha-1}\left(\varphi_{\alpha-1}\left(x_{\alpha-1} - i_\alpha^{\alpha-1} x'_\alpha\right),\ 0\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\alpha}, \tag{20.1}$$

и положим $y^*_\alpha = y'_\alpha - \varphi_\alpha x'_\alpha$. Тогда из (19) и (20)

$$\rho_{\alpha-1}\left(j_\alpha^{\alpha-1} y^*_\alpha,\ y^*_{\alpha-1}\right) = \rho_{\alpha-1}\left(\varphi_{\alpha-1} x_{\alpha-1},\ \varphi_{\alpha-1} i_\alpha^{\alpha-1} x'_\alpha\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\alpha}.$$

Следовательно, элемент y^*_α является искомым, так как условия (i) и (ii) выполнены. Тем самым последовательность $\{y^*_\alpha\}$ построена.

Зафиксируем β и рассмотрим еще одну последовательность:

$$y_\alpha^\beta = j_\alpha^\beta y^*_\alpha \in Y_\beta, \qquad \alpha = \beta,\ \beta+1,\ \beta+2,\ \ldots$$

Для любого $\alpha \geqslant \beta$ из неравенства (ii), используя монотонное возрастание метрики ρ_β, получаем

$$\rho_\beta\left(y_\alpha^\beta,\ y_{\alpha+1}^\beta\right) \leqslant \rho_\alpha\left(y^*_\alpha,\ j_{\alpha+1}^\alpha y^*_{\alpha+1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\alpha}.$$

Отсюда видно, что элементы y_α^β при $\alpha \geqslant \beta$ образуют фундаментальную последовательность в Y_β. В силу б) пространство Y_β полно, следовательно, y_α^β сходится к некоторому элементу $y^\beta \in Y_\beta$. Переходя в соотношении $y_\alpha^\beta = j_{\beta+1}^\beta y_\alpha^{\beta+1}$ к пределу по $\alpha \to \infty$, мы получаем соотношение $y^\beta = j^\beta_{\beta+1} y^{\beta+1}$, которое показывает, что элементы y^β образуют нить, которую мы обозначим через y.

Проверим соотношение $\overleftarrow{\psi} y = z$. Из равенства $\psi\varphi = 0$ следует, что оператор ψ_α аннулирует подпространство $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$. Поэтому согласно (i) мы имеем $\psi_\alpha y^*_\alpha = \psi_\alpha y'_\alpha$. Отсюда при любых α и $\beta \leqslant \alpha$

$$\psi_\beta y^\beta_\alpha = k^\beta_\alpha \psi_\alpha y^*_\alpha = k^\beta_\alpha \psi_\alpha y'_\alpha = k^\beta_\alpha \psi_\alpha j^\alpha_{\alpha+1} y_{\alpha+1} =$$
$$= k^\beta_{\alpha+1} \psi_{\alpha+1} y_{\alpha+1} = k^\beta_{\alpha+1} z_{\alpha+1} = z_\beta.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по α, получаем $\psi_\beta y^\beta = z_\beta$, откуда $\overleftarrow{\psi} y = z$, ч. и т. д. Тем самым мы установили алгебраическую точность (17) в последнем члене.

Остается показать, что $\overleftarrow{\psi}$ есть гомоморфизм. Пусть V — произвольная окрестность нуля в $\overleftarrow{Y}$. По определению она содержит прообраз некоторой окрестности нуля V_γ при отображении j^γ: $\overleftarrow{Y} \to Y_\gamma$. Пусть для простоты $\gamma = 1$, а окрестность V_1 определяется неравенством $\rho(y, 0) \leqslant \varepsilon$, $y \in Y_1$. Поскольку отображение ψ_3^{-1} непрерывно, можно найти окрестность нуля W_3 в Z_3 такую, что для любого $z_3 \in W_3$ существует элемент $y_2 \in \psi_3^{-1} z_3$, удовлетворяющий неравенству $\rho_2(y_2, 0) \leqslant \varepsilon/2$. Пусть W — окрестность нуля в $\overleftarrow{Z}$, являющаяся прообразом W_3 при отображении k^3: $\overleftarrow{Z} \to Z_3$. Предположим, что исходный элемент z принадлежит W. Тогда элемент z_3, соответствующей нити, принадлежит W_3. Поэтому элемент y_2, фигурирующий в предыдущих рассуждениях, можно выбрать так, что $\rho_2(y_2, 0) \leqslant \varepsilon/2$. Отсюда $\rho_1(y'_1, 0) \leqslant \varepsilon/2$, где $y'_1 = j^1_2 y_2$. Поэтому, учитывая в неравенстве (*ii*), что $y^*_1 = y'_1$, мы для любого $\alpha > 1$ получаем

$$\rho_1(y^1_\alpha, y'_1) = \rho_1(j^1_\alpha y^*_\alpha, y'_1) \leqslant \sum_2^\alpha \frac{\varepsilon}{2^\beta},$$

откуда, переходя к пределу по α, $\rho_1(y^1, y'_1) \leqslant \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\rho_1(y^1, 0) \leqslant \rho_1(y^1, y'_1) + \rho(y'_1, 0) \leqslant \varepsilon.$$

Это неравенство означает, что элемент y, равный нити $(y^1, y^2, \ldots)$, принадлежит V. Итак, для любого $z \in W$ мы нашли элемент $y \in V$ такой, что $\overleftarrow{\psi} y = z$. Это означает, что отображение $\overleftarrow{\psi}$ есть гомоморфизм. ■

§ 2. Функциональные пространства

1°. Пространства функций конечной гладкости. Пусть f — некоторая измеримая в R^n функция. Ее *носителем* называется наименьшее множество $\operatorname{supp} f \subset R^n$ такое, что для любой точки $\xi \notin \operatorname{supp} f$ найдется окрестность, в которой $f = 0$ почти всюду. Очевидно, что носитель всегда является замкнутым множеством. Пусть Ω — некоторая область *) в R^n. Через $\mathscr{D}(\Omega)$ мы обозначим пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R^n, носители которых суть компакты, принадлежащие Ω. Несколько позже мы наделим это пространство топологией.

Для каждого целого неотрицательного q рассмотрим в пространстве $\mathscr{D}(R^n)$ следующее скалярное произведение:

$$\langle \varphi, \psi \rangle^q = \sum_{|j| \leqslant q} \int_{R^n} \overline{D^j \varphi} D^j \psi \, d\xi,$$
$$D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial \xi_1^{j_1} \ldots \partial \xi_n^{j_n}}. \tag{1.2}$$

Соответствующую ему норму мы обозначим так:

$$\| \varphi \|^q = | \langle \varphi, \varphi \rangle^q |^{1/2} = \sum_{|j| \leqslant q} \| D^j \varphi \|_{L_2(R^n)}.$$

Пополнение пространства $\mathscr{D}(R^n)$ по норме $\| \cdot \|^q$ обозначим через $\mathscr{E}^q$. Норму $\| \cdot \|^q$ и соответствующее ей скалярное произведение $\langle \cdot , \cdot \rangle^q$ можно продолжить на это пополнение. Тем самым мы превратим пространство $\mathscr{E}^q$ в гильбертово.

Из скалярных произведений (1.2) наиболее важным является произведение $\langle \cdot , \cdot \rangle^0$, которое мы будем обозначать более простым способом: $(\cdot , \cdot)$. Зафиксируем некоторое целое $q \geqslant 0$. Каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ поставим в соответствие линейный непрерывный функционал над $\mathscr{E}^q$, действующий по формуле

$$\psi \to (\varphi, \psi) = \int_{R^n} \bar{\varphi} \psi \, d\xi, \qquad \psi \in \mathscr{E}^q.$$

Этот функционал, очевидно, непрерывен. Тем самым мы построили линейное отображение пространства $\mathscr{D}(R^n)$ в сильное сопряженное к $\mathscr{E}^q$ пространство. Это отображение взаимно однозначно, так как из $(\varphi, \psi) = 0$ для любой функции $\psi \in \mathscr{E}^q$ следует, что $\varphi \equiv 0$.

Покажем, что образ построенного нами отображения $\mathscr{D}(R^n) \to (\mathscr{E}^q)^*$ плотен в $(\mathscr{E}^q)^*$. Действительно, если это не так, то согласно теореме

*) Под областью мы будем понимать произвольное открытое, не обязательно связное множество.

Хана — Банаха существует отличный от нуля элемент χ второго сопряженного пространства $(\mathscr{E}^q)^{**}$ такой, что $(\varphi, \chi) = 0$ для всех функций $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$. Так как пространство $\mathscr{E}^q$ гильбертово, оно рефлексивно, следовательно, элемент χ можно отождествить с некоторой функцией $\chi \in \mathscr{E}^q$. Однако из $(\varphi, \chi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ следует, что $\chi \equiv 0$ (точнее говоря, $\chi = 0$ почти всюду). Поэтому элемент $\chi \in (\mathscr{E}^q)^{**}$ нулевой. Полученное противоречие показывает, что пространство $\mathscr{D}(R^n)$ плотно в $(\mathscr{E}^q)^*$.

Поскольку пространство $\mathscr{D}(R^n)$ мы рассматриваем как подпространство в $(\mathscr{E}^q)^*$, в нем индуцируется соответствующая топология. Эта топология по определению порождается нормой

$$\|\varphi\|^{-q} = \sup\left\{\frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\psi\|^q}, \ \psi \in \mathscr{E}^q, \ \|\psi\|^q \neq 0\right\}.$$

Через $\mathscr{E}^{-q}$ мы обозначим пополнение $\mathscr{D}(R^n)$ по этой норме. Из сказанного выше следует, что пространство $\mathscr{E}^{-q}$ изоморфно сильному сопряженному с $\mathscr{E}^q$ пространству и, следовательно, также гильбертово. Таким образом, пространства $\mathscr{E}^q$ и $\mathscr{E}^{-q}$ являются взаимно сопряженными.

Пространство $\mathscr{E}^0$, очевидно, совпадает как л. т. п. с пространством $L_2(R^n)$, следовательно, пространство $\mathscr{E}^{-0}$, будучи к нему сопряженным, также изоморфно $L_2(R^n)$. Отсюда вытекает изоморфизм $\mathscr{E}^0 \cong \mathscr{E}^{-0}$. Эти два пространства мы будем отождествлять.

Таким образом, мы для каждого целого q построили гильбертово пространство $\mathscr{E}^q$, причем для любого q пространство $\mathscr{E}^{q+1}$ является подпространством $\mathscr{E}^q$ (в алгебраическом смысле), а тождественное отображение $\mathscr{E}^{q+1} \to \mathscr{E}^q$ есть непрерывная взаимно однозначная операция.

Носителем функции $\varphi \in \mathscr{E}^q$, где $-\infty < q < \infty$, назовем наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp} \varphi$ такое, что $(\varphi, \psi) = 0$ для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(R^n \setminus \operatorname{supp} \varphi)$. Это определение, очевидно, согласуется с определением носителя, данным в начале пункта. Пусть F — некоторое замкнутое множество в R^n. Через $\mathscr{D}_F^q$ обозначим подпространство в $\mathscr{E}^q$, образованное функциями, носители которых принадлежат F. Это подпространство замкнуто, так как каждое соотношение вида $(\varphi, \psi) = 0$, $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$ сохраняется после предельного перехода по $\varphi \in \mathscr{E}^q$. Так как $\mathscr{D}_F^q$ есть замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathscr{E}^q$, оно само является гильбертовым. Рассмотрим также факторпространство

$$\mathscr{E}_F^q = \mathscr{E}^q / \mathscr{D}_G^q, \qquad G = \overline{R^n \setminus F}. \tag{2.2}$$

Так как подпространство $\mathscr{D}_G^q \subset \mathscr{E}^q$ замкнуто, факторпространство $\mathscr{E}_F^q$ также является гильбертовым. Норму в этом факторпространстве мы обозначим через $\|\cdot\|_F^q$. Элементы пространства $\mathscr{E}_F^q$ мы будем рассматривать как функции, заданные на множестве F и допускающие продолжение в R^n до функций из пространства $\mathscr{E}^q$.

Описать локальные свойства функций, принадлежащих пространствам $\mathscr{E}_F^q$, вообще говоря, затруднительно. Для наших целей достаточно лишь следующих грубых результатов. Если функция f определена и имеет непрерывные производные до порядка $q \geqslant 0$, принадлежащие L_2 в ε-окрестности F, то ее сужение на множестве F является элементом пространства $\mathscr{E}_F^q$. С другой стороны, если $q \geqslant \nu$, где $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, то всякий элемент пространства $\mathscr{E}_F^q$ есть функция, определенная на F, имеющая в $\operatorname{int} F$ непрерывные производные до порядка $q - \nu$. Этот факт вытекает из предложения 3 § 3.

В пространствах $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{E}_F^q$ мы можем ввести операцию умножения на любую функцию f, определенную в ε-окрестности F и имеющую производные до порядка $|q|$, ограниченные в этой окрестности. Для этого мы построим некоторую функцию $\check{f}$, имеющую ограниченные производные до порядка $|q|$ во всем пространстве R^n и совпадающую с f в окрестности F. Очевидно, что в пространстве $\mathscr{E}^q$ определена и непрерывна операция умножения на такую функцию $\check{f}$, причем эта операция переводит подпространства $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{D}_0^q$ в себя. Отсюда следует, что эту операцию мы можем продолжить на факторпространство (2). Остается заметить, что построенная операция в пространствах $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{E}_F^q$ зависит лишь от исходной функции f.

Предположим теперь, что множество F является замыканием некоторой области Ω. Область Ω и множество F назовем *допустимыми*, если у каждой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует окрестность U и вектор $\eta \in R^n$ такие, что при любом достаточно малом сдвиге в направлении вектора η область $\Omega \cap U$ не выходит за пределы Ω. Как легко сообразить, если граница области Ω имеет непрерывно меняющуюся нормаль, то эта область допустимая; всякая выпуклая область также является допустимой. Очевидно, что область Ω допустима или нет одновременно с областью $R^n \setminus F$.

Предложение 1*). *Если область Ω допустимая, то при любом целом q подпространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{D}_F^q$.*

Предложение 2. *Пусть $F = \overline{\Omega}$ — допустимое множество. Тогда отношение двойственности между пространствами $\mathscr{D}_F^q$*

---

*) Доказательство этого утверждения имеется, например, в статье Волевича и Панеяха [1], § 3, n° 2. В этой статье авторы используют обозначения $H_{\overline{\Omega}}^{\mu}$ и $\overset{0}{H}{}^{\mu}(\Omega)$ соответственно для пространств $\mathscr{D}_F^q$ и замыкания в нем $\mathscr{D}(\Omega)$.

и $\mathscr{E}_F^{-q}$, *установленное продолжением скалярного произведения* $(\cdot, \cdot)$, *превращает эти пространства во взаимно сопряженные.*

Доказательство. По доказанному гильбертовы пространства $\mathscr{E}^q$ и $\mathscr{E}^{-q}$ являются взаимно сопряженными по отношению к скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$. Если мы покажем, что подпространства $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{D}_G^{-q}$ $G = R^n \setminus \Omega$ являются ортогональными дополнениями одно по отношению к другому в этом скалярном произведении, то мы сможем получить искомое отношение двойственности между пространствами $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{E}_F^{-q}$. Очевидно, что ортогональное дополнение к $\mathscr{D}_F^q$ образовано функциями, носители которых принадлежат $R^n \setminus F$. Следовательно, это ортогональное дополнение принадлежит $\mathscr{D}_G^{-q}$. Остается показать, что $(\varphi, \psi) = 0$ для любых функций $\varphi \in \mathscr{D}_F^q$ и $\psi \in \mathscr{D}_G^{-q}$. Это равенство очевидно, если $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Однако из предыдущего предложения вытекает, что функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ плотны в $\mathscr{D}_F^q$. Следовательно, равенство $(\varphi, \psi) = 0$ имеет место для любых $\varphi \in \mathscr{D}_F^q$ и $\psi \in \mathscr{D}_G^{-q}$, ч. и т. д. ■

2°. Бесконечно дифференцируемые и обобщенные функции на компактах. Пусть F — замыкание некоторой допустимой области Ω. Зафиксируем некоторое целое q. Вложение $\mathscr{E}^{q+1} \to \mathscr{E}^q$ определяет непрерывное вложение подпространств

$$d_{q+1}\colon \mathscr{D}_F^{q+1} \to \mathscr{D}_F^q,$$

а подпространство $\mathscr{D}_G^{q+1}$ переводит в $\mathscr{D}_G^q$. Следовательно, вложение $\mathscr{E}^{q+1} \to \mathscr{E}^q$ продолжается до непрерывного отображения факторпространств

$$e_{q+1}\colon \mathscr{E}_F^{q+1} = \mathscr{E}^{q+1} / \mathscr{D}_G^{q+1} \to \mathscr{E}_F^q = \mathscr{E}^q / \mathscr{D}_G^q.$$

Заметим, что отображение e_{q+1} взаимно однозначно. Действительно, если некоторая функция $\varphi \in \mathscr{E}^{q+1}$ при вложении в $\mathscr{E}^q$ попадает в подпространство $\mathscr{D}_G^q$, то ее носитель принадлежит G, следовательно, она сама принадлежит $\mathscr{D}_G^{q+1}$.

Отметим, что, поскольку пространства $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{E}_F^{-q}$ взаимно сопряженные в силу предложения 2, отображения d_{q+1} и e_{-q} также взаимно сопряженные.

Совокупность пространств $\mathscr{D}_F^q$ и отображений d_q есть убывающее семейство пространств. Пространства $\mathscr{E}_F^q$ и отображения e_q также образуют убывающее семейство. Положим

$$\mathscr{D}_F = \varprojlim_{q \to \infty} \{\mathscr{D}_F^q, d_q\}, \quad \mathscr{E}_F = \varprojlim_{q \to \infty} \{\mathscr{E}_F^q, e_q\}. \tag{3.2}$$

Поскольку пространства $\mathcal{D}_F^q$ и $\mathcal{E}_F^q$ суть гильбертовы и, следовательно, являются пространствами Фреше, проективные пределы (3) также являются $\mathcal{F}$-пространствами в силу предложения 2 § 1. Рассмотрим подробнее пространство $\mathcal{D}_F$. Поскольку все отображения d_q взаимно однозначны, предельные отображения d^q: $\mathcal{D}_F \to \mathcal{D}_F^q$ также взаимно однозначны. Следовательно, проективный предел $\mathcal{D}_F$ можно отождествить с пересечением $\bigcap\limits_q \mathcal{D}_F^q$. Из сказанного выше следует, что функции пространства $\mathcal{D}_F^q$, $q \geqslant \nu$, имеют непрерывные производные до порядка $q-\nu$ и обращаются в нуль вне F. Отсюда вытекает, что элементы пространства $\mathcal{D}_F$ суть бесконечно дифференцируемые в R^n функции, носители которых принадлежат F. Обратно, если функция бесконечно дифференцируема в R^n, $\operatorname{supp}\varphi \subset F$ и все ее производные $D^j\varphi$ принадлежат $L_2(R^n)$, то $\varphi \in \mathcal{D}_F$. Если F есть компакт, то условия $D^j\varphi \in L_2(R^n)$ можно отбросить, так как они вытекают из непрерывности $D^j\varphi$.

По определению топологии в проективном пределе окрестностями нуля в пространстве $\mathcal{D}_F$ являются всевозможные множества вида $\mathcal{D}_F \cap U$, где U — окрестность нуля в одном из пространств $\mathcal{D}_F^q$. Отсюда следует, что множества вида $\{\varphi\colon \|\varphi\|^q \leqslant \varepsilon\}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathcal{D}_F$.

Опишем теперь пространство $\mathcal{E}_F$. Пространство $\mathcal{E}_{R^n}$, очевидно, состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций в R^n, все производные которых принадлежат $L_2(R^n)$. Для каждого целого q рассмотрим точную последовательность гильбертовых пространств

$$0 \to \mathcal{D}_G^q \to \mathcal{E}^q \to \mathcal{E}_F^q \to 0.$$

Так как множество F допустимо, область $R^n \setminus F$ также допустима, следовательно, пространство $\mathcal{D}(R^n \setminus F)$ плотно в каждом из пространств $\mathcal{D}_G^q$. Поэтому при любом q подпространство $\mathcal{D}_G^{q+1}$ плотно в $\mathcal{D}_G^q$. Поэтому из предложения 11 § 1 следует, что последовательность проективных пределов

$$0 \to \mathcal{D}_G \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_F \to 0$$

также точна. Отсюда $\mathcal{E}_F \cong \mathcal{E}/\mathcal{D}_G$, что и дает нам искомое описание пространства $\mathcal{E}_F$.

Покажем, что пространства, сопряженные к пространствам в (3), допускают следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F^* &\cong \varinjlim \{(\mathcal{D}_F^q)^*, d_{q+1}^*\} \cong \varinjlim \{\mathcal{E}_F^{-q}, e_{-q}\}; \\ \mathcal{E}_F^* &\cong \varinjlim \{(\mathcal{E}_F^q)^*, e_{q+1}^*\} \cong \varinjlim \{\mathcal{D}_F^{-q}, d_{-q}\}. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Поскольку все пространства $\mathscr{D}_F^q$ и $\mathscr{E}_F^q$ гильбертовы, они являются рефлексивными банаховыми пространствами. Поэтому формулы (4) следуют из предложения 4 § 1. Из того же предложения вытекает, что пространства $\mathscr{D}_F$ и $\mathscr{E}_F$ рефлексивные. Отметим, что пространства $\mathscr{D}_F^*$ и $\mathscr{E}_F^*$, будучи сопряженными к $\mathscr{F}$-пространствам, полны.

Так как все отображения e_{-q} взаимно однозначны, индуктивный предел $\varinjlim\{\mathscr{E}_F^{-q}, e_{-q}\}$ можно отождествить с объединением $\bigcup\limits_q \mathscr{E}_F^{-q}$. В случае, если F—компакт, элементы пространства $\mathscr{D}_F^* = \bigcup \mathscr{E}_F^{-q}$ мы назовем обобщенными функциями на этом компакте. Для каждой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}_F^*$ величину

$$\deg_F f = \inf\{q : f \in \mathscr{E}_F^{-q},\ -\infty < q < \infty\} < \infty$$

назовем *порядком* этой функции на компакте F. Таким образом, $\mathscr{D}_F^*$ есть пространство обобщенных функций на компакте F конечного порядка.

Предложение 3*). *Пусть F—компакт. Тогда при любом целом q отображения d_q и e_q компактны.*

3°. Пространство $\mathscr{E}(\Omega)$. Пусть F и $F' \supset F$—некоторые замкнутые множества. Операция сужения функций, определенных на F' на подмножестве F, определяет непрерывное отображение $\mathscr{E}_{F'}^q \to \mathscr{E}_F^q$ при любом целом q. Эта операция, очевидно, перестановочна с операторами e_q и, следовательно, продолжается до отображений предельных пространств $\mathscr{E}_{F'} \to \mathscr{E}_F$ и $\mathscr{D}_{F'}^* \to \mathscr{D}_F^*$.

Пусть Ω—произвольная область в R^n. Выберем некоторую последовательность допустимых компактов K_α, $1 \leqslant \alpha < \infty$, удовлетворяющую условиям

$$\ldots K_\alpha \subset\subset K_{\alpha+1} \subset\subset \ldots \Omega\ **), \qquad \bigcup K_\alpha = \Omega. \tag{5.2}$$

Такую последовательность мы будем называть строго возрастающей последовательностью компактов, стремящейся к Ω. Заметим, что из условий (5) следует, что любой компакт $K \subset \Omega$ принадлежит одному из компактов такой последовательности.

Для каждого натурального α рассмотрим оператор $i_{\alpha+1}$: $\mathscr{E}_{K_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \to \to \mathscr{E}_{K_\alpha}^\alpha$, являющийся композицией тождественного вложения $e_{\alpha+1}$: $\mathscr{E}_{K_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \to \mathscr{E}_{K_{\alpha+1}}^\alpha$, и операции сужения $\mathscr{E}_{K_{\alpha+1}}^\alpha \to \mathscr{E}_{K_\alpha}^\alpha$. В силу пред-

*) Утверждения такого типа хорошо известны; см., например, статью Волевича и Панеяха [1], теорема 8.1 § 8.

**) Символ $A \subset\subset B$ означает, что окрестность множества A принадлежит B.

ложения 3 вложение $e_{\alpha+1}$ есть компактная операция, следовательно, оператор $i_{\alpha+1}$ компактен. Покажем, что его образ плотен в $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$. Действительно, по построению пространство $\mathscr{D}(R^n)$ плотно в $\mathscr{E}^{\alpha}$, следовательно, образ композиции отображений

$$\mathscr{D}(R^n) \to \mathscr{E}^{\alpha} \to \mathscr{E}^{\alpha} / \mathscr{D}^{\alpha}_{\overline{CK}_\alpha} = \mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$$

плотен в $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$. Однако этот образ содержится в образе $i_{\alpha+1}$, поэтому образ оператора $i_{\alpha+1}$ также плотен в $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$.

Рассмотрим убывающее семейство, образованное пространствами $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$ и операторами i_α, и положим

$$\mathscr{E}(\Omega) = \varprojlim \{\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}, \ i_\alpha\}. \tag{6.2}$$

Охарактеризуем элементы этого пространства. По определению каждый из них является нитью, образованной функциями $f_\alpha \in \mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$, удовлетворяющими условию: при любом α сужение $f_{\alpha+1}$ на K_α совпадает с f_α. Следовательно, функции f_α представляют собой сужения некоторой глобальной функции f, определенной в области Ω. Так как любой компакт $K \subset \Omega$ принадлежит всем компактам K_α, начиная с некоторого, сужение функции f на K принадлежит всем пространствам $\mathscr{E}^{\alpha}_{K}$ и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой функцией внутри K и поэтому во всей области Ω. Обратно, всякую бесконечно дифференцируемую в Ω функцию можно рассматривать как элемент пространства $\mathscr{E}(\Omega)$.

Топологию в $\mathscr{E}(\Omega)$ можно охарактеризовать так: множества вида

$$\{f \in \mathscr{E}(\Omega), \ \|f\|^q_K < \varepsilon, \ 0 < q < \infty, \ K \subset \Omega, \ \varepsilon > 0\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Из сказанного следует, что ни запас функций, принадлежащих $\mathscr{E}(\Omega)$, ни топология в этом пространстве не зависят от выбора последовательности $\{K_\alpha\}$.

Опишем некоторые топологические свойства этого пространства. Согласно предложению 5 § 1 из того, что было сказано об операторах i_α, вытекает, что $\mathscr{E}(\Omega)$ есть $\mathscr{F}$-пространство Шварца. Отсюда, в частности, следует, что пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ рефлексивно, а любое ограниченное в нем множество относительно компактно. Поскольку все пространства $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$ гильбертовы, к убывающему семейству в (6) применимо предложение 4 § 1, из которого следует, что

$$\mathscr{E}^{*}(\Omega) \cong \varinjlim \{(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha})^{*}, \ i^{*}_\alpha\} \cong \varinjlim \{\mathscr{D}^{-\alpha}_{K_\alpha}, \ i^{*}_\alpha\}. \tag{7.2}$$

Заметим, что отображения i^{*}_α: $\mathscr{D}^{-\alpha}_{K_\alpha} \to \mathscr{D}^{-\alpha-1}_{K_{\alpha+1}}$, фигурирующие в правой части, суть тождественные вложения и, следовательно, взаимно однозначны. Поэтому пространство $\mathscr{E}^*_{-\alpha}(\Omega)$ мы можем алгебраически отождествить с объединением $\bigcup \mathscr{D}_{K_\alpha}^{-\alpha}$. Это означает, что $\mathscr{E}^*(\Omega)$ есть пространство всех обобщенных в R^n функций с компактными носителями, принадлежащими Ω.

Если Ω' — подобласть Ω, то операция сужения функций из $\mathscr{E}(\Omega)$ на Ω' действует непрерывно из $\mathscr{E}(\Omega)$ в $\mathscr{E}(\Omega')$. Сопряженное отображение $\mathscr{E}^*(\Omega') \to \mathscr{E}^*(\Omega)$, действующее в пространствах обобщенных функций с компактными носителями, есть тождественное вложение.

4°. Связь между пространствами $\mathscr{E}_K^*$ и $\mathscr{E}^*(\Omega)$.

Предложение 4.

I. *Для любой области Ω и допустимого компакта $K \subset \Omega$ подпространство в $\mathscr{E}^*(\Omega)$, образованное функциями с носителями, принадлежащими K, совпадает с $\mathscr{E}_K^*$.*

II. *Пусть $\{K_\alpha\}$ — строго возрастающая последовательность компактов, стремящаяся к Ω. Тогда*

$$\varinjlim \mathscr{E}_{K_\alpha}^* \cong \mathscr{E}^*(\Omega).$$

Доказательство. Установим первое утверждение. Положим $G = R^n \setminus K$. Тождественное вложение $\mathscr{E} \to \mathscr{E}(\Omega)$, очевидно, непрерывно и переводит пространство $\mathscr{D}_G$ в пространство $\mathscr{E}(\Omega, G)$, образованное функциями из $\mathscr{E}(\Omega)$, носители которых принадлежат G. Следовательно, определено непрерывное отображение факторпространств

$$\mathscr{E}/\mathscr{D}_G \to \mathscr{E}(\Omega)/\mathscr{E}(\Omega, G). \tag{8.2}$$

Построим обратное отображение. Выберем некоторую функцию $h \in \mathscr{D}(\Omega)$, равную единице в некоторой окрестности компакта K. Для любой функции $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ произведение hf имеет компактный носитель и, следовательно, может быть рассмотрено как элемент пространства $\mathscr{E}$. Мы получаем, таким образом, непрерывное отображение $\mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}$, которое, очевидно, не увеличивает носителя и, следовательно, переводит подпространство $\mathscr{E}(\Omega, G)$ в $\mathscr{D}_G$. Ассоциированное с ним отображение факторпространств является обратным по отношению к (8). Тем самым мы показали, что (8) есть изоморфизм.

Поскольку компакт K допустимый, то по доказанному в 2° левая часть (8) изоморфна $\mathscr{E}_K$. С другой стороны, $\mathscr{E}(\Omega)$ есть $\mathscr{F}$-пространство Шварца, а $\mathscr{E}(\Omega, G)$ — его замкнутое подпространство. Поэтому, переходя в изоморфизме (8) к сопряженным пространствам, мы получим слева $\mathscr{E}_K^*$, а справа в силу предложения 6 § 1 подпространство $(\mathscr{E}(\Omega, G))^0 \subset \mathscr{E}^*(\Omega)$. Остается заметить, что это подпространство состоит из тех и только тех функций $\varphi \in \mathscr{E}^*(\Omega)$, носители которых принадлежат K.

Докажем второе утверждение. Так как $\mathscr{E}^*(\Omega)$ есть пространство всех обобщенных функций с компактными носителями, принадлежащими Ω, то оно по запасу элементов совпадает с индуктивным пределом $\varinjlim \mathscr{E}^*_{K_\alpha}$. Остается доказать совпадение соответствующих топологий. Согласно утверждению I любая окрестность нуля в $\mathscr{E}^*(\Omega)$ содержит окрестность нуля в любом из пространств $\mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ и, следовательно, в их индуктивном пределе.

Обратно, пусть U — выпуклая окрестность нуля в $\varinjlim \mathscr{E}^*_{K_\alpha}$. Тогда при любом α множество $U_\alpha = U \cap \mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ есть окрестность нуля в $\mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ и, следовательно, содержит поляру B^0_α некоторого ограниченного множества B_α в $\mathscr{E}_{K_\alpha}$. Для завершения доказательства нам нужно найти ограниченное множество B в $\mathscr{E}(\Omega)$ такое, что $B^0 \subset U$.

Выберем последовательность функций $h_\alpha \subset \mathscr{D}(\Omega)$, образующих разбиение единицы в Ω таких, что $\operatorname{supp} h_\alpha \subset \Omega \setminus K_{\alpha-1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ $(K_0 = \phi)$. Положим

$$B = \{2^\alpha h_\alpha f,\ f \in B_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots\}.$$

Из свойств h_α и B_α следует, что это множество ограничено в $\mathscr{E}(\Omega)$. Пусть φ — произвольный элемент поляры B. Поскольку функции $\overline{h}_\alpha$ образуют разбиение единицы, то $\varphi = \sum \overline{h}_\alpha \varphi$, причем эта сумма конечна. При любом α

$$|(\overline{h}_\alpha \varphi,\ f)| = |(\varphi,\ h_\alpha f)| \leqslant \frac{1}{2^\alpha},\quad f \in B_\alpha.$$

Это неравенство показывает, что функция $\overline{h}_\alpha \varphi$ принадлежит множеству $2^{-\alpha} B^0_\alpha \subset 2^{-\alpha} U$. Поэтому φ принадлежит множеству $\bigcup\limits_{\beta=1}^{\infty} \sum\limits_{1}^{\beta} 2^{-\alpha} U \subset U$, ч. и т. д. ■

5°. Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$. Пусть снова F и $F' \supset F$ — замкнутые множества в R^n. При любом целом q пространство $\mathscr{D}^q_{F'}$ содержит $\mathscr{D}^q_F$, а операция тождественного вложения $\mathscr{D}^q_F \to \mathscr{D}^q_{F'}$ непрерывна. Поскольку эта операция перестановочна с операторами d_q, она продолжается на предельные пространства $\mathscr{D}_F \to \mathscr{D}_{F'}$ и $\mathscr{E}^*_F \to \mathscr{E}^*_{F'}$.

Пусть Ω — область в R^n, а $\{K_\alpha\}$ — некоторая строго возрастающая последовательность компактов, стремящаяся к Ω. Пространства $\mathscr{D}_{K_\alpha}$ и тождественные вложения $\mathscr{D}_{K_\alpha} \to \mathscr{D}_{K_{\alpha+1}}$ образуют возрастающее семейство. Рассмотрим его индуктивный предел

$$\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}_{K_\alpha}. \qquad (9.2)$$

Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ по запасу элементов равно объединению $\bigcup \mathscr{D}_{K_\alpha}$, т. е. является пространством всех бесконечно дифференцируемых в R^n функций, носители которых суть компакты, принадлежащие Ω. Таким образом, пространство $\mathscr{D}(\Omega)$, определенное формулой (9), совпадает с пространством, введенным под тем же обозначением в 1°. Формула (9) определяет топологию в этом пространстве, а именно, в силу этой формулы окрестностью нуля в $\mathscr{D}(\Omega)$ является любое множество, содержащее выпуклое множество U, пересечение которого с любым из пространств $\mathscr{D}_{K_\alpha}$ есть окрестность нуля в этом пространстве. Иначе говоря, в $\mathscr{D}(\Omega)$ имеется фундаментальная система окрестностей нуля, образованная выпуклыми множествами U, каждое из которых при любом α содержит множество вида

$$\left\{\varphi \in \mathscr{D}_{K_\alpha}\colon \|\varphi\|^q \leqslant \varepsilon,\ 0 < q < \infty,\ \varepsilon > 0\right\}. \tag{10.2}$$

Следующее утверждение характеризует топологию в $\mathscr{D}(\Omega)$.

Предложение 5. *Возрастающее семейство* (9) *регулярно.*

Доказательство. Нам нужно показать, что любое ограниченное в $\mathscr{D}(\Omega)$ множество B содержится и ограничено в одном из пространств $\mathscr{D}_{K_\alpha}$. Покажем сначала, что B принадлежит одному из $\mathscr{D}_{K_\alpha}$. Предположим противное. Тогда для любого α мы можем найти функцию $\varphi_\alpha \in B$, не принадлежащую $\mathscr{D}_{K_\alpha}$, т. е. такую, что $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \not\subseteq K_\alpha$. Выберем точку $\xi_\alpha \in R^n \setminus K_\alpha$ такую, что $\varphi_\alpha(\xi_\alpha) \neq 0$, и рассмотрим множество U в $\mathscr{D}(\Omega)$, образованное всеми функциями φ, для которых

$$|\varphi(\xi_\alpha)| \leqslant \frac{1}{\alpha}|\varphi_\alpha(\xi_\alpha)|, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots$$

Множество U является окрестностью нуля в $\mathscr{D}(\Omega)$, поскольку оно выпукло и при любом α пересечение $U \cap \mathscr{D}_{K_\alpha}$ является окрестностью нуля в $\mathscr{D}_{K_\alpha}$. С другой стороны, ни при каком $\lambda > 0$ множество λU не содержит B, т. е. U не поглощает B, что противоречит тому, что B — ограниченное множество.

Итак, $B \subset \mathscr{D}_{K_\alpha}$ при некотором α. Множества вида

$$V = \{\varphi : \|\varphi\|^q \leqslant \varepsilon\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathscr{D}_{K_\alpha}$ и в то же время являются окрестностями нуля в $\mathscr{D}(\Omega)$. Множество B, будучи ограниченным в $\mathscr{D}(\Omega)$, поглощается любым из них и, следовательно, является ограниченным в $\mathscr{D}_{K_\alpha}$. ■

Из предложения 3 § 1 мы получаем следующую формулу:

$$\mathscr{D}^*(\Omega) = \varprojlim \mathscr{D}^*_{K_\alpha}.$$

С помощью этой формулы мы можем, в частности, описать элементы пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$: всякий непрерывный функционал над $\mathscr{D}(\Omega)$ характеризуется тем, что его сужение на подпространстве $\mathscr{D}_K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный компакт, есть непрерывный функционал над этим подпространством, т. е. обобщенная функция на K. Величина $\deg_K f$, конечно, может зависеть от компакта K и является неубывающей функцией этого компакта. Элементы пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$ называются обобщенными функциями в области Ω.

Если Ω' — подобласть области Ω, то определено и непрерывно тождественное вложение $\mathscr{D}(\Omega') \to \mathscr{D}(\Omega)$. Сопряженную операцию, действующую из $\mathscr{D}^*(\Omega)$ в $\mathscr{D}^*(\Omega')$, мы будем называть сужением обобщенных функций в Ω на подобласти Ω'.

Всякую бесконечно дифференцируемую функцию $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ и вообще любую локально суммируемую функцию в Ω можно рассматривать как обобщенную функцию в Ω, относя ей непрерывный функционал над $\mathscr{D}(\Omega)$, действующий по формуле

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int_\Omega \bar{f} \varphi \, d\xi.$$

Носителем функции $f \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ называется наименьшее относительно замкнутое подмножество $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ такое, что $(f, \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$. Носителем сингулярностей функции $f \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ называется наименьшее относительно замкнутое подмножество $\operatorname{sing\,supp} f \subset \Omega$ такое, что сужение f на подобласти $\Omega \setminus \operatorname{sing\,supp} f$ совпадает с некоторой функцией из $\mathscr{E}(\Omega \setminus \operatorname{sing\,supp} f)$. Таким образом, подпространство $\mathscr{E}(\Omega) \subset \mathscr{D}^*(\Omega)$ характеризуется условием $\operatorname{sing\,supp} f = \phi$.

Поскольку определено и непрерывно отображение вложения $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$, всякий непрерывный функционал над $\mathscr{E}(\Omega)$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$, т. е. как обобщенную функцию в Ω.

В каждом из пространств $\mathscr{D}^q_{K_\alpha}$ и $\mathscr{E}^q_{K_\alpha}$ согласно 1° определена непрерывная операция умножения на любую функцию из $\mathscr{E}(\Omega)$. Эти операции, очевидно, перестановочны с отображениями e_q и d_q, следовательно, они продолжаются на предельные пространства $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}^*(\Omega)$ и $\mathscr{E}^*(\Omega)$. Следует заметить, что построенная таким образом операция умножения на функцию f в пространствах $\mathscr{E}^*(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$ является сопряженной по отношению к операции умножения на $\bar{f}$ в пространствах $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega)$.

Для обобщенных функций в Ω введем еще одно обозначение

$$\deg_\Omega f = \sup \{\deg_K f, \ K \subset \Omega\}.$$

Величина $\deg_\Omega f$, вообще говоря, равна ∞. В $\mathscr{D}^*(\Omega)$ выделим подпространство, образованное функциями конечного порядка, т. е. функциями с конечной величиной $\deg_\Omega f$. Это подпространство, наделенное топологией, индуцированной из $\mathscr{D}^*(\Omega)$, обозначим через $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$.

6°. Ограниченные множества в $\mathscr{D}(\Omega)$. Пусть $b=b(\eta)$ — произвольная функция одного переменного, определенная на луче $\eta \geqslant 0$, положительная и неубывающая. Пусть, далее, F — произвольное замкнутое множество в R^n. В пространстве $\mathscr{D}_F$ выделим подпространство $\mathscr{D}_F^b$, образованное функциями, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|^b = \sup_j \frac{1}{b(|j|)} \|D^j\varphi\|^0.$$

Роль пространств $\mathscr{D}_F^b$ характеризует

Предложение 6. *Пусть Ω — произвольная область R^n. Тогда*

I. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup \mathscr{D}_K^b, \tag{11.2}$$

где объединение берется по всем компактам $K \subset \Omega$ и всем функциям b описанного выше типа.

II. *Множества вида*

$$B = \{\varphi \in \mathscr{D}_K^b,\ \|\varphi\|^b \leqslant 1\} \tag{12.2}$$

образуют фундаментальную систему ограниченных множеств в $\mathscr{D}(\Omega)$.

Доказательство. Установим сначала равенство (11). Включение $\supset$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть φ — произвольная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. По определению множество $K = \operatorname{supp}\varphi$ есть компакт, принадлежащий Ω. Следовательно, функция φ принадлежит пространству $\mathscr{D}_K^b$, где

$$b(\eta) = \max_{|j| \leqslant \eta} \|D^j\varphi\|^0.$$

Функция b, очевидно, неубывающая и положительная, если $\varphi \not\equiv 0$.

Докажем второе утверждение. Покажем сначала, что каждое множество вида (12) ограничено. Как мы отметили в 5°, всякая окрестность нуля в $\mathscr{D}(\Omega)$ содержит множество вида (10) при любом α. Если α достаточно велико, то $K \subset K_\alpha$, следовательно, множество (10) поглощает множество (12), так как функции множества (12) принадлежат $\mathscr{D}_K^b$ и равномерно ограничены вместе со всеми своими производными. Следовательно, множество (12) ограничено.

Обратно, пусть B — произвольное ограниченное множество в $\mathscr{D}(\Omega)$. Из предложения 5 следует, что множество B принадлежит одному из пространств $\mathscr{D}_{K_\alpha}$ и ограничено в нем. Следовательно, множество B поглощается любым множеством вида (10), т. е. функции из B равномерно ограничены вместе со всеми своими производными. Поэтому функция

$$b_0(\eta) = \max_{|j| \leqslant \eta} \sup\{\|D^j\varphi\|^0,\ \varphi \in B\}$$

конечна при всех $\eta \geqslant 0$. Отсюда видно, что множество B принадлежит множеству (12) с $K = K_\alpha$, а $b = b_0$. ■

Отметим следующий хорошо известный факт.

Предложение 7. *Для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\beta > 1$ существует бесконечно дифференцируемая в R^n функция $e \geqslant 0$, носитель которой принадлежит шару $|\xi| \leqslant \varepsilon$, такая, что $\int e(\xi)\,d\xi = 1$, а*

$$\sup |D^j e(\xi)| \leqslant CB^{|j|}|j|^{|j|\beta} \tag{13.2}$$

с любым $B > 0$.

Предложение 8. *Пусть F — замыкание некоторой допустимой области Ω, а функция b удовлетворяет неравенству*

$$b(\eta) \geqslant CB_0^\eta \eta^{\eta\beta}, \qquad \eta \geqslant 0,\ \beta > 1, \tag{14.2}$$

с некоторым $B_0 > 0$. Тогда пространство $\mathscr{D}_F^b$ плотно в $\mathscr{D}_F^q$ при любом целом q.

Доказательство. Согласно предложению 1 пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{D}_F^q$. Поэтому достаточно показать, что любую функцию из $\mathscr{D}(\Omega)$ можно приблизить функциями из $\mathscr{D}_F^b$ по норме $\|\cdot\|^q$.

Пусть φ — произвольная функция пространства $\mathscr{D}(\Omega)$, а e — функция, удовлетворяющая условиям предложения 7, в котором константа β та же самая, что и в неравенстве (14), а $\varepsilon = \rho(\operatorname{supp}\varphi, \complement\Omega)$. Рассмотрим последовательность функций $e_\alpha(\xi) = \alpha^n e(\alpha\xi)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ Носитель каждой из них принадлежит ε-окрестности нуля, следовательно, носитель каждой из сверток $e_\alpha * \varphi$ принадлежит множеству F. Оценим производные этих сверток:

$$|D^l(e_\alpha * \varphi)| = |D^l e_\alpha * \varphi| \leqslant C_\alpha(\alpha B)^{|l|}|l|^{|l|\beta},$$

где B — константа из предложения 7. Поскольку эта константа может быть выбрана сколь угодно близкой к нулю, константа αB может быть сделана меньше постоянной B_0 из неравенства (14). Отсюда следует, что функция $e_\alpha * \varphi$ при любом α принадлежит $\mathscr{D}_F^b$.

Так как при любом α функция e_α неотрицательна, ее интеграл по R^n равен единице, а ее носитель стремится к нулю при $\alpha \to \infty$, то функция $e_\alpha * \varphi$ равномерно стремится к φ. Из соотношения $D^l(e_\alpha * \varphi) = e_\alpha * D^l\varphi$ следует, что любая производная $D^l(e_\alpha * \varphi)$ этой функции равномерно стремится к производной $D^l\varphi$. Отсюда вытекает, что $e_\alpha * \varphi \to \varphi$ по норме $\|\cdot\|^q$. ■

По доказанному образ непрерывного отображения $\mathscr{D}_F^b \to \mathscr{D}_F^q$ плотен в $\mathscr{D}_F^q$, следовательно, сопряженное отображение $\mathscr{E}_F^{-q} \to (\mathscr{D}_F^b)^*$ взаимно однозначно. Поэтому пространство $\mathscr{D}_F^* = \bigcup_q \mathscr{E}_F^q$ мы можем рассматривать как подпространство в $(\mathcal{D}_F^b)^*$. В случае, когда F — компакт, элементы пространства $(\mathcal{D}_F^b)^*$, не принадлежащие $\mathcal{D}_F^*$, называются обобщенными функциями на F бесконечного порядка.

7°. Пространства $\mathcal{E}(F)$ и $\mathcal{D}^*(F)$. Пусть F — произвольное замкнутое множество в R^n. Рассмотрим совокупность всех открытых окрестностей этого множества. В этой совокупности мы введем отношение порядка, считая, что окрестность U следует за U', если $U \subset U'$. Таким образом, мы построили направленное множество $\mathcal{T}$ окрестностей F. Рассмотрим возрастающее семейство л. т. п, заданное на этом множестве образованное пространствами $\mathcal{E}(U)$ и отображениями сужения $\mathcal{E}(U') \to \mathcal{E}(U)$, где $U \subset U'$. Положим

$$\mathcal{E}(F) = \varinjlim \mathcal{E}(U).$$

Пространства $\mathcal{D}^*(U)$ и отображения сужения обобщенных функций также образуют возрастающее семейство на $\mathcal{T}$. Рассмотрим его предел

$$\mathcal{D}^*(F) = \varinjlim \mathcal{D}^*(U).$$

$\mathcal{E}(F)$ и $\mathcal{D}^*(F)$ суть пространства бесконечно дифференцируемых соответственно обобщенных функций, определенных в окрестности F.

8°. Пучки пространств обобщенных функций. Напомним известное определение.

Определение 1. *Предпучком линейных топологических пространств в R^n* называется соответствие Φ: $\Omega \rightsquigarrow \Phi(\Omega)$, относящее каждой области $\Omega \subset R^n$ некоторое л. т. п. $\Phi(\Omega)$, а каждой паре областей $\Omega' \subset \Omega$ — непрерывное линейное отображение $\rho_\Omega^{\Omega'}$: $\Phi(\Omega) \to \Phi(\Omega')$, удовлетворяющее следующим двум условиям: (i) для любой области Ω ρ_Ω^Ω есть тождественное отображение, (ii) для любых трех областей $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ имеет место равенство $\rho_{\Omega'}^{\Omega''}\rho_\Omega^{\Omega'} = \rho_\Omega^{\Omega''}$.

Предпучок Φ называется *пучком*, если он обладает следующим свойством. Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — произвольное покрытие области Ω. Тогда

I. Если f — некоторый элемент $\Phi(\Omega)$ такой, что $\rho_\Omega^{U_\alpha} f = 0$ для любого α, то $f = 0$;

II. Если заданы элементы $f_\alpha \subset \Phi(U_\alpha)$ такие, что для любых α и β $\rho_{U_\alpha}^{U_\alpha \cap U_\beta} f_\alpha = \rho_{U_\beta}^{U_\alpha \cap U_\beta} f_\beta$, то существует элемент $f \in \Phi(\Omega)$ такой, что $\rho_\Omega^{U_\alpha} f = f_\alpha$ для любого α.

Заметим, что из любого покрытия U области Ω всегда можно выбрать локально конечное подпокрытие, т. е. подпокрытие $U' = \{U'_\alpha\}$, обладающее следующим свойством: любой компакт $K \subset \Omega$ пересекается лишь с конечным числом областей U'_α. Как легко понять, условия I и II достаточно проверить для покрытия U', следовательно, мы можем всегда считать, что покрытие U, фигурирующее в определении пучка, является локально конечным.

Рассмотрим соответствие

$$\mathscr{E}\colon \Omega \rightsquigarrow \mathscr{E}(\Omega). \tag{15.2}$$

Для каждой пары областей $\Omega' \subset \Omega$ в качестве $\rho_\Omega^{\Omega'}$ выберем отображение сужения функций, определенных в Ω, на подобласти Ω'. Соотношения (i) и (ii), очевидно, выполнены, следовательно, эти отображения вместе с пространствами (15) образуют предпучок. Легко проверить, что этот предпучок является пучком. Аналогичным образом соответствие

$$\mathscr{D}^*\colon \Omega \rightsquigarrow \mathscr{D}^*(\Omega)$$

вместе с набором отображений сужения $\rho_\Omega^{\Omega'}\colon \mathscr{D}^*(\Omega) \to \mathscr{D}^*(\Omega')$ образует предпучок. Из утверждения, которое мы сейчас докажем, следует, что этот предпучок является пучком.

Пусть $U = \{U_i\}$ — некоторое локально конечное покрытие некоторой области Ω. Скажем, что $\Phi = \{\Phi(\omega), \rho_\omega^{\omega'}\}$ есть *предпучок на покрытии* U, если пространства $\Phi(\omega)$ и отображения $\rho_\omega^{\omega'}$, удовлетворяющие условиям (i) и (ii), определены для областей ω, ω', имеющих вид

$$\omega = \Omega,\ U_{i_0, \ldots, i_\nu} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}, \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{16.2}$$

Пусть Φ — произвольный предпучок, заданный на покрытии U. Для каждого целого $\nu \geqslant 0$ рассмотрим л. т. п. ${}^\nu\Phi(U)$, образованное коцепями порядка ν на покрытии U с коэффициентами в пространствах $\Phi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$, т. е. выражениями вида

$$\varphi = \sum \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}, \text{ где } \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} \in \Phi(U_{i_0, \ldots, i_\nu}), \tag{17.2}$$

где элемент $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ антисимметрично зависит от своих индексов (см. аналогичное определение в § 3 гл. III). Топология в пространстве ${}^\nu\Phi(U)$ определяется при помощи изоморфизма ${}^\nu\Phi(U) \cong \cong \prod_{i_0 < \ldots < i_\nu} \Phi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$, где правая часть есть топологическое прямое произведение л. т. п. В этой топологии фундаментальную систему окрестностей нуля образуют множества вида

$$\{\varphi : \varphi_\sigma \in V_\sigma,\ \sigma \in \Sigma\},$$

где Σ — конечное множество векторов $\sigma = (i_0, \ldots, i_\nu)$, а V_σ — окрестности нуля в пространствах $\Phi(U_\sigma)$.

Напомним также определение когграничных операторов ∂^ν. При любом $\nu \geqslant 0$ действие оператора ∂^ν определяется формулой

$$\partial^\nu \varphi = \frac{1}{\nu+2} \sum_{i_0, \ldots, i_{\nu+1}} \sum_{j=0}^{\nu+1} (-1)^j \hat{\varphi}_{i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{\nu+1}} U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{\nu+1}}, \quad (18.2)$$

где $\hat{\varphi}_{i_0, \ldots}$ — сужение элемента $\varphi_{i_0, \ldots}$ на $U_{i_0, \ldots, i_{\nu+1}}$ (т. е. результат применения к нему отображения $\rho_{U \ldots}^{U \ldots}$). Как легко проверить, эти операторы определяют непрерывные отображения ∂^ν: ${}^\nu\Phi(U) \to {}^{\nu+1}\Phi(U)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Эту серию отображений дополним непрерывным отображением ∂^{-1}: $\Phi(\Omega) \to {}^0\Phi(U)$, относящим элементу φ коцепь $\Sigma\hat{\varphi}U_i$. Иногда для общности обозначений мы будем полагать ${}^{-1}\Phi(U) = \Phi(\Omega)$. Построенные отображения расположим в последовательность

$$0 \to \Phi(\Omega) \xrightarrow{\partial^{-1}} {}^0\Phi(U) \xrightarrow{\partial^0} \ldots \longrightarrow {}^\nu\Phi(U) \xrightarrow{\partial^\nu} {}^{\nu+1}\Phi(U) \to \ldots \quad (19.2)$$

Она полуточна, так как $\partial^\nu \partial^{\nu-1} = 0$ для $\nu \geqslant 0$.

Предложение 9. *Предположим, что предпучок Φ, заданный на локально конечном покрытии U, удовлетворяет следующим условиям.*

А) *Для любой области* ω (*вида* (16)) $\Phi(\omega)$ *есть подпространство* (*в алгебраическом смысле*) *пространства* $\mathscr{D}^*(\omega)$, *а для любых областей* $\omega' \subset \omega$ $\rho_\omega^{\omega'}$ *есть отображение сужения на подобласти* ω'.

Б) *Пусть* $\{\omega_i\}$ — *некоторое локально конечное покрытие области* ω. *Тогда ряд* $\sum f_i$, *где* $f_i \in \Phi(\omega)$ *и* $\operatorname{supp} f_i \subset \omega_i$, *сходится в* $\Phi(\omega)$, *причем соответствие*

$$\prod_i \Phi(\omega) \ni \{f_i\} \to \sum f_i \in \Phi(\omega) \quad (20.2)$$

непрерывно.

В) *В* $\Phi(\omega)$ *определена и непрерывна операция умножения на любую функцию из* $\mathscr{E}(\omega)$.

Г) *для любых областей* ω *и* υ *выполнено условие: если* f — *функция из* $\mathscr{D}^*(\omega)$, *равная нулю в* $\omega \setminus \upsilon$, *сужение которой в* $\omega \cap \upsilon$ *есть элемент* $\Phi(\omega \cap \upsilon)$, *то* $f \in \Phi(\omega)$.

В таком случае последовательность (19) *точна.*

Проверим выполнение условий А) — Г) для предпучков $\mathscr{E}$ и $\mathscr{D}^*$. Для пучка $\mathscr{E}$ они очевидны. Для предпучка $\mathscr{D}^*$ в доказательстве нуждается лишь условие Б). По условию покрытие $\{\omega_i\}$, образованное областями вида (16), локально конечное. Поэтому любой компакт $\varkappa \subset \omega$ пересекается лишь с конечным числом областей ω_i, пусть для определенности лишь с областями $\omega_1, \ldots, \omega_k$. Следовательно, ряд

$$(f, \varphi) = \sum (f_i, \varphi) \quad (21.2)$$

сходится для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}_\varkappa$ и является непрерывным функционалом над $\mathscr{D}_\varkappa$, поскольку лишь первые k членов этого ряда могут быть отличными от нуля.

Поскольку компакт $\varkappa \subset \omega$ был выбран произвольно, функционал f непрерывен над каждым пространством $\mathscr{D}_\varkappa$, следовательно, он непрерывен и над индуктивным пределом этих пространств, т. е. над пространством $\mathscr{D}(\omega)$, откуда $f \in \mathscr{D}^*(\omega)$. Далее, пусть U — некоторая окрестность нуля в $\mathscr{D}^*(\omega)$. По определению топологии в сопряженном пространстве $\mathscr{D}^*(\omega)$ окрестность U содержит поляру некоторого ограниченного в $\mathscr{D}(\omega)$ множества B. Согласно предложению 5 множество B содержится в одном из пространств $\mathscr{D}_\varkappa$ и ограничено в нем. Поэтому в правой части (21) лишь первые k слагаемых могут быть отличны от нуля на множестве B. Предположим, что функционалы $f_1, \ldots, f_k$ принадлежат поляре множества kB (эта поляра является окрестностью нуля в $\mathscr{D}^*(\omega)$). Тогда функционал f принадлежит поляре B и, следовательно, принадлежит U. Тем самым мы установили непрерывность соответствия (20) в случае $\Phi = \mathscr{D}^*$, ч. и т. д.

Из точности (19), в частности, вытекает, что предпучок $\mathscr{D}^*$ является пучком.

Перейдем к доказательству предложения 9. Построим совокупность функций $\alpha_i \in \mathscr{E}(\Omega)$, удовлетворяющих следующим условиям: а) для любого i $\operatorname{supp} \alpha_i \subset U_i$, б) $\sum \alpha_i \equiv 1$ в Ω. Такой набор функций мы будем называть бесконечно дифференцируемым разбиением единицы в Ω, подчиненным покрытию U.

Пусть φ — произвольный элемент ядра отображения ∂^ν: ${}^\nu\Phi(U) \to {}^{\nu+1}\Phi(U)$, $\nu \geqslant 0$. Зафиксируем произвольным образом индексы $i_1, \ldots, i_\nu$ и выберем произвольный индекс i_0. Пусть $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ — соответствующий коэффициент коцепи φ. Так как функция α_{i_0} бесконечно дифференцируема в Ω, то в силу условия В) определено произведение $\alpha_{i_0}\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} \in \Phi\left(U_{i_0, \ldots, i_\nu}\right)$. Это произведение обращается в нуль вблизи $\partial U_{i_0} \cap U_{i_1, \ldots, i_\nu}$, следовательно, его можно продолжить как обобщенную функцию в область $U_{i_1, \ldots, i_\nu}$, положив равным нулю в $U_{i_1, \ldots, i_\nu} \setminus U_{i_0}$. Полученную обобщенную функцию обозначим через $\left(\alpha_{i_0}\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right)'$. Из условия Г) следует, что она принадлежит $\Phi\left(U_{i_1, \ldots, i_\nu}\right)$. Рассмотрим сумму

$$\psi_{i_1, \ldots, i_\nu} = (\nu + 1) \sum_{i_0} \left(\alpha_{i_0}\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right)'. \tag{22.2}$$

Так как функция $\psi_{i_1, \ldots, i_\nu}$, очевидно, антисимметрично зависит от своих индексов, мы можем рассмотреть коцепь

$$\psi = \sum \psi_{i_1, \ldots, i_\nu} U_{i_1, \ldots, i_\nu}.$$

Покажем, что ряд, стоящий в правой части (22), сходится в пространстве $\Phi(\omega)$, где $\omega = U_{i_1, \ldots, i_\nu}$. Поскольку $\operatorname{supp}\left(\alpha_{i_0}\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right)' \subset \subset U_{i_0} \cap \omega$, а области $U_{i_0} \cap \omega$ образуют локально конечное покрытие области ω, это следует из условия Б). Из того же условия вытекает, что соответствие

$$\prod_{i_0} \Phi\left(U_{i_0} \cap \omega\right) \ni \left\{\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right\} \to \psi_{i_1, \ldots, i_\nu} \in \Phi(\omega)$$

непрерывно при любых фиксированных $i_1, \ldots, i_\nu$. Поэтому непрерывно и произведение этих соответствий

$$^{\nu}\Phi(U) \cong \prod \Phi\left(U_{i_0, \ldots, i_\nu}\right) \ni \varphi \to \psi \in \prod \Phi\left(U_{i_1, \ldots, i_\nu}\right) \cong {}^{\nu-1}\Phi(U). \quad (23.2)$$

Таким образом, остается показать, что соответствие (23) является обратным оператору $\partial^{\nu-1}$, т. е. что $\partial^{\nu-1}\psi = \varphi$. Мы имеем

$$\partial^{\nu-1}\psi = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \sum_i \alpha_i \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \varphi_{i, i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}. \quad (24.2)$$

Из формулы (18) видно, что коэффициент функции $\partial^\nu\varphi$, отвечающий области $U_{i, i_0, \ldots, i_\nu}$ в случае, если $i \neq i_j$, $j = 0, \ldots, \nu$, равен

$$\frac{1}{\nu+2}\left[-\sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \varphi_{i, i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_\nu} + \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right].$$

Так как по условию $\partial^\nu\varphi = 0$, это выражение равно нулю, следовательно, внутренняя сумма в правой части (24) равна $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$. Если же $i = i_j$ с некоторым j, $0 \leqslant j \leqslant \nu$, то эта внутренняя сумма опять-таки равна $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$. Следовательно, правая часть (24) равна φ, ч. и т. д.

Итак, мы установили точность (19) во всех членах, кроме первого. Установим точность в первом члене, т. е. покажем, что оператор ∂^{-1} взаимно однозначен. Пусть $\partial^{-1}\varphi = 0$, где $\varphi \in \Phi(\Omega)$. Для каждого i положим $\varphi_i = \rho_\Omega^{U_i}\varphi$, а функцию $\alpha_i\varphi_i$ продолжим в Ω, положив равной нулю в $\Omega \setminus U_i$. Полученная функция $(\alpha_i\varphi_i)$ принадлежит $\Phi(\Omega)$ в силу условия Г), а ряд $\Sigma(\alpha_i\varphi_i)'$ сходится в $\Phi(\Omega)$ согласно условию Б), причем его сумма в пространстве $\mathscr{D}^*(\Omega)$, очевидно, равна φ. Остается заметить, что все члены этого ряда равны нулю, так как по условию $\varphi_i = 0$ для всех i. Отсюда вытекает, что $\varphi = 0$. ■

9°. Копучки пространств обобщенных функций. Мы используем сейчас понятие, двойственное понятию пучка.

Определение 2. *Предкопучком л. т. п., определенным в R^n*, мы назовем соответствие $\Psi\colon \Omega \rightsquigarrow \Psi(\Omega)$, относящее каждой области $\Omega \subset R^n$ некоторое л. т. п. $\Psi(\Omega)$, а каждой паре областей $\Omega \subset \Omega'$

непрерывное отображение $e_{\Omega}^{\Omega'}$: $\Psi(\Omega) \to \Psi(\Omega')$, удовлетворяющее условиям (i) $e_{\Omega}^{\Omega} = I$ и (ii) $e_{\Omega'}^{\Omega''} e_{\Omega}^{\Omega'} = e_{\Omega}^{\Omega''}$ для любых трех областей $\Omega \subset \Omega' \subset \Omega''$.

Предкопучок Ψ мы назовем *копучком*, если соответствие Φ: $\Omega \rightsquigarrow \Psi(C\overline{\Omega})$ является пучком.

Расшифровку последнего определения мы предоставляем читателю. В дальнейшем будет использоваться лишь понятие предкопучка. Отметим следующий факт: если $\Phi = \{\Phi(\Omega), \rho_{\Omega}^{\Omega'}\}$ есть предпучок, то совокупность сопряженных пространств и отображений $\Phi^* = \{\Phi^*(\Omega), (\rho_{\Omega}^{\Omega'})^*\}$, как легко сообразить, является предкопучком. Этот предкопучок мы назовем сопряженным предпучку Φ. Обратно, если $\Psi = \{\Psi(\Omega), e_{\Omega}^{\Omega'}\}$ есть предкопучок, то $\Psi^* = \{\Psi^*(\Omega), (e_{\Omega}^{\Omega'})^*\}$ есть предпучок.

В частности, мы можем рассмотреть предкопучки

$$\mathscr{D}\colon \Omega \rightsquigarrow \mathscr{D}(\Omega), \qquad \mathscr{E}^*\colon \Omega \rightsquigarrow \mathscr{E}^*(\Omega), \tag{25.2}$$

сопряженные к предпучкам $\mathscr{D}^*$ и $\mathscr{E}$. По определению для любой пары областей $\Omega \subset \Omega'$ в качестве отображения $e_{\Omega}^{\Omega'}$, необходимого для построения предкопучков (25), выбирается сопряженное к отображению сужения $\rho_{\Omega'}^{\Omega}$, соответственно в предпучках $\mathscr{D}^*$ и $\mathscr{E}$. Следовательно, $e_{\Omega}^{\Omega'}$ есть не что иное, как оператор тождественного вложения $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega')$, соответственно $\mathscr{E}^*(\Omega) \to \mathscr{E}^*(\Omega')$.

Пусть теперь U — некоторое локально конечное покрытие некоторой области Ω. Скажем, что на этом покрытии определен предкопучок Ψ, если пространства $\Psi(\omega)$ и отображения $e_{\omega}^{\omega'}$ (удовлетворяющие условиям (i) и (ii)) заданы лишь для областей вида (16). Пусть Ψ — некоторый предкопучок на покрытии U. Цепью ν-го порядка на покрытии U с коэффициентами в этом предкопучке мы назовем любую сумму вида (17), в которой коэффициенты $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ принадлежат пространствам $\Psi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$, антисимметричны и лишь конечное их число отлично от нуля. Цепи ν-го порядка с коэффициентами в Ψ, очевидно, образуют линейное пространство, которое мы обозначим через ${}_\nu\Psi(U)$. Его можно наделить топологией, исходя из того, что ${}_\nu\Psi(U) \cong \sum_{i_0 < \ldots < i_\nu} \Psi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$.

Для каждого $\nu \geqslant 0$ рассмотрим граничный оператор ∂_ν: ${}_\nu\Psi(U) \to {}_{\nu-1}\Psi(U)$, действующий по формуле

$$\partial_\nu\colon \varphi \to \psi = \sum_{i_1, \ldots, i_\nu} \left(\sum_{i_0} \breve{\varphi}_{i_0, \ldots, i_\nu}\right) U_{i_1} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu}, \tag{26.2}$$

где $\breve{\varphi}_{i_0, \ldots, i_\nu}$ — продолжение коэффициента $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ в область $U_{i_1, \ldots, i_\nu}$ (т. е. результат применения оператора $e_{U \ldots}^{U \ldots}$). Операторы ∂_ν, очевидно, непрерывны и образуют последовательность

$$0 \leftarrow \Psi(\Omega) \xleftarrow{\partial_0} {}_0\Psi(U) \xleftarrow{\partial_1} \ldots \longleftarrow {}_{\nu-1}\Psi(U) \xleftarrow{\partial_\nu} {}_\nu\Psi(U) \leftarrow \ldots \quad (27.2)$$

Проверим, что она полуточна. Действительно, результат применения оператора $\partial_{\nu-1}\partial_\nu$ к цепи φ есть цепь, образованная коэффициентами $\sum\limits_{i_0, i_1} \breve{\varphi}_{i_0, i_1, \ldots, i_\nu}$. В силу антисимметричности элемента $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ относительно индексов каждый такой коэффициент равен нулю. Отсюда следует полуточность последовательности (27).

Пусть $\Phi = \{\Phi(\omega)\}$ — некоторый предпучок на покрытии U, а $\Psi = \{\Psi(\omega)\}$ — сопряженный предкопучок на том же покрытии. При любом $\nu \geqslant 0$ между пространствами ${}^\nu\Phi(U)$ и ${}_\nu\Psi(U)$ определено отношение двойственности

$$(\psi, \varphi) = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \left(\psi_{i_0, \ldots, i_\nu}, \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}\right), \quad \psi \in {}_\nu\Psi(U), \quad \varphi \in {}^\nu\Phi(U).$$

Проверим, что оператор ∂_ν в (27) является сопряженным по отношению к оператору $\partial^{\nu-1}$ в (19). Для любых $\varphi \in {}^{\nu-1}\Phi(U)$ и $\psi \in {}_\nu\Psi(U)$ мы имеем

$$(\psi, \partial^{\nu-1}\varphi) = \sum_{i_0, \ldots, i_\nu} \left(\psi_{i_0, \ldots, i_\nu}, \hat{\varphi}_{i_1, \ldots, i_\nu}\right) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_\nu} \left(\sum_{i_0} \breve{\psi}_{i_0, \ldots, i_\nu}, \varphi_{i_1, \ldots, i_\nu}\right) = (\partial_\nu \psi, \varphi),$$

т. е. $\partial_\nu = \left(\partial^{\nu-1}\right)^*$, ч. и т. д. Обратно, если Ψ — некоторый предкопучок на покрытии U, а Φ — сопряженный предпучок, то при любом $\nu \geqslant 0$ $\partial^{\nu-1} = (\partial_\nu)^*$.

10°. Комплекс, связанный с семейством носителей. В этом пункте мы рассмотрим более сложную конструкцию. Пусть U — некоторое локальное конечное покрытие области Ω, а Ψ — предкопучок, заданный на этом покрытии, удовлетворяющий условию: А) для каждой области ω вида (16) $\Psi(\omega)$ есть подпространство (в алгебраическом смысле) пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$, причем носитель любой функции $\psi \in \Psi(\omega)$ принадлежит ω; если $\omega \subset \omega'$, то $\Psi(\omega)$ есть подпространство в $\Psi(\omega')$, а $e_\omega^{\omega'}$ есть тождественное вложение $\Psi(\omega) \to \Psi(\omega')$.

Коцепью с коэффициентами в предкопучке Ψ мы назовем любую сумму вида (17), в которой коэффициенты $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$, антисимметричные относительно индексов, принадлежат пространствам $\Psi\left(U_{i_0, \ldots, i_\nu}\right)$. Из условия А) следует, что каждый коэффициент такой коцепи φ есть обобщенная функция с носителем, принадлежащим $U_{i_0, \ldots, i_\nu}$. Объединение носителей всех функций $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ мы назовем носителем коцепи φ.

Пусть $S = \{s_\alpha\}$ — некоторая совокупность подмножеств области Ω, обладающая следующими свойствами: 1) любое множество s, принадлежащее одному из множеств $s_\alpha \in S$, само принадлежит S и 2) объединение любого конечного числа множеств из S принадлежит S. Совокупность S, обладающую этими свойствами, мы будем называть семейством носителей в Ω.

Зафиксируем некоторое семейство носителей S в Ω. Для каждого целого $\nu \geqslant 0$ через ${}^\nu\Psi_S(U)$ обозначим множество всех коцепей с коэффициентами в предкопучке Ψ, носители которых принадлежат S. Это множество, очевидно, является линейным пространством. Аналогичным образом через $\Psi_S(\omega)$ обозначим подпространство в $\Psi(\omega)$, образованное функциями, носители которых принадлежат S.

Чтобы определить граничный оператор $\partial_\nu\, {}^\nu\Psi_S(U) \to {}^{\nu-1}\Psi_S(U)$, действующий с помощью формулы (26), необходимо наложить еще одно условие на предкопучок Ψ: Б) пусть $\{\omega_i\}$ — некоторое локально конечное покрытие области ω (все эти области — вида (16)); тогда ряд $\sum \Psi_i$, в котором члены $\psi_i \in \Psi(\omega_i)$, сходится в $\Psi(\omega)$, если $\bigcup \operatorname{supp} \psi_i \in S$. Из условия Б) вытекает, что внутренняя сумма в правой части (26) сходится в $\Psi\left(U_{i_1, \ldots, i_\nu}\right)$ при любых $i_1, \ldots, i_\nu$. Действительно, положим $\omega = U_{i_1, \ldots, i_\nu}$. Поскольку области $\omega_{i_0} = U_{i_0, \ldots, i_1}$ образуют локально конечное покрытие ω, а $\varphi_{i_0, \ldots, i_1} \in \Psi\left(\omega_{i_0}\right)$, причем $\bigcup\limits_{i_0} \operatorname{supp} \varphi_{i_0, \ldots, i_1} \in S$, так как $\operatorname{supp} \varphi \in S$, то сумма $\sum\limits_{i_0} \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ сходится в $\Psi(\omega)$. Отсюда следует, что $\partial_\nu \varphi \in {}^{\nu-1}\Psi(U)$, а так как, очевидно, $\operatorname{supp} \partial_\nu \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi \in S$, то $\partial_\nu \varphi \in {}^{\nu-1}\Psi_S(U)$. Таким образом, оператор ∂_ν построен. Эти операторы образуют последовательность

$$0 \leftarrow \Psi_S(\Omega) \xleftarrow{\partial_0} {}^0\Psi_S(U) \xleftarrow{\partial_1} \ldots \leftarrow {}^{\nu-1}\Psi_S(U) \xleftarrow{\partial_\nu} {}^\nu\Psi_S(U) \leftarrow \ldots \quad (28.2)$$

Предложение 10. *Пусть S — некоторое семейство носителей в Ω, а Ψ — предкопучок, заданный на некотором локально конечном покрытии U области Ω, удовлетворяющий условиям* А), Б), *а также еще двум условиям:*

В) *Для любой области ω в пространстве $\Psi(\omega)$ определена операция умножения на любую функцию из $\mathscr{E}(\omega)$.*

Г) *Для любых двух областей ω и $\mathfrak{v}$ из $\psi \in \Psi(\omega)$ и $\operatorname{supp} \psi \subset \omega \cap \mathfrak{v}$ вытекает, что $\psi \in \Psi(\omega \cap \mathfrak{v})$.*

В таком случае последовательность (28) *алгебраически точна.*

Как легко видеть, условия А) — Г) выполнены для любой области Ω, локально конечного покрытия U, семейства носителей S в Ω и предкопучков $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}^*$.

Доказательство предложения. Пусть $\{\alpha_i\}$ — бесконечно дифференцируемое разбиение единицы в Ω, подчиненное покрытию U.

Пусть, далее, φ — произвольный элемент ядра отображения $\partial_{\nu-1}$ в (28), где $\nu \geqslant 0$ (а $\partial_{-1} = 0$). Для произвольных индексов $i_0, \ldots, i_\nu$ рассмотрим произведение $\alpha_{i_0}\varphi_{i_1, \ldots, i_\nu}$, где $\varphi_{i_1, \ldots, i_\nu}$ — коэффициент коцепи φ. В силу условия В) это произведение принадлежит $\Psi(U_{i_1, \ldots, i_\nu})$, а его носитель заключен в области $U_{i_0, \ldots, i_\nu}$. Поэтому из условия Г) вытекает, что $\alpha_{i_0}\varphi_{i_1, \ldots, i_\nu} \in \Psi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$. Отсюда следует, что сумма

$$\psi_{i_0, \ldots, i_\nu} = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \alpha_{i_j}\varphi_{i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_\nu}$$

также принадлежит $\Psi(U_{i_0, \ldots, i_\nu})$. Функция $\psi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ антисимметрично зависит от своих индексов, следовательно, мы можем рассмотреть коцепь $\psi = \sum \psi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} \in {}^\nu\Psi(U)$. Очевидно, что носитель этой коцепи принадлежит $\operatorname{supp}\varphi \in S$ и, следовательно, является элементом семейства S. Отсюда $\psi \in {}^\nu\Psi_S(U)$.

Установим соотношение $\partial_\nu\psi = \varphi$. Мы имеем

$$\partial_\nu\psi = \sum_{i_1, \ldots, i_\nu} \Big(\sum_{i_0} \psi_{i_0, \ldots, i_\nu}\Big) U_{i_1} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_\nu} \Big[\sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \alpha_{i_j} \sum_{i_0} \varphi_{i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_\nu} +$$

$$+ \sum_{i_0} \alpha_{i_0}\varphi_{i_1, \ldots, i_\nu}\Big] U_{i_1} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu}.$$

Из условия $\partial_{\nu-1}\varphi = 0$ вытекает, что первая сумма по i_0 в правой части равна нулю. Следовательно, правую часть мы можем переписать в виде

$$\sum_{i_1, \ldots, i_\nu} \sum_{i_0} \alpha_{i_0}\varphi_{i_1, \ldots, i_\nu} U_{i_1} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} = \varphi,$$

откуда $\partial_\nu\psi = \varphi$. ■

§ 3. Преобразование Фурье

1°. Специальные классы функциональных пространств. Сейчас мы рассмотрим некоторые классы пространств гладких и обобщенных функций, характеризующихся различными ограничениями роста или условиями убывания на бесконечности.

Функцию I, определенную в R^n, назовем *допустимой*, если она устроена следующим образом. В некоторой области Ω_I она положительна, непрерывна и удовлетворяет неравенству $I(\xi) \geqslant 1$, а в дополнении к $\overline{\Omega}_I$ $I(\xi) = +\infty$. Пусть I — допустимая функция, а q —

произвольное целое неотрицательное число. В пространстве $\mathscr{D}(\Omega_l)$ рассмотрим следующую норму:

$$\|\varphi\|_l^q = \sum_{|j| \leqslant q} \|l(\xi) D^j \varphi(\xi)\|_{L_2}. \tag{1.3}$$

Из непрерывности функции l следует, что она ограничена на любом компакте $K \subset \Omega_l$. Поэтому топология, определяемая нормой (1), слабее топологии пространства $\mathscr{D}(\Omega_l)$. Рассмотрим пополнение S_l^q пространства $\mathscr{D}(\Omega_l)$ по этой топологии. Наделив S_l^q нормой $\|\cdot\|_l^q$, являющейся продолжением нормы (1), мы получим банахово пространство. Из неравенства $l(\xi) \geqslant 1$ следует, что норма $\|\cdot\|_l^q$ сильнее нормы $\|\cdot\|^q$. Поэтому S_l^q есть подпространство в $\mathscr{D}^q_{\Omega_l}$.

Заметим, что норма (1) в $\mathscr{D}(\Omega_l)$ порождается скалярным произведением

$$\langle\varphi, \psi\rangle_l^q = \sum_{|j| \leqslant q} (lD^j\varphi, lD^j\psi).$$

Продолжив это скалярное произведение на все пространство S_l^q, мы получим скалярное произведение, отвечающее норме $\|\cdot\|_l^q$. Следовательно, пространство S_l^q является гильбертовым.

Функцию l^{-1}, определенную и непрерывную в Ω_l, продолжим нулем в $C\Omega_l$. В пространстве $\mathscr{D}(R^n)$ рассмотрим полунорму

$$\|\varphi\|_{l^{-1}}^q = \sum_{|j| \leqslant q} \left\| \frac{D^j\varphi(\xi)}{l(\xi)} \right\|_{L_2}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что она непрерывна в топологии $\mathscr{D}(R^n)$. Так как функция l^{-1} положительна в Ω_l, подпространство, на котором эта полунорма равна нулю, совпадает с $\mathscr{D}_{C\Omega_l}$. Поэтому на факторпространстве $\mathscr{D}(R^n)/\mathscr{D}_{C\Omega_l}$ эта полунорма индуцирует норму. Пополнение этого факторпространства по этой норме мы обозначим через $\mathscr{E}_l^q$. Это пространство, наделенное нормой, являющейся продолжением полунормы (2), оказывается гильбертовым, поскольку полунорма $\|\cdot\|_{l^{-1}}^q$ отвечает скалярному произведению $\langle\cdot, \cdot\rangle_{l^{-1}}^q$.

Так как функция l^{-1} ограничена снизу положительным числом на любом компакте $K \subset \Omega_l$, норма $\|\cdot\|_{l^{-1}}^q$ мажорирует норму $\|\cdot\|_K^q$. Следовательно, элементы пространства $\mathscr{E}_l^q$ на любом компакте $K \subset \Omega_l$ принадлежат пространству $\mathscr{E}_K^q$, т. е. являются обобщенными функциями в Ω_l порядка не выше $-q$.

Каждой функции φ пространства $\mathscr{D}(\Omega_l)$ мы можем отнести непрерывный функционал над пространством $\mathscr{E}_l^q$, действующий по формуле $\psi \to (\varphi, \psi)$. Это соответствие определяет вложение пространства $\mathscr{D}(\Omega_l)$ в сильное сопряженное с $\mathscr{E}^q_l$ пространство. Норму этого сопряженного пространства можно записать так:

$$\|\varphi\|_l^{-q} = \sup\left\{\frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\psi\|^q_{l^{-1}}},\quad \psi \in \mathscr{D}(R^n),\quad \|\psi\|^q_{l^{-1}} \neq 0\right\}. \qquad (3.3)$$

Пополнение $\mathscr{D}(\Omega_l)$ по топологии, определяемой этой нормой, обозначим через S_l^{-q} и введем в S_l^{-q} норму, являющуюся продолжением (3).

Таким образом, S_l^{-q} есть подпространство сильного сопряженного с $\mathscr{E}^q_l$ пространства. Покажем, что на самом деле S_l^{-q} совпадает с $(\mathscr{E}^q_l)^*$. Для этого достаточно показать, что пространство $\mathscr{D}(\Omega_l)$ плотно в $(\mathscr{E}^q_l)^*$. Предположим противное. Тогда существует элемент $\psi \neq 0$ второго сопряженного с $\mathscr{E}^q_l$ пространства, который обращается в нуль на всех элементах из $\mathscr{D}(\Omega_l)$. Так как $\mathscr{E}^q_l$ — гильбертово пространство, оно рефлексивно. Поэтому $\psi \in \mathscr{E}^q_l$, следовательно, из $(\varphi, \psi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_l)$ следует, что $\psi = 0$. Тем самым мы установили изоморфизм $S_l^{-q} \cong (\mathscr{E}^q_l)^*$. Отсюда, в частности, следует, что проeтранство S_l^{-q} также является гильбертовым и $\mathscr{E}^q_l = (S_l^{-q})^*$.

Так как $l(\xi) \geqslant 1$, топология в $\mathscr{E}^q_l$ слабее, чем в $\mathscr{E}^q_{\Omega_l}$. Следовательно, норма $\|\cdot\|_l^{-q}$ сильнее нормы $\|\cdot\|^{-q}$. Поэтому пространство S_l^{-q} является подпространством (в алгебраическом смысле) пространства $\mathscr{D}^{-q}_{\overline{\Omega}_l}$ и, следовательно, состоит из обобщенных в R^n функций порядка не выше q с носителями, принадлежащими $\overline{\Omega}_l$.

Отметим, что $\mathscr{E}^0_l$ как линейное топологическое пространство совпадает с пространством функций, заданных в Ω_l, принадлежащих L_2 с весом l^{-1}. Поэтому сопряженное пространство S_l^{-0} как л. т. п. совпадает с пространством функций, определенных в Ω_l и принадлежащих L_2 с весом l. Отсюда вытекает изоморфизм $S_l^{-0} \cong S_l^0$.

Таким образом, мы для любого целого q построили гильбертово пространство S^q_l, причем для любого q определена и непрерывна операция вложения $S^{q+1}_l \to S^q_l$. Отметим, что для любого вектора $j \in Z^n_+$ дифференциальный оператор D^j действует непрерывно из S^q_l в $S^{q-|j|}_l$.

Пусть снова q — произвольное целое неотрицательное число. В пространстве $\mathscr{D}(R^n)$ введем топологию сильного сопряженного с S^q_l пространства. Эта топология определяется полунормой

$$\|\varphi\|_{l^{-1}}^{-q} = \sup\left\{\frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\psi\|^q_l},\quad \psi \in \mathscr{D}(\Omega_l),\quad \|\psi\|^q_l \neq 0\right\}. \qquad (4.3)$$

Подпространство, на котором эта полунорма равна нулю, есть $\mathscr{D}_{C\Omega_I}$. Факторпространство $\mathscr{D}(R^n)/\mathscr{D}_{C\Omega_I}$ мы пополним по норме, индуцированной этой полунормой. Пополнение обозначим через $\mathscr{E}_I^{-q}$ и наделим нормой, являющейся продолжением (4). Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, мы заключаем, что полученное пространство $\mathscr{E}_I^{-q}$ гильбертово и является взаимно сопряженным с S_I^q, причем $\mathscr{E}_I^{-0} \cong \mathscr{E}_I^0$. Элементы пространства $\mathscr{E}_I^{-q}$ суть обобщенные в Ω_I функции порядка не выше q.

Итак, для любого целого q мы построили гильбертово пространство $\mathscr{E}_I^q$, взаимно сопряженное с S_I^{-q}. При этом для любого q $\mathscr{E}_I^{q+1}$ непрерывно вкладывается в $\mathscr{E}_I^q$, а оператор D^j непрерывно действует из $\mathscr{E}_I^q$ в $\mathscr{E}_I^{q-|j|}$.

Пусть F — замыкание допустимой области Ω, а I_F — функция, равная единице на Ω и ∞ вне Ω. Она, очевидно, допустимая, а $\Omega_I = \Omega$. Заметим, что норма $\|\cdot\|_{I_F}^q$ на пространстве $\mathscr{D}(\Omega)$ совпадает с $\|\cdot\|^q$, а норма $\|\cdot\|_{I_F^{-1}}^q$ равна $\|\cdot\|_F^q$. Отсюда вытекают изоморфизмы

$$\mathscr{E}_{I_F}^q \cong \mathscr{E}_F^q, \quad S_{I_F}^q \cong \mathscr{D}_F^q, \qquad -\infty < q < \infty.$$

2°. Семейства логарифмически выпуклых функций. Напомним, что функция I, определенная в R^n, принимающая конечные или бесконечные значения, называется логарифмически выпуклой (л. в.), если она положительна и множество в R^{n+1}, образованное точками (t, ξ), в которых $t \geqslant \ln I(\xi)$, выпукло и замкнуто. Логарифмически двойственной к I функцией называется функция

$$\mathscr{I}(y) = \sup_{\xi} \frac{\exp(y, \xi)}{I(\xi)}.$$

Функция $\mathscr{I}$ всегда является логарифмически выпуклой. Если сама функция I л. в., то она является логарифмически двойственной по отношению к $\mathscr{I}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать пространства S_I^q и $\mathscr{E}_I^q$ чаще всего в случае, когда функция I логарифмически выпукла. При этом мы будем предполагать, что функция I удовлетворяет неравенству

$$I(\xi) \geqslant C \exp(\varepsilon |\xi|), \tag{5.3}$$

а множество, где $I(\xi) < \infty$, имеет внутренние точки. В таком случае это множество, будучи выпуклым, является замыканием некоторой выпуклой области, которую мы обозначим через Ω_I. Следовательно, функция I является допустимой. Логарифмически двойственная функция $\mathscr{I}$ конечна в области $|y| \leqslant \varepsilon$, поскольку исходная функция I

удовлетворяет неравенству (5). Поэтому множество, где $\mathcal{J}(y) < \infty$, также является замыканием некоторой непустой выпуклой области $\Omega_{\mathcal{J}}$.

Определение. Бесконечную в обе стороны последовательность функций I_α, $-\infty < \alpha < \infty$, заданных в R^n, назовем *возрастающим семейством л. в. функций*, если каждая из них логарифмически выпукла и при каждом α выполнены неравенства

$$\text{I.}\quad \exp(\varepsilon_\alpha |\xi|) I_\alpha(\xi) \leqslant C_\alpha I_{\alpha+1}(\xi),$$

$$\text{II.}\quad \sup_{|\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon_\alpha} I_\alpha(\xi') \leqslant C_\alpha I_{\alpha+1}(\xi)$$

с некоторыми положительными ε_α и C_α.

Последовательность I_α, $-\infty < \alpha < \infty$, назовем *убывающим семейством л. в. функций*, если последовательность $\{I_{-\alpha}\}$ есть возрастающее семейство л. в. функций, т. е. если все функции I_α л. в. и при любом α

$$\text{I}'.\quad \exp(\varepsilon_\alpha |\xi|) I_{\alpha+1}(\xi) \leqslant C_\alpha I_\alpha(\xi),$$

$$\text{II}'.\quad \sup_{|\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon_\alpha} I_{\alpha+1}(\xi') \leqslant C_\alpha I_\alpha(\xi)$$

с некоторыми положительными ε_α и C_α.

Предложение 1. *Пусть $\{I_\alpha\}$ — убывающее семейство л. в. функций. Тогда последовательность логарифмически двойственных функций $\mathcal{J}_\alpha$ образует возрастающее семейство л. в. функций, удовлетворяющих условиям* I *и* II *с теми же константами ε_α.*

Обратно, если $\{I_\alpha\}$ — возрастающее семейство л. в. функций, то функции $\mathcal{J}_\alpha$ образуют убывающее семейство л. в. функций, удовлетворяющих неравенствам I′ *и* II′ *с теми же константами ε_α.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из неравенства I′ мы находим

$$\sup_{|y'-y| \leqslant \varepsilon_\alpha} \mathcal{J}_\alpha(y') = \sup_{|y'-y| \leqslant \varepsilon_\alpha} \sup_\xi \frac{\exp(y', \xi)}{I_\alpha(\xi)} =$$

$$= \sup_\xi \frac{\exp(\varepsilon_\alpha |\xi|) \exp(y, \xi)}{I_\alpha(\xi)} \leqslant C_\alpha \sup_\xi \frac{\exp(y, \xi)}{I_{\alpha+1}(\xi)} = C_\alpha \mathcal{J}_{\alpha+1}(y).$$

Тем самым неравенство II проверено. Используя неравенство II′, мы получаем

$$\exp(\varepsilon_\alpha |y|) \mathcal{J}_\alpha(y) = \exp(\varepsilon_\alpha |y|) \sup_\xi \frac{\exp(y, \xi)}{I_\alpha(\xi)} =$$

$$= \sup_{|\xi-\xi'| \leqslant \varepsilon_\alpha} \frac{\exp(y, \xi')}{I_\alpha(\xi)} \leqslant C_\alpha \sup_{\xi'} \frac{\exp(y, \xi')}{I_{\alpha+1}(\xi')} = C_\alpha \mathcal{J}_{\alpha+1}(y).$$

Тем самым неравенство I также установлено. Второе утверждение доказывается аналогично. ■

Пусть Ω — некоторая непустая выпуклая ограниченная область, а K — ее замыкание. Тогда функция I_K, равная единице на K и ∞

вне K, очевидно, л. в. допустимая, а также удовлетворяет неравенству (5). Функцию, логарифмически двойственную l_K, обозначим через $\mathcal{J}_K$. Пусть K_α, $-\infty < \alpha < \infty$, — некоторая строго возрастающая последовательность выпуклых компактов, причем ни один из них не пуст. Так как при любом α компакт K_α содержит окрестность непустого компакта $K_{\alpha-1}$, он является замыканием некоторой выпуклой области. Отсюда следует, что функции l_{K_α} допустимые и образуют убывающее семейство л. в. функций, так как удовлетворяют условиям I и II с $\varepsilon_\alpha = \rho(K_\alpha, CK_{\alpha+1})$.

3°. Преобразование Фурье в пространствах S_l^q. Сейчас мы опишем преобразование Фурье пространств S_l^q в случае, когда функция l логарифмически выпукла. Напомним, что прямое и обратное преобразования Фурье записываются следующим образом:

$$F\varphi = \tilde{\varphi}(x) = \int \exp(i(x, \xi))\varphi(\xi)\,d\xi,$$
$$F^{-1}\psi = \tilde{\psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \exp(-i(x, \xi))\psi(x)\,dx. \tag{6.3}$$

Как известно, операторы F и F^{-1} устанавливают изоморфизм между пространствами $L_2(R_\xi^n)$ и $L_2(R_x^n)$, если несобственные интегралы (6) понимать в смысле главных значений. Для любых функций φ, $\psi \in L_2$ имеет место равенство Парсеваля $(2\pi)^n(\varphi, \psi) = (F\varphi, F\psi)$.

Другое известное свойство преобразования Фурье заключается в том, что оно преобразует оператор $(iD_\xi)^j$ в оператор умножения на x^j. Более точно, для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}^q_{R^n}$, где q — неотрицательное число, имеют место соотношения

$$F[(iD_\xi)^j\varphi] = x^j F[\varphi], \qquad |j| \leqslant q. \tag{7.3}$$

Чтобы их доказать, достаточно отметить, что на плотном в $\mathcal{E}^q_{R^n}$ подпространстве $\mathcal{D}(R^n)$ они вытекают из формулы интегрирования по частям.

Предположим, что для данной функции φ в R_ξ^n существует область $\Omega \subset R_y^n$, содержащая начало координат, такая, что при любом $y \in \Omega$ функция $\exp(-y, \xi)\varphi(\xi)$ принадлежит некоторому ограниченному в L_2 множеству. Как легко сообразить, в этом случае при любом $y \in \Omega$ пространству L_2 принадлежит также функция $\exp(-y, \xi)\exp(\rho|\xi|)\varphi(\xi)$, где $\rho = \rho(y, C\Omega)$. Следовательно, для любого $z \in R_x^n \times \Omega$ мы можем рассмотреть интеграл

$$\tilde{\varphi}(z) = \int \exp(i(z, \xi))\varphi(\xi)\,d\xi,$$

и этот интеграл равномерно сходится в окрестности каждой точки области $R_x^n \times \Omega$. Так как ядро этого интеграла есть целая функция, отсюда следует, что функция $\tilde{\varphi}(z)$ аналитична в области $R_x^n \times \Omega$ и, следовательно, является аналитическим продолжением преобразования Фурье $\tilde{\varphi}(x)$, определенного на вещественной оси. Заметим, что, если $\varphi \in S_l^0$, где l — допустимая л. в. функция, то в этих рассуждениях мы можем положить $\Omega = \Omega_{\mathcal{J}}$, поскольку в силу неравенства (5) область $\Omega_{\mathcal{J}}$ содержит ε-окрестность начала координат.

Рассмотрим теперь некоторые пространства аналитических функций, с помощью которых мы охарактеризуем преобразования Фурье пространств S_l^q.

Пусть $R(z)$ — некоторая непрерывная положительная функция в C^n, а $\mathcal{J}(y)$ — некоторая допустимая функция в R_y^n (выполнение неравенства $\mathcal{J}(y) \geqslant 1$ мы сейчас не предполагаем). Через $S_R^{\mathcal{J}}$ обозначим пространство аналитических в $R_x^n \times \Omega_{\mathcal{J}}$ функций, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_R^{\mathcal{J}} = \sup \frac{|\psi(z)|}{R(z)\,\mathcal{J}(y)}.$$

Эту же норму используем для введения топологии в $S_R^{\mathcal{J}}$. Это пространство, очевидно, полно. В том случае, когда $R(z) = (|z| + 1)^{-q}$, где q — некоторое целое число, пространство $S_R^{\mathcal{J}}$ и норму $\|\cdot\|_R^{\mathcal{J}}$ мы обозначим через $S_q^{\mathcal{J}}$ и $\|\cdot\|_q^{\mathcal{J}}$, а в том случае, когда $\mathcal{J} = \mathcal{J}_K$ — через S_R^K и $\|\cdot\|_R^K$, соответственно S_q^K и $\|\cdot\|_q^K$.

Символом $*$ обозначим операцию, определенную для функций, заданных в некоторой области пространства C^n, которая сопоставляет функции $\varphi(z)$ функцию $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$. Эта операция антилинейна, так как относит функции $\lambda\varphi$ функцию $\bar{\lambda}\varphi^*$. Если функция φ голоморфна в некоторой области Ω, то функция φ^* аналитична в области Ω^*, симметричной Ω относительно вещественного подпространства, причем коэффициенты Тейлора функций φ и φ^* в комплексно сопряженных точках сами сопряжены. Очевидно, что для любой функции φ $\varphi^{**} = \varphi$.

В частности, для любой функции $\mathcal{J}(y)$ в R_y^n через $\mathcal{J}^*(y)$ обозначим функцию $\overline{\mathcal{J}(-y)}$. Если $\mathcal{J} = \mathcal{J}_K$, то $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_{K^*}$, где K^* — компакт, центрально симметричный K. Очевидно, что для любых функций R и $\mathcal{J}$ операция $*$ осуществляет антиизоморфизм между пространствами $S_R^{\mathcal{J}}$ и $S_{R^*}^{\mathcal{J}^*}$.

Предложение 2. *Пусть $\{l_\alpha, -\infty < \alpha < \infty\}$ — убывающее семейство логарифмически выпуклых функций, а $\{\mathcal{J}_\alpha\}$ — семейство логарифмических двойственных функций. Для любых целых α и q определены, непрерывны и взаимно обратны операторы*

$$F\colon S_{l_\alpha}^q \to S_q^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}}, \quad F^{-1}\colon S_q^{\mathcal{J}^*_\alpha} \to S_{l_{\alpha+2}}^{q-\nu}, \quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

причем оператор F на подпространстве $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$ совпадает с преобразованием Фурье.

Так как подпространство $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$ плотно в $S_{I_\alpha}^q$, оператор F совпадает с преобразованием Фурье также на любой функции своей области определения, принадлежащей L_2. Следовательно, оператор F^{-1} на функциях из L_2 совпадает с обратным преобразованием Фурье. Из того, что $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$ плотно в $S_{I_\alpha}^q$, следует также, что оператор F не зависит от q и α, т. е. оператор F, построенный для данного пространства $S_{I_\alpha}^q$, является сужением операторов F, построенных для более широких пространств $S_{I_{\alpha'}}^{q'}$. Аналогичным свойством обладает оператор F^{-1}.

Доказательство предложения 2. Зафиксируем α и q и построим оператор F. Предположим сначала, что $q \geqslant 0$. Пусть φ — произвольный элемент $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$. Так как носитель φ есть компакт, ее преобразование Фурье продолжается в C^n как целая функция $\tilde{\varphi}(z)$. Оценим ее в произвольной точке $z = x + iy$, где $y \in \Omega_{\mathscr{I}^*_{\alpha+1}}$:

$$|\tilde{\varphi}(z)| = |(\bar{\varphi}, \exp(iz, \xi))| \leqslant \|\exp(iz, \xi)\|^0_{I^{-1}_\alpha} \|\varphi\|^0_{I_\alpha}.$$

Оценим первый сомножитель правой части, используя неравенство I′:

$$\|\exp(iz, \xi)\|^0_{I^{-1}_\alpha} \leqslant C \sup_\xi \frac{\exp(\varepsilon_\alpha |\xi|) \exp(-y, \xi)}{I_\alpha(\xi)} \leqslant$$
$$\leqslant C' \sup_\xi \frac{\exp(-y, \xi)}{I_{\alpha+1}(\xi)} = C' \mathscr{I}_{\alpha+1}(-y).$$

Отсюда

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leqslant C' \mathscr{I}_{\alpha+1}(-y) \|\varphi\|^0_{I_\alpha}.$$

Применяя это неравенство к производным функции φ до порядка q с учетом (7), мы получим

$$\|\tilde{\varphi}\|_q^{\mathscr{I}^*_{\alpha+1}} \leqslant C' \|\varphi\|^q_{I_\alpha}. \tag{8.3}$$

Пусть теперь $q < 0$. Мы имеем

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leqslant \|\exp(iz, \xi)\|^{-q}_{I^{-1}_\alpha} \|\varphi\|^q_{I_\alpha},$$

где

$$\|\exp(iz, \xi)\|^{-q}_{I^{-1}_\alpha} = \sum_{|j| \leqslant -q} |z^j| \, \|\exp(iz, \xi)\|^0_{I^{-1}_\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant C(|z| + 1)^{-q} \mathscr{I}_{\alpha+1}(-y),$$

следовательно,

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leqslant C(|z| + 1)^{-q} \mathscr{I}_{\alpha+1}(-y) \|\varphi\|^q_{I_\alpha},$$

что снова приводит к (8).

Из неравенства (8) следует, что $\tilde{\varphi} \in S_q^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}}$ и оператор F: $S\mathfrak{I}_\alpha \to S_q^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}}$, определенный пока на подпространстве $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$, непрерывен. Так как это подпространство плотно в $S\mathfrak{I}_\alpha$, а пространство $S_q^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}}$ полное, мы можем продолжить оператор F по непрерывности на все пространство $S\mathfrak{I}_\alpha$. Полученное продолжение является искомым оператором.

Построим оператор F^{-1}. Предположим, что $q \leqslant \nu$ и введем обозначения $r = q - \nu$ и $\varepsilon = \min(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha+1})$. Для $\varphi \in S_q^{\mathcal{J}^*_\alpha}$ через $F^{-1}\varphi$ мы обозначим функционал над $\mathscr{D}(R^n)$, действующий по формуле $(F^{-1}\varphi, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\varphi, F\psi)$. Зафиксируем произвольную точку $\xi_0 \in R^n$ и оценим значения функционала $F^{-1}\varphi$ на функциях ψ, носители которых содержатся в ε-окрестности точки ξ_0. Так как функции φ и $F\psi$ аналитичны при $y \in \Omega_{\mathcal{J}^*_\alpha}$, а $F\psi$ убывает при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени, величину $(\varphi, F\psi)$ мы можем записать в виде интеграла от $\varphi^*\tilde{\psi}$ по любому подпространству вида $y = \eta \in \Omega_{\mathcal{J}^*_\alpha}$. Следовательно,

$$(2\pi)^n \left|(F^{-1}\varphi, \psi)\right| = |(\varphi, F\psi)| = \left| \int\limits_{y=\eta} \varphi^*(z)\tilde{\psi}(z)\,dz \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \frac{\varphi^*(z)}{(|z|+1)^{-r}} \Big|_{y=\eta} \right\|^0 \left\| (|z|+1)^{-r}\tilde{\psi}(z)\Big|_{y=\eta} \right\|^0 \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{y=\eta} \frac{|\varphi^*(z)|}{(|z|+1)^{-q}} \left\| (|z|+1)^{-r}\tilde{\psi}\Big|_{y=\eta} \right\|^0. \qquad (9.3)$$

Второй сомножитель правой части не превосходит $\mathcal{J}_\alpha(\eta)\|\varphi\|_q^{\mathcal{J}^*_\alpha}$, а третий — $c \sum\limits_{|j| \leqslant -r} \left\| \widetilde{D^j\psi}\Big|_{y=\eta} \right\|^0$. Заметим, что значение функции $\widetilde{D^j\psi}$ в точке $x + i\eta$ равно значению функции $\widetilde{D^j\psi \exp(-\eta, \xi)}$ в точке x. Поэтому третий сомножитель не превосходит величины

$$c \sum_{|j| \leqslant -r} \|\widetilde{D^j\psi \exp(-\eta, \xi)}\|^0 = c' \sum_{|j| \leqslant -r} \|D^j\psi \exp(-\eta, \xi)\|^0 \leqslant$$
$$\leqslant c' \sup_{|\xi - \xi_0| \leqslant \varepsilon} \exp(-\eta, \xi) \sum_{|j| \leqslant -r} \|D^j\psi\|^0 \leqslant$$
$$\leqslant c' \exp(\varepsilon|\eta|) \exp(-\eta, \xi_0) \|\psi\|^{-r}.$$

Возвращаясь к (9), получаем неравенство

$$\left|(F^{-1}\varphi, \psi)\right| \leqslant c \frac{\mathcal{J}_{\alpha+1}(\eta)}{\exp(\eta, \xi_0)} \|\varphi\|_q^{\mathcal{J}^*_\alpha} \|\psi\|^{-r}. \qquad (10.3)$$

Из этого неравенства видно, что $F^{-1}\varphi$ есть непрерывный функционал над $\mathscr{D}(R^n)$. Пусть $\xi_0 \in \complement\,\Omega_{l_{\alpha+1}}$. В таком случае, как мы установили в 3° § 1 гл. III, можно найти последовательность точек η такую, что соответствующие значения второго сомножителя правой части стремятся к нулю. Так как остальные члены неравенства (10) не зависят от η, мы заключаем, что $(F^{-1}\varphi, \psi) = 0$ для любой функции ψ с носителем, содержащимся в ε-окрестности точки ξ_0. Отсюда следует, что носитель функционала $F^{-1}\varphi$ принадлежит $\Omega_{l_{\alpha+1}}$.

Пусть теперь $\xi_0 \in \Omega_{l_{\alpha+1}}$. В этом случае можно найти точку $\eta = \eta(\xi_0)$, в которой значение второго сомножителя правой части (10) равно $l_{\alpha+1}^{-1}(\xi_0)$. Согласно неравенству II′ эта величина не превосходит нижней грани $C \inf l_{\alpha+2}^{-1}(\xi)$, взятой по ε-окрестности ξ_0. Отсюда $l_{\alpha+1}^{-1}\ (\xi_0)\|\psi\|^{-r} \leqslant c\|\psi\|^{-r}_{l^{-1}_{\alpha+2}}$. Учитывая это неравенство в (10), мы получаем

$$\left|(F^{-1}\varphi, \psi)\right| \leqslant c\|\varphi\|_q^{\mathscr{T}^*\alpha}\|\psi\|^{-r}_{l^{-1}_{\alpha+2}}. \tag{11.3}$$

Тем самым мы установили, что функционал $F^{-1}\varphi$ определен и непрерывен на подпространстве в $\mathscr{D}(R^n)$, натянутом на множество функций, носитель каждой из которых содержится в ε-окрестности некоторой точки. Это подпространство, очевидно, плотно в $\mathscr{D}(R^n)$ и, следовательно, в $\mathscr{E}^{-r}_{l_{\alpha+2}}$. Поэтому функционал $F^{-1}\varphi$ продолжается по непрерывности на все пространство $\mathscr{E}^{-r}_{l_{\alpha+2}}$. Пространство непрерывных над $\mathscr{E}^{-r}_{l_{\alpha+2}}$ функционалов мы отождествили с $S^r_{l_{\alpha+2}}$, следовательно, $F^{-1}\varphi \in S^r_{l_{\alpha+2}}$, а из (11)

$$\|F^{-1}\varphi\|^r_{l_{\alpha+2}} \leqslant c\|\varphi\|_q^{\mathscr{T}^*\alpha}.$$

Таким образом, F^{-1} есть искомый оператор.

Отметим, что для любой функции $\varphi \in S_q^{\mathscr{T}^*\alpha}$ и вектора $j \in Z^n_+$ имеет место равенство

$$F^{-1}[z^j\varphi] = (iD)^j F^{-1}[\varphi]. \tag{12.3}$$

Оно явля ся следствием следующей выкладки:

$$(2\pi)^n(F^{-1}[z^j\varphi], \psi) = (z^j\varphi, \tilde{\psi}) = (\varphi, x^j\tilde{\psi}) =$$
$$= (\varphi, \widetilde{(iD)^j\psi}) = (2\pi)^n((iD)^j F^{-1}\varphi, \psi).$$

Рассмотрим теперь случай $q > \nu$. Пусть $\varphi \in S_q^{\mathscr{T}^*\alpha}$. Заметим, что все функции $z^j\varphi$ с $|j| \leqslant r$ принадлежат $S_\nu^{\mathscr{T}^*\alpha}$. Так как для пространства $S_{\nu}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha}}$ искомый оператор F^{-1} построен и удовлетворяет соотношению (12), мы имеем

$$F^{-1}\left[z^{j}\varphi\right]=(iD)^{j}F^{-1}[\varphi]\in S^{0}_{l_{\alpha+2}}$$

для любого j, $|j|\leqslant r$. Отсюда следует, что $F^{-1}\varphi\in S^{r}_{l_{\alpha+2}}$ и соответствие $S_{q}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha}}\ni\varphi\to F^{-1}\varphi\in S^{r}_{l_{\alpha+2}}$ непрерывно, т. е. оператор F^{-1} является искомым для любого $q>\nu$.

Остается показать, что операторы F и F^{-1} взаимно обратны. Покажем сначала, что композиция операторов

$$S^{q}_{l_{\alpha}}\xrightarrow{F}S_{q}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha+1}}\xrightarrow{F^{-1}}S^{q-\nu}_{l_{\alpha+3}} \tag{13.3}$$

есть тождественное отображение. По условию построения оператор F есть преобразование Фурье на подпространстве $\mathcal{D}\left(\Omega_{l_{\alpha}}\right)$ и, следовательно, действует в L_2. Из конструкции оператора F^{-1} видно, что на функции из L_2 он действует как обратное преобразование Фурье. Таким образом, композиция операторов (12) является тождественным оператором на подпространстве $\mathcal{D}\left(\Omega_{l_{\alpha}}\right)$, плотном в $S^{q}_{l_{\alpha}}$. Поэтому эта композиция является тождественным оператором на всем пространстве $S^{q}_{l_{\alpha}}$.

Покажем теперь, что композиция операторов

$$S_{q}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha}}\xrightarrow{F^{-1}}S^{q-\nu}_{l_{\alpha+2}}\xrightarrow{F}S_{q-\nu}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha+3}}$$

также является тождественным оператором. Пусть $h\in\mathcal{D}(R^{n})$ — некоторая функция, равная единице в начале координат. Положим $h_{k}(\xi)=$ $=h\left(\frac{\xi}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots$ Выберем произвольную точку $z_{0}\in R^{n}_{x}\times\Omega_{\mathcal{T}^{*}_{\alpha+3}}$. Последовательность функций $h_{k}(\xi)\exp(-i\bar{z}_{0},\xi)$ принадлежит $\mathcal{D}(R^{n})$ и стремится к $\exp(-i\bar{z}_{0},\xi)$ по топологии пространства $\mathcal{E}^{\nu-q}_{l_{\alpha+2}}$, так как функция $\exp(-i\bar{z}_{0},\xi)\,l^{-1}_{\alpha+2}(\xi)$ равна $O(\exp(-\varepsilon_{\alpha+2}|\xi|))$ при $|\xi|\to\infty$. Отсюда следует, что для любой функции $\varphi\in S_{q}^{\mathcal{T}^{*}_{\alpha}}$ мы можем провести следующие выкладки:

$$\begin{gathered}FF^{-1}\varphi\big|_{z=z_{0}}=\overline{\left(\overline{F^{-1}\varphi},\exp(iz_{0},\xi)\right)}=\overline{\left(\overline{F^{-1}\varphi},\exp(-i\bar{z}_{0},\xi)\right)}=\\=\lim_{k\to\infty}\overline{\left(\overline{F^{-1}\varphi},h_{k}(\xi)\exp(-i\bar{z}_{0},\xi)\right)}=\frac{1}{(2\pi)^{n}}\lim\overline{\left(\varphi,\overline{F[h_{k}\exp(-iz_{0},\xi)]}\right)}=\\=\frac{1}{(2\pi)^{n}}\lim\overline{(\varphi,\overline{\tilde{h}_{k}(z-\bar{z}_{0})})}.\end{gathered} \tag{14.3}$$

Так как каждая функция h_k принадлежит $\mathscr{D}(R^n)$, ее преобразование Фурье есть целая функция, убывающая при $|x|\to\infty$ быстрее любой степени. Отсюда следует, что скалярное произведение, стоящее в (14) справа, можно переписать так:

$$\int \varphi(x)\tilde{h}_k^*(x-z_0)\,dx = \int \varphi(x+z_0)\tilde{h}_k^*(x)\,dx. \qquad (15.3)$$

Поскольку $\tilde{h}_k^*(x)=k^n\tilde{h}^*(kx)$, за вычетом любой окрестности начала координат последовательность функций $\tilde{h}_k^*(x)$ стремится к нулю по норме пространства L_1. Отсюда следует, что правая часть (15) стремится к произведению величины $\varphi(z_0)$ на интеграл от $\tilde{h}^*$ по R_x^n. Из формулы обращения преобразования Фурье следует, что этот интеграл равен $(2\pi)^n h(0)=(2\pi)^n$. Тем самым мы установили, что правая часть (14) равна $\varphi(z_0)$, ч. и т. д. ■

4°. Локальные свойства функций пространств $\mathscr{E}_l^q$.

Предложение 3. *Пусть l — некоторая допустимая функция, а $q\geqslant\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ — целое число. Тогда*

I. *Элементы пространства $\mathscr{E}_l^q$ суть функции, определенные в Ω_l, имеющие непрерывные производные до порядка $q-\nu$, удовлетворяющие неравенствам*

$$|D^j\varphi(\xi)|\leqslant Cl_\varepsilon(\xi)\|\varphi\|_{l^{-1}}^q, \qquad |j|\leqslant q-\nu,$$

где

$$l_\varepsilon(\xi)=\sup_{|\xi'-\xi|\leqslant\varepsilon} l(\xi'),$$

а число $\varepsilon>0$ произвольно.

II. *Пространство S_l^{-q} содержит все функционалы вида*

$$\delta^j(\xi-\xi_0):\ \varphi\to D^j\varphi|_{\xi=\xi_0}, \qquad |j|\leqslant q-\nu, \qquad \xi_0\in\Omega_l,$$

причем

$$\|\delta^j(\xi-\xi_0)\|_l^{-q}\leqslant Cl_\varepsilon(\xi).$$

Доказательство. Установим первое утверждение. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и выберем бесконечно дифференцируемую функцию $h(\xi)$, равную единице в окрестности нуля с носителем, заключенным в шаре $S=\{\xi:|\xi|\leqslant\varepsilon\}$. Пусть ξ_0 — произвольная точка, принадлежащая области Ω_l вместе со своей ε-окрестностью. Рассмотрим следующий оператор:

$$\mathscr{D}(R^n)\ni\varphi(\xi)\to h(\xi)\varphi(\xi+\xi_0)\in\mathscr{D}_S. \qquad (16.3)$$

Он, очевидно, непрерывен при наделении пространства $\mathscr{D}(R^n)$ полунормой $\|\cdot\|_{l^{-1}}^q$, а пространства $\mathscr{D}_S$ — нормой $\|\cdot\|^q$, причем норма этого оператора не превосходит $I_\varepsilon(\xi_0)$. Пополняя пространства в (16) соответственно, по полунорме $\|\cdot\|_{I-1}^{q}$ и по норме $\|\cdot\|^{q}$, мы продолжим этот оператор до непрерывного оператора, действующего из $\mathscr{E}_I^q$ в $\mathscr{D}_\xi^q$ с той же нормой.

Для функций $\psi \in \mathscr{D}_\xi^q$ из равенства Парсеваля

$$\sum_{|j|\leqslant\nu} \|x^j\tilde{\psi}\|_{L_2} = C \sum_{|j|\leqslant\nu} \|D^j\psi\|^0 = C\|\psi\|^\nu.$$

Поскольку $\nu > \frac{n}{2}$, из конечности левой части следует, что функция $\tilde{\psi}(x)$ принадлежит L_1. Применяя к $\tilde{\psi}$ обратное преобразование Фурье, мы приходим к неравенству

$$|\psi(\xi)| \leqslant \|\tilde{\psi}\|_{L_1} \leqslant C \sum_{|j|\leqslant\nu} \|x^j\tilde{\psi}\|_{L_2} = C\|\psi\|^\nu.$$

Комбинируя это неравенство с оценкой для нормы оператора (16), мы получаем окончательно

$$|D^j\varphi(\xi_0)| = |D^j h(\xi)\varphi(\xi+\xi_0)|_{\xi=0}| \leqslant C\|h(\xi)\varphi(\xi+\xi_0)\|^q \leqslant$$
$$\leqslant CI_\varepsilon(\xi_0)\|\varphi\|_{I-1}^{q},$$

где $|j| \leqslant q-\nu$.

Тем самым первое утверждение доказано. Второе утверждение является немедленным следствием первого, поскольку $S_I^{-q} = (\mathscr{E}_I^q)^*$. ■

Замечание. Предположим, что функция I, фигурирующая в условии этого предложения, логарифмически выпукла. Тогда согласно предложению 2 на пространстве S_I^{-q} определен оператор F преобразования Фурье. Вычислим преобразование Фурье от функционала $\delta^j(\xi-\xi_0)$. Мы имеем

$$\widetilde{\delta^j(\xi-\xi_0)} = (\delta^j(\xi-\xi_0), \exp(z, i\xi)) = (\delta^j(\xi-\xi_0), \overline{\exp(\bar{z}, -i\xi)}) =$$
$$= \overline{D_\xi^j \exp(\bar{z}, -i\xi)}\,|_{\xi=\xi_0} = (iz)^j \exp(z, i\xi_0).$$

5°. Последовательности пространств S_I^q и $\mathscr{E}_I^q$.

Предложение 4. *Пусть I и J — две допустимые функции в R^n такие, что $\Omega_I = \Omega_J = R^n$ и $I = o(J)$ при $|\xi| \to \infty$. Тогда для любого целого q вложения*

$$S_J^{q+1} \to S_I^q, \quad \mathscr{E}_I^{q+1} \to \mathscr{E}_J^q \tag{17.3}$$

являются компактными отображениями.

Доказательство. Сначала мы установим компактность вложения $S_J^{q+1} \to S_I^q$ при $q \geqslant 0$. Так как эти пространства банаховы, для этого достаточно показать, что из любой последовательности $\{\varphi_\alpha \in S_J^{q+1}\}$, ограниченной по норме

$$\|\varphi_\alpha\|_J^{q+1} = \sum_{|j| \leqslant q+1} \int |J D^j \varphi_\alpha|^2 d\xi, \tag{18.3}$$

можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_I^q$. В силу предложения 3 § 2 для любого компакта K вложение $\mathscr{E}_K^{q+1} \to \mathscr{E}_K^q$ компактно. Так как норма (18) мажорирует норму $\|\cdot\|_K^{q+1}$, из последовательности $\{\varphi_\alpha\}$ мы можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_K^q$. Выбирая некоторую возрастающую последовательность компактов K, стремящуюся к R^n, мы проделаем эту операцию для каждого из этих компактов. Переходя затем к диагональной последовательности, мы получим подпоследовательность $\{\varphi'_\alpha\}$, сходящуюся по любой из норм $\|\cdot\|_K^q$, где K — компакт.

Для любого компакта K мы можем записать

$$\|\varphi\|_I^q = \sum_{|j| \leqslant q} \int_K |I D^j \varphi|^2 d\xi + \sum_{|j| \leqslant q} \int_{CK} |I D^j \varphi|^2 d\xi. \tag{19.3}$$

Так как I — непрерывная в R^n функция, первое слагаемое правой части не превосходит $c\|\varphi\|_K^q$. Поскольку последовательность $\{\varphi'_\alpha\}$ сходится по полунорме $\|\cdot\|_K^q$, она сходится и по полунорме, определяемой первым слагаемым в (19). Так как функции φ'_α ограничены по норме (18), а $I = o(J)$ при $|\xi| \to \infty$, то второе слагаемое правой части (19) с $\varphi = \varphi'_\alpha$ равномерно стремится к нулю при $K \to R^n$. Отсюда следует, что последовательность $\{\varphi'_\alpha\}$ сходится по норме (19), ч. и т. д.

Отображение $\mathscr{E}_I^{q+1} \to \mathscr{E}_J^q$ при $q \geqslant 0$ также является компактным, поскольку мы можем применить к нему предыдущие рассуждения, заменив в них J на I^{-1}, а I на J^{-1}.

В случае $q < 0$ любое отображение (17) является сопряженным по отношению к отображению того же вида с некоторым $q \geqslant 0$. Последнее является компактным по доказанному, следовательно, исходное отображение также компактно, поскольку все пространства в (17) гильбертовы. ■

Пусть $I = \{I_\alpha, -\infty < \alpha < \infty\}$ — некоторое убывающее семейство л. в. функций. При любом α определены непрерывные отображения

$$S_{I_\alpha}^{-\alpha} \to S_{I_{\alpha+1}}^{-\alpha-1}, \qquad \mathscr{E}_{I_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \to \mathscr{E}_{I_\alpha}^{\alpha}. \tag{20.3}$$

В первом случае это отображение есть вложение; во втором — композиция вложения $\mathscr{E}_{l_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \to \mathscr{E}_{l_{\alpha+1}}^{\alpha}$ с отображением сужения $\mathscr{E}_{l_{\alpha+1}}^{\alpha} \to$ $\to \mathscr{E}_{l_{\alpha}}^{\alpha}$ на подобласти $\Omega_{l_\alpha} \subset \Omega_{l_{\alpha+1}}$. Пространства и отображения, фигурирующие в (20), образуют возрастающее семейство $\{S_{l_\alpha}^{-\alpha}\}$ и убывающее $\{\mathscr{E}_{l_\alpha}^{\alpha}\}$. Положим

$$S_l = \varprojlim_{\alpha \to -\infty} S_{l_\alpha}^{-\alpha}, \qquad \mathscr{E}_l = \varprojlim_{\alpha \to \infty} \mathscr{E}_{l_\alpha}^{\alpha}. \tag{21.3}$$

Установим следующие топологические изоморфизмы:

$$S_l^* \cong \varinjlim \left(S_{l_\alpha}^{-\alpha}\right)^* = \varinjlim \mathscr{E}_{l_\alpha}^{\alpha}, \qquad \mathscr{E}_l^* \cong \varinjlim \left(\mathscr{E}_{l_\alpha}^{\alpha}\right)^* = \varinjlim S_{l_\alpha}^{-\alpha}.$$

Так как они аналогичны между собой, достаточно доказать первый. Все пространства $S_{l_\alpha}^{-\alpha}$ гильбертовы. Поэтому из предложения 4 § 1 следует, что индуктивный предел $\varinjlim \left(S_{l_\alpha}^{-\alpha}\right)^*$ рефлексивен и взаимно сопряжен с пространством $S_l = \varprojlim S_{l_\alpha}^{-\alpha}$, ч. и т. д.

Пространства (21) мы будем применять лишь в случае, когда для любого α $\Omega_{l_\alpha} = R^n$. В этом случае из предложения 3 следует, что каждый элемент пространства $\mathscr{E}_l$ есть бесконечно дифференцируемая в R^n функция, каждая из производных которой равна $O(l_\alpha(\xi))$ при любом α. Очевидно обратное утверждение: всякая бесконечно дифференцируемая в R^n функция, удовлетворяющая этим условиям на бесконечности, принадлежит $\mathscr{E}_l$. Применив предложение 3 к функциям $l = l_\alpha^{-1}$, мы получим аналогичное описание пространства S_l: принадлежащие ему функции φ характеризуются тем, что они бесконечно дифференцируемы в R^n и $D^j\varphi(\xi) = O\left(l_\alpha^{-1}\right)$ при любых j и α.

Отметим также следующий факт: пространства (21) суть $\mathscr{F}$-пространства Шварца. Этот факт вытекает из предложения 5 § 1, поскольку все пространства $S_{l_\alpha}^{-\alpha}$, $\mathscr{E}_{l_\alpha}^{\alpha}$, будучи гильбертовыми, являются $\mathscr{F}$-пространствами, $\mathscr{D}(R^n)$ плотно в них, а все отображения (20) согласно предложению 4 компактны, так как $l_{\alpha+1} = o(l_\alpha)$ в силу неравенства I′.

6°. Пространства S_l^b. Следуя обозначениям 6° § 2, через b мы будем обозначать произвольную неубывающую функцию в R^1, определенную и конечную при $\eta \geqslant 0$, равную единице в нуле. Пусть, далее, l — некоторая допустимая функция в R^n. В пространстве $\bigcap_q S_l^q$ рассмотрим подпространство S_l^b, образованное функциями, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_l^b = \sup_j \frac{1}{b(|j|)} \|D^j\varphi\|_l^0.$$

Очевидно, что пространство, наделенное этой нормой, является полным, т. е. банаховым.

Если F — замыкание некоторой области, то норма $\|\cdot\|^0_{I_F}$ совпадает с нормой $\|\cdot\|^0$, откуда $\|\cdot\|^b_{I_F}=\|\cdot\|^b$. Поэтому пространство $S^b_{I_F}$ как л. т. п. совпадает с пространством $\mathscr{D}^b_F$.

Мы будем всегда предполагать, что функция b удовлетворяет неравенству вида (14.2). В таком случае пространство S^b_I не пусто, так как содержит непустые пространства $\mathscr{D}^b_K$ (см. предложение 8 § 2).

Предложение 5. *Пусть $\{I_\alpha\}$ — убывающее семейство логарифмически выпуклых функций в R^n, а $\{\mathscr{I}_\alpha\}$ — семейство логарифмически двойственных функций. Пусть, далее, $\{b_\alpha\}$ — некоторое возрастающее семейство л. в. функций в R^1, для которого неравенства* I *и* II *выполнены с $\varepsilon_\alpha=1$, причем каждая функция b_α удовлетворяет условиям этого пункта. Через B_α обозначим функцию, логарифмически двойственную b_α (мы полагаем $b_\alpha(\eta)=\infty$ при $\eta<0$), и положим*

$$R_\alpha(z)=\frac{1}{B_\alpha(\ln|z|)},\qquad -\infty<\alpha<\infty.$$

Тогда операции прямого и обратного преобразований Фурье определяют непрерывные операторы

$$F\colon\ S^{b_\alpha}_{I_\alpha}\to S^{\mathscr{I}^*_{\alpha+1}}_{R_{\alpha+\nu}},\qquad F^{-1}\colon\ S^{\mathscr{I}^*_\alpha}_{R_\alpha}\to S^{b_{\alpha+\nu}}_{I_{\alpha+2}}.$$

Установим сначала законность рассмотрения этих пространств. Для этого нужно показать, что каждая функция $R_\alpha(z)$ определена и непрерывна в C^n. Так как по условию каждая функция b_α удовлетворяет неравенству вида (14.2), она растет при $\eta\to\infty$ быстрее любой функции вида $\exp(a\eta)$. Отсюда следует, что функция $B_\alpha(t)$ определена и непрерывна на всей оси. При этом $B_\alpha(t)=1$ при $t<0$, так как $b_\alpha(\eta)=\infty$ при $\eta<0$, $b(0)=1$ и $b(\eta)\geqslant 1$ при $\eta>0$. Поэтому функция $R_\alpha(z)$ определена и непрерывна в C^n, причем $R_\alpha(z)\equiv 1$ в шаре $|z|\leqslant 1$.

Перейдем к доказательству. Так как S^b_I есть подпространство в любом из пространств S^q_I, то для любой функции $\varphi\in S^b_I$ всякая ее производная $D^j\varphi$ также принадлежит всем S^q_I. Поэтому из непрерывности оператора F в предложении 2 мы получаем неравенство

$$\frac{|z^j\tilde\varphi(z)|}{\mathscr{I}_{\alpha+1}(-y)}\leqslant\|z^j\tilde\varphi\|_0^{\mathscr{I}^*_{\alpha+1}}\leqslant C\|\varphi\|^{|j|}_{I_\alpha}\leqslant Cb_\alpha(|j|)\|\varphi\|^{b_\alpha}_{I_\alpha}.$$

Разделим обе части неравенства на $b_\alpha(|j|)$ и перейдем к верхней грани по j:

$$\sup_j \frac{|z^j|}{b_\alpha(|j|)} \frac{|\tilde{\varphi}(z)|}{\mathcal{J}_{\alpha+1}(-y)} \leqslant C \|\varphi\|_{I_\alpha}^{b_\alpha}. \tag{22.3}$$

Оценим снизу верхнюю грань, стоящую слева. Из неравенства $\sqrt{n} \max\limits_i |z_i| \geqslant |z|$ вытекает, что

$$n^{k/2} \max_{|j| \leqslant k} |z^j| \geqslant |z|^k, \qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$\sup_j \frac{|z^j|}{b_\alpha(|j|)} \geqslant \sup_{k \geqslant 0} \frac{|z|^k}{n^{k/2} b_\alpha(k)} \geqslant \sup_{k \geqslant 0} \frac{|z|^k}{\exp\left(\frac{\ln n}{2} k\right) b_\alpha(k)} \geqslant$$

$$\geqslant c \sup_{k \geqslant 0} \frac{|z|^k}{b_{\alpha+\nu-1}(k)}, \tag{23.3}$$

поскольку из неравенства II с $\varepsilon_\alpha \equiv 1$, примененного $\nu - 1$ раз,

$$\exp\left(\frac{\ln n}{2} k\right) b_\alpha(k) \leqslant \exp\left(\left[\frac{n}{2}\right] k\right) b_\alpha(k) \leqslant C b_{\alpha+\nu-1}(k).$$

Заметим, что для любых z и η, где $k \leqslant \eta \leqslant k+1$,

$$\max\left(|z|^{k+1}, |z|^k\right) \geqslant |z|^\eta, \quad b_{\alpha+\nu-1}(k) \leqslant b_{\alpha+\nu-1}(k+1) \leqslant C b_{\alpha+\nu}(\eta).$$

Отсюда

$$c \max\left\{\frac{|z|^k}{b_{\alpha+\nu-1}(k)}, \frac{|z|^{k+1}}{b_{\alpha+\nu-1}(k+1)}\right\} \geqslant \frac{|z|^\eta}{b_{\alpha+\nu}(\eta)}.$$

Поэтому правая часть (23) не меньше, чем

$$c \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{|z|^\eta}{b_{\alpha+\nu}(\eta)} = c \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\exp(\ln|z|\eta)}{b_{\alpha+\nu}(\eta)} = B_{\alpha+\nu}(\ln|z|) = \frac{1}{R_{\alpha+\nu}(z)}.$$

Учитывая это в (22), получаем

$$\|\tilde{\varphi}\|_{R_{\alpha+\nu}}^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}} \leqslant C \|\varphi\|_{I_\alpha}^{b_\alpha}.$$

Тем самым мы показали, что преобразование Фурье действует непрерывно из $S_{I_\alpha}^{b_\alpha}$ в $S_{R_{\alpha+\nu}}^{\mathcal{J}^*_{\alpha+1}}$, т. е. оператор F построен.

Построим теперь оператор F^{-1}. Так как пространство $S_{R_\alpha}^{\mathcal{J}^*_\alpha}$ принадлежит $S_q^{\mathcal{J}^*_\alpha}$ при любом q, мы можем к любой функции вида $z^j\psi$, где $\psi \in S_{R_\alpha}^{\mathcal{J}^*_\alpha}$, применить оператор F^{-1}, построенный в предложении 2.

Учитывая непрерывность этого оператора, мы приходим к неравенству

$$\| D^j \tilde{\psi} \|^0_{I_{\alpha+2}} \leqslant C \| z^j \psi \|^{\mathcal{G}^*_\alpha}_{\nu} \leqslant C \sup R_\alpha(z) (|z|+1)^\nu |z|^{|j|} \| \psi \|^{\mathcal{G}^*_\alpha}_{R_\alpha}, \quad (24.3)$$

где $\tilde{\psi} = F^{-1}(\psi)$. Оценим сверху верхнюю грань, стоящую справа. Учитывая, что $R_\alpha(z) \equiv 1$ при $|z| \leqslant 1$, мы имеем

$$\sup R_\alpha(z)(|z|+1)^\nu |z|^{|j|} = \sup_{|z| \geqslant 1} R_\alpha(z)(|z|+1)^\nu |z|^{|j|} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup R_\alpha(z) |z|^{\nu+|j|} = C \sup \frac{\exp(\ln|z|(\nu+|j|))}{B_\alpha(\ln|z|)} =$$

$$= C b_\alpha(\nu+|j|) \leqslant C' b_{\alpha+\nu}(|j|).$$

Подставляя эту оценку в (24), приходим к неравенству

$$\| \tilde{\psi} \|^{b_{\alpha+\nu}}_{I_{\alpha+2}} \leqslant C \| \psi \|^{\mathcal{G}^*_\alpha}_{R_\alpha},$$

что влечет непрерывность оператора F^1, действующего из $S^{\mathcal{G}^*_\alpha}_{R_\alpha}$ в $S^{b_{\alpha+\nu}}_{I_{\alpha+2}}$. ■

Замечание. Отметим, что в условиях доказаниого предложения дифференциальный оператор D^j определяет непрерывное отображение D^j: $S^{b_\alpha}_{I_\alpha} \to S^{b_{\alpha+|j|}}_{I_\alpha}$. Действительно, используя неравенство II с $\varepsilon_\alpha = 1 \, |j|$ раз, мы получаем

$$\| D^{i+j} \varphi \|^0_{I_\alpha} \leqslant b_\alpha(|i|+|j|) \| \varphi \|^{b_\alpha}_{I_\alpha} \leqslant C b_{\alpha+|j|}(|i|) \| \varphi \|^{b_\alpha}_{I_\alpha}$$

для любой функции $\varphi \in S^{b_\alpha}_{I_\alpha}$. Отсюда

$$\| D^j \varphi \|^{b_{\alpha+|j|}}_{I_\alpha} \leqslant C \| \varphi \|^{b_\alpha}_{I_\alpha},$$

ч. и т. д.

7°. Связь с семействами $\mathcal{K}_\mathcal{M}$.

Предложение 6.

Пусть $\{I_\alpha\}$, $\{\mathcal{G}_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$ и $\{R_\alpha\}$ — последовательности функций, удовлетворяющие условиям предложения 5. В таком случае любая из последовательностей $\{S^{\mathcal{G}_\alpha}_{-\alpha}\}$, $\{S^{\mathcal{G}_\alpha}_{R_\alpha}\}$ является полным семейством $\mathcal{K}_\mathcal{M}$, отвечающим семейству мажорант $\mathcal{M}$ типа $\mathcal{G}$.

Доказательство. Согласно предложению 1 функции $\mathcal{G}_\alpha$ образуют возрастающее семейство л. в. функций. Отсюда следует, что эти функции удовлетворяют условиям а) и б) § 1 гл. III, а также неравенствам

$$\mathcal{G}_\alpha(y) \exp(\varepsilon_\alpha |y|) \leqslant C_\alpha \mathcal{G}_{\alpha+1}(y) \quad (25.3)$$

с некоторыми положительными ε_α и C_α. Функции $\mathscr{R}_\alpha(z)=(|z|+1)^\alpha$, $-\infty<\alpha<\infty$, образуют полное семейство мажорант в C^n в смысле 3° § 5 гл. IV. Поэтому последовательность функций

$$\mathscr{M}=\{M_\alpha(z)=\mathscr{R}_\alpha(z)\,\mathscr{I}_\alpha(y), \qquad -\infty<\alpha<\infty\} \tag{26.3}$$

также является полным семейством мажорант в C^n. Очевидно, что соответствующее полное семейство пространств $\mathscr{H}_\mathscr{M}$ совпадает с последовательностью $\{S^{\mathscr{I}_\alpha}_{-\alpha}\}$.

Чтобы установить, что $\mathscr{M}$ — семейство типа $\mathscr{I}$, нам остается построить функции e_α. По определению при каждом α $e_\alpha(z)$ есть целая функция, не равная тождественно нулю, неотрицательная и квадратично суммируемая на R^n_x, удовлетворяющая неравенству

$$|e_\alpha(z)|\leqslant r_\alpha(z)\,i_\alpha(y), \tag{27.3}$$

где функции r_α и i_α таковы, что

$$\mathscr{I}_\alpha(y)\,i_\alpha(y)\leqslant c_\alpha\mathscr{I}_{\alpha+1}(y) \tag{28.3}$$

и

$$r_\alpha(\pm(z-\lambda))\,\mathscr{R}_\alpha(\lambda)\leqslant c_\alpha\mathscr{R}_{\alpha+1}(z), \qquad z,\ \lambda\in C^n. \tag{29.3}$$

Пусть h — некоторая бесконечно дифференцируемая функция в R^n с носителем в шаре $|\xi|<\frac{\varepsilon_\alpha}{2}$ такая, что $\int h(\xi)\,d\xi=1$. Из предложения 2 следует, что ее преобразование Фурье есть целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\tilde{h}(z)|\leqslant C(|z|+1)^{-q}\exp\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{2}|y|\right), \qquad q=1,\ 2,\ \ldots \tag{30.3}$$

Мы имеем $\tilde{h}(0)=\int h(\xi)\,d\xi=1$, следовательно, эта функция не есть тождественный нуль. Положим $e(z)=\tilde{h}(z)\,\tilde{h}^*(z)$. Из неравенства (30) вытекает неравенство (27), в котором $i_\alpha(y)=\exp(\varepsilon_\alpha|y|)$, а $r_\alpha(z)=O(|z|^{-q})$ при $|z|\to\infty$ для любого q. В таком случае неравенство (28) вытекает из (25).

Остается установить (29). Из очевидного неравенства

$$(|\lambda|+1)(|z-\lambda|+1)\geqslant|z|+1$$

вытекает, что

$$\frac{1}{|z-\lambda|+1}\leqslant\frac{|\lambda|+1}{|z|+1}$$

для любых z и λ. Отсюда для любого целого α

$$r_\alpha(\pm(z-\lambda))\leqslant\frac{1}{(|z-\lambda|+1)^{|\alpha|}}\leqslant\left(\frac{|\lambda|+1}{|z|+1}\right)^{-\alpha}\leqslant\frac{\mathscr{R}_{\alpha+1}(z)}{\mathscr{R}_\alpha(\lambda)},$$

ч. и т. д.

Перейдем к последовательности пространств $S_{R_\alpha}^{\mathcal{T}_\alpha}$. Эта последовательность есть полное семейство $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, где $\mathcal{M}$ есть семейство мажорант вида (26), а $\mathcal{R}_\alpha(z) = R_\alpha(z)$. Покажем, что функции $R_\alpha(z)$ образуют полное семейство мажорант (отсюда будет следовать, что функции (26) также образуют полное семейство мажорант). Так как функции b_α удовлетворяют неравенству II с $\varepsilon_\alpha = 1$, то в силу предложения 1 функции B_α удовлетворяют неравенству I с $\varepsilon_\alpha = 1$. Из него вытекает оценка

$$(|z|+1)R_\alpha(z) = |z|R_\alpha(z) + R_\alpha(z) \leqslant$$
$$\leqslant CR_{\alpha+1}(z) + R_\alpha(z) \leqslant C'R_{\alpha+1}(z).$$

Тем самым условие а) § 1 гл. III проверено. Условие б) вытекает из следующего более сильного неравенства:

$$R_\alpha(z-\lambda)\,R_\alpha(\lambda) \leqslant CR_{\alpha+1}(z), \tag{31.3}$$

которое мы сейчас докажем.

По определению

$$\frac{1}{R_\alpha(z)} = B_\alpha(\ln|z|) = \sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\exp(\ln|z|\,\eta)}{b_\alpha(\eta)} = \sup_{\eta\geqslant 0}\frac{|z|^\eta}{b_\alpha(\eta)},$$

следовательно, неравенство (31) мы можем переписать так:

$$\sup\frac{|\lambda|^\eta}{b_\alpha(\eta)}\cdot\sup\frac{|z-\lambda|^\eta}{b_\alpha(\eta)} \geqslant C\,\sup\frac{|z|^\eta}{b_{\alpha+1}(\eta)}. \tag{32.3}$$

Для любых точек z, $\lambda \in C^n$, по крайней мере, одна из величин $|z-\lambda|$ или $|\lambda|$ не меньше, чем $\frac{1}{2}|z|$. Пусть, например, $|\lambda| \geqslant \frac{1}{2}|z|$. В таком случае первый сомножитель левой части (32) не меньше, чем

$$\sup\frac{|z|^\eta}{2^\eta b_\alpha(\eta)}. \tag{33.3}$$

Так как функции b_α удовлетворяют условию I с $\varepsilon_\alpha = 1$, то

$$2^\eta b_\alpha(\eta) \leqslant \exp(\eta)\,b_\alpha(\eta) \leqslant Cb_{\alpha+1}(\eta),$$

следовательно, величина (33) не меньше правой части (32). Второй сомножитель левой части (32) не меньше значения функции $\frac{|z-\lambda|^\eta}{b_\alpha(\eta)}$ при $\eta = 0$, т. е. не меньше единицы. Тем самым неравенство (32), а с ним и неравенство (31) доказаны.

Построим теперь функцию e_α. Пусть h — произвольная функция пространства $D_S^{b_\alpha - \nu}$, где S — шар $|\xi| \leqslant \frac{\varepsilon_\alpha}{3}$, удовлетворяющая условию $\int h(\xi)\,d\xi = 1$. Согласно предложению 5 ее преобразование Фурье есть целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\tilde{h}(z)| \leqslant CR_\alpha(z)\exp\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{2}|y|\right).$$

Целая функция $e = hh^*$ равна единице в начале координат и удовлетворяет неравенству (27) с $r_\alpha = CR_\alpha$, а $i_\alpha = \exp(\varepsilon_\alpha |y|)$. Неравенство (28) следует из (25), а иеравенство (29) — из (31). ■

Замечание. Для любой функции $b(\eta)$, задаииой при $\eta \geqslant 0$, неубывающей и конечной при всех η, можно построить последовательность $\{b_\alpha\}$, удовлетворяющую условиям предложения 5, такую, что

$$b(\eta) \leqslant cb_\alpha(\eta), \qquad -\infty < \alpha < \infty. \tag{34.3}$$

Чтобы построить такую последовательность, мы поступим так. Выберем некоторую неубывающую при $\eta \geqslant 0$ л. в. функцию $b'(\eta)$, удовлетворяющую неравенству вида (14.2) и равную единице в нуле такую, что $b(\eta) \leqslant cb'(\eta)$. Построим далее некоторую строго возрастающую последовательность чисел a_α, $-\infty < \alpha < \infty$, не меньших едииицы, и положим $b_\alpha(\eta) = b'(a_\alpha \eta)$. Неравенства (34), очевидио, выполнены.

Проверим, что последовательность функций b_α удовлетворяет условиям предложения 5. Из их коиструкции сразу следует, что все они не убывают, равны единице в иуле, логарифмически выпуклы и удовлетворяют неравенству вида (14.2). Функция b', будучи л. в., удовлетворяет неравенству

$$b'(\eta)\, b'(\xi) \leqslant b'(\eta + \xi)$$

для любых точек $\eta > 0$ и $\xi > 0$. Учитывая это неравенство, а также неравенство (14.2) с $b = b'$, мы получаем

$$b_\alpha(\eta) \exp(\eta) \leqslant Cb'(a_\alpha \eta)\, b'((a_{\alpha+1} - a_\alpha)\, \eta) \leqslant Cb'(a_{\alpha+1}\eta) = Cb_{\alpha+1}(\eta)$$

и

$$\sup_{|\eta' - \eta| \leqslant 1} b_\alpha(\eta') = b'(a_\alpha(\eta + 1)) \leqslant b'(a_\alpha) b'(a_\alpha \eta) = Cb_\alpha(\eta) \leqslant C' b_{\alpha+1}(\eta).$$

Следовательно, функции $b_\alpha(\eta)$ образуют возрастающее семейство л. в. функций с $\varepsilon_\alpha = 1$, что и завершает наше рассуждение.

8°. Примеры. Рассмотрим два примера л. в. функций и вычислим логарифмически двойственные функции.

Пример 1. Функция $l(\xi) = \exp\left(A|\xi|^{1/a}\right)$ при любом a, $0 < a \leqslant 1$, и $A > 0$ логарифмически выпукла, поскольку функция $A|\xi|^{1/a}$ выпукла. Найдем логарифмически двойственную функцию

$$\mathcal{J}(y) = \sup_\xi \frac{\exp(y, \xi)}{\exp\left(A|\xi|^{1/a}\right)}. \tag{35.3}$$

Предположим сначала, что $a < 1$. Так как функция l сферически симметрична, мы можем предположить, что $n = 1$, и рассматривать верхнюю грань (35) лишь при $y > 0$ и $\xi > 0$. Чтобы найти эту верхнюю грань, прологарифмируем дробь в (35) и продифференцируем ее по ξ. Приравнивая к нулю производную, мы найдем, что верхняя грань достигается при

$$y-\frac{1}{a}A\xi^{\frac{1}{a}-1}=0,\quad \text{т. е.}\quad \xi=\left(\frac{ay}{A}\right)^{\frac{a}{1-a}},$$

и, следовательно, равна

$$\mathcal{G}(y)=\exp\left(A'|y|^{\frac{a}{1-a}}\right),\qquad \text{где}\qquad A'=\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{a}{1-a}}\left(a^{\frac{a}{1-a}}-a^{\frac{1}{1-a}}\right).$$

В случае $a=1$ непосредственно из формулы (35) находим, что

$$\mathcal{G}(y)=\begin{cases}1, & |y|\leqslant A,\\ \infty, & |y|>A.\end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $b(\eta)=B^{\eta}\eta^{\eta\beta}$ при $\eta\geqslant 0$, где β и B положительны, и $b(\eta)=\infty$ при $\eta<0$. Она логарифмически выпукла, поскольку функция $\ln b(\eta)=\eta(\ln B+\beta\ln\eta)$ выпукла при $\eta\geqslant 0$. Вычислим логарифмически двойственную функцию

$$B(t)=\sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\exp(\eta t)}{B^{\eta}\eta^{\eta\beta}}.$$

Логарифмируя и дифференцируя по η, находим, что верхняя грань достигается при $t=\ln B+\beta\ln\eta+\beta$ и, следовательно, равна

$$B(t)=\exp[\eta(\ln B+\beta\ln\eta+\beta)-\eta(\ln B+\beta\ln\eta)]=$$
$$=\exp\left(\frac{\beta}{e}\exp\left(\frac{t-\ln B}{\beta}\right)\right)$$

при $t\geqslant 0$ и $B(t)=1$ при $t<0$. Соответствующая функция $R(z)$ (см. предложение 5) равна

$$R(z)=\frac{1}{B(\ln|z|)}=\exp\left(-\frac{\beta}{e}\left(\frac{|z|}{B}\right)^{1/\beta}\right).$$

Заметим, что, поскольку функция $b(\eta)$ л. в. функция, логарифмически двойственная по отношению к $B(t)$ совпадает с $b(\eta)$. Отсюда вытекает необходимое в дальнейшем равенство

$$\sup_{\tau\geqslant 0}\tau^{\eta}\exp\left(-\frac{\beta}{e}\left(\frac{\tau}{B}\right)^{1/\beta}\right)\underset{(t=\ln\tau)}{=}\sup\frac{\exp(t\eta)}{B(t)}=b(\eta)=B^{\eta}\eta^{\eta\beta}.$$

9°. Структура $\mathcal{P}$-модулей в «основных» и «сопряженных» пространствах. Пусть $\mathcal{P}$ — кольцо всех многочленов от n переменных с комплексными коэффициентами. Каждому элементу p этого кольца мы сопоставим оператор в каждом из рассмотренных в §§ 2 и 3 пространствах (вообще говоря, выводящий за пределы этого пространства). Этот оператор определяется по-разному для различных типов пространств. В «основных» пространствах $\mathscr{D}_K^q$, $\mathscr{D}_K$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}^*(\Omega)$, S^q, S_l^b действие p есть действие дифференциального оператора $p(iD)$ с постоянными коэффициентами, где

$$iD = \left(i\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right).$$

В пространствах $S_q^{\mathscr{T}}$, $S_R^{\mathscr{T}}$, возникающих после применения преобразования Фурье к «основным» пространствам, действие p есть умножение на многочлен $p(z)$. Заметим, что определенное таким образом действие элемента $p \in \mathscr{P}$ перестановочно с преобразованием Фурье. В самом деле, оператор $p(iD)$ после преобразования Фурье переходит в оператор $p(z)$.

Для каждого многочлена $p \in \mathscr{P}$ через p^* обозначим многочлен, полученный из p заменой его коэффициентов на комплексно сопряженные числа. Заметим, что это определение согласуется с определением операции $*$, введенной в 3°. Действие оператора p в «сопряженных» пространствах $\mathscr{E}_K^q$, $\mathscr{E}_K$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}^*(\Omega)$, $\mathscr{E}_l^q$ мы определим как оператор, сопряженный к оператору p^*, действующему в соответствующих «основных» пространствах, т. е. как оператор, действующий по формуле

$$(pf, \varphi) = (f, p^*\varphi).$$

Отметим, что это определение согласовано с отображением $\mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{D}^*(\Omega)$, которое мы определили с помощью формулы

$$f \to (f, \varphi) = \int \bar{f}\varphi\, d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

т. е. действие оператора $p(iD)$ на функцию $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ совпадает с действием p на функционал $f \in \mathscr{D}^*(\Omega)$, отвечающий этой функции. Это совпадение вытекает из выкладки

$$(pf, \varphi) = \int \overline{p(iD)f}\varphi\, d\xi = \int \bar{f}\,\overline{p(-iD)}\,\varphi\, d\xi = \\ = \int \bar{f} p^*(iD)\varphi\, d\xi = (f, p^*\varphi).$$

Отметим, что действие оператора p в пространствах $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}_K$, $\mathscr{E}_K$ и их сопряженных не выводит за их пределы и непрерывно. Тем самым мы превратили эти пространства в топологические $\mathscr{P}$-модули.

Пусть Φ — некоторое функциональное пространство из числа рассмотренных в §§ 2 и 3, а k — натуральное число. Через Φ^k мы будем обозначать прямую сумму экземпляров этого пространства, а элементы Φ^k интерпретировать как столбцы высоты k, образованные функциями из Φ. В соответствии с определением § 3 гл. I $\mathscr{P}$-матрицей размера $t \times s$ мы будем называть любую прямоугольную матрицу с t строками и s столбцами, образованную элементами кольца $\mathscr{P}$. В случае, если пространство Φ есть $\mathscr{P}$-модуль, каждой такой $\mathscr{P}$-матрице мы можем поставить в соответствие оператор p: $\Phi^s \to \Phi^t$, действие которого совершается по обычному правилу умножения столбца на матрицу, причем элементы матрицы p и элемента столбца $\varphi \in \Phi^s$ «перемножаются» по описанному выше правилу.

Для каждой $\mathscr{P}$-матрицы p через p^* обозначим матрицу, полученную из транспонированной матрицы p' заменой всех ее элементов $p_{i,j}$ на элементы $p^*_{i,j}$. Если p: $[\Phi^*]^s \to [\Phi^*]^t$ — оператор, отвечающий матрице p, действующий в некоторых «сопряженных» пространствах, то сопряженный оператор имеет вид p^*: $\Phi^t \to \Phi^s$.

Глава VI

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В § 4 мы получим экспоненциальное представление решений однородной системы уравнений общего вида, о котором говорилось во введении. Это представление лежит в основе большей части результатов этой и следующих глав. В § 5 мы применим экспоненциальное представление к изучению гипоэллиптических и частично гипоэллиптических операторов. В § 6 для частично гипоэллиптических операторов будет установлена теорема единственности решений обобщенной задачи Коши.

§ 4. Экспоненциальное представление решений однородных систем уравнений

Кольцо $\mathscr{P}$ мы интерпретируем сейчас как кольцо всех многочленов от вектора iD, образованного n дифференциальными операторами $i\frac{\partial}{\partial\xi_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial\xi_n}$, $i=\sqrt{-1}$, действующими в евклидовом пространстве R^n. Зафиксируем произвольную $\mathscr{P}$-матрицу p; пусть ее размер равен $t \times s$. Рассмотрим соответствующую систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$p(iD)u = 0\ ^{*)}, \tag{1.4}$$

состоящую из t уравнений относительно неизвестной вектор-функции u с s компонентами. В соответствии с записью (1) мы интерпретируем u как столбец высоты s.

Пусть Φ — одно из пространств, введенных в §§ 2 и 3, состоящее из обычных или обобщенных функций, определенных на некотором замкнутом множестве или в области пространства R^n. Предположим, что это пространство является $\mathscr{P}$-модулем. В таком случае матрица $p(iD)$ определяет $\mathscr{P}$-отображение p: $\Phi^s \to \Phi^t$. Ядро этого отображения, наделенное топологией, индуцированной из Φ^s, мы обозначим через Φ_p.

---

*) Мы записываем произвольный оператор с постоянными коэффициентами через $p(iD)$, а не через $p(D)$ лишь из-за удобств, связанных с применением преобразования Фурье.

Если пространство Φ не является $\mathscr{P}$-модулем, но существует более широкое пространство Ψ такое, что оператор $p(iD)$ действует из Φ^s в Ψ^t, то мы скажем, что функция $u \in \Phi^s$ является решением системы (1) в Ψ, если она принадлежит ядру этого оператора, которое также будем обозначать через Φ_p.

1°. Представление гладких и обобщенных решений конечного порядка.

Теорема 1. *Пусть* $\{N^\lambda, d^\lambda(z, D), \lambda = 0, \ldots, l\}$ — *набор многообразий и нормальных нетеровских операторов, ассоциированный с матрицей p'. Пусть, далее,* $\{l_\alpha, -\infty < \alpha < \infty\}$ — *некоторое убывающее семейство логарифмически выпуклых функций, а* $\{\mathscr{J}_\alpha\}$ — *семейство логарифмически двойственных функций. Тогда при любом целом α всякая функция* $u \in \left[\mathscr{E}^\alpha_{l_\alpha}\right]^s$, *являющаяся решением системы* (1) *в* $\mathscr{D}^*\left(\Omega_{l_\alpha}\right)$, *может быть записана в виде*

$$\overline{(u, \varphi)} = \sum_{\lambda=0}^{l} \int_{N^\lambda} d^\lambda(z, D)\, \tilde{\varphi}^*(z)\, \mu^\lambda \tag{2.4}$$

для любой функции $\varphi \in \left[S^{A-\alpha}_{l_{\alpha-A}}\right]^s$. *Здесь* μ^λ — *некоторые комплексные аддитивные меры, сосредоточенные на множествах* $N^\lambda \cap \left(R^n_x \times \Omega_{\mathscr{J}_{\alpha-A}}\right)$, *причем*

$$\|\mu\|_{\alpha-A} = \sum_\lambda \int (|z|+1)^{\alpha-A} \mathscr{J}_{\alpha-A}(y)|\mu^\lambda| \leqslant C\|u\|^\alpha_{l_\alpha}, \quad \mu = (\mu^0, \ldots, \mu^l). \tag{3.4}$$

Обратно, всякий функционал u, заданный формулой (2) *с конечной величиной* $\|\mu\|_\alpha$, *определен и непрерывен на функциях* $\varphi \in \left[S^{B-\alpha}_{l_{\alpha-B}}\right]^s$ (*т. е. принадлежит* $\left[\mathscr{E}^{\alpha-B}_{l_{\alpha-B}}\right]^s$), *и является решением системы* (1) *в* $\mathscr{D}^*\left(\Omega_{l_{\alpha-B}}\right)$, *причем*

$$\|u\|^{\alpha-B}_{l_{\alpha-B}} \leqslant C\|\mu\|_\alpha.$$

Константы A и B зависят лишь от матрицы p и операторов d^λ.

Доказательство. Рассмотрим последовательность пространств $S^{\mathscr{J}_\alpha}_{-\alpha}$, $-\infty < \alpha < \infty$. Согласно предложению 6 § 3 эти пространства образуют полное семейство $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$, где $\mathscr{M}$ — полное семейство мажорант

$$M_\alpha(z) = (|z|+1)^\alpha \mathscr{J}_\alpha(y), \quad \Omega_\alpha = R^n_x \times \Omega_{\mathscr{J}_\alpha}$$

типа $\mathcal{J}$. Как утверждает предложение 2 § 3 при любом целом δ, определен непрерывный оператор $F\colon S_{l_\delta}^{-\delta} \to S_{-\delta}^{\overset{*}{\mathcal{T}}\delta+1}$, совпадающий с преобразованием Фурье на подпространстве $\mathcal{D}(\Omega_{l_\delta})$, плотном в $S_{l_\delta}^{-\delta}$. Отсюда, в частности, следует, что оператор F переводит действие оператора $(iD)^j$ в умножение на z^j. Поэтому действие оператора $p^*(iD)$: $\left[S_{l_\delta}^{-\delta+m}\right]^t \to \left[S_{l_\delta}^{-\delta}\right]^s$, $m = \deg p$, после применения F переходит в действие отображения $p^*(z)$: $\left[S_{-\delta+m}^{\overset{*}{\mathcal{T}}\delta+1}\right]^t \to \left[S_{-\delta}^{\overset{*}{\mathcal{T}}\delta+1}\right]^s$. Заметим, что антилинейная операция $*$, введенная в § 3, при любых α и q осуществляет антиизоморфизм пространств $S_q^{\overset{*}{\mathcal{T}}\alpha}$ и $S_q^{\mathcal{T}\alpha}$ и переводит оператор p^* в p'. Пусть, далее, d — нетеровский оператор, отвечающий матрице p', компонентами которого являются операторы d^λ (см. 2° § 5 гл. IV). Из непрерывности отображения (3.5) гл. IV следует, что оператор d непрерывно действует из $[\mathcal{H}_{\delta+1}]^s$ в $\mathcal{H}_\gamma\{p', d\}$, где $\gamma = \delta + \varkappa + 2$. Из всего сказанного вытекает, что мы можем рассмотреть последовательность непрерывных отображений

$$\left[S_{l_\delta}^{-\delta}\right]^s / p^* \left[S_{l_\delta}^{-\delta+m}\right]^t \xrightarrow{F:} \left[S_{-\delta}^{\overset{*}{\mathcal{T}}\delta+1}\right]^s \Big/ p^* \left[S_{-\delta+m}^{\overset{*}{\mathcal{T}}\delta+1}\right]^t \xrightarrow{*}$$
$$\xrightarrow{*} [\mathcal{H}_{\delta+1}]^s / p' \, [\mathcal{H}_{\delta+1-m}]^t \xrightarrow{d} \mathcal{H}_\gamma\{p', d\}. \qquad (4.4)$$

Следовательно, их композиция есть также непрерывное антилинейное отображение, которые мы обозначим через E.

Пусть u — функционал, заданный формулой (2) с конечной величиной $\|\mu\|_\gamma$. Из конечности этой величины следует, что правая часть (2) есть непрерывный функционал над функциями $d\tilde{\varphi}^* \in \mathcal{H}_\gamma\{p', d\}$. Из непрерывности оператора E вытекает, что u — непрерывный функционал над факторпространством, стоящим в (4) слева, т. е. функционал u непрерывен над $\left[S_{l_\delta}^{-\delta}\right]^s$ и обращается в нуль на подпространстве $p^*\left[S_{l_\delta}^{-\delta+m}\right]^t$. Следовательно, $u \in \left[\mathcal{E}_{l_\delta}^{\delta}\right]^s$, а функционал pu как элемент пространства $\left[\mathcal{E}_{l_\delta}^{\delta-m}\right]^t$ равен нулю. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Докажем первое утверждение. Для этого построим оператор E^{-1}, обратный E. Согласно теореме 2 § 5 и дополнению к этой теореме существует целая константа a, зависящая лишь от p и d, такая, что при любом целом γ определен и непрерывен оператор

$$d^{-1}\colon \mathcal{H}_\gamma\{p', d\} \to [\mathcal{H}_{\gamma+a}]^s / [\mathcal{H}_{\gamma+a}]^s \cap \operatorname{Ker} d, \qquad (5.4)$$

обратный оператору d, а подпространство $[\mathscr{H}_{\gamma+a}]^s \cap \operatorname{Ker} d$ содержится в $p'[\mathscr{H}_{\gamma+2a-m}]^t$. Из последнего утверждения вытекает, что оператор (5) можно продолжить до оператора, действующего в факторпространство $[\mathscr{H}_{\gamma+2a}]^s$ по подпространству $p'[\mathscr{H}_{\gamma+2a-m}]^t$. Далее, согласно предположению 2 § 3 при любом целом β определен непрерывный оператор F^{-1}: $\overset{*}{S}{}^{\mathscr{T}\beta}_{-\beta} \to S_{I_\alpha}^{-\alpha}$, $\alpha = \beta + \nu + 1$, обратный оператору F, рассмотренному выше. При этом в виду соотношения (12.3) оператор F^{-1} переводит операцию умножения на матрицу $p^*(z)$ в действие оператора $p^*(iD)$. Таким образом, мы можем рассмотреть последовательность непрерывных операторов

$$\mathscr{H}_\gamma\{p', d\} \xrightarrow{d^{-1}} [\mathscr{H}_{\gamma+a}]^s/[\mathscr{H}_{\gamma+a}]^s \cap \operatorname{Ker} d \to [\mathscr{H}_{\gamma+2a}]^s/p'[\mathscr{H}_{\gamma+2a-m}]^t \xrightarrow{*}$$
$$\xrightarrow{*} \left[\overset{*}{S}{}^{\mathscr{T}\beta}_{-\beta}\right]^s \Big/ p^* \left[\overset{*}{S}{}^{\mathscr{T}\beta}_{-\beta+m}\right]^t \xrightarrow{F^{-1}} \left[S_{I_\alpha}^{-\alpha}\right]^s \Big/ p^* \left[S_{I_\alpha}^{-\alpha+m}\right]^t, \tag{6.4}$$

где целое число γ произвольно, а $\alpha = \beta + \nu + 1 = \gamma + 2a + \nu + 1$. Их композицию обозначим через E^{-1}.

По условию функционал u принадлежит $\left[\mathscr{E}_{I_\alpha}^{\alpha}\right]^s$, т. е. непрерывен над пространством $\left[S_{I_\alpha}^{-\alpha}\right]^s$. То, что u есть решение (1) в $\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})$, означает, что функционал pu, определенный и непрерывный над пространством $\left[S_{I_\alpha}^{-\alpha+m}\right]^t$, равен нулю на подпространстве $[\mathscr{D}(\Omega_{I_\alpha})]^t$. Так как это подпространство плотно в $\left[S_{I_\alpha}^{-\alpha+m}\right]^t$, отсюда следует, что $pu = 0$, т. е. функционал u обращается в нуль на подпространстве $p^*\left[S_{I_\alpha}^{-\alpha+m}\right]^t$. Поэтому мы можем рассматривать u как непрерывный функционал над факторпространством, стоящим в (6) справа. Из непрерывности антилинейного отображения E^{-1} следует, что мы можем построить непрерывный линейный функционал v над $\mathscr{H}_\gamma\{p', d\}$, действующий по формуле $(v, \psi) = \overline{(u, E^{-1}\psi)}$. Предположим теперь, что числа γ в (4) и (6) совпадают. Тогда композиция $E^{-1}E$ есть тождественный оператор, следовательно, для любой функции $\varphi \in \left[S_{I_\delta}^{-\delta}\right]^s$ мы имеем

$$\overline{(u, \varphi)} = \overline{(u, E^{-1}E\varphi)} = (v, E\varphi) = (v, d\tilde{\varphi}^*). \tag{7.4}$$

Представим функционал v в виде интеграла с некоторой мерой. Для этого вспомним, что норма в пространстве $\mathscr{H}_\gamma\{p', d\}$ выглядит следующим образом:

$$\|f\|_\gamma = \max_\lambda \sup_{N^\lambda \cap \Omega_\gamma} \frac{|f^\lambda(z)|}{M_\gamma(z)}.$$

Пусть C^λ, $\lambda=0, \ldots, l$, — пространство непрерывных вектор-функций, определенных на множестве $N^\lambda \cap \Omega_\gamma$, число компонент которых равно числу элементов в столбце d^λ, для которых конечна норма $\|F\| = \sup\{|F(z)|,\ z \in N^\lambda \cap \Omega_\gamma\}$. Отображение

$$\mathscr{H}_\gamma\{p',\ d\} \ni f \to \left(\frac{f^0}{M_\gamma},\ \ldots,\ \frac{f^l}{M_\gamma}\right) \in \bigoplus C^\lambda$$

является изометрическим вложением пространства $\mathscr{H}_\gamma\{p',\ d\}$ в прямую сумму $\bigoplus C^\lambda$. Согласно теореме Хана — Банаха функционал v можно распространить с $\mathscr{H}_\gamma\{p',\ d\}$ на все пространство $\bigoplus C^\lambda$ с сохранением нормы. В силу общей теоремы *) функционал v, распространенный на $\bigoplus C^\lambda$, можно записать в виде интеграла

$$(v,\ (F_0,\ \ldots,\ F_l)) = \sum_\lambda \int F_\lambda \mu_\lambda,$$

где μ_λ, $\lambda=0, \ldots, l$, — некоторые комплексные ограниченные аддитивные меры, сосредоточенные на множествах $N^\lambda \cap \Omega_\gamma$, причем $\sum\limits_\lambda \int |\mu_\lambda| = \|v\|$. Положив $\mu^\lambda = \frac{\mu_\lambda}{M_\gamma}$, $\lambda=0, \ldots, l$, мы сможем записать функционал v в следующем виде:

$$(v,\ f) = \sum_\lambda \int f^\lambda(z)\,\mu^\lambda,\quad f=\{f^\lambda\} \in \mathscr{H}_\gamma\{p',\ d\}, \tag{8.4}$$

причем

$$\sum_\lambda \int M_\gamma\,|\mu^\lambda| = \sum_\lambda \int |\mu_\lambda| = \|v\|. \tag{9.4}$$

Комбинируя (7) и (8), мы получаем представление (2). Неравенство (3) вытекает из (9) и непрерывности оператора E^{-1}. ■

2°. Замечание и следствия. Представление (2) приобретает более простой вид в случае, когда пространство $\mathscr{E}^a_{I_a}$ состоит из достаточно гладких функций, а именно, если $a \geqslant A + \nu$, где $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Если это неравенство выполнено, то согласно предложению 3 § 3 пространство $S^{A-a}_{I_{a-A}}$ содержит все функционалы $\delta(\xi-\eta)$ с $\eta \in \Omega_{I_{a-A}}$. Пусть e — единичная матрица порядка s. Подставим в (2) матрицу $\varphi = \delta(\xi-\eta)\,e$, т. е. подставим поочередно все столбцы этой матрицы.

*) См., например, Данфорд и Шварц [1].

В результате мы получим строку

$$\overline{(u,\ \delta(\xi-\eta)\,e)} = \sum_\lambda \int_{N^\lambda} d^\lambda(z,\ D)\exp(z,\ -i\eta)\,\mu^\lambda =$$

$$= \sum_\lambda \int_{N^\lambda} d^\lambda(z,\ -i\eta)\exp(z,\ -i\eta)\,\mu^\lambda. \quad (10.4)$$

Левая часть этого равенства представляет из себя строку, образованную компонентами вектор-функции u. Поскольку вектор u мы интерпретируем как столбец, эта строка транспонирована по отношению к этому столбцу, т. е. равна u'. Поэтому равенство (10) даст нам представление решения u, если матрицы $d^\lambda(z,\ -i\eta)$ в правой части заменить на транспонированные матрицы $\left(d^\lambda(z,\ -i\eta)\right)'$. Таким образом, равенство (10) показывает, что функция u в области $\Omega_{l_{a-A}}$ представляется в виде суммы интегралов с некоторыми мерами μ^λ по многообразию экспоненциальных полиномов $\left(d^\lambda(z,\ -i\eta)\right)' \times \exp(z,\ -i\eta)$, являющихся решениями системы (1). В случае произвольного a представлению (2) также можно придать «экспоненциальный» вид. Для этого мы заметим, что для любого $z \in \Omega_{l_{a-A}}$ функционал

$$\varphi \to \overline{d^\lambda(z,\ D)\,\tilde{\varphi}^*(z)},$$

определенный на $\left[S^{A-a}_{l_{a-A}}\right]^s$, отвечает функции $d^\lambda(z,\ -i\xi)\exp(z,\ -i\xi)$. Поэтому равенство (2) можно переписать так:

$$(u,\ \varphi) = \sum_\lambda \int_{N^\lambda} \left(d^\lambda(z,\ -i\xi)\exp(z,\ -i\xi),\ \varphi\right)\mu^\lambda,$$

где левая и правая части понимаются как функционалы над пространством $\left[S^{A-a}_{l_{a-A}}\right]^s$.

Конкретизируем представление (2) применительно к пространствам обобщенных функций, определенных на выпуклых компактах.

Следствие 1. *Пусть K и $K' \supset\supset K$ — произвольные выпуклые компакты в R^n. Для любого целого a всякая функция $u \in \left[\mathscr{E}^a_{K'}\right]^s$, являющаяся решением* (1) *в $\mathscr{D}_{K'}$, может быть записана в виде* (2) *для любой функции $\varphi \in \left[\mathscr{D}^*_K\right]^s$, причем*

$$\|\mu\|_K^{a-A} = \sum_\lambda \int_{N^\lambda} (|z|+1)^{a-A}\,\mathscr{G}_K(y)\,|\mu^\lambda| \leqslant C\,\|u\|^a_{K'}. \quad (11.4)$$

Обратно, всякий функционал, определенный формулой (2), *с конечной величиной* $\|\mu\|_{K'}^{\alpha}$, *принадлежит пространству* $\left[\mathcal{E}_K^{\alpha-B}\right]^s = \left[\left(S_K^{B-\alpha}\right)^*\right]^s$ *и является решением* (1) *в* $\mathcal{D}_K^*$, *причем*

$$\|u\|_K^{\alpha-B} \leqslant C\|\mu\|_{K'}^{\alpha}.$$

Доказательство. Построим некоторую строго возрастающую последовательность выпуклых компактов K_α, $-\infty < \alpha < \infty$, удовлетворяющую условиям: $K \subset \bigcap K_\alpha$ и $\bigcup K_\alpha \subset K'$. Как мы знаем (см. 2° § 3), функции I_{K_α} образуют убывающее семейство л. в. функций. При любом целом α пространство $S_{I_\alpha}^{\alpha}$ содержится между пространствами $\mathcal{D}_K^{\alpha}$ и $\mathcal{D}_{K'}^{\alpha}$, т. е. определены и непрерывны тождественные вложения $\mathcal{D}_K^{\alpha} \to S_{I_\alpha}^{\alpha} \to \mathcal{D}_{K'}^{\alpha}$. Кроме того, имеют место неравенства $\mathcal{I}_K(y) \leqslant \mathcal{I}_\alpha(y) \leqslant \mathcal{I}_{K'}(y)$. Поэтому следствие 1 вытекает из теоремы 1, примененной к семейству $\{I_{K_\alpha}\}$. ■

Следствие 2. *Пусть* Ω — *область в* R^n, *а* $\varkappa \subset \Omega$ — *выпуклый компакт. Для любого натурального* q *всякое обобщенное решение* (1) *в* Ω *может быть записано в виде* $u = u_0 + v$, *где* u_0 — *обобщенное решение* (1) *в* R^n, *а* $v \in \left[\mathcal{E}_\varkappa^q\right]^s$, *причем*

$$\|v\|_\varkappa^q \leqslant \frac{1}{q}.$$

Доказательство. Пусть $\varkappa'$, K и K' — некоторые выпуклые компакты такие, что $\varkappa \subset\subset \varkappa' \subset\subset K \subset\subset K' \subset \Omega$. Так как u — обобщенная функция в Ω, она принадлежит пространству $\left[\mathcal{E}_{K'}^{\alpha}\right]^s$ с некоторым целым α. Следовательно, к функции u применимо следствие 1, из которого вытекает представление (2) — (11).

Пусть, далее, τ и σ — произвольные положительные числа. Через $C_{\tau,\sigma}$ обозначим область в C^n, в которой имеет место неравенство $|y| < \tau \ln(|z| + 1) + \sigma$. Выберем некоторую непрерывную функцию $h_{\tau,\sigma}$ в C^n, значения которой заключены между нулем и единицей, равную единице в $C_{\tau,\sigma}$ и нулю вне $C_{\tau,\sigma+1}$. Положим

$$\overline{(u_0, \varphi)} = \sum_\lambda \int d^\lambda(z, D)\,\tilde{\varphi}^*(z)\,h_{\tau,\sigma}(z)\,\mu^\lambda,$$

$$\overline{(v, \varphi)} = \sum_\lambda \int d^\lambda(z, D)\,\tilde{\varphi}^*(z)\,[1 - h_{\tau,\sigma}(z)]\,\mu^\lambda.$$

Установим сходимость этих интегралов в $\left[\mathcal{D}_K^*\right]^s$; мы тем самым покажем, что $u = u_0 + v$ в этом пространстве.

Будем считать, что K содержит начало координат. Тогда из равенства (11) следует, что интеграл

$$\int (|z| + 1)^k \exp(R|y|)\,h_{\tau,\sigma}(z)\,|\mu^\lambda|$$

абсолютно сходится при любых λ, τ, σ и R, если k выбрано так, что $k+\tau R\leqslant\alpha-A$. Поэтому из обратного утверждения следствия 1 вытекает, что u_0 — обобщенное решение (1) в любом шаре вида $|\xi|<R$, а следовательно, и во всем пространстве R^n.

Зафиксируем произвольное натуральное q и положим $\rho=\rho(\varkappa', CK)$. Рассмотрим следующее неравенство:

$$\int (|z|+1)^{q+B}\mathcal{G}_{\varkappa'}(y)[1-h_{\tau,\sigma}]|\mu^\lambda|\leqslant$$
$$\leqslant\int\frac{(|z|+1)^{q+B}}{\exp(\rho|y|)}\mathcal{G}_K(y)[1-h_{\tau,\sigma}]|\mu^\lambda|.$$

Выберем число τ так, чтобы $q+B-\rho\tau\leqslant\alpha-A$. В таком случае правая часть сходится в силу неравенства (11). Согласно обратному утверждению следствия 1 из конечности левой части следует, что функционал v принадлежит $[\mathscr{E}^q_\varkappa]^s$ и удовлетворяет неравенству

$$\|v\|^q_\varkappa\leqslant C\|[1-h_{\tau,\sigma}]\mu\|^{q+B}_{\varkappa'}.$$

При $\sigma\to\infty$ функция $h_{\tau,\sigma}$ ограничена и стремится к единице в каждой ограниченной области пространства C^n. Поэтому правая часть этого неравенства стремится к нулю. Отсюда следует, что норма функционала v может быть сделана меньше $1/q$ при соответствующем выборе числа σ. ■

3°. Представление обобщенных решений бесконечного порядка.

Теорема 2. *Пусть $\{I_\alpha\}$ — некоторое убывающее семейство л. в. функций, а $\{\mathcal{G}_\alpha\}$ — семейство логарифмически двойственных функций. Пусть, далее, $\{b_\alpha\}$ и $\{R_\alpha\}$ — последовательности функций, удовлетворяющих условиям предложения* 5 § 3. *Тогда при любом целом α всякий функционал $u\in\left[\left(S^{b_\alpha}_{I_\alpha}\right)^*\right]^s$, являющийся решением системы* (1) *в $\left(S^{b_{\alpha-m}}_{I_\alpha}\right)^*$, может быть записан в виде* (2) *для любых функций $\varphi\in\left[S^{b_{\alpha-A}}_{I_{\alpha-A}}\right]^s$, причем*

$$\|\mu\|_{\alpha-A}=\sum_\lambda\int R_{\alpha-A}(z)\mathcal{G}_{\alpha-A}(y)|\mu^\lambda|\leqslant C\|u\|_\alpha, \qquad (12.4)$$

где $\|u\|_\alpha$ — норма u как элемента $\left[\left(S^{b_\alpha}_{I_\alpha}\right)^*\right]^s$.

Обратно, всякий функционал, заданный формулой (2) *с конечной величиной $\|\mu\|_{\alpha+B}$, непрерывен над пространством $\left[S^{b_\alpha}_{I_\alpha}\right]^s$ и является решением* (1) *в $\left(S^{b_{\alpha-m}}_{I_\alpha}\right)^*$, причем*

$$\|u\|_\alpha\leqslant C\|\mu\|_{\alpha+B}. \qquad (13.4)$$

Константы A и B зависят лишь от оператора p и нетеровских операторов d^{λ}.

Установим сначала корректность выражения «всякий функционал $u \in \left[\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha}\right)^*\right]^s$, являющийся решением (1) в $\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha - m}\right)^*$», т. е. покажем, что оператор $p(iD)$ переводит пространство $\left[\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha}\right)^*\right]^s$ в $\left[\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha - m}\right)^*\right]^t$. Действительно, согласно замечанию 6° § 3 дифференциальный оператор вида D^j действует непрерывно из $S_{l_\alpha}^{b_\alpha}$ в $S_{l_\alpha}^{b_\alpha + |j|}$. Следовательно, определен и непрерывен оператор $p^*(iD)$: $\left[S_{l_\alpha}^{b_\alpha - m}\right]^t \to \left[S_{l_\alpha}^{b_\alpha}\right]^s$. Поэтому сопряженный оператор действует из $\left[\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha}\right)^*\right]^s$ в $\left[\left(S_{l_\alpha}^{b_\alpha - m}\right)^*\right]^t$, ч. и т. д.

Доказательство теоремы 2 использует предложения 5 и 6 § 3 и совершенно аналогично доказательству теоремы 1. ■

4°. Преобразование Фурье аналитических функций. Аналитические функции являются решениями однородной системы Коши — Римана. Так как эта система имеет постоянные коэффициенты, к ней применима теорема 1. Применив ее, мы получим сейчас экспоненциальное представление аналитических функций, учитывающее их рост на бесконечности.

Пусть n — четное число: $n = 2m$. В пространстве R_ξ^n введем структуру m-мерного комплексного пространства, образовав комплексные переменные $\zeta_j = \xi_j + i\xi_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$. Положим $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$ и $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \xi' + i\xi''$. В сопряженном пространстве C_z^n, фигурирующем в представлении (2), положим $z' = (z_1, \ldots, z_m)$, $z'' = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$; $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$.

В пространстве R_ξ^n рассмотрим однородную систему Коши — Римана

$$2i \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_j} = \left(i \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\right) + i \left(i \frac{\partial u}{\partial \xi_{m+j}}\right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{14.4}$$

Следствие 3. *Пусть $\{l_\alpha\}$ — некоторое убывающее семейство л. в. функций, а $\{\mathcal{J}_\alpha\}$ — семейство логарифмически двойственных функций. Для любого α всякая голоморфная в Ω_{l_α} функция u, удовлетворяющая неравенству*

$$|u(\zeta)| \leqslant C l_\alpha(\xi), \tag{15.4}$$

представима в виде

$$u(\zeta) = \int \exp(\zeta, z'')\,\tau, \tag{16.4}$$

где τ — некоторая мера в $C_{z''}^m$, такая, что

$$\|\tau\|_\beta = \int \mathcal{J}_\beta(x'', -y'')\,|\tau| < \infty, \quad \beta = \alpha - \text{const}. \tag{17.4}$$

Обратно, всякая функция u, допускающая представление (16) *с* $\|\tau\|_\alpha < \infty$, *аналитична в* Ω_{l_α} *и удовлетворяет неравенству* (15).

Доказательство. Пусть p — матрица, отвечающая системе (14). Матрица $p'(z)$ имеет вид

$$p'(z) = (z_1 + iz_{m+1}, \ldots, z_m + iz_n).$$

Отсюда следует, что идеал $p'\mathscr{P}^m \subset \mathscr{P}$ состоит из многочленов вида

$$f = (z_1 + iz_{m+1}) f_1 + \ldots + (z_m + iz_n) f_m, \quad f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{P}.$$

Как легко видеть, такие многочлены характеризуются тем, что обращаются в нуль на неприводимом многообразии $N = \{z\colon z' = -iz''\}$, ассоциированном с матрицей p'. Отсюда следует, что идеал $p'\mathscr{P}^m$ простой. Поэтому из предложения 3 § 4 гл. IV следует, что в качестве набора многообразий и нормальных нетеровских операторов, ассоциированного с матрицей p', можно выбрать многообразие N и оператор $d(z, D) \equiv 1$.

Из оценки (15) и неравенства

$$l_\alpha(\xi) \leqslant C \exp(-\varepsilon_{\alpha-1} |\xi|) \, l_{\alpha-1}(\xi)$$

следует, что функция u принадлежит пространству $\mathscr{E}^0_{l_{\alpha-1}}$ и является решением системы (1) в $\mathscr{D}^*(\Omega_{l_{\alpha-1}})$. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что этот функционал допускает представление (2) на всех функциях $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_{l_{\alpha-1}})$, причем величина

$$\int (|z| + 1)^{-A} \mathscr{I}_{\alpha-1-A}(y) \, |\mu| \qquad (\mu = \mu^0) \tag{18.4}$$

конечна.

Так как многообразие N определяется уравнениями

$$x' = y'', \qquad y' = -x'', \tag{19.4}$$

на этом многообразии выполнено неравенство $|z| \leqslant 2|y|$, следовательно, $(|z| + 1)^q = o(\exp(\varepsilon_{\alpha-2-A} |y|))$ при любом q. Поэтому из конечности величины (18) следует конечность интеграла

$$\int (|z| + 1)^{B+\nu} \mathscr{I}_{\alpha-2-A}(y) \, |\mu|, \tag{20.4}$$

где B — константа из теоремы 1. Согласно обратному утверждению этой теоремы функционал, задаваемый формулой (20), непрерывен по норме $\|\cdot\|^{-\nu}_{l_\beta}$, $\beta = \alpha - 2 - A - B$, и, следовательно, может быть продолжен с плотного подпространства $\mathscr{D}(\Omega_{l_\beta})$ на все пространство $S^{-\nu}_{l_\beta}$. Поэтому из замечания 2° следует, что функция u допускает экспоненциальное представление (10).

Учитывая, что $d(z, D) \equiv 1$ и уравнения (19), определяющие многообразие N, это представление мы перепишем в виде

$$u(\zeta) = \int_N \exp(z, -i\xi)\,\mu = \int \exp(\zeta, -z'')\,\mu. \tag{21.4}$$

Через τ' обозначим проекцию меры μ на подпространство $C^m_{z''}$ и положим $\tau(z'') = \tau'(-z'')$. В таком случае из (21) вытекает (16), а из конечности величины (20) следует (17).

Докажем обратное утверждение. Используя неравенство, связывающее функцию I_α и логарифмически двойственную функцию $\mathcal{J}_\alpha$, мы получаем неравенство

$$|\exp(\zeta, z'')| = \exp(\xi, (x'', -y'')) \leqslant I_\alpha(\xi)\,\mathcal{J}_\alpha(x'', -y'').$$

Отсюда ввиду конечности величины $\|\tau\|_\alpha$

$$|u(\zeta)| \leqslant \int |\exp(\zeta, z'')|\,|\tau| \leqslant I_\alpha(\xi) \int \mathcal{J}_\alpha(x'', -y'')\,|\tau| = CI_\alpha(\xi).$$

Следовательно, интеграл (16) абсолютно сходится в области Ω_{I_α} и поэтому представляет голоморфную в этой области функцию $u(\zeta)$. ■

Используя следствие 4, можно получить экспоненциальное представление целых функций порядка не выше первого, индикаторная диаграмма которых принадлежит заданному выпуклому компакту $K \subset C^m$. Для этого построим некоторую строго убывающую последовательность выпуклых компактов K_α, $-\infty < \alpha < \infty$, такую, что $\bigcap K_\alpha = K$. Последовательность функций $I_\alpha = \mathcal{J}_{K_\alpha}$, очевидно, является убывающим семейством л. в. функций, а логарифмически двойственные функции имеют вид $\mathcal{J}_\alpha = I_{K_\alpha}$. Поэтому целые функции порядка не выше первого, индикаторные диаграммы которых принадлежат K, характеризуются тем, что удовлетворяют неравенству (15) при любом α. Согласно следствию 4 такие функции при любом α могут быть представлены в виде (16) с конечной величиной

$$\int I_{K_\alpha}(x'', -y'')\,|\tau|.$$

Последнее условие означает, что τ — ограниченная мера в $C^m_{z''}$, носитель которой содержится в сколь угодно малой окрестности компакта K^*, симметричного K относительно $R^m_{x''}$.

§ 5. Гипоэллиптические операторы

Экспоненциальное представление решений однородных систем, полученное в предыдущем параграфе, удобно для изучения локальных свойств этих решений. Локальные свойства решений системы полностью характеризуются многообразием N, ассоциированным с матрицей p' в смысле 1° § 1 гл. IV. Напомним наиболее простую характеристику многообразия N: оно образовано точками $z \in C^n$, в которых ранг матрицы $p(z)$ меньше s. С другой стороны, N есть объединение многообразий N^λ, образующих набор, ассоциированный с матрицей p'. Следовательно, в представлении (2.4) интегрирование происходит именно по многообразию N. Этим и объясняется влияние многообразия N на свойства решений системы (1.4).

1°. Основные свойства гипоэллиптических операторов. Рассмотрим следующую характеристику многообразия N:

$$m(r) = \inf\{|y|: z = x + iy \in N, |z| = r\}.$$

Предположим, что многообразие N не ограничено. Тогда функция $m(r)$ определена для достаточно больших r. Так как многообразие N алгебраическое, то $m(r) \sim m_0 r^\gamma$ при $r \to \infty$ с некоторыми $m_0 \geqslant 0$ и рациональным γ *). Если вещественная часть $N \cap R_x^n$ многообразия N не ограничена, то $m(r) \equiv 0$ при достаточно больших r, следовательно, $m_0 = 0$. В этом случае положим $\gamma = -\infty$. Если множество $N \cap R_x^n$ ограничено, то $m_0 > 0$, а величина γ, определенная в этом случае однозначно, очевидно, не превосходит единицы. Если $m(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, то число γ положительное.

Из определения числа γ следует, что в случае $\gamma > -\infty$ на многообразии N выполнено неравенство

$$|z| \leqslant B(|y| + 1)^{1/\gamma} \tag{1.5}$$

с некоторым достаточно большим $B > 0$. Это неравенство справедливо также в случае, когда многообразие N ограничено, если положить $\gamma = \infty$, $\frac{1}{\gamma} = 0$, а $B = \max\{|z|, z \in N\}$. Определенное таким образом число γ мы будем называть *показателем гипоэллиптичности*. Если $\gamma > 0$, то многообразие N назовем *гипоэллиптическим*.

Перейдем к системе (1.4). Оператор p и эта система называются *гипоэллиптическими*, если для любой области $\Omega \subset R_\xi^n$ все решения системы (1.4) в пространстве $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Оказывается, что для того, чтобы оператор p был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы $m(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, т. е. чтобы число γ было положительным. Следующая теорема дает более точный результат.

Теорема 1. *Пусть $\gamma > 0$. Тогда для любой области $\Omega \subset R^n$ естественное вложение*

$$\mathscr{E}_p(\Omega) \to \mathscr{D}_p^*(\Omega) \tag{2.5}$$

есть изоморфизм, а для любой ограниченной подобласти $\omega \subset\subset \Omega$

---

*) См. Горин [1].

отображение сужения

$$\mathscr{E}_p(\Omega)\to\mathscr{E}_p(\omega) \tag{3.5}$$

компактно.

Напомним, что в соответствии с обозначениями § 4 $\mathscr{E}_p(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$ суть подпространства в $[\mathscr{E}(\Omega)]^s$ и $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, образованные решениями системы (1.4).

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что область Ω выпукла. Докажем первое утверждение. Непрерывность вложения (2) очевидна. Покажем, что обратное отображение определено и также непрерывно. Опишем топологии в пространствах, фигурирующих в (2). Как мы установили в § 2, множества вида $\{u\colon \|u\|^q_K\leqslant\varepsilon\}$, где $K\subset\Omega$ — компакт, q — натуральное, а ε — положительное числа, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $\mathscr{E}(\Omega)$ и, следовательно, в пространстве $\mathscr{E}_p(\Omega)$. В пространстве $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$ фундаментальную систему окрестностей нуля образуют поляры ограниченных множеств из $[\mathscr{D}(\Omega)]^s$, причем, как вытекает из предложения 6 § 2, достаточно учитывать лишь ограниченные множества вида

$$\mathscr{B}=\left\{\varphi\colon \|\varphi\|^b_{K'}\leqslant\frac{1}{\varepsilon'}\right\},$$

где $K'\subset\Omega$ — компакт, $b=b(\eta)$ — положительная неубывающая функция, а $\varepsilon'>0$ — некоторое число. Таким образом, для того, чтобы установить, что отображение (2) есть изоморфизм, достаточно показать, что для любых K, q и ε можно найти K', b, ε' так, что всякий элемент u пространства $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$, принадлежащий поляре множества $\mathscr{B}$, бесконечно дифференцируем в Ω и $\|u\|^q_K<\varepsilon$.

Зафиксируем некоторое число $\beta>1$, не меньшее чем $\frac{1}{\gamma}$. Далее выберем некоторую строго возрастающую последовательность выпуклых компактов $\{K_\alpha,\ -\infty<\alpha<\infty\}$, стремящуюся к Ω, такую, что $K\subset K_0$, и некоторую строго возрастающую последовательность чисел $\{a_\alpha,\ -\infty<\alpha<\infty\}$, больших числа $a=B\rho^{-\beta}$, где B — константа в (1), а $\rho=\rho(K_2, CK_3)$. Рассмотрим возрастающие последовательности функций

$$b_\alpha(\eta)=a^\eta_\alpha\eta^{\eta\beta},\qquad R_\alpha(z)=\exp\left(-\frac{\beta}{e}\left|\frac{z}{a_\alpha}\right|^{1/\beta}\right),\qquad -\infty<\alpha<\infty.$$

Из вычислений 8° § 3 следует, что эти последовательности удовлетворяют условиям предложения 6 § 3. Поэтому к этим последовательностям и убывающему семейству л. в. функций $I_\alpha=I_{K_\alpha}$ применима теорема 2 § 4. Положим $b=b_{A+3}$ и $K'=K_{A+3}$, где A — константа из этой теоремы.

Пусть u — произвольный элемент пространства $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$, принадлежащий поляре множества $\mathscr{B}$. Понятно, что функционал u определен и непрерывен на пространстве $\left[\mathcal{D}_{K_{A+3}}^{b_{A+3}}\right]^s$, его норма в сопряженном к $\left[\mathcal{D}_{K_{A+3}}^{b_{A+3}}\right]^s$ пространстве не превосходит ε', и он является решением системы (1.4) в $\left(\mathcal{D}_{K_{A+3}}^{b_{A+3-m}}\right)^*$. Поэтому к нему применима теорема 2 § 4, из которой вытекает представление (2.4), справедливое для всех функций $\varphi \in \left[\mathcal{D}_{K_3}^{b_3}\right]^s$, причем из (12.4)

$$\|\mu\|_3 = \sum_{\lambda} \int R_3(z)\, \mathcal{G}_3(y)\, |\mu^\lambda| \leqslant C\|u\| \leqslant C\varepsilon'. \tag{4.5}$$

Используя это представление, оценим функционал u *):

$$|(u, \varphi)| \leqslant \sup_N \frac{|d(z, D)\,\tilde{\varphi}^*(z)|}{(|z|+1)^{q+\varkappa}\,\mathcal{G}_2(y)} \sup_N \frac{(|z|+1)^{q+\varkappa}\,\mathcal{G}_2(y)}{R_3(z)\,\mathcal{G}_3(y)} \|\mu\|_3, \quad \varphi \in \left[\mathcal{D}_{K_3}^{b_3}\right]^s. \tag{5.5}$$

Так как коэффициенты дифференциальных операторов $d(z, D)$ суть многочлены порядка не выше $\varkappa$, первый сомножитель правой части можно оценить сверху величиной

$$C \sup \frac{|\tilde{\varphi}^*(z)|}{(|z|+1)^q\,\mathcal{G}_1(y)} = C\|\tilde{\varphi}\|_{-q}^{K_1}.$$

Из предложения 2 § 3 следует, что правая часть этого неравенства не превосходит $C'\|\varphi\|^{-q}$, если $\operatorname{supp} \varphi \subset K_0$. Оценим второй сомножитель правой части (5). Из выбора числа a следует, что на многообразии N

$$\frac{(|z|+1)^{q+\varkappa}\,\mathcal{G}_2(y)}{R_3(z)\,\mathcal{G}_3(y)} \leqslant (|z|+1)^{q+\varkappa} \exp\left(\left|\frac{z}{a}\right|^{1/\beta}\right) \exp(-\rho|y|) \leqslant C_q.$$

Третий сомножитель правой части (5) не больше, чем $C\varepsilon'$, согласно неравенству (4). Таким образом, мы приходим к неравенству

$$|(u, \varphi)| \leqslant \varepsilon' C_q' \|\varphi\|^{-q}, \qquad \varphi \in \left[\mathcal{D}_{K_0}^{b_3}\right]^s. \tag{6.5}$$

Из этого неравенства вытекает, что функционал u непрерывен по норме $\|\cdot\|^{-q}$ на функциях, принадлежащих пространству $\left[\mathcal{D}_{K_0}^{b_3}\right]^s$. Из предложения 8 § 2 следует, что это пространство плотно в $\left[\mathcal{D}_{K_0}^{-q}\right]^s$. Поэтому функционал u продолжается по непрерывности на все пространство $\left[\mathcal{D}_{K_0}^{-q}\right]^s$ и, следовательно, совпадает с некоторым элементом пространства $\left[\mathcal{E}_{K_0}^{q}\right]^s$. Положив $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{C_q'}$, мы из

*) Символ $d(\ldots)$ означает вектор $(d^0, \ldots, d^l)$.

неравенства (6) найдем, что $\|u\|_K^q \leqslant \varepsilon$. Остается заметить, что поскольку числа q и компакт K были фиксированы произвольным образом, то u принадлежит любому из пространств $[\mathscr{E}_K^q]^s$, т. е. является бесконечно дифференцируемой в Ω функцией. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Установим второе утверждение. Из условия $\omega \subset\subset \Omega$ следует, что последовательность компактов K_α мы можем выбрать так, что $\omega \subset K_0$. Из неравенства (6), справедливого для всех функций u, принадлежащих поляре $\mathscr{B}$, вытекает, что при любом q $\|u\|_{K_0}^q \leqslant C_q''$. Множество функций в $\mathscr{E}_p(\omega)$, удовлетворяющих этим неравенствам, ограничено и, следовательно, относительно компактно, так как в пространстве $\mathscr{E}(\omega)$ всякое ограниченное множество относительно компактно. С другой стороны, поляры множеств вида $\mathscr{B}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $\mathscr{D}_p^*(\Omega)$ и, следовательно, в пространстве $\mathscr{E}_p(\Omega)$. Тем самым мы установили, что отображение (3) компактно.

Докажем теперь теорему для произвольной области Ω. Выберем некоторое локально конечное покрытие $U = \{U_\nu\}$ области Ω, образованное выпуклыми областями. Согласно предложению 9 § 2 топология пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$ совпадает с топологией, индуцированной из пространства ${}^0\mathscr{D}^*(U)$. Следовательно, топология в $\mathscr{D}_p^*(\Omega)$ совпадает с топологией, индуцированной из пространства ${}^0\mathscr{D}_p^*(U)$, являющегося ядром отображения p: $[{}^0\mathscr{D}^*(U)]^s \to [{}^0\mathscr{D}^*(U)]^t$. Аналогичным образом топология в $\mathscr{E}_p(\Omega)$ совпадает с топологией, индуцированной из ${}^0\mathscr{E}_p(U)$. По доказанному для любого ν имеет место изоморфизм $\mathscr{E}_p(U_\nu) \cong \mathscr{D}_p^*(U_\nu)$. Отсюда следует, что изоморфны пространства ${}^0\mathscr{E}_p(U)$ и ${}^0\mathscr{D}_p^*(U)$ и, следовательно, их подпространства $\mathscr{E}_p(\Omega)$ и $\mathscr{D}_p^*(\Omega)$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано для любой области Ω.

Докажем второе утверждение. Пусть N — столь большое число, что $\omega \subset\subset \bigcup\limits_1^N U_\nu$. В каждой области U_ν, $\nu = 1, \ldots, N$, выберем подобласть $V_\nu \subset\subset U_\nu$ таким образом, чтобы $\bigcup\limits_1^N V_\nu = \omega$. Поскольку все области U_ν выпуклы, то по доказанному выше при любом ν отображение сужения $\mathscr{E}_p(U_\nu) \to \mathscr{E}_p(V_\nu)$ компактно. Следовательно, компактным является отображение прямых произведений

$$ {}^0\mathscr{E}_p(U) \cong \prod_\nu \mathscr{E}_p(U_\nu) \to \prod_{\nu=1}^N \mathscr{E}_p(V_\nu) \cong {}^0\mathscr{E}_p(V), \quad V = \{V_\nu\}, $$

поскольку произведение $\prod \mathscr{E}_p(V_\nu)$ конечно. Поэтому компактным является также отображение подпространств $\mathscr{E}_p(\Omega) \to \mathscr{E}_p(\omega)$ этих прямых произведений. ■

Замечание 1. При доказательстве оценки (6) мы использовали лишь тот факт, что u есть непрерывный функционал над пространством $\left[\mathscr{D}^{b_{A+3}}_{K_{A+3}}\right]^s$, являющийся решением (1.4) в $\left(\mathscr{D}^{b_{A+3-m}}_{K_{A+3}}\right)^*$. С другой стороны, из оценки (6), справедливой для любого q, можно сделать вывод, что u есть бесконечно дифференцируемая функция внутри K_0. Пространства $\mathscr{D}^{b_a}_{K_a}$ образуют возрастающее семейство относительно тождественных вложений. Через $\mathscr{D}^{\beta, a}(\Omega)$ обозначим индуктивный предел этого семейства. Пусть u принадлежит пространству $[(\mathscr{D}^{\beta, a}(\Omega))^*]^s$ и является решением (1.4). Тогда u при любом α можно рассматривать как непрерывный функционал над $\left[\mathscr{D}^{b_{\alpha+A+3}}_{K_{\alpha+A+3}}\right]^s$, являющийся решением (1) в $\left(\mathscr{D}^{b_{\alpha+A+3-m}}_{K_{\alpha+A+3}}\right)^*$. Отсюда, как мы заметили, вытекает, что u есть бесконечно дифференцируемая функция внутри K_α. Так как α произвольно, u есть бесконечно дифференцируемая функция во всей области Ω.

Замечание 2. Условие $\gamma > 0$ является необходимым для того, чтобы пространства $\mathscr{E}_p(\Omega)$ и $\mathscr{D}_p(\Omega)$ совпадали по запасу элементов хотя бы для одной непустой области Ω. Мы установим сейчас этот факт, доказав более сильное утверждение: *если существует непустая область Ω такая, что всякая непрерывная функция в R^n, являющаяся обобщенным решением* (1.4), *имеет непрерывные ограниченные производные в области Ω, то $\gamma > 0$.*

Через $C(R^n)$ обозначим пространство всех непрерывных в R^n функций, наделенное топологией компактной сходимости, а через $C_p(R^n)$—подпространство в $[C(R^n)]^s$, образованное функциями, являющимися обобщенными решениями системы (1.4). Так как $[C(R^n)]^s$ — пространство Фреше, а $C_p(R^n)$ — его замкнутое подпространство, то $C_p(R^n)$ также есть пространство Фреше.

Далее рассмотрим пространство $C^1(\Omega)$, образованное непрерывно дифференцируемыми в Ω функциями с конечной нормой

$$\|f\|^1_\Omega = \max_{|i| \leqslant 1} \sup_\Omega |D^i f(\xi)|.$$

Как известно, пространство $C^1(\Omega)$ полное и, следовательно, банахово. По условию всякий элемент пространства $C_p(R^n)$ принадлежит $C^1(\omega)$, т. е. определено отображение линейных пространств $C_p(R^n) \to C^1(\omega)$. Образ этого отображения, очевидно, замкнут, следовательно, по теореме о замкнутом графике это отображение непрерывно. Отсюда следует, что при достаточно больших R и C функции $u \in C_p(R^n)$ удовлетворяют неравенству

$$\|u\|_{\Omega}^{1} \leqslant C \sup_{|\xi| \leqslant R} |u(\xi)|. \qquad (7.5)$$

Заметим, что всякий сдвиг в R^n преобразует пространство $C_p(R^n)$ в себя. Поэтому в оценке (7) мы можем заменить область Ω любым ее сдвигом. В частности, мы можем считать, что область Ω содержит начало координат. В таком случае левая часть (7) не меньше модуля градиента функции u, взятого в нуле.

Пусть $z = x + iy$ — произвольная точка множества N. Как мы отметили выше, такие точки характеризуются тем, что ранг матрицы $p(z)$ меньше s. Следовательно, для выбранной точки z существует отличный от нуля вектор $a \in C^s$, ортогональный всем строкам матрицы $p(z)$. Отсюда вытекает, что вектор-функция $a \exp(z, -i\xi)$, непрерывная в R^n, является решением системы (1.4). Подставив эту функцию в неравенство (7) и учитывая сказанное выше, мы получим

$$|z| \leqslant C \exp(R|y|),$$

где константа C не зависит от z. Из этого неравенства видно, что при $|z| \to \infty$ также $|y| \to \infty$. Отсюда следует доказываемое неравенство $\gamma > 0$. ■

2°. Зависимость гладкости решений гипоэллиптической системы уравнений от скорости их роста на бесконечности. Хорошо известно следующее свойство целых аналитических функций: ограничение роста функции $u(\zeta)$ на бесконечности влечет ограничение роста ее производных $D^j u(\zeta)$ при $|j| \to \infty$. Решения однородных гипоэллиптических систем обладают аналогичным свойством, как показывает следующая

Теорема 2. *Пусть p — гипоэллиптический оператор показателя γ, $I(\xi)$ — сферически симметричная л. в. функция, а $\mathcal{J}(y) = i(|y|)$ — логарифмически двойственная функция. Тогда всякое решение системы* (1.4), *определенное в области Ω_I и удовлетворяющее при любом $\varepsilon > 0$ неравенству*

$$|u(\xi)| \leqslant CI((1+\varepsilon)\xi), \qquad (8.5)$$

удовлетворяет также неравенству

$$|D^j u(\xi)| \leqslant C b^{|j|} \mathcal{B}\left(\frac{|j|}{\gamma}\right) I((1+\varepsilon)\xi)$$

с любым $\varepsilon > 0$. Здесь $\mathcal{B}(\eta)$ — функция, логарифмически двойственная по отношению к $i(\exp t)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем некоторую строго убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_\alpha, -\infty < \alpha < \infty\}$ такую, что $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \varepsilon_\alpha = \varepsilon$. Не ограничивая общности, будем считать, что $l(0) = 1$. Рассмотрим последовательность функций

$$l_\alpha(\xi) = l((1+\varepsilon_\alpha)\xi), \qquad -\infty < \alpha < \infty.$$

Покажем, что эта последовательность есть убывающее семейство л. в. функций. Поскольку функция $\ln l(\xi)$ сферически симметрична, выпукла и равна нулю в начале координат, то для любых ξ' и ξ''

$$\ln l(\xi') + \ln l(\xi'') \leqslant \ln l(\xi' + \xi''). \tag{9.5}$$

Из конструкции функций l_α видно, что для любого α можно найти положительное число δ такое, что $l_{\alpha+1}((1+\delta)\xi) = l_\alpha(\xi)$. Поэтому из неравенства (9) вытекает, что

$$l_{\alpha+1}(\xi)\, l_{\alpha+1}(\delta\xi) \leqslant l_{\alpha+1}((1+\delta)\xi) = l_\alpha(\xi). \tag{10.5}$$

Так как функция l логарифмически выпукла, то из (5.3) $l_{\alpha+1}(\delta\xi) \geqslant c\exp(\delta'|\xi|)$ с некоторым положительным δ'. Поэтому из неравенства (10) следует, что последовательность функций l_α удовлетворяет неравенству I′ § 3.

Функция l, будучи л. в., определена и непрерывна в некоторой окрестности начала координат. Отсюда следует, что при достаточно малом δ'' имеет место неравенство

$$\sup_{|\xi'-\xi| \leqslant \delta''} l_{\alpha+1}(\xi') \leqslant C \leqslant C l_\alpha(\xi) \tag{11.5}$$

для всех ξ с $|\xi| < \delta''$. Для остальных точек ξ имеет место неравенство $|(1+\delta)\xi| \geqslant |\xi| + \delta\delta''$. Поэтому из (10)

$$\sup_{|\xi'-\xi| \leqslant \delta\delta''} l_{\alpha+1}(\xi') \leqslant l_\alpha(\xi).$$

Отсюда и из (11) вытекает неравенство II′ § 3.

Так как по условию функция u удовлетворяет неравенству (8) с любым $\varepsilon > 0$, то мы можем положить $\varepsilon = \varepsilon_{-1}$ в этом неравенстве. Следовательно, функция u принадлежит $\mathscr{E}^0_{l_0}$ и является решением системы (1.4) в $\mathscr{D}^*(\Omega_{l_0})$. Применяя к ней теорему 1 § 4, мы получим представление (2.4) для всех функций $\varphi \in \left[S^A_{l_{-A}}\right]^s$, причем

$$\|\mu\|_{-A} = \sum_\lambda \int (|z|+1)^{-A} \mathcal{G}_{-A}(y)\, |\mu^\lambda| < \infty.$$

Зафиксируем произвольное $q \geqslant 0$, положим $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ и, используя представление (2.4), оценим функционал u:

$$|(u, \varphi)| \leqslant \sup_N \frac{|d(z, D)\,\tilde{\varphi}^*(z)|}{(|z|+1)^{q+\nu+\varkappa}\mathcal{G}_{-A-2}(y)} \sup_N \frac{(|z|+1)^{\nu+\varkappa+A}\mathcal{G}_{-A-2}(y)}{\mathcal{G}_{-A-1}(y)} \times$$
$$\times \sup_N \frac{(|z|+1)^q \mathcal{G}_{-A-1}(y)}{\mathcal{G}_{-A}(y)} \|\mu\|_{-A}. \tag{12.5}$$

Первый сомножитель правой части не превосходит величины

$$C\sup\frac{|\tilde{\varphi}^*(z)|}{(|z|+1)^{q+\nu}\mathcal{I}_{-A-3}(y)}=C\|\tilde{\varphi}\|_{-q-\nu}^{\mathcal{I}^*_{-A-3}},$$

причем константа C не зависит от q. Поскольку функции $\mathcal{I}_\alpha$ образуют возрастающее семейство л. в. функций, то $\exp(\delta|y|)\,\mathcal{I}_{-A-2}(y)\leqslant\leqslant\mathcal{I}_{-A-1}(y)$ с некоторым $\delta>0$. Это неравенство в сочетании с (1) показывает, что второй сомножитель правой части (12) конечен.

Оценим третий сомножитель. Поскольку функция $\mathcal{I}$ сферически симметрична, логарифмически выпукла, а $\mathcal{I}_{\alpha+1}(y)=\mathcal{I}_\alpha((1+\delta)y)$ с некоторым $\delta>0$, то по аналогии с функциями I_α мы заключаем, что

$$\mathcal{I}_{-A-1}(y)\,i(\delta'(|y|+1))\leqslant C\mathcal{I}_{-A}(y),$$

где δ' достаточно мало. Отсюда следует, что третий сомножитель правой части (12) не превосходит величины

$$C\sup_N\frac{(|z|+1)^q}{i(\delta'(|y|+1)}\leqslant C\cdot(2B)^q\sup\frac{(|y|+1)^{q/\gamma}}{i(\delta'(|y|+1))},$$

где константа C не зависит от q. Делая подстановку в правой части $t=\ln(\delta'(|y|+1))$, мы оценим ее величиной

$$Cb^q\sup\frac{\exp\left(t\dfrac{q}{\gamma}\right)}{i(\exp t)}=Cb^q\mathscr{B}\left(\frac{q}{\gamma}\right).$$

Возвращаясь к (12), приходим к неравенству

$$|(u,\ \varphi)|\leqslant Cb^q\mathscr{B}\left(\frac{q}{\gamma}\right)\|\tilde{\varphi}\|_{-q-\nu}^{\mathcal{I}^*_{-A-3}},\quad \varphi\in[\mathscr{D}(\Omega_{l_0})]^s, \tag{13.5}$$

в котором константа C также не зависит от q. Согласно предложению 2 § 3 правая часть не превосходит $C_q\|\varphi\|_{l'}^{-q-\nu}$, $l'=l_{-A-4}$, следовательно, функционал u непрерывен по норме $\|\cdot\|_{l'}^{-q-\nu}$ на функциях из $[\mathscr{D}(\Omega_{l'})]^s$. Так как пространство $[\mathscr{D}(\Omega_{l'})]^s$ плотно в $\left[S_{l'}^{-q-\nu}\right]^s$, функционал u может быть продолжен на все пространство $\left[S_{l'}^{-q-\nu}\right]^s$, причем неравенство (13) сохранится. Поэтому мы можем подставить в это неравенство функцию $\delta^j(\xi-\eta)$ с любым $\eta\in\Omega_{l'}$ и $|j|\leqslant q$. Слева мы получим величину $|D^ju(\eta)|$. Для оценки правой части заметим, что

$$\|\widetilde{\delta^j(\xi-\eta)}\|_{-q-\nu}^{\mathcal{I}^*_{-A-3}}=\sup\frac{|z^j\exp(iz,\ \eta)|}{(|z|+1)^{q+\nu}\mathcal{I}_{-A-3}(-y)}\leqslant$$

$$\leqslant\sup\frac{\exp(-y,\ \eta)}{\mathcal{I}_{-A-3}(-y)}=I_{-A-3}(\eta)\leqslant I((1+\varepsilon)\xi).$$

Отсюда окончательно

$$|D^j u(\eta)| \leqslant C b^q \mathscr{B}\left(\frac{q}{\gamma}\right) I((1+\varepsilon)\xi),\ \xi \in \Omega_{l'},\ |j| \leqslant q,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \blacksquare$$

3°. Примеры.

Пример 1. Пусть $I(\xi) = \exp(A|\xi|^{1/a})$, где $0 < a \leqslant 1$, а $A > 0$. Согласно вычислениям 8° § 3 логарифмически двойственная функция равна $\exp(A'|y|^{1/(1-a)})$, следовательно, $\mathscr{B}(t) = B^t t^{t(1-a)}$. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что любое решение системы (1.4), не превосходящее функции вида $C\exp(A|\xi|^{1/a})$, допускает оценку

$$|D^j u(\xi)| \leqslant C B_1^{|j|} |j|^{|j|\frac{1-a}{\gamma}} \exp(A_1|\xi|^{1/a}).$$

Пример 2. Пусть Ω — шар в R^n с центром в начале координат. Всякое решение системы (1.4) в Ω удовлетворяет неравенству (8) с любым $\varepsilon > 0$ и $I = I_{\overline{\Omega}}$. В этом случае $\mathscr{I}(y) = \exp(A|y|)$, а $\mathscr{B}(t) = B^t t^t$. Поэтому согласно теореме 2 функция u на любом компакте $K \subset \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$|D^j u(\xi)| \leqslant C B_1^{|j|} |j|^{|j|\frac{1}{\gamma}}.$$

4°. Эллиптические операторы. Оператор p и система (1.4) называются *эллиптическими*, если для любой области Ω всякое обобщенное решение (1.4), определенное в Ω, продолжается как аналитическая функция в некоторую n-мерную комплексную окрестность области Ω.

Следствие 1. ***Для того чтобы оператор p был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы его показатель гипоэллиптичности был равен единице.***

Доказательство. Пусть $\gamma = 1$. Если Ω — шар с центром в начале координат, то из примера 2 3° следует, что всякое обобщенное решение u в этом шаре на любом компакте $K \subset \Omega$ допускает оценку

$$|D^j u(\xi)| \leqslant C B^{|j|} |j|^{|j|}.$$

Эта оценка, как легко видеть, обеспечивает аналитичность функции u. (Заметим, что окрестность, в которую продолжается u как аналитическая функция, зависит лишь от числа B и, следовательно, зависит лишь от p, Ω и K, но не от u.) Тем самым достаточность установлена.

Докажем необходимость. Для этого мы установим более общее утверждение: если всякое непрерывное решение (1.4) в R^n бесконечно дифференцируемо в окрестности начала координат и удовлетворяет неравенству

$$|D^j u(0)| \leqslant C |j|^{|j|\beta}$$

с некоторым $\beta > 1$, то для оператора p $\gamma \geqslant \frac{1}{\beta}$. Рассуждая так же, как при доказательстве замечания 2, мы приходим к неравенству

$$\sup_j \frac{|D^j u(0)|}{|j|^{|j|\beta}} \leqslant C \sup_{|\xi| \leqslant R} |u(\xi)|,$$

справедливому для любого непрерывного решения (1.4) в R^n. Подставляя в него функции вида $a \exp(z, -i\xi) \in \mathscr{E}_p(R^n)$, где $z \in N$, мы получим

$$\sup_j \frac{|z^j|}{|j|^{|j|\beta}} \leqslant C \exp(R|y|), \qquad z \in N.$$

Из выкладки (23.3) и далее следует, что левая часть не меньше, чем

$$C \exp\left(\frac{|z|}{A}\right)^{1/\beta},$$

откуда мы получаем

$$\exp\left(\frac{|z|}{A}\right)^{1/\beta} \leqslant C \exp(R|y|),$$

что влечет неравенство (1) с $\gamma \geqslant \frac{1}{\beta}$. ■

5°. Частично гипоэллиптические операторы. Частично гипоэллиптические операторы — это операторы, отвечающие системам (1.4), все решения которых в том или ином смысле бесконечно дифференцируемы по части переменных. Сейчас мы опишем два класса частично гипоэллиптических операторов — два класса, отвечающие следующим двум различным определениям бесконечной дифференцируемости обобщенных функций по части переменных.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — фиксированная система координат в R^n_ξ и $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$ — фиксированное разбиение переменных ξ на две группы. Через $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$ обозначим соответствующие координатные подпространства в R^n_ξ, а через $z' = (z_1, \ldots, z_m)$ и $z'' = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$ — соответствующие группы двойственных переменных.

Пусть Ω' и Ω'' — некоторые области соответственно в пространствах $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$. Пусть f — некоторая обобщенная функция в области $\Omega = \Omega' \times \Omega'' \subset R^n$. Каждой функции $\psi \in \mathscr{D}(\Omega'')$ мы можем поставить в соответствие обобщенную функцию $(f, \psi)_{\xi''} \in \mathscr{D}^*(\Omega')$, действующую по формуле

$$((f, \psi)_{\xi''}, \varphi) = (f, \varphi \times \psi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega'). \tag{14.5}$$

Как нетрудно проверить, функционал $(f, \psi)_{\xi''}$ действительно непрерывен на $\mathscr{D}(\Omega')$, т. е. является обобщенной функцией в Ω'. Если

$K' \subset \Omega'$ и $K'' \subset \Omega''$ — некоторые компакты, а функция f принадлежит пространству $\mathscr{E}^{-q}_{K' \times K''}$ при некотором q, то в скалярное произведение $(f, \varphi \times \psi)$ можно подставить любые функции $\varphi \in \mathscr{D}^q_{K'}$ и $\psi \in \mathscr{D}^q_{K''}$. Отсюда нетрудно вывести, что для любой функции $\psi \in \mathscr{D}^q_{K''}$ формула (14) определяет обобщенную функцию $(f, \psi)_{\xi''}$, принадлежащую $\mathscr{E}^{-q}_{K'}$.

Определение. Скажем, что обобщенная функция f *слабо бесконечно дифференцируема по* ξ', если для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(\Omega'')$ функционал $(f, \psi)_{\xi''}$ есть бесконечно дифференцируемая функция.

Скажем, что функция f *сильно бесконечно дифференцируема по* ξ', если для любых компактов $K' \subset \Omega'$ и $K'' \subset \Omega''$ существует такое целое число q, что $f \in \mathscr{E}^{-q}_{K' \times K''}$ и для любой функции $\psi \in \mathscr{D}^q_{K''}$ функционал $(f, \psi)_{\xi''}$ есть бесконечно дифференцируемая функция внутри K'.

Пусть Ω — произвольная область в R^n. Скажем, что обобщенная функция f, заданная в Ω, слабо (сильно) бесконечно дифференцируема в этой области, если этим свойством обладает сужение функции f в любой подобласти вида $\Omega' \times \Omega'' \subset \Omega$, где $\Omega' \subset R_{\xi'}$, а $\Omega'' \subset R_{\xi''}$.

Легко понять, что свойства слабой и сильной бесконечной дифференцируемости локальны: если то или другое свойство имеет место в окрестности любой точки области Ω, то оно имеет место и во всей области Ω.

Очевидно, что любая обычная функция, бесконечно дифференцируемая по ξ' в обычном смысле, а также любая конечная сумма производных по ξ'' от такого рода функций, является сильно бесконечно дифференцируемой по ξ'. Можно показать, что каждая сильно бесконечно дифференцируемая функция локально может быть записана в виде такой конечной суммы. Класс слабо бесконечно дифференцируемых функций гораздо шире. Мы не будем углубляться в этот вопрос, поскольку наша задача более специальная — изучение систем (1.4), все решения которых слабо или сильно бесконечно дифференцируемы по ξ'.

Оператор p и систему (1.4) назовем слабо (сильно) гипоэллиптическими по переменным ξ', если для любой области Ω все решения (1.4), принадлежащие $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, слабо (сильно) бесконечно дифференцируемы по ξ'.

6°. Описание частично гипоэллиптических операторов. Рассмотрим следующую характеристику многообразия:

$$\breve{m}(r) = \inf \{ |y| : z \in N, \ |z'| = r \}.$$

Если проекция N на координатное подпространство $C_{z'}$ не ограничена, то функция $\breve{m}(r)$ определена для достаточно больших r и, следовательно, эквивалентна $\breve{m}_0 r^{\breve{\gamma}}$ при $r \to \infty$ с некоторым $\breve{m}_0 \geqslant 0$ и рациональным $\breve{\gamma}$. Положим $\breve{\gamma} = -\infty$, если $\breve{m}_0 = 0$. Если проекция N на $C_{z'}$ ограничена, то положим $\breve{\gamma} = \infty$. Как легко видеть, при любом $\breve{\gamma} > -\infty$ на многообразии N выполнено неравенство

$$|z'| \leqslant B(|y| + 1)^{1/\breve{\gamma}} \tag{15.5}$$

с некоторым $B > 0$.

Аналогичный вид имеет функция

$$\hat{m}(r) = \inf\{|y'| + |z''|: \ z \in N, \ |z'| = r\}.$$

Если проекция N на $C_{z'}$ не ограничена, то эта функция определена для достаточно больших r и эквивалентна $\hat{m}_0 r^{\hat{\gamma}}$ при $r \to \infty$. Положим $\hat{\gamma} = -\infty$, если $\hat{m}_0 = 0$, и $\hat{\gamma} = \infty$, если проекция N на $C_{z'}$ ограничена. Таким образом, при любом $\hat{\gamma} > -\infty$ на многообразии N имеет место неравенство

$$|z'| \leqslant B(|y'| + |z''| + 1)^{1/\hat{\gamma}}, \ B > 0. \tag{16.5}$$

Следующая теорема содержит описание слабо и сильно гипоэллиптических операторов.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор p был сильно гипоэллиптичен по переменным ξ', необходимо и достаточно, чтобы $\breve{\gamma} > 0$.*

Для того чтобы оператор p был слабо гипоэллиптичен по переменным ξ', необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\gamma} > 0$.

Доказательство. Мы установим лишь достаточность. Так как свойства сильной и слабой бесконечной дифференцируемости локальны, их достаточно установить для решений системы (1.4) в области вида $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, где Ω' и Ω'' — шары в $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$ с центрами в началах координат радиусов ρ, где ρ — произвольное положительное число. Для любого ε, $0 < \varepsilon < \rho$, через K'_ε и K''_ε обозначим концентрические с Ω' и Ω'' замкнутые шары радиусов $\rho - \varepsilon$. Положим $K_\varepsilon = K'_\varepsilon \times K''_\varepsilon$.

Пусть u — произвольное обобщенное решение (1.4) в Ω. Для любого $\varepsilon > 0$ функция u принадлежит пространству $\left[\mathscr{E}^q_{K_\varepsilon}\right]^s$ с некоторым q. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, не превосходящее $\frac{\rho}{5}$, и применим к u следствие 1 § 4. Согласно этому следствию функционал u допускает представление (2.4) для любой функции $\varphi \in$

$\in[\mathscr{D}_{K_{2\varepsilon}}]^s$, причем имеет место неравенство

$$\|\mu\|=\sum_{\lambda}\int(|z|+1)^{q-A}\mathscr{G}_{K_{2\varepsilon}}(y)|\mu^{\lambda}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\lambda}\int(|z|+1)^{q-A}\exp[(\rho-2\varepsilon)(|y'|+|y''|)]|\mu^{\lambda}|\leqslant C\|u\|^q_{K_\varepsilon}.$$

Зафиксируем произвольное неотрицательное целое число r, не меньшее чем $A-q$. Допустим, что $\check{\gamma}>0$. Из неравенства (15) следует, что при любом натуральном k $|z'|^k=o(\exp(\varepsilon(|y'|+|y''|)))$. Отсюда вытекает неравенство

$$\int(|z'|+1)^k\exp[(\rho-3\varepsilon)(|y'|+|y''|)]\left|\frac{\mu^{\lambda}}{(|z''|^2+1)^r}\right|\leqslant C_k\|\mu\|. \tag{17.5}$$

Рассмотрим серию функционалов

$$(v^{\lambda},\ \varphi)=\int\tilde{\varphi}^*(z)\frac{\mu^{\lambda}}{(|z''|^2+1)^r},\quad \varphi\in[\mathscr{D}_{K_{4\varepsilon}}]^{e_{\lambda}}$$

(e_{λ} — число элементов в столбце d^{λ}). Из неравенства (17) (с $k=0$) видно, что каждый функционал v^{λ} непрерывен по норме $\|\tilde{\varphi}^*\|_0^{K_{3\varepsilon}}$ и, следовательно, ввиду предложения 2 § 3 по норме $\|\varphi\|^0$. Поэтому каждая функция v^{λ} принадлежит $\left[\overset{0}{\mathscr{E}}_{K_{4\varepsilon}}\right]^{e_{\lambda}}$, т. е. есть обычная суммируемая с квадратом функция на $K_{4\varepsilon}$. Так как неравенство (17) имеет место при любом натуральном k, аналогичным свойством обладают все производные функций v^{λ} по ξ'.

Учитывая, что $(|z''|^2+1)^r=\sum\binom{r}{j}|z''|^{2j}$, мы находим

$$(u,\ \varphi)=\sum_{\lambda,\ j}\left(v^{\lambda},\ F^{-1}\left[\binom{r}{j}|z''|^{2j}d^{\lambda}(z,\ D)\tilde{\varphi}^*\right]^*\right)=$$

$$=\sum_{\lambda,\ j}\left(v^{\lambda},\ \binom{r}{j}|iD_{\xi''}|^{2j}\bar{d}^{\lambda}(iD,\ i\xi)\varphi\right),\quad |iD_{\xi''}|^2=-\sum_{m+1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}. \tag{18.5}$$

В правой части перебросим все дифференцирования по ξ' с функции φ на функции v^{λ} путем интегрирования по частям. В результате мы получим следующее представление:

$$(u,\ \varphi)=\sum_{|j|\leqslant 2r+\varkappa}\int w_j(\xi)D^j_{\xi''}\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{19.5}$$

где w_j — некоторые функции, принадлежащие пространству $\left[\overset{0}{\mathscr{E}}_{K_{4\varepsilon}}\right]^s$ вместе со всеми своими производными по переменным ξ'. Из этого представления следует, что для любой функции $\psi \in \mathscr{D}_{K''_{4\varepsilon}}^{2r+\varkappa}$ функционал $(u, \psi)_{\xi''}$ совпадает на $K'_{4\varepsilon}$ с функцией

$$\sum_{|j| \leqslant 2r+\varkappa} \int w_j(\xi', \xi'') D_{\xi''}^j \psi(\xi'') d\xi'', \tag{20.5}$$

бесконечно дифференцируемой по ξ'. Так как число ε произвольно, отсюда следует, что функция u сильно бесконечно дифференцируема по ξ'. Итак, мы показали, что условие $\check{\gamma} > 0$ достаточно для того, чтобы оператор p был сильно гипоэллиптичен по ξ'.

Предположим теперь, что $\hat{\gamma} > 0$. Из неравенства (16) следует, что при любом неотрицательном k

$$|z'|^k = O(\exp(\varepsilon |y'|)(|z''| + 1)^{k/\hat{\gamma}}),$$

следовательно, неравенство (17) имеет место, если $r \geqslant A - q + \frac{k}{\hat{\gamma}}$. Выбрав число r так, чтобы оно удовлетворяло этому условию, мы придем к представлению (18), в котором v^λ — функции, все производные которых по ξ' до порядка k принадлежат $\left[\mathscr{E}_{K_{4\varepsilon}}^0\right]^{e_\lambda}$. Совершая далее интегрирования по частям, мы перебросим все дифференцирования по ξ' (порядки которых не превосходят $\varkappa$) на функции v^λ. В результате мы получим представление (19), в котором все производные по ξ' до порядка $k - \varkappa$ функций w_j, принадлежат $\left[\mathscr{E}_{K_{4\varepsilon}}^0\right]^s$. Отсюда вытекает, что для любой функции $\psi \in \mathscr{D}_{K''_{4\varepsilon}}^{2r+\varkappa}$ функция (20) принадлежит пространству $\left[\mathscr{E}_{K'_{4\varepsilon}}^{k-\varkappa}\right]^s$. Поэтому если $\psi \in \mathscr{D}_{K''_{4\varepsilon}}$, то функция (20) бесконечно дифференцируема внутри $K'_{4\varepsilon}$. Так как число ε произвольно, функция u слабо бесконечно дифференцируема по ξ'. Тем самым достаточность условия $\hat{\gamma} > 0$ доказана. ■

Замечание. Пусть u — произвольное обобщенное решение слабо гипоэллиптической системы (1.4), определенное в области $\Omega' \times \Omega''$. Свойство слабой бесконечной дифференцируемости позволяет определить сужение функции u на любом подпространстве вида $\xi' = \xi'_0$, где $\xi'_0 \in \Omega'$. Это сужение, которое мы обозначим через u_0, является обобщенной функцией в Ω'' и определяется следующей формулой:

$$(u_0, \psi) = (u, \psi)_{\xi''}\big|_{\xi' = \xi'_0}. \tag{21.5}$$

Покажем, что левая часть действительно является непрерывным функционалом над пространством $\mathscr{D}(\Omega'')$ (со значениями в C^s). Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и предположим, что функция ψ принадлежит пространству $\mathscr{D}_{K_{4\varepsilon}}$. В таком случае, как мы установили при доказательстве теоремы 3, левая часть (21) равна функции (20) в точке $\xi' = \xi'_0$. Предположим, что $k \geqslant \varkappa + \nu$. Тогда из конструкции функций w_j нетрудно извлечь неравенство

$$\sum_j \| w_j \|^{\nu}_{K_{4\varepsilon}} \leqslant C \sum_{\lambda} \| v^{\lambda} \|^{\nu+\varkappa}_{K_{4\varepsilon}} \leqslant C' \| \mu \| \leqslant C'' \| u \|^{q}_{K_{\varepsilon}}.$$

Отсюда

$$| (u_0, \psi) | \leqslant C \| \psi \|^{2r+\varkappa} \sup_{K_{4\varepsilon}} \sum_j | w_j | \leqslant$$
$$\leqslant C' \| \psi \|^{2r+\varkappa} \sum_j \| w_j \|^{\nu}_{K_{4\varepsilon}} \leqslant C'' \| \psi \|^{2r+\varkappa} \| u \|^{q}_{K_{\varepsilon}}.$$

Тем самым мы установили, что функционал u_0 принадлежит пространству $\left[\mathscr{E}^{-2r-\varkappa}_{K_{4\varepsilon}}\right]^s$, а соответствие $u \to u_0$ непрерывно по нормам $\| u \|^{q}_{K_{\varepsilon}}$ и $\| u_0 \|^{-2r-\varkappa}_{K_{4\varepsilon}}$. Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, мы заключаем, что u_0 есть обобщенная функция в Ω'', а соответствие $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s \ni u \to u_0 \in [\mathscr{D}^*(\Omega'')]^s$ непрерывно.

Аналогичным образом для любого $j \in Z^m_+$ мы можем рассмотреть функционал

$$(u_j, \psi) = D^j_{\xi'} (u, \psi)_{\xi''} \Big|_{\xi' = \xi'_0},$$

являющийся сужением при $\xi' = \xi'_0$ соответствующей производной функции u. Этот функционал есть обобщенная функция в Ω'' и соответствие $u \to u_j$ непрерывно.

Отметим, что функционал u является интегралом от своих сужений (21), т. е. имеет место формула

$$(u, \varphi) = \int \left(u, \varphi(\xi'_0, \xi'')\right)_{\xi''} \Big|_{\xi' = \xi'_0} d\xi'_0.$$

Чтобы ее доказать, выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K_{4\varepsilon}$. В таком случае действие функционала $(u, \cdot)_{\xi''}$ записывается с помощью формулы (20), а действие функционала u в виде (19), что и доказывает наше равенство. В частности, если $(u, \cdot)_{\xi''} \equiv 0$, то $u = 0$.

7°. Примеры.

Пример 1. Предположим, что оператор p содержит дифференцирования лишь по переменным ξ', т. е. $p(iD) = p(iD_{\xi'})$, а оператор $p(iD_{\xi'})$, рассматриваемый в пространстве $R_{\xi'}$, гипоэллиптический. Согласно свойству гипоэллиптических операторов на многообразии $N' \subset C_{z'}$, ассоциированным с матрицей $p'(z')$, выполнено неравенство вида $| z' | \leqslant B(| y' | + 1)^{1/\gamma}$. Если матрицу p' рассматривать в пространстве R^n_ξ, то ассоциированное с ней многообразие есть $N' \times C_{z''}$. На этом многообразии выполнено неравенство $|z'| \leqslant \leqslant B(|y|+1)^{1/\gamma}$, следовательно, оператор p в пространстве R^n_ξ является сильно гипоэллиптическим по переменным ξ'.

Пример 2. Пусть $s=t=m=1$, а $p(z)$ — произвольный многочлен, допускающий разложение по степеням z_1

$$p(z)=\sum_{j=0}^{\mu} p_j(z'')\, z_1^{\mu-j}, \quad \mu=\deg p, \tag{22.5}$$

в котором $p_0(z'')$ есть константа, отличная от нуля. Покажем, что соответствующий оператор $p(iD)$ слабо гипоэллиптичен по ξ_1. Действительно, благодаря отмеченному свойству разложения (22) на многообразии N имеет место неравенство $|z_1| \leqslant B(|z''|+1)^d$, где $d=\max\limits_j \dfrac{\deg p_j}{j}$ *), из которого вытекает неравенство (16) с $\widehat{\gamma}=\dfrac{1}{d}$, что влечет слабую гипоэллиптичность оператора p по ξ_1.

Пример 3. Пусть снова $s=t=1$, а $p(iD)=\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}-\sum\limits_2^n \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}$ — волновой оператор. Многообразие, ассоциированное с матрицей p', задается уравнением $z_1^2=\sum\limits_2^n z_j^2$. Положим $\xi'=(\xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi''=\xi_1$ и $z'=(z_2, \ldots, z_n)$, $z''=z_1$. Приравнивая вещественные части в уравнении многообразия, мы получим соотношение $|x'|^2-|y'|^2= =|x''|^2-|y''|^2$, из которого вытекает неравенство

$$|x'|^2 \leqslant |y'|^2+|z''|^2. \tag{23.5}$$

Это неравенство показывает, что оператор p слабо гипоэллиптичен по переменным ξ'. Заметим, что это неравенство сохраняется при любом вещественном повороте в пространстве C^n_z, при котором ось x'' остается внутри конуса $|x''|=|x'|$, если допустить постоянный множитель в левой части (23). Поэтому оператор p остается слабо гипоэллиптическим по ξ' при любом повороте в R^n_ξ, оставляющем ось ξ'' внутри конуса $|\xi''|=|\xi'|$. Отсюда, в частности, следует, что всякое обобщенное решение волнового уравнения имеет сужение на любой времениподобной прямой.

8°. Операторы, сглаживающие решения системы (1.4). Пусть h: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^s$ — некоторая $\mathscr{P}$-матрица. Скажем, что оператор $h(iD)$ сглаживает решения системы (1.4), если для любой области $\Omega \subset R^n_\xi$, любого обобщенного решения u в этой области, компакта $K \subset \Omega$ и целого неотрицательного α можно найти такое натуральное β, что

*) См., например, Гельфанд и Шилов [3].

функция $h^{\beta}(iD)u$ принадлежит $[\mathscr{E}_K^{\alpha}]^s$. Следующая теорема дает описание всех сглаживающих операторов.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор h был сглаживающим, необходимо и достаточно, чтобы для любого $R > 0$*

$$|h(z)| \to 0 \quad \text{при условии} \quad z \in N,\ |y| \leqslant R,\ |z| \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю.

§ 6. Единственность решения задачи Коши

1°. Постановка задачи. Пусть L — некоторое линейное подпространство в R^n, размерность которого заключена между 0 и $n-1$. Наша цель заключается в том, чтобы сформулировать аналог задачи Коши для системы (1.4) с начальными данными на L. Поскольку мы хотим включить в рассмотрение любые обобщенные решения этой системы, мы должны потребовать, чтобы эти решения имели сужения на L. С этой целью выберем в R^n систему координат таким образом, чтобы подпространство L совпало с координатным подпространством переменных $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$, где $n - m = \dim L$. Положив $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, допустим, что оператор p слабо гипоэллиптичен по переменным ξ'. В таком случае, как мы установили в § 5, всякое обобщенное решение (1.4), определенное в некоторой окрестности нуля Ω, а также любая его произвольная по ξ' имеют сужения на L. Эти сужения суть обобщенные функции в области $\Omega'' = \Omega \cap L$.

Определение. *Пусть Ω — некоторая окрестность нуля в R^n*, а Φ — некоторое подпространство в $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Скажем, что задача Коши для системы (1.4) с начальными данными на L имеет лишь единственное решение в Φ, если из условий

$$u \in \Phi_p, \qquad D_{\xi'}^{l} u \big|_L = 0 \ \forall l \tag{1.6}$$

следует, что $u \equiv 0$. Через Φ_p мы обозначили подпространство в $[\Phi]^s$, образованное функциями, которые являются решениями (1.4) в $\mathscr{D}^*(\Omega)$.

То, что обычно понимается под единственностью задачи Коши, есть специальный случай нашего определения. Действительно, если некоторое обычное решение системы (1.4) принимает на L нулевое значение в обычном смысле, то она принимает его и в обобщенном смысле ввиду того, что это решение слабо бесконечно дифференцируемо по ξ'. В задаче Коши, в ее обычной форме речь идет о конечном числе начальных данных. Например, если система (1.4) состоит из одного уравнения с одной неизвестной функцией, причем $m = 1$, а подпространство L нехарактеристическое по отношению к оператору p, то на этом подпространстве задается $\mu = \deg p$ начальных данных $\dfrac{\partial^i u}{\partial \xi_1^i}$, $i = 0, \ldots, \mu - 1$.

Заметим, однако, что остальные производные функции u по ξ_1 можно восстановить из соотношения $pu=0$. Действительно, поскольку подпространство L нехарактеристическое, в разложении

$$p=\sum_{0}^{\mu} p_j(D_{\xi'})\frac{\partial^{\mu-j}}{\partial\xi_1^{\mu-j}}$$

оператор p_0 есть константа, отличная от нуля. Поэтому при любом $l\geqslant\mu$ производная $\left.\frac{\partial^l u}{\partial\xi_1^l}\right|_L$ связана с предыдущими производными по ξ_1 соотношением

$$\left.\frac{\partial^l u}{\partial\xi_1^l}\right|_L=-\frac{1}{p_0}\sum_{1}^{\mu} p_j(D_{\xi'})\left.\frac{\partial^{l-j}u}{\partial\xi_1^{l-j}}\right|_L,$$

которое определяет эту производную однозначно. Отсюда, в частности, вытекает, что если производные $\frac{\partial^l u}{\partial\xi_1^l}$ с $l=0,\ \ldots,\ \mu-1$ все равны нулю, то все остальные производные функции u по ξ_1 также равны нулю на L. Таким образом, наше определение единственности решения задачи Коши в применении к обычным достаточно дифференцируемым функциям совпадает с обычным.

2°. Теорема о единственности решения задачи Коши.

Теорема. *Пусть на многообразии N выполнено неравенство*

$$|z'|\leqslant C\left(|z''|^{1/\beta}+|y'|^{1/\gamma}+1\right), \tag{2.6}$$

где $0<\gamma\leqslant 1$, $0<\beta<1$. Тогда задача Коши с начальными данными на L имеет лишь единственное решение в пространстве обобщенных функций, заданных в области $\Omega=\Omega'\times R_{\xi''}$ и принадлежащих пространству $\left[\mathscr{E}_I^{\prime}\right]^s$, где $I=I(\xi)=I'(\xi')I''(\xi'')$, а

$$\Omega'=\begin{cases} R_{\xi'}, \\ \{\xi':\ |\xi'|<A'\};\end{cases}\quad I'(\xi')=\begin{cases}\exp\left(A'|\xi'|^{1/(1-\gamma)}\right), & \gamma<1,\\ I_{\overline{\Omega'}}(\xi'), & \gamma=1;\end{cases}$$
$$I''(\xi'')=\exp\left(A''|\xi''|^{1/(1-\beta)}\right), \tag{3.6}$$

A', A'' — произвольные положительные константы, а q — любое целое число.

Заметим, что неравенство (2) на многообразии N имеет место тогда и только тогда, когда оператор p слабо гипоэллиптичен по переменным ξ'. Если $\gamma=1$, то из теоремы, в частности, следует, что всякое обычное решение (1.4), принимающее нулевые значения на L, определенное в полосе $|\xi'|<A'$ и растущее на бесконечности не быстрее $C\exp\left(A''|\xi''|^{1/(1-\beta)}\right)$, равно нулю. Если же $\gamma<1$, то аналогичное утверждение справедливо в классе функций, заданных в R^n, не превосходящих $C\exp\left(A'|\xi'|^{1/(1-\gamma)}+A''|\xi''|^{1/(1-\beta)}\right)$.

В основе доказательства теоремы лежит первый пример 3° § 5. Если предположить, что оператор p гипоэллиптический, то из вычислений этого примера следует, что всякое решение (1.4) в R^n, растущее на бесконечности не быстрее $C\exp\left(A|\xi|^{1/(1-\gamma)}\right)$ (γ — показатель гипоэллиптичности), в каждой точке удовлетворяет неравенству

$$|D^j u(\xi)|\leqslant CB^{|j|}|j|^{|j|},$$

т. е. является аналитической в R^n функцией. Если все производные такой функции в некоторой точке равны нулю, то она равна нулю тождественно ввиду свойства аналитических функций. Отсюда мы можем сделать вывод, что задача Коши для гипоэллиптической системы (1.4) с начальными данными на нульмерном подпространстве L имеет лишь единственное решение, растущее не быстрее $C\exp\left(A|\xi|^{1/(1-\gamma)}\right)$.

Заметим, что проведенное рассуждение отвечает частному случаю теоремы, отвечающему $m=0$. В общем случае оператор p лишь слабо гипоэллиптичен по переменным ξ'. Для любой функции $\psi\in\mathscr{D}(R_{\xi''})$ мы можем рассмотреть величину $(u,\psi)_{\xi''}$, являющуюся бесконечно дифференцируемой функцией ξ'. Оказывается, что эти функции обладают свойством, аналогичным тому, которое мы отметили для решений гипоэллиптических систем, а именно, при тех ограничениях роста на бесконечности, которые сформулированы в теореме, функция $(u,\psi)_{\xi''}$ становится аналитической для некоторого плотного подпространства функций ψ. Из соблюдения начальных условий (1) вытекает, что $(u,\psi)_{\xi''}\equiv 0$, откуда $u=0$.

3°. Доказательство теоремы. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\breve{I}'(\xi')=I'((1+\varepsilon)\xi')$ и $\breve{I}''(\xi'')=I''((1+\varepsilon)\xi'')$. Согласно вычислениям 8° § 3 функции, логарифмически двойственные по отношению к $\breve{I}'$ и $\breve{I}''$, соответственно равны

$$\mathscr{I}'(y')=\exp\left(a'|y'|^{1/\gamma}\right),\qquad \mathscr{I}''(y'')=\exp\left(a''|y''|^{1/\beta}\right)$$

с некоторыми положительными a' и a''. Выберем некоторую строго убывающую последовательность чисел $\{\varepsilon_\alpha,\ -\infty<\alpha<\infty\}$, заключенных между 0 и ε. Положим

$$I'_\alpha(\xi')=I'\left((1+\varepsilon_\alpha)\xi'\right),\quad I''_\alpha(\xi'')=I''\left((1+\varepsilon_\alpha)\xi''\right).$$

Поскольку функции I' и I'' логарифмически выпуклы и сферически симметричны соответственно в $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$, то из доказательства теоремы 2 § 5 следует, что функции I'_α и I''_α образуют убывающие семейства л. в. функций. Отсюда следует, что функции $I_\alpha(\xi)=$

$=I'_\alpha(\xi')I''_\alpha(\xi'')$ образуют убывающее семейство л. в. функций в R^n. Заметим, что при любом α $I(\xi)\leqslant I_\alpha(\xi)\leqslant \breve{I}(\xi)=\breve{I}'(\xi')\breve{I}''(\xi'')$, причем функции I, I_α и $\breve{I}$ получаются одна из другой при помощи некоторой гомотетии в R^n с центром в начале координат. Отсюда следует, что логарифмически двойственные функции связаны между собой аналогичным образом. В частности, при любом α функция $\mathcal{J}_\alpha$, логарифмически двойственная по отношению к I_α, имеет вид $\exp\left[(a'+\delta')|y'|^{1/\gamma}+(a''+\delta'')|y''|^{1/\beta}\right]$ с некоторыми положительными δ' и δ''.

Пусть u — произвольное обобщенное решение (1.4) в Ω, принадлежащее пространству $[\mathscr{E}'^q]^s$. Из неравенства $I\leqslant I_q$ следует, что $u\in\left[\mathscr{E}'^q_{I_q}\right]^s$. Поэтому из теоремы 1 § 4 вытекает, что функционал u допускает представление (2.4), в котором φ — любая функция пространства $\left[S^{A-q}_{I_{q-A}}\right]^s$ и

$$\sum_\lambda\int(|z|+1)^{q-A}\exp\left[(a'+\delta')|y'|^{1/\gamma}+\right.$$
$$\left.+(a''+\delta'')|y''|^{1/\beta}\right]|\mu^\lambda|<\infty \tag{4.6}$$

с некоторыми положительными δ' и δ''.

Пусть φ и ψ — произвольные функции, принадлежащие соответственно пространствам $S^{q'}_{I'}$ и $\left[S^{q''}_{I''}\right]^s$ с любыми q' и q''. Из предположения 2 § 3 следует, что их преобразования Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|\tilde{\varphi}^*(z)|\leqslant C\|\varphi\|^{q'}_{I'}(|z'|+1)^{-q'}\exp\left[(a'+\varepsilon')|y'|^{1/\gamma}\right], \tag{5.6}$$

$$|\tilde{\psi}^*(z)|\leqslant C\|\psi\|^{q''}_{I''}(|z''|+1)^{-q''}\exp\left[(a''+\varepsilon'')|y''|^{1/\beta}\right] \tag{6.6}$$

с любыми целыми q' и q'' и положительными ε' и ε''. Произведение $\varphi\times\psi$, очевидно, принадлежит пространству $\left[S^q_I\right]^s$ с любым q и, следовательно, может быть подставлено в представление (2.4)

$$(\overline{u,\ \varphi\times\psi})=\sum_\lambda\int d^\lambda(z,\ D)\tilde{\varphi}^*(z')\tilde{\psi}^*(z'')\mu^\lambda. \tag{7.6}$$

Исходя из неравенств (4), (5) и (6), мы оценим модуль правой части величиной

$$C\sup_N\frac{|d^\lambda(z,\ D)\tilde{\varphi}^*(z')\tilde{\psi}^*(z'')|}{(|z|+1)^{q-A}\exp\left[(a'+\delta')|y'|^{1/\gamma}+(a''+\delta'')|y''|^{1/\beta}\right]}\leqslant$$
$$\leqslant C'\|\varphi\|^{q'}_{I'}\|\psi\|^{q''}_{I''}\sup_N\frac{(|z'|+1)^{-q'}(|z''|+1)^{-q''}}{(|z|+1)^{q-A-\varkappa}}\times$$
$$\times\frac{\exp\left[(a'+\varepsilon')|y'|^{1/\gamma}+(a''+\varepsilon'')|y''|^{1/\beta}\right]}{\exp\left[(a'+\delta')|y'|^{1/\gamma}+(a''+\delta'')|y''|^{1/\beta}\right]}. \tag{8.6}$$

(Напомним, что коэффициенты операторов $d^\lambda(z, D)$ суть многочлены порядка не выше $\varkappa$.) Поскольку положительные числа ε' и ε'' в этом неравенстве произвольны, мы можем подчинить их условиям $\varepsilon'' \leqslant \delta''$, $\varepsilon' \leqslant \frac{\delta'}{2}$. В таком случае второй сомножитель, стоящий в правой части под знаком верхней грани, не превосходит $\exp\left(-\varepsilon' |y'|^{1/\gamma}\right)$. Число q' оставим произвольным, а число q'' положим равным наименьшему целому числу $q''(q')$, удовлетворяющему неравенству

$$q'' \geqslant -q + A + \varkappa + \frac{1}{\beta}(-q + A + \varkappa - q').$$

Из сформулированных условий ввиду (2) следует конечность верхней грани в правой части (8). Отсюда

$$\left|\left((u, \psi)_{\xi''}, \varphi\right)\right| = |(u, \varphi \times \psi)| \leqslant C \|\varphi\|_{\gamma'}^{q'} \|\psi\|_{\gamma''}^{q''}.$$

Из этого неравенства вытекает, что обе части равенства (7) определены и непрерывны на пространстве $\mathscr{D}(\Omega_{\gamma'}) \times [\mathscr{D}(\Omega_{\gamma''})]^s$ и непрерывны по норме $\|\varphi\|_{\gamma'}^{q'} + \|\psi\|_{\gamma''}^{q''}$. Поэтому неравенство (7) мы можем продолжить на пространство $S_{\gamma'}^{q'} \times \left[S_{\gamma''}^{q''}\right]^s$. В частности, при любом $j \in Z_+^m$ мы можем подставить в (7) функции $\varphi = \delta^j(\xi' - \eta')$, где $\eta' \in \Omega_{\gamma'}$, и любую функцию $\psi \in \left[S_{\gamma''}^{q''}\right]^s$, где $q'' = q''(-|j| - \nu)$. Совершив очевидные преобразования, мы придем к равенству

$$D_{\xi'}^j (u, \psi)_{\xi''}\Big|_{\xi' = \eta'} = \sum_\lambda \int d^\lambda(z, D) \exp(z', -i\eta')(-iz')^j \tilde{\psi}^*(z'')\, \mu^\lambda.$$

Оценим правую часть, предполагая, что преобразование Фурье функции ψ удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{\psi}^*(z'')| \leqslant c \exp\left(-\delta |x''|^{1/\beta} + \delta |y''|^{1/\beta}\right) \tag{9.6}$$

при любом $\delta > 0$. Мы имеем

$$\left| D_{\xi'}^j (u, \psi)_{\xi''}\Big|_{\xi' = \eta'} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_N \frac{|d^\lambda(z, D) \exp(z', -i\eta')(-iz')^j \tilde{\psi}^*(z'')|}{(|z| + 1)^{q - A} \exp\left[(a' + \delta')|y'|^{1/\gamma} + (a'' + \delta'')|y''|^{1/\beta}\right]} \leqslant$$

$$\leqslant C(|j| + 1)^\varkappa (|\eta'| + 1)^\varkappa \times$$

$$\times \sup_N \frac{(|z| + 1)^{r + |j|} \exp(y', \eta') \exp\left[-\delta |x''|^{1/\beta} + \delta |y''|^{1/\beta}\right]}{\exp\left[(a' + \delta')|y'|^{1/\gamma} + (a'' + \delta'')|y''|^{1/\beta}\right]}, \tag{10.6}$$

$$r = \varkappa + A - q.$$

Величина, стоящая справа под знаком верхней грани, не превосходит

$$(|z|+1)^{r+|j|}\exp\big[|y'||\eta'|-(a'+\delta')|y'|^{1/\gamma}-$$
$$-(a''+\delta''-\delta)|y''|^{1/\beta}-\delta|x''|^{1/\beta}\big]. \qquad (11.6)$$

Предположим, что $\delta\leqslant\delta''$, а точка η' принадлежит области ω', равной пространству $R_{\xi'}$ в случае $\gamma<1$, и шару $|\xi'|<a'$ в случае $\gamma=1$. Из этих предположений и неравенства (2) следует, что величина, стоящая в квадратных скобках в (11), не превосходит $-\delta_0|z|$ с некоторым $\delta_0>0$. Поэтому верхняя грань в правой части (10) не превосходит

$$C\sup(|z|+1)^{r+|j|}\exp(-\delta_0|z|).$$

Из вычислений 8° § 3 следует, что эта верхняя грань не больше чем

$$CB^{r+|j|}(r+|j|)^{r+|j|}\leqslant C_1B_1^{|j|}|j|^{|j|}.$$

Учитывая это неравенство в (10), мы приходим к выводу, что функция $(u,\ \psi)_{\xi''}$ аналитична в области ω'.

По условию функция u вместе со всеми своими производными по ξ' обращается в нуль на L. Это означает, что

$$D^j_{\xi'}(u,\ \psi)_{\xi''}\Big|_{\xi'=0}=0 \qquad (12.6)$$

для любой функции $\psi\in\left[\mathcal{D}\left(\Omega_{\bar{l}''}\right)\right]$. Как мы установили выше, функционал (12) определен на пространстве $\left[S^{q''}_{\bar{l}''}\right]^s$, $q''=q''(-|j|-\nu)$ и, следовательно, равен нулю, так как в силу (12) обращается в нуль на плотном подпространстве $\left[\mathcal{D}\left(\Omega_{\bar{l}''}\right)\right]^s$. Заметим, что любая функция ψ, удовлетворяющая неравенству (9), сама принадлежит пространству $\left[S^{q''}_{\bar{l}''}\right]^s$ при любом q''. Следовательно, по доказанному функция $(u,\ \psi)_{\xi''}$, с одной стороны, аналитична в ω', а с другой, удовлетворяет условиям (12). Отсюда $(u,\ \psi)_{\xi''}=0$ в ω' для любой функции ψ, для которой имеет место неравенство (9).

Сейчас мы покажем, что функциями, удовлетворяющими неравенству (9), можно приблизить любую функцию $\chi\in\left[\mathcal{D}\left(\Omega_{\bar{l}''}\right)\right]^s$ по норме $\|\cdot\|^{q''}_{\bar{l}''}$, $q''=q''(-\nu)$. Так как функционал $(u,\ \psi)_{\xi''}\Big|_{\xi'=\eta'}$ непрерывен по этой норме, отсюда будет следовать, что $u\equiv 0$ в $\omega'\times R_{\xi''}$. Поскольку $\beta<1$, то, как известно *), существует некоторая функция ψ_1, удовлетворяющая неравенству (9), интеграл от которой по $R_{\xi''}$ равен единице. Рассмотрим последовательность функций $\psi_k(\xi)=k^{n-m}\psi_1(k\xi)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ Каждая из функций этой последовательности также удовлетворяет неравенству (9) при любом $\delta>0$. Из формулы

$$F[\psi_k(\xi''-\eta'')]=\exp(z'',\ i\eta'')F[\psi_k(\xi'')]$$

*) См. Гельфанд и Шилов [2].

следует, что любой сдвиг функции ψ_k также удовлетворяет (9) с любым $\delta > 0$. Отсюда следует, что для любой функции $\chi \in [\mathscr{D}(\Omega_{\widetilde{T}'})]^s$ свертка $\chi * \psi_k$ обладает тем же свойством. Заметим, что интеграл от функции $|\widetilde{I}''\psi_k|^2$, взятый по дополнению к любой окрестности нуля, стремится к нулю при $k \to \infty$, в то время как интеграл от ψ_k по R_{ξ}, равен единице при любом k. Отсюда, как легко сообразить, вытекает, что $\|\chi * \psi_k - \chi\|^0_{\widetilde{T}''} \to 0$. Следовательно, при любом j разность $D^j_{\xi''}(\chi * \psi_k) - D^j_{\xi''}\chi = D^j\chi * \psi_k - D^j\chi$ также стремится к нулю по норме $\|\cdot\|^0_{\widetilde{T}''}$. Поэтому разность $\chi * \psi_k - \chi$ стремится к нулю по любой норме $\|\cdot\|^{q''}_{\widetilde{T}'}$, ч. и т. д.

Итак, мы установили, что функция u равна нулю в области $\omega' \times R_{\xi''}$. Если $\gamma < 1$, то из (3) $\omega' = R_{\xi'}$, откуда $u \equiv 0$. Рассмотрим случай $\gamma = 1$. В этом случае по условию областью определения функции u является полоса $|\xi'| < A'$, в то время как область ω' равна полосе $|\xi'| < a'$. По построению функция $\exp(a'|y'|)$ является логарифмически двойственной по отношению к функции, равной единице в шаре $|\xi'| < \frac{A'}{1+\varepsilon}$ и бесконечности вне этого шара. Отсюда $a' = \frac{A'}{1+\varepsilon}$. Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $u \equiv 0$ во всей своей области определения. ■

4°. Примеры.

Пример 1. Пусть $s = t$, $m = 1$. В этом случае приведенным порядком системы (1.4) называется наименьшее число p_0 такое, что на многообразии N выполнено неравенство

$$|z'| \leqslant C(|z''|^{p_0} + 1).$$

Если $p_0 > 1$, то неравенство (2) выполнено с $\gamma = 1$ и $\beta = \frac{1}{p_0}$. Следовательно, доказанная теорема гарантирует единственность решения задачи Коши в пространстве обобщенных функций, определенных в полосе $|\xi'| < A'$, растущих на бесконечности не быстрее $\exp(A''|\xi''|^{(p_0/p_0-1)})$, причем числа $A' > 0$ и $A'' > 0$ произвольны. Г. Н. Золотарев в [2] показал, что показатель $p_0/(p_0 - 1)$ в этой оценке яляется наибольшим, при котором эта оценка обеспечивает единственность решения задачи Коши. Естественно ожидать, что показатели $1/\beta$ и $1/\gamma$ в общей теореме этого параграфа также являются наилучшими, однако этот вопрос совсем не исследован. Если $p_0 = 1$, то в неравенстве (2) мы можем положить $\gamma = 1$, $\beta = 1 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, задача Коши имеет лишь единственное решение в пространстве функций, определенных в той же полосе, растущих на бесконечности не быстрее $\exp(A''|\xi''|^a)$, где A'' и a также произвольны.

Глава VII

НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой главе изучается разрешимость общей неоднородной системы уравнений в произвольной области евклидового пространства, а также возможность аппроксимации решений однородной системы в этой области экспоненциальными полиномами. В § 7 мы дадим точную и инвариантную формулировку этих задач в виде соотношения между функциональным пространством и $\mathcal{P}$-модулем, отвечающим данной системе уравнений. В § 8 будет доказана важная теорема о разрешимости произвольной неоднородной системы в выпуклой области. В §§ 9—12 мы найдем различные необходимые или достаточные условия разрешимости неоднородной системы и возможности аппроксимации в невыпуклых областях.

§ 7. Разрешимость неоднородных систем. *М*-выпуклость

Пусть снова p — произвольная $\mathcal{P}$-матрица размера $t \times s$. Рассмотрим соответствующую неоднородную систему уравнений

$$p(iD)\,u = w. \qquad (1.7)$$

Здесь w — известная вектор-функция с t компонентами. Наша цель — найти условия разрешимости этой системы, не налагая на ее решение u никаких начальных или краевых условий. Так как матрица p предполагается произвольной, между ее строками могут существовать некоторые дифференциальные соотношения. Очевидно, что для разрешимости системы (1) необходимо, чтобы вектор w удовлетворял тем же соотношениям. Опишем все такие соотношения.

Как будет следовать из теоремы 1 этого параграфа, для локальной разрешимости системы (1) достаточно учитывать лишь соотношения вида $r(iD)\,p(iD) = 0$, где $r' \in \mathcal{P}^t$. Для того чтобы описать все соотношения такого вида, поступим следующим образом. Выберем $\mathcal{P}$-матрицу p_1 таким образом, чтобы была точна последовательность

$$\mathcal{P}^{t_2} \xrightarrow{p_1'} \mathcal{P}^{t} \xrightarrow{p'} \mathcal{P}^{s}, \qquad (2.7)$$

где p_1' — транспонированная матрица. Из точности этой последовательности следует, что $p'p_1'=0$, откуда $p_1 p=0$. Поэтому для разрешимости системы (1) необходимо выполнение равенства

$$p_1(iD)\,w=0. \tag{3.7}$$

Покажем, что всякий вектор r, удовлетворяющий равенству $rp=0$, является линейной комбинацией строк матрицы p_1 с коэффициентами из $\mathscr{P}$. Действительно, из $rp=0$ следует, что $p'r'=0$. Поэтому из точности (2) $r'\in p_1'\mathscr{P}^{t_2}$, т. е. $r'=p_1'F$, где $F\in\mathscr{P}^{t_2}$. Отсюда $r=Fp_1$, ч. и т. д. Следовательно, любое соотношение вида $r(iD)\,w=0$, где $rp=0$, вытекает из равенства (3).

Задачу о нахождении условий разрешимости системы (1) мы сформулируем теперь так: найти те пространства обобщенных функций, в которых условие (3) является достаточным для разрешимости системы (1) в том же пространстве. Перейдем к точным определениям.

1°. M-выпуклость.

Определение 1. Пусть Φ — некоторое пространство обобщенных функций, являющееся топологическим $\mathscr{P}$-модулем. Пусть, далее, M — некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль и

$$M_*:\ \ldots\longrightarrow\mathscr{P}^{t_{k+1}}\xrightarrow{p_k'}\mathscr{P}^{t_k}\longrightarrow\ldots\xrightarrow{p_1'}\mathscr{P}^{t}\xrightarrow{p'}\mathscr{P}^{s}\longrightarrow M\longrightarrow 0 \tag{4.7}$$

— некоторая свободная резольвента этого модуля. Скажем, что *пространство* (*модуль*) Φ *M-выпукло*, если точна последовательность

$$0\longrightarrow\Phi_p\longrightarrow\Phi^s\xrightarrow{p}\Phi^t\xrightarrow{p_1}\ldots\longrightarrow\Phi^{t_k}\xrightarrow{p_k}\Phi^{t_{k+1}}\longrightarrow\ldots, \tag{5.7}$$

которую мы обозначим через $\operatorname{Hom}(M_*, \Phi)$. Напомним, что точность последовательности (5) означает, что она алгебраически точна, а все отображения суть гомоморфизмы. В силу предложения 7 § 3 гл. I M-выпуклость пространства Φ не зависит от выбора свободной резольвенты M_*.

Из M-выпуклости пространства Φ вытекает, что для любой правой части w, принадлежащей пространству Φ_{p_1}, существует решение u системы (1), причем соответствие

$$\Phi_{p_1}\ni w\to u\in\Phi^s/\Phi_p \tag{6.7}$$

непрерывно. M-выпуклость пространства Φ заключается в том, что это свойство имеет место также для матриц p_1, p_2, ...

В общем случае последовательность (5) лишь полуточна, и, следовательно, мы можем рассмотреть фактормодули

$$\operatorname{Hom}(M, \Phi)=\operatorname{Ker} p=\Phi_p,$$

$$\operatorname{Ext}^l(M, \Phi)=\Phi_{p_l}\big/p_{l-1}\Phi^{t_{l-1}},\qquad l=1,\ 2,\ \ldots\ (t_1=t,\quad t_0=s).$$

Согласно предложению 7 § 3 гл. I эти модули с точностью до $\mathscr{P}$-изоморфизмов зависят лишь от M и Φ и не зависят от свободной резольвенты M_*. Более точно, справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{P}^{\tau_{k+1}} \xrightarrow{\pi'_k} \mathscr{P}^{\tau_k} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\pi'_1} \mathscr{P}^{\tau} \xrightarrow{\pi'} \mathscr{P}^{\sigma} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

— некоторая другая свободная резольвента модуля M. Тогда для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ существуют $\mathscr{P}$-матрицы f_l и g_l такие, что определены ассоциированные с ними отображения

$$\Phi_{p_l}/p_{l-1}\Phi^{t_{l-1}} \underset{\check{f}_l}{\overset{\check{g}_l}{\rightleftarrows}} \Phi_{\pi_l}/\pi_{l-1}\Phi^{\tau_{l-1}} \quad (\pi_0 = \pi, \ p_0 = p),$$

и эти отображения устанавливают изоморфизм.

Для модуля $\mathrm{Hom}(M, \Phi)$ мы часто будем применять более короткое обозначение Φ_M. Таким образом, Φ_M есть пространство, полученное отождествлением всех пространств Φ_p, где $\mathrm{Coker}\, p' \cong M$ с помощью изоморфизмов вида $\hat{f}_0$ и $\hat{g}_0$.

Экспоненциальным полиномом в R^n_ξ называется любая конечная сумма вида

$$f(\xi) = \sum_j f_j(\xi) \exp(z_j, -i\xi), \quad z_j \in C^n, \quad f_j(\xi) \in \mathscr{P}_\xi. \tag{7.7}$$

Через E мы обозначим пространство всех экспоненциальных полиномов в R^n_ξ, наделенное дискретной топологией. Любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами переводит экспоненциальный полином в некоторый другой экспоненциальный полином и, следовательно, является линейным оператором в пространстве E. Отсюда следует, что пространство E есть $\mathscr{P}$-модуль.

Определение 2. Предположим, что пространство Φ содержит E. В таком случае для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля M пространство E_M является подпространством в Φ_M. Скажем, что пространство Φ *сильно M-выпукло относительно данного конечного $\mathscr{P}$-модуля M*, если оно M-выпукло, а подпространство E_M плотно в Φ_M.

Определения 1 и 2 позволяют сформулировать задачу разрешимости системы (1) в следующем общем виде.

Широкая проблема M-выпуклости.

Пусть задан некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль M. Требуется описать класс (сильно) M-выпуклых пространств обобщенных функций.

Эта проблема будет интересовать нас главным образом для пространств $\mathscr{D}^*(\Omega)$ и $\mathscr{E}(\Omega)$. Применительно к таким пространствам она может быть сформулирована так.

Узкая проблема M-выпуклости.

Для данного конечного $\mathscr{P}$-модуля M описать класс областей Ω, для которых пространство $\mathscr{D}^*(\Omega)$ ($\mathscr{E}(\Omega)$) (сильно) M-выпукло.

Содержание §§ 7—12 в основном посвящено изучению узкой проблемы M-выпуклости.

2°. Примеры.

Пример 1. Пусть $s=t$, а матрица $p(z)$ не вырождена тождественно, т. е. ее определитель не есть тождественный нуль. Очевидно, что $p_1(z)\equiv 0$. Следовательно, пространство Φ M-выпукло тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$\Phi^s \xrightarrow{p} \Phi^t \longrightarrow 0,$$

т. е. система (1) разрешима в Φ^s для любой правой части $w \in \Phi^t$ и соответствие (6) непрерывно.

Пример 2. Пусть d — оператор внешнего дифференцирования в R^n. На дифференциальные формы k-го порядка ($k=0, 1, 2, \ldots$) он действует по формуле

$$d\colon u = \sum_{i_1<\ldots<i_k} u_{i_1,\ldots,i_k}\, d\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_k} \to w =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k,\,j} \frac{\partial u_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial \xi_j}\, d\xi_j \wedge d\xi_i \wedge \ldots \wedge d\xi_{i_k}.$$

Если коэффициенты $u_{i_1,\ldots,i_k}$ и $w_{i_1,\ldots,i_{k+1}}$ форм u и w записать в фиксированном порядке, мы получим вектор-функции $\breve{u}$ и $\breve{w}$ соответственно с $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$ компонентами. Как легко сообразить, действие оператора d на форму u отвечает действию некоторого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $d_k(D)$ на вектор $\breve{u}$. В частности,

$$d_0(D) = \mathrm{grad}, \quad d_{n-1}(D) = \mathrm{div}.$$

Рассмотрим последовательность соответствующих $\mathcal{P}$-отображений:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}^n \xrightarrow{d_1} \ldots \longrightarrow \mathcal{P}^{\binom{n}{k}} \xrightarrow{d_k} \mathcal{P}^{\binom{n}{k+1}} \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \mathcal{P}^n \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{P}.$$

Так как квадрат оператора внешнего дифференцирования равен нулю, то $d_{k+1}d_k = 0$ для любого $k \geqslant 0$, следовательно, эта последовательность полуточна. Как легко показать, эта последовательность на самом деле точна (см., например, предложение 2 § 13). Нетрудно также видеть, что транспонированная матрица d'_k с точностью до знака и нумерации строк и столбцов совпадает с матрицей d_{n-1-k} (см. там же). Отсюда следует, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{P} \xrightarrow{d'_{n-1}} \mathscr{P}^n \xrightarrow{d'_{n-2}} \ldots \longrightarrow \mathscr{P}^{\binom{n}{n-k}} \xrightarrow{d'_{n-1-k}} \mathscr{P}^{\binom{n}{n-1-k}} \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \mathscr{P}^n \xrightarrow{d'_0} \mathscr{P} \qquad (8.7)$$

совпадает с предыдущей и, следовательно, является свободной резольвентой модуля $\operatorname{Coker} d'_0 = \mathscr{P}/d'_0\mathscr{P}^n$. Поэтому согласно определению выпуклость пространства Φ относительно модуля $\operatorname{Coker} d'_0$ означает точность последовательности

$$0 \longrightarrow \Phi_{d_0} \longrightarrow \Phi \xrightarrow{d_0} \Phi^n \xrightarrow{d_1} \ldots \longrightarrow \Phi^{\binom{n}{k}} \xrightarrow{d_k} \Phi^{\binom{n}{k+1}} \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \Phi^n \xrightarrow{d_{n-1}} \Phi \longrightarrow 0, \qquad (9.7)$$

где Φ_{d_0} — подпространство в Φ, образованное функциями, удовлетворяющими системе уравнений $d_0 u = 0$, т. е. подпространство локально постоянных функций.

Иными словами, выпуклость пространства Φ относительно модуля $\operatorname{Coker} d'_0$ означает, что при любом k, $0 \leqslant k \leqslant n$, система уравнений $d_k u = w$ всегда разрешима в $\Phi^{\binom{n}{k}}$ при условиях $w \in \Phi^{\binom{n}{k+1}}$ и $d_{k+1} w = 0$, причем ее решение u как элемент факторпространства $\Phi^{\binom{n}{k}}/\Phi_{d_k}$ непрерывно зависит от w.

Вернемся к дифференциальным формам. Пространство $\Phi^{\binom{n}{k}}$ будем интерпретировать как пространство дифференциальных форм порядка k с коэффициентами из Φ. Тогда рассмотренная выше система уравнений записывается так: $du = w$ при условии $dw = 0$, где u и w — дифференциальные формы с коэффициентами из Φ. Таким образом, $\operatorname{Coker} d'_0$-выпуклость пространства Φ означает, что когомологии дифференциальных форм с коэффициентами из Φ равны нулю, а оператор внешнего дифференцирования, рассматриваемый в пространствах таких форм, является гомоморфизмом. В общем случае пространство когомологий дифференциальных форм порядка $k \geqslant 0$ с коэффициентами из Φ равно пространству $\operatorname{Ext}^k(\operatorname{Coker} d'_0, \Phi)$.

Если мы оборвем последовательность (9) на члене $\mathscr{P}^{\binom{n}{k}}$, то получим свободную резольвенту модуля $\operatorname{Coker} d'_k$. Поэтому выпуклость пространства Φ относительно этого модуля означает точность последовательности (9), начиная с члена $\Phi^{\binom{n}{k}}$.

Пример 3. Пусть n — четное число: $n = 2m$. Положив $\zeta_j = \xi_j + i\xi_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$, мы введем в R^n структуру комплексного пространства C^m. Оператор d мы разложим в сумму операторов $'d$ и $''d$, действующих по формулам

$$'d\colon\ \omega \to \sum d\zeta_j \wedge \frac{\partial\omega}{\partial\zeta_j}, \qquad ''d\colon\ \omega \to \sum d\bar{\zeta}_j \wedge \frac{\partial\omega}{\partial\bar{\zeta}_j}.$$

По аналогии с примером 2 при любом $k=0, 1, \ldots$ действие оператора $''d$ на форму ω типа $(0, k)$ можно представить как действие некоторой $\mathscr{P}$-матрицы $''d_k(D)$ на вектор-функцию, компонентами которой являются коэффициенты формы ω. Нетрудно сообразить, что оператор $''d_k$ с точностью до нумерации строк и столбцов может быть получен из оператора d_k, действующего в R^m, с помощью замены

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} \to \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}, \qquad j=1, \ldots, m.$$

В частности,

$$''d_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_m} \end{bmatrix}$$

есть оператор, определяющий систему уравнений Коши — Римана. Исходя из этого замечания, нетрудно установить точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{P} \xrightarrow{''d'_{m-1}} \mathscr{P}^m \xrightarrow{''d'_{m-2}} \ldots \xrightarrow{''d'_1} \mathscr{P}^m \xrightarrow{''d'_0} \mathscr{P} \longrightarrow \operatorname{Coker} {''d'_0} \longrightarrow 0. \tag{10.7}$$

Последовательность $\operatorname{Hom}(M_*, \Phi)$ имеет вид

$$0 \longrightarrow \Phi_{''d_0} \longrightarrow \Phi \xrightarrow{''d_0} \Phi^m \xrightarrow{''d_1} \ldots \xrightarrow{''d_{m-2}} \Phi^m \xrightarrow{''d_{m-1}} \Phi \longrightarrow 0,$$

где $\Phi_{''d_0}$ — пространство голоморфных функций, принадлежащих Φ.

Отсюда мы заключаем, что пространство $\operatorname{Ext}^k(\operatorname{Coker} {''d'_0}, \Phi)$ равно пространству когомологий порядка k $''d$-дифференциальных форм с коэффициентами из Φ.

Пример 4. Мы рассмотрим сейчас класс операторов, содержащий операторы, фигурирующие в примерах 2 и 3. Пусть

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_t \end{bmatrix}$$

— $\mathscr{P}$-матрица размера $t \times 1$, обладающая следующим свойством: для любого $\tau = 1, \ldots, t$ многочлен p_τ не равен тождественно нулю и взаимно прост с идеалом $p_1\mathscr{P}+\ldots+p_{\tau-1}\mathscr{P}$, т. е. имеет место равенство

$$p_\tau\mathscr{P}\cap(p_1\mathscr{P}+\ldots+p_{\tau-1}\mathscr{P})=p_\tau(p_1\mathscr{P}+\ldots+p_{\tau-1}\mathscr{P}).$$

При этом условии, как мы установим в предложении 2 § 13, модуль $\operatorname{Coker} p'$ допускает следующую свободную резольвенту:

$$0\longrightarrow\mathscr{P}\xrightarrow{d'_{t-1}(p)}\mathscr{P}^t\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathscr{P}^{\binom{t}{t-k}}\xrightarrow{d'_{t-1-k}(p)}\mathscr{P}^{\binom{t}{t-1-k}}\longrightarrow\ldots$$
$$\ldots\longrightarrow\mathscr{P}^t\xrightarrow{d_0(p)}\mathscr{P},\qquad(11.7)$$

где $d_k(p)$, $k=0,\ldots,t-1$, — матрица, полученная из матрицы $d_k(D)$ примера 2, отвечающей пространству R^t, заменой «переменных» $\frac{\partial}{\partial\xi_i}\longrightarrow p_i$, $i=1,\ldots,t$.

Матрица p удовлетворяет сформулированному условию, например, если операторы $p_1,\ldots,p_t$ действуют по различным группам переменных. Этим свойством обладают, в частности, матрицы d_0 и $''d_0$. Тем самым мы установили точность последовательностей (8) и (10), являющихся частными случаями последовательности (11) при $p=d_0$, соответственно $p={}''d_0$.

3°. Общие свойства *M*-выпуклых пространств.

Предложение 1.

I. *Для того чтобы пространство E_p было плотно в Φ_p, достаточно, чтобы*

$$[\Phi^*]^s\cap E_p^0=p^*[\Phi^*]^t,\qquad(12.7)$$

где $[\Phi^*]^s\cap E_p^0$ — подпространство в $[\Phi^*]^s$, ортогональное E_p.

II. *Для того чтобы пространство Φ было сильно M-выпукло, необходимо, чтобы последовательность*

$$\ldots\longrightarrow[\Phi^*]^{t_{k+1}}\xrightarrow{p_k^*}[\Phi^*]^{t_k}\longrightarrow\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{p_1^*}[\Phi^*]^t\xrightarrow{p^*}[\Phi^*]^s\cap E_p^0\longrightarrow0\qquad(13.7)$$

была алгебраически точна.

III. *Пусть Φ — $\mathscr{F}$-пространство Шварца или сопряженное к такого рода пространству. Для того чтобы это пространство было M-выпукло, необходимо и достаточно выполнение одного из трех эквивалентных условий:*

а) *последовательность* (5) *алгебраически точна;*

б) *последовательность*

$$\ldots\longrightarrow[\Phi^*]^{t_{k+1}}\xrightarrow{p_k^*}[\Phi^*]^{t_k}\longrightarrow\ldots\xrightarrow{p_1^*}[\Phi^*]^t\xrightarrow{p^*}[\Phi^*]^s\qquad(14.7)$$

алгебраически точна, а образ оператора p^* замкнут;

в) *последовательность* (14) *точна.*

Для того чтобы пространство Φ *было сильно* M*-выпукло, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* (13) *была (алгебраически) точна.*

Доказательство. Установим первое утверждение. Предположим, что E_p не плотно в Φ_p. В таком случае существует функционал $\varphi \in [\Phi^*]^s$, обращающийся в нуль на E_p, но не равный тождественно нулю на Φ_p. Таким образом, $\varphi \in [\Phi^*]^s \cap E_p^0$, следовательно из (12) $\varphi \in p^* [\Phi^*]^t$. Отсюда следует, что функционал φ обращается в нуль и на Φ_p. Полученное противоречие доказывает, что E_p плотно в Φ_p.

Докажем второе утверждение. Пусть пространство Φ сильно M-выпукло. Из точности последовательности (5) вытекает, что точна последовательность

$$0 \longrightarrow \Phi^s/\Phi_p \xrightarrow{p} \Phi^t \xrightarrow{p_1} \ldots$$

Согласно первому утверждению предложения 8 из § 1 последовательность сопряженных отображений алгебраически точна. Чтобы получить отсюда точность (13), остается показать, что сопряженное с Φ^s/Φ_p пространство по запасу элементов совпадает с $[\Phi^*]^s \cap E_p^0$. Действительно, используя каноническое отображение $\Phi^s \to \Phi^s/\Phi_p$, мы можем рассматривать любой функционал над Φ^s/Φ_p как элемент пространства $[\Phi^*]^s$, обращающийся в нуль на Φ_p и обратно. Поскольку E_p плотно в Φ_p, условие: функционал φ обращается в нуль на Φ_p, эквивалентно условию $\varphi \in E_p^0$. Тем самым равенство $(\Phi^s/\Phi_p)^* = [\Phi^*]^s \cap E_p^0$ доказано.

Перейдем к третьему утверждению. Эквивалентность M-выпуклости пространства Φ и условий а), б) и в) вытекает из второй части предложения 8 § 1.

Покажем, наконец, что эквивалентны три условия: (1) пространство Φ сильно M-выпукло, (2) последовательность (13) алгебраически точна и (3) последовательность (13) точна. Импликация (1)$\Longrightarrow$(2) следует из второго утверждения данного предложения. Так как $[\Phi^*]^s \cap E_p^0$ есть замкнутое подпространство в $[\Phi^*]^s$, импликация (2)$\Longrightarrow$(3) вытекает из эквивалентности условий б) и в). Наконец, импликация (3)$\Longrightarrow$(1) вытекает из импликации: условие в)$\Longrightarrow$ M-выпуклость пространства Φ и утверждения 1. ■

Предложение 2. *Пусть* Ω *есть объединение возрастающей последовательности областей* Ω_α, $\alpha = 1, 2, \ldots$, *таких, что каждое пространство* $\mathcal{E}(\Omega_\alpha)$ M*-выпукло. Предположим, что при любом* α *пространство* $\mathcal{E}_M(\Omega_{\alpha+1})$ *плотно в* $\mathcal{E}_M(\Omega_\alpha)$. *Тогда пространство* $\mathcal{E}(\Omega)$ *также* M*-выпукло, а пространство* $\mathcal{E}_M(\Omega)$ *плотно в* $\mathcal{E}_M(\Omega_\alpha)$ *при любом* α.

Если при каждом α *пространство* $\mathcal{E}(\Omega_\alpha)$ *сильно* M*-выпукло, то пространство* $\mathcal{E}(\Omega)$ *также сильно* M*-выпукло.*

Доказательство. Совокупность пространств $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ и отображений сужения $\mathscr{E}(\Omega_{\alpha+1}) \to \mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ является убывающим семейством л. т. п., которое мы обозначим так: $\{\mathscr{E}(\Omega_\alpha)\}$. Для любой $\mathscr{P}$-матрицы q мы можем также рассмотреть убывающее семейство $\{\mathscr{E}_q(\Omega_\alpha)\}$, построенное аналогичным образом. Зафиксируем свободную резольвенту (4.7) модуля M и при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим последовательность убывающих семейств

$$0 \longrightarrow \{\mathscr{E}_{p_i}(\Omega_\alpha)\} \longrightarrow \{[\mathscr{E}(\Omega_\alpha)]^{t_i}\} \xrightarrow{p_i} \{\mathscr{E}_{p_{i+1}}(\Omega_\alpha)\} \longrightarrow 0, \tag{15.7}$$

где $p_0 = p$. Поскольку при любом α пространство $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ M-выпукло, то, отбросив в (15) фигурные скобки, мы получим точную последовательность л. т. п. Поэтому последовательность убывающих семейств (15) также точна.

Проверим, что для нее выполнены все условия предложения 11 § 1. Выполнение б) следует из того, что все $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ суть пространства Фреше. Проверим условие а). Если $i = 0$, то пространство $\mathscr{E}_{p_i}(\Omega_{\alpha+1})$ плотно в $\mathscr{E}_{p_i}(\Omega_\alpha)$ по предположению.

В случае же $i > 0$ из M-выпуклости пространств $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ следует, что $\mathscr{E}_{p_i}(\Omega_\alpha) = p_{i-1}[\mathscr{E}(\Omega_\alpha)]^{t_{i-1}}$ при всех α. Но поскольку пространство $\mathscr{E}(\Omega_{\alpha+1})$, очевидно, плотно в $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$, то пространство $p_{i-1}[\mathscr{E}(\Omega_{\alpha+1})]^{t_{i-1}}$ плотно в $p_{i-1}[\mathscr{E}(\Omega_\alpha)]^{t_{i-1}}$. Таким образом, мы вправе применить предложение 11 § 1, из которого следует точность последовательности проективных пределов семейств в (15).

Найдем эти проективные пределы. Поскольку каждый компакт $K \subset \Omega$ принадлежит некоторой области Ω_α, то мы имеем $\varprojlim \mathscr{E}(\Omega_\alpha) \cong \cong \mathscr{E}(\Omega)$. Отсюда вытекает, что $\varprojlim \mathscr{E}_q(\Omega_\alpha) \cong \mathscr{E}_q(\Omega)$ для любой $\mathscr{P}$-матрицы q. Следовательно, искомая предельная последовательность выглядит так:

$$0 \to \mathscr{E}_{p_i}(\Omega) \to [\mathscr{E}(\Omega)]^{t_i} \xrightarrow{p_i} \mathscr{E}_{p_{i+1}}(\Omega) \to 0.$$

По доказанному она точна при любом $i \geqslant 0$, что влечет M-выпуклость пространства $\mathscr{E}_M$.

Пространство $\mathscr{E}_M(\Omega)$, будучи проективным пределом пространств $\mathscr{E}_M(\Omega_\alpha)$, в силу предложения 2 § 1 плотно в каждом из них.

Пусть теперь каждое пространство $\mathscr{E}(\Omega_\alpha)$ сильно M-выпукло. Тогда условие: $\mathscr{E}_M(\Omega_{\alpha+1})$ плотно в $\mathscr{E}_M(\Omega_\alpha)$ выполнено, так как в каждом из этих пространств плотно E_M. Поэтому пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ M-выпукло. Любую функцию $u \in \mathscr{E}_M(\Omega)$ можно приблизить функциями из E_M по топологии каждого из пространств $\mathscr{E}_M(\Omega_\alpha)$ и, следовательно, по топологии их проективного предела $\mathscr{E}_M(\Omega)$. Таким образом, E_M плотно в $\mathscr{E}_M(\Omega)$. ■

4°. M-выпуклость пространства E.

Предложение 3.

Пространство E сильно M-выпукло относительно любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой $\mathcal{P}$-матрицы p и матрицы p_1 такой, что последовательность (2) точна, оказывается точной последовательность

$$E^s \xrightarrow{p} E^t \xrightarrow{p_1} E^{t_2}. \tag{16.7}$$

Здесь мы для удобства полагаем $p = p(D)$ и $p_1 = p_1(D)$, где $D = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)$. Если экспоненциальный полином вида (7) принадлежит ядру отображения p_1 в (16) и все точки z_j, фигурирующие в (7), различны, то каждое слагаемое в правой части (7) также принадлежит ядру p_1. Следовательно, для того, чтобы установить точность (16), достаточно показать, что для любого $Z \in C^n$ точна последовательность

$$E_Z^s \xrightarrow{p} E_Z^t \xrightarrow{p_1} E_Z^{t_2}, \tag{17.7}$$

где E_Z—пространство экспоненциальных полиномов вида $f(\xi) \times \times \exp(Z, -i\xi)$. Достаточно ограничиться случаем $Z=0$, так как общий случай сводится к нему подходящим сдвигом матриц $p(z)$ и $p_1(z)$. Поэтому мы будем считать, что в (17) $Z = 0$. Заметим, что E_0 есть пространство всех многочленов от $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим пространство $\mathcal{S}$ всех формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами от n переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$. В этом пространстве введем абсолютно неотделимую топологию. Установим отношение двойственности между E_0 и $\mathcal{S}$ с помощью билинейной формы

$$(f, \varphi) = \sum f_i \varphi_i, \quad f = \sum \frac{f_i}{i!} \xi^i \in E_0, \quad \varphi = \sum \varphi_i z^i \in \mathcal{S}. \tag{18.7}$$

Тем самым мы каждый элемент пространства E_0 рассматриваем как линейный функционал над $\mathcal{S}$. Как легко понять, всякий линейный функционал над $\mathcal{S}$ может быть записан в виде (18), т. е. пространство E_0 по запасу элементов совпадает с сопряженным с $\mathcal{S}$ пространством.

Покажем, что оператор D^j, действующий в E_0, является сопряженным с оператором умножения на z^j в $\mathcal{S}$. Действительно, для любых $f \in E_0$ и $\varphi \in \mathcal{S}$ мы имеем

$$(f, z^j\varphi) = \sum f_i (z^j \varphi)_i = \sum f_i \varphi_{i-j} = \sum f_{i+j} \varphi_i = \sum (D^j f)_i \varphi_i = (D^j f, \varphi),$$

ч. и т. д. Отсюда следует, что операторы последовательности (17) являются сопряженными с операторами последовательности

$$\mathcal{S}^{t_1} \xrightarrow{p_1'} \mathcal{S}^{t} \xrightarrow{p'} \mathcal{S}^{s} \quad (p = p(z),\ p_1 = p_1(z)). \tag{19.7}$$

Поскольку топология в этих пространствах абсолютно неотделимая, отображение p' является гомоморфизмом. Так как $\mathcal{S}$ есть плоский $\mathcal{P}$-модуль, из точности последовательности (2) вытекает алгебраическая точность (19). Поэтому из предложения 8 § 1 следует точность (17), ч. и т. д. ■

Сейчас мы получим полезное для нас в дальнейшем описание пространств E_p.

Предложение 4. *Пусть p — произвольная $\mathcal{P}$-матрица размера $t \times s$, а $\mathcal{D}(z) = \sum \xi^l \mathcal{D}_j(z, \delta)$ — p'-оператор. Тогда для любых z и j экспоненциальный многочлен*

$$\mathcal{D}'_j(z, -i\xi) \exp(z, -i\xi) \tag{20.7}$$

принадлежит пространству E_p, а совокупность таких многочленов (отличных от тождественного нуля) образует базис в этом пространстве. Здесь через $\mathcal{D}'_j(z, -i\xi)$ мы обозначаем матрицу, полученную из транспонированной матрицы $\mathcal{D}'_j(z, \delta)$ заменой функционалов $\delta^{(\alpha)}$ на одночлены $(-i\xi)^\alpha/\alpha!$.

Доказательство. Согласно свойству p'-оператора при любом фиксированном z функция (20) отлична от тождественного нуля лишь для

$$j \in Z_+^n \setminus \mathcal{J}(z),$$

где $\mathcal{J}(z)$ — базисное множество в данной точке z, причем функции (20) с $j \in Z_+^n \setminus \mathcal{J}(z)$ линейно независимы. Отсюда следует, что совокупность всех функций (20) с $z \in N(p)$, $j \in Z_+^n \setminus \mathcal{J}(z)$ линейно независима. Таким образом, остается показать, что любой элемент пространства E_p является линейной комбинацией функций (20) и сами эти функции принадлежат E_p.

Произвольный элемент пространства E^s запишем в виде $f = \sum f_\alpha(-i\xi) \exp(z_\alpha, -i\xi)$, где все z_α различны, а $f_\alpha(-i\xi)$ суть столбцы высоты s, образованные многочленами от $-i\xi$. Для того чтобы функция f принадлежала E_p, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi \in [\mathcal{D}(R^n)]^s$ скалярное произведение $(p(iD)f, \varphi)$

равнялось нулю. Это равенство мы запишем так:

$$0=(p(iD)f,\ \varphi)=\left(\sum_\alpha f_\alpha(-i\xi)\exp(z_\alpha,\ -i\xi),\ p^*(iD)\varphi\right)=$$
$$=\sum_\alpha\left(\exp(z_\alpha,\ -i\xi),\ f^*_\alpha(i\xi)\,p^*(iD)\varphi\right)=\sum_\alpha\overline{f^*_\alpha(i\xi)\,p^*(iD)\varphi}\Big|_{z=\bar z_\alpha}=$$
$$=\sum_\alpha f^*_\alpha(D)\,p^*(z)\tilde\varphi\Big|_{z=\bar z_\alpha}=\sum_\alpha\overline{f'_\alpha(D)\,p'(z)\,\tilde\varphi^*(z)}\Big|_{z=z_\alpha}=$$
$$=\sum_\alpha\overline{f_\alpha(\delta(z-z_\alpha))\,p'(z)\,\tilde\varphi^*(z)}.$$

Поскольку значения любых производных функций $\tilde\varphi$ в различных точках z_α независимы между собой, то из равенства нулю правой части вытекает равенство нулю каждого его слагаемого. Иными словами, при любом α функционал $f'_\alpha(\delta(z-z_\alpha))$ обращается в нуль на всех функциях вида $p'(z)\tilde\varphi(z)$. Очевидно, что ряд Тейлора в любой точке z_α функции $\tilde\varphi$ может иметь любой наперед заданный конечный отрезок сколь угодно большой длины. Отсюда следует, что функционал $f'_\alpha(\delta)$ обращается в нуль на всем пространстве $p'(z_\alpha)\mathscr{P}^t$, где $\mathscr{P}$ — пространство формальных степенных рядов от n переменных. Но, как следует из свойства p'-оператора, всякий функционал, обращающийся в нуль на $p'(z_\alpha)\mathscr{P}^t$, является линейной комбинацией функционалов $\mathscr{D}_j(z_\alpha,\ \delta)$. Следовательно, экспоненциальный многочлен $f_\alpha(-i\xi)\exp(z_\alpha-i\xi)$ является линейной комбинацией экспоненциальных многочленов вида

$$\mathscr{D}'_j(z_\alpha,\ -i\xi)\exp(z_\alpha,\ -i\xi),\quad j\in Z^n_+.$$

Отсюда вытекает доказываемое утверждение. ■

§ 8. *М*-выпуклость в выпуклых областях

В этом параграфе мы покажем, что для любой выпуклой области Ω любое из пространств $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$, $\mathscr{D}^*(\Omega)$ является сильно M-выпуклым для всякого конечного $\mathscr{P}$-модуля M. Мы покажем также, что сильно M-выпуклыми являются также пространства $\mathscr{E}_I$ и S^*_I, где I — любое семейство логарифмически выпуклых функций (точное условие на I сформулировано в теореме 5). Эти результаты в известной мере оправдывают термин «M-выпуклость» *).

До сих пор пространства, в которых мы решали систему (1.7), были $\mathscr{P}$-модулями. В этом параграфе нам придется искать решения в пространствах Φ^s, в которых действие оператора p выводит за

*) По поводу этого термина см. также раздел «Примечания и литературные указания».

пределы Φ^t. Пусть Ψ — некоторое пространство, более широкое чем Φ, такое, что оператор p действует из Φ^s в Ψ^t. Скажем, что функция $u \in \Phi^s$ удовлетворяет системе (1.7) в Ψ, если правая часть w принадлежит Ψ^t и совпадает с pu.

1°. M-выпуклость пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset R^n$ — выпуклая область. Тогда для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля M пространство $\mathscr{D}^*(\Omega)$ сильно M-выпукло.*

Доказательство. Установим сначала M-выпуклость пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Для этого достаточно показать, что для любой матрицы p и матрицы p_1 такой, что последовательность (2.7) точна, определено и непрерывно отображение

$$\mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega) \to [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s / \mathscr{D}^*_p(\Omega), \tag{1.8}$$

обратное оператору p.

Лемма 1. *Пусть w — произвольный элемент пространства $\mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega)$, а $K \subset\subset K'$ — выпуклые компакты, принадлежащие Ω.*

I. *Существует функция $u \in [\mathscr{D}^*_K]^s$, являющаяся решением системы* (1.7) *в $\mathscr{D}^*_{K'}$, причем $\deg_K u \leqslant \deg_{K'} w + a$, где константа a зависит лишь от оператора p.*

II. *Для любого решения $u \in [\mathscr{D}^*_{K'}]^s$ системы* (1.7) *и чисел $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $u' \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, удовлетворяющую системе* (1.7) *в Ω, такую, что*

$$u' - u \in [\mathscr{E}^r_K]^s \text{ и } \| u' - u \|^r_K \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство леммы. Выберем некоторый выпуклый компакт K'' такой, что $K \subset\subset K'' \subset\subset K'$. Из точности последовательности (2.7) согласно предложению 2 § 4 гл. IV вытекает, что подмодуль $p_1' \mathscr{P}^{t_2} \subset \mathscr{P}^t$ примарный, причем C^n и p' суть ассоциированное с ним многообразие и нормальный нетеровский оператор. По условию функция w удовлетворяет однородной системе уравнений $p_1(iD) w = 0$ и принадлежит пространству $[\mathscr{E}^\alpha_{K'}]^t$, где $\alpha = -\deg_{K'} w$. Применив следствие 1 § 4 к этой функции и компактам $K'' \subset\subset K'$, мы получим представление

$$(\overline{w, \varphi}) = \int_{C^n} p'(z) \tilde{\varphi}^*(z) \mu, \quad \varphi \in [\mathscr{D}^*_{K''}]^t, \tag{2.8}$$

в котором

$$\| \mu \| = \int_{C^n} (|z| + 1)^{\alpha - A} \mathscr{I}_{K''}(y) |\mu| \leqslant C \| w \|^\alpha_{K'}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим функционал

$$\overline{(u,\ \psi)} = \int \tilde{\psi}^*(z)\,\mu,\quad \psi \in [\mathscr{D}_K^*]^s. \tag{4.8}$$

Из неравенства (3) и предложения 2 § 3

$$|(u,\ \psi)| \leqslant \|\tilde{\psi}^*\|_{A-\alpha}^{K''} \|\mu\| \leqslant C\|\psi\|_K^{A-\alpha}\|w\|_{K'}^{\alpha}. \tag{5.8}$$

Следовательно, функционал u принадлежит пространству $[\mathscr{E}_K^{\alpha-A}]^s$, т. е. $\deg_K u \leqslant A - \alpha = A + \deg_{K'} w$. Из (2) и (4)

$$\overline{(p(iD)\,u,\ \varphi)} = \overline{(u,\ p^*(iD)\,\varphi)} = \int p'(z)\,\tilde{\varphi}^*(z)\,\mu = \overline{(w,\ \varphi)}$$

для любой функции $\varphi \in [\mathscr{D}_K^*]^t$, т. е. $p(iD)\,u = w$. Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $u_1 \in [\mathscr{D}_{K'}^*]^s$ — произвольное решение системы (1.7) в $\mathscr{D}_{K'}^*$. Выберем строго возрастающую последовательность выпуклых компактов $\{K_\alpha,\ -\infty < \alpha < \infty\}$, стремящуюся к Ω такую, что $K_0 = K$, а $K_1 = K'$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и целое $r \geqslant 0$. Построим последовательность функций $u'_\alpha \in [\mathscr{D}_{K_\alpha}^*]^s$, $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяющую условиям:

1) $u'_1 = u_1$,

2) $p(iD)\,u'_\alpha = w$ в $\mathscr{D}_{K_\alpha}^*$,

3) $\|u'_{\alpha+1} - u'_\alpha\|_{K_{\alpha-1}}^r \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^\alpha}$, $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots$

Эту последовательность мы будем строить индукцией по α. Функция $u'_1 = u_1$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Предположим, что построены функции $u'_1,\ \ldots,\ u'_\alpha$. Используя первое утверждение леммы, мы найдем некоторую функцию $u_{\alpha+1} \in [\mathscr{D}_{K_{\alpha+1}}^*]^s$, являющуюся решением системы (1.7) в $\mathscr{D}_{K_{\alpha+1}}^*$. Разность $u_{\alpha+1} - u'_\alpha$ удовлетворяет однородной системе (1.4) в $\mathscr{D}_{K_\alpha}^*$. Применив к ней следствие 2 § 4, мы запишем ее в виде суммы $v_0 + v$, где v_0 есть обобщенное решение (1.4) в R^n, а $v \in [\mathscr{E}_{K_{\alpha-1}}^r]^s$, причем $\|v\|_{K_{\alpha-1}}^r \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^\alpha}$. Положим $u'_{\alpha+1} = u_{\alpha+1} - v_0$. Условие 2) очевидным образом выполнено. Выполнение неравенства 3) следует из того, что $u'_{\alpha+1} - u'_\alpha = v$ в $\mathscr{D}_{K_{\alpha+1}}^*$.

Таким образом, индукция проведена и тем самым искомая последовательность $\{u'_\alpha\}$ построена. Из неравенства 3) следует, что эта последовательность фундаментальна по норме $\|\cdot\|_{K_\alpha}^r$ на любом из компактов K_α и, следовательно, сходится в любом из пространств

$\left[\mathscr{D}^*_{K_\alpha}\right]^s$. Так как все эти пространства полные, последовательность $\{u'_\alpha\}$ имеет предел u в каждом из этих пространств. Поскольку функционал u принадлежит всем пространствам $\left[\mathscr{D}^*_{K_\alpha}\right]^s$, он является обобщенной функцией в области Ω, причем из 2) $p(iD)u=w$. Из условий 1) и 3) $\|u-u_1\|^r_K \leqslant \varepsilon$. Тем самым второе утверждение леммы также доказано. ■

Перейдем к доказательству теоремы. Из леммы 1, в частности, вытекает, что для любой правой части $w \in \mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega)$ существует решение системы (1.7), принадлежащее $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, т. е. отображение (1) определено. Нам остается показать, что оно непрерывно. Это означает, что для любой окрестности нуля U в $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ можно найти окрестность нуля U' в $\mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega)$ такую, что для любой функции $w \in U'$ существует решение системы (1.7) $u \in U$. По определению топологии в пространстве $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ фундаментальную систему окрестностей нуля в этом пространстве образуют поляры ограниченных множеств в $[\mathscr{D}(\Omega)]^s$. Согласно предложению 6 § 2, достаточно рассматривать лишь ограниченные множества вида

$$\mathscr{B}=\left\{\varphi \in [\mathscr{D}(\Omega)]^s,\ \|\varphi\|^b_K \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

где ε—положительное число, K—выпуклый компакт, принадлежащий Ω, а $b=b(\eta)$ — некоторая неубывающая положительная функция, определенная при $\eta \geqslant 0$. Наша цель — построить множество $\mathscr{B}' \in [\mathscr{D}(\Omega)]^t$ того же вида такое, что для любой функции $w \in \mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega)$, принадлежащей поляре $\mathscr{B}'$, существует решение $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ системы (1.7), принадлежащее поляре $\mathscr{B}$. Построив такое множество $\mathscr{B}'$, мы установим непрерывность отображения (1).

Не ограничивая общности, мы можем считать, что функция b удовлетворяет неравенству $b(\eta) \geqslant B^\eta \eta^{\eta\beta}$, где $B>0$, а $\beta>1$, так как чем больше функция b, тем уже поляра множества $\mathscr{B}$. Далее построим некоторое возрастающее семейство л. в. функций $\{b_\alpha(\eta)$, $-\infty<\alpha<\infty\}$, определенных в R^1, удовлетворяющее условиям предложения 5 § 3 таким, что $b(\eta) \leqslant b_\alpha(\eta)$ для всех α (см. замечание 7° § 3).

Лемма 2. *Всякую функцию* $v \in \left[\left(\mathscr{D}^{b_c}_{K_c}\right)^*\right]^s$, $c=A+B$, *являющуюся решением* (1.2) *в* $\left(\mathscr{D}^{b_{c-m}}_{K_c}\right)^*$, *можно приблизить элементами пространства* E_p *по норме пространства* $\left[\left(\mathscr{D}^b_K\right)^*\right]^s$.

Доказательство. Применим к функционалу v представление теоремы 2 § 4. Меры μ^λ в этом представлении имеют конечную норму $\|\mu\|_B$, следовательно, их можно приблизить по этой норме мерами μ^λ_0, являющимися конечными линейными комбинациями дельта-функций, сосредоточенных на многообразиях N^λ. Пусть $\mu_0^\lambda = \sum c_i^\lambda \delta(z - z_i^\lambda)$, где $z_i^\lambda \in N^\lambda$. Если мы поставим эти меры в представление (2.4), то получим функционал

$$\overline{(v_0, \varphi)} = \sum_\lambda \int d^\lambda (z, D) \tilde{\varphi}^* (z) \mu_0^\lambda = \sum_{j, \lambda} c_j^\lambda d^\lambda (z_j^\lambda, D) \tilde{\varphi}^* (z_j^\lambda) =$$
$$= \sum_{j, \lambda} \left(\left[c_j^\lambda d^\lambda (z_j^\lambda, -i\xi) \right]' \exp (z_j^\lambda, -i\xi), \overline{\varphi} \right).$$

Из этого равенства видно, что этот функционал равен функции

$$\sum \left[c_j^\lambda d^\lambda (z_j^\lambda, \quad -i\xi) \right]' \exp (z_j^\lambda, -i\xi)$$

и, следовательно, принадлежит E_p. Так как меры μ_0^λ приближают меры μ^λ по норме $\|\mu\|_B$, то согласно теореме 2 § 4 функционал v_0 приближает функционал v по норме пространства $[(\mathscr{D}_K^b)^*]^s$. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Применим теорему 2 § 4 к семействам мажорант $\{I_{K_\alpha}\}$, $\{b_\alpha\}$ и системе $p_1(iD) w = 0$. Так как w — обобщенная функция в Ω, она принадлежит пространству $[(\mathscr{D}_{K'}^{b'})^*]^t$, где $b' = b_{A+c+\nu}$, $K' = K_{A+c+\nu}$, а $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Поэтому функционал w может быть записан в виде (2.4), причем

$$\|\mu\|_{c+\nu} \leqslant C \|w\|', \tag{6.8}$$

где $\|w\|'$ — норма w как функционала над пространством $[\mathscr{D}_{K'}^{b'}]^t$. Рассмотрим функционал

$$\overline{(u', \psi)} = \int \tilde{\psi}^*(z) \mu, \quad \psi \in \left[\mathscr{D}_{K_c}^{b_c}\right]^s.$$

Из неравенства (6) и предложения 5 § 3

$$|(u', \psi)| \leqslant \|\tilde{\psi}^*\|_{R_{c+\nu}}^{K_{c+\nu}} \|\mu\|_{c+\nu} \leqslant C \|\psi\|_{K_c}^{b_c} \|w\|'. \tag{7.8}$$

Отсюда следует, что функционал u' принадлежит $\left[\left(\mathscr{D}_{K_c}^{b_c}\right)^*\right]^s$, причем из построения видно, что он удовлетворяет системе (1.7) в $\left(\mathscr{D}_{K_c}^{b_{c-m}}\right)^*$.

Из неравенства (7) вытекает оценка $\|u'\| \leqslant c_0 \|w\|'$. Искомое множество $\mathscr{B}'$ определим так: $\mathscr{B}' = \left\{ \varphi\colon \|\varphi\|_{K'}^{b'} \leqslant \frac{1}{\varepsilon'} \right\}$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2c_0}$. Тогда если w принадлежит поляре $\mathscr{B}'$, то из этой оценки следует, что функционал u' принадлежит поляре $2\mathscr{B}$.

Пусть, далее, $u_0 \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ — некоторое решение системы (1.7) в $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Разность $u_0 - u'$ принадлежит $\left[\left(\mathscr{D}_{K_c}^{b_c}\right)^*\right]^s$ и является решением системы (1.4) в $\left(\mathscr{D}_{K_c}^{b_{c-m}}\right)^*$. Поэтому из леммы 2 следует, что она может быть приближена функциями из E_p по норме пространства $[(\mathscr{D}_K^b)^*]^s$. В частности, мы можем найти функцию $v \in E_p$ такую, что разность $u_0 - u' - v$ принадлежит поляре множества $2\mathscr{B}$. Отсюда следует, что функция $u_0 - v \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ принадлежит поляре множества $\mathscr{B}$ и является решением системы (1.7) в $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Тем самым непрерывность отображения (1) доказана.

Пусть u — произвольное обобщенное решение (1.4) в $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Из леммы 2 следует, что функцию u мы можем приблизить функциями пространства E_p по норме пространства $[(\mathscr{D}_K^b)]^s$. В частности, мы можем найти такую функцию $v \in E_p$, что разность $u - v$ принадлежит поляре $\mathscr{B}$. Следовательно, функции из E_p плотны в $\mathscr{D}_p^*(\Omega)$ по топологии этого пространства. Тем самым доказательство теоремы 1 закончено. ■

Следствие 1. *Пусть Ω — выпуклая область, а $K \subset\subset K' \subset \Omega$ — выпуклые компакты. Тогда для любой правой части $w \in \mathscr{D}_{p_1}^*(\Omega)$ можно найти решение $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ системы* (1.7) *такое, что*

$$\deg_K u \leqslant \deg_{K'} w + a \ ^{*)},$$

где константа a зависит лишь от оператора p.

Действительно, согласно первому утверждению леммы 1 можно найти решение $u_0 \in [\mathscr{D}_{K''}^*]^s$, удовлетворяющее этому неравенству. Согласно второму утверждению этой леммы можно найти решение $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ такое, что $\|u - u_0\|_K^r \leqslant 1$, где $r \geqslant -\deg_K u_0$, откуда $\deg_K u \leqslant \deg_K u_0$. ■

2°. M-выпуклость пространств $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$ и $\mathscr{E}(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть Ω — выпуклая область. Тогда для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля M пространство $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$ сильно M-выпукло. Более того, для любой правой части $w \in \mathscr{D}_{p_1}^{*F}(\Omega)$ можно найти решение u системы* (1.7), *удовлетворяющее неравенству*

$$\deg_\Omega u \leqslant \deg_\Omega w + a \ ^{**)},$$

где a — некоторая константа, зависящая лишь от p.

Доказательство. Начнем со следующей леммы.

Лемма 3. *При любом α всякую функцию $u \in [\mathscr{E}_{K_\alpha}^\alpha]^s$, являющуюся решением системы* (1.4) *в $\mathscr{D}_{K_\alpha}^*$, можно приблизить функциями из E_p по норме $\|\cdot\|_{K_{\alpha-c}}^{\alpha-c}$, где c — константа, зависящая лишь от p.*

---

*) Мы предполагаем здесь, что $\deg_{K'} w > -\infty$, см. замечание 3°.

**) Здесь предполагается, что $\deg_\Omega w > -\infty$. Случай $\deg_\Omega w = -\infty$ содержится в теореме 3.

Доказательство этой леммы основано на следствии 1 § 4 и вполне аналогично доказательству леммы 2. Мы оставляем его читателю. ■

Построим теперь последовательность функций $u'_\alpha \in \left[\mathscr{E}_{K_\alpha}^{-q-a}\right]^s$, где $q = \deg_\Omega w$, удовлетворяющих условиям:

$$1)\ p(iD)\,u'_\alpha = w \text{ в } \mathscr{D}^*_{K_\alpha}, \qquad 2)\ \left\| u'_{\alpha+1} - u'_\alpha \right\|_{K_{\alpha-c}}^{-q-b} \leqslant \frac{1}{2^\alpha},$$

где константы a и b зависят лишь от p. Согласно лемме 1 при любом α существует функция $u_\alpha \in \left[\mathscr{E}_{K_\alpha}^{-q-a}\right]^s$, удовлетворяющая условию 1). Положим $u'_1 = u_1$. Предположим, что функции $u'_1, \ldots, u'_\alpha$ построены. Рассмотрим разность $u_{\alpha+1} - u'_\alpha \in \left[\mathscr{E}_{K_\alpha}^{-q-a}\right]^s$. Она, очевидно, удовлетворяет системе (1.7) в $\mathscr{D}^*_{K_\alpha}$. Поэтому согласно лемме 3 ее можно приблизить функциями из E_p по норме $\|\cdot\|_{K_{\alpha-c}}^{-q-b}$, $b = a + c$. В частности, мы можем найти функцию $v \in E_p$ такую, что

$$\left\| u_{\alpha+1} - u'_\alpha - v \right\|_{K_{\alpha-c}}^{-q-b} \leqslant \frac{1}{2^\alpha}.$$

Очевидно, что функция $u'_{\alpha+1} = u_{\alpha+1} - v$ удовлетворяет условиям 1) и 2).

Проводя индукцию, мы построим бесконечную последовательность функций u'_α, удовлетворяющих этим условиям. Из неравенства 2) следует, что эта последовательность сходится в каждом из пространств $\left[\mathscr{E}_{K_\alpha}^{-q-b}\right]^s$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ Следовательно, предельная функция u принадлежит $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству $\deg_\Omega u \leqslant q + b$. Из 1 следует, что она является решением системы (1.7) в $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Из него, в частности, следует, что определено отображение

$$\mathscr{D}^{*F}_{p_1}(\Omega) \to \left[\mathscr{D}^{*F}(\Omega)\right]^s / \mathscr{D}^{*F}_p(\Omega),$$

обратное оператору p. Непрерывность этого отображения следует из непрерывности отображения (1). Тем самым M-выпуклость пространства $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$ доказана. То, что подпространство E_p плотно в $\mathscr{D}^{*F}_p(\Omega)$, вытекает из того, что оно плотно в $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$. ■

Теорема 3. *Для любой выпуклой области* Ω *и конечного модуля* M *пространство* $\mathscr{E}(\Omega)$ *сильно* M*-выпукло.*

Доказательство. Для любого α через $(E_p)_\alpha$ обозначим замыкание E_p в пространстве $\left[\mathscr{E}^\alpha_{K_\alpha}\right]^s$. Через $\left\{\left[\mathscr{E}^\alpha_{K_\alpha}\right]^s\right\}$ обозначим убывающее семейство пространств $\left[\mathscr{E}^\alpha_{K_\alpha}\right]^s$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, и отображений сужения.

Аналогичный смысл придадим символам $\left\{\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_{p_1}\right\}$ и $\left\{(E_p)_\alpha\right\}$. Рассмотрим последовательность семейств

$$0 \to \left\{(E_p)_\alpha\right\} \to \left\{\left[\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right]^s\right\} \xrightarrow{p} \left\{\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_{p_1}\right\} \to 0. \tag{8.8}$$

Установим точность этой последовательности. В доказательстве нуждается лишь точность в последнем члене и алгебраическая точность во втором члене.

Зафиксируем произвольное целое α и применим лемму 1 к компакту $K = K_\alpha$ и некоторой области $\omega \supset K$, принадлежащей $K_{\alpha+a}$ (мы предполагаем, что $a > 0$, следовательно, $K \subset\subset K_{\alpha+a}$, и поэтому такая область существует). Согласно этой лемме для любой функции $w \in \left(\mathscr{E}^{\alpha+a}_{K_{\alpha+a}}\right)_{p_1}$ можно найти функцию $u \in \left[\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right]^s$, удовлетворяющую системе (1.7) в пространстве $\mathscr{D}^*_{K_\alpha}$. Поскольку функционал $pu - w$ принадлежит $\left[\mathscr{E}^{\alpha-m}_{K_\alpha}\right]^t$ и обращается в нуль на подпространстве $\left[\mathscr{D}_{K_\alpha}\right]^t$, плотном в $\left[\mathscr{D}^{m-\alpha}_{K_\alpha}\right]^t$, он равен нулю, т. е. u есть решение (1.7) в $\mathscr{E}^{\alpha-m}_{K_\alpha}$. Таким образом, мы построили оператор

$$p^{-1}\colon \left(\mathscr{E}^{\alpha+a}_{K_{\alpha+a}}\right)_{p_1} \to \left[\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right]^s / \left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_p$$

такой, что композиция $pp^{-1}\colon \left(\mathscr{E}^{\alpha+a}_{K_{\alpha+a}}\right)_{p_1} \to \left(\mathscr{E}^{\alpha-m}_{K_\alpha}\right)_{p_1}$ есть отображение сужения. Из неравенства (5) следует непрерывность оператора p^{-1}. Тем самым точность (8) в последнем члене доказана.

Согласно лемме 3 при любом α E_p плотно в $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_p$ по норме $\|\cdot\|^{\alpha-c}_{K_{\alpha-c}}$. Отсюда следует включение $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_p \subset (E_p)_{\alpha-c}$, которое влечет алгебраическую точность (8) во втором члене. Тем самым точность (8) установлена. Так как $\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}$ есть пространство Фреше, а пространство $(E_p)_\alpha$, очевидно, плотно в $(E_p)_{\alpha-1}$, мы можем применить к последовательности (8) предложение 11 § 1, из которого вытекает точность предельной последовательности

$$[\mathscr{E}(\Omega)]^s \xrightarrow{p} \mathscr{E}_{p_1}(\Omega) \to 0.$$

Поскольку с самого начала p — произвольная $\mathscr{P}$-матрица, мы тем самым доказали, что пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ M-выпукло.

Как мы отметили выше, всякую функцию из $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{K_\alpha}\right)_p$ можно приблизить функциями из E_p по норме $\|\cdot\|^{\alpha-c}_{K_{\alpha-c}}$. Поэтому любую функцию из $\mathscr{E}_p(\Omega)$ можно приблизить функциями из E_p по любой из норм $\|\cdot\|^{\alpha}_{K_\alpha}$. Это означает, что пространство E плотно в $\mathscr{E}_p(\Omega)$. ■

3°. Некоторые уточнения результатов 1° и 2°.

Следствие 2. *Пусть Ω и $\omega \subset \Omega$ — произвольные выпуклые области. Тогда пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$ и $\mathscr{E}(\Omega)$, в которых введены топологии, индуцированные соответственно из $\mathscr{D}^*(\omega)$ и $\mathscr{E}(\omega)$, сильно M-выпуклы для любого модуля M.*

Доказательство. Пусть $\breve{\mathscr{D}}^*(\Omega)$ — пространство $\mathscr{D}^*(\Omega)$, в котором введена топология, индуцированная из $\mathscr{D}^*(\omega)$. Для любой $\mathscr{P}$-матрицы p пространство E_p плотно в $\overset{*}{\mathscr{D}}_p(\omega)$ в силу теоремы 1. Но так как E_p содержится в $\breve{\mathscr{D}}^*_p(\Omega)$, оно плотно также и в этом пространстве.

Остается доказать M-выпуклость пространства $\breve{\mathscr{D}}^*(\Omega)$. Так как это пространство отличается от $\mathscr{D}^*(\Omega)$ лишь топологией, для этого достаточно лишь показать, что отображение (1), построенное в теореме 1, непрерывно в соответствующих ослабленных топологиях. Иными словами, нам следует показать, что для любой окрестности нуля U в $[\mathscr{D}^*(\omega)]^s$ можно найти окрестность нуля W в $\overset{*}{\mathscr{D}}_{p_1}(\omega)$ такую, что для любой функции $w \in W \cap \overset{*}{\mathscr{D}}_{p_1}(\Omega)$ существует функция $u \in U \cap$ $\cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, являющаяся решением системы (1.7).

Поскольку теорема 1 справедлива для области ω, мы можем для любой окрестности нуля U' в $[\mathscr{D}^*(\omega)]$ найти окрестность нуля W' в $\overset{*}{\mathscr{D}}_{p_1}(\omega)$ такую, что для всякой функции $w \in W'$ существует функция $u' \in U'$, удовлетворяющая системе (1.7) в ω. Предположим теперь, что функция w принадлежит также $\overset{*}{\mathscr{D}}_{p_1}(\Omega)$. В таком случае функцию u' мы можем приблизить функциями $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, удовлетворяющими системе (1.7) в Ω, по топологии пространства $[\mathscr{D}^*(\omega)]^s$. Чтобы построить такое приближение, достаточно найти некоторую функцию $u_0 \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, удовлетворяющую системе (1.7) в Ω, а разность $u' - u_0$, являющуюся решением однородной системы (1.4) в ω, приблизить элементами пространства E_p.

Выберем теперь одну из таких функций $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, столь близкую к u', что $u - u' \in U'$. Тогда $u|_\omega = u' + (u - u') \in 2U'$. Следовательно, положив $U' = \frac{1}{2}U$, а $W = W'$, мы получим включение $u \in U \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ при условии $w \in W$. Тем самым сильная M-выпуклость пространства $\breve{\mathscr{D}}^*(\Omega)$ доказана.

Сильная M-выпуклость пространства $\mathscr{E}(\Omega)$, наделенного топологией, индуцированной из $\mathscr{E}(\omega)$, доказывается совершенно аналогично. ■

Следствие 3. *Пусть Ω — произвольная область, а p — гипоэллиптический оператор. Тогда всякое решение $u \in [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ системы (1.7) с бесконечно дифференцируемой в Ω правой частью само бесконечно дифференцируемо в Ω.*

Доказательство. Пусть ξ_0 — произвольная точка области Ω, а ω — некоторая выпуклая окрестность ξ_0, принадлежащая Ω. Сужение w на ω принадлежит $[\mathscr{E}(\omega)]^t$. Так как мы предполагаем, что система (1.7) имеет хотя бы одно решение в $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, то функция w удовлетворяет системе $p_1(iD)w=0$. Поэтому из теоремы 3 следует, что существует функция $u_0 \in [\mathscr{E}(\omega)]^s$, являющаяся решением системы (1.7) в $\mathscr{E}(\omega)$. Разность $u-u_0$ есть решение однородной системы (1.4) в области ω и, следовательно, бесконечно дифференцируемо, так как p — гипоэллиптический оператор. Отсюда следует, что функция u также бесконечно дифференцируема в ω. Так как точка ξ_0 была выбрана произвольным образом, функция u бесконечно дифференцируема во всей области Ω. ■

Замечание. Пусть Ω — выпуклая область, а $K \subset \Omega$ — выпуклый компакт. Пусть, далее, функция $w \in \mathscr{D}^*_{p_1}(\Omega)$ бесконечно дифференцируема внутри K. Согласно теореме 3 мы можем найти бесконечно дифференцируемую функцию, определенную внутри K, являющуюся решением системы (1.7). С другой стороны, согласно следствию 1 можно найти решение этой системы, принадлежащее $[\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$, имеющее на любом заданном компакте $\varkappa \subset\subset K$ производные до любого наперед заданного порядка. Однако, вообще говоря, нельзя найти решение, определенное во всей области Ω, бесконечно дифференцируемое в окрестности данной точки $\xi_0 \in \Omega$. Такого рода пример доставляет уравнение

$$pu = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)u = \delta, \tag{9.8}$$

где u — функция трех переменных, а δ — дельта-функция. Так как $p_1=0$ (см. пример 1 2° § 7), то условие $p_1\delta=0$ выполнено тривиальным образом. Покажем, что для любой точки ξ_0, лежащей на пересечении шара Ω с центром в начале координат радиуса ε (число $\varepsilon>0$ произвольно) и плоскости $\xi_3=0$, не существует решения (9), принадлежащего $\mathscr{D}^*(\Omega)$, бесконечно дифференцируемого в окрестности ξ_0.

Предположим противное. Пусть u — такое решение. Заметим, что оператор p слабо гипоэллиптичен по переменным $\xi'=(\xi_1, \xi_2)$. Следовательно, на каждой прямой $\xi'=\text{const}$ определено сужение функции u и это сужение аналитически зависит от $\xi_1+i\xi_2$. Согласно одной теореме Зернера *) отсюда следует, что функция u бесконечно дифференцируемая, а приори, в окрестности точки ξ_0, бесконечно дифференцируема также в некоторой окрестности начала координат, исключая само начало. Существование такого решения уравнения (9) влечет гипоэллиптичность оператора p **), каковым он на самом деле не является. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

*) См. Zerner [1].

**) Это легко показать, исходя из теоремы о среднем, см. Шилов [2].

То свойство системы (1.7), о котором идет речь, а именно, то, что для любой обобщенной в Ω правой части w, бесконечно дифференцируемой на K (и удовлетворяющей условию $p_1 w = 0$), существует решение, обладающее теми же свойствами, мы назовем свойством сохранения гладкости на компакте. Пример, который мы рассмотрели, показывает, что не всякая система обладает этим свойством. С другой стороны, следствие 3 показывает, что любая гипоэллиптическая система обладает свойством сохранения гладкости на компакте. Неизвестно, однако, исчерпывают ли гипоэллиптические системы весь класс систем, обладающих этим свойством.

4°. Роль выпуклости области.

Теорема 4.

I. *Для того чтобы пространство* $\mathcal{D}^*(\Omega)$ *или* $\mathcal{E}(\Omega)$ *было M-выпукло для любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M, необходимо и достаточно, чтобы каждая связная компонента области Ω была выпукла.*

II. *Для того чтобы пространство* $\mathcal{D}^*(\Omega)$ *или* $\mathcal{E}(\Omega)$ *было сильно M-выпукло для любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M, необходимо и достаточно, чтобы область Ω была выпукла.*

Доказательство. Для любой области $\omega \subset R^n$ через $\Phi(\omega)$ обозначим пространство $\mathcal{D}^*(\omega)$ или $\mathcal{E}(\omega)$. Пусть $\Omega = \bigcup \Omega_\alpha$ есть разложение области Ω на связные компоненты. Тогда пространство $\Phi(\Omega)$ топологически изоморфно прямой сумме пространств $\Phi(\Omega_\alpha)$. Если каждая область Ω_α выпукла, то каждое пространство $\Phi(\Omega_\alpha)$ M-выпукло, т. е. точна последовательность (5.7) с $\Phi = \Phi(\Omega_\alpha)$. Следовательно, последовательность (5.7) точна и для пространства $\Phi = \Phi(\Omega)$. Тем самым M-выпуклость пространства $\Phi(\Omega)$ доказана.

Установим теперь необходимость условия: каждая компонента Ω_α выпукла. Предположим, что некоторая из этих компонент невыпукла. В этом случае мы можем найти последовательность равных и параллельных отрезков l_k, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежащих области Ω, стремящуюся к некоторому отрезку l, который принадлежит Ω, за исключением своей середины. Выбрав подходящим образом систему координат в R^n, мы поместим середину отрезка l в начало координат, а его концы в точки $\xi^\pm = (\pm 1, 0, \ldots, 0)$. Через ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим середины отрезков l_k.

Рассмотрим дифференциальный оператор $p(iD) = \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}$. Сейчас мы покажем, что для некоторой функции $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ не существует решения (1.7), принадлежащего $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Поскольку $p_1 = 0$, тем самым мы закончим доказательство первого утверждения теоремы. Для каждой точки ξ_k выберем окрестность U_k такую, что сумма $U_k + l_k$ принадлежит Ω, а последовательность $\{U_k\}$ стремится к началу координат. Для любого k выберем функцию $\varphi_k \in \mathcal{D}(U_k)$, удовлетворяющую условиям $\varphi_k \geqslant 0$ и $\int \varphi_k \, d\xi = 1$. Положим

$$\varphi'_k = \frac{1}{\|\varphi\|^k} \varphi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \text{ *)}.$$

Поскольку области $\xi^{\pm} + U_k$ при больших k принадлежат некоторому компакту $K \subset \Omega$, то функции $\varphi'_k(\xi - \xi^{\pm})$ образуют ограниченное множество в $\mathscr{D}(\Omega)$.

Пусть w — некоторая бесконечно дифференцируемая в Ω функция, а u — некоторое обобщенное решение (1.7) в Ω. Из формулы Ньютона — Лейбница вытекает равенство

$$\left(u, \varphi'_k(\xi - \xi^+)\right) - \left(u, \varphi'_k(\xi - \xi^-)\right) = \\ = \int \int_{-1}^{1} w(t\xi^+ + \eta) \, dt \, \varphi'_k(\eta) \, d\eta. \quad (10.8)$$

Так как функции $\varphi'_k(\xi - \xi^{\pm})$ образуют ограниченное множество, левая часть этого равенства ограничена. С другой стороны, область U_k, принадлежащая области интегрирования в правой части, стремится к началу координат, которое является граничной точкой Ω. Поэтому функцию $w \in \mathscr{E}(\Omega)$ мы можем выбрать так, что

$$\int_{-1}^{1} w(t\xi^+ + \eta) \, dt > k \|\varphi\|^k, \qquad \eta \in U_k.$$

Поскольку $\int \varphi'_k \, d\eta = 1/\|\varphi\|^k$, правая часть (10) не меньше k. Это противоречит тому, что левая часть (10) ограничена. Полученное противоречие показывает, что для найденной функции w не существует обобщенного решения (1.7) в Ω.

Перейдем ко второму утверждению теоремы. Достаточность условия выпуклости Ω следует из теорем 1 и 3. Установим необходимость этого условия. В силу первого утверждения теоремы достаточно показать, что область Ω связна. Предположим противное. Пусть $p = d_0$ (см. пример 2 2° § 7). Решения соответствующей однородной системы (1.4) в Ω суть функции постоянные на каждой связной компоненте области Ω. С другой стороны, пространство E_p состоит лишь из постоянных во всем R^n функций. Понятно, что такими функциями нельзя приблизить решение системы (1.4), равное единице на одной из связных компонент Ω и нулю на остальных ее компонентах. Тем самым второе утверждение теоремы доказано. ■

---

*) Норма $\|\cdot\|^k$ была определена в § 2.

5°. Следствия, относящиеся к решениям однородной системы. Пространство Φ_p как функция модуля Coker p'.

Следствие 4. *Если область Ω выпукла, то пространства $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$ являются инъективными, а пространство $\mathscr{E}^*(\Omega)$ и пространство $\mathscr{D}(\Omega)$, наделенное дискретной топологией, — плоскими $\mathscr{P}$-модулями* *).

Доказательство. Из теорем 1—3 следует, что точность последовательности (2.7) влечет точность последовательности

$$\Phi^s \xrightarrow{p} \Phi^t \xrightarrow{p_1} \Phi^{t_2},$$

где Φ — любое из пространств $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}^{*F}(\Omega)$, $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Этот факт согласно предложению 9 § 3 гл. I означает инъективность модулей Φ. Из предложения 8 § 1 следует, что последовательность

$$\Phi^{t_2} \xrightarrow{p'_1} \Phi^t \xrightarrow{p'} \Phi^s$$

алгебраически точна при $\Phi = \mathscr{D}(\Omega)$ и точна для $\Phi = \mathscr{E}^*(\Omega)$. Отсюда вытекает второе утверждение. ■

Покажем, что для любого замкнутого выпуклого множества $G \subset R^n$ пространства $\mathscr{E}(G)$ и $\mathscr{D}^*(G)$ (наделенные по определению дискретной топологией) являются инъективными $\mathscr{P}$-модулями. Проведем рассуждение лишь для пространства $\mathscr{E}(G)$, так как для $\mathscr{D}^*(G)$ оно совершенно аналогично. Согласно рассуждениям следствия 4 нам достаточно установить равенство $p[\mathscr{E}(G)]^s = \mathscr{E}_{p_1}(G)$. По определению всякий элемент $w \in \mathscr{E}_{p_1}(G)$ есть бесконечно дифференцируемая вектор-функция, определенная и удовлетворяющая уравнению $p_1 w = 0$ в некоторой окрестности $\Omega \supset G$. Так как множество G выпукло, мы можем вписать в Ω выпуклую окрестность $\Omega' \supset G$. Согласно теореме 3 существует функция $u \in [\mathscr{E}(\Omega')]^s$ такая, что $pu = w$. Поэтому $w \in p[\mathscr{E}(G)]^s$, ч. и т. д.

Следствие 5. *Пусть $M = \mathscr{P}^s / p'\mathscr{P}^t$ и $M_l = \mathscr{P}^{s_l} / p'_l \mathscr{P}^{t_l}$, $l = 1, \ldots, k$, — некоторые конечные $\mathscr{P}$-модули, а φ_l: $M \to M_l$ — отображения, ассоциированные с некоторыми $\mathscr{P}$-матрицами f_l: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^{s_l}$, $l = 1, \ldots, k$, такие, что $\bigcap \operatorname{Ker} \varphi_l = 0$. Тогда для любой выпуклой области Ω всякая функция из $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$ может быть записана в виде $\sum f_l(iD) u_j$, где $u_j \in \mathscr{D}^*_{p_j}(\Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} \bigoplus M_j,$$

где отображение φ переводит элемент x в $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$. Из условия $\bigcap \operatorname{Ker} \varphi_j = 0$ вытекает, что она точна. Применив к ней

*) Можно показать, что пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ является плоским $\mathscr{P}$-модулем также, будучи наделено своей собственной топологией

функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathscr{D}^*(\Omega))$, мы получим последовательность

$$\bigoplus_j \mathscr{D}^*_{p_j}(\Omega) \xrightarrow{f} \mathscr{D}^*_p(\Omega) \to 0,$$

в которой отображение f переводит элемент $(u_1, \ldots, u_k)$ в $\sum f'_j(iD)u_j$. Согласно следствию 4 эта последовательность также точна, что означает эпиморфность отображения f. ■

Рассмотрения 1° § 7, в частности, показывают, что для любого $\mathscr{P}$-модуля Φ модуль Φ_p, образованный решениями однородной системы (1.4), принадлежащими Φ^s, по существу зависит лишь от модуля $\mathrm{Coker}\, p'$. Действительно, если $\mathscr{P}$-матрицы p и π таковы, что $\mathrm{Coker}\, p' \cong \mathrm{Coker}\, \pi'$, то, как мы отметили в 1° § 7, существуют $\mathscr{P}$-матрицы f_0 и g_0 такие, что ассоциированные с ними отображения $\breve{f}_0$: $\Phi_\pi \to \Phi_p$ и $\breve{g}_0$: $\Phi_p \to \Phi_\pi$ устанавливают изоморфизм этих модулей. Отсюда следует, что любое свойство модуля Φ_p, сохраняющееся при применении $\mathscr{P}$-матрицы, является общим для всех модулей Φ_π с $\mathrm{Coker}\, \pi' \cong \mathrm{Coker}\, p'$. Ввиду этого мы будем часто применять общее обозначение Φ_M для этих модулей, где $M = \mathrm{Coker}\, p'$.

В частности, тот факт, что пространство Φ_p состоит лишь из бесконечно дифференцируемых (аналитических) функций, сохраняется при $\mathscr{P}$-изоморфизмах и, следовательно, зависит лишь от модуля $\mathrm{Coker}\, p'$. Вследствие этого мы можем ввести следующее

Определение 3. Конечный $\mathscr{P}$-модуль M назовем *гипоэллиптическим* (*эллиптическим*), если он равен $\mathrm{Coker}\, p'$, где p — гипоэллиптический (эллиптический) оператор, иначе говоря, если для любой области Ω пространство $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$ состоит лишь из бесконечно дифференцируемых (аналитических) функций.

Это определение удобно, в частности, для решения следующей задачи. Пусть задана $\mathscr{P}$-матрица q: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^\tau$. Оператор p назовем гипоэллиптическим (эллиптическим) относительно оператора q, если для любой области Ω всякая функция $u \in \mathscr{D}^*_p(\Omega)$ обладает тем свойством, что функция $q(iD)u$ бесконечно дифференцируема (аналитична).

Сформулируем это определение в форме, инвариантной относительно модуля $M = \mathrm{Coker}\, p'$. Отображение q': $\mathscr{P}^\tau \to \mathscr{P}^s$, задаваемое транспонированной матрицей q', продолжим до отображения в M:

$$q'\colon \mathscr{P}^\tau \to M. \tag{11.8}$$

Применив функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathscr{D}^*(\Omega))$, мы получим отображение

$$\mathscr{D}^*_M(\Omega) \xrightarrow{q} [\mathscr{D}^*(\Omega)]^\tau. \tag{12.8}$$

Теперь наше определение можно сформулировать так: скажем, что *отображение* (11) *гипоэллиптическое* (*эллиптическое*), если образ отображения (12) состоит лишь из бесконечно дифференцируемых (аналитических) функций. Как легко видеть, это свойство отображения (11) эквивалентно тому, что оператор p гипоэллиптичен (эллиптичен) относительно q.

Следствие 6.

Отображение (11) *гипоэллиптично* (*эллиптично*) *тогда и только тогда, когда его образ есть гипоэллиптический* (*эллиптический*) *модуль.*

Доказательство. Построим $\mathscr{P}$-матрицу r таким образом, чтобы была точна последовательность

$$\mathscr{P}^{\sigma} \xrightarrow{r'} \mathscr{P}^{\tau} \xrightarrow{q'} M. \tag{13.8}$$

Очевидно, что в определении относительно гипоэллиптического (эллиптического) оператора достаточно ограничиться лишь выпуклыми областями. Пусть Ω — произвольная выпуклая область. Согласно следствию 4 модуль $\mathscr{D}^*(\Omega)$ инъективный, следовательно, применив функтор $\mathrm{Hom}(\cdot\,, \mathscr{D}^*(\Omega))$ к (13), мы получим снова точную последовательность

$$\mathscr{D}^*_M(\Omega) \xrightarrow{q} [\mathscr{D}^*(\Omega)]^{\tau} \xrightarrow{r} [\mathscr{D}^*(\Omega)]^{\sigma}.$$

Из ее точности следует, что образ отображения (12) совпадает с $\mathscr{D}^*_r(\Omega)$. Поэтому отображение (11) гипоэллиптично (эллиптично) тогда и только тогда, когда гипоэллиптичен (эллиптичен) оператор r. Однако, как мы отметили выше, это свойство оператора r является свойством модуля $\mathrm{Coker}\, r'$. С другой стороны, из точности (13) вытекает изоморфизм $\mathrm{Coker}\, r' = \mathrm{Coim}\, q' \cong \mathrm{Im}\, q'$. Следовательно, гипоэллиптичность (эллиптичность) оператора r эквивалентна гипоэллиптичности образа отображения (11). ∎

Рассмотрим еще одну задачу, связанную с локальными свойствами решений однородных недоопределенных систем. Скажем, что оператор p и модуль $M = \mathrm{Coker}\, p'$ *виртуально гипоэллиптические*, если всякое обобщенное решение системы (1.4), определенное в окрестности нуля Ω, является суммой решения определенного в Ω бесконечно дифференцируемого вблизи нуля и решения с носителем, содержащимся в сколь угодно малой окрестности нуля. Если $\dim M < n$, то решения системы (1.4) с компактными непустыми носителями отсутствуют (см. § 14). Поэтому утверждение: M — виртуально гипоэллиптический модуль размерности меньшей n, эквивалентно тому, что M — гипоэллиптический модуль.

Охарактеризуем виртуально гипоэллиптические модули. Пусть M — произвольный модуль. Для его нулевого подмодуля найдем приведенное примарное разложение. Пусть M_0 — n-мерная компонента этого разложения. Модуль M_0 не зависит от выбора этого примарного представления, так как может быть определен иначе: он совпадает с совокупностью элементов $\varphi \in M$, обладающих тем свойством, что $f\varphi = 0$ для некоторого многочлена $f \in \mathscr{P}$, не равного тождественно нулю.

Следствие 7. *Для того чтобы модуль M был виртуально гипоэллиптичен, необходимо и достаточно, чтобы модуль M_0 был гипоэллиптичен, иными словами, чтобы объединение многообразий N^λ, ассоциированных с M, отличных от C^n, было гипоэллиптично.*

Доказательство. Выберем $\mathcal{P}$-матрицу q так, чтобы была точна последовательность

$$\mathcal{P}^r \xrightarrow{q} \mathcal{P}^s \xrightarrow{p} \mathcal{P}^t.$$

Из предложения 1 § 4 гл. IV следует, что ядро отображения q': $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^r$ есть n-мерная примарная компонента $\mathfrak{p}_0$ подмодуля $p'\mathcal{P}^t \subset \mathcal{P}^s$. Подмодуль $\mathfrak{p}_0/p'\mathcal{P}^t \subset M$ совпадает с M_0, следовательно, мы имеем точную последовательность

$$0 \to M_0 \to M \xrightarrow{q'} \mathcal{P}^r.$$

Пусть Ω — выпуклая окрестность нуля. Так как модуль $\mathcal{D}^*(\Omega)$ инъективный, из ее точности следует точность другой последовательности

$$[\mathcal{D}^*(\Omega)]^r \xrightarrow{q} \mathcal{D}^*_M(\Omega) \to \mathcal{D}^*_{M_0}(\Omega) \to 0.$$

Точность ее означает, что всякая функция из $\mathcal{D}^*_M(\Omega)$, являющаяся решением (1:4), с точностью до функции вида qv, где $v \in [\mathcal{D}^*(\Omega)]^r$, совпадает с некоторой функцией из $\mathcal{D}^*_{M_0}(\Omega)$, также являющейся решением (1.4). Всякую функцию вида qv можно представить в виде суммы функции того же вида, равной нулю в окрестности нуля, и функции с носителем в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что всякая функция из $\mathcal{D}^*_M(\Omega)$ может быть сделана бесконечно дифференцируемой в окрестности нуля добавлением функции из того же пространства с компактным носителем, содержащимся в данной окрестности нуля, тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают функции из $\mathcal{D}^*_{M_0}(\Omega)$. Иными словами, модули M и M_0 могут быть виртуально гипоэллиптическими лишь одновременно. Но поскольку $\dim M_0 < n$, виртуальная гипоэллиптичность модуля M эквивалентна гипоэллиптичности M_0, ч. и т. д. ■

6°. Примеры.

Пример 1. Пусть в следствии 6 $s = t = \tau = 1$. Найдем условия, при которых образ отображения (11) есть гипоэллиптический модуль. Поскольку этот образ изоморфен $\operatorname{Coim} q'$, он гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} q' = p_0\mathcal{P}$, где p_0 — гипоэллиптический оператор. С другой стороны, как легко видеть, p_0 есть произведение всех сомножителей многочлена p, не делящих многочлен q. Таким образом, мы можем утверждать, что для того, чтобы оператор p был гипоэллиптичен (эллиптичен) относительно q, необходимо и достаточно, чтобы всякий неприводимый делитель многочлена p, не являющийся делителем q, был гипоэллиптическим (эллиптическим) оператором.

Пример 2. В следствии 5 положим $M=\mathcal{P}/p\mathcal{P}$, $M_l=\mathcal{P}/p_l\mathcal{P}$. Предположим, что многочлен p делится на каждый многочлен p_l. Тогда тождественное отображение f'_l: $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ мы можем продолжить до отображения модулей φ_l: $M\to M_l$. Условие $\bigcap \operatorname{Ker}\varphi_l=0$ означает, что p есть наименьшее общее кратное многочленов p_l. В таком случае согласно следствию 5 всякое обобщенное решение уравнения $pu=0$ в выпуклой области Ω может быть записано в виде суммы $\sum u_l$, где u_l — обобщенное решение уравнения $p_lu_l=0$ в Ω.

7°. M-выпуклость в пространствах $\mathcal{E}_I$ и S_I^*.

Теорема 5. *Пусть $I=\{I_\alpha\}$ — произвольное убывающее семейство л. в. функций, удовлетворяющих при любом α условиям $\Omega_{I_\alpha}=\Omega_{\mathcal{J}_\alpha}=R^n$, где $\mathcal{J}_\alpha$ — функция логарифмически двойственная I_α.*

I. *Для любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M пространства $\mathcal{E}_I$ и S_I^* M-выпуклы.*

II. *Пусть p — произвольная $\mathcal{P}$-матрица, $\mathcal{D}=\sum \xi^j\mathcal{D}_j(z,\delta)$, p'-оператор, $\{N^\lambda\}$ — набор многообразий, ассоциированный с матрицей p', а $B\subset C^n$ — некоторое множество такое, что при любом λ пересечение $B\cap N^\lambda$ не пусто. Тогда линейные комбинации экспоненциальных полиномов вида*

$$\mathcal{D}'_j(z,-i\xi)\exp(z,-i\xi),\quad j\in Z_+^n,\quad z\in B \tag{14.8}$$

плотны в пространствах $(\mathcal{E}_I)_p$ и $(S_I^*)_p$.

Заметим, что все экспоненциальные полиномы (14) принадлежат E_p (см. предложение 4 § 7). Поэтому из второго утверждения вытекает, что E_p плотно в $(\mathcal{E}_I)_p$ и $(S_I^*)_p$, следовательно, пространства $\mathcal{E}_I$ и S_I^* сильно M-выпуклы для любого модуля M.

Доказательство теоремы. Сделаем сначала некоторые общие замечания. Пространства $X_{-\alpha}=\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha$, $-\infty<\alpha<\infty$, и тождественные вложения e_α: $\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha\to\mathcal{E}_{I_{\alpha-1}}^{\alpha-1}$ образуют семейство л. т. п. Пределы этого семейства согласно 5° § 3 равны

$$\mathcal{E}_I=\varprojlim_{\alpha\to\infty}\{\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha,\ e_\alpha\},\qquad S_I^*=\varinjlim_{\alpha\to-\infty}\{\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha,\ e_\alpha\}.$$

Поскольку отображения e_α взаимно однозначны, пространство $\mathcal{E}_I$ мы можем (алгебраически) отождествить с пересечением всех пространств $\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha$, а пространство S_I^* — с их объединением. Для каждого α через $\left(\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha\right)_p$ мы обозначим подпространство в $\left[\mathcal{E}_{I_\alpha}^\alpha\right]^s$, образованное функциями, удовлетворяющими системе (1.4) в $\mathcal{E}_{I_\alpha}^{\alpha-m}$, т. е. такими функциями u, что функционал pu равен нулю на $\left[S_{I_\alpha}^{m-\alpha}\right]^t$. (Напомним.

что пространства $\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}$ и $S^{-\alpha}_{I_\alpha}$ взаимно сопряжены.) Из условия $\Omega_{I_\alpha}=R^n$ следует, что пространство $\mathscr{D}(R^n)$ плотно в $S^{m-\alpha}_{I_\alpha}$, следовательно, утверждение $pu=0$ на пространстве $\left[S^{m-\alpha}_{I_\alpha}\right]^t$ эквивалентно утверждению $pu=0$ на подпространстве $[\mathscr{D}(R^n)]^t$. Поэтому всякая функция из $\left[\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right]^s$ удовлетворяющая системе (1.4) в $\mathscr{D}^*(R^n)$, удовлетворяет ей и в $\mathscr{E}^{\alpha-m}_{I_\alpha}$, и обратно.

Так как пространство $\mathscr{D}(R^n)$ плотно в каждом из пространств $S^{-\alpha}_{I_\alpha}$, оно плотно и в предельных пространствах

$$S_I=\lim_{\longleftarrow} S^{-\alpha}_{I_\alpha},\qquad \mathscr{E}^*_I=\lim_{\longrightarrow} S^{-\alpha}_{I_\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что $(\mathscr{E}_I)_p$ есть пространство всех функций из $[\mathscr{E}_I]^s$, удовлетворяющих системе (1.4) в $\mathscr{D}^*(R^n)$, и аналогичное описание пространства $(S^*_I)_p$. Из всего сказанного следует, что $(\mathscr{E}_I)_p$ есть пересечение всех пространств $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_p$, а $(S^*_I)_p$ — их объединение.

Докажем сначала второе утверждение теоремы. Через E^B_p обозначим пространство линейных комбинаций функций вида (14). Условие $\Omega_{\mathscr{T}_\alpha}=R^n$ означает, что функция I_α растет на бесконечности быстрее любой экспоненты, следовательно, пространство $\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}$ содержит E, а пространство $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_p$ содержит E_p и, в частности, E^B_p.

Зафиксируем произвольное целое α и выберем произвольную функцию $\varphi\in\left[S^{-\alpha}_{I_\alpha}\right]^s$, которая аннулируется всеми функционалами из подпространства $E^B_p\subset\left[\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right]^s$, т. е.

$$\overline{\left(\mathscr{D}'_j(z,\,-i\xi)\exp(z,\,-i\xi),\ \varphi\right)}=\overline{\mathscr{D}_j(z,\,D)\widetilde{\varphi}^*(z)}=0 \qquad (15.8)$$

для любого j и точки $z\in B$. Из предложения 2 § 3 следует, что $\widetilde{\varphi}^*\in\left[S^{\mathscr{T}_{\alpha+1}}_{-\alpha}\right]^s$. Согласно предложению 6 § 3 совокупность пространств $S^{\mathscr{T}_\alpha}_{-\alpha}$, $-\infty<\alpha<\infty$, есть полное семейство $\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$, отвечающее семейству мажорант $\mathscr{M}$ типа $\mathscr{J}$. Поэтому к этому семейству мы можем применить следствие 3 § 4 гл. IV, согласно которому из соотношений (15) вытекает, что $\mathscr{D}(z)\widetilde{\varphi}^*(z)\equiv 0$. Используя далее теорему 2 и дополнение § 5 гл. IV, мы заключаем, что $\widetilde{\varphi}^*\in p'\left[S^{\mathscr{T}_{\alpha+a}}_{-\alpha-a}\right]^t$, где a — некоторая константа, не зависящая от α. Применяя обратное преобразование Фурье, мы получаем согласно предложению 2 § 3 включение $\varphi\in p^*\left[S^{-\alpha-b+m}_{I_{\alpha+b}}\right]^t$ с некоторой константой $b>0$. Из этого включения следует, что функция φ аннулируется всеми функционалами из пространства $\left(\mathscr{E}^{\alpha+b}_{I_{\alpha+b}}\right)_p$.

Итак, мы показали, что всякий функционал φ над пространством $\left[\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right]^s$, равный нулю на подпространстве E^B_p, обращается в нуль также на подпространстве $\left(\mathscr{E}^{\alpha+b}_{I_{\alpha+b}}\right)_p$. Это означает, что пространство E^B_p плотно в $\left(\mathscr{E}^{\alpha+b}_{I_{\alpha+b}}\right)_p$ по норме $\|\cdot\|^{\alpha}_{I^{-1}_\alpha}$. Так как по доказанному $(\mathscr{E}_I)_p$ есть пересечение всех пространств $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_p$, то любую функцию из $(\mathscr{E}_I)_p$ можно приблизить функциями из E^B_p по любой из норм $\|\cdot\|^{\alpha}_{I^{-1}_\alpha}$, т. е. E^B_p плотно в $(\mathscr{E}_I)_p$.

Пространство $(S^*_I)_p$ равно объединению пространств $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_p$. Поэтому всякую функцию из этого пространства можно приблизить функциями из E^B_p по некоторой из норм $\|\cdot\|^{\alpha}_{I^{-1}_\alpha}$. Каждая такая норма сильнее топологии пространства $(S^*_I)_p$, следовательно, E^B_p плотно в $(S^*_I)_p$. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Перейдем к первому утверждению. Пусть снова p — произвольная $\mathscr{P}$-матрица, а p_1 — такая матрица, что последовательность (2.7) точна. Рассмотрим последовательность семейств

$$0 \to \left\{(E_p)_\alpha\right\} \to \left\{\left[\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right]^s\right\} \xrightarrow{p} \left\{\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_{p_1}\right\} \to 0, \qquad (16.8)$$

где $(E_p)_\alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$, — замыкание E_p в $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_p$. Покажем, что эта последовательность точна. В доказательстве нуждается лишь точность в последнем члене и алгебраическая точность во втором члене.

Точность в последнем члене вытекает из следующего утверждения: всякая функция $w \in \left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_{p_1}$ может быть представлена в виде pu, где $u \in \left[\mathscr{E}^{\alpha-c}_{I_{\alpha-c}}\right]^s$ и $\|u\|^{\alpha-c}_{I^{-1}_{\alpha-c}} \leqslant C\|w\|^{\alpha}_{I^{-1}_\alpha}$, причем константа c не зависит от α. Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству первого утверждения леммы 1 1° и опирается на теорему 1 § 4. Это доказательство мы предоставляем читателю.

При доказательстве второго утверждения теоремы мы установили, что пространство $E^B_p \subset E_p$ плотно в $\left(\mathscr{E}^{\alpha+b}_{I_{\alpha+b}}\right)_p$ по норме $\|\cdot\|^{\alpha}_{I^{-1}_\alpha}$. Отсюда вытекает включение $\left(\mathscr{E}^{\alpha+b}_{I_{\alpha+b}}\right)_p \subset (E_p)_\alpha$, из которого следует алгебраическая точность (16) во втором члене. Итак, точность последовательности (16) доказана. Заметим, что эта последовательность удовлетворяет условиям второго утверждения предложения 11 § 1 и первого утверждения предложения 10 § 1. Поэтому, переходя в ней к индуктивному и проективному пределам, мы получим две точные последовательности

$$[S^*_I]^s \xrightarrow{p} \varinjlim \left(S^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_{p_1} \to 0, \quad [\mathscr{E}_I]^s \xrightarrow{p} \varprojlim \left(\mathscr{E}^{\alpha}_{I_\alpha}\right)_{p_1} \to 0. \qquad (17.8)$$

Проективный предел $\varinjlim\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{l_\alpha}\right)_{p_1}$ по запасу элементов равен пересечению всех пространств $\left(\mathscr{E}^{\alpha}_{l_\alpha}\right)_{p_1}$ и, следовательно, совпадает с пространством $(\mathscr{E}_l)_{p_1}$ согласно тому, что было сказано в начале доказательства теоремы. Поэтому из точности второй последовательности (17) мы получаем равенство $p\,[\mathscr{E}_l]^s = (\mathscr{E}_l)_{p_1}$. Аналогичным образом из точности первой последовательности (17) $p\left[S^*_l\right]^s = \left(S^*_l\right)_{p_1}$. Так как с самого начала p — произвольная $\mathscr{P}$-матрица, из этих соотношений следует, что для пространств $\Phi = \mathscr{E}_l$, S^*_l последовательность (5.7) всегда алгебраически точна.

Как мы отметили в 5° § 3, $\mathscr{E}_l$ и S_l суть $\mathscr{F}$-пространства Шварца, следовательно, S^*_l есть пространство, сопряженное к $\mathscr{F}$-пространству Шварца. Поэтому согласно предложению 1 § 7 из алгебраической точности последовательности (5.7) с $\Phi = \mathscr{E}_l$, S^*_l вытекает ее точность. ■

Замечание. Из теоремы 5 вытекает, в частности, что подпространство E^B_p *) плотно в E_p по топологии любого из пространств $(\mathscr{E}_l)_p$. Эта топология сильнее топологии любого из пространств $\mathscr{E}_p(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$. Поэтому для любой области Ω утверждение E_p плотно в $\mathscr{E}_p(\Omega)$ или в $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$ всегда эквивалентно утверждению E^B_p, плотно в $\mathscr{E}_p(\Omega)$, соответственно в $\mathscr{D}^*_p(\Omega)$.

§ 9. Связь между M-выпуклостью и свойствами пучка решений однородной системы

1°. Теорема об изоморфизме. Через $\Phi(\Omega)$, где Ω — область в R^n, мы будем обозначать любое из пространств $\mathscr{D}^*(\Omega)$ или $\mathscr{E}(\Omega)$. Через $\mathscr{F}$ мы обозначим пучок в R^n, относящий области Ω пространство $\Phi(\Omega)$, т. е. любой из пучков $\mathscr{D}^*$: $\Omega \rightsquigarrow \mathscr{D}^*(\Omega)$ или $\mathscr{E}$: $\Omega \rightsquigarrow \mathscr{E}(\Omega)$. Пусть M — некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль. Через $\mathscr{F}_M$ мы обозначим пучок $\Omega \rightsquigarrow \Phi_M(\Omega)$, относящий области Ω пространство решений системы (1.4) (где $\mathscr{P}^s/p'\mathscr{P}^t \cong M$), принадлежащих $[\Phi(\Omega)]^s$, а паре областей $\omega \subset \Omega$ — отображение сужения r^{ω}_{Ω}: $\Phi_M(\Omega) \to \Phi_M(\omega)$. Как легко убедиться, пространства $\Phi_M(\Omega)$ и отображения r^{ω}_{Ω} действительно образуют пучок, поскольку действие дифференциального оператора p локально.

Пусть Ω — область в R^n, а $U = \{U_i\}$ — некоторое локально конечное открытое покрытие этой области. В § 2 мы ввели последовательность пространств ${}^{\nu}\Phi(U)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, образованных коцепями на этом покрытии с коэффициентами из пространств

*) Образованное линейными комбинациями функций (14).

$\Phi(U_{i_0}\cap \ldots \cap U_{i_\nu})$. Напомним, что топологически пространство ${}^\nu\Phi(U)$ совпадает с прямым произведением $\prod\limits_{i_0<\ldots<i_\nu} \Phi(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\nu})$.

Аналогичным образом мы построим пространства ${}^\nu\Phi_M(U)$, $\nu=0$, 1, 2, ..., образованные коцепями на U с коэффициентами из пространств $\Phi_M(U_{i_0}\cap \ldots \cap U_{i_\nu})$, и определим кограничные операторы ∂^ν: ${}^\nu\Phi_M(U)\to {}^{\nu+1}\Phi_M(U)$. Следовательно, мы можем рассмотреть полуточную последовательность

$$0\to\Phi_M(\Omega)\to {}^0\Phi_M(U)\xrightarrow{\partial^0} {}^1\Phi_M(U)\xrightarrow{\partial^1} \ldots \qquad (1.9)$$

Пространства $H^\nu(U, \mathscr{P}_M)=\operatorname{Ker}\partial^\nu/\operatorname{Im}\partial^{\nu-1}$ $(\partial^{-1}=0)$ называются *когомологиями* этой последовательности.

Пусть V — некоторое покрытие подобласти $\omega\subset\Omega$, вписанное в покрытие U. Тогда для любого $\nu\geqslant 0$ определено отображение сужения r_U^V: ${}^\nu\Phi_M(U)\to{}^\nu\Phi_M(V)$, причем эти отображения коммутируют с операторами ∂^ν.

Теорема 1. *Пусть M — произвольный конечный $\mathscr{P}$-модуль, а U — локально конечное выпуклое (открытое) покрытие области Ω.*

I. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^\nu(U, \mathscr{P}_M)\cong \operatorname{Ext}^\nu(M, \Phi(\Omega))\,^{*)}, \qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2.9)$$

Из точности последовательности (1) *вытекает M-выпуклость пространства* $\Phi(\Omega)$ *и обратно.*

II. *Пусть V — локально конечное выпуклое покрытие подобласти $\omega\subset\Omega$, вписанное в U. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H^\nu(V, \mathscr{P}_M) & \cong & \operatorname{Ext}^\nu(M, \Phi(\omega)) \\ r_U^V\Big\uparrow & & \Big\uparrow\rho_\Omega^\omega \\ H^\nu(U, \mathscr{P}_M) & \cong & \operatorname{Ext}^\nu(M, \Phi(\Omega)), \end{array}$$

в которой по горизонтали расположены изоморфизмы вида (2), *а по вертикали отображения сужения, коммутативна.* (Отображение ρ_Ω^ω отвечает отображению сужения $\Phi(\Omega)\to\Phi(\omega)$.)

---

*) Здесь и в дальнейшем символу $\Phi(\Omega)$ мы придаем любое из двух значений $\mathscr{D}^*(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$. Однако, положив, например, $\Phi(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ в правой части (2), мы обязаны положить $\mathscr{P}=\mathscr{E}$ в левой части; если $\Phi(\Omega)=\mathscr{D}^*(\Omega)$, то $\mathscr{P}=\mathscr{D}^*$. Аналогичный двузначный смысл мы придаем всем последующим утверждениям.

Доказательство. Пусть (4.7) — свободная резольвента модуля M. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \\
0 \arrow[r] & {}^1\Phi_M(U) \arrow[r] \arrow[uu, "\partial^1"] & {[{}^1\Phi(U)]^s} \arrow[r, "p"] \arrow[uu, "\partial^1"] & {} & \ldots & \\
 & & & & \vdots & \\
0 \arrow[r] & {}^0\Phi_M(U) \arrow[r] \arrow[uu, "\partial^0"] & {[{}^0\Phi(U)]^s} \arrow[r, "p"] \arrow[uu, "\partial^0"] & {[{}^0\Phi(U)]^t} \arrow[r, "p_1"] \arrow[uuu, "\partial^0"] & {} & \ldots \\
0 \arrow[r] & \Phi_M(\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & {[\Phi(\Omega)]^s} \arrow[r, "p"] \arrow[u] & {[\Phi(\Omega)]^t} \arrow[r, "p_1"] \arrow[u] & {[\Phi(\Omega)]^{t_2}} \arrow[r] \arrow[uu] & \ldots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{3.9}
$$

Точность всех столбцов этой диаграммы, исключая левый, следует из предложения 9 § 2. Установим точность всех строк, кроме нижней. Пусть коцепь $\varphi = \sum \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_\nu} \in [{}^\nu\Phi(U)]^{t_j}$ принадлежит ядру оператора p_j. Это означает, что $p_j \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} = 0$ в $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}$ для любого сочетания индексов $i_0, \ldots, i_\nu$. Так как каждая область $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}$ выпукла, согласно теоремам 1 и 3 § 8 можно найти функцию $\psi_{i_0, \ldots, i_\nu} \in \left[\Phi\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}\right)\right]^{t_{j-1}}$ такую, что $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} = p_{j-1} \psi_{i_0, \ldots, i_\nu}$, а отображение

$$
\Phi_{p_j}\left(U_{i_0, \ldots, i_\nu}\right) \ni \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu} \to \\
\to \psi_{i_0, \ldots, i_\nu} \in \left[\Phi\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}\right)\right]^{t_{j-1}} / \operatorname{Ker} p_{j-1} \tag{4.9}
$$

непрерывно.

Так как функция $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ по определению антисимметрично зависит от своих индексов, мы можем считать, что функция $\psi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ также антисимметрично зависит от $i_0, \ldots, i_\nu$. Следовательно, функции $\psi_{i_0, \ldots, i_\nu}$ являются коэффициентами некоторой коцепи $\psi \in [{}^\nu\Phi(U)]^{t_{j-1}}$. Из непрерывности отображения (4) для любых $i_0, \ldots, i_\nu$ вытекает непрерывность отображения

$$
{}^\nu\Phi_{p_j}(U) \ni \varphi \to \psi \in [{}^\nu\Phi(U)]^{t_{j-1}} / \operatorname{Ker} p_{j-1},
$$

которое является обратным по отношению к оператору p_{j-1}. Тем самым мы установили точность всех строк диаграммы (3), кроме нижней. Эту диаграмму мы можем разбить на фрагменты, каждый из которых является частным случаем диаграммы (α) теоремы 1 § 2 гл. I. Из этой теоремы вытекают изоморфизмы (2).

Установим второе утверждение теоремы. Наряду с диаграммой (3) рассмотрим аналогичную диаграмму (3′), образованную пространствами ${}^{\nu}\Phi_M(V)$, $[{}^{\nu}\Phi(V)]^{l_j}$, $\nu \geqslant -1$, $j \geqslant 0$, и отображениями ∂^{ν} и p_j. По условию покрытие V вписано в U, следовательно, определены отображения сужения

$$ {}^{\nu}\Phi_M(U) \to {}^{\nu}\Phi_M(V), \quad [{}^{\nu}\Phi(U)]^{l_j} \to [{}^{\nu}\Phi(V)]^{l_j}. $$

Эти отображения коммутируют с отображениями ∂^{ν} и p_j диаграмм (3) и (3′). Поэтому второе утверждение теоремы вытекает из теоремы 2 § 2 гл. I. ■

Следствие 1. *Имеют место алгебраические изоморфизмы*

$$ \mathrm{Ext}^{\nu}(M, \Phi(\Omega)) \cong H^{\nu}(\Omega, \mathscr{P}_M), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.9} $$

где $H^{\nu}(\Omega, \mathscr{P}_M)$ — пространство когомологий пучка $\mathscr{P}_M$ в области Ω.

Доказательство. По определению пространство $H^{\nu}(\Omega, \mathscr{P}_M)$ является индуктивным пределом пространств $H^{\nu}(U, \mathscr{P}_M)$ и отображений сужения r_U^V по множеству всех открытых покрытий области Ω. Так как Ω есть паракомпактное топологическое пространство, во всякое открытое покрытие Ω можно вписать локально конечное выпуклое покрытие. Следовательно, выпуклые локально конечные покрытия образуют конфинальное подмножество множества всех открытых покрытий Ω. Поэтому в силу предложения 1 § 1 $H^{\nu}(\Omega, \mathscr{P}_M)$ есть индуктивный предел пространств $H^{\nu}(U, \mathscr{P}_M)$, взятый по множеству всех выпуклых локально конечных покрытий Ω. Из утверждения II теоремы 1 следует, что для любых двух локально конечных выпуклых покрытий U и V области Ω таких, что V вписано в U, определена и коммутативна следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
 & H^{\nu}(V, \mathscr{P}_M) \\
\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \Phi(\Omega)) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
 & H^{\nu}(U, \mathscr{P}_M) \arrow[uu, "r_U^V"']
\end{tikzcd}
$$

Поэтому в изоморфизме $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \Phi(\Omega)) \cong H^{\nu}(U, \mathscr{P}_M)$ мы можем перейти к индуктивному пределу по таким покрытиям U. В пределе мы получим изоморфизм (5). ■

Следствие 2. *Пусть M — гипоэллиптический модуль* (см. 5° § 8). *Тогда отображения*

$$ \mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{E}(\Omega)) \to \mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{D}^{*}(\Omega)), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.9} $$

отвечающие вложению $\mathscr{E}(\Omega)\to\mathscr{D}^*(\Omega)$, являются изоморфизмами. Пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$ (сильно) M-выпуклы или нет одновременно.

Доказательство. Рассмотрим два частных случая диаграммы (3), отвечающие пространствам $\Phi(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)=\mathscr{D}^*(\Omega)$. Вложению $\mathscr{E}(\Omega)\to\mathscr{D}^*(\Omega)$ отвечает отображение первой из этих диаграмм во вторую. Применяя теорему 2 § 2 гл. I, мы получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{D}^*(\Omega)) & \cong & H^{\nu}(U, \mathscr{D}^*_M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{E}(\Omega)) & \cong & H^{\nu}(U, \mathscr{E}_M). \end{array} \tag{7.9}$$

Из теоремы 1 § 5 следует, что отображения

$${}^{\nu}\mathscr{E}_M(U)\to{}^{\nu}\mathscr{D}^*_M(U), \qquad \nu=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots, \tag{8.9}$$

суть изоморфизмы. Отсюда вытекает, что правое вертикальное отображение диаграммы (7) также является изоморфизмом. Из ее коммутативности следует, что отображение (6) также изоморфизм.

Рассмотрим два частных случая последовательности (1), отвечающих пространствам $\Phi(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$. В силу того, что вложения (8) суть изоморфизмы, эти две последовательности совпадают. Отсюда следует, что пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$ M-выпуклы или нет одновременно. Так как пространства $\mathscr{E}_M(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*_M(\Omega)$ изоморфны, подпространство E_M плотно или нет в этих пространствах одновременно. Следовательно, пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}^*(\Omega)$ сильно M-выпуклы также лишь одновременно. ■

2°. Примеры.

Пример 1. Пусть $M=\mathrm{Coker}\, d_0'$. Как мы установили в примере 2 2° § 7, $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \Phi(\Omega))$ есть пространство когомологий дифференциальных форм с коэффициентами из $\Phi(\Omega)$. С другой стороны, $\mathscr{P}_M$ есть пучок $\mathcal{C}$ локально постоянных функций. Поэтому изоморфизм следствия 1 записывается так:

$$\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \Phi(\Omega))\cong H^{\nu}(\Omega, \mathcal{C}).$$

Этот изоморфизм есть частный случай теоремы де Рама, относящийся к области Ω в евклидовом пространстве.

Пример 2. Пусть $n=2m$ и $M=\mathrm{Coker}\,''d_0'$ (см. пример 3 2° § 7). Для любой области Ω $\Phi_M(\Omega)$ есть пространство $\mathscr{H}(\Omega)$ аналитических в Ω функций. Следовательно, $\mathscr{P}_M=\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — пучок аналитических функций. Из следствия 1 вытекает изоморфизм $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{P}(\Omega))\cong H^{\nu}(\Omega, \mathscr{H})$. Если $\Phi(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$, он является частным случаем теоремы Дольбо. Таким образом, в силу предложения 1 § 7 для M-выпуклости пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ необходимо и достаточно выполнения равенств $H^\nu(\Omega, \mathscr{H}) = 0$, $\nu \geqslant 1$. Поскольку оператор $''d_0$ эллиптический, модуль M также эллиптический. Поэтому согласно следствию 2 эти равенства необходимы и достаточны для M-выпуклости пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$. С другой стороны, как известно *), равенства $H^\nu(\Omega, \mathscr{H}) = 0$, $\nu \geqslant 1$, необходимы и достаточны для того, чтобы Ω была областью голоморфности. Итак, M-выпуклость пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ или $\mathscr{D}^*(\Omega)$ эквивалентна тому, что Ω есть область голоморфности.

Как мы установили в 4° § 4, ассоциированный с M набор многообразий состоит из одного многообразия, содержащего начало координат. Поэтому согласно замечанию 7° § 8 условие: E_M плотно в $\Phi_M(\Omega)$, эквивалентно условию: пространство E_M^B плотно в $\Phi_M(\Omega)$, где B — множество, образованное единственной точкой — началом координат. Как легко видеть, E_M^B есть пространство всех многочленов от переменных $\zeta_j = \xi_j + i\xi_{m+j}$. Таким образом, условие: E_M плотно в $\Phi_M(\Omega)$, эквивалентно тому, что многочлены от ζ_j плотны в пространстве $\mathscr{H}(\Omega)$ (по топологии пространства $\Phi_M(\Omega)$, которая совпадает с естественной топологией пространства $\mathscr{H}(\Omega)$). Последнее условие означает, что Ω есть область Рунге первого рода. В итоге мы заключаем, что сильная M-выпуклость пространства $\Phi(\Omega)$ эквивалентна тому, что Ω есть область Рунге (т. е. область голоморфности, являющаяся областью Рунге первого рода).

3°. Выпуклость относительно нульмерного модуля. Пусть M — нульмерный $\mathscr{P}$-модуль. В таком случае согласно предложению 4 § 4 гл. IV он имеет конечную размерность $l(M)$ как линейное пространство над полем C.

Теорема 2. *Пусть M — нульмерный конечный $\mathscr{P}$-модуль. Тогда для любой области Ω и выпуклого локально конечного покрытия U этой области*

I. *Все пространства $H^\nu(U, \mathscr{P}_M)$, $\nu \geqslant 0$, отделимы.*

II. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^\nu(\Omega, \mathscr{P}_M) \cong [H^\nu(\Omega, \mathcal{C})]^{l(M)}, \qquad \nu \geqslant 0, \tag{9.9}$$

где $\mathcal{C} = \mathscr{E}_{d_0}$ — пучок локально постоянных функций.

Доказательство. Согласно предложению 4 § 4 гл. IV многообразие $N(M)$ является конечным множеством, а совокупность его точек z^λ, $\lambda = 0, \ldots, l$, есть набор многообразий, ассоциированный с модулем M. Пусть, далее, $M \cong \mathscr{P}^s/p'\mathscr{P}^t$, а $\mathscr{D} = \sum \xi^j \mathscr{D}_j(z, \delta)$ — p'-оператор. В каждой точке z^λ лишь конечное число l_λ операторов $\mathscr{D}_j(z^\lambda, D)$ отлично от нуля, причем отличные от нуля операторы линейно независимы. Пусть $d^\lambda(z^\lambda, D)$ — столбец высоты l_λ,

---

*) См., например, Серр [3].

образованный этими дифференциальными операторами. Совокупность операторов $d^\lambda(z^\lambda, D)$, $\lambda=0, \ldots, l$, есть набор нормальных нетеровских операторов, ассоциированный с матрицей p'.

Этот набор мы используем для того, чтобы записать экспоненциальное представление для функций пространств $\Phi_p(\omega)$. Поскольку модуль M нульмерный, он является гипоэллиптическим, следовательно, оператор p является гипоэллиптическим. Поэтому функции пространства $\Phi_p(\omega)$ бесконечно дифференцируемы. Предположим сначала, что область ω выпукла. Тогда, комбинируя замечание 2 и следствие 1 § 4, мы можем любую функцию $u\in\Phi_p(\omega)$ на любом компакте $\varkappa\subset\omega$ записать в виде суммы

$$u(\xi)=\sum_\lambda (d^\lambda(z^\lambda, -i\xi))'\exp(z^\lambda, -i\xi)\mu^\lambda=$$
$$=\sum_{j,\lambda}\mathscr{D}'_j(z^\lambda, -i\xi)\exp(z^\lambda, -i\xi)\mu_j^\lambda, \qquad (10.9)$$

где μ^λ — векторы, компонентами которых являются произвольные комплексные числа μ_j^λ. Количество этих произвольных постоянных равно числу операторов $\mathscr{D}_j(z^\lambda, D)$, т. е. равно сумме $\sum l_\lambda$, совпадающей согласно предложению 4 § 4 гл. IV с размерностью $l(M)$.

Как мы отметили выше, при каждом λ дифференциальные операторы $\mathscr{D}_j(z^\lambda, D)$ линейно независимы. Следовательно, совокупность всех $l(M)$ функций $\mathscr{D}'_j(z^\lambda, -i\xi)\exp(z^\lambda, -i\xi)$ также линейно независима. Поэтому все числа μ_j^λ определены однозначно (в предположении, что компакт $\varkappa$ имеет внутренние точки) и, следовательно, не зависят от компакта $\varkappa$. Следовательно, представление (10) справедливо во всей области ω.

Пусть теперь ω — произвольная область. Выберем некоторое выпуклое покрытие $V=\{V_\alpha\}$ этой области и напишем представление для функции $u\in\Phi_p(\omega)$ в каждой области V_α этого покрытия. Если две области V_α и V_β пересекаются, то в их пересечении соответствующие представления (10) совпадают, следовательно, совпадают соответствующие коэффициенты μ_j^λ. Таким образом, мы получаем представление (10) для функций из $\Phi_p(\omega)$, в котором μ_j^λ — однозначные функции точки ξ, локально постоянные в области ω, т. е. постоянные на каждой связной компоненте этой области.

Через $\mathcal{C}(\omega)$ обозначим пространство всех комплекснозначных локально постоянных функций в ω. Сопоставляя функции u вектор, образованный коэффициентами μ_j^λ из представления (10), мы получаем линейное отображение

$$\Phi_p(\omega)\to[\mathcal{C}(\omega)]^{l(M)}. \qquad (11.9)$$

Это отображение, очевидно, является алгебраическим изоморфизмом. Пространство $\mathcal{C}(\omega)$ мы наделим топологией равномерной сходимости на каждом компакте $\varkappa \subset \omega$. В таком случае, как нетрудно проверить, изоморфизм (11) оказывается топологическим.

Пусть U — фиксированное в условии теоремы выпуклое локально конечное покрытие области Ω. Рассмотрим полуточную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow {}^0\mathcal{C}(U) \xrightarrow{\partial^0} {}^1\mathcal{C}(U) \xrightarrow{\partial^1} \ldots, \tag{12.9}$$

являющуюся частным случаем последовательности (1) при $M = \operatorname{Coker} d_0'$. Здесь ${}^\nu\mathcal{C}(U)$, где $\nu = 0, 1, 2, \ldots,$ — пространство коцепей порядка ν на покрытии U с коэффициентами в пучке $\mathcal{C}$, являющееся топологическим прямым произведением, вообще говоря, бесконечного числа пространств $\mathcal{C}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu})$, изоморфных комплексной прямой C. (Изоморфизм $\mathcal{C}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}) \cong C$ имеет место по той причине, что каждая область $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}$ связна, поскольку она выпукла.) Когомологии последовательности (12) по определению равны пространствам $H^\nu(U, \mathcal{C})$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Зафиксируем $\nu \geqslant 0$ и применим изоморфизм (11) ко всем областям вида $\omega = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\nu}$. Составив прямое произведение этих изоморфизмов, мы получим изоморфизм ${}^\nu\Phi_p(U) \cong \left[{}^\nu\mathcal{C}(U)\right]^{l(M)}$, с помощью которого построим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \Phi_p(\Omega) & \longrightarrow & {}^0\Phi_p(U) & \xrightarrow{\partial^0} & {}^1\Phi_p(U) & \xrightarrow{\partial^1} & \ldots \\ & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{C}(\Omega) & \longrightarrow & {}^0\mathcal{C}(U) & \xrightarrow{\partial^0} & {}^1\mathcal{C}(U) & \xrightarrow{\partial^1} & \ldots \end{array} \tag{13.9}$$

Она коммутативна, так как всякая линейная операция над коэффициентами коцепи $\varphi \in {}^\nu\Phi_p(U)$, в частности, применение кограничного оператора ∂^ν, отвечает такой же линейной операции над соответствующими коэффициентами μ_j^λ. Из коммутативности диаграммы (13) вытекает, что изоморфизмы между членами первой и второй строк определяют изоморфизмы между соответствующими когомологиями:

$$H^\nu(U, \mathcal{P}_M) \cong \left[H^\nu(U, \mathcal{C})\right]^{l(M)}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{14.9}$$

Так как эти изоморфизмы топологические, отделимость пространства $H^\nu(U, \mathcal{P}_M)$ эквивалентна отделимости пространства $H^\nu(U, \mathcal{C})$. По определению $H^\nu(U, \mathcal{C}) = Z^\nu/B^\nu$, где Z^ν — ядро оператора ∂^ν, а B^ν — образ $\partial^{\nu-1}$ в (12). Поэтому отделимость пространства $H^\nu(U, \mathcal{C})$ в свою очередь эквивалентна замкнутости подпространства $B^\nu \subset {}^\nu\mathcal{C}(U)$.

Докажем замкнутость этого подпространства. Пусть $({}^\nu\mathcal{C}(U))'$ — пространство всех линейных (не обязательно непрерывных) функционалов над ${}^\nu\mathcal{C}(U)$, а $(B^\nu)^0$ — подпространство в $({}^\nu\mathcal{C}(U))'$, ортогональное B^ν. Согласно общему свойству линейных пространств само пространство B^ν является ортогональным к $(B^\nu)^0$, т. е. является пересечением ядер всех функционалов, принадлежащих $(B^\nu)^0$.

Опишем пространство $({}^\nu\mathcal{C}(U))'$. Относя каждой коцепи $\varphi \in {}^\nu\mathcal{C}(U)$ совокупность ее коэффициентов $\varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}$, мы определим алгебраический изоморфизм ${}^\nu\mathcal{C}(U)$ и прямого произведения $\prod\limits_{i_0 < \cdots < i_\nu} C$ прямых. Отсюда следует, что сопряженное с ${}^\nu\mathcal{C}(U)$ пространство изоморфно прямой сумме того же числа прямых, т. е. каждый линейный функционал над ${}^\nu\mathcal{C}(U)$ может быть записан в виде

$$(f, \varphi) = \sum f_{i_0, \ldots, i_\nu} \varphi_{i_0, \ldots, i_\nu}, \quad f_{i_0, \ldots, i_\nu} \in C, \tag{15.9}$$

где лишь конечное число величин $f_{i_0, \ldots, i_\nu}$ отлично от нуля. Однако по определению пространство ${}^\nu\mathcal{C}(U)$ совпадает с прямым произведением $\prod\limits_{i_0 < \ldots < i_\nu} C$ также топологически. Отсюда следует, что каждый функционал вида (15) непрерывен на ${}^\nu\mathcal{C}(U)$. Таким образом, подпространство B^ν есть пересечение ядер некоторого количества непрерывных линейных функционалов и, следовательно, замкнуто. Тем самым первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Для этого заметим, что изоморфизм (14) совместим с переходом к вписанному покрытию, т. е. для любого покрытия V области Ω, вписанного в U, следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^\nu(V, \mathcal{P}_M) & \cong & [H^\nu(V, \mathcal{C})]^{l(M)} \\ \Big\uparrow{\scriptstyle r_U^V} & & \Big\uparrow{\scriptstyle r_U^V} \\ H^\nu(U, \mathcal{P}_M) & \cong & [H^\nu(U, \mathcal{C})]^{l(M)} \end{array}$$

коммутативна. Отсюда следует, что изоморфизм (14) сохраняется при переходе к индуктивному пределу по множеству всех выпуклых локально конечных покрытий области Ω. Совершив такой переход, мы получим изоморфизм (9). ■

Следствие 3. *Пусть M — нульмерный конечный $\mathcal{P}$-модуль, а Ω — непустая область в R^n. Для M-выпуклости пространства $\Phi(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$H^\nu(\Omega, \mathcal{C}) = 0, \quad \nu \geqslant 1. \tag{16.9}$$

Для сильной M-выпуклости пространства $\Phi(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены соотношения

$$H^\nu(\Omega, \mathcal{C}) = 0, \quad \nu \geqslant 1, \quad H^0(\Omega, \mathcal{C}) \cong C.$$

Доказательство. Поскольку всякий нульмерный модуль является гипоэллиптическим, согласно следствию 2 достаточно ограничиться пространством $\Phi(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$. В силу предложения 1 § 7 для M-выпуклости пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, \mathscr{E}(\Omega))=0$, $\nu\geqslant 1$. Из следствия 1 и теоремы 2 этого параграфа вытекает, что эти равенства эквивалентны соотношениям (16). Тем самым первое утверждение доказано.

По определению сильная M-выпуклость пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ означает, что оно M-выпукло, а замыкание E_M в $\mathscr{E}_M(\Omega)$ совпадает с $\mathscr{E}_M(\Omega)$. Из предложения 4 § 7 следует, что пространство E_M является пространством всех сумм вида (10), где μ_j^{λ} — произвольные комплексные, постоянные во всем R^n, коэффициенты. Таким образом, мы имеем изоморфизм $E_M\cong C^{l(M)}$. Так как пространство E_M конечномерно, а область Ω непустая, топология, индуцированная в E_M из $\mathscr{E}_M(\Omega)$, совпадает с топологией конечномерного евклидова пространства. Поэтому замыкание E_M в $\mathscr{E}_M(\Omega)$ есть E_M. Следовательно, условие E_M плотно в $\mathscr{E}_M(\Omega)$, эквивалентно равенству $\mathscr{E}_M(\Omega)=E_M$. Поскольку $\mathscr{E}_M(\Omega)\cong[H^0(\Omega, \mathscr{C})]^{l(M)}$, а $E_M\cong C^{l(M)}$, это равенство, в свою очередь, эквивалентно изоморфизму $H^0(\Omega,\mathscr{C})\cong C$. Таким образом, второе утверждение также доказано. ■

Необходимые условия M-выпуклости и сильной M-выпуклости, которые дает следствие 3, мы обобщим сейчас на произвольные модули M.

4°. Когомологии, связанные с двумя конечными $\mathscr{P}$-модулями.

Теорема 3. *Пусть M и L — два конечных $\mathscr{P}$-модуля таких, что*

$$\mathrm{Tor}_l(M, L)=0, \quad l\geqslant 1, \tag{17.9}$$

а Φ — некоторый топологический $\mathscr{P}$-модуль. Справедливы следующие утверждения.

I. *Определены непрерывные отображения*

$$\mathrm{Ext}^k(L, \mathrm{Hom}(M, \Phi))\to\mathrm{Ext}^k(M\otimes L, \Phi), \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{18.9}$$

II. *Если пространство Φ M-выпукло, то эти отображения являются изоморфизмами.*

III. *Если пространство Φ также $M\otimes L$-выпукло, то пространство Φ_M L-выпукло.*

Доказательство. Пусть

$$\ldots\to\mathscr{P}^{t_2}\xrightarrow{p_1'}\mathscr{P}^{t_1}\xrightarrow{p_0'}\mathscr{P}^{t_0}\to M\to 0 \tag{19.9}$$

и

$$0\to\mathscr{P}^{s_d}\xrightarrow{q_{d-1}'}\mathscr{P}^{s_{d-1}}\to\ldots$$

$$\ldots\to\mathscr{P}^{s_2}\xrightarrow{q_1'}\mathscr{P}^{s_1}\xrightarrow{q_0'}\mathscr{P}^{s_0}\to L\to 0 \tag{20.9}$$

— некоторые свободные резольвенты модулей M и L. Тензорно перемножив эти резольвенты, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\
\ldots \arrow[r] & M^{s_{k+1}} \arrow[u] \arrow[r, "q'_k"] & M^{s_k} \arrow[u] \arrow[r, "q'_{k-1}"] & M^{s_{k-1}} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "q'_0"] & M^{s_0} \arrow[u] \arrow[r] & M\otimes L \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & \mathscr{P}^{t_0 s_{k+1}} \arrow[u] \arrow[r, "q'_k"] & \mathscr{P}^{t_0 s_k} \arrow[u] \arrow[r, "q'_{k-1}"] & \mathscr{P}^{t_0 s_{k-1}} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "q'_0"] & \mathscr{P}^{t_0 s_0} \arrow[u] \arrow[r] & L^{t_0} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
\ldots & \vdots \arrow[u] \arrow[r, "q'_k"] & \mathscr{P}^{t_1 s_k} \arrow[u, "p'_0"'] \arrow[r, "q'_{k-1}"] & \mathscr{P}^{t_1 s_{k-1}} \arrow[u, "p'_0"'] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "q'_0"] & \mathscr{P}^{t_1 s_0} \arrow[u, "p'_0"'] \arrow[r] & L^{t_1} \arrow[u, "p'_0"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & \vdots \arrow[u, "p'_1"'] \arrow[r] & \mathscr{P}^{t_2 s_{k-1}} \arrow[u, "p'_1"'] \arrow[r] & \ldots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
 & & & \vdots \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd} \tag{21.9}$$

Здесь действие отображения p'_i: $\mathscr{P}^{t_{i+1}s_j} \to \mathscr{P}^{t_i s_j}$ заключается в умножении вектора $(f_1, \ldots, f_{t_{i+1}})$, $f_a \in \mathscr{P}^{s_j}$ на матрицу p'_i, т. е. совпадает с действием отображения $p'_i \otimes e$: $\mathscr{P}^{t_{i+1}} \otimes \mathscr{P}^{s_j} \to \mathscr{P}^{t_i} \otimes \mathscr{P}^{s_j}$ (e — тождественное отображение); аналогичным образом отображение q'_j совпадает с отображением $e \otimes q'_j$: $\mathscr{P}^{t_i} \otimes \mathscr{P}^{s_{j+1}} \to \mathscr{P}^{t_i} \otimes \mathscr{P}^{s_j}$. Точность верхней строки этой диаграммы и правого столбца вытекает из условия (17). Точность остальных строк и столбцов следует из того, что все модули $\mathscr{P}^k$ плоские.

Рассмотрим свободные модули $\mathscr{P}_k = \bigoplus_{i+j=k} \mathscr{P}^{t_i s_j}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и построим специальную свободную резольвенту модуля $M \otimes L$

$$\ldots \to \mathscr{P}_{k+1} \xrightarrow{r'_k} \mathscr{P}_k \to \ldots \to \mathscr{P}_1 \xrightarrow{r'_0} \mathscr{P}_0 \to M \otimes L \to 0, \tag{22.9}$$

где отображения r'_k действуют следующим образом:

$$r'_k\colon \mathscr{P}_{k+1} \ni (f_{k+1,0}, \ldots, f_{0,k+1}) \to (g_{k,0}, \ldots, g_{0,k}) \in \mathscr{P}_k,$$

а

$$f_{i,j} \in \mathscr{P}^{t_i s_j}, \quad g_{ij} = p'_i f_{i+1,j} + (-1)^i q'_j f_{i,j+1}.$$

Покажем, что эта последовательность действительно является свободной резольвентой, т. е. что она точна *). Проверим сначала ее полуточность. Для любого вектора $f \in \mathscr{P}_{k+1}$ вектор $r'_{k-1}r'_k f$ по определению образован многочленами

$$h_{i,j} = p'_i(p'_{i+1}f_{i+2,j} + (-1)^{i+1} q'_j f_{i+1,j+1}) + \\ + (-1)^i q'_j(p'_i f_{i+1,j+1} + (-1)^i q'_{j+1} f_{i,j+2}) = \\ = p'_i p'_{i+1} f_{i+2,j} + q'_j q'_{j+1} f_{i,j+2} = 0.$$

Тем самым полуточность (22) доказана. Точность в двух последних членах следует из предложения 3 § 3 гл. I.

Остается показать, что для любого $k > 0$ имеет место включение $\operatorname{Ker} r'_{k-1} \subset \operatorname{Im} r'_k$. Рассмотрим модуль

$$\operatorname{Im} q'_{k-1} \cap \operatorname{Im} p'_0 / \operatorname{Im} q'_{k-1} p'_0, \tag{23.9}$$

ассоциированный с модулем $\mathscr{P}^{t_0 s_{k-1}}$, где q'_{k-1} и p'_0 — отображения из (21). В диаграмме (21) выделим фрагмент, образованный модулями $\mathscr{P}^{t_i s_j}$ и $i + j = k + 1$, k, $k - 1$. Этот фрагмент имеет форму диаграммы (γ) теоремы 1 § 2 гл. I, причем все строки и столбцы этого фрагмента точны. Поэтому из рассуждения 4° § 2 гл. I следует, что все модули H^i_j, построенные для этого фрагмента, равны нулю. В частности, равен нулю и модуль (23).

Пусть теперь $f = (f_{k,0}, \ldots, f_{0,k})$ — произвольный вектор, принадлежащий ядру отображения r_{k-1}. Из этого условия, в частности, следует, что $p'_0 f_{1,k-1} = -q'_{k-1} f_{0,k}$. Обе части этого равенства, очевидно, принадлежат модулю $\operatorname{Im} q'_{k-1} \cap \operatorname{Im} p'_0$. Поэтому из равенства нулю модуля (23) вытекает, что $q'_{k-1} f_{0,k} = q'_{k-1} p'_0 g$, где $g \in \mathscr{P}^{t_1 s_k}$. Отсюда $q'_{k-1}(f_{0,k} - p'_0 g) = 0$, следовательно, из точности строк диаграммы $f_{0,k} - p'_0 g = q'_k h$, где $h \in \mathscr{P}^{t_0 s_{k+1}}$. Рассмотрим новый вектор $f' = (f'_{k,0}, \ldots, f'_{0,k}) = f - r'_k(0, \ldots, 0, g, h)$. Очевидно, что $f'_{0,k} = 0$. Поскольку $f' - f \in \operatorname{Im} r'_k$, вектор f' также принадлежит ядру r'_{k+1}. Отсюда вытекает, что $p'_0 f'_{1,k-1} = p'_0 f'_{1,k-1} + q'_{k-1} f'_{0,k} = 0$. Поэтому из точности столбцов диаграммы (21) следует, что $f'_{1,k-1} = p'_1 g'$, где $g' \in \mathscr{P}^{t_2 s_{k-1}}$. Положим, далее,

$$f'' = (f''_{k,0}, \ldots, f''_{0,k}) = f' - r'_k(0, \ldots, 0, g', 0, 0).$$

---

*) Читатель, знакомый со спектральными последовательностями, может вывести это утверждение из того, что спектральная последовательность, связанная с двойным комплексом (21), вырождена (см., например, Годеман [1] теорема 4.8.1).

Из построения $f''_{0,k}=f''_{1,k-1}=0$ и $f''-f'\in\operatorname{Im} r'_k$. Отсюда следует, что $p'_1 f''_{2,k-2}=0$ и т. д. Повторяя это рассуждение k раз, мы получим в итоге вектор $\hat{f}=(0, \ldots, 0)$. Таким образом, $f=f-\hat{f}\in\operatorname{Im} r'_k$, ч. и т. д. Тем самым точность (22) установлена.

Применив к диаграмме (21) функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \Phi)$, мы получим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & & & & & \\
\Phi^{t_{k+1}s_0} \arrow[u] \arrow[r, "q_0"] & {} & & & & & \\
\Phi^{t_k s_0} \arrow[u, "p_k"] \arrow[r, "q_0"] & {} & & & & & \\
\vdots \arrow[u] & & {} & {} & & & \\
\Phi^{t_0 s_0} \arrow[u, "p_0"] \arrow[r, "q_0"] & \ldots \arrow[r] & \Phi^{t_0 s_k} \arrow[u, "p_0"] \arrow[r, "q_k"] & \Phi^{t_0 s_{k+1}} \arrow[u, "p_0"] \arrow[r] & \ldots & & \\
{[\Phi_M]^{s_0}} \arrow[u] \arrow[r, "Q_0"] & \ldots \arrow[r] & {[\Phi_M]^{s_k}} \arrow[u] \arrow[r, "Q_k"] & {[\Phi_M]^{s_{k+1}}} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "Q_{d-1}"] & {[\Phi_M]^{s_d}} \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{24.9}$$

(мы воспользовались формулой $\operatorname{Hom}(M^k, \Phi)\cong[\operatorname{Hom}(M, \Phi)]^k=[\Phi_M]^k$). Здесь Q_k — отображение, действие которого заключается в умножении вектора $(u_1, \ldots, u_{s_k})$, где $u_\alpha\in\Phi_M$, на матрицу q_k; действие отображений p_i и q_j аналогично. Заметим, что нижняя строка этой диаграммы представляет результат применения функтора $\operatorname{Hom}(\cdot, \Phi_M)$ к свободной резольвенте модуля L. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}(L, \Phi_M)=\operatorname{Ker} Q_0,\\
&\operatorname{Ext}^k(L, \Phi_M)=\operatorname{Ker} Q_k/\operatorname{Im} Q_{k-1}, \qquad k=1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{25.9}$$

Если мы применим теперь функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \Phi)$ к (22), то получим последовательность

$$0 \to \Phi_{M \otimes L} \to \Phi_0 \xrightarrow{r_0} \Phi_1 \xrightarrow{r_1} \ldots \to \Phi_k \xrightarrow{r_k} \Phi_{k+1} \to \ldots,$$

в которой $\Phi_k = \bigoplus_{i+j=k} \Phi^{t_i s_j}$, а отображения r_k действуют так:

$$r_k\colon \Phi_k \ni (\varphi_{k,0}, \ldots, \varphi_{0,k}) \to (\psi_{k+1,0}, \ldots, \psi_{0,k+1}) \in \Phi_{k+1},$$

где

$$\varphi_{i,j} \in \Phi^{t_i s_j}, \quad \psi_{i,j} = p_{i-1}\varphi_{i-1,j} + (-1)^i q_{j-1}\varphi_{i,j-1}.$$

Поскольку последовательность (22) является свободной резольвентой модуля $M \otimes L$, мы по определению имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}\,(M \otimes L, \Phi) = \mathrm{Ker}\, r_0, \\ &\mathrm{Ext}^k (M \otimes L, \Phi) = \mathrm{Ker}\, r_k / \mathrm{Im}\, r_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{26.9}$$

Отсюда, в частности, следует, что модуль $\mathrm{Hom}(M \otimes L, \Phi)$ совпадает с подмодулем в $\Phi^{t_0 s_0}$, являющемся пересечением ядер отображений p_0 и q_0. Ядро отображения p_0 есть $[\Phi_M]^{s_0}$, а оператор q_0, действующий на этом подмодуле, совпадает по определению с Q_0. Таким образом, $\mathrm{Hom}(M \otimes L, \Phi) \cong \mathrm{Ker}\, Q_0$. Учитывая (25), мы приходим к изоморфизму $\mathrm{Hom}(M \otimes L, \Phi) \cong \mathrm{Hom}(L, \Phi_M)$. Таким образом, отображение (18) с $k = 0$ определено и всегда является изоморфизмом.

Допустим теперь, что $k \geqslant 1$. Чтобы построить отображение (18), мы построим отображение $\mathrm{Ker}\, Q_k \to \mathrm{Ker}\, r_k$, переводящее $\mathrm{Im}\, Q_{k-1}$ в $\mathrm{Im}\, r_{k-1}$. Из определения модуля Φ_M следует, что модуль $[\Phi_M]^{s_k}$ совпадает с ядром отображения $p_0\colon \Phi^{t_0 s_k} \to \Phi^{t_1 s_k}$. Пусть φ — произвольный элемент модуля $\mathrm{Ker}\, Q_k$. Если его рассматривать как элемент пространства $\Phi^{t_0 s_k}$, то он принадлежит пересечению ядер p_0 и q_k. Следовательно, вектор $(0, \ldots, 0, \varphi) \in \Phi_k$ принадлежит ядру r_k. Соответствие

$$\mathrm{Ker}\, Q_k \ni \varphi \to (0, \ldots, 0, \varphi) \in \mathrm{Ker}\, r_k \tag{27.9}$$

является непрерывным. Предположим, что функция φ принадлежит $\mathrm{Im}\, Q_{k-1}$, т. е. $\varphi = q_{k-1}\psi$, где $\psi \in [\Phi_M]^{s_{k-1}}$. Тогда $(0, \ldots, 0, \varphi) = r_{k-1}(0, \ldots, 0, \psi) \in \mathrm{Im}\, r_{k-1}$. Следовательно, отображение (27) переводит $\mathrm{Im}\, Q_{k-1}$ в $\mathrm{Im}\, r_{k-1}$ и поэтому определяет отображение (18).

Предположим теперь, что пространство Φ M-выпукло. Из этого предположения следует, что все столбцы диаграммы (24) точны.

Через Φ_k^i, $i = 0, \ldots, k$, обозначим подпространство в Φ_k, образованное векторами вида $\varphi = (0, \ldots, 0, \varphi_{i,k-i}, \ldots, \varphi_{0,k})$. Заметим, что оператор r_k действует из Φ_k^i в Φ_{k+1}^{i+1}. Через Ψ_k^i обозначим подпространство в Φ_k, образованное векторами, которые оператор r_k переводит в Φ_{k+1}^l. Очевидно, что пространство Ψ_k^l содержит Φ_k^{l-1} и $\operatorname{Ker} r_k$.

Лемма. *Отображение*

$$[\Phi_M]^{s_k}/\operatorname{Im} Q_{k-1} \to \Psi_k^0/\operatorname{Im} r_{k-1}, \tag{28.9}$$

отвечающее вложению $[\Phi_M]^{s_k} \to \Psi_k^0$, *является изоморфизмом.*

Доказательство. Покажем сначала, что при любом $i = 0, \ldots, k-1$ отображение

$$\Phi_k^i \cap \Psi_k^0/\Phi_k^i \cap \operatorname{Im} r_{k-1} \to \Phi_k^{i+1} \cap \Psi_k^0/\Phi^{i+1} \cap \operatorname{Im} r_{k-1} \tag{29.9}$$

является изоморфизмом. Очевидно, что оно непрерывно и взаимно однозначно. Построим обратное отображение. Пусть φ — произвольный элемент пространства $\Phi_k^{l+1} \cap \Psi_k^0$. Это означает, что вектор φ имеет вид $(0, \ldots, 0, \varphi_{i+1, j}, \ldots, \varphi_{0, k})$, $j = k - i - 1$ и $r_k\varphi \in \Phi_{k+1}^0$. Из этих условий вытекает, что $p_{i+1}\varphi_{i+1, j} = 0$. Поскольку все столбцы диаграммы (24) точны, функцию $\varphi_{i+1, j}$ мы можем записать в виде $p_i\psi_{i, j}$, где $\psi_{l, j} \in \Phi^{t_i s_j}$. Построим вектор $\psi = (0, \ldots, 0, \psi_{i, j}, 0, \ldots, 0) \in \Phi_{k-1}^l$ и положим $\varphi' = \varphi - r_{k-1}\psi$. Из построения следует, что $\varphi' \in \Phi_k^l$ и $r_k\varphi' = r_k\varphi \in \Phi_{k+1}^0$, т. е. $\varphi' \in \Psi_k^0$.

Построенное нами соответствие $\varphi \to \varphi'$ является композицией операций

$$\Phi_k^{i+1} \cap \Psi_k^0 \ni \varphi \to \varphi_{i+1, j} \xrightarrow{p_i^{-1}} \psi_{l, j} \to \psi \to \varphi' = \varphi - r_k\psi \in \Phi_k^l \cap \Psi_k^0.$$

Каждая из этих операций является непрерывным отображением, действующим в соответствующих пространствах, причем отображение p_l^{-1}, вообще говоря, многозначное. Следовательно, их композиция также является, вообще говоря, многозначным непрерывным отображением. Образ нуля при этом отображении образован функциями вида $-r_k\psi$, принадлежащими Φ_k^l, и, следовательно, принадлежит подпространству $\Phi_k^i \cap \operatorname{Im} r_{k-1}$. Поэтому ассоциированное отображение

$$\Phi_k^{l+1} \cap \Psi_k^0 \to \Phi_k^i \cap \Psi_k^0/\Phi_k^i \cap \operatorname{Im} r_{k-1} \tag{30.9}$$

является непрерывным и однозначным. Так как векторы φ и φ' совпадают по модулю подпространства $\Phi_k^{l+1} \cap \operatorname{Im} r_{k-1}$, отображение (30) является обратным к отображению (29). Тем самым мы доказали, что отображение (29) есть изоморфизм.

Рассмотрим отображение

$$\Phi_k^0 \cap \Psi_k^0/\Phi_k^0 \cap \operatorname{Im} r_{k-1} \to \Psi_k^0/\operatorname{Im} r_{k-1}, \tag{31.9}$$

являющееся композицией отображений (29) при всех $l = 0, \ldots, k-1$. Пространство $\Phi_k^0 \cap \Psi_k^0$ по определению образовано векторами вида

$\varphi=(0, \ldots, 0, \varphi_{0,k})\in\Phi_k$ такими, что $r_k\varphi\in\Phi^0_{k+1}$. Последнее включение означает, что $p_0\varphi_{0,k}=0$, т. е. $\varphi_{0,k}\in[\Phi_M]^{s_k}$. Относя вектору φ его компоненту $\varphi_{0,k}$, мы получим изоморфное отображение $\Phi^0_k\cap\Psi^0_k\to\to[\Phi_M]^{s_k}$. Найдем образ подпространства $\Phi^0_k\cap\operatorname{Im} r_{k-1}$ при этом отображении. Отметим сначала очевидное равенство $\Phi^0_k\cap\operatorname{Im} r_{k-1}==r_{k-1}\Psi^0_{k-1}$. В изоморфизме (31) заменим k на $k-1$ и подействуем на обе его части оператором r_{k-1}. В итоге мы получим равенство $r_{k-1}(\Phi^0_{k-1}\cap\Psi^0_{k-1})=r_{k-1}\Psi^0_{k-1}$. Из проведенного выше рассуждения, в котором k заменено на $k-1$, следует, что операция $\varphi\to\varphi_{0,k-1}$ определяет изоморфизм $\Phi^0_{k-1}\cap\Psi^0_{k-1}\to[\Phi_M]^{s_{k-1}}$, причем действие отображения r_{k-1} на $\Phi^0_{k-1}\cap\Psi^0_{k-1}$ переходит в действие отображения Q_{k-1} на $[\Phi_M]^{s_{k-1}}$. В итоге мы получаем изоморфизм $\Phi^0_k\cap\operatorname{Im} r_{k-1}\cong\cong\operatorname{Im} Q_{k-1}$, который является сужением изоморфизма $\Phi^0_k\cap\Psi^0_k\cong[\Phi_M]^{s_k}$, установленного выше. Отсюда вытекает, что левое факторпространство в (31) изоморфно $[\Phi_M]^{s_k}/\operatorname{Im} Q_{k-1}$. ■

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Заметим, что факторпространство $\operatorname{Ker} r_k/\operatorname{Im} r_{k-1}$ является подпространством правой части изоморфизма (28) и совпадает с ядром отображения r_k, действующего из правой части (28) в Φ_{k+1}. Поэтому прообраз этого подпространства при отображении (28) есть ядро отображения Q_k, действующего из $[\Phi_M]^{s_k}/\operatorname{Im} Q_{k-1}$. Таким образом, мы пришли к изоморфизму

$$\operatorname{Ker} r_k/\operatorname{Im} r_{k-1}\cong\operatorname{Ker} Q_k/\operatorname{Im} Q_{k-1}.$$

Ввиду изоморфизмов (25), (26) отсюда следует, что отображения (18) также являются изоморфизмами. Второе утверждение теоремы доказано.

Докажем третье утверждение. Из условия следует, что при любом $k\geqslant 1$ отображение

$$\Phi_k/\operatorname{Im} r_{k-1}\xrightarrow{r_k}\operatorname{Ker} r_{k+1} \tag{32.9}$$

является изоморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Psi^0_k\,/\,\operatorname{Im} r_{k-1} & \xrightarrow{r_k} & \Phi^0_{k+1}\cap\operatorname{Ker} r_{k+1} \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle I'} \\ [\Phi_M]^{s_k}/\operatorname{Im} Q_{k-1} & \xrightarrow{Q_k} & \operatorname{Ker} Q_{k+1}, \end{array}$$

в которой I — изоморфизм леммы, а I' — естественное вложение (оно, очевидно, также является изоморфизмом). Заметим, что отображение r_k этой диаграммы является сужением изоморфизма (32). Отсюда следует, что Q_k — тоже изоморфизм. Тем самым L-выпуклость пространства Φ_M доказана. ■

Замечание. Из того, что последовательность (22) является свободной резольвентой модуля $M \otimes L$, следует, что когомологическая размерность этого модуля не превосходит длины этой последовательности. С другой стороны, ее длина равна сумме длин резольвент (19) и (20). Так как эти резольвенты выбраны произвольным образом, мы можем считать, что они имеют наименьшие возможные длины, т. е. длины, равные $\delta(M)$ и $\delta(L)$. Таким образом, мы пришли к неравенству

$$\delta(M \otimes L) \leqslant \delta(M) + \delta(L),$$

справедливому для любых двух конечных $\mathcal{P}$-модулей, удовлетворяющих условию (17).

5°. Связь M-выпуклости пространства $\Phi(\Omega)$ с топологией области Ω.

Теорема 4. *Пусть M — произвольный конечный $\mathcal{P}$-модуль размерности $d > 0$. Тогда если пространство $\Phi(\Omega)$ M-выпукло, то $H^i(\Omega, \mathcal{C}) = 0$ для всех $i > d$. Если же пространство $\Phi(\Omega)$ сильно M-выпукло, то также $H^d(\Omega, \mathcal{C}) = 0$.*

Доказательство. Построим сначала конечный $\mathcal{P}$-модуль L, обладающий следующими свойствами:

А) $\delta(L) \leqslant d$,

Б) $\mathrm{Tor}_i(M, L) = 0$, $i \geqslant 1$,

В) размерность модуля $M \otimes L$ равна нулю. Основное кольцо в $\mathcal{P}$ мы будем интерпретировать сейчас как кольцо многочленов от комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Существование модуля L мы докажем индукцией по числу n. Предположим, что аналогичная задача для кольца $\mathcal{P}'$ всех многочленов от переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$ всегда разрешима. Заметим, что в случае $n - 1 = 0$ эта задача тривиальна.

Приступим к построению модуля L. Если $d = 0$, то мы можем положить $L = \mathcal{P}$. Предположим теперь, что $d > 0$. Модуль M представим в виде фактормодуля $\mathcal{P}^s/\mathfrak{p}$ и зафиксируем некоторое приведенное примарное представление подмодуля $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \mathfrak{p}_e$. В пространстве C^n выберем систему координат таким образом, чтобы при любом λ подмодуль $\mathfrak{p}_\lambda$ был нормально расположен, а пересечение многообразия $N(\mathfrak{p}_\lambda)$ с подпространством $z_n = 0$ имело размерность на единицу меньшую, чем размерность $N(\mathfrak{p}_\lambda)$. Рассмотрим модуль $L_n = \mathcal{P}/z_n\mathcal{P}$. Последовательность

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{z_n} \mathcal{P} \to L_n \to 0$$

является свободной резольвентой этого модуля. Поэтому $\delta(L_n) = 1$, а из предложения 3 § 3 гл. I

$$\mathrm{Tor}_1(M, L_n) \cong \mathfrak{p} \cap z_n\mathcal{P}^s/z_n\mathfrak{p}, \quad \mathrm{Tor}_i(M, L_n) = 0, \qquad i \geqslant 2.$$

Покажем, что также $\operatorname{Tor}_1(M, L) = 0$. Для этого достаточно показать, что любой элемент $f \in \mathfrak{p} \cap z_n\mathscr{P}^s$ принадлежит $z_n\mathfrak{p}$. Мы имеем $f = z_n g \in \mathfrak{p}$, где $g \in \mathscr{P}^s$. Зафиксируем λ; если размерность подмодуля $\mathfrak{p}_\lambda$ больше нуля, то в силу предложения 6 § 1 гл. IV из включения $z_n g \in \mathfrak{p}_\lambda$ следует включение $g \in \mathfrak{p}_\lambda$, так как подмодуль $\mathfrak{p}_\lambda$ нормально расположен. Если же размерность подмодуля $\mathfrak{p}_\lambda$ равна нулю, то ассоциированное с ним многообразие $N(\mathfrak{p}_\lambda)$, состоящее из одной точки, по условию пересекается с подпространством $z_n = 0$ по многообразию размерности -1, т. е. не пересекается с ним. Поэтому из включения $z_n g \in \mathfrak{p}_\lambda$ снова следует $g \in \mathfrak{p}_\lambda$. Таким образом, мы установили, что $g \in \mathfrak{p}_\lambda$ при любом λ, т. е. $g \in \mathfrak{p}$. Отсюда $f = z_n g \in z_n\mathfrak{p}$, ч. и т. д. Итак, мы доказали, что

$$\operatorname{Tor}_i(M, L_n) = 0, \qquad i \geqslant 1. \tag{33.9}$$

Рассмотрим $\mathscr{P}'$-модуль m, являющийся сужением модуля M на подпространстве $z_n = 0$ (см. 5° § 1 гл. IV). Согласно лемме 2 § 1 гл. IV многообразие $N(m)$ равно пересечению $N(M)$ и подпространства $z_n = 0$ и, следовательно, имеет размерность $d-1$ в силу выбора системы координат в C^n. Из предположения индукции следует, что существует конечный $\mathscr{P}'$-модуль l, обладающий следующими свойствами: а) $\delta(l) \leqslant d-1$, б) $\operatorname{Tor}_i(m, l) = 0$ при $i \geqslant 1$ и в) $\dim(m \otimes l) = 0$. Пусть

$$0 \to \mathscr{P}'^{\tau_\delta} \to \ldots \to \mathscr{P}'^{\tau_{k+1}} \xrightarrow{q_k} \mathscr{P}'^{\tau_k} \xrightarrow{q_{k-1}} \ldots$$
$$\ldots \to \mathscr{P}'^{\tau_1} \xrightarrow{q_0} \mathscr{P}'^{\tau_0} \to l \to 0 \tag{34.9}$$

— некоторая свободная резольвента $\mathscr{P}'$-модуля l длины $\delta = \delta(l)$. В этой последовательности мы заменим $\mathscr{P}'$ на $\mathscr{P}$, а l на $\mathscr{P}$-модуль $L' = \mathscr{P}^{\tau_0}/q_0\mathscr{P}^{\tau_1}$:

$$0 \to \mathscr{P} \xrightarrow{\tau_\delta} \ldots \to \mathscr{P}^{\tau_{k+1}} \xrightarrow{q_k} \mathscr{P}^{\tau_k} \xrightarrow{q_{k-1}} \ldots$$
$$\ldots \to \mathscr{P}^{\tau_1} \xrightarrow{q_0} \mathscr{P}^{\tau_0} \to L' \to 0. \tag{35.9}$$

Покажем, что полученная последовательность точна. Пусть $f \in \mathscr{P}^{\tau_k}$ — произвольный элемент, принадлежащий ядру q_{k-1}. Разложим его по степеням z_n: $f = \sum f_i z_n^i$. Из $q_{k-1}f = 0$ вытекает $q_{k-1}f_i = 0$ при любом i. Из точности последовательности (34) $f_i = q_k g_i$, $g_i \in \mathscr{P}'^{\tau_{k+1}}$, откуда $f = q_k g$, где $g = \sum z_n^i g_i \in \mathscr{P}^{\tau_{k+1}}$. Тем самым точность (35) установлена. Таким образом, последовательность (35) является свободной резольвентой $\mathscr{P}$-модуля L', откуда $\delta(L') \leqslant d-1$.

Положим $L = L' \otimes L_n$. Из предложения 5 § 4 гл. IV следует, что $\operatorname{Tor}_i(L', L_n) = 0$, $i \geqslant 1$. Поэтому согласно замечанию 4° мы имеем неравенство $\delta(L) \leqslant \delta(L') + \delta(L_n) \leqslant d$. Тем самым свойство А) установлено.

Пусть (19) есть свободная резольвента модуля M. Из соотношений (33) вытекает, что точна последовательность

$$\ldots \to L_n^{t_2} \xrightarrow{p_1'} L_n^{t_1} \xrightarrow{p_0'} L_n^{t_0} \to M \otimes L_n \to 0. \qquad (36.9)$$

Заметим теперь, что операция умножения в кольце $\mathscr{P}$ порождает операцию умножения классов смежности в фактормодуле $L_n = \mathscr{P}/z_n\mathscr{P}$. Эта операция превращает L_n в кольцо, изоморфное кольцу $\mathscr{P}'$. $\mathscr{P}$-модули $M \otimes L_n$ и L являются также L_n-модулями. При этом изоморфизм колец $L_n \cong \mathscr{P}'$ порождает изоморфизмы модулей $M \otimes L_n \cong m$, $L \cong l$, а последовательность (36) можно рассматривать как свободную резольвенту $\mathscr{P}'$-модуля m. Поэтому из б) вытекает точность последовательности

$$\ldots \to L^{t_2} \xrightarrow{p_1'} L^{t_1} \xrightarrow{p_0'} L^{t_0}.$$

Сопоставляя эту последовательность с резольвентой (19), мы приходим к выводу, что $\operatorname{Tor}_i(M, L) = 0$, $i \geqslant 1$. Тем самым свойство Б) также установлено.

Установим свойство В). Из предложения 3 § 1 гл. IV следует равенство

$$N(M \otimes L) = N(M \otimes (L' \otimes L_n)) = N(M) \cap N(L') \cap N(L_n). \quad (37.9)$$

Многообразие $N(L_n)$, очевидно, совпадает с подпространством $z_n = 0$. Из леммы 3 § 1 гл. IV вытекает, что пересечение этого подпространства с многообразиями $N(M)$ и $M(L')$ суть многообразия $N(m)$ и $N(l)$. Поэтому правая часть (37) равна многообразию $N(m) \cap N(l) = N(m \otimes l)$, которое имеет размерность нуль согласно в). Тем самым свойство В) также установлено.

Перейдем к доказательству теоремы. Установим равенства

$$\operatorname{Ext}^i(L, \Phi_M) = 0, \qquad i > d, \quad \Phi = \Phi(\Omega). \qquad (38.9)$$

Из А) следует, что подходящая свободная резольвента модуля L имеет длину не больше d, т. е. имеет вид (20). Пусть (24) — диаграмма, построенная с помощью этой резольвенты. Ее нижняя строка состоит из одних нулей правее члена $[\Phi_M]^{s_d}$. Поэтому пространства (38), являющиеся пространствами когомологий этой строки, равны нулю при $i > d$.

Установим равенство (38) с $i = d$, предполагая, что пространство Φ сильно M-выпукло. Это равенство эквивалентно такому:

$$q_{d-1}[\Phi_M]^{s_{d-1}} = [\Phi_M]^{s_d}.$$

Для того чтобы доказать совпадение левой и правой части, достаточно установить, что а) левая часть замкнута в правой и б) левая часть плотна в правой. Замкнутость левой части эквивалентна отделимости пространства $\mathrm{Ext}^d(L, \Phi_M)$. Из теоремы 3 следует, что оно изоморфно пространству $\mathrm{Ext}^d(M \otimes L, \Phi)$. Последнее в силу теоремы 1 изоморфно пространству $H^d(U, \mathscr{P}_{M\otimes L})$, где U — некоторое локально конечное выпуклое покрытие области Ω. Из свойства B) и теоремы 2 вытекает, что пространство $H^d(U, \mathscr{P}_{M\otimes L})$ отделимо. Тем самым утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Поскольку по условию пространство E_M плотно в Φ_M, достаточно установить равенство

$$q_{d-1}[E_M]^{s_{d-1}} = [E_M]^{s_d}.$$

Это равенство эквивалентно соотношению $\mathrm{Ext}^d(L, E_M) = 0$. Так как согласно предложению 3 § 7 пространство E M-выпукло и $M \otimes L$ — выпукло, то из теоремы 3 вытекает, что

$$\mathrm{Ext}^d(L, E_M) \cong \mathrm{Ext}^d(M \otimes L, E) = 0,$$

ч. и т. д.

Итак, равенства (38) установлены. Исходя из этих равенств и используя последовательно теорему 3, следствие 1 и теорему 2, мы получаем цепочку равенств

$$\mathrm{Ext}^i(L, \Phi_M) \cong \mathrm{Ext}^i(M \otimes L, \Phi) \cong H^i(\Omega, \mathscr{P}_{M\otimes L}) \cong \\ \cong [H^i(\Omega, \mathscr{C})]^{l(M\otimes L)} = 0, \quad i > d \qquad (i \geqslant d). \quad (39.9)$$

Поскольку всякий нульмерный модуль не равен нулю, то $l(M \otimes L) \neq 0$. Поэтому из (39) вытекает утверждение теоремы. ■

6°. Примеры.

Пример 1. Пусть p — квадратная $\mathscr{P}$-матрица порядка s, причем ее определитель не есть константа. Многообразие, ассоциированное с модулем $M = \mathscr{P}^s/p'\mathscr{P}^s$, есть многообразие корней многочлена $\det p$ (см. предложение 2 § 1 гл. IV) и, следовательно, имеет размерность $n-1$. Поэтому в силу теоремы 4, для того чтобы пространство $\Phi(\Omega)$ было сильно M-выпукло, необходимо, чтобы $H^{n-1}(\Omega, \mathscr{C}) = 0$, т. е. чтобы дополнение к области Ω в R^n не имело связных компактных компонент.

Пример 2. Пусть p и q — элементы кольца $\mathscr{P}$. Положим $M = \mathscr{P}/q\mathscr{P}$ и $L = \mathscr{P}/p\mathscr{P}$. Найдем условия на многочлены p и q, при которых $\mathrm{Tor}_i(M, L) = 0$, $i \geqslant 1$. Согласно предложению 3 § 3 гл. I эти соотношения эквивалентны равенству $p\mathscr{P} \cap q\mathscr{P} = pq\mathscr{P}$. Это равенство означает, что всякий многочлен, делящийся на p и q, делится на произведение pq, т. е. что многочлены p и q взаимно просты.

Итак, предположим, что многочлены p и q взаимно просты. Тогда из теоремы 3 вытекает следующее утверждение. Пусть Ω — произвольная выпуклая область. Тогда уравнение $pu = w$, где $w \in \Phi(\Omega)$ и $qw = 0$, имеет решение $u \in \Phi(\Omega)$ такое, что $qu = 0$. Покажем, что условие взаимной простоты многочленов p и q является также необходимым для того, чтобы такая теорема имела место. Действительно, допустим, что многочлены p и q имеют общий делитель r, отличный от константы, причем $p = p_1 r$, а $q = q_1 r$. Тогда существует такая экспонента $w \in E$, что $qw = 0$, но $q_1 w \neq 0$. В таком случае система уравнений

$$pu = w, \qquad qu = 0$$

неразрешима, так как не выполнено необходимое условие ее разрешимости: $q_1 w - p_1 \cdot 0 = 0$.

Пример 3. Вернемся к обозначениям примера 3 2° § 7. Рассмотрим $\mathscr{P}$-матрицы $'d_0$ и $''d_0$, отвечающие действию операторов $'d$ и $''d$ на дифференциальные формы нулевого порядка. Положим

$$M = \mathscr{P} / d_0' \mathscr{P}^n, \quad M' = \mathscr{P} / 'd_0' \mathscr{P}^m, \quad M'' = \mathscr{P} / ''d_0' \mathscr{P}^m.$$

Пространства $\Phi_M(\Omega)$, $\Phi_{M''}(\Omega)$ и $\Phi_{M'}(\Omega)$ суть соответственно пространства локально постоянных, голоморфных и антиголоморфных функций в области Ω.

Из предложения 3 § 3 гл. I вытекает равенство

$$M' \otimes M'' \cong \mathscr{P} / 'd_0' \mathscr{P}^m + ''d_0' \mathscr{P}^m.$$

Кольцо $\mathscr{P}$ мы будем интерпретировать как кольцо многочленов в C^n. В таком случае одночлены $z_j - iz_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$, образуют базис в идеале $'d_0' \mathscr{P}^0$, а одночлены $z_j + iz_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$, — в идеале $''d_0' \mathscr{P}^m$. Сумма этих идеалов есть идеал, в котором базис образован всеми одночленами z_j, $j = 1, \ldots, n$, т. е. идеал $d_0' \mathscr{P}^n$. Отсюда

$$M' \otimes M'' \cong M, \qquad \dim M = 0, \qquad l(M) = 1.$$

Так как модули M' и M'' «зависят» от различных групп переменных, то согласно предложению 5 § 4 гл. IV $\operatorname{Tor}_i(M', M'') = 0$, $i \geqslant 1$. Поэтому из теоремы 3 вытекает существование непрерывного отображения

$$\operatorname{Ext}^i(M', \Phi_{M''}(\Omega)) \to \operatorname{Ext}^i(M, \Phi(\Omega)), \qquad i \geqslant 0. \tag{40.9}$$

$\operatorname{Ext}^i(M', \Phi_{M''}(\Omega))$ есть пространство когомологий d'-дифференциальных голоморфных форм, а $\operatorname{Ext}^i(M, \Phi(\Omega))$ — пространство когомологий d-дифференциальных форм с коэффициентами в $\Phi(\Omega)$. Из конструкции отображения (40) видно, что оно действует естественным образом, т. е. относит классу голоморфных d'-форм содержащий его класс d-форм.

Пусть Ω — область голоморфности. В таком случае пространство $\Phi(\Omega)$ M''-выпукло (см. пример 2 2°), следовательно, из теоремы 3 вытекает известный результат: отображение (40) есть алгебраический изоморфизм. Далее, поскольку размерность модуля M'' равна m, то из теоремы 4 следует, что $H^l(\Omega, \mathscr{H})=0$ для всех $l>m$. Если же Ω — область Рунге, то ввиду того, что $\Phi(\Omega)$ сильно M''-выпукло (см. тот же пример), из теоремы 4 следует, что также $H^m(\Omega, \mathscr{H})=0$.

§ 10. Алгебраические условия M-выпуклости

Напомним, что когомологической размерностью $\delta(M)$ конечного $\mathscr{P}$-модуля M называется наименьшая длина его свободной резольвенты (см. 7° § 3 гл. I). В частности, если $\delta(M)=-1$, то по определению модуль M равен нулю, если же $\delta(M)=0$, то модуль имеет свободную резольвенту вида $0\to\mathscr{P}^s\to M\to 0$. В обоих случаях $t=0$, и, следовательно, соответствующая система (1.7) оказывается пустой. Следовательно, проблема M-выпуклости при $\delta(M)<1$ тривиальна. В случае $\delta(M)=1$ эта проблема является содержательной и допускает эквивалентную формулировку в виде условия, связывающего носитель функции $\varphi\in[\mathscr{E}^*(R^n)]^t$ с носителем $p'\varphi$.

1°. Условие M-выпуклости пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ в случае $\delta(M)=1$. Из равенства $\delta(M)=1$ следует, что модуль M имеет свободную резольвенту вида

$$0\longrightarrow\mathscr{P}^t\xrightarrow{p'}\mathscr{P}^s\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

где $p'\neq 0$.

Теорема 1. *Пусть $\delta(M)=1$. Тогда для того чтобы пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ было M-выпукло, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие:*

(S_Ω) *для любого компакта $K\subset\Omega$ существует компакт $K'\subset\Omega$ такой, что из* $\operatorname{supp} p'\varphi\subset K$, *где* $\varphi\in[\mathscr{D}(\Omega)]^t$, *следует, что* $\operatorname{supp}\varphi\subset K'$.

Доказательство. Достаточность. Пусть условие (S_Ω) выполнено. Покажем, что оно справедливо также для функций из $[\mathscr{E}^*(\Omega)]^t$. Зафиксируем произвольный компакт $K\subset\Omega$ и выберем компакт K_0 такой, что $\Omega\supset K_0\supset\supset K$. Пусть φ — произвольная функция из $[\mathscr{E}^*(\Omega)]^t$ такая, что $\operatorname{supp} p'\varphi\subset K$. Выберем некоторую функцию $\chi\in\mathscr{D}(R^n)$ с $\int\chi\,d\xi=1$. Последовательность функций $\chi_\nu=\nu^n\chi(\nu\xi)$, $\nu=1, 2, \ldots$, стремится к дельта-функции в топологии обобщенных функций. При достаточно большом ν носитель свертки $\chi_\nu * p'\varphi = = p'(\chi_\nu*\varphi)$ принадлежит K_0. Согласно условию (S_Ω) существует компакт K', зависящий лишь от K_0, такой, что $\operatorname{supp}(\chi_\nu*\varphi)\subset K'$. Так как $\chi_\nu*\varphi\to\varphi$ при $\nu\to\infty$, мы заключаем, что $\operatorname{supp}\varphi\subset K'$. Тем самым мы доказали, что условие (S_Ω) выполнено для обобщенных функций с компактными носителями.

Пусть K_α, $\alpha=1, 2, \ldots,$ — некоторая строго возрастающая последовательность допустимых компактов, стремящаяся к Ω. При каждом α рассмотрим последовательность л. т. п.

$$0 \longrightarrow \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^t \xrightarrow{p^*} \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s \xrightarrow{\pi_\alpha} \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s / P_\alpha \longrightarrow 0, \tag{1.10}$$

где

$$P_\alpha = \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s \cap p^* \left[\mathscr{E}^*(\Omega)\right]^t,$$

а π_α — каноническое отображение. Поскольку пространство $\mathscr{E}(R^n)$ M-выпукло, то отображение

$$[\mathscr{E}^*(R^n)]^t \xrightarrow{p^*} [\mathscr{E}^*(R^n)]^s \tag{2.10}$$

взаимно однозначно и является гомоморфизмом. Согласно предложению 4 § 2 $\mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ есть подпространство в $\mathscr{E}^*(\Omega)$. Поэтому отображение p^* в (1) является сужением отображения (2) и, следовательно, также взаимно однозначно и гомоморфно.

Так как $\mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ при любом α есть подпространство в $\mathscr{E}^*_{K_{\alpha+1}}$, то определено и непрерывно тождественное вложение $j_\alpha^{\alpha+1} : \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s \to \left[\mathscr{E}^*_{K_{\alpha+1}}\right]^s$. При этом вложении подпространство P_α переходит в $P_{\alpha+1}$ и, следовательно, определено непрерывное отображение факторпространств

$$k_\alpha^{\alpha+1} : \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s / P_\alpha \longrightarrow \left[\mathscr{E}^*_{K_{\alpha+1}}\right]^s / P_{\alpha+1}.$$

Пространства $\left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^t$, $\left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s$ и $\left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s / P_\alpha$ с $\alpha=1, 2, \ldots$ вместе с отображениями $j_\alpha^{\alpha+1}$ и $k_\alpha^{\alpha+1}$ образуют возрастающие семейства л. т. п. Поскольку отображения p^* и π в (2) коммутируют с $j_\alpha^{\alpha+1}$ и $k_\alpha^{\alpha+1}$, они определяют отображения этих семейств. Таким образом, возникает последовательность семейств л. т. п.

$$0 \longrightarrow \left\{ \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^t \right\} \xrightarrow{p^*} \left\{ \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s \right\} \xrightarrow{\pi} \left\{ \left[\mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s / P_\alpha \right\} \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Покажем, что эта последовательность точна. Как мы выше отметили, отображение p^* в (1) взаимно однозначно и является гомоморфизмом. Поэтому то же самое можно сказать об отображении p^* в (3). Поскольку все отображения π_α являются гомоморфизмами и эпиморфны, теми же свойствами обладает отображение π. Таким образом, остается установить алгебраическую точность (3) во втором члене. Так как $\pi_\alpha p^* = 0$ для всех α, то $\pi p^* = 0$, откуда $\operatorname{Im} p^* \subset \operatorname{Ker} \pi$. Зафиксируем произвольное α и выберем произвольный элемент пространства $\operatorname{Ker} \pi_\alpha = P_\alpha$. По определению этот элемент есть обобщенная функция с носителем в K_α, имеющая вид $p^*\varphi$, где $\varphi \in [\mathscr{E}^*(\Omega)]^t$. Из условия (S_Ω) следует, что носитель φ принадлежит K_β, где β зависит лишь от α. Согласно предложению 4 § 2 это означает, что $\varphi \in \left[\mathscr{E}^*_{K_\beta}\right]^t$. Таким образом, мы установили включение $\operatorname{Ker} \pi_\alpha \subset p^* \left[\mathscr{E}^*_{K_\beta}\right]^t$, из которого вытекает искомая эквивалентность $\operatorname{Ker} \pi \sim \operatorname{Im} p^*$, что завершает доказательство точности (3).

Проверим теперь выполнение условий а), б) и в) предложения 10 § 1. Условие а) выполнено, поскольку отображение $k_\alpha^{\alpha+1}$, очевидно, взаимно однозначно. Условие б) следует из того, что $j_\alpha^{\alpha+1}$ есть вложение, переводящее одно подпространство $[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$ в другое подпространство того же пространства. Каждое пространство $\mathscr{E}^*_{K_\alpha}$, будучи сопряженным к пространству Фреше, является полным. Отсюда вытекает выполнение условия в). Таким образом, мы вправе применить второе утверждение предложения 10 § 1, из которого вытекает, что отображение

$$\left[\varinjlim \mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^t \xrightarrow{p^*} \left[\varinjlim \mathscr{E}^*_{K_\alpha}\right]^s$$

взаимно однозначно и имеет замкнутый образ.

Согласно предложению 4 § 2 индуктивный предел $\varinjlim \mathscr{E}^*_{K_\alpha}$ совпадает с пространством $\mathscr{E}^*(\Omega)$. Тем самым мы установили, что оператор p^*, действующий из $[\mathscr{E}^*(\Omega)]^t$ в $[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$, взаимно однозначен и имеет замкнутый образ. Отсюда согласно предложению 1 § 7 следует, что пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ M-выпукло. Тем самым достаточность условия S_Ω доказана.

Докажем необходимость этого условия. Предположим, что пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ M-выпукло и зафиксируем произвольный компакт $K \subset \Omega$. Рассмотрим пространство Ψ, образованное функциями $\varphi \in [\mathscr{E}^*(\Omega)]^t$, для которых $\operatorname{supp} p^*\varphi \subset K$. Это пространство наделим топологией, определяемой полунормами $\| p^*\varphi \|^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим билинейную форму

$$(f, \varphi) = \int \bar{f} \varphi \, d\xi,$$

определенную для функций $f \in [\mathscr{E}(\Omega)]^t$ и функций $\varphi \in \Psi$. При фиксированной функции φ эта форма непрерывна по f, так как φ имеет компактный носитель. С другой стороны, поскольку пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ M-выпукло, для любой функции f мы можем найти функцию $u \in [\mathscr{E}(\Omega)]^s$ такую, что $pu = f$. Поэтому

$$(f, \varphi) = (pu, \varphi) = (u, p^*\varphi).$$

Это равенство показывает, что форма (f, φ) непрерывна по φ в топологии Ψ при любой фиксированной функции f. Таким образом, форма (f, φ), заданная на прямом произведении пространства Фреше $[\mathscr{E}(\Omega)]^t$ и метризуемого пространства Ψ, раздельно непрерывна.

Следовательно, она непрерывна *), т. е. существуют константы k, C и компакт $K' \subset \Omega$, такие, что

$$\left| \int \bar{f} \varphi \, d\xi \right| \leqslant C \| p^* \varphi \|^k \| f \|^k_{K'}.$$

Из этого неравенства следует, что для любой функции $\varphi \in \Psi$ $\operatorname{supp} \varphi \subset K'$, т. е. условие S_Ω выполнено. ■

Следствие 1. *Пусть M — эллиптический модуль, причем $\delta(M) = 1$. Тогда для любой области $\Omega \subset R^n$ пространство $\Phi(\Omega)$ M-выпукло. Для того чтобы пространство $\Phi(\Omega)$ было сильно M-выпукло, необходимо и достаточно, чтобы $H^{n-1}(\Omega, \mathcal{C}) = 0$, т. е. чтобы дополнение к Ω не имело связных компактных компонент.*

Доказательство. Из следствия 2 § 9 вытекает, что оба сформулированные утверждения достаточно доказать для пространства $\Phi(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$. Докажем первое утверждение. Для этого нужно проверить, что условие S_Ω выполнено для любой области Ω. Заметим, что из условия $\delta(M) = 1$ следует, что $t \leqslant s$. С другой стороны, из эллиптичности модуля M следует, что многообразие $N(M) = \{z : \operatorname{rang} p'(z) < s\}$ не совпадает с C^n. Отсюда $t \geqslant s$, т. е. $t = s$. Таким образом, мы установили, что матрица p' квадратная, следовательно, многообразие $\{z : \operatorname{rang} p(z) < t\}$ совпадает с $N(M)$, откуда вытекает, что оператор p' эллиптический.

Зафиксируем произвольную область Ω и компакт $K \subset \Omega$. Пусть $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^t$ — произвольная функция такая, что $\operatorname{supp} p'\varphi \subset K$. Из эллиптичности оператора p' следует, что функция φ аналитична вне K. Так как носитель функции φ принадлежит Ω, из свойства единственности аналитических функций следует, что $\varphi = 0$ в каждой связной компоненте области $\complement K$, пересекающейся с $\complement \Omega$. Пусть Ω' — объединение этих компонент, а $K' = \complement \Omega'$. Компакт K' принадлежит Ω, а из сказанного следует, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K'$. Тем самым первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Так как $\dim M = n - 1$, необходимость условия $H^{n-1}(\Omega, \mathcal{C}) = 0$ следует из теоремы 4 § 9. Установим его достаточность. Согласно предложению 1 § 7 достаточно установить включение

$$p^* [\mathcal{E}^*(\Omega)]^t \supset [\mathcal{E}^*(\Omega)]^s \cap E^0_p. \tag{4.10}$$

Пусть φ — произвольный элемент правой части. Из того, что пространство $\mathcal{E}(R^n)$ сильно M-выпукло, следует, что $\varphi = p^*\psi$, где $\psi \in [\mathcal{E}^*(R^n)]^t$. Пусть Γ — произвольная связная компонента множества $\complement \Omega$. Так как $\operatorname{supp} p^*\psi \subset \Omega$, а оператор p^* эллиптичен, функ-

*) См. Бурбаки [1], гл. III, § 4, n° 1, предложение 2, стр. 184.

ция ψ аналитична в окрестности Γ. Поскольку по условию множество Γ связно и не ограничено, а функция ψ равна нулю при достаточно большом $|\xi|$, то $\psi\equiv 0$ в окрестности Γ. Отсюда следует, что $\operatorname{supp}\psi\subset\Omega$, т. е. функция φ принадлежит левой части (4). Тем самым включение (4) установлено. ■

Пример. Пусть $s=t=1$, а $p=\Delta=\sum_1^n\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}$ есть оператор Лапласа. Соответствующий многочлен $\Delta(z)$ равен $-\sum z_j^2$, поэтому многообразие, ассоциированное с матрицей p, имеет вид $N=\{z:\sum z_j^2=0\}$. Легко проверить, что на этом многообразии выполнено неравенство (1.5) с $\gamma=1$, т. е. оператор p является эллиптическим. Следовательно, модуль $M=\mathcal{P}/p\mathcal{P}$ также является эллиптическим и, как легко видеть, $\delta(M)=1$. Таким образом, к этому модулю применимо следствие 1. Из первого утверждения этого следствия вытекает, что уравнение $\Delta u=w$ всегда разрешимо в $\Phi(\Omega)$ при $w\in\Phi(\Omega)$.

Согласно второму утверждению следствия 1, для того чтобы пространство E_p было плотно в $\Phi_p(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к Ω не имело компактных связных компонент. Уточним этот результат, используя замечание 7° § 8. Согласно этому замечанию условие E_p плотно в $\Phi_p(\Omega)$ эквивалентно условию: E_p^B плотно в $\Phi_p(\Omega)$, где B — произвольное множество в C^n, пересекающееся с каждым многообразием N^λ, ассоциированным с M.

Найдем многообразия N^λ. В случае $n=2$ многочлен $\Delta(z)$ допускает следующее разложение на неприводимые множители: $\Delta(z)=-(z_1-iz_2)(z_1+iz_2)$. Соответствующее примарное представление допускает идеал $p\mathcal{P}\subset\mathcal{P}$. Поэтому многообразия $N^0=\{z:z_1=iz_2\}$ и $N^1=\{z:z_1=-iz_2\}$ образуют набор, ассоциированный с модулем M. В случае $n>2$ многочлен $\Delta(z)$ неприводим, а следовательно, идеал $p\mathcal{P}$ примарный, т. е. $N^0=N$, а $N^\lambda=\phi$, $\lambda>0$. Таким образом, для любого $n>1$ каждое многообразие N^λ, ассоциированное с M, проходит через начало координат. Поэтому в качестве B мы можем всегда выбрать множество, единственным элементом которого является начало координат.

По определению соответствующее пространство E_p^B образовано всеми многочленами u, удовлетворяющими уравнению $\Delta u=0$, т. е. всеми гармоническими многочленами. Итак, мы пришли к следующему классическому результату: *для того чтобы гармонические многочлены были плотны в пространстве $\Phi_p(\Omega)$ гармонических функций в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к области Ω не имело связных компактных компонент.*

2°. Условие сильной M-выпуклости, связанное с гиперболичностью модуля M. Напомним сначала определение несобственных точек алгебраического многообразия. Пусть N — некоторое алгебраическое многообразие в C^n. Пространство C^n вложим в C^{n+1} с помощью отображения $z \to (1, z)$. Пусть $H(N)$ — совокупность всех однородных многочленов в C^{n+1}, обращающихся в нуль на N. Любую точку вида $(0, z)$, $z \in C^n$, в которой обращаются в нуль все многочлены из $H(N)$, мы назовем несобственной точкой многообразия N. Следующее утверждение дает аналитическую характеристику несобственных точек многообразия.

Предложение 1*). *Пусть $(0, w)$ — несобственная точка многообразия N. Тогда существует алгебраическая функция $z(\zeta)$ со значениями в N, определенная и голоморфная при $|\zeta| > a$, $\zeta \in C$, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) $z(\zeta) = \zeta^{\mu} w + \varkappa(\zeta)$ *с некоторым натуральным* μ,

б) $|\varkappa(\zeta)| \leqslant c\left(|\zeta|^{\mu} + 1\right)^{h}$ *с некоторым* $h < 1$.

Сформулируем теперь понятие гиперболического многообразия.

Определение. Пусть (ξ', ξ'') — некоторое разбиение переменных ξ на две группы, причем группа ξ' непустая; (z', z'') — соответствующее разбиение двойственных переменных. Скажем, что алгебраическое многообразие $N \subset C_z^n$ *гиперболично по переменным* ξ', если для любой несобственной точки $(0, w', w'')$ этого многообразия из $\operatorname{Im} w'' = 0$ следует $\operatorname{Im} w' = 0$. Пусть L — некоторое линейное многообразие в R^n, отличное от R^n. Скажем, что многообразие N *гиперболично по отношению к* L, если оно гиперболично по переменным ξ', выбранным так, что L есть множество решений системы $\xi' = 0$.

Теорема 2. *Пусть Ω — конечное или счетное объединение выпуклых областей U_ν, обладающее следующим свойством: для любого многообразия N^λ, ассоциированного с данным модулем M, можно найти гиперподпространство L в R^n, по отношению к которому многообразие N^λ не гиперболично, такое, что проекции областей U_ν на $L^\perp$ попарно не пересекаются. Тогда пространство $\Phi(\Omega)$ сильно M-выпукло.*

Доказательство. Предположим, что многообразие $N(M) = \bigcup N^\lambda$ пусто. Тогда модуль M равен нулю и, следовательно, утверждение теоремы очевидным образом верно. Допустим теперь, что многообразие $N(M)$ не пусто. Тогда условие теоремы содержательно и из него следует, что области U_ν попарно не пересекаются. Поэтому M-выпуклость пространства $\Phi(\Omega)$ вытекает из теоремы 4 § 8.

---

*) Доказательство см.: Matsuura [1].

Остается показать, что E_M плотно в $\Phi_M(\Omega)$. В силу предложения 1 § 7 для этого достаточно установить включение

$$p^*[\Phi^*(\Omega)]^t \supset [\Phi^*(\Omega)]^s \cap E_p^0 \tag{5.10}$$

(p — матрица из резольвенты (4.7) модуля M). Пусть φ — произвольный элемент правой части (5). Так как области U_ν попарно не пересекаются, функция φ однозначно записывается в виде суммы $\sum \varphi_\nu$, где $\varphi_\nu \in [\Phi^*(U_\nu)]^s$. Покажем, что $\varphi_\nu \in E_p^0$ для любого ν.

Зафиксируем произвольное многообразие N^λ, ассоциированное с M. Из условия теоремы следует, что существует линейное многообразие L размерности $n-1$, разделяющее области U_1 и $U' = \sum_{\nu>1} U_\nu$, по отношению к которому N^λ не гиперболично. В R^n выберем систему координат так, чтобы подпространство $\xi_1 = 0$ совпало с L, а область $U_1(U')$ лежала в полупространстве $\xi_1 > 0$ $(\xi_1 < 0)$. В таком случае носитель функции φ_1 $\varphi' = \sum_{\nu>1} \varphi_\nu$ лежит в полупространстве $\xi_1 > 0$, соответственно $\xi_1 < 0$. Поэтому из предложения 2 § 3 следует, что преобразования Фурье $\chi^+ = \tilde{\varphi}_1$ и $\chi^- = \tilde{\varphi}'$ удовлетворяют неравенствам

$$|\chi^{\overset{+}{(-)}}(z)| \leqslant C(|z|+1)^q \times \begin{cases} \exp((\overset{-}{(+)})\varepsilon y_1 + A|y''|), & y_1 > 0 \quad (y_1 < 0); \\ \exp((\overset{-}{(+)})a y_1 + A|y''|), & y_1 < 0 \quad (y_1 > 0); \end{cases} \tag{6.10}$$

где $\varepsilon = \rho(\operatorname{supp}\varphi, L)$, $y_1 = \operatorname{Im} z_1$, $y'' = \operatorname{Im}(z_2, \ldots, z_n)$, а q и A — некоторые положительные числа.

С другой стороны, поскольку функция φ принадлежит $[\Phi^*(R^n)]^s \cap E_p^0$, а пространство $\Phi(R^n)$ сильно M-выпукло, то ее можно записать в виде $\varphi = p^*\psi$, где $\psi \in [\Phi^*(R^n)]^t$. Отсюда следует, что

$$\chi^+(z) + \chi^-(z) = p^*(z)\tilde{\psi}(z). \tag{7.10}$$

Так как по условию многообразие N^λ не гиперболично по отношению к подпространству L, оно имеет, по крайней мере, одну несобственную точку $(0, w_1, w'')$ такую, что $\operatorname{Im} w'' = 0$, но $\operatorname{Im} w_1 \neq 0$. Пусть $z(\zeta) = \zeta^\mu(w_1, w'') + \varkappa(\zeta)$ — алгебраическая кривая, принадлежащая N^λ, построенная с помощью предложения 1. Пусть, далее, $\mathscr{D} = \sum \eta^i \mathscr{D}_i(z, \delta)$ — p^*-оператор. Рассмотрим последовательность функций $\chi_i^\pm(\zeta) = \mathscr{D}_i(z(\zeta), D)\chi^\pm(z(\zeta))$. Согласно теореме 1 § 4 гл. II при любом i коэффициенты функционалов $\mathscr{D}_i(z, \delta)$ суть рациональные всюду конечные функции на каждом множестве вида $N_k \setminus N_{k+1}$, где $\{N_k\}$ — некоторое алгебраическое разбиение. Так как кривая $z = z(\zeta)$ определена и алгебраична при $|\zeta| > a$, она целиком принадлежит некоторому из множеств $N_k \setminus N_{k+1}$ при $|\zeta| > a'$. Следовательно, коэффициенты операторов $\mathscr{D}_l(z(\zeta), D)$ голоморфны и алгебраичны при $|\zeta| > a'$ и поэтому растут на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\zeta|$. Отсюда при любом i имеет место неравенство

$$|\chi_i^{\pm}(\zeta)| \leqslant C(|\zeta|+1)^{q_i} \sup_{|z - z(\zeta)| \leqslant 1} |\chi^{\pm}(z)|, \qquad i \in Z_+^n. \tag{8.10}$$

В сочетании с (6) и б) мы получаем оценку

$$|\chi_i^+(\zeta)| \leqslant C \exp(A'|\zeta|^{\mu}), \tag{9.10}$$

справедливую при любом i. Оценим функцию χ_i^+ для вещественных значений ζ^{μ}. Пусть для определенности $\operatorname{Im} w_1 > 0$ Предположим сначала, что $\zeta^{\mu} > 0$. Тогда из (6), (8), б)

$$|\chi_i^+(\zeta)| \leqslant C(|\zeta|+1)^{q_i'} \exp\left(-\varepsilon \operatorname{Im} w_1 \zeta^{\mu} + A|\varkappa(\zeta)|\right) \leqslant$$
$$\leqslant C' \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Im} w_1 \zeta^{\mu}\right).$$

Пусть теперь $\zeta^{\mu} < 0$. Из (7) вытекает равенство $\chi_i^+ \equiv -\chi_i^-$, поэтому снова из (6), (8), б)

$$|\chi_i^+(\zeta)| = |\chi_i^-(\zeta)| \leqslant C \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Im} w_1 \zeta^{\mu}\right).$$

Таким образом, для всех вещественных значений ζ^{μ}

$$|\chi_i^+(\zeta)| \leqslant C \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Im} w_1 |\zeta|^{\mu}\right).$$

Это неравенство в сочетании с неравенством (9) в силу принципа Фрагмена — Линделефа показывает, что $\chi_i^+ \equiv 0$ при любом i, т. е. $\mathscr{D}(z)\chi^+(z) \equiv 0$ на кривой $z = z(\zeta)$, принадлежащей многообразию N^{λ}. Так как λ было выбрано с самого начала произвольно, мы тем самым показали, что на каждом из многообразий N^{λ}, ассоциированных с модулем M, найдется, по крайней мере, одна точка, в которой $\mathscr{D}(z)\chi^+(z) = 0$. Согласно следствию 4 § 4 гл. IV отсюда следует, что $\mathscr{D}(z)\chi^+(z) \equiv 0$ на $N(M)$, т. е. функция χ^+ ортогональна всем функционалам вида $\mathscr{D}_l(z, \delta)$. Поэтому ее обратное преобразование Фурье φ_1 ортогонально всем экспоненциальным полиномам, принадлежащим пространству E_p (см. предложение 4 § 7), т. е.

$$\varphi_1 \in [\Phi^*(U_1)]^s \cap E_p^0.$$

Отсюда мы заключаем, что функция $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ также ортогональна пространству E_p. Представив ее в виде суммы функций φ_2 и $\varphi'' = \sum\limits_{\nu>2} \varphi_\nu$, мы аналогичным образом найдем, что функция φ_2 ортогональна E_p и т. д. Таким образом, мы установили, что при любом ν $\varphi_\nu \in \left[\Phi^*(U_\nu)\right]^s \cap E_p^0$. Так как все области U_ν выпуклы, то из результатов § 8 следует, что $\varphi_\nu = p^*\psi_\nu$, где $\psi_\nu \in [\Phi^*(U_\nu)]^t$. Положив $\psi = \sum \psi_\nu$, мы получим $\varphi = p^*\psi \in p^*[\Phi^*(\Omega)]^t$. Тем самым включение (5) установлено. ■

Замечание. Можно показать, что в случае, когда Ω есть объединение двух не пересекающихся выпуклых областей U_1 и U_2, условие сильной M-выпуклости, содержащееся в теореме 2, является также и необходимым. А именно, справедливо следующее утверждение: *для того чтобы пространство $\Phi(\Omega)$ было сильно M-выпукло, необходимо и достаточно, чтобы при любом λ многообразие N^λ не было гиперболическим по отношению к некоторому линейному многообразию L^λ размерности $n-1$, разделяющему U_1 и U_2*. В случае, когда число областей U_ν больше двух, условие теоремы 2 перестает быть необходимым. Пусть, например, $n=2$, а Ω — внешность трех лучей $\varphi = 0$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ на плоскости. Тогда согласно следствию 1 пространство $\Phi(\Omega)$ сильно M-выпукло для любого эллиптического модуля M. В то же время условие теоремы 2 не выполнено, так как никакая прямая не разделяет связных компонент области Ω.

3°. Гомологическое условие M-выпуклости. Условие, о котором идет речь, заключается в том, что данный конечный модуль L может быть включен в точную последовательность вида

$$0 \to L \to \mathcal{P}^{t_{k-1}} \xrightarrow{p'_{k-2}} \mathcal{P}^{t_{k-2}} \to \ldots \xrightarrow{p'_1} \mathcal{P}^{t_1} \xrightarrow{p'_0} \mathcal{P}^{t_0}. \tag{10.10}$$

В § 13 мы найдем условия на L, при которых такая последовательность может быть построена. Мы покажем сейчас, что чем длиннее эта последовательность, т. е. чем больше число k, тем шире класс областей Ω, для которых пространство $\Phi(\Omega)$ (сильно) L-выпукло.

Теорема 3. *Предположим, что модуль L может быть включен в точную последовательность вида* (10) *длины k, а область Ω имеет выпуклое локально конечное покрытие U, образованное областями, пересекающимися не более чем по $k+1$-й. Тогда*

I. *Пространство $\Phi(\Omega)$ L-выпукло.*

II. *Пусть Ω' — область, имеющая выпуклое покрытие U', вписанное в U. Тогда образ отображения сужения $\Phi_L(\Omega) \to \Phi_L(\Omega')$ плотен в $\Phi_L(\Omega')$.*

Доказательство. Пусть

$$\ldots \xrightarrow{p'_{k+1}} \mathscr{P}^{t_{k+1}} \xrightarrow{p'_k} \mathscr{P}^{t_k} \to L \to 0$$

— свободная резольвента модуля L. Срастим эту резольвенту с последовательностью (10). С этой целью рассмотрим отображение p'_{k-1}, являющееся композицией отображений $\mathscr{P}^{t_k} \to L \to \mathscr{P}^{t_{k-1}}$. Как легко проверить, это отображение делает последовательность

$$\ldots \to \mathscr{P}^{t_{k+1}} \xrightarrow{p'_k} \mathscr{P}^{t_k} \xrightarrow{p'_{k-1}} \mathscr{P}^{t_{k-1}} \to \ldots \xrightarrow{p'_1} \mathscr{P}^{t_1} \xrightarrow{p'_0} \mathscr{P}^{t_0} \to M \to 0 \tag{11.10}$$

точной. Здесь мы положили $M = \operatorname{Coker} p'_0$; таким образом, эта последовательность является свободной резольвентой модуля M.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & & & \\
{}^{k}\Phi(U) \arrow[u] \arrow[r, "p_0"] & {}^{k}\Phi(U) \arrow[u] \arrow[r, "p_1"] & {}^{k}\Phi(U) \arrow[u] \arrow[r] & \iddots & & \\
{}^{k-1}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_0"] & {}^{k-1}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_1"] & \iddots \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_k"] & {}^{1}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r] & \vdots & \cdots \\
 & \iddots \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_{k-1}"] & {}^{0}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_k"] & {}^{0}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_{k+1}"] & {}^{0}\Phi(U) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & & \Phi(\Omega) \arrow[u] \arrow[r, "p_k"] & \Phi(\Omega) \arrow[u] \arrow[r, "p_{k+1}"] & \Phi(\Omega) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{12.10}$$

где для упрощения мы опустим скобки вида $[\ldots]^{t_i}$. Она является частным случаем диаграммы (3.9) (из которой изъят левый столбец), поскольку из условия нашей теоремы следует, что ${}^{k+1}\Phi(U) = 0$. В ходе доказательства теоремы 1 § 9 мы установили, что все столбцы и все строки этой диаграммы, кроме нижней, точны. Поэтому на основании теоремы 1 § 2 гл. I мы заключаем, что нижняя строка (12) также точна. Тем самым L-выпуклость пространства $\Phi(\Omega)$ доказана.

Установим второе утверждение теоремы. Поскольку область Ω' принадлежит Ω, а покрытие U' вписано в U, определены отображения сужения $\Phi(\Omega)\to\Phi(\Omega')$, ${}^{\nu}\Phi(U)\to{}^{\nu}\Phi(U')$. Тем самым в пространствах $\Phi(\Omega)$ и ${}^{\nu}\Phi(U)$ индуцируется, вообще говоря, более слабая топология из $\Phi(\Omega')$, соответственно ${}^{\nu}\Phi(U')$. Эти пространства, наделенные индуцированной топологией, мы обозначим через $\breve{\Phi}(\Omega)$ и ${}^{\nu}\breve{\Phi}(U)$. Рассмотрим диаграмму $(\breve{12})$, полученную из диаграммы (12) заменой пространств $\Phi(\Omega)$ и ${}^{\nu}\Phi(U)$ на $\breve{\Phi}(\Omega)$ и ${}^{\nu}\breve{\Phi}(U)$. Покажем, что пространство $\breve{\Phi}(\Omega)$ M-выпукло. С этой целью докажем, что все строки и столбцы диаграммы $(\breve{12})$ точны.

Пусть $U=\{U_i\}$, $U'=\{U'_i\}$. Для любых $i_0, \ldots, i_\nu$ через $\breve{\Phi}(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\nu})$ обозначим пространство $\Phi(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\nu})$, в котором введена топология, индуцированная из $\Phi(U'_{i_0}\cap\ldots\cap U'_{i_\nu})$. Пространство ${}^{\nu}\breve{\Phi}(U)$, очевидно, является прямой суммой пространств $\breve{\Phi}(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\nu})$. Так как по условию все области U_i и U'_i выпуклы, то согласно следствию 2 § 8 каждое пространство $\breve{\Phi}(U_{i_0}\cap\ldots$ $\ldots\cap U_{i_\nu})$ M-выпукло. Отсюда следует, что пространства ${}^{\nu}\breve{\Phi}(U)$, $\nu\geqslant 0$, также M-выпуклы. Ввиду точности (11) мы тем самым доказали точность всех строк диаграммы (12), кроме нижней.

Совокупность пространств $\breve{\Phi}(\Omega)$, $\breve{\Phi}(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\nu})$ является предпучком на покрытии U. Этот предпучок, очевидно, удовлетворяет условиям предложения 9 § 2. Из этого предложения следует, что в диаграмме (12) точны все столбцы. Таким образом, к диаграмме (12) применима теорема 1 § 2 гл. I, из которой следует точность нижней строки, т. е. M-выпуклость пространства $\breve{\Phi}(\Omega)$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Поскольку $L=\operatorname{Coker} p'_k$, то $\Phi_L(\Omega')=\Phi_{p_k}(\Omega')$. Пусть u – произвольная функция пространства $\Phi_{p_k}(\Omega')$. Так как пространство $\Phi(\Omega)$ плотно в $\Phi(\Omega')$, мы можем найти функцию $v\in[\Phi(\Omega)]^{t_k}$, сколь угодно близкую к u в топологии $[\Phi(\Omega')]^{t_k}$, т. е. принадлежащую сколь угодно малой окрестности u. Так как оператор p_k непрерывен и $p_k u=0$, то функция $p_k v$ сколь угодно близка к нулю в топологии пространства $[\breve{\Phi}(\Omega)]^{t_{k+1}}$. Из M-выпуклости пространства $\breve{\Phi}(\Omega)$ следует, что отображение p_k: $[\breve{\Phi}(\Omega)]^{t_k}\to[\Phi(\Omega)]^{t_{k+1}}$ есть гомоморфизм. Поэтому функция v сколь угодно близка в топологии $[\check{\Phi}(\Omega)]^{\prime k}$ к подпространству $\Phi_{p_k}(\Omega)$. Следовательно, функция u также сколь угодно близка к подпространству $\Phi_{p_k}(\Omega)$, ч. и т. д. ■

Отметим, что теоремы 1 и 3 § 8 можно рассматривать как частные случаи доказанной теоремы, отвечающие значению $k=0$.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3, *а также следующее условие: для любого многообразия* N^λ, *ассоциированного с модулем* M, *фигурирующем в* (11), *существует гиперподпространство* L^λ *в* R^n, *по отношению к которому* N^λ *не гиперболично, такое, что при любых* $i_1, \ldots, i_k$ *проекции областей*

$$V_{i_0}=U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_k},\qquad i_0\neq i_1,\ \ldots,\ i_k$$

на $(L^\lambda)^\perp$ *попарно не пересекаются. Тогда пространство* $\Phi(\Omega)$ *сильно* L-*выпукло.*

Доказательство. L-выпуклость пространства $\Phi(\Omega)$ вытекает из теоремы 3. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & {}^k\Phi_{p_0}(U) \arrow[u] \arrow[r] & {}^k\Phi(U) \arrow[u] \arrow[r, "p_0"] & {}^k\Phi(U) & & \\
0 \arrow[r] & {}^{k-1}\Phi_{p_0}(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r] & {}^{k-1}\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_0"] & \cdots \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_{k-1}"] & {}^1\Phi(U) & \\
 & & \cdots \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_{k-2}"] & {}^0\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_{k-1}"] & {}^0\Phi(U) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "p_k"] & {}^0\Phi(U) \\
 & & & \Phi(\Omega) \arrow[u] \arrow[r, "p_{k-1}"] & \Phi(\Omega) \arrow[u] \arrow[r, "p_k"] & \Phi(\Omega) \arrow[u] \\
 & & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

полученную продолжением влево на один шаг диаграммы (12). По доказанному в этой диаграмме точны все столбцы, кроме левого и все строки, кроме нижней. Поэтому из теоремы 1 § 2 гл. I вытекает изоморфизм

$$^k\Phi_p(U)/\partial^{k-1}\Phi_p(U) \cong \Phi_{p_k}(\Omega)/p_{k-1}[\Phi(\Omega)]^{t_{k-1}}, \qquad p = p_0. \quad (13.10)$$

Покажем, что факторпространство, стоящее слева, абсолютно неотделимо, т. е. единственным открытым множеством в нем является само пространство. Пусть $u = \sum u_{i_0, \ldots, i_k} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_k}$ — произвольный элемент пространства $^k\Phi_p(U)$. Зафиксируем произвольным образом индексы $i_1, \ldots, i_k$ и рассмотрим соответствующие компоненты $v_{i_0} = u_{i_0, \ldots, i_k}$ функции u. Каждая из них определена и удовлетворяет однородной системе (1.4) в области V_{i_0}. Так как эти области попарно не пересекаются, функции v_{i_0} определяют однозначную функцию v в области $V = \bigcup V_{i_0}$, принадлежащую пространству $\Phi_p(V)$. Из условия нашей теоремы следует, что покрытие области V, образованное областями V_{i_0}, удовлетворяет условию теоремы 2 относительно модуля M. Поэтому согласно теореме 2 пространство $\Phi_p(V)$ сильно M-выпукло. Следовательно, функцию v мы можем приблизить экспоненциальными полиномами $v' \in E_p$. Так как индексы $i_1, \ldots, i_k$ были фиксированы произвольным образом, мы можем утверждать, что коцепь u может быть приближена коцепями вида $u' = \sum v'_{i_1, \ldots, i_k} U_{i_0} \wedge \ldots \wedge U_{i_k}$, где все $v'_{i_1, \ldots, i_k} \in E_p$. Коцепи u' такого вида принадлежат $\partial^{k-1}\Phi_p(U)$. Тем самым мы показали, что подпространство $\partial^{k-1}\Phi_p(U)$ плотно в $^k\Phi_p(U)$, а следовательно левое факторпространство в (13) абсолютно неотделимо.

Так как изоморфизм (13) топологический, факторпространство, стоящее справа, также абсолютно неотделимо, следовательно, подпространство $p_{k-1}[\Phi(\Omega)]^{t_{k-1}}$ плотно в $\Phi_{p_k}(\Omega)$. Поскольку экспоненциальные полиномы плотны в $\Phi(\Omega)$, то экспоненциальные полиномы вида $p_{k-1}f$, $f \in E^{t_{k-1}}$ плотны в $p_{k-1}[\Phi(\Omega)]^{t_{k-1}}$ и, следовательно, в $\Phi_{p_k}(\Omega)$. Экспоненциальные полиномы такого вида, очевидно, принадлежат E_{p_k}. Поэтому пространство E_{p_k} плотно в $\Phi_{p_k}(\Omega)$. ∎

Следствие 1. *Пусть область Ω допускает локально конечное выпуклое покрытие, образованное областями, пересекающимися не более чем по $k+1$-й. Тогда для любого конечного $\mathcal{P}$-модуля M*

$$\mathrm{Ext}^i(M, \Phi(\Omega)) = 0, \qquad i > k. \quad (14.10)$$

Если, кроме того, модуль M удовлетворяет условию теоремы 4, то пространство $\mathrm{Ext}^k(M, \Phi(\Omega))$ абсолютно неотделимо.

Доказательство. Пусть (11) — свободная резольвента модуля M. Тогда модуль $L = \operatorname{Coker} p'_k$ удовлетворяет условию теоремы 3. Следовательно, нижняя строка диаграммы (12) точна, откуда вытекают равенства (14). Если модуль M удовлетворяет условию теоремы 4, то, как мы установили при доказательстве этой теоремы, оба пространства в (13) абсолютно неотделимы. Остается заметить, что правое из этих пространств есть $\operatorname{Ext}^k(M, \Phi(\Omega))$. ■

§ 11. Геометрические условия M-выпуклости

В этом параграфе мы установим теорему, содержащую геометрические условия на функциональное пространство Φ, при которых для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля M имеют место равенства $\operatorname{Ext}^i(M, \Phi) = 0$, $i > k$. Этот результат можно также трактовать как условия L-выпуклости пространства Φ, где L — модуль, связанный с модулем M последовательностями (10.10) — (11.10). Действительно, как видно из этих последовательностей, для любого $i > k$ имеют место изоморфизмы (2).

1°. k-выпуклые области. Пусть k — некоторое целое число, заключенное между 1 и n. Функцию $h(\xi)$, определенную в некоторой области Ω и принадлежащую классу C^2 в этой области, назовем *k-выпуклой*, если она вещественна и в каждой точке $\xi \in \Omega$ ее гессиан $\operatorname{Hess} h = \left\{ \dfrac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right\}$ имеет не менее k положительных собственных значений. Скажем, что область Ω является *k-выпуклой*, если в этой области определена некоторая непрерывная функция h, k-выпуклая вне некоторого компакта $K \subset \Omega$, такая, что для любого вещественного c множество $K_c = \{\xi \in \Omega,\ h(\xi) \leqslant c\}$ есть компакт. Скажем, что область Ω *вполне k-выпукла*, если она k-выпукла и $K = \phi$.

Как легко установить, всякая выпуклая область является n-выпуклой.

2°. M-когомологии в k-выпуклых областях.

Теорема 1. *Пусть M — гипоэллиптический модуль, а k, $0 < k \leqslant n$, — некоторое целое число.*

I. *Если область Ω $(n-k)$-выпукла, то пространства $\operatorname{Ext}^i(M, \Phi(\Omega))$, $i > k$, конечномерны.*

II. *Если область Ω вполне $(n-k)$-выпукла, то $\operatorname{Ext}^i(M, \Phi(\Omega)) = 0$ при $i > k$.*

Отметим некоторые нужные сведения. Если модуль M гипоэллиптический, из следствия 2 § 9 вытекают изоморфизмы

$$\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{D}^*(\Omega)) \cong \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega)), \qquad i \geqslant 0.$$

Поэтому теорему достаточно доказать лишь для пространства

$\Phi(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)$. Пусть

$$\ldots \xrightarrow{p'_{k+1}} \mathscr{P}^{t_{k+1}} \xrightarrow{p'_k} \mathscr{P}^{t_k} \xrightarrow{p'_{k-1}} \ldots \xrightarrow{p'_1} \mathscr{P}^{t_1} \xrightarrow{p'_0} \mathscr{P}^{t_0} \to M \to 0 \quad (1.11)$$

— свободная резольвента модуля M. Рассмотрим модуль $L = \operatorname{Coker} p'_k$. Очевидно, что отображения $\ldots, p'_{k+1}, p'_k$ последовательности (1) образуют свободную резольвенту модуля L. Отсюда видно, что для любого $\mathscr{P}$-модуля Φ

$$\operatorname{Ext}^i(L, \Phi) \cong \operatorname{Ext}^{k+i}(M, \Phi), \qquad i \geqslant 1. \qquad (2.11)$$

Остальные отображения последовательности (1) образуют точную последовательность (10.10).

Отметим следующую геометрически прозрачную лемму.

Лемма 1. *В R^n существует счетная система замкнутых параллелепипедов $\pi = \{\pi_\alpha\}$, обладающая следующими свойствами:*

I. *При любом $\varepsilon > 0$ параллелепипеды π_α, диаметры которых меньше ε, образуют покрытие R^n.*

II. *Любые k параллелепипедов π_α, из которых ни один не содержит другого, пересекаются по множеству коразмерности не ниже $k-1$* (пустому множеству мы приписываем любую отрицательную размерность).

Лемма 2. *Положим $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$, где $m = n - k$. Пусть ω — область в R^n такая, что ее сечение любым подпространством вида $\xi'' = \mathrm{const}$ есть выпуклая область. Тогда пространство $\mathscr{E}(\omega)$ сильно L-выпукло.*

Для доказательства мы построим возрастающую последовательность областей, стремящихся к ω, к каждой из которых применима теорема 3 § 10. Пусть K — произвольный компакт, принадлежащий ω. Выберем некоторый компакт K' так, чтобы $K \subset\subset K' \subset \omega$, а пересечение K' с каждым подпространством вида $\xi'' = \mathrm{const}$ было выпукло. Положим $\rho = \min\{\rho(K, \complement K'), \rho(K', \complement\omega)\}$. Используя лемму 1, покроем координатное подпространство $R^k_{\xi''}$ системой параллелепипедов $\{\pi_\alpha\}$, диаметры которых не превосходят $\rho/4$, пересекающихся не более чем по $k+1$. Для каждого α выберем выпуклую окрестность u_α параллелепипеда π_α, диаметр которой не превосходит $\rho/2$ так, чтобы области u_α пересекались не более чем по $k+1$-й.

Пусть, далее, $\varkappa$ — проекция K' на $R^k_{\xi''}$. Если данная область u_α пересекается с $\varkappa$, мы выберем некоторую точку $\xi''_\alpha \in u_\alpha \cap \varkappa$ и рассмотрим область v_α, являющуюся пересечением $\operatorname{int} K'$ с подпространством $\xi'' = \xi''_\alpha$. Если же $u_\alpha \cap \varkappa = \phi$, то положим $v_\alpha = \phi$. Области $w_\alpha = v_\alpha \times u_\alpha$ выпуклы, принадлежат ω, пересекаются не более чем по $k+1$-й и образуют конечное покрытие области $\omega_K = \bigcup w_\alpha$, содержащей K. Области $R^m_{\xi'} \times u_\alpha$ также выпуклы, пересекаются не более чем по $k+1$-й и образуют локально конечное покрытие пространства R^n. Поэтому на основании теоремы 3 § 10 мы заключаем, что пространство $\mathscr{E}(\omega_K)$ L-выпукло, а подпространство $\mathscr{E}_L(R^n)$ плотно в $\mathscr{E}_L(\omega_K)$. Поскольку подпространство E_L плотно в $\mathscr{E}_L(R^n)$, оно плотно также в $\mathscr{E}_L(\omega_K)$, следовательно, пространство $\mathscr{E}(\omega_K)$ сильно L-выпукло.

Из конструкции области ω_K следует, что $K\subset\omega_K\subset\subset\omega$. Так как компакт $K\subset\omega$ был выбран произвольным образом, мы можем применить эту конструкцию к последовательности компактов K_ν, $\nu=1, 2, \ldots$, стремящейся к ω, построенной так, что для любого ν $\omega_{K_\nu}\subset K_{\nu+1}$. Последовательность областей ω_{K_ν} возрастающая и стремится к ω. Так как при любом ν пространство $\mathscr{E}(\omega_{K_\nu})$ сильно L-выпукло, то в силу предложения 2 § 7 пространство $\mathscr{E}(\omega)$ также сильно L-выпукло, ч. и т. д. ■

3°. Доказательство теоремы 1. Предположим, что область Ω $n-k$-выпукла, а $h(\xi)$ — соответствующая непрерывная в Ω функция, $n-k$-выпуклая в $\Omega\setminus K$, где $K\subset\Omega$ — некоторый компакт. По условию при любом вещественном c множество K_c, образованное точками области Ω, в которых $h(\xi)\leqslant c$, есть компакт. Через Ω_c обозначим подобласть в Ω, в которой $h(\xi)<c$. При $c\to\infty$ области Ω_c образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к Ω.

Для удобства рассуждений мы добавим к функции h такую константу, чтобы получить неравенство $\sup\limits_K h<0$.

Лемма 3. *Для любого $c\geqslant 0$ можно найти положительное число $\varepsilon=\varepsilon(c)$ и конечную последовательность областей Ω^α такую, что*

$$\Omega_c=\Omega^0\subset\Omega^1\subset\ldots\subset\Omega^\alpha\subset\ldots\subset\Omega^A=\Omega_{c+\varepsilon}, \tag{3.11}$$

обладающую следующими свойствами. При любом α, $0<\alpha\leqslant A$, отображение сужения

$$r^i_\alpha\colon \operatorname{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))\to\operatorname{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}))$$

А) *при $i>1$ является алгебраическим изоморфизмом;*

Б) *при $i=1$ является алгебраическим эпиморфизмом, а его ядро есть абсолютно неотделимое пространство;*

В) *при $i=0$ его коядро есть абсолютно неотделимое пространство при условии, что пространство $\operatorname{Ext}^1(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))$ отделимо.*

Доказательство. Согласно условию, наложенному на функцию h в окрестности любой точки $\xi\in\Omega\setminus K$, можно выбрать систему координат $\eta=(\eta', \eta'')$, где $\eta'\in R^m$ $(m=n-k)$, а $\eta''\in R^k$, таким образом, что матрица

$$\mathrm{Hess}_{\eta'} h(\xi)=\left\{\frac{\partial^2 h(\xi)}{\partial\eta_l\,\partial\eta_j}, \qquad 1\leqslant l,\ j\leqslant m\right\}$$

положительно определена в этой точке. Поскольку вторые производные функции h непрерывны в $\Omega\setminus K$, это свойство матрицы $\mathrm{Hess}_{\eta'} h$ сохраняется в некоторой окрестности U_ξ точки ξ. Поскольку $K\subset\Omega_0$, в покрытие области $\Omega\setminus K$, образованное областями U_ξ, $\xi\in\Omega\setminus K$, можно вписать локально конечную в Ω последовательность открытых шаров U^α, $\alpha=1, 2, \ldots$, объединение которых содержит $\Omega\setminus\Omega_0$.

Пусть, далее, e_α, $\alpha=1, 2, \ldots$, — последовательность неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

(i) при любом α $\operatorname{supp} e_\alpha\subset U^\alpha$,

(ii) $\sum e_\alpha>0$ в $\Omega\setminus\Omega_c$,

(iii) функции e_α столь малы, что при любых α и β матрица

$$\mathrm{Hess}_{\eta'} h_\alpha(\xi), \qquad \text{где} \qquad h_\alpha=h-\sum_1^\alpha e_i,$$

положительно определена для всех $\xi\in U^\beta$, где $\eta=(\eta', \eta'')$ — локальная система координат, отвечающая шару U^β.

Далее, пусть A — наибольшее из чисел α таких, что пересечение $K_c\cap U^\alpha$ не пусто. Для каждого α, $0\leqslant\alpha\leqslant A$, рассмотрим область

$$\Omega_c^\alpha=\{\xi\in\Omega,\ h_\alpha(\xi)<c\}.$$

Из (ii) вытекает, что функция h_α строго меньше h в окрестности множества $K_c\setminus\Omega_c$. Отсюда следует включение $K_c\subset\Omega_c^A$. Из него вытекает, что при достаточно малом положительном $\varepsilon=\varepsilon(c)$ $\Omega_{c+\varepsilon}\subset\Omega_c^A$. Покажем, что области $\Omega^\alpha=\Omega_c^\alpha\cap\Omega_{c+\varepsilon}$, $\alpha=0, \ldots, A$, удовлетворяют условиям леммы. Действительно, соотношения (3), очевидно, имеют место.

Отметим еще два свойства построенных областей:

а) при любом α $\Omega^\alpha\setminus\Omega^{\alpha-1}\subset U^\alpha$,

б) при любых α и β пространство $\mathscr{E}(\Omega^\alpha\cap U^\beta)$ сильно L-выпукло.

Свойство а) вытекает из (i), поскольку $h_\alpha-h_{\alpha-1}=-e_\alpha$. Проверим выполнение б). Зафиксируем произвольным образом α и β. По построению матрицы $\mathrm{Hess}_{\eta'} h$ и $\mathrm{Hess}_{\eta'} h_\alpha$ положительно определены в пределах открытого шара U^β. Поэтому пересечение областей $\Omega_{c+\varepsilon}\cap U^\beta$ и $\Omega_c^\alpha\cap U^\beta$ с любым подпространством вида $\eta''=\mathrm{const}$ выпукло. Следовательно, пересечение области $\Omega^\alpha\cap U^\beta=\Omega_c^\alpha\cap\Omega_{c+\varepsilon}\cap U^\beta$

с подпространством вида $\eta''=\mathrm{const}$ также выпукло. Поэтому свойство б) вытекает из леммы 2.

Из а) следует равенство $\Omega^{\alpha-1}\cup(\Omega^\alpha\cap U^\alpha)=\Omega^\alpha$, где α — любое число, заключенное между 1 и A. Отсюда следует, что области $\Omega^{\alpha-1}$ и $\Omega^\alpha\cap U^\alpha$ образуют покрытие области Ω^α. Точная последовательность (19.2) в применении к этому покрытию и пучку $\mathscr{E}$ записывается так:

$$0\to\mathscr{E}(\Omega^\alpha)\xrightarrow{\rho}\mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1})\oplus\mathscr{E}(\Omega^\alpha\cap U^\alpha)\xrightarrow{\sigma}\mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha)\to 0.$$

Отображение ρ переводит функцию φ в пару (φ', φ''), где φ' и φ'' — сужения φ на $\Omega^{\alpha-1}$ и $\Omega^\alpha\cap U^\alpha$, а отображение σ переводит пару (φ, ψ) в разность $\varphi'-\psi'$, где φ' и ψ' сужения φ и ψ на $\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha$. Заметим, что эти отображения являются отображениями топологических $\mathscr{P}$-модулей. Поэтому мы можем написать соответствующую алгебраически точную последовательность для функтора $\mathrm{Hom}(L, \cdot)$:

$$\begin{gathered}\ldots\xrightarrow{\delta^{i-1}}\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))\xrightarrow{\rho^*}\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}))\oplus\\ \oplus\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha\cap U^\alpha))\xrightarrow{\sigma^*}\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha))\xrightarrow{\delta^i}\ldots,\end{gathered}\tag{4.11}$$

в которой все отображения непрерывны (см. предложение 8 § 3 гл. I). Из б) вытекает, что $\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\beta\cap U^\alpha))=0$ для всех $i>0$, α, β. Поэтому последовательность (4) распадается на отрезки

$$0\to\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))\xrightarrow{r^i_\alpha}\mathrm{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}))\to 0,\quad i=2, 3, \ldots, \tag{5.11}$$

и

$$\begin{gathered}0\to\mathscr{E}_L(\Omega^\alpha)\xrightarrow{\rho^*}\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1})\oplus\mathscr{E}_L(\Omega^\alpha\cap U^\alpha)\xrightarrow{\sigma^*}\\ \xrightarrow{\sigma^*}\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha)\xrightarrow{\delta^0}\mathrm{Ext}^1(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))\xrightarrow{r^1_\alpha}\mathrm{Ext}^1(L, \mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1}))\to 0.\end{gathered}\tag{6.11}$$

Из алгебраической точности (5) следует, что при $i>1$ отображение r^i_α является алгебраическим изоморфизмом, а из алгебраической точности (6) вытекает, что r^1_α есть алгебраический эпиморфизм. Согласно б) пространство E_L плотно в $\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha)$. С другой стороны, E_L принадлежит образу отображения σ^* в (6), следовательно, образ σ^* плотен в $\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1}\cap U^\alpha)$, т. е. коядро σ^* есть абсолютно неотделимое пространство. Отображение δ^0, будучи непрерывным, действует непрерывно из пространства $\mathrm{Coker}\,\sigma^*$ на пространство $\mathrm{Ker}\,r^1_\alpha$. Поэтому пространство $\mathrm{Ker}\,r^1_\alpha$ также абсолютно неотделимо*). Таким образом, свойства А) и Б) отображения r^l_α установлены

Докажем теперь свойство В). Предположим, что пространство $\operatorname{Ext}^1(L, \mathscr{E}(\Omega^\alpha))$ отделимо. Отделимое пространство не может иметь абсолютно неотделимых, отличных от нулевого подпространств. Поэтому из Б) мы заключаем, что $\operatorname{Ker} r^1_\alpha = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
\mathscr{E}_L(\Omega^\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "r^0_\alpha"] & \mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1}) \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
\mathscr{E}_L(\Omega^\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\rho^*"] & \mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1}) \oplus \mathscr{E}_L(\Omega^\alpha \cap U^\alpha) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\sigma^*"] & \mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1} \cap U^\alpha) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
& \mathscr{E}_L(\Omega^\alpha \cap U^\alpha) \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \mathscr{E}_L(\Omega^\alpha \cap U^\alpha) \arrow[u, "-R"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в которой R — отображение сужения, а i и π — отображения, действующие по формулам

$$i\colon \varphi \to (0, \varphi), \qquad \pi\colon (\varphi, \psi) \to \varphi.$$

Левый столбец и нижняя строка этой диаграммы, образованные тождественными операторами, точны. Точность второго столбца очевидна. Поскольку $\operatorname{Ker} r^1_\alpha = 0$, из алгебраической точности (6) вытекает алгебраическая точность второй строки. Так как эта строка образована пространствами Фреше, она также топологически точна в силу предложения 8 § 1. Таким образом, мы вправе применить к нашей диаграмме теорему 1 § 2 гл. I, из которой вытекает топологический изоморфизм

$$\operatorname{Coker} r^0_\alpha \cong \operatorname{Coker} R. \tag{7.11}$$

Так как пространство $\mathscr{E}_L(\Omega^\alpha \cap U^\alpha)$ содержит E_L, а E_L согласно б) плотно в $\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1} \cap U^\alpha)$, то образ отображения R плотен в $\mathscr{E}_L(\Omega^{\alpha-1} \cap U^\alpha)$. Следовательно, пространство $\operatorname{Coker} R$ абсолютно неотделимое. Учитывая изоморфизм (7), мы заключаем, что пространство $\operatorname{Coker} r^0_\alpha$ также абсолютно неотделимое, ч. и т. д. ■

---

*) Образ абсолютно неотделимого пространства при непрерывном отображении есть снова абсолютно неотделимое пространство. В этом легко убедиться непосредственно.

Рассмотрим числовую последовательность

$$c_1=0, \quad c_2=c_1+\varepsilon(c_1), \quad \ldots, \quad c_{\lambda+1}=c_\lambda+\varepsilon(c_\lambda), \quad \ldots,$$

где $\varepsilon(c)$ — функция, построенная в лемме 3. Покажем, что эта функция может быть выбрана так, что $c_\lambda \to \infty$. Действительно, число $\varepsilon(c)$ определяется из условия: область $\Omega_{c+\varepsilon}$ принадлежит Ω_c^A. Из конструкции Ω_c^A видно, что эта область содержит δ-окрестность компакта K_c, причем величина $\delta=\delta(c)>0$ может считаться невозрастающей функцией c. Число $\varepsilon(c)$ мы подчиним условию: $\varepsilon(c)$ есть наибольшее из чисел ε, для которых область $\Omega_{c+\varepsilon}$ принадлежит области ω_c, являющейся $\delta(c)$-окрестностью компакта K_c. Покажем, что в этом случае $c_\lambda \to \infty$. Предположим противное.

В таком случае $c_\lambda \to c_* < \infty$, следовательно, для любого λ можно найти точку $\xi_\lambda \subset \Omega_{c_*}$, не лежащую в ω_{c_λ}. Так как множество $\overline{\Omega}_{c_*}$ есть компакт, последовательность $\{\xi_\lambda\}$ имеет некоторую предельную точку $\xi_* \in \overline{\Omega}_{c_*}$. С другой стороны, объединение компактов K_{c_λ} равно Ω_{c_*}. Поэтому точка ξ_* принадлежит $\delta(c_*)$-окрестности некоторого компакта K_{c_λ} и, следовательно, принадлежит областям ω_{c_λ} при всех достаточно больших λ. Тем самым мы получили противоречие с соотношением $\xi_\lambda \notin \omega_{c_\lambda}$. Отсюда вытекает, что $c_\lambda \to \infty$, ч. и т. д.

Лемма 4. *Пусть ω и $\upsilon \supset\supset \omega$ — произвольные ограниченные области в R^n такие, что отображение сужения*

$$\mathrm{Ext}^l(M, \mathscr{E}(\upsilon)) \to \mathrm{Ext}^l(M, \mathscr{E}(\omega)) \tag{8.11}$$

является алгебраическим эпиморфизмом. Тогда пространство $\mathrm{Ext}^l(M, \mathscr{E}(\omega))$ *отделимо и конечномерно.*

Доказательство. Пусть $V=\{V_\nu\}$ — некоторое локально конечное выпуклое покрытие области υ, а $U=\{U_\nu\}$ — локально конечное выпуклое покрытие области ω такое, что при некотором $\delta>0$ покрытие, образованное δ-окрестностями областей U_ν, вписано в V. Через $Z_M^l(V)$ обозначим ядро кограничного оператора ∂^l: ${}^l\mathscr{E}_M(V) \to {}^{l+1}\mathscr{E}_M(V)$. Аналогичный смысл придадим выражению $Z_M^l(U)$. Рассмотрим отображение

$$\mathscr{R}\colon\ Z_M^l(V) \otimes {}^{l-1}\mathscr{E}_M(U) \to Z_M^l(U), \qquad l>k, \tag{9.11}$$

равное сумме $R+\Delta$, где R и Δ — операторы, определяемые формулами

$$R\colon \begin{cases} Z_M^l(V) \xrightarrow{\ \rho\ } Z_M^l(U) \\ {}^{l-1}\mathscr{E}_M(U) \longrightarrow 0 \end{cases}; \qquad \Delta\colon \begin{cases} Z_M^l(V) \longrightarrow 0 \\ {}^{l-1}\mathscr{E}_M(U) \xrightarrow{\ \partial^{l-1}\ } Z_M^l(U) \end{cases},$$

а ρ — отображение сужения. Так как по предположению отображение (8) есть алгебраический эпиморфизм, то из теоремы I § 9 следует, что отображение сужения $H^l(V, \mathscr{E}_M) \to H^l(U, \mathscr{E}_M)$ также есть алгебраический эпиморфизм. Отсюда следует, что тем же свойством обладает отображение $\mathscr{R}$.

Рассмотрим еще один оператор сужения ρ: ${}^l\mathscr{E}_M(V) \to {}^l\mathscr{E}_M(U)$. Его можно рассматривать как отображение, действующее из прямого произведения $\Pi\mathscr{E}_M(V_{\nu_0} \cap \ldots \cap V_{\nu_l})$ в прямое произведение $\Pi\mathscr{E}_M(U_{\nu_0} \cap \ldots \cap U_{\nu_l})$. Это отображение прямых произведений отлично от нуля лишь на тех сомножителях $\mathscr{E}_M(V_{\nu_0} \cap \ldots \cap V_{\nu_l})$, для которых пересечение $V_{\nu_0} \cap \ldots$ $\ldots \cap V_{\nu_l} \cap \omega$ не пусто (число таких сомножителей конечно, так как $\omega \subset\subset \mathfrak{v}$) и действует на эти сомножители как оператор сужения на подобласти вида $U_{\mu_0} \cap \ldots \cap U_{\mu_l}$, которая вместе со своей δ-окрестностью ограничена и принадлежит $V_{\nu_0} \cap \ldots \cap V_{\nu_l}$. Согласно теореме 1 § 5 каждый такой оператор сужения компактен. Отсюда вытекает компактность оператора ρ и, следовательно, оператора R.

Таким образом, $\Delta = \mathscr{R} - R$, где $\mathscr{R}$ есть алгебраический эпиморфизм, а R — компактное отображение. Так как все пространства, фигурирующие в (9), суть пространства Фреше, мы можем применить к Δ теорему Шварца *), в силу которой пространство

$$\operatorname{Coker} \Delta = H^l(U, \mathscr{E}_M) \cong \operatorname{Ext}^l(M, \mathscr{E}(\omega))$$

отделимо и конечномерно. ■

Следствие 1. *Пусть c — произвольное неотрицательное число, а $\varepsilon = \varepsilon(c)$ — константа, определенная в лемме 3. Тогда при любом $i > k$ отображение сужения*

$$R^i\colon \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega_{c+\varepsilon})) \to \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega_c))$$

является топологическим изоморфизмом, а отображение сужения

$$R_{l-1}\colon \mathscr{E}_{p_{l-1}}(\Omega_{c+\varepsilon}) \to \mathscr{E}_{p_{l-1}}(\Omega_c)$$

имеет плотный в $\mathscr{E}_{p_{l-1}}(\Omega_c)$ образ.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i > 0$ и рассмотрим отображение сужения

$$\operatorname{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega_{c+\varepsilon})) \to \operatorname{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega_c)). \tag{10.11}$$

Оно является композицией операторов r^i_α с $\alpha = A, A-1, \ldots, 1$, которые алгебраически эпиморфны в силу леммы 3. Поэтому (10) также является алгебраическим эпиморфизмом. Далее выберем произвольное β, $0 \leqslant \beta \leqslant A$, положим $\varepsilon' = \varepsilon(c + \varepsilon(c))$ и рассмотрим последовательность операторов

$$\operatorname{Ext}^l(L, \mathscr{E}(\Omega_{c+\varepsilon+\varepsilon'})) \to \operatorname{Ext}^l(L, \mathscr{E}(\Omega_{c+\varepsilon})) \to \operatorname{Ext}^l(L, \mathscr{E}(\Omega^\beta)).$$

*) См. Шварц [2], ч. II, § 7.

Первый из них совпадает с (10) при замене c на $c+\varepsilon$ и, следовательно, алгебраически эпиморфен. Второй является композицией операторов r^i_α с $\alpha=A,\ A-1,\ \ldots,\ \beta+1$ и, следовательно, также алгебраически эпиморфен. Поэтому их композиция обладает тем же свойством. Так как $\Omega^\beta \subset\subset \Omega_{c+\varepsilon+\varepsilon'}$, мы заключаем на основании леммы 4, что пространство $\operatorname{Ext}^l(L, \mathscr{E}(\Omega^\beta))$ отделимо.

По определению $\operatorname{Ext}^i(L, \mathscr{E}(\Omega^\beta))$ есть факторпространство $\mathscr{F}$-пространства $\mathscr{E}_{p_{k+i}}(\Omega^\beta)$ по его подпространству $p_{k+l-1}[\mathscr{E}(\Omega^\beta)]^{t_{k+l-1}}$. Так как факторпространство отделимо, упомянутое подпространство замкнуто. Поэтому это подпространство, так же как и факторпространство, является пространством Фреше. Из леммы 3 отображение r^1_α, так же как и отображения r^i_α с $i>1$, является алгебраическим изоморфизмом, следовательно, согласно предложению 7 § 1 эти отображения суть топологические изоморфизмы. Поэтому отображение (10), являющееся их композицией, также есть изоморфизмы. Отображение R^{i+k} изоморфно (10) в силу (2) и, следовательно, также есть топологический изоморфизм.

Покажем теперь, что при любом α и $i \geqslant k$ образ отображения

$$\rho^i_\alpha\colon\ \mathscr{E}_{p_i}(\Omega^\alpha) \to \mathscr{E}_{p_i}(\Omega^{\alpha-1})$$

плотен в $\mathscr{E}_{p_i}(\Omega^{\alpha-1})$. Если $l>k$, то из эпиморфности r^l_α следует, что образ ρ^l_α в сумме с подпространством $p_{l-1}[\mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1})]^{t_{l-1}}$ равен пространству $\mathscr{E}_{p_l}(\Omega^{\alpha-1})$. Но подпространство $\mathscr{E}(\Omega^\alpha)$, очевидно, плотно в $\mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1})$, следовательно, $p_{l-1}[\mathscr{E}(\Omega^\alpha)]^{t_{l-1}} \subset \operatorname{Im}\rho^i_\alpha$ плотно в $p_{l-1}[\mathscr{E}(\Omega^{\alpha-1})]^{t_{l-1}}$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}\rho^l_\alpha$ плотно в $\mathscr{E}_{p_l}(\Omega^{\alpha-1})$, ч. и т. д.

Если $i=k$, это утверждение вытекает из свойства B) леммы 3.

Так как оператор R_l является композицией операторов ρ^l_α с $\alpha=A,\ A-1,\ \ldots,\ 1$, его образ плотен в $\mathscr{E}_{p_l}(\Omega_c)$. ∎

4°. Завершение доказательства теоремы 1. Зафиксируем произвольные $i>k$ и λ и рассмотрим последовательность л. т. п.

$$0 \to \mathscr{E}_{p_{l-1}}(\Omega_{c_\lambda}) \to [\mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})]^{t_{l-1}} \xrightarrow{p_{l-1}} p_{l-1}[\mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})]^{t_{l-1}} \to 0. \qquad (11.11)$$

Она, очевидно, алгебраически точна. Как мы заметили выше, $p_{l-1}[\mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})]^{t_{l-1}}$ есть пространство Фреше. Следовательно, (11) есть алгебраически точная последовательность пространств Фреше. Поэтому она точна.

Когда λ пробегает последовательность натуральных чисел, члены (11) пробегают убывающие семейства л. т. п. по отношению к отображениям сужения. В силу следствия пространство $\mathscr{E}_{p_{i-1}}(\Omega_{c_{\lambda+1}})$ плотно в $\mathscr{E}_{p_{i-1}}(\Omega_{c_\lambda})$. Поэтому из предложения 11 § 1 следует, что в последовательности (11) мы можем перейти к проективным пределам, сохранив ее точность. Так как $c_\lambda \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, то $\Omega_{c_\lambda} \to \Omega$, следовательно, проективный предел последовательности пространств $\mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})$ совпадает с $\mathscr{E}(\Omega)$. Поэтому предельная последовательность выглядит так:

$$0 \to \mathscr{E}_{p_{i-1}}(\Omega) \to [\mathscr{E}(\Omega)]^{t_{i-1}} \xrightarrow{p_{i-1}} \varprojlim_{\lambda} p_{i-1}\left[\mathscr{E}\left(\Omega_{c_\lambda}\right)\right]^{t_{i-1}} \to 0.$$

Из ее точности следует алгебраический изоморфизм

$$\varprojlim_{\lambda} p_{i-1}\left[\mathscr{E}\left(\Omega_{c_\lambda}\right)\right]^{t_{i-1}} \cong p_{i-1}[\mathscr{E}(\Omega)]^{t_{i-1}}. \tag{12.11}$$

Аналогичным образом мы можем перейти к пределу в последовательности

$$0 \to p_{i-1}\left[\mathscr{E}\left(\Omega_{c_\lambda}\right)\right]^{t_{i-1}} \to \mathscr{E}_{p_i}\left(\Omega_{c_\lambda}\right) \to \operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}\left(\Omega_{c_\lambda}\right)\right) \to 0$$

(пространство $p_{i-1}\left[\mathscr{E}\left(\Omega_{c_{\lambda+1}}\right)\right]^{t_{i-1}}$, как мы видели, плотно в $p_{i-1}\left[\mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})\right]^{t_{i-1}}$). Учитывая (12), мы получим в пределе точную последовательность

$$0 \to p_{i-1}[\mathscr{E}(\Omega)]^{t_{i-1}} \to \mathscr{E}_{p_i}(\Omega) \to \varprojlim_{\lambda} \operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})\right) \to 0.$$

Из ее точности следует топологический изоморфизм

$$\varprojlim_{\lambda} \operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})\right) \cong \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega)). \tag{13.11}$$

Согласно следствию все отображения сужения

$$R^i\colon \operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}(\Omega_{c_{\lambda+1}})\right) \to \operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})\right),$$

с помощью которых построен проективный предел в левой части (13), суть изоморфизмы. Поэтому этот проективный предел изоморфен любому из пространств $\operatorname{Ext}^i\left(M, \mathscr{E}(\Omega_{c_\lambda})\right)$. Отсюда окончательно

$$\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega_0)) \cong \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega)), \qquad i > k. \tag{14.11}$$

В силу леммы 4 пространство $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega_0))$ конечномерно, поэтому пространство $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega))$ также конечномерно, ч. и т. д.

Предположим теперь, что область Ω вполне $n-k$-выпукла. В таком случае $K=\phi$, и поэтому мы вправе предположить, что $h>0$ в Ω. Отсюда $\Omega_0=\phi$ и, следовательно, левая часть (14) равна нулю. Следовательно, равна нулю и правая часть. ■

Замечание. Из доказательства теоремы 2 можно извлечь некоторые сведения о пространствах $\mathrm{Ext}^l(M, \mathscr{E}(\Omega))$ также в случаях, когда M — негипоэллиптический модуль. Действительно, заметим, что рассуждения теоремы при $i>k+1$ не зависят от леммы 4 и, следовательно, справедливы для любого модуля M. Таким образом, алгебраический изоморфизм (14) с $i>k+1$ имеет место в предположении лишь $n-k$-выпуклости области Ω. Для того чтобы установить этот изоморфизм при $i=k+1$, достаточно знать, что пространства $\mathrm{Ext}^{k+1}(M, \mathscr{E}(\omega))$ с $\omega\subset\Omega$ все отделимы. Итак, мы можем сформулировать

Следствие 2. *Пусть M — произвольный конечный $\mathscr{P}$-модуль, а Ω — $n-k$-выпуклая область. Тогда при любом $i>k+1$ имеет место алгебраический изоморфизм* (14). *Если все пространства $\mathrm{Ext}^{k+1}(M, \mathscr{E}(\omega))$ с $\omega\subset\Omega$ отделимы, то этот изоморфизм имеет место также при $i=k+1$.*

Если область Ω вполне $n-k$-выпукла, то $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{E}(\Omega))=0$ при всех $i>k+1$, соответственно $i>k$.

§ 12. Операторы вида $p(D_{\bar\zeta})$ в областях голоморфности

Пусть n — четное число: $n=2m$. В пространстве R^n_ξ определим структуру комплексного пространства C^m_ζ, положив $\zeta_j=\xi_j+i\xi_{m+j}$, $j=1, \ldots, m$. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$D_\zeta=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_m}\right), \qquad D_{\bar\zeta}=\left(\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\bar\zeta_m}\right).$$

Полиномы от операторов $\dfrac{\partial}{\partial\zeta_j}$, $j=1, \ldots, m$, или от операторов $\dfrac{\partial}{\partial\bar\zeta_j}$, $j=1, \ldots, m$, с комплексными коэффициентами образуют подкольцо кольца $\mathscr{P}$ *). Это подкольцо мы обозначим через $\mathscr{P}'$, соответственно $\mathscr{P}''$. Конечный $\mathscr{P}$-модуль M мы назовем голоморфным, если $M\cong\mathrm{Coker}\, p'$, где p — некоторая $\mathscr{P}''$-матрица, т. е. матрица, образованная многочленами от $D_{\bar\zeta}$. В частности, модуль, отвечающий системе уравнений Коши — Римана в C^m, является голоморфным. В этом параграфе мы покажем, что для голоморфных $\mathscr{P}$-модулей области голоморфности играют ту же роль, которую играют выпуклые области для произвольных $\mathscr{P}$-модулей.

*) Начиная с 1°, это кольцо мы будем обозначать через $\mathscr{P}_\zeta$, а символу $\mathscr{P}$ придадим другой смысл (см. дальше).

1°. Формулировки теорем.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset C^m_\zeta$ — произвольная область голоморфности. Тогда для любого голоморфного $\mathcal{P}$-модуля M пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{D}^*(\Omega)$ M-выпуклы. Если Ω есть область Рунге, то эти пространства сильно M-выпуклы.*

Основное свойство областей голоморфности, которое мы используем при доказательстве, заключается в следующем: всякая область голоморфности в C^m является многообразием Штейна и, следовательно, допускает голоморфное регулярное взаимно однозначное собственное отображение в пространство C^{2m+1} *). То, что отображение является собственным, означает, что прообраз каждого компакта в C^{2m+1} является компактом в Ω. Регулярность отображения заключается в том, что ранг матрицы Якоби в каждой точке $\zeta \in \Omega$ равен m.

Для удобства положим $\nu = 2m+1$. Переменные в пространстве C^ν мы будем обозначать буквами $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$. Описанное выше отображение $\Omega \to C^\nu_\lambda$ обозначим через λ, образ точки ζ при этом отображении — через $\lambda(\zeta) = (\lambda_1(\zeta), \ldots, \lambda_\nu(\zeta))$. Голоморфность отображения λ означает, что все функции $\lambda_1(\zeta), \ldots, \lambda_\nu(\zeta)$ голоморфны в Ω.

Рассмотрим пространство $C^{m+\nu}$, являющееся прямым произведением пространств C^m_ζ и C^ν_λ. Через π обозначим оператор ортогонального проектирования в $C^{m+\nu}$ на C^m_ζ, а через Λ — отображение из Ω в $C^{m+\nu}$, относящее точке ζ точку $(\zeta, \lambda(\zeta))$. Операторы Λ и π устанавливают взаимно однозначное собственное биголоморфное соответствие между областью Ω и многообразием $\Lambda(\Omega)$, описываемым системой уравнений $\lambda = \lambda(\zeta)$, $\zeta \in \Omega$. Как легко сообразить, многообразие $\Lambda(\Omega)$ является замкнутым множеством в $C^{m+\nu}$.

Для каждой области U, принадлежащей пространству C^m или пространству $C^{m+\nu}$, через $\Phi(U)$ мы будем обозначать любое из трех пространств $\mathcal{H}(U)$, $\mathcal{E}(U)$, $\mathcal{D}^*(U)$, где $\mathcal{H}(U)$ — пространство голоморфных функций в U, наделенное топологией, индуцированной из $\mathcal{E}(U)$. Пусть U — произвольная область в $C^{m+\nu}$, а V — проекция на C^m_ζ ее пересечения с $\Lambda(\Omega)$. Рассмотрим оператор

$$\Lambda^*\colon \Phi(U) \ni \varphi(\zeta, \lambda) \to \varphi(\zeta, \lambda(\zeta)) \in \Phi(V),$$

относящий функции φ ее ограничение на $\Lambda(\Omega)$, рассматриваемое как функция ζ. Очевидно, что этот оператор определен и непрерывен

---

*) См. Нарасиман [1]. На самом деле для доказательства теоремы 1 достаточно совсем элементарного свойства областей голоморфности любая такая область есть предел возрастающей последовательности областей Вейля. Однако использование теоремы, сформулированной в тексте, позволяет несколько упростить доказательство.

в случаях, когда $\Phi(U)=\mathscr{H}(U)$, а $\Phi(V)=\mathscr{H}(V)$ или $\Phi(U)=\mathscr{E}(U)$, а $\Phi(V)=\mathscr{E}(V)$.

Через $\mathscr{P}_\zeta$, $\mathscr{P}_\lambda$ обозначим кольца полиномов с комплексными коэффициентами от операторов D_ζ, $D_{\bar\zeta}$, соответственно от D_λ, $D_{\bar\lambda}$. Кольцо $\mathscr{P}$ всех дифференциальных операторов в $C^{m+\nu}$ с комплексными коэффициентами равно тензорному произведению $\mathscr{P}_\zeta \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}_\lambda$ над полем C. Через $\mathscr{M}$ обозначим $\mathscr{P}$-модуль $M \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}_\lambda \cong \mathscr{P}^s/p'\mathscr{P}^t$. Рассмотрим систему Коши — Римана по переменным λ:

$$\frac{\partial u}{\partial\bar\lambda_1}=\ldots=\frac{\partial u}{\partial\bar\lambda_\nu}=0. \tag{1.12}$$

Через L обозначим $\mathscr{P}_\lambda$-модуль, отвечающий этот системе, а через $\mathscr{L}$ — $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{L}=\mathscr{P}_\zeta \underset{C}{\otimes} L$, отвечающий той же системе, рассматриваемой в пространстве $C^{m+\nu}$.

Если U — область в $C^{m+\nu}$, то $\Phi_{\mathscr{L}}(U)$ есть пространство голоморфных по λ функций, принадлежащих $\Phi(U)$, а $\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(U)$ — его подпространство, образованное решениями системы $p\left(D_{\bar\zeta}\right)u=0$ (здесь, как и раньше, символом $\otimes$ мы обозначаем тензорное произведение над кольцом $\mathscr{P}$). Теперь мы можем сформулировать вторую основную теорему.

Теорема 2. *Если M — голоморфный $\mathscr{P}_\zeta$-модуль, то последовательность*

$$\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}\left(C^{m+\nu}\right)\xrightarrow{\Lambda^*}\Phi_M(\Omega)\to 0 \tag{2.12}$$

определена и точна. Здесь $\Phi(\Omega)$ — одно из пространств $\mathscr{E}(\Omega)$ или $\mathscr{D}^*(\Omega)$, а $\Phi\left(C^{m+\nu}\right)$ — соответственно $\mathscr{E}\left(C^{m+\nu}\right)$ или $\mathscr{D}^*\left(C^{m+\nu}\right)$.

2°. Четыре леммы.

Лемма 1. *Пусть U — произвольная область в $\Omega\times C^\nu$. Если функция $f\in\Phi_{\mathscr{L}}(U)$ обращается в нуль при $\lambda_1=0$, то существует и определена однозначно функция $g\in\Phi_{\mathscr{L}}(U)$ такая, что $f=\lambda_1 g$. При этом соответствие $f\to g$ непрерывно в соответствующих топологиях.*

Доказательство. Для пространств $\Phi(U)=\mathscr{H}(U)$, $\mathscr{E}(U)$ утверждение леммы очевидно. Докажем его для пространства $\mathscr{D}^*(U)$. Предположим сначала, что область U является прямым произведением областей $V\subset\Omega$ и $W\subset C^\nu$. Всякой функции $f\in\mathscr{D}^*(U)$ и функции $\varphi\in\mathscr{D}(V)$ можно поставить в соответствие обобщенную функцию $(f, \varphi)_\xi\in\mathscr{D}^*(W)$ по формуле

$$((f, \varphi)_\xi, \psi)=(f, \varphi\times\psi), \quad \psi\in\mathscr{D}(W).$$

Это соответствие определяет непрерывное отображение

$$\mathscr{D}^*(U) \to \mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{D}^*(W)), \tag{3.12}$$

где $\mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{D}^*(W))$ — пространство всех непрерывных линейных отображений из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}^*(W)$, наделенное топологией ограниченной сходимости. Согласно теореме о ядре *) отображение (3) является топологическим изоморфизмом.

Подпространство $\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U) \subset \mathscr{D}^*(U)$ характеризуется тем, что образ каждой функции этого подпространства при отображении (3) есть оператор, переводящий $\mathscr{D}(V)$ в подпространство $\mathscr{H}(W) \subset \mathscr{D}^*(W)$, образованное аналитическими функциями. Иными словами, сужение отображения (3) на $\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U)$ действует по формуле

$$\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U) \to \mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{H}(W)). \tag{4.12}$$

Из теоремы 1 § 5 следует, что топология пространства $\mathscr{H}(W)$ совпадает с топологией, индуцированной из $\mathscr{D}^*(W)$. Поэтому топология пространства $\mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{H}(W))$ является индуцированной из $\mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{D}^*(W))$. Поэтому из того, что отображение (3) есть изоморфизм, вытекает, что отображение (4) также является изоморфизмом.

Предположим, что функция $f \in \mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U)$ обращается в нуль на подпространстве $\lambda_1 = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ аналитическая функция $(f, \varphi)_\xi \in \mathscr{H}(W)$ также обращается в нуль при $\lambda_1 = 0$. Так как лемма верна для пространства $\mathscr{H}(W)$, частное $g_\varphi = \lambda_1^{-1}(f, \varphi)_\xi$ также принадлежит $\mathscr{H}(W)$, причем соответствие $(f, \varphi)_\xi \to g_\varphi$ непрерывно. Таким образом, мы построили отображение $\mathscr{D}(V) \ni \varphi \to g_\varphi \in \mathscr{H}(W)$, которое как элемент пространства $\mathrm{Hom}_C(\mathscr{D}(V), \mathscr{H}(W))$ непрерывно зависит от f. Так как (4) есть изоморфизм, этому отображению отвечает некоторая функция $g \in \mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U)$. Из ее конструкции следует, что она непрерывно зависит от f и $\lambda_1 g = f$. Единственность ее очевидна. Тем самым для областей вида $U = V \times W$ лемма доказана.

Пусть теперь U — произвольная область в $\Omega \times C^\nu$. Построим некоторое локально конечное покрытие $\mathscr{U}$ этой области, образованное областями вида $U_k = V_k \times W_k$. Функцию $f \in \mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U)$, обращающуюся в нуль при $\lambda_1 = 0$, рассмотрим как элемент пространства коцепей ${}^0\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(\mathscr{U})$. Используя доказанный выше частный случай леммы, мы можем записать функцию f в виде $\lambda_1 g$, где коцепь g принадлежит ${}^0\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(\mathscr{U})$, однозначно определена и непрерывно зависит от f.

---

*) См., например, Шварц [3].

Из равенства $\partial^0 f = \partial^0 \lambda_1 g = \lambda_1 \partial^0 g = 0$ мы заключаем, что $\partial^0 g = 0$. Из точности последовательности (25.2) с $\Phi = \mathscr{D}^*$ вытекает, что коцепь g принадлежит $\mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U)$ и как элемент этого пространства также непрерывно зависит от f. ■

Пусть снова U — произвольная область в $C^{m+\nu}$. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, \nu$ через $\Phi^k_{\mathscr{L}}(U)$ обозначим пространство дифференциальных форм вида

$$\sum \varphi_{i_1, \ldots, i_k} d\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\lambda_{i_k}, \quad \varphi_{i_1, \ldots, i_k} \in \Phi_{\mathscr{L}}(U).$$

Рассмотрим также оператор l: $\Phi^k_{\mathscr{L}}(U) \to \Phi^{k+1}_{\mathscr{L}}(U)$, действие которого заключается в умножении на дифференциальную форму

$$l = \sum_1^{\nu} [\lambda_j - \lambda_j(\zeta)]\, d\lambda_j.$$

Очевидно, что $ll = 0$.

Лемма 2. *Пусть U — область в $C^{m+\nu}$, удовлетворяющая следующему условию: U есть прямое произведение выпуклых областей $V = \Lambda^{-1}(U) \subset C^m_\zeta$ и $W \subset C^\nu_\lambda$. В таком случае точна последовательность*

$$0 \to \Phi^0_{\mathscr{L}}(U) \xrightarrow{l} \Phi^1_{\mathscr{L}}(U) \xrightarrow{l} \ldots$$
$$\ldots \to \Phi^{\nu-1}_{\mathscr{L}}(U) \xrightarrow{l} \Phi^\nu_{\mathscr{L}}(U) \xrightarrow{\Lambda^{\circledast}} \Phi(V) \to 0, \tag{5.12}$$

где $\Lambda^{\circledast}$ — оператор, действующий по формуле

$$\Lambda^{\circledast}\colon\ \varphi\, d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_\nu \to \Lambda^* \varphi.$$

(В ходе доказательства мы покажем, что этот оператор действительно определен для всех трех типов пространств $\Phi(U)$.)

Доказательство. В области $\Omega \times C^\nu$ сделаем следующую голоморфную замену переменных:

$$\zeta \to \zeta, \qquad \lambda \to \lambda' = \lambda - \lambda(\zeta). \tag{6.12}$$

Перепишем последовательность (5) в новой системе координат. Через U' обозначим образ области U. Как легко понять, замена переменных (6) определяет изоморфное отображение пространства $\Phi(U')$ на пространство $\Phi(U)$. Поскольку система уравнений (1) не меняет своего вида, подпространство $\Phi_{\mathscr{L}}(U')$ при этом изоморфизме переходит в $\Phi_{\mathscr{L}}(U)$. Поэтому при любом k имеет место также изоморфизм $\Phi^k_{\mathscr{L}}(U') \cong \Phi^k_{\mathscr{L}}(U)$. Оператор l преобразуется в оператор l', действие которого заключается в умножении на форму $l' = \sum \lambda'_j\, d\lambda'_j$.

Наконец, оператор $\Lambda^{\circledast}$ преобразуется в оператор, действующий по формуле

$$\Lambda'\colon \varphi(\zeta, \lambda')\, d\lambda'_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda'_\nu \to \varphi(\zeta, 0).$$

Таким образом, последовательность (5) изоморфно преобразуется в последовательность

$$0 \to \Phi^0_{\mathscr{L}}(U') \xrightarrow{l'} \Phi^1_{\mathscr{L}}(U') \xrightarrow{l'} \ldots$$
$$\ldots \to \Phi^{\nu-1}_{\mathscr{L}}(U') \xrightarrow{l'} \Phi^{\nu}_{\mathscr{L}}(U') \xrightarrow{\Lambda'} \Phi(V) \to 0. \quad (7.12)$$

В случае, когда $\Phi(U') = \mathscr{H}(U')$ или $\mathscr{E}(U')$, оператор Λ', очевидно, определен и непрерывен. Установим то же самое для пространства $\Phi(U') = \mathscr{D}^*(U')$. В системе (1) переменные λ заменим на λ' и заметим, что эта система является сильно гипоэллиптической по λ' с показателем $\check{\gamma} = 1$ (см. § 5). Следовательно, согласно теореме 3 § 5 всякое обобщенное решение u этой системы, определенное в области U', имеет сужение на подпространстве $\lambda' = 0$, являющееся обобщенной функцией в области V. Согласно замечанию, сделанному после этой теоремы, это сечение как элемент пространства $\mathscr{D}^*(V)$ непрерывно зависит от u. Тем самым мы установили, что оператор $\Lambda'\colon \mathscr{D}^*_{\mathscr{L}}(U) \to \mathscr{D}^*(V)$ действительно определен и непрерывен. Отсюда следует, что оператор $\Lambda^{\circledast}$ в (5) также определен и непрерывен.

Для того чтобы установить точность последовательности (5), достаточно установить точность (7). Через $Z^k(U')$, $k = 0, \ldots, \nu - 1$, мы обозначим ядро оператора $l'\colon \Phi^k_{\mathscr{L}}(U') \to \Phi^{k+1}_{\mathscr{L}}(U')$, а через $Z^\nu(U')$ — ядро Λ'. Пространство $Z^0(U')$ состоит из всех функций f, принадлежащих $\Phi_{\mathscr{L}}(U')$, таких, что $\lambda'_j f = 0$, $j = 1, \ldots, \nu$. Поэтому, очевидно, что $Z^0(U') = 0$ в случае $\Phi(U') = \mathscr{H}(U')$ или $\mathscr{E}(U')$. В случае $\Phi(U') = \mathscr{D}^*(U')$ этот факт вытекает из изоморфизма (4). Мы построим сейчас непрерывные (однозначные) операторы

$$l'^{-1}\colon Z^k(U') \to \Phi^{k-1}_{\mathscr{L}}(U'), \qquad k = 1, \ldots, \nu \quad (8.12)$$

и оператор

$$\Lambda'^{-1}\colon \Phi(V) \to \Phi^\nu_{\mathscr{L}}(U'),$$

обратные соответственно операторам l' и Λ'. Из их существования, очевидно, вытекает точность последовательности (7), а следовательно и точность (5).

Построим сначала оператор Λ'^{-1}. Любую функцию $\varphi \in \Phi(V)$ мы можем продолжить в U' как постоянную по λ функцию. Полученное продолжение $\check{\varphi}$, очевидно, принадлежит $\Phi_{\mathscr{L}}(U')$ и непрерывно зависит от φ. Соответствие $\varphi \to \check{\varphi}\, d\lambda_1' \wedge \ldots \wedge d\lambda_\nu'$ является искомым оператором, обратным Λ'.

Построим теперь операторы l'^{-1}. Заметим, что эта задача зависит лишь от области U' и не зависит от Ω и Λ. Поэтому мы можем использовать индукцию по числу ν. Предположим, что операторы, аналогичные l'^{-1}, построены для любой области $\hat{U}$ в $C^{m+\nu-1}$. Заметим, что в случае $\nu = 1$ эта предпосылка, очевидно, справедлива.

Для любой формы $\varphi \in \Phi^k_{\mathscr{L}}(U')$, где $0 \leqslant k < \nu$, через $\hat{\varphi}$ обозначим ее сужение на подпространстве $\lambda_1' = 0$, полученное из φ ограничением ее коэффициентов на этом подпространстве и отбрасыванием всех членов, содержащих $d\lambda_1'$. Соответствие $\varphi \to \hat{\varphi}$ определяет непрерывное отображение $\Phi^k_{\mathscr{L}}(U') \to \Phi^k_{\hat{\mathscr{L}}}(\hat{U})$, где $\hat{U} \subset C^{m+\nu-1}$ — пересечение U' с подпространством $\lambda_1' = 0$, а $\hat{\mathscr{L}}$ — модуль, отвечающий системе Коши — Римана по переменным $\lambda_2', \ldots, \lambda_\nu'$. Положим $\hat{l} = \sum_2^\nu \lambda_j'\, d\lambda_j'$.

Пусть $k < \nu$. Рассмотрим произвольную форму $\varphi \in \Phi^k_{\mathscr{L}}(U')$, принадлежащую ядру оператора l'. Из равенства $l' \wedge \varphi = 0$, очевидно, вытекает $\hat{l} \wedge \hat{\varphi} = 0$. Согласно предположению индукции форму $\hat{\varphi}$ можно записать в виде $\hat{\varphi} = \hat{l} \wedge \hat{\psi}$, где $\hat{\psi} = \hat{l}^{-1}\hat{\varphi} \in \Phi^{k-1}_{\hat{\mathscr{L}}}(\hat{U})$, причем оператор $\hat{l}^{-1}$ непрерывен. Форму $\hat{\psi}$ продолжим на всю область U, продолжив все ее коэффициенты как постоянные по λ_1' функции, рассмотрим разность $\varphi' = \varphi - l' \wedge \psi$, где ψ—описанное продолжение $\hat{\psi}$. Сужение формы φ' на подпространстве $\lambda_1' = 0$ равно нулю, следовательно, используя лемму 1, мы можем записать ее в виде

$$\varphi' = d\lambda_1' \wedge \psi' + \lambda_1'\chi + \lambda_1'\, d\lambda_1' \wedge \theta, \tag{9.12}$$

где ψ' и θ принадлежат $\Phi^{k-1}_{\mathscr{L}}(U')$, а $\chi \in \Phi^k_{\mathscr{L}}(U')$, причем все три формы ψ', θ, χ не содержат $d\lambda_1'$, а форма ψ' не зависит от λ_1'. Исходя из того, что деление на λ_1' в $\Phi_{\mathscr{L}}(U')$ есть однозначная операция в силу леммы 1, нетрудно убедиться в том, что представление (9) при сформулированных условиях на ψ', θ и χ однозначно, а формы ψ', θ и χ непрерывно зависят от φ.

Из равенства $l' \wedge \varphi' = 0$ следует, что

$$d\lambda_1' \wedge \left[\lambda_1'^2\chi - \hat{l} \wedge \psi' - \lambda_1'\hat{l} \wedge \theta\right] + \lambda_1'\hat{l} \wedge \chi = 0.$$

Так как формы $\lambda_1'\hat{l} \wedge \chi$ и $\lambda_1'^2\chi - \hat{l} \wedge \psi' - \lambda_1'\hat{l} \wedge \theta$ не содержат $d\lambda_1'$, отсюда вытекает равенство

$$\hat{l} \wedge \psi' = \lambda_1'^2\chi - \lambda_1'\hat{l} \wedge \theta. \tag{10.12}$$

Поскольку форма ψ' не зависит от λ_1', полагая $\lambda_1'=0$ в этом равенстве, мы получаем, что $\hat{l}\wedge\psi'=0$. Используя предположение индукции, мы находим, что $\psi'=\hat{l}\wedge\eta$, где $\eta=\hat{l}^{-1}\psi'$ — форма, принадлежащая $\Phi_{\mathscr{L}}^{k-2}(U')$ и не зависящая от λ_1'. С другой стороны, снова из равенства (10) мы находим, что $\lambda_1'\chi=\hat{l}\wedge\theta$, так как λ_1' не есть делитель нуля в $\Phi_{\mathscr{L}}(U')$. Подставляя эти выражения в (9), получаем

$$\varphi'=d\lambda_1'\wedge\hat{l}\wedge\eta+\hat{l}\wedge\theta+\lambda_1'd\lambda_1'\wedge\theta=l'\wedge[\theta-d\lambda_1\wedge\eta].$$

Соответствие

$$Z^k(U')\ni\varphi\to\theta-d\lambda_1'\wedge\eta+\psi\in\Phi_{\mathscr{L}}^{k-1}(U'),$$

как видно из его конструкции, непрерывно и является обратным по отношению к оператору l'.

Для завершения индукции остается построить оператор (8) в случае $k=\nu$. Пусть форма $\varphi^*=\varphi\,d\lambda_1'\wedge\ldots\wedge d\lambda_\nu'$ принадлежит ядру оператора Λ', т. е. $\varphi(\zeta,0)\equiv 0$. Рассмотрим форму

$$\hat{\varphi}=\varphi(\zeta;\,0,\lambda_2',\ldots,\lambda_\nu')\,d\lambda_2'\wedge\ldots\wedge d\lambda_\nu'.$$

Поскольку функция $\varphi(\zeta;\,0,\lambda_2',\ldots,\lambda_\nu')$ обращается в нуль на подпространстве $\lambda_2'=\ldots=\lambda_\nu'=0$, из предположения индукции вытекает, что $\hat{\varphi}=\hat{l}\wedge\psi$, где $\psi\in\Phi_{\mathscr{L}}^{\nu-2}(U')$, причем соответствие $\varphi^*\to\psi$ есть непрерывный оператор. Рассмотрим разность

$$\varphi'=\varphi^*-d\lambda_1'\wedge\hat{l}\wedge\psi=$$
$$=[\varphi(\zeta,\lambda_1',\ldots,\lambda_\nu')-\varphi(\zeta;\,0,\lambda_2',\ldots,\lambda_\nu')]\,d\lambda_1'\wedge\ldots\wedge d\lambda_\nu'.$$

Так как функция $\varphi(\zeta,\lambda_1',\ldots,\lambda_\nu')-\varphi(\zeta;\,0,\lambda_2',\ldots,\lambda_\nu')$ обращается в нуль при $\lambda_1'=0$, из леммы 1 вытекает, что форма $\chi=\dfrac{\varphi'}{\lambda_1'\,d\lambda_1'}$ принадлежит $\Phi_{\mathscr{L}}^{\nu-1}(U')$ и непрерывно зависит от φ'. Положив $\psi'=\chi-d\lambda_1'\wedge\psi$, мы получим

$$\varphi^*=\varphi'+d\lambda_1'\wedge\hat{l}\wedge\psi=\lambda_1'd\lambda_1'\wedge\chi-\hat{l}\wedge d\lambda_1'\wedge\psi=l'\wedge\psi'.$$

Оператор $\varphi^*\to\psi'$, очевидно, непрерывен и, как мы показали, является обратным по отношению к l'. Индукция завершена и тем самым закончено доказательство леммы. ■

Результат леммы 2 мы представим в несколько иной форме. Каждую дифференциальную форму из пространства $\Phi_{\mathscr{L}}^k(U)$ мы запишем в виде столбца, элементами которого являются коэффициенты этой формы. Тем самым мы установим изоморфизм $\Phi_{\mathscr{L}}^k(U)\cong[\Phi_{\mathscr{L}}(U)]^{\binom{\nu}{k}}$.

Оператор l: $\Phi^k_{\mathcal{L}}(U) \to \Phi^{k+1}_{\mathcal{L}}(U)$ после этого преобразования превратится в оператор умножения на некоторую матрицу l_k, элементами которой являются функции вида $\pm[\lambda-\lambda_j(\zeta)]$ и нули. В итоге последовательность (5) перепишется в виде

$$0 \to \Phi_{\mathcal{L}}(U) \xrightarrow{l_0} [\Phi_{\mathcal{L}}(U)]^{\nu} \xrightarrow{l_1} \ldots$$
$$\ldots \to [\Phi_{\mathcal{L}}(U)]^{\nu} \xrightarrow{l_{\nu-1}} \Phi_{\mathcal{L}}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \Phi(V) \to 0. \quad (11.12)$$

В частности, если мы подставим $\Phi(U)=\mathcal{H}(U)$, то получим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}(U) \xrightarrow{l_0} [\mathcal{H}(U)]^{\nu} \xrightarrow{l_1} \ldots$$
$$\ldots \to [\mathcal{H}(U)]^{\nu} \xrightarrow{l_{\nu-1}} \mathcal{H}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \mathcal{H}(V) \to 0. \quad (12.12)$$

Пусть теперь $U \subset C^{m+\nu}$ — произвольная область, не пересекающаяся с $\Lambda(\Omega)$, а $V=\Lambda^{-1}(U)$. В таком случае ядро отображения Λ^*: $\Phi_{\mathcal{L}}(U) \to \Phi(V)$ совпадает со всем пространством $\Phi_{\mathcal{L}}(U)$. Следовательно, мы можем написать точную последовательность, имеющую вид

$$0 \to \Phi_{\mathcal{L}}(U) \to \Phi_{\mathcal{L}}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \Phi(V) \to 0, \quad (13.12)$$

и, в частности, точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \mathcal{H}(V) \to 0. \quad (14.12)$$

Недостатком последовательностей (11) и (13) является то, что они строятся по-разному для различных областей U. В следующей лемме мы получим аналогичные точные последовательности, строящиеся единообразно для всех областей U.

Лемма 3. *Пусть* $\square$ — *произвольный открытый куб в* $C^{m+\nu}$, *являющийся прямым произведением открытых кубов* $\Delta \subset C^m$ *и* $\nabla \subset C^{\nu}$. *Пусть далее* U — *произвольная выпуклая область, принадлежащая* $\square$, *которая либо удовлетворяет условию леммы 2, либо не пересекается с* $\Lambda(\Omega)$. *Тогда определена точная последовательность*

$$0 \to \ldots \to [\Phi_{\mathcal{L}}(U)]^{a_k} \xrightarrow{F_k} [\Phi_{\mathcal{L}}(U)]^{a_{k-1}} \to \ldots$$
$$\ldots \to [\Phi_{\mathcal{L}}(U)]^{a_1} \xrightarrow{F_1} \Phi_{\mathcal{L}}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \Phi(V) \to 0, \quad (15.12)$$

в которой $F_1, \ldots, F_k, \ldots$ — *некоторые матрицы, образованные голоморфными в* $C^{m+\nu}$ *функциями, зависящие лишь от куба* $\square$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — пучок ростков голоморфных функций в $C^{m+\nu}$, а $\mathcal{H}^{\Lambda}$ — его подпучок, образованный ростками функций, обращающихся в нуль на многообразии $\Lambda(\Omega)$. Пучок $\mathcal{H}^{\Lambda}$

является когерентным аналитическим пучком в $C^{m+\nu}$. Следовательно, мы можем написать резольвенту для сужения $\mathscr{H}^{\Lambda}_{\square}$ этого пучка на $\square$, имеющую следующий вид:

$$0 \to \ldots \to [\mathscr{H}_{\square}]^{a_k} \xrightarrow{F_k} [\mathscr{H}_{\square}]^{a_{k-1}} \to \ldots \to [\mathscr{H}_{\square}]^{a_1} \xrightarrow{F_1} \mathscr{H}^{\Lambda}_{\square} \to 0, \tag{16.12}$$

где $\mathscr{H}_{\square}$ — сужение пучка $\mathscr{H}$ на $\square$, а $F_1, \ldots, F_k, \ldots$ — некоторые матрицы, образованные аналитическими в $C^{m+\nu}$ функциями *).

Поскольку область U выпукла, она является областью голоморфности. Поэтому согласно известной теореме B мы можем перейти в последовательности (16) от пучков к пространствам их сечений над U, не нарушив ее точности **). Поэтому последовательность линейных пространств

$$0 \to \ldots \to [\mathscr{H}(U)]^{a_k} \xrightarrow{F_k} [\mathscr{H}(U)]^{a_{k-1}} \to \ldots$$
$$\ldots \to [\mathscr{H}(U)]^{a_1} \xrightarrow{F_1} \mathscr{H}(U) \xrightarrow{\Lambda^*} \mathscr{H}(V) \to 0 \tag{17.12}$$

алгебраически точна.

Заметим, что пространство $\mathscr{H}(U)$ является коммутативным кольцом с единицей относительно операции умножения функций. Это кольцо мы обозначим через A. В пространстве $[\mathscr{H}(U)]^k = A^k$, $k = 1, 2, \ldots$, определена естественная структура A-модуля. Определим структуру A-модуля в пространстве $\mathscr{H}(V)$, задав действие элемента $\varphi \in A$ с помощью формулы

$$\varphi f = \varphi(\zeta, \lambda(\zeta)) f(\zeta), \quad f \in \mathscr{H}(V).$$

Таким образом, члены последовательностей (12), (14) и (17) являются A-модулями, а отображения этих последовательностей — A-отображениями. Заметим, что эти последовательности представляют из себя свободные резольвенты конечного A-модуля $\mathscr{H}(V)$.

Аналогичным образом вводятся структуры A-модулей в пространствах $[\Phi_{\mathscr{L}}(U)]^k$ и $\Phi(V)$. Очевидно, что для любого k имеет место топологический A-изоморфизм $[\mathscr{H}(U)]^k \underset{A}{\otimes} \Phi_{\mathscr{L}}(U) \cong [\Phi_{\mathscr{L}}(U)]^k$. Из точности последовательностей (11) и (13) в последнем члене следует, что $\mathscr{H}(V) \underset{A}{\otimes} \Phi_{\mathscr{L}}(U) \cong \Phi(V)$. Поэтому, умножая последовательности (12), (14) и (17) тензорно на A-модуль $\Phi_{\mathscr{L}}(U)$, мы получим соответственно последовательности (11), (13) и (15). Так как последовательности (12) и (14) суть свободные резольвенты A-модуля $\mathscr{H}(V)$,

*) См., например, Фукс [2].
**) См. там же.

то из точности (11) и (13) мы заключаем, что для любой области U, удовлетворяющей условию леммы,

$$\operatorname{Tor}_i^A\left(\mathscr{H}(V),\ \Phi_{\mathscr{L}}(U)\right)=0, \qquad i\geqslant 1. \tag{18.12}$$

Однако в силу предложения 2 § 3 гл. I модули (18) не зависят от выбора свободной резольвенты модуля $\mathscr{H}(V)$ и, более того, из точности последовательностей (11) и (13) вытекает точность последовательности (15) для любой области U, удовлетворяющей условию леммы. ■

Лемма 4. *Последовательность*

$$0\to\ldots\to[\Phi_{\mathscr{L}}(\square)]^{\alpha_k}\xrightarrow{F_k}[\Phi_{\mathscr{L}}(\square)]^{\alpha_{k-1}}\to\ldots$$
$$\ldots\to[\Phi_{\mathscr{L}}(\square)]^{\alpha_1}\xrightarrow{F_1}\Phi_{\mathscr{L}}(\square)\xrightarrow{\Lambda^*}\Phi(\omega)\to 0,\qquad \omega=\Lambda^{-1}(\square)$$

точна.

Доказательство. Покроем куб $\square$ локально конечным покрытием U, образованным областями вида $U_\alpha=V_\alpha\times W_\alpha$, где $V_\alpha\subset C_\zeta^m$, а $W_\alpha\subset C_\lambda^\nu$, каждая из которых удовлетворяет условию леммы 3. Через V обозначим покрытие области ω, образованное областями $\Lambda^{-1}(U_\alpha)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & {}^1\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r, "F_k"] \arrow[u, "\partial"] & {}^1\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & \ldots \arrow[r] & {}^1\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r, "\Lambda^*"] \arrow[u, "\partial"] & {}^1\Phi(V) \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & {}^0\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r, "F_k"] \arrow[u, "\partial"] & {}^0\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & \ldots \arrow[r] & {}^0\Phi_{\mathscr{L}}(U) \arrow[r, "\Lambda^*"] \arrow[u, "\partial"] & {}^0\Phi(V) \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \Phi_{\mathscr{L}}(\square) \arrow[r, "F_k"] \arrow[u] & \Phi_{\mathscr{L}}(\square) \arrow[r] \arrow[u] & \ldots \arrow[r] & \Phi_{\mathscr{L}}(\square) \arrow[r, "\Lambda^*"] \arrow[u] & \Phi(\omega) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{19.12}$$

в которой мы опустили скобки $[\ldots]^{\alpha_k}$.

По условию $\square$ — выпуклая область, а U — выпуклое покрытие этой области. Так как пространство $\Phi(\square)$ $\mathscr{L}$-выпукло в силу результатов § 8, все столбцы этой диаграммы, за исключением последнего, точны согласно теореме 1 § 9. Точность последнего вытекает из предложения 9 § 2.

По предположению каждая область U_α удовлетворяет условию леммы 3, следовательно, любое конечное пересечение $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ этих областей также удовлетворяет условию этой леммы. Поэтому из леммы 3 следует, что каждая последовательность вида

$$0 \to \ldots \to \left[\Phi_{\mathscr{L}}\left(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}\right)\right]^{\alpha_1} \xrightarrow{F_1}$$
$$\to \Phi_{\mathscr{L}}\left(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}\right) \xrightarrow{\Lambda^*} \Phi\left(V_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k}\right) \to 0,$$
$$V_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k} = \Lambda^{-1}\left(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}\right)$$

точна. Отсюда мы заключаем, что в диаграмме (19) точны все строки, за исключением нижней. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, устанавливаем точность нижней строки. ■

3°. Завершение доказательства теорем 1 и 2. Покажем, что модуль $\mathscr{M}$ имеет свободную резольвенту вида (4.7), в которой p, p_1, p_2, ... суть $\mathscr{P}''$-матрицы. По условию $M \cong \operatorname{Coker} p'$, где p — некоторая $\mathscr{P}''$-матрица. Выпишем некоторую свободную резольвенту для $\mathscr{P}''$-модуля $M'' = \mathscr{P}''^s / p' \mathscr{P}''^t$:

$$0 \to \mathscr{P}''^{t_\delta} \xrightarrow{p'_{\delta-1}} \mathscr{P}''^{t_{\delta-1}} \to \ldots \xrightarrow{p'_2} \mathscr{P}''^{t_2} \xrightarrow{p'_1}$$
$$\xrightarrow{p'_1} \mathscr{P}''^{t} \xrightarrow{p'} \mathscr{P}''^{s} \to M'' \to 0. \tag{20.12}$$

В этой последовательности по построению p, p_1, p_2, ..., $p_{\delta-1}$ суть $\mathscr{P}''$-матрицы. Последовательность (20) умножим тензорно на кольцо $\mathscr{P}'$ над полем C, а затем умножим тензорно на $\mathscr{P}_\lambda$ над тем же полем. Поскольку

$$\mathscr{P}''^k \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}' \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}_\lambda = \mathscr{P}^k, \qquad k = 1, 2, \ldots; \ M'' \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}' \underset{C}{\otimes} \mathscr{P}_\zeta \cong \mathscr{M},$$

мы получим точную последовательность:

$$0 \to \mathscr{P}^{t_\delta} \xrightarrow{p'_{\delta-1}} \mathscr{P}^{t_{\delta-1}} \to \ldots \xrightarrow{p'_2} \mathscr{P}^{t_2} \xrightarrow{p'_1} \mathscr{P}^{t} \xrightarrow{p'} \mathscr{P}^{s} \to \mathscr{M} \to 0 \text{ *)},$$

которая является искомой свободной резольвентой модуля $\mathscr{M}$. Используя эту резольвенту, построим диаграмму (см. стр. 408), в которой мы опустили скобки $[\ldots]^{a_k t_i}$.

Поскольку все матрицы F_k голоморфны, а операторы p, p_1, ... содержат дифференцирования лишь по переменным $\bar\zeta$, то для любых k и j имеет место соотношение $p_j F_k = F_k p_j$. Отсюда следует, что умножение на матрицу F_k переводит вектор, образованный решениями системы $p\left(D_{\bar\zeta}\right) u = 0$, в вектор, образованный решениями той же системы. Поэтому отображения F_k в нижней строке диаграммы (21)

*) Точность полученной последовательности следует из того, что функтор тензорного произведения над полем точен.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r, "F_k"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "F_1"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r, "\Lambda^*"] & {[\Phi(\omega)]^{t_\delta}} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u, "p_{\delta-1}"] & \vdots \arrow[u, "p_{\delta-1}"] & & \vdots \arrow[u, "p_{\delta-1}"] & \vdots \arrow[u, "p_{\delta-1}"] & \\
\cdots \arrow[r] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "F_k"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p_1"] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "F_1"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "\Lambda^*"] & {[\Phi(\omega)]^{t}} \arrow[u, "p_1"] \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p"] \arrow[r, "F_k"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p"] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "F_1"] & \Phi_{\mathcal{L}}(\square) \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\Lambda^*"] & {[\Phi(\omega)]^{s}} \arrow[u, "p"] \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r, "F_k"] & \Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "F_1"] & \Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(\square) \arrow[u] \arrow[r, "\Lambda^*"] & \Phi_{\mathcal{M}}(\omega) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{21.12}
$$

действительно определены. Из соотношений $p_jF_k = F_kp_j$ следует также, что диаграмма (21) коммутативна во всех строках и столбцах, исключая последний.

Докажем, что диаграмма (21) коммутативна также в последнем столбце. Для любого $j = 1, \ldots, m$ и функции f, голоморфной в $\square$, по переменным λ мы имеем

$$
\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}\Lambda^*(f) = \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j} f(\zeta,\ \lambda(\zeta)) =
$$
$$
= \left\{\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_j} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\lambda_i(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}_j} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}_j}\frac{\partial\bar{\lambda}_i}{\partial\bar{\zeta}_j}\right\}\Bigg|_{\lambda=\lambda(\zeta)} = \Lambda^*\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_j}\right).
$$

Многократно применяя это соотношение, мы получим любое равенство $p_j\Lambda^*(f) = \Lambda^*(p_jf)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Из этих равенств вытекает коммутативность (21) в последнем столбце. Тем самым мы установили, что диаграмма (21) коммутативна.

Из леммы 4 вытекает точность всех строк этой диаграммы, за исключением нижней. Установим точность ее столбцов. Так как операторы $p(D_{\bar{\zeta}})$ и $\dfrac{\partial}{\partial\bar{\lambda}_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial\bar{\lambda}_\nu}$ действуют по различным группам переменных, из предложения 5 § 4 гл. IV вытекает, что $\operatorname{Tor}_i(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$ для всех $i \geqslant 1$. Поскольку область $\square$ выпукла, из теоремы 3 § 9 следует, что пространство $\Phi_{\mathcal{L}}(\square)$ $\mathcal{M}$-выпукло. Отсюда следует точность всех столбцов (21), кроме правого. Правый столбец, очевидно, точен в члене $\Phi_M(\omega)$ и алгебраически точен в члене $[\Phi(\omega)]^s$. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, мы приходим к выводу, что нижняя строка и правый столбец точны.

Докажем теперь первое утверждение теоремы 1. Пусть $\square$ пробегает некоторую возрастающую последовательность открытых кубов, стремящуюся к $C^{m+\nu}$. Поскольку отображение Λ собственное, область $\omega=\Lambda^{-1}(\square)$ пробегает некоторую возрастающую последовательность областей с компактными замыканиями, стремящуюся к Ω. Из точности правого столбца диаграммы (21) следует, что для любой области ω этой последовательности пространство $\Phi(\omega)$ M-выпукло. В частности, M-выпукло пространство $\mathscr{E}(\omega)$. Из точности нижней строки (21) в последнем члене следует, что каждую функцию $u\in\mathscr{E}_M(\omega)$ можно записать в виде $\Lambda^*(u^*)$, где $u^*\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square)$. Так как область $\square$ выпуклая, функцию u^* можно приблизить функциями $e^*\in E_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}$ по топологии пространства $\mathscr{E}_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square)$. Поскольку оператор Λ^* непрерывный, функциями вида $\Lambda^*(e^*)$ можно приблизить функцию u в топологии $\mathscr{E}_M(\omega)$. Так как все функции вида $\Lambda^*(e^*)$ принадлежат $\mathscr{E}_M(\Omega)$, мы тем самым показали, что пространство $\mathscr{E}_M(\Omega)$ плотно в $\mathscr{E}_M(\omega)$. Этот факт в сочетании с M-выпуклостью всех пространств $\mathscr{E}(\omega)$ показывает, что пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ также M-выпукло (см. предложение 2 § 7).

Чтобы установить M-выпуклость пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$, нам необходимо

Следствие 1. *Пусть $\varkappa$ — некоторый компакт, принадлежащий ω. Тогда при любом натуральном q всякая функция $u\in\mathscr{D}^*_M(\omega)$ может быть записана в виде суммы u_0+v, где $u_0\in\mathscr{D}^*_M(\Omega)$, а $v\in[\mathscr{E}^q_\varkappa]^s$, причем $\|v\|^q_\varkappa\leqslant\frac{1}{q}$.*

Доказательство. Пусть $K\subset\square$ — некоторый выпуклый компакт, содержащий множество $\Lambda(\varkappa)$. Из точности нижней строки диаграммы (21) в последнем члене следует, что функцию u можно представить в виде $\Lambda^*(u^*)$, где $u^*\in\mathscr{D}^*_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square)$. Применив к функции u^* следствие 2 § 4, мы запишем ее в виде суммы $u^*_0+v^*$, где $u^*_0\in\mathscr{D}^*_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(C^{m+\nu})$, а $v^*\in[\mathscr{E}^q_K]^s$, причем $\|v^*\|^q_K\leqslant\frac{1}{q}$. Мы имеем $u=u_0+v$, где $u_0=\Lambda^*(u^*_0)\in\mathscr{D}^*_M(\Omega)$, а $v=\Lambda^*(v^*)\in[\mathscr{E}^q_\varkappa]^s$. Так как отображение Λ^*: $[\mathscr{E}^q_K]^s\to[\mathscr{E}^q_\varkappa]^s$ непрерывно, а норма функции v^* сколь угодно мала, норму функции v мы также можем сделать сколь угодно малой. ■

Докажем M-выпуклость пространства $\mathscr{D}^*(\Omega)$. Так как всякий голоморфный $\mathscr{P}_\zeta$-модуль обладает свободной резольвентой (4.7), в которой все p, p_1, ... — $\mathscr{P}''$-матрицы, для этого достаточно показать, что существует непрерывный оператор

$$\mathcal{D}^*_{p_1}(\Omega) \to [\mathcal{D}^*(\Omega)]^s / \mathcal{D}^*_p(\Omega), \tag{22.12}$$

обратный оператору p. Здесь p — произвольная $\mathcal{P}''$-матрица, а p_1 — такая $\mathcal{P}''$-матрица, что последовательность (2.7) точна.

Пусть B — произвольное ограниченное множество в $[\mathcal{D}(\Omega)]^s$. Выберем некоторую область $\omega \subset \Omega$, для которой точен правый столбец (21), настолько большую, что множество B принадлежит пространству $[\mathcal{D}(\omega)]^s$ и ограничено в нем. Из точности правого столбца (21) следует, что можно найти ограниченное множество B' в $[\mathcal{D}(\omega)]^t$ такое, что для любой функции $w \in \mathcal{D}^*_{p_1}(\omega)$, принадлежащей поляре B', можно найти функцию $u' \in [\mathcal{D}^*(\omega)]^s$, принадлежащую поляре B, такую, что $pu' = w$.

Предположим теперь, что $w \in \mathcal{D}^*_{p_1}(\Omega)$. Тогда, опираясь на то, что пространство $\mathcal{D}^*(\omega')$ M-выпукло для некоторой последовательности областей ω', стремящейся к Ω, и на следствие 1, мы можем применить рассуждения леммы 1 § 8 с тем, чтобы показать, что функцию u' можно приблизить функциями $u \in [\mathcal{D}^*(\Omega)]^s$, удовлетворяющими той же системе $pu = w$. В частности, мы можем выбрать такую функцию $u \in [\mathcal{D}^*(\Omega)]^s$, удовлетворяющую этой системе и не превосходящую двух на множестве B. Соответствие $w \to u$ определяет искомый непрерывный оператор (22). Таким образом, первое утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение теоремы 1. Пусть $z \in C^n$ и $l \in C^{2\nu}$ — переменные, двойственные переменным ζ и λ. Пусть, далее, $\{N^\mu_M \subset C^n_z,\ d^\mu\}$ — набор алгебраических многообразий и нормальных нетеровских операторов, ассоциированный с модулем M. Как мы знаем (см. 4° § 4), набор алгебраических многообразий и нормальных нетеровских операторов, ассоциированный с модулем L, состоит из многообразия N_L, определяемого системой уравнений $l' = -il''$, где $l' = (l_1, \ldots, l_\nu)$, $l'' = (l_{\nu+1}, \ldots, l_{2\nu})$, а $l = (l', l'')$, и оператора $d \equiv 1$. Согласно предложению 5 § 4 гл. 4 многообразия $N^\mu_M \times N_L \subset C^n \times C^{2\nu}$ и операторы d^λ образуют набор, ассоциированный с $\mathcal{P}$-модулем $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$. Отсюда вытекает, что линейные комбинации экспоненциальных полиномов вида

$$d^\mu(z, -i\xi)\exp(z, -i\xi)\exp(l, -i\lambda), \quad z \in N^\mu_M, \qquad l \in N_L,$$

плотны в $\Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(\square)$ (следствие 1 § 4). Поэтому из точности нижней строки диаграммы (21) в последнем члене следует, что линейные комбинации функций вида

$$d^\mu(z, -i\xi)\exp(z, -i\xi)\exp(l, -i\lambda(\zeta)) \tag{23.12}$$

плотны в $\Phi_M(\omega)$.

Предположим, что Ω есть область Рунге. Тогда каждую функцию $\exp(l, -i\lambda(\zeta))$ можно приблизить полиномами от ζ в топологии пространства $\mathscr{H}(\Omega)$. Следовательно, функции вида (23) можно приблизить экспоненциальными многочленами вида

$$d^{\mu}(z, -i\xi)\exp(z, -i\xi)h(\zeta)\in E_M, \tag{24.12}$$

где h — многочлен. Отсюда вытекает, что линейные комбинации функций вида (24) плотны в $\Phi_M(\omega)$. Так как область ω может быть выбрана сколь угодно близкой к Ω, мы тем самым показали, что линейные комбинации функций вида (24) плотны в $\Phi_M(\Omega)$. Теорема 1 доказана. ■

Докажем теперь теорему 2. Выберем некоторую возрастающую последовательность открытых кубов вида $\square_k=\Delta_k\times\nabla_k$, $k=1$, $2, \ldots$, стремящуюся к $C^{m+\nu}$. Все предыдущие рассуждения применимы к каждому из кубов $\square=\square_k$ этой последовательности.

Пусть v—произвольная функция, принадлежащая $\Phi_M(\Omega)$. Из сказанного следует, что при любом k ее можно записать в виде $v=\Lambda^*(u_k)$, где $u_k\in\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square_k)$ есть многозначная непрерывная функция v. Разность u_2-u_1 принадлежит $\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square_1)$ и аннулируется оператором Λ^*. Следовательно, из точности нижней строки (21) с $\square=\square_1$ вытекает, что ее можно представить в виде

$$u_2-u_1=F_1w_1, \quad w_1\in[\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square_1)]^{\alpha_1}.$$

Зафиксируем произвольное натуральное q. Так как область $\square_1$—выпукла, то из следствия 2 § 4 вытекает, что функцию w_1 можно записать в виде суммы $w_1'+w_1''$, где $w_1'\in\left[\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(C^{m+\nu})\right]^{\alpha_1}$, а $w_1''\in$ $\in\left[\mathscr{E}^q_{\overline{\square}_0}\right]^{\alpha_1 s}$, причем $\|w_1''\|^q_{\overline{\square}_0}<\varepsilon/2$, где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое наперед заданное число. Положим $u_2'=u_2-F_1w_1'$. Применив аналогичное рассуждение к разности u_3-u_2', мы запишем ее в виде суммы $F_1w_2'+F_1w_2''$, где $w_2'\in\left[\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(C^{m+\nu})\right]^{\alpha_1}$, а $w_2''\in\left[\mathscr{E}^q_{\overline{\square}_1}\right]^{\alpha_1 s}$, причем $\|w_2''\|^q_{\overline{\square}_1}<\varepsilon/4$. Далее положим $u_3'=u_3-F_1w_2'$ и т. д.

Неограниченно продолжая это рассуждение, мы построим последовательность функций $u_k'\in\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square_k)$, $k=1, 2, \ldots$; $u_1'=u_1$ такую, что при любом k

$$u_{k+1}'=u_k'+F_1w_k'' \quad \text{и} \quad \|w_k''\|^q_{\overline{\square}_{k-1}}<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Поэтому эта последовательность имеет предел в каждом из пространств $\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(\square_k)$ и, следовательно, имеет предел u в пространстве $\Phi_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}}(C^{m+\nu})$. Так как при любом k $\Lambda^*(u_k')=v$ в области $\Lambda^{-1}(\square_k)$, то $\Lambda^*(u)=v$.

В кубе $\square_0$

$$u = u_1 + F_1[w_1'' + w_2'' + \ldots].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, принадлежит $\left[\mathcal{E}^q_{\square_0}\right]^{a_1 s}$ и не превосходит ε по норме $\|\cdot\|^q_{\square_0}$. Так как числа $\varepsilon > 0$ и q произвольны, отсюда следует, что функция u может быть сделана сколь угодно близкой к u_1 в топологии пространства $\Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(\square_0)$. Поскольку u_1 есть непрерывная функция v, а куб $\square_0$ может быть взят сколь угодно большим, мы заключаем, что многозначное отображение

$$\Phi_M(\Omega) \ni v \to u \in \Phi_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}}(C^{m+\nu})$$

непрерывно. Так как $\Lambda^*(u) = v$, эти отображения являются обратными по отношению к оператору Λ^* в (2). ■

Комбинируя эту теорему (или точность нижней строки (21)) со следствием 1 § 4, мы получаем

Следствие 2. *Пусть Ω — область голоморфности, а $K \subset C^{m+\nu}$ — компакт. Всякая функция $u \in \mathcal{D}^*_M(\Omega)$ может быть записана в виде*

$$(u, \varphi) = \sum_\mu \int_{N^\mu_M \times C^\nu_{l''}} (d^\mu(z, -i\xi)\exp[(z, -i\xi) + (l'', \lambda(\zeta))], \varphi)\rho_\mu,$$

где ρ_μ — меры, сосредоточенные на многообразиях $N^\mu_M \times C^\nu_{l''}$, причем

$$\sum_\mu \int (|z| + |l''| + 1)^q \mathcal{I}_K(y, \operatorname{Re} l'', -\operatorname{Im} l'')|\rho_\mu| < \infty$$

с некоторым целым q. Если функция u бесконечно дифференцируема, то число q может быть сделано сколь угодно большим.

Следствие 3. *Если Ω — область голоморфности, то пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{D}^*(\Omega)$ — инъективные, а пространство $\mathcal{E}^*(\Omega)$ и пространство $\mathcal{D}(\Omega)$, наделенное дискретной топологией, — плоские $\mathcal{P}''$-модули.*

Следствие 3 доказывается аналогично следствию 4 § 8.

Глава VIII

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Понятия определенной и переопределенной системы будут введены в § 14. В §§ 14 и 15 изложен ряд результатов, связанных с этими понятиями: теоремы о возможности продолжения решений однородной системы, заданных в окрестности границы области, внутрь этой области, теорема о непрерывной зависимости решения от его значений на части границы, теоремы о продолжении гладкости и некоторые теоремы единственности.

В § 13 собраны гомологические результаты, необходимые для этой и предыдущей глав. В частности, теорема 1 § 13 устанавливает связь между размерностью модуля M и обращением в нуль модулей $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$. Этот результат объединяет два различных подхода к изучению переопределенных систем: прямой метод, непосредственно использующий свойства характеристического многообразия N (теоремы 1 и 2 § 15), и когомологический метод, использующий модули $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$ (другие теоремы § 15).

§ 13. Некоторые сведения о модулях $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$

Модули $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$ будут играть значительную роль в следующих двух параграфах. Ввиду этого мы сейчас установим некоторые общие свойства и способы вычисления этих модулей.

1°. Модули $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$ и размерность модуля M. Скажем, что конечный $\mathscr{P}$-модуль M имеет в данной точке $z \in C^n$ размерность $d = \dim_z M$, если наивысшая размерность неприводимых компонент многообразия $N(M)$, содержащих точку z, равна d.

Теорема 1. *Для того чтобы размерность модуля M в точке z была меньше $n-k$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка не принадлежала многообразиям*

$$N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})), \qquad i = 0, \ldots, k.$$

Доказательство. Случай $k = 0$ из-за его простоты мы рассмотрим отдельно. Как мы установили в 4° § 3 гл. I, модуль

$\operatorname{Ext}^0(M, \mathscr{P})$ изоморфен ядру $\mathscr{P}_p$ отображения p: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$. Как легко сообразить, если $\mathscr{P}_p \neq 0$, то $N(\mathscr{P}_p) = C^n$. Таким образом, доказываемое утверждение сводится к такому: показать, что условие $N(M) \neq C^n$ эквивалентно тому, что $\mathscr{P}_p = 0$.

С другой стороны, как мы установили в § 1 гл. IV, многообразие $N(M)$ определяется условием $\operatorname{rang} p(z) < s$. Допустим, что модуль $\mathscr{P}_p$ не пуст. Тогда существует вектор $F \in \mathscr{P}^s$, не равный нулю, такой, что $pF = 0$, следовательно, тождественно $\operatorname{rang} p(z) < s$, т. е. $N(M) = C^n$. Обратно, если $N(M) = C^n$, то $\operatorname{rang} p(z) < s$ во всем C^n. В таком случае можно найти вектор $F \in \mathscr{P}^s$, отличный от нуля, такой, что $pF = 0$. Этот вектор можно построить, например, так. Рассмотрим нормальный нетеровский оператор d^0, ассоциированный с n-мерной примарной компонентой подмодуля $p'\mathscr{P}^t \subset \mathscr{P}^s$. Поскольку d^0 — нормальный оператор, он не содержит дифференцирований, т. е. является $\mathscr{P}$-матрицей. Пусть $d_j^0 \neq 0$ — некоторая строка этой $\mathscr{P}$-матрицы, а $(d_j^0)'$ — транспонированная матрица, т. е. столбец, принадлежащий $\mathscr{P}^s$. Согласно свойству нетеровского оператора $d_j^0 p' = 0$, откуда $p(d_j^0)' = 0$, т. е. столбец $(d_j^0)'$ является искомым.

Пусть теперь $k > 0$. Установим достаточность. Пусть размерность модуля M в точке z равна $n - h$. Нам нужно показать, что $h > k$. Предположим противное: пусть $h \leqslant k$. Выберем некоторое многообразие N_0 из набора, ассоциированного с M размерности $n - h$, содержащее точку z. В C^n выберем систему координат так, чтобы многообразие N_0 было нормально расположено. В таком случае согласно определению N_0 принадлежит многообразию корней системы уравнений

$$q_1(z_1, w) = \ldots = q_h(z_h, w) = 0, \quad w = (z_{h+1}, \ldots, z_n), \tag{1.13}$$

где $q_i(z_i, w)$ — многочлен, коэффициент которого при старшей степени z_i равен единице. Мы можем считать, что $\dfrac{\partial q_i}{\partial z_i}$ не есть тождественный нуль на многообразии N_0. Через N_* обозначим пересечение N_0 и многообразий корней многочленов $\dfrac{\partial q_i}{\partial z_i}$, $i = 1, \ldots, h$.

Предположим, что точка z не принадлежит N_*. Пусть $\mathscr{O} = \mathscr{O}_z$ — кольцо функций, голоморфных в окрестности z. Покажем, что при любом $j = 2, \ldots, h$ имеет место равенство

$$q_j\mathscr{O} \cap (q_1\mathscr{O} + \ldots + q_{j-1}\mathscr{O}) = q_j(q_1\mathscr{O} + \ldots + q_{j-1}\mathscr{O}). \tag{2.13}$$

Так как по условию производные $\dfrac{\partial q_i}{\partial z_i}$ отличны от нуля в z, замена координат в окрестности точки z, совершаемая по формуле

$$z_j \to z'_j = q_j(z_j, w), \qquad j = 1, \ldots, h; \quad w \to w,$$

является регулярной. Отсюда следует, что идеал $q_1\mathcal{O} + \ldots + q_{j-1}\mathcal{O}$ в кольце $\mathcal{O}$ есть совокупность функций, обращающихся в нуль при $z'_1 = \ldots = z'_{j-1} = 0$. Поэтому, если функция вида $z'_j\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{O}$, принадлежит этому идеалу, то φ также принадлежит ему. Отсюда вытекает равенство (2).

Рассмотрим $\mathcal{O}$-модули $\mathscr{L}_j = \mathcal{O}/q_j\mathcal{O}$, $j = 1, \ldots, h$. Когомологическая размерность каждого из них равна единице. При этом из (2) в силу предложения 3 § 3 гл. I вытекает, что

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}}\left(\mathscr{L}_j, \bigotimes_1^{j-1} \mathscr{L}_i\right) = 0.$$

Учитывая эти равенства и замечание § 9, нетрудно показать индукцией по j, что когомологическая размерность модуля $\bigotimes\limits_1^{j} \mathscr{L}_i$ не превосходит j. В частности, когомологическая размерность модуля

$$\mathscr{L} = \bigotimes_1^{h} \mathscr{L}_i = \mathcal{O}/(q_1\mathcal{O} + \ldots + q_h\mathcal{O})$$

не превосходит h. Пусть

$$0 \to \mathcal{O}^{\tau_h} \to \mathcal{O}^{\tau_{h-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{\tau_1} \to \mathcal{O}^{\tau_0} \to \mathscr{L} \to 0 \tag{3.13}$$

— некоторая свободная резольвента этого $\mathcal{O}$-модуля длины h.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 & {} \arrow[r] & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, \mathscr{L}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathscr{L}^s \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \mathscr{L}^t & & \\
& 0 \arrow[u] & {} \arrow[r] & \mathcal{O}^{s\tau_0} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \mathcal{O}^{t\tau_0} \arrow[u] \arrow[r, "p_1"] & \ddots & \\
& & & \mathcal{O}^{s\tau_1} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \ddots \arrow[u] \arrow[r, "p_{h-1}"] & \mathcal{O}^{t_h\tau_{h-1}} \arrow[u] \arrow[r, "p_h"] & \mathcal{O}^{t_{h+1}\tau_{h-1}} \\
& & & & \mathcal{O}^{t_{h-1}\tau_h} \arrow[u] \arrow[r, "p_{h-1}"] & \mathcal{O}^{t_h\tau_h} \arrow[u] \arrow[r, "p_h"] & \mathcal{O}^{t_{h+1}\tau_h} \arrow[u] \\
& & & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{4.13}$$

Из точности (3) вытекает точность всех ее столбцов, начиная со второго. Перейдем к строкам. Поскольку $\mathscr{G}$ есть плоский $\mathscr{P}$-модуль, мы вправе написать цепочку изоморфизмов

$$\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})\otimes \mathscr{G} = \mathscr{P}_{p_i}/p_{i-1}\mathscr{P}^{t_{i-1}}\otimes \mathscr{G} \cong \mathscr{G}_{p_i}/p_{i-1}\mathscr{G}^{t_{i-1}} = \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{G}).$$

Сопоставляя левую и правую части, получаем

$$\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})\otimes \mathscr{G} \cong \operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{G}). \tag{5.13}$$

Так как по условию точка z не принадлежит $N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$ при $i=0, \ldots, k$, левая часть равна нулю для $i=0, \ldots, k$. Отсюда мы заключаем, что для тех же значений индекса i равна нулю и правая часть, откуда вытекает точность последовательности

$$0 \to \mathscr{G}^s \xrightarrow{p} \mathscr{G}^t \xrightarrow{p_1} \ldots \to \mathscr{G}^{t_{k-1}} \xrightarrow{p_{k-1}} \mathscr{G}^{t_k} \xrightarrow{p_k} \mathscr{G}^{t_{k+1}}. \tag{6.13}$$

Поскольку по предположению $h \leqslant k$, из ее точности следует точность всех строк (4) кроме верхней. Верхняя строка точна в силу соотношения (19.3) гл. I. Применяя теорему 1 § 2 гл. I, мы приходим к выводу, что точен левый столбец, т. е.

$$\operatorname{Hom}(M, \mathscr{L}) = 0. \tag{7.13}$$

Мы покажем сейчас, что это равенство на самом деле не имеет места, что приведет нас к противоречию с предположением $h \leqslant k$. Пусть d_0 — нормальный нетеровский оператор из набора, ассоциированного с подмодулем $p'\mathscr{P}^t \subset \mathscr{P}^s$, отвечающий фиксированному ранее многообразию N_0. Будем считать, что он построен с помощью конструкции § 3 гл. IV. В таком случае его строки получены из коэффициентов соответствующего p'-оператора умножением на некоторый полином. Как мы знаем, нулевой коэффициент p'-оператора есть функционал нулевого порядка. Поэтому соответствующая строка ∂ матрицы d_0 есть дифференциальный оператор нулевого порядка, следовательно, транспонированный столбец ∂' принадлежит $\mathscr{P}^s$.

Согласно свойству нетеровских операторов $d_0 p' = 0$ на N_0, откуда $p\partial'|_{N_0} = 0$. По предположению многообразие корней системы (1) регулярно в окрестности z. Так как оно имеет размерность $n-h$ и содержит $n-h$-мерное неприводимое многообразие N_0, оно совпадает с N_0 в окрестности z. Таким образом, вектор $p\partial'$ равен нулю на многообразии (1) в окрестности точки z, откуда $p\partial' \in q_1\mathscr{G} + \ldots + q_h\mathscr{G}$. Следовательно, вектор ∂' принадлежит ядру отображения $p\colon \mathscr{L}^s \to \mathscr{L}^t$, но сам не равен нулю как элемент $\mathscr{L}^s$, поскольку нулевой коэффициент p'-оператора не обращается в нуль на $N(M)$. Итак, ∂' есть ненулевой элемент модуля $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{L})$, что противоречит (7), откуда $h > k$.

Для завершения доказательства достаточности остается рассмотреть случай, когда $z \in N_*$. Так как многообразие N_* принадлежит неприводимому многообразию N_0, но не совпадает с ним, оно нигде не плотно в N_0. Поэтому любая окрестность точки z пересекается с $N_0 \setminus N_*$. С другой стороны, по условию точка z не принадлежит многообразиям $N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$, $i=0, \ldots, k$, следовательно, достаточна малая ее окрестность U не пересекается с этими многообразиями. Поэтому к любой точке $\zeta \in U \cap (N_0 \setminus N_*)$ применимы проведенные выше рассуждения, которые приводят к противоречию с предположением $h \leqslant k$. Тем самым достаточность доказана.

Установим теперь необходимость, т. е. покажем, что из $\dim_z M < n-k$ вытекает, что точка z не принадлежит многообразиям $N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$, $i=0, \ldots, k$. Последнее условие согласно предложению 2 § 1 гл. IV и (5) эквивалентно соотношениям

$$\mathrm{Ext}^i(M, \mathfrak{S}) = 0, \qquad i = 0, \ldots, k. \tag{8.13}$$

Рассмотрим $\mathfrak{S}$-модуль $\mathscr{M} = M \otimes \mathfrak{S}$ и установим изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}}(M, \mathfrak{S}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{S}}(\mathscr{M}, \mathfrak{S}). \tag{9.13}$$

Поскольку $\mathscr{P}$-модуль $\mathfrak{S}$ плоский, умножив резольвенту (4.7) тензорно на этот модуль, мы получим снова точную последовательность, которая, очевидно, является свободной резольвентой $\mathfrak{S}$-модуля $\mathscr{M}$. Отсюда следует, что фактормодуль $\mathfrak{S}_{p_i}/p_{i-1}\mathfrak{S}^{t_{i-1}}$, отвечающий i-му члену последовательности (6), совпадает с левой и правой частью (9). Тем самым изоморфизм (9) доказан.

Перейдем к доказательству (8). Пусть сначала $k=n$. Мы имеем $\dim_z M = -1$, т. е. точка z не принадлежит $N(M)$. В таком случае согласно предложению 2 § 1 гл. IV $\mathscr{M}=0$, откуда $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{S}}(\mathscr{M}, \mathfrak{S}) = 0$ для всех $i \geqslant 0$. Учитывая изоморфизм (9), получаем (8).

Для удобства будем считать, что z есть начало координат. Пусть теперь $k=n-1$. В этом случае $\dim_0 M \leqslant 0$, следовательно, размерность $\mathscr{M}$ как линейного пространства над полем C конечна. Доказательство соотношений (8) будем вести индукцией по этой размерности, которую обозначим через $l_0(M)$. Заметим, что в случае $l_0(M)=0$ мы имеем $\dim_0 M = -1$, следовательно, по доказанному соотношения (8) имеют место. Установим их для специального модуля M. Этот модуль имеет вид $\mathscr{P}/\mathscr{J}$, где $\mathscr{J}$ — идеал в $\mathscr{P}$, имеющий базис $z_1, \ldots, z_n$. Этот базис, очевидно, удовлетворяет условию предложения 2 этого параграфа, следовательно, $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Отсюда вытекают соотношения (8) для модуля $\mathscr{P}/\mathscr{J}$.

Пусть теперь M — произвольный $\mathscr{P}$-модуль с $\dim_0 M = 0$ и $l_0(M) \geqslant 1$. Так как начало координат принадлежит $N(M)$, можно найти элемент $F \in M$, отличный от нуля, такой, что $fF = 0$ для любого многочлена $f \in \mathscr{J}$. Пусть M_0 — подмодуль модуля M, образованный его элементами вида fF, $f \in \mathscr{P}$. Отображение $f \to fF$

определяет изоморфизм $M_0 \cong \mathcal{P}/\mathcal{J}$, поэтому для модуля M_0 соотношения (8) доказаны.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to M_0 \otimes \mathcal{O} \to M \otimes \mathcal{O} \to M/M_0 \otimes \mathcal{O} \to 0.$$

Ее члены суть конечномерные пространства над полем C, следовательно, размерность среднего члена равна сумме размерностей крайних членов, т. е. $l_0(M) = l_0(M_0) + l_0(M/M_0)$. Поскольку $M_0 \cong \mathcal{P}/\mathcal{J}$, мы имеем $l_0(M_0) = l_0(\mathcal{P}/\mathcal{J}) = 1$, откуда $l_0(M/M_0) = l_0(M) - 1$. Поэтому соотношения (8) для модуля M/M_0 установлены по предположению индукции. Таким образом, в точной последовательности

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i(M/M_0, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i(M_0, \mathcal{O}) \to \ldots$$

мы имеем $\mathrm{Ext}^i(M_0, \mathcal{O}) = \mathrm{Ext}^i(M/M_0, \mathcal{O}) = 0$ для всех $i \leqslant n-1$. Отсюда мы получаем $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{O}) = 0$ для всех $i \leqslant n-1$. Тем самым в случае $k = n-1$ соотношения (8) проверены.

В общем случае доказательство (8) мы будем вести индукцией по числу $\dim_0 M$, предполагая, что $\dim_0 M > 0$ (в случае $\dim_0 M \leqslant 0$ соотношения (8) уже доказаны). Пусть

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l \tag{10.13}$$

— приведенное примарное представление подмодуля $\mathfrak{p} = p'\mathcal{P}^t \subset \mathcal{P}^s$. Через $\mathfrak{p}^0$ обозначим пересечение всех нульмерных модулей $\mathfrak{p}_\lambda$, а через $\mathfrak{p}'$ — пересечение остальных модулей $\mathfrak{p}_\lambda$. Положим $M' = \mathcal{P}^s/\mathfrak{p}'$ и рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{p}'/\mathfrak{p} \xrightarrow{i} M \to M' \to 0,$$

в которой i — вложение. Из нее возникает точная последовательность для функтора Ext

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i(M', \mathcal{O}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathcal{O}) \to \ldots \tag{11.13}$$

Из очевидного включения $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) \supset \mathfrak{r}(\mathfrak{p}^0)$ вытекает, что модуль $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$ нульмерный *). Поэтому из (8) и точности (11) следуют изоморфизмы $\mathrm{Ext}^i(M', \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{O})$, $i \leqslant n-1$. Таким образом, чтобы проверить соотношения (8) для модуля M, достаточно проверить их для модуля M'. Из построения следует, что в приведенном примарном представлении подмодуля $\mathfrak{p}' \subset \mathcal{P}^s$ отсутствуют нульмерные компоненты, следовательно, не ограничивая общности, мы можем предположить, что в исходном представлении (10) отсутствуют нульмерные компоненты.

В C^n выберем систему координат таким образом, чтобы все многообразия $N(\mathfrak{p}_\lambda)$ были нормально расположены. Поскольку размерность

*) Здесь мы предполагаем, что $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$.

каждого из них больше нуля, то его пересечение с любым подпространством вида $z_n=\zeta$ есть многообразие на единицу меньшей размерности. Поэтому из доказательства теоремы 4 § 9 следует, что

$$\mathrm{Tor}_i(M, L_\zeta)\equiv 0, \qquad i\geqslant 1, \quad \text{где} \quad L_\zeta=\mathscr{P}/(z_n-\zeta)\mathscr{P}. \tag{12.13}$$

Пусть $\mathscr{P}'$ — кольцо многочленов, а $\mathscr{O}'$ — кольцо голоморфных в нуле функций от переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$. В $\mathscr{O}'$ мы рассмотрим структуру $\mathscr{P}'$-модуля. Рассмотрим $\mathscr{P}$-модуль $M\otimes L_\zeta$. Из доказательства леммы 2 § 1 гл. IV видно, что он изоморфен $\mathscr{P}'$-модулю M_ζ, являющемуся сужением модуля M на подпространстве $z_n=\zeta$, а ассоциированное с ним многообразие равно пересечению многообразия $N(M)$ с этим подпространством. Отсюда следует, что $\dim_0 M_0 = \dim_0 M - 1$. Поэтому из предположения индукции

$$\mathrm{Ext}^i(M_0, \mathscr{O}')=0, \qquad i\leqslant k. \tag{13.13}$$

Здесь и дальше для сокращения мы пишем $\mathrm{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{O}')$ вместо $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}'}(M_\zeta, \mathscr{O}')$. Из точности (4.7) и соотношений (12) следует точность последовательности

$$\ldots \xrightarrow{p_1'} L_\zeta^t \xrightarrow{p'} L_\zeta^s \to M\otimes L_\zeta \to 0.$$

Поскольку $L_\zeta\cong\mathscr{P}'$, а $M\otimes L_\zeta\cong M_\zeta$, эту последовательность можно переписать так:

$$\ldots \xrightarrow{p_{1,\zeta}'} \mathscr{P}'^t \xrightarrow{p_\zeta'} \mathscr{P}'^s \to M_\zeta \to 0,$$

где $p_\zeta, p_{1,\zeta}, \ldots$ — сужения матриц $p, p_1, \ldots$ на подпространстве $z_n=\zeta$. Таким образом, мы получили некоторую свободную резольвенту для $\mathscr{P}'$-модуля M_ζ. Поэтому из соотношений (13) вытекает точность последовательности

$$\mathscr{O}'^{t_{i-1}} \xrightarrow{p_{i-1,0}} \mathscr{O}'^{t_i} \xrightarrow{p_{i,0}} \mathscr{O}'^{t_{i+1}}, \qquad i=0, \ldots, k \quad (p_0=p,\ p_{-1}=0). \tag{14.13}$$

Нам остается извлечь отсюда точность другой последовательности

$$\mathscr{O}^{t_{i-1}} \xrightarrow{p_{i-1}} \mathscr{O}^{t_i} \xrightarrow{p_i} \mathscr{O}^{t_{i+1}}, \qquad i=0, \ldots, k. \tag{15.13}$$

Пусть F — произвольный элемент ядра отображения p_i в (15). Из точности (14) следует, что $F|_{z_n=0}=p_{i-1}g$, где $g\in\mathscr{O}'^{t_{i-1}}$. Функцию g рассмотрим как функцию всех аргументов z, постоянную по z_n. Разность $F-p_{i-1}g$ обращается в нуль при $z_n=0$, следовательно, ее можно записать в виде z_nF', где $F'\in\mathscr{O}^{t_i}$, т. е. $F\in p_{i-1}\mathscr{O}^{t_{i-1}}+z_n\mathscr{O}^{t_i}$. Из $p_iz_nF'=0$ вытекает, что $p_iF'=0$, следовательно, функцию F' можно записать в виде $p_{i-1}g'+z_nF''$, где $g\in\mathfrak{G}^{t_{i-1}}$, $F''\in\mathfrak{G}^{t_i}$, следовательно, $F\in p_{i-1}\mathfrak{G}^{t_{i-1}}+z_n^2\mathfrak{G}^{t_i}$ и т. д. Таким образом, мы установили, что $F\in p_{i-1}\mathfrak{G}^{t_{i-1}}+z_n^k\mathfrak{G}^{t_i}$ при любом $k=1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что p_{i-1}-оператор $\mathscr{D}$ обращается в нуль на F, поэтому $F\in p_{i-1}\mathfrak{G}^{t_{i-1}}$. ■

2°. Следствия.

Следствие 1. *Для того чтобы* $\dim M<n-k$, *где* $0\leqslant k\leqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства*

$$\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})=0, \qquad i=0, \ldots, k.$$

Доказательство. Конечный $\mathscr{P}$-модуль L равен нулю тогда и только тогда, когда $N(L)=\phi$. С другой стороны, для того чтобы размерность алгебраического многообразия N была меньше $n-k$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке z $\dim_z N<n-k$. Комбинируя эти замечания с теоремой 1, мы получаем искомый результат. ■

Следствие 2. *Для любого конечного* $\mathscr{P}$*-модуля* M

$$N(M)=\bigcup_{i=0}^{n} N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})).$$

Доказательство. Пусть точка $z\in C^n$ не принадлежит левой части. Тогда размерность $N(M)$ в этой точке равна $-1<n-n$. Согласно теореме 1 эта точка не принадлежит ни одному из многообразий $N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$, $i=0, \ldots, n$, и, следовательно, не принадлежит правой части. Обратно, пусть точка z не принадлежит правой части. В таком случае размерность $N(M)$ в этой точке равна -1, т. е. z не принадлежит $N(M)$. ■

3°. Размерность модулей $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})$.

Теорема 2. *Для любого конечного* $\mathscr{P}$*-модуля* M

$$\dim\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})\leqslant n-i, \qquad i=0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Вернемся к обозначениям доказательства теоремы 1. Модуль M представим в виде $\mathscr{P}^s/\mathfrak{p}$, напишем приведенное примарное представление (10) подмодуля $\mathfrak{p}\subset\mathscr{P}^s$ и рассмотрим модуль $\mathfrak{p}'$, равный пересечению всех ненульмерных примарных компонент разложения (10). Положив $M'=\mathscr{P}^s/\mathfrak{p}'$, заменим в последовательности (11) $\mathfrak{G}$ на $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}\ldots\to\operatorname{Ext}^{i-1}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P})\to\operatorname{Ext}^i(M', \mathscr{P})\to\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})\to\\ \to\operatorname{Ext}^i(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P})\to\ldots\end{aligned}\tag{16.13}$$

Так как модуль $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$ нульмерный, то в силу следствия 1 $\operatorname{Ext}^i(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P})=0$ для всех $i\leqslant n-1$. Поэтому из (16) вытекают изоморфизмы

$$\operatorname{Ext}^i(M', \mathscr{P})\cong\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}), \qquad i\leqslant n-1,$$

и точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}^n(M', \mathscr{P}) \to \operatorname{Ext}^n(M, \mathscr{P}) \to \operatorname{Ext}^n(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P}) \to 0.$$

Из ее точности следует равенство

$$N(\operatorname{Ext}^n(M, \mathscr{P})) = N(\operatorname{Ext}^n(M', \mathscr{P})) \cup N(\operatorname{Ext}^n(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P})).$$

Согласно следствиям 1 и 2 многообразия $N(\operatorname{Ext}^n(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P}))$ и $N(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$ совпадают. Так как модуль $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$ нульмерный, отсюда следует, что $N(\operatorname{Ext}^n(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}, \mathscr{P}))$ — нульмерное многообразие.

Из всего сказанного вытекает, что если теорема верна для модуля M', то она верна и для модуля M. Поэтому мы можем предполагать, что в представлении (10) отсутствуют нульмерные компоненты.

Доказательство теоремы мы проведем индукцией по числу n. Пусть $\mathscr{O}'$ — кольцо функций от переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$, голоморфных в окрестности некоторой произвольной точки $z' \in C^{n-1}$, а $\mathscr{O}$ — кольцо функций от переменных $z_1, \ldots, z_n$, голоморфных в окрестности точки $(z', \zeta) \in C^n$. Эти кольца мы будем рассматривать как модули соответственно над $\mathscr{P}'$ и $\mathscr{P}$. Пусть точка z' не принадлежит ассоциированному с $\operatorname{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{P}')$ многообразию. Тогда $\operatorname{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{O}')=0$. Поскольку в (10) отсутствуют нульмерные компоненты, отсюда вытекает точность последовательности (15) (см. доказательство теоремы 1), что эквивалентно равенству $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{O}) = 0$. Это равенство означает, что точка (z', ζ) не принадлежит многообразию, ассоциированному с $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})$. Таким образом, мы установили импликацию

$$z' \notin N(\operatorname{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{P}')) \Longrightarrow (z', \zeta) \notin N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})),$$

откуда

$$N(\operatorname{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{P}')) \supset N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})) \cap \{z_n = \zeta\}. \qquad (17.13)$$

Как следует из предположения индукции, при любом $\zeta \in C^1$ размерность многообразия $N(\operatorname{Ext}^i(M_\zeta, \mathscr{P}'))$ не превосходит $n-1-i$. Из (17) следует, что размерность многообразия $N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$ не превосходит $n-i$. ■

Результат, который мы сейчас установим, уточняет следствие 2.

Следствие 3. *Для любого k, $0 \leqslant k \leqslant n$, многообразие $\bigcup_{i \leqslant k} N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$ совпадает с объединением всех неприводимых компонент многообразия $N(M)$, размерность которых не меньше $n-k$.*

Доказательство. Пусть N^λ, $\lambda=0, \ldots, l$, — набор многообразий, ассоциированный с M. Доказываемое утверждение эквивалентно равенству

$$\bigcup_{\dim N^\lambda \geqslant n-k} N^\lambda = \bigcup_{i \leqslant k} N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})).$$

Установим это равенство. Включение $\subset$ вытекает из следствия 2, поскольку объединение всех многообразий N^λ есть $N(M)$, а многообразия $N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$ с $i>k$ имеют размерность меньше $n-k$.

Докажем включение $\supset$. Пусть $M \cong \mathscr{P}^s/\mathfrak{p}$, а (10) есть приведенное примарное представление $\mathfrak{p}$. Через $\breve{\mathfrak{p}}$ обозначим пересечение всех примарных компонент этого представления, размерности которых не меньше $n-k$, а через $\hat{\mathfrak{p}}$ — пересечение остальных компонент. Таким образом, мы имеем точную последовательность

$$0 \to \breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \to M \to \breve{M} \to 0, \qquad \breve{M}=\mathscr{P}^s/\breve{\mathfrak{p}},$$

из которой возникает точная последовательность

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{i-1}(\breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}, \mathscr{P}) \to \mathrm{Ext}^i(\breve{M}, \mathscr{P}) \to \mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^i(\breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}, \mathscr{P}) \to \ldots \tag{18.13}$$

Так как $\mathfrak{p}'=\breve{\mathfrak{p}} \cap \hat{\mathfrak{p}}$, то $\mathfrak{r}(\breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}) \supset \mathfrak{r}(\hat{\mathfrak{p}})$, следовательно, размерность модуля $\breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ меньше $n-k$. Поэтому из следствия 1 $\mathrm{Ext}^i(\breve{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}, \mathscr{P})=0$, $i=0, \ldots, k$. Учитывая эти равенства в (18), получаем изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^i(\breve{M}, \mathscr{P}) \cong \mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}), \qquad i=0, \ldots, k.$$

Комбинируя этот факт со следствием 2, получаем искомое включение:

$$\bigcup_{\dim N^\lambda \geqslant n-k} N^\lambda = N(\breve{M}) \supset \bigcup_{i \leqslant k} N\left(\mathrm{Ext}^i(\breve{M}, \mathscr{P})\right) = \\ = \bigcup_{i \leqslant k} N(\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})). \quad \blacksquare$$

4°. **Модули $E_l(M)$.** В этом пункте мы установим эффективный критерий того, что данный модуль M допускает включение в точную последовательность вида (10.10). Этот критерий формулируется в терминах модулей $E_l(M)$, которые мы сейчас определим. Для данного конечного $\mathscr{P}$-модуля M рассмотрим каноническое отображение

$$j_M\colon M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}), \mathscr{P})$$

в его «второй сопряженный» модуль. Это отображение строится так: элементу $f \in M$ относится отображение $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) \to \mathscr{P}$, переводящее гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathscr{P})$ в его значение $\varphi(f)$ на этом элементе. Положим

$$E_0(M) = \mathrm{Ker}\, j_M, \qquad E_1(M) = \mathrm{Coker}\, j_M$$

и, далее,

$$E_i(M) = \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}), \mathscr{P}), \qquad i = 2, 3, \ldots$$

Установим правила для вычисления этих модулей. Модуль $E_0(M)$ допускает совсем простое описание: он равен n-мерной примарной компоненте нулевого подмодуля модуля M *). Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

Предложение 1. *Пусть* $M \cong \mathrm{Coker}\, p'$. *Тогда*

$$E_i(M) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathrm{Coker}\, p, \mathscr{P})\ {}^{**}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{19.13}$$

Доказательство. На протяжении всего этого пункта мы будем применять следующие сокращения:

$$H(M) = \mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}), \quad E^i(M) = \mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}), \qquad i \geqslant 0.$$

Пусть

$$\ldots \xrightarrow{q_3} \mathscr{P}^{s_3} \xrightarrow{q_2} \mathscr{P}^{s_2} \xrightarrow{q_1} \mathscr{P}^{s} \xrightarrow{p} \mathscr{P}^{t} \to \mathrm{Coker}\, p \to 0$$

— свободная резольвента модуля $\mathrm{Coker}\, p$. Поскольку $H(M) \cong \cong \mathrm{Ker}\,\{p\colon \mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t\}$, отображения $\ldots q_3, q_2, q_1$ этой последовательности образуют свободную резольвенту модуля $H(M)$. Применив к этим резольвентам функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathscr{P})$, мы получим две последовательности

$$0 \to H(\mathrm{Coker}\, p) \to \mathscr{P}^t \xrightarrow{p'} \mathscr{P}^s \xrightarrow{q_1'} \mathscr{P}^{s_2} \xrightarrow{q_2'} \mathscr{P}^{s_3} \xrightarrow{q_3'} \ldots,$$
$$0 \to H(H(M)) \xrightarrow{q_1^*} \mathscr{P}^{s_2} \xrightarrow{q_2'} \mathscr{P}^{s_3} \xrightarrow{q_3'} \ldots, \tag{20.13}$$

также совпадающие, начиная с члена $\mathscr{P}^{s_2}$ $\left(q_1^* \text{ — отображение, ассоциированное с } q_1'\right)$. Отсюда вытекают изоморфизмы $E^{i+2}(\mathrm{Coker}\, p) \cong \cong E^i(H(M))$, $i \geqslant 1$. Тем самым соотношение (19) доказано для всех $i \geqslant 2$.

---

*) В таком виде он нам встретился в § 8 при описании виртуально гипоэллиптических операторов.

**) Модуль $\mathrm{Coker}\, p$, конечно, не является функцией одного лишь модуля M, он зависит также от выбора представления $M \cong \mathrm{Coker}\, p'$. Однако из сформулированного утверждения следует, что модули $\mathrm{Ext}^{i+1}(\mathrm{Coker}\, p, \mathscr{P})$ являются функциями M.

Далее рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & E_1(M) \arrow[u] \arrow[r, "\check{q}_1^*"] & E^2(\operatorname{Coker} p) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & H(H(M)) \arrow[u] \arrow[r, "q_1^*"] & \operatorname{Ker} q_2' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E^1(\operatorname{Coker} p) \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u, "j_M"] \arrow[r, "q_1'"] & \operatorname{Im} q_1' \arrow[u, "i"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & E_0(M) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Средний квадрат ее коммутативен, т. е. $q_1^* j_M = iq_1'$, где i — вложение. Вследствие этого определено ассоциированное с q_1^* отображение $\check{q}_1^*$. Таким образом, эта диаграмма коммутативна, причем вторая и третья строки, а также второй и третий столбцы точны. Дважды применяя теорему 1 § 2 гл. I — сначала к нижнему левому углу, а затем к верхнему правому, — мы установим изоморфизм $E_0(M) \cong E^1(\operatorname{Coker} p)$ и докажем, что $\check{q}_1^*$ также является изоморфизмом. ■

Критерий, о котором шла речь выше, формулируется так.

Теорема 3. *Для того чтобы модуль M мог быть включен в точную последовательность вида*

$$0 \to M \xrightarrow{q_1} \mathcal{P}^{s_2} \xrightarrow{q_2} \mathcal{P}^{s_3} \xrightarrow{q_3} \ldots \xrightarrow{q_{k-1}} \mathcal{P}^{s_k} \xrightarrow{q_k} \mathcal{P}^{s_{k+1}}, \qquad (21.13)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_i(M) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1. \qquad (22.13)$$

Согласно предложению 1 это необходимое и достаточное условие можно формулировать так: $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Coker} p, \mathcal{P}) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены равенства $E_i(M) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$. Предположим сначала, что $k = 1$. Тогда по определению $E_0(M)$ отображение j_M: $M \to H(H(M))$ есть мономорфизм. Отображение q_1^* в (20) также является мономорфизмом (точность (20) в первых двух членах следует из общего свойства функтора Hom). Поэтому композиция этих отображений $q_1^* j_M$: $M \to \mathcal{P}^{s_2}$ также является мономорфизмом, ч. и т. д.

Пусть теперь $k > 1$. Тогда последовательность (20) точна во всех членах, кончая членом $\mathscr{P}^{s_k}$ и $H(H(M)) \cong M$, откуда следует точность (21).

Необходимость. Случаи $k = 1$, 2. Предположим сначала, что в последовательности (21) $k = 1$. Положим $\Pi = \mathscr{P}^{s_2}$, $L = \operatorname{Coker} q_1$ и рассмотрим точную последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{q_1} \Pi \xrightarrow{\alpha} L \to 0,$$

в которой α — каноническое отображение. Применив к ней функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathscr{P})$, мы получим точную последовательность

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H(L) \xrightarrow{\alpha^*} \Pi \xrightarrow{q_1^*} H(M) \longrightarrow E^1(L) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \\ \longrightarrow E^l(L) \longrightarrow 0 \longrightarrow E^l(M) \longrightarrow E^{l+1}(L) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \end{gathered} \tag{23.13}$$

(где для любого отображения β мы полагаем $\beta^* = \operatorname{Hom}(\beta, \mathscr{P})$). Применив еще раз функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathscr{P})$ к первым трем членам этой последовательности, мы придем к коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H(H(M)) \arrow[r, "q_1^{**}"] & \Pi \arrow[r, "\alpha^{**}"] & H(H(L)) & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "j_M"] \arrow[r, "q_1"] & \Pi \arrow[u, equal] \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[u, "j_L"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{24.13}$$

Из ее коммутативности $q_1 = q_1^{**} j_M$. Поскольку q_1 есть мономорфизм то j_M также есть мономорфизм, т. е. $E_0(M) = 0$, ч. и т. д.

Предположим теперь, что $k = 2$. Тогда по доказанному j_L есть мономорфизм. Отсюда, поскольку первая строка (24) полуточна, мы имеем

$$\operatorname{Im} q_1^{**} \subset \operatorname{Ker} \alpha^{**} = \operatorname{Ker} j_L \alpha = \operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Im} q_1,$$

откуда $\operatorname{Im} q_1^{**} \subset \operatorname{Im} q_1$. Так как q_1 устанавливает изоморфизм $M \cong \operatorname{Im} q_1$, а q_1^{**} — изоморфизм $H(H(M)) \cong \operatorname{Im} q_1^{**}$ — последнее утверждение мы докажем ниже, — мы заключаем отсюда, что j_M есть эпиморфизм, т. е. $E_1(M) = 0$.

Вернемся к последовательности (23). Положим $Q = \operatorname{Im} q_1^*$. Мы имеем две точные последовательности

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H(L) \xrightarrow{\alpha^*} \Pi \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow Q \longrightarrow H(M) \longrightarrow E^1(L) \longrightarrow 0, \end{gathered}$$

откуда следует точность двух других последовательностей

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H(Q) \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\alpha^{**}} H(H(L)) \longrightarrow E^1(Q) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow E^i(Q) \longrightarrow 0 \longrightarrow E^i(H(L)) \longrightarrow E^{i+1}(Q) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots, \end{gathered} \tag{25.13}$$

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H(E^1(L)) \longrightarrow H(H(M)) \longrightarrow H(Q) \longrightarrow E^1(E^1(L)) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow E^i(E^1(L)) \longrightarrow E^i(H(M)) \longrightarrow E^i(Q) \longrightarrow E^{i+1}(E^1(L)) \longrightarrow \ldots \end{gathered} \tag{26.13}$$

Из теоремы 2 $\dim E^1(L) < n$, поэтому из теоремы 1 $H(E^1(L)) = 0$. Таким образом, отображение $H(H(M)) \to H(Q)$ в (26) есть мономорфизм. Отображение $H(Q) \to \Pi$ в (25) также является мономорфизмом. Следовательно, композиция этих отображений, равная q_1^{**}, также является мономорфизмом, откуда $H(H(M)) \cong \operatorname{Im} q_1^{**}$, ч. и т. д.

Общий случай. Соотношения (22) мы докажем вместе с неравенствами

$$\dim E^i(M) \leqslant n - i - k, \qquad i \geqslant 1, \tag{27.13}$$

при помощи индукции по числу k. При $k = 0$ эти неравенства вытекают из теоремы 2. Если $k \geqslant 1$, то мы можем предполагать, что для $k - 1$ неравенства (27) доказаны. Поскольку модуль L допускает включение в точную последовательность вида (21) длины $k - 1$, то из этого предположения следует, что для любого $i \geqslant 1$ $\dim E^i(L) \leqslant n - i - k + 1$. Из точности (23) вытекают изоморфизмы $E^i(M) \cong E^{i+1}(L)$, $i \geqslant 1$, которые в сочетании с неравенствами для $\dim E^i(L)$ влекут (27). Тем самым неравенства (27) установлены.

Докажем теперь (22) индукцией по числу $k > 2$. Подставив в (27) L вместо M, мы получим, в частности, $\dim E^1(L) \leqslant n - k$, откуда в силу теоремы 1 $E^i(E^1(L)) = 0$, $i = 1, \ldots, k - 1$. Учитывая эти соотношения в (26), мы получаем изоморфизмы

$$E_i(M) = E^{i-1}(H(M)) \cong E^{i-1}(Q), \qquad i = 2, \ldots, k - 1. \tag{28.13}$$

Так как по предположению индукции $E_i(L) = 0$, $i = 0, \ldots, k - 2$, то $H(H(L)) \cong L$ и, следовательно, отображение α^{**} в (25) совпадает с α и поэтому является эпиморфизмом. Отсюда $E^1(Q) = 0$. С другой стороны, если $k > 3$, то из точности (25) мы имеем $E^{i+1}(Q) \cong E^i(H(L)) = 0$ для $i = 1, \ldots, k - 3$. Тем самым мы установили, что правые части в (28) равны нулю. Следовательно, равны нулю и левые части, что приводит нас к (22). ■

Следствие 4. *Для того чтобы модуль M можно было вложить в точную последовательность* (21) *длины k, достаточно, чтобы его можно было представить в виде $\mathcal{P}^s/p'\mathcal{P}^t$, где матрица p удовлетворяет условию* $\dim\{z : \operatorname{rang} p(z) < t\} < n - k$.

Доказательство. Из сформулированного условия в силу следствия 1 вытекают равенства $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Coker}\, p, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, k$. Учитывая предложение 1, получаем $E_l(M) = 0$, $l = 0, \ldots, k-1$, откуда согласно теореме 3 следует искомый результат. ■

5°. Вычисление модулей $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})$ в некоторых частных случаях.

Предложение 2. *Пусть $M = \mathrm{Coker}\, p'$, где p' есть строка $(p_1, \ldots, p_t)$, в которой многочлены p_τ удовлетворяют соотношениям*

$$p_\tau \mathscr{P} \cap (p_1\mathscr{P} + \ldots + p_{\tau-1}\mathscr{P}) = \\ = p_\tau(p_1\mathscr{P} + \ldots + p_{\tau-1}\mathscr{P}), \quad p_\tau \neq 0, \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{29.13}$$

Тогда

I. *Модуль M допускает свободную резольвенту вида*

$$0 \to \mathscr{P} \xrightarrow{\delta_0(p)} \mathscr{P}^t \xrightarrow{\delta_1(p)} \ldots \longrightarrow \mathscr{P}^{\binom{t}{k}} \xrightarrow{\delta_k(p)} \mathscr{P}^{\binom{t}{k+1}} \to \ldots \\ \ldots \to \mathscr{P}^t \xrightarrow{\delta_{t-1}(p)} \mathscr{P} \to M \to 0, \tag{30.13}$$

в которой отображение $\delta_k(p)$, $k = 0, \ldots, t-1$, действует по следующему правилу. Модуль $\mathscr{P}^{\binom{t}{k}}$ интерпретируется как совокупность всех функций $f_{i_1, \ldots, i_k}$ со значениями в $\mathscr{P}$, определенных на множестве всех наборов индексов $i_1, \ldots, i_k$, принимающих значения от 1 до t, и кососимметрических относительно этих индексов. В таком случае действие отображения $\delta_k(p)$ записывается так:

$$\delta_k(p)\colon f_{i_1, \ldots, i_k} \to g_{i_0, \ldots, i_k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j p_{i_j} f_{i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_k}.$$

В частности, $\delta_0(p) = p$, $\delta_{t-1}(p) = p'$.

II. *Имеют место соотношения*

$$\mathrm{Ext}^l(M, \mathscr{P}) = 0, \quad l \neq t, \quad \mathrm{Ext}^t(M, \mathscr{P}) \cong M. \tag{31.13}$$

Заметим, что условие (29) эквивалентно такому: многообразие $N(M)$ общих корней многочленов $p_1, \ldots, p_t$ имеет размерность не выше $n - t$. Действительно, если условие (29) выполнено, то из (31) и следствия 1 вытекает, что $\dim N(M) = n - t$.

Докажем обратное утверждение. Для каждого $\tau \leqslant t$ рассмотрим идеал $\mathscr{I}_\tau = p_1\mathscr{P} + \ldots + p_\tau\mathscr{P}$, $\mathscr{I}_0 = 0$. Пусть $\dim \mathscr{I}_t \leqslant n - t$. При переходе от $\mathscr{I}_{\tau-1}$ к $\mathscr{I}_\tau$ размерность идеала уменьшается не больше, чем на единицу. Так как $\dim \mathscr{I}_0 = n$, отсюда следует, что при любом τ $\dim \mathscr{I}_\tau = n - \tau$. Поэтому в силу теоремы Мэколи (см., например, Зарисский и Самюэль [1], т. II, гл. VII, § 8, теорема 26) идеал $\mathscr{I}_{\tau-1}$ несмешанный. Поскольку размерность $\mathscr{I}_\tau$ строго меньше размерности $\mathscr{I}_{\tau-1}$, многочлен p_τ не обращается тождественно в нуль ни на одном многообразии, ассоциированном с $\mathscr{I}_{\tau-1}$. Поэтому из $p_\tau f \in \mathscr{I}_{\tau-1}$, $f \in \mathscr{P}$ следует $f \in \mathscr{I}_{\tau-1}$, что влечет (29).

Доказательство. Установим сначала первое утверждение. В случае $t = 1$ оно очевидно, так как последовательность имеет вид

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{p_1} \mathcal{P} \to M \to 0. \tag{32.13}$$

Предположим, что это утверждение доказано для любого столбца p, имеющего $t - 1$ элемент, и докажем его для столбца p из t элементов. Через $\hat{p}$ обозначим укороченный столбец, т. е. такой столбец, что $\hat{p}' = (p_1, \ldots, p_{t-1})$. Положим $\hat{M} = \operatorname{Coker} \hat{p}'$ и $L = \operatorname{Coker} p_t$. Мы имеем $M \cong \hat{M} \otimes L$, причем из соотношения (29) с $\tau = t$ в силу предложения 3 § 3 гл. I следует, что $\operatorname{Tor}_i(\hat{M}, L) = 0$, $i \geqslant 1$. Поэтому мы можем применить к паре модулей $\hat{M}$, L рассуждения 4° § 9. Заметим, что из соотношений (29) с $\tau < t$ следует, что модуль $\hat{M}$ удовлетворяет условию нашего предложения с $t - 1$ вместо t. Поэтому согласно предположению индукции этот модуль допускает свободную резольвенту, аналогичную (30), в которой фигурируют соответствующие отображения $\delta_k(\hat{p})$. С другой стороны, модуль L имеет свободную резольвенту вида (32) с p_t вместо p_1. Следовательно, диаграмма (21.9), построенная для модулей $\hat{M}$ и L, имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k-1}} \arrow[u] \arrow[r, "\delta_{k-1}(\hat{p})"] & \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k}} \arrow[u] \arrow[r, "\delta_k(\hat{p})"] & \cdots & \\
\cdots & {} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k}} \arrow[u, "p_t"] \arrow[r, "\delta_k(\hat{p})"] & \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k+1}} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Далее, исходя из диаграммы (21.9), мы построили в § 9 свободную резольвенту (22.9) модуля $M \otimes L$. В нашем случае эта резольвента выглядит так:

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{r_0} \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{t-1} \xrightarrow{r_1} \ldots \to \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k-1}} \oplus \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k}} \xrightarrow{r_k}$$

$$\xrightarrow{r_k} \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k}} \oplus \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k+1}} \to \ldots \to \mathcal{P}^{t-1} \oplus \mathcal{P} \xrightarrow{r_{t-1}} \mathcal{P} \to \hat{M} \otimes L \to 0,$$

причем отображение r_k с точностью до знака действует по формуле

$$r_k\colon (g, h) \to (\delta_{k-1}(\hat{p})\, g + (-1)^k p_t h,\ \delta_k(\hat{p})\, h),$$

$$g \in \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k-1}}, \quad h \in \mathcal{P}^{\binom{t-1}{k}}.$$

Таким образом, остается показать, что это отображение изоморфно $\delta_k(p)$.

Для этого мы поступим так: элементы модуля $\mathscr{P}^{\binom{t}{k}}$ будем записывать в виде «дифференциальных» форм k-го порядка

$$f = \sum f_{i_1, \ldots, i_k} dp_{i_1} \wedge \ldots \wedge dp_{i_k},$$

образованных с помощью формальных дифференциалов $dp_1, \ldots, dp_t$. Операцию $\wedge$ внешнего произведения подчиним обычным правилам (см. § 3 гл. III). В таком случае действие отображения $\delta_k(p)$ можно записать так:

$$f \to \sum_1^t p_j dp_j \wedge f$$

(см. выкладку в 2° § 3 гл. III, проведенную в аналогичной ситуации). Модуль $\mathscr{P}^{\binom{t-1}{k}}$ аналогичным образом мы интерпретируем как совокупность «дифференциальных» форм, образованных дифференциалами $dp_1, \ldots, dp_{t-1}$. Очевидно, что всякая форма $f \in \mathscr{P}^{\binom{t}{k}}$ однозначно записывается в виде $f = g \wedge dp_t + h$, где формы g и h содержат лишь дифференциалы $dp_1, \ldots, dp_{t-1}$, т. е. $g \in \mathscr{P}^{\binom{t-1}{k-1}}$, а $h \in \mathscr{P}^{\binom{t-1}{k}}$. Соответствие α: $f \to (g, h)$ определяет изоморфизм

$$\mathscr{P}^{\binom{t}{k}} \cong \mathscr{P}^{\binom{t-1}{k-1}} \oplus \mathscr{P}^{\binom{t-1}{k}}.$$

Следовательно, отображение r_k оказывается изоморфным некоторому отображению $\mathscr{P}^{\binom{t}{k}} \to \mathscr{P}^{\binom{t}{k+1}}$. Покажем, что последнее совпадает с $\delta_k(p)$. Действительно, построенное отображение действует так:

$$f \xrightarrow{\alpha} (g, h) \xrightarrow{r_k} (\delta_{k-1}(\hat{p}) g + (-1)^k p_t h, \ \delta_k(\hat{p}) h) =$$
$$= \left(\sum_1^{t-1} p_j dp_j \wedge g + (-1)^k p_t h, \ \sum_1^{t-1} p_j dp_j \wedge h \right) \xrightarrow{\alpha^{-1}}$$
$$\xrightarrow{\alpha^{-1}} \sum_1^{t-1} p_j dp_j \wedge g \wedge dp_t + p_t dp_t \wedge h +$$
$$+ \sum_1^{t-1} p_j dp_j \wedge h = \sum_1^t p_j dp_j \wedge f,$$

т. е. переводит f в $\delta_k(p) f$, ч. и т. д. Тем самым первое утверждение предложения доказано.

Докажем второе утверждение. Каждой форме $g \in \mathscr{P}^{\binom{t}{t-k}}$ поставим в соответствие $\mathscr{P}$-отображение

$$\mathscr{P}^{\binom{t}{k}} \ni f \to g \wedge f \in \mathscr{P}.$$

Как легко сообразить, это соответствие устанавливает изоморфизм $\mathrm{Hom}\left(\mathscr{P}^{\binom{t}{k}}, \mathscr{P}\right) \cong \mathscr{P}^{\binom{t}{t-k}}$. Следовательно, «сопряженное» отображение $\delta'_k(p) = \mathrm{Hom}(\delta_k(p), \mathscr{P})$ действует из $\mathscr{P}^{\binom{t}{t-k-1}}$ в $\mathscr{P}^{\binom{t}{t-k}}$. Найдем это «сопряженное» отображение. По определению оно переводит форму $g \in \mathscr{P}^{\binom{t}{t-k-1}}$ в форму, которая по описанному выше правилу задает отображение

$$\mathscr{P}^{\binom{t}{k}} \ni f \to \sum p_j dp_j \wedge f \to g \wedge \sum p_j dp_j \wedge f \in \mathscr{P},$$

т. е. в форму $g \wedge \sum p_j dp_j$. Отсюда $\delta'_k(p) = (-1)^{t-k-1}\delta_{t-k-1}(p)$. Из сказанного следует, что, применив функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathscr{P})$ к последовательности (30), мы получим последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) \to \mathscr{P} \xrightarrow{\pm\delta_0(p)} \mathscr{P}^t \xrightarrow{\pm\delta_1(p)} \ldots$$
$$\ldots \to \mathscr{P}^t \xrightarrow{\pm\delta_{t-1}(p)} \mathscr{P} \to 0, \quad (33.13)$$

которая с точностью до знаков совпадает с (30), исключая первый и последний члены. Поэтому последовательность (33) точна во всех членах, кроме последнего, причем ядро $\delta_0(p)$ равно нулю. Отсюда, как легко видеть, вытекают изоморфизмы (31). ■

Предложение 3. *Пусть $M = \mathrm{Coker}\, p'$, а матрица p' имеет вид $(p_1, \ldots, p_t)$. Тогда*

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong \mathscr{P}/\Delta\mathscr{P},$$

где Δ — наибольший общий делитель многочленов $p_1, \ldots, p_t$.

Доказательство. Напомним, что

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong \mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P},$$

где $\mathscr{P}$-матрица p_1: $\mathscr{P}^t \to \mathscr{P}^{t_2}$ построена так, что $\mathscr{P}_{p'} = p'_1\mathscr{P}^{t_2}$. Пусть $\breve{p}$ — строка, образованная многочленами $\breve{p}_\tau = \frac{p_\tau}{\Delta}$, $\tau = 1, \ldots$ $\ldots, t$. Так как, очевидно, $\mathscr{P}_{\breve{p}'} = \mathscr{P}_{p'}$, последовательность

$$\mathscr{P}^{t_2} \xrightarrow{p'_1} \mathscr{P}^t \xrightarrow{\breve{p}'} \mathscr{P} \to \mathrm{Coker}\, \breve{p}' \to 0$$

точна и, следовательно, ее можно продолжить до свободной резольвенты модуля $\mathrm{Coker}\, \breve{p}'$. Так как наибольший общий делитель многочленов $\check{p}_1, \ldots, \check{p}_t$ равен константе, многообразие их общих корней (ассоциированное с $\operatorname{Coker} \check{p}'$) имеет размерность меньше $n-1$. Поэтому согласно теореме 1 $\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Coker} \check{p}', \mathscr{P}) = 0$, что означает точность последовательности

$$\mathscr{P} \xrightarrow{\check{p}} \mathscr{P}^t \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}^{t_1}.$$

Из ее точности $\mathscr{P}_{p_1} = \check{p}\mathscr{P}$, а следовательно $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong \check{p}\mathscr{P}/p\mathscr{P}$. Соответствие $\mathscr{P} \ni f \to \check{p}f \in \check{p}\mathscr{P}$ определяет изоморфизм

$$\mathscr{P}/\Delta\mathscr{P} \cong \check{p}\mathscr{P}/p\mathscr{P}.$$

Так как правая часть совпадает с $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$ он является искомым. ■

§ 14. Продолжение решений однородных систем

Мы опишем сейчас все системы (1.4), обладающие следующим свойством: всякое решение такой системы, определенное в окрестности границы выпуклой ограниченной области, может быть продолжено внутрь этой области как решение той же системы. Оказывается, что такие системы характеризуются условием $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) = 0$, где M — $\mathscr{P}$-модуль, отвечающий этой системе. Далее мы получим некоторые более точные теоремы о возможности продолжения решений системы (1.4).

1°. Определенные и переопределенные системы.

Определение. *Оператор p и модуль $M = \mathscr{P}^s/p'\mathscr{P}^t$ назовем определенными*, если $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$, и *недоопределенными* в противном случае. Скажем, что *оператор p и модуль M переопределенные*, если

$$\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P}) = \operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) = 0.$$

В силу следствия 1 § 13 определенные модули M характеризуются неравенством $\dim M < n$, а переопределенные модули — неравенством $\dim M < n-1$.

Для примера рассмотрим операторы d_i, $i = 0, \ldots, n-1$, из примера 2 § 7. Легко видеть, что все операторы d_i с $i > 0$ — недоопределенные, а оператор d_0 определенный, а в случае $n > 1$ даже переопределенный.

Сейчас мы установим, что определенные операторы характеризуются тем, что соответствующая система (1.4) не имеет решений с компактными носителями. Дальше мы покажем, что для переопределенных операторов характеристическим является то свойство, что всякое решение (1.4), определенное в окрестности границы выпуклой области, имеет однозначное продолжение во всю область.

Предложение 1. *Для того чтобы система* (1.4) *не имела отличных от нуля обобщенных решений с компактными* *носителями, необходимо и достаточно, чтобы оператор p был определенным.*

Доказательство. В силу соотношения (19.3) гл. I модуль $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P})$ изоморфен ядру $\mathscr{P}_p$ отображения p: $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^t$. Предположим, что оператор p недоопределенный, т. е. это ядро отлично от нуля. Пусть F—не равный нулю элемент модуля $\mathscr{P}_p$, а δ—дельта-функция в R^n. Функционал $F(iD)\delta$ отличен от нуля, имеет компактный носитель и является решением системы (1.4). Тем самым необходимость доказана.

Докажем достаточность. Поскольку $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) \cong \mathscr{P}_p$, а $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{E}^*(R^n)$ плоский (см. следствие 4 § 8), то последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) \otimes \mathscr{E}^*(R^n) \to [\mathscr{E}^*(R^n)]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{E}^*(R^n)]^t$$

точна. В этой последовательности ядро оператора p есть пространство всех решений системы (1.4), имеющих компактные носители. Если $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$, то это пространство состоит из одной функции, равной тождественно нулю. ■

2°. Описание неустранимых особенностей решений. Пусть Ω — область в R^n, а $K \subset \Omega$ — компакт. Скажем, что обобщенная функция u является решением системы (1.4) в Ω, имеющим особенности на K, если $u \in \mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus K)$. В пространстве $\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus K)$ рассмотрим подпространство $\widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}$, образованное пределами последовательностей вида $\{u_\alpha \in \mathscr{D}_M^*(\Omega)\}$, стабилизирующихся вне любой окрестности K. Скажем, что особенности функции $u \in \mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus K)$ устранимые, если u принадлежит $\widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}$. Факторпространство

$$\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}$$

характеризует совокупность неустранимых особенностей принадлежащих K обобщенных решений (1.4) в Ω.

Пусть u — бесконечно дифференцируемое решение (1.4) в $\Omega \setminus K$, т. е. $u \in \mathscr{E}_M(\Omega \setminus K)$. Предположим, что особенности u на компакте K устранимые, т. е. $u \in \widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}$. Тогда согласно примеру 1 § 15 существует стремящаяся к u последовательность функций $u_\alpha \in \mathscr{E}_M(\Omega)$, стабилизирующаяся вне любой окрестности K, т. е. функция u принадлежит подпространству $\widehat{\mathscr{E}_M(\Omega)}$, строящемуся по аналогии с подпространством $\widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}$. Таким образом, факторпространство

$$\mathscr{E}_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{E}_M(\Omega)}$$

характеризует неустранимые особенности, принадлежащие K, бесконечно дифференцируемых решений (1.4).

Оба рассмотренных факторпространства мы обозначим единым образом:

$$\Phi_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\Phi_M(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Мы наделим их дискретной топологией. Наша ближайшая цель — описание этих факторпространств. С факторпространством (1) удобнее иметь дело в том случае, когда подпространство $\widehat{\Phi_M(\Omega)}$ совпадает с $\Phi_M(\Omega)$. Сейчас мы опишем некоторые случаи такого совпадения.

Предложение 2. *Если M — определенный модуль, то $\widehat{\Phi_M(\Omega)} = \Phi_M(\Omega)$. Если K — конечное множество, то имеет место включение*

$$\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)} \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s = \mathscr{D}^*_M(\Omega),$$

где левая и правая части рассматриваются как подпространства в $\mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)$.

Доказательство. Пусть $\{u_\alpha \in \Phi_M(\Omega)\}$ — некоторая последовательность, стабилизирующаяся вне любой окрестности K. Не ограничивая общности, мы будем считать, что $u_1 \equiv u_2 \equiv \ldots$ вне некоторого компакта $\mathscr{K} \subset \Omega$. Тогда при любом α функция $u_\alpha - u_{\alpha+1}$ имеет компактный носитель и удовлетворяет системе (1.4). Если M — определенный модуль, то согласно предложению 1 $u_\alpha \equiv u_{\alpha+1}$ и, следовательно, $u = \lim u_\alpha \equiv u_1 \in \Phi_M(\Omega)$.

Докажем второе утверждение. Очевидно, достаточно ограничиться случаем, когда $K = O$, где O — начало координат. Пусть u принадлежит пересечению $\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)} \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$. Тогда pu есть обобщенная функция в Ω, сосредоточенная в начале координат. Следовательно, $pu = F(iD)\delta$, где $F \in \mathscr{P}^t$. С другой стороны, $pu = p(u - u_1) \in p[\mathscr{E}^*(R^n)]^s$. Поэтому многочлен F принадлежит пространству $p[\mathscr{E}^*(R^n)]^s$ и в силу предложения 4 § 1 гл. II имеет вид pG, где $G \in \mathscr{P}^s$. Отсюда вытекает, что функция $u - G(iD)\delta$ удовлетворяет системе (1.4) в Ω и, следовательно, принадлежит пространству $\mathscr{D}^*_M(\Omega)$. Отсюда также $u \in \mathscr{D}^*_M(\Omega)$, если $\mathscr{D}^*_M(\Omega)$ рассматривать как подпространство в $\mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus O)$. ■

Рассмотрим некоторые пространства целых функций. Пусть $\mathscr{K}$ — выпуклый компакт в R^n. Через $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}$ обозначим пространство целых функций в C^n, каждая из которых при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| \leqslant C(|z|+1)^b \exp(\varepsilon|y|)\, \mathscr{I}_{\mathscr{K}}(-y) \tag{2.14}$$

с некоторыми b и C, зависящими от ε. Подпространство в $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}$, образованное функциями φ, которые удовлетворяют этому неравенству при любых $\varepsilon > 0$ и $b > -\infty$, обозначим через $S^{\mathscr{K}+}$. Пусть q—некоторая $\mathscr{P}$-матрица. Через $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}\{q\}$ и $S^{\mathscr{K}+}\{q\}$ обозначим пространства голоморфных в C^n q-функций, которые удовлетворяют неравенству (2) при любом $\varepsilon>0$ и b, зависящим от ε, соответственно при любых $\varepsilon > 0$ и $b > -\infty$. Пусть L—некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль. Используя конструкцию 4° § 5 гл. IV, мы можем установить естественные изоморфизмы между пространствами $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}\{q\}$, для которых $\operatorname{Coker} q' \cong L$. Через $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}\{L\}$ обозначим пространство, полученное отождествлением всех $\mathscr{E}^{\mathscr{K}+}\{q\}$ с $\operatorname{Coker} q' \cong L$. Аналогичное значение придадим символу $S^{\mathscr{K}+}\{L\}$.

Теорема 1. *Пусть M — некоторый конечный $\mathscr{P}$-модуль, K — выпуклый компакт, а Ω — его окрестность. Тогда существует оператор*

$$B\colon \mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{D}^*(\Omega)} \to \mathscr{E}^{K+}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}, \tag{3.14}$$

устанавливающий алгебраический изоморфизм этих пространств. Определено сужение

$$B\colon \mathscr{E}_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{E}_M(\Omega)} \to S^{K+}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\} \tag{4.14}$$

этого оператора. Это сужение также является алгебраическим изоморфизмом.

Доказательство. Пусть (4.7) — свободная резольвента модуля M. По определению

$$\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) = \mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s, \qquad \mathscr{P}_{p_1} = \operatorname{Ker}\{p_1\colon \mathscr{P}^t \to \mathscr{P}^{t_2}\}. \tag{5.14}$$

Поэтому определена и точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \to \mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}^{t_2}. \tag{6.14}$$

Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный выпуклый компакт в R^n с непустой внутренностью $\operatorname{int}\mathscr{K}$. Выберем некоторую строго возрастающую последовательность $\{\mathscr{K}_\alpha\}$ выпуклых компактов, стремящуюся к $\mathscr{K}$. Рассмотрим семейство мажорант

$$\mathscr{M} = \{M_\alpha(z) = (|z| + 1)^\alpha \mathscr{I}_{\mathscr{K}_\alpha}(-y),\ \alpha = 1, 2, \ldots\}.$$

С помощью этого семейства мажорант для любого конечного $\mathscr{P}$-модуля L мы можем построить соответствующее семейство пространств $\mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{L\} = \mathscr{H}_{\mathscr{M}}\{L\}$. Из предложения 6 § 3 следует, что $\mathscr{M}$ есть семейство мажорант типа $\mathscr{I}$. Поэтому из основной теоремы гл. IV вытекает, что функтор $L \rightsquigarrow \mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{L\}$ точен. Поэтому, применив этот функтор к последовательности (6), мы получим точную последовательность семейств. Прежде чем выписать эту последовательность, мы заметим, что в силу той же теоремы имеет место изоморфизм

$\mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{\mathscr{P}^t/p\mathscr{P}^s\} \cong [\mathscr{E}^{\mathscr{K}}]^t/p\,[\mathscr{E}^{\mathscr{K}}]^s$, где $\mathscr{E}^{\mathscr{K}} = \mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{\mathscr{P}\}$. Поэтому упомянутую точную последовательность можно записать так:

$$0 \to \mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\} \to [\mathscr{E}^{\mathscr{K}}]^t/p\,[\mathscr{E}^{\mathscr{K}}]^s \xrightarrow{p_1} [\mathscr{E}^{\mathscr{K}}]^{t_1}. \qquad (7.14)$$

Для любого модуля L через $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{L\}$ обозначим индуктивный предел семейства $\mathscr{E}^{\mathscr{K}}\{L\}$. Перейдем к индуктивным пределам в последовательности (7). Согласно предложению 10 § 1 полученная последовательность пространств

$$0 \to \mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\} \to [\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^t/p\,[\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^s \xrightarrow{p_1} [\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^{t_1} \qquad (7'.14)$$

также точна (здесь и в дальнейшем все пространства мы наделяем дискретной топологией). Из ее точности следует, что интересующее нас пространство $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$ изоморфно ядру отображения p_1. Опишем это ядро. Пусть $\partial = \{\partial_\lambda, \lambda = 0, \ldots, l\}$ — нормальный нетеровский оператор, ассоциированный с матрицей p. Согласно предложению 1 § 4 гл. IV мы можем положить $\partial_0 = p_1$, где ∂_0 — компонента оператора ∂, отвечающая n-мерной примарной компоненте подмодуля $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$.

Используя теорему 2 § 5 гл. IV и снова предложение 10 § 1, мы приходим к выводу, что отображение

$$[\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^t/p\,[\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^s \xrightarrow{\partial} \mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{p\}$$

есть изоморфизм. Следовательно, ядро p_1 в (7′) можно отождествить с подпространством в $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{p\}$, образованным p-функциями, у которых компонента, отвечающая оператору ∂_0, равна нулю. Это подпространство мы обозначим через $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}_{p_1}\{p\}$. Таким образом, мы установили, что оператор

$$\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\} \xrightarrow{\partial} \mathscr{E}^{\mathscr{K}-}_{p_1}\{p\} \qquad (8.14)$$

является изоморфизмом.

Построим теперь оператор B. Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый выпуклый компакт такой, что $\mathscr{K} \supset\supset K$. Выберем некоторую функцию $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$, равную единице в некоторой окрестности V компакта K, носитель которой принадлежит $\operatorname{int}\mathscr{K}$. Пусть u — произвольный элемент пространства $\mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)$. Функция $p(iD)\alpha u$, очевидно, равна нулю в области $V \setminus K$, следовательно, ее можно продолжить из $\Omega \setminus K$ в Ω, положив равной нулю на K. Через E обозначим оператор такого продолжения. Так как

$$\operatorname{supp} Ep\alpha u \subset \operatorname{supp} \alpha, \quad \text{то} \quad Ep\alpha u \in [\mathscr{E}^*(\operatorname{int}\mathscr{K})]^t.$$

Пусть $\widetilde{Ep\alpha u}$ — преобразование Фурье функции $Ep\alpha u$. Применив к нему оператор $-\partial$, мы получим искомое отображение

$$B\colon u \to -\overline{\partial \widetilde{Ep\alpha u}},$$

Это отображение переводит пространство $\mathscr{D}_M^*(\Omega\setminus K)$ в пространство голоморфных в C^n p-функций. Покажем, что это отображение действительно устанавливает изоморфизм (3). Прежде всего покажем, что это отображение не зависит от выбора компакта $\mathscr{K}$ и функции α. Пусть α и α' — две произвольные функции из $\mathscr{D}(\Omega)$, равные единице в некоторой окрестности $V\supset K$. Поскольку функция $(\alpha-\alpha')u$ равна нулю в $V\setminus K$, к ней применим оператор E. Следовательно,

$$Ep\alpha u - Ep\alpha' u = Ep(\alpha-\alpha')u = pE(\alpha-\alpha')u.$$

Так как $pE(\alpha-\alpha')u\in p[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$, мы имеем $\partial\widetilde{Ep\alpha u}-\partial\widetilde{Ep\alpha' u}=0$, ч. и т. д.

Поскольку носитель функции $Ep\alpha u$ принадлежит $\operatorname{int}\mathscr{K}$, из свойств преобразования Фурье (см. предложение 2 § 3) следует, что функция $\widetilde{Ep\alpha u}$ принадлежит пространству $[\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}]^t$, а следовательно, $-\partial\widetilde{Ep\alpha u}\in\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{p\}$. Заметим, что

$$p_1(z)\widetilde{Ep\alpha u}=p_1\widetilde{(iD)Ep\alpha u}=\widetilde{Ep_1p\alpha u}=0,$$

поскольку $p_1p=0$. Отсюда вытекает, что функция $Bu=-\partial\widetilde{Ep\alpha u}$ принадлежит подпространству $\mathscr{E}_{p_1}^{\mathscr{K}-}\{p\}$. Учитывая изоморфизм (8), мы можем рассматривать Bu как элемент пространства $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{\operatorname{Ext}^1(M,\mathscr{P})\}$. Так как эта функция не зависит от компакта $\mathscr{K}$, она принадлежит пересечению всех пространств $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}\{\operatorname{Ext}^1(M,\mathscr{P})\}$ с $\mathscr{K}\supset\supset K$. Это пересечение, очевидно, совпадает с $\mathscr{E}^{K+}\{\operatorname{Ext}^1(M,\mathscr{P})\}$. Итак, мы построили линейный оператор

$$B\colon\ \mathscr{D}_M^*(\Omega\setminus K)\to\mathscr{E}^{K+}\{\operatorname{Ext}^1(M,\mathscr{P})\}.$$

Найдем ядро этого оператора. Пусть $Bu=0$, т. е. $\partial\widetilde{Ep\alpha u}=0$. Выберем некоторую строго убывающую последовательность $\{K_\nu\}$ выпуклых компактов, стремящуюся к K *). Для каждого $\nu=1,2,\dots$ найдем функцию $\alpha_\nu\in\mathscr{D}(\Omega)$, равную единице в окрестности K, такую, что $\operatorname{supp}\alpha_\nu\subset\subset K_\nu$. Тогда $\operatorname{supp}Ep\alpha_\nu u\subset\subset K_\nu$ и, следовательно, $\widetilde{Ep\alpha_\nu u}\in[\mathscr{E}^{K_\nu-}]^t$. Из равенства $\partial\widetilde{Ep\alpha_\nu u}=\partial\widetilde{Ep\alpha u}=0$ согласно теореме 2 § 5 гл. IV вытекает, что $\widetilde{Ep\alpha_\nu u}\in p[\mathscr{E}^{K_\nu-}]^s$, откуда

$$Ep\alpha_\nu u=pv_\nu,\qquad v_\nu\in[\mathscr{E}^*(\operatorname{int}K_\nu)]^s.$$

Отсюда следует, что $p(\alpha_\nu u-v_\nu)=0$ в области $\Omega\setminus K$. Рассмотрим функцию $u_\nu=E(1-\alpha_\nu)u+v_\nu$. Она совпадает с u вне K_ν и является решением системы (1.4) в Ω, так как в $\Omega\setminus K$ $u_\nu=u-(\alpha_\nu u-v_\nu)$, а в окрестности K $u_\nu=v_\nu$. Таким образом, последовательность функций $u_\nu\in\mathscr{D}_M^*(\Omega)$ стабилизируется вне любой

*) То есть $K_1\supset\supset K_2\supset\supset\dots$ и $\bigcap K_\nu=K$.

окрестности K к функции u. Отсюда следует, что $u \in \widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$. Тем самым мы показали, что $\operatorname{Ker} B \subset \widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$.

Установим обратное включение. Пусть $u \in \mathscr{D}^*_M(\Omega)$. Тогда

$$Epau = pau \in p\,[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s,$$

откуда $\partial \widetilde{Epau} = 0$. Пусть u' — некоторая функция, совпадающая с u вне некоторой окрестности $V \subset\subset \Omega$, компакта K. Выбрав функцию $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$, равной единице в V, мы получим

$$\partial \widetilde{Epau'} = \partial \widetilde{Epau} = 0.$$

Отсюда вытекает, что любая функция из пространства $\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$ принадлежит ядру оператора B. В итоге мы установили равенство $\operatorname{Ker} B = \widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$. Из него следует, что отображение (3) взаимно однозначно.

Построим обратное отображение. Пусть F — произвольный элемент пространства $\mathscr{E}^{K+}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$. Это пространство является пересечением пространств $\mathscr{E}^{K_\nu-}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Учитывая изоморфизмы (8), в которых $\mathscr{K} = K_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, мы можем рассматривать F как элемент любого пространства $\mathscr{E}^{K_\nu-}_{p_1}\{p\}$, $\nu=1, 2, \ldots$ Поэтому согласно теореме 2 § 5 гл. IV для любого ν мы можем найти функцию $\psi_\nu \in [\mathscr{E}^{K_\nu-}]^t$ такую, что $F = \partial\psi_\nu$. Так как по условию компонента функции F, отвечающая оператору ∂_0, равна нулю, то $p_1(z)\psi_\nu = 0$. Пусть φ_ν — обратное преобразование Фурье функции ψ_ν. Согласно предложению 2 § 3 $\varphi_\nu \in [\mathscr{E}^*(R^n)]^t$, причем $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K_\nu$ и $p_1(iD)\varphi_\nu = 0$. Учитывая последнее соотношение и теорему 1 § 8, мы можем найти функцию $u_\nu \in [\mathscr{D}^*(R^n)]^s$ такую, что $p(iD)\,u_\nu = \varphi_\nu$.

Построим теперь последовательность функций $u'_\nu \in [\mathscr{D}^*(R^n)]^s$, $\nu = 1, 2, \ldots$, такую, что для любого ν $u'_{\nu+1} = u'_\nu$ вне K_ν и $pu'_\nu = \varphi_\nu$, причем $u'_1 = u_1$. Допустим, что первые ν членов этой последовательности уже построены. Построим функцию $u'_{\nu+1}$. Так как при любом ν $\partial\psi_\nu = F$ и $\psi_\nu \in [\mathscr{E}^{K_\nu-}]^t$, то $\partial(\psi_{\nu+1} - \psi_\nu) = 0$. Применив теорему 2 § 5 гл. IV к семейству $\mathscr{H}_{\mathscr{M}} = \mathscr{E}^{K_\nu}$, мы найдем, что $\psi_{\nu+1} - \psi_\nu \in p\,[\mathscr{E}^{K_\nu-}]^s$, откуда $\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu = p\rho_\nu$, где ρ_ν — некоторая обобщенная функция с носителем в K_ν. Отсюда $p\left(u_{\nu+1} - u'_\nu\right) = \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu = p\rho_\nu$, следовательно, функция $v_\nu = u_{\nu+1} - u'_\nu - \rho_\nu$ является решением системы (1.4) во всем R^n. Поэтому функция $u'_{\nu+1} = u_{\nu+1} - v_\nu = u'_\nu + \rho_\nu$ является искомой. Итак, искомая последовательность $\{u'_\nu\}$ построена.

Так как эта последовательность стабилизируется вне любой окрестности K, то в пространстве $\mathscr{D}^*_M(\Omega\setminus K)$ существует предел $u=\lim u'_\nu$. Покажем, что соответствие $F\to u$ является обратным по отношению к оператору B. Не ограничивая общности, будем считать, что $K_1\subset\Omega$. Выберем функцию α так, чтобы она равнялась единице в некоторой окрестности V_1 компакта K_1. Рассмотрим функцию $\rho\alpha u_1$. В области V_1 она равна φ_1, а в $\Omega\setminus V_1$ она совпадает с $\rho\alpha u$, так как $u=u_1$ вне K_1. Поэтому $\rho\alpha u_1=E\rho\alpha u+\varphi_1$. Отсюда $Bu=-\partial\widetilde{E\rho\alpha u}=-\partial\widetilde{\rho\alpha u_1}+\partial\tilde{\varphi}_1=\partial\tilde{\varphi}_1=\partial\varphi_1=F$, ч. и т. д. Тем самым мы доказали, что отображение (3) есть изоморфизм.

Перейдем к отображению (4). Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный выпуклый компакт с непустой внутренностью. По аналогии с пространством $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}$ рассмотрим пространство $S^{\mathscr{K}-}$, являющееся объединением пространств $S^{\mathscr{K}_\nu+}$, $\nu=1,2,\dots$ ($\{\mathscr{K}_\nu\}$ — строго возрастающая последовательность выпуклых компактов, стремящаяся к $\mathscr{K}$). При построении изоморфизма (3) мы использовали тот факт, что $\mathscr{E}^{\mathscr{K}-}=\varinjlim \mathscr{H}_{\mathscr{M}}$, где $\mathscr{M}$ — семейство мажорант типа $\mathscr{J}$. Пространство $S^{\mathscr{K}-}$ нельзя представить в таком виде, однако оно равно $\bigcup\varinjlim\mathscr{H}_{\mathscr{M}}$, где объединение берется по совокупности семейств $\mathscr{M}$, имеющих вид

$$\mathscr{M}=\{M_\alpha(z)=R_\alpha(z)\,\mathscr{J}_{\mathscr{K}_\alpha}(-y),\ \alpha=1,2,\dots\},$$

а $\{R_\alpha\}$ — произвольная последовательность функций, удовлетворяющая условиям предложения 5 § 3. Остальные рассуждения, проведенные выше, с очевидными изменениями применимы к отображению (4). ■

3°. Замечание и следствия.

Замечание. Оператор B, построенный в теореме 1, не зависит от компакта K и области Ω в следующем смысле. Пусть $\varkappa$ — выпуклый компакт, содержащий K, а ω — его окрестность, принадлежащая Ω. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^*_M(\omega\setminus\varkappa)/\widehat{\mathscr{D}^*_M(\omega)} \arrow[r, "B"] & \mathscr{E}^{\varkappa+}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathscr{P})\} \\
\mathscr{D}^*_M(\Omega\setminus K)/\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)} \arrow[r, "B"] \arrow[u, "r^\Omega_\omega"] & \mathscr{E}^{K+}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathscr{P})\} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd} \tag{9.14}$$

в которой i — тождественное вложение, а r^Ω_ω — отображение сужения.

Следствие 1. *Пусть $\varkappa=K$. Тогда отображение r^Ω_ω в* (9) *является изоморфизмом.*

Действительно, если $\varkappa=K$, то вложение i есть изоморфизм. Поэтому из коммутативности (9) следует, что и r^Ω_ω есть изоморфизм. ■

С л е д с т в и е 2. *Пусть K — непустой выпуклый компакт, а Ω — его окрестность. Для того чтобы было выполнено равенство* $\mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)=\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$, *т. е. чтобы любая особенность решений* (1.4) *на K была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})=0$ тогда, очевидно, $\mathscr{E}^{K+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}=0$. Поэтому достаточность условия $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})=0$ вытекает из теоремы 1.

Докажем необходимость этого условия. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что компакт K содержит начало координат. В таком случае кольцо $\mathscr{P}$ является подпространством в $\mathscr{E}^{K+}$, следовательно, p-функции вида ∂F, где $F \in \mathscr{P}^t$, принадлежат $\mathscr{E}^{K+}\{p\}$. Поэтому нетеровский оператор ∂ определяет отображение

$$\mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s \xrightarrow{\partial} \mathscr{E}^{K+}_{p_1}\{p\}. \tag{10.14}$$

Это отображение есть мономорфизм. Действительно, если $\partial F=0$, где $F \in \mathscr{P}^t$, то согласно предложению 4 § 1 гл. II $F=pG$, $G \in \mathscr{P}^s$. Применив изоморфизмы (5) и (8), мы преобразуем отображение (10) к виду

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \to \mathscr{E}^{K+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}.$$

Так как это отображение есть мономорфизм, модуль $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$ мы можем рассматривать как подпространство в $\mathscr{E}^{K+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$. Поэтому из $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\neq 0$ вытекает $\mathscr{E}^{K+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}\neq 0$. Тем самым необходимость доказана. ■

С л е д с т в и е 3. *Пусть снова K — выпуклый компакт, а Ω — его окрестность. Для того чтобы всякое обобщенное решение системы* (1.4) *в $\Omega \setminus K$ имело единственное обобщенное продолжение в Ω, также удовлетворяющее* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы оператор p был переопределенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Из следствия 2 вытекает необходимость условия $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})=0$. Из единственности продолжения следует, что система (1.4) не имеет решений с носителями, принадлежащими K. Согласно предложению 1 отсюда следует, что $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P})=0$. Поэтому p — переопределенный оператор.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть p—переопределенный оператор. Согласно следствию 2 для всякого решения $u \in \mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)$ и компакта $\mathscr{K} \supset\supset K$ существует решение $u_{\mathscr{K}} \in \mathscr{D}^*_M(\Omega)$, совпадающее с u в $\Omega \setminus \mathscr{K}$. Для любых двух компактов $\mathscr{K}$, $\mathscr{L} \supset K$, принадлежащих Ω, разность $u_{\mathscr{K}} - u_{\mathscr{L}}$ является решением системы (1.4) с компактным носителем. В силу предложения 1 $u_{\mathscr{K}} \equiv u_{\mathscr{L}}$, следовательно, $u_{\mathscr{K}}$ совпадает с u в $\Omega \setminus K$ и определяется по u однозначно. ■

4°. Одноточечные неустранимые особенности. Сейчас мы ограничимся более узкой задачей: мы опишем неустранимые особенности в начале координат решений системы (1.4), про которые заранее известно, что они продолжаются в окрестность начала координат как обобщенные функции.

Пусть O — начало координат в R^n, а Ω — некоторая его окрестность. Обобщенные решения (1.4) в $\Omega \setminus O$, продолжающиеся в окрестность O как обобщенные функции, образуют пространство $\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) \cap \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$. Неустранимые особенности таких решений образуют пространство, являющееся образом естественного отображения

$$\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s \to \mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) / \widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)}.$$

Ядро этого отображения равно пересечению $\widehat{\mathscr{D}_M^*(\Omega)} \cap [\mathscr{D}_M^*(\Omega)]^s$ и, следовательно, совпадает с $\mathscr{D}_M^*(\Omega)$ согласно предложению 2. Поэтому пространство неустранимых особенностей, интересующего нас типа, можно отождествить с факторпространством

$$\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s / \mathscr{D}_M^*(\Omega). \tag{11.14}$$

Теорема 2. *Оператор B устанавливает изоморфизм пространства* (11) *и пространства* $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$ (*рассматриваемого как подпространство в* $\mathscr{E}^{O+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$).

Доказательство. Пусть u — произвольная функция, принадлежащая $\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$. Поскольку она продолжается в Ω как обобщенная функция, то $pau = \widetilde{Epau} + \widetilde{pu}$. Поэтому $Bu = -\partial \widetilde{Epau} = \partial \widetilde{pu}$. Так как обобщенная функция pu сосредоточена в начале координат, она равна $F(iD)\delta$, где $F \in \mathscr{P}^t$, причем, очевидно, что $p_1 F = 0$. Отсюда $\widetilde{pu} = F(z)$ и $p_1(z) F(z) = 0$. Поэтому функция Bu равна ∂F и, следовательно, принадлежит образу отображения (10), т. е. $Bu \in \mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$.

Обратно, пусть ∂F — произвольная p-функция, принадлежащая образу отображения (10). Тогда $F \in \mathscr{P}^t$, причем $p_1 F = 0$. Поэтому из теоремы 1 § 8 следует, что система уравнений $pu = F(iD)\delta$ имеет обобщенное решение в R^n. Это решение, очевидно, является элементом пространства $\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$. ■

Следствие 4. *Для того чтобы было справедливо включение*

$$\mathscr{E}_M(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s \subset \mathscr{D}_M^*(\Omega), \tag{12.14}$$

необходимо и достаточно, чтобы ни одно из многообразий, ассоциированных с модулем $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$, *не было гипоэллиптическим* (см. § 5).

Подчеркнем, что обе части (12) понимаются как подпространства $\mathscr{D}_M^*(\Omega \setminus O)$, т. е. всякая обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат, равна нулю как элемент пространств в (12). Таким образом, включение (12) означает, что всякое бесконечно дифференцируемое решение (1.4), определенное в $\Omega \setminus O$, продолжающееся в Ω как обобщенная функция, продолжается в Ω как решение (1.4).

Доказательство. Достаточность. Пусть $p\mathscr{P}^s = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$ — приведенное примарное представление подмодуля $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}^t$, а N_λ, ∂_λ, $\lambda = 0, \ldots, l$, — ассоциированные с подмодулями $\mathfrak{p}_\lambda$ многообразия и нормальные нетеровские операторы, причем $\mathfrak{p}_0 = \mathscr{P}_{p_1}$, а $\partial_0 = p_1$. Тогда $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$ есть приведенное примарное представление подмодуля $p\mathscr{P}^s \subset \mathscr{P}_{p_1}$, а $M_1 \cap \ldots \cap M_l$, где $M_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda / p\mathscr{P}^s$ — приведенное примарное представление нуля в модуле $\mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s$ (см. предложение 1 § 1 гл. IV). Так как многообразие N_λ, $\lambda > 0$, ассоциировано с подмодулем $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathscr{P}_{p_1}$, оно ассоциировано с подмодулем $M_\lambda \subset \mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s$. Следовательно, многообразия N_λ, $\lambda = 1, \ldots, l$, образуют набор, ассоциированный с модулем $\mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s = \operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$.

Предположим, что ни одно из многообразий N_λ $(\lambda > 0)$ не является гипоэллиптическим. Согласно теореме 1 оператор B переводит пространство $\mathscr{E}_M(\Omega \setminus O) \cap [\mathscr{D}^*(\Omega)]^s$ в $S^{O+}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$, а в силу теоремы 2 — в $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$. Следовательно, для любой функции u этого пространства $Bu = \partial F$, где $F \in \mathscr{P}_{p_1}$, а p-функция ∂F убывает быстрее любой степени $|z|$ в любой полосе вида $|y| \leqslant C$. Это означает, что каждая компонента $\partial_\lambda F$ этой p-функции убывает быстрее любой степени $|z|$ на пересечении N_λ и этой полосы. Так как по условию каждое многообразие N_λ не является гипоэллиптическим, его пересечение с некоторой такой полосой не ограничено, следовательно, сформулированное выше условие убывания содержательно.

Зафиксируем произвольное $\lambda > 0$ и рассмотрим функцию

$$m(r) = \inf\{|\partial_\lambda(z+\zeta, D) F(z+\zeta)|, \quad z+\zeta \in N_\lambda, \ |z| = r, \ |\zeta| \leqslant 1\}.$$

Допустим, что $\partial_\lambda F \not\equiv 0$. Так как функция $\partial_\lambda F$ есть многочлен, то $m(r) \sim cr^\alpha$ при $r \to \infty$ с некоторыми $c \geqslant 0$ и α *). С другой стороны, из сказанного выше следует, что функция $m(r)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени r. Отсюда $m(r) \equiv 0$. Поэтому $\partial_\lambda F \equiv 0$ на N_λ в окрестности некоторой точки $z \in N_\lambda$ и, следовательно, $\partial_\lambda F \equiv 0$ на N_λ, так как это многообразие неприводимо. Таким образом, $\partial F = 0$, откуда в силу теоремы 2 $u \in \mathscr{D}^*_M(\Omega)$. Тем самым достаточность доказана.

Докажем необходимость. Предположим, что одно из многообразий N_λ, например N_l, является гипоэллиптическим. Мы построим функцию, принадлежащую левой и не принадлежащую правой части (12).

*) См. Горин [1].

Согласно теореме Леха *) можно найти многочлен $h \in \mathscr{P}$, обращающийся в нуль на N_l, многообразие корней которого также является гипоэллиптическим. Согласно теореме 1 § 8 уравнение $h(iD)v = \delta$ имеет обобщенное решение в R^n. В силу следствия 3 того же параграфа функция v бесконечно дифференцируема вне начала координат. Пусть, далее, F — элемент $\mathscr{P}^t$, принадлежащий всем $\mathfrak{p}_\lambda$ с $0 \leqslant \lambda < l$, но не принадлежащий $\mathfrak{p}_l$. (Такой элемент существует, так как по условию ни один из модулей $\mathfrak{p}_\lambda$ не содержит пересечения остальных.) Поскольку многочлен h обращается в нуль на N_l, он принадлежит радикалу $\mathfrak{p}_\lambda$, следовательно, при некотором натуральном ρ $h^\rho F \in p\mathscr{P}^s$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\rho = 1$ (если $\rho > 1$, то могли с самого начала заменить h на h^ρ). Отсюда $hF = pG$, где $G \in \mathscr{P}^s$. Положив $u = G(iD)v$, мы получим

$$pu = pGv = hFv = Fhv = F(iD)\delta.$$

Таким образом, функция u принадлежит $[\mathscr{D}^*(R^n)]^s$, бесконечно дифференцируема и является решением системы (1.4) вне начала координат и, следовательно, принадлежит левой части (12). Покажем, что она не принадлежит правой части. Предположим противное. Тогда она совпадает в $\Omega \setminus O$ с некоторой функцией $u' \in \mathscr{D}^*_{\text{и}}(\Omega)$. Разность $u - u'$ сосредоточена в начале координат и, следовательно, имеет вид $G'(iD)\delta$, $G' \in \mathscr{P}^s$. Отсюда

$$F\delta = pu = p(u - u') = pG'\delta,$$

т. е. $F = pG' \in p\mathscr{P}^s$, что противоречит выбору F. ■

5°. Примеры.

Пример 1. Пусть $M = \mathscr{P}/p\mathscr{P}$, где p — ненулевой элемент кольца $\mathscr{P}$. Согласно предложению 2 § 13 $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong M$. Следовательно, неприводимые компоненты многообразия N корней многочлена p образуют набор многообразий, ассоциированных с $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$. Поэтому следствие 4 в данном случае звучит так: *для того чтобы всякая обобщенная функция в окрестности Ω начала координат, являющаяся бесконечно дифференцируемым решением уравнения* (1.4) *в $\Omega \setminus O$, продолжалась в Ω как решение того же уравнения, необходимо и достаточно, чтобы ни одна из неприводимых компонент многообразия N не была гипоэллиптической.*

Пример 2. Оператор $p = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\Delta - 1$, $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}$ не является гипоэллиптическим, причем соответствующее многообразие неприводимо, так как неприводим сам многочлен p. Поэтому согласно следствию 4 всякое бесконечно дифференцируемое решение уравне-

*) См. Лех [1].

ния (1.4) в $\Omega \setminus O$, являющееся обобщенной функцией в Ω, продолжается в Ω как решение того же уравнения. Сейчас мы покажем, что требование бесконечной дифференцируемости нельзя заменить требованием сколь угодно большой, но конечной дифференцируемости. С этой целью мы построим решения (1.4) в $R^n \setminus O$ сколь угодно большой гладкости, являющиеся обобщенными функциями в R^n, но имеющие в начале координат неустранимые особенности.

Пусть $u \in \mathscr{D}^*(R^n)$ — решение уравнения $pu = \delta$. Пусть K — произвольный компакт, принадлежащий $R^n \setminus O$. Так как $\Delta \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = u$ в окрестности K, то согласно свойству оператора Лапласа $\deg_K \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \leqslant \leqslant \deg_L u - 2$ для всякого компакта $L \supset\supset K$. Отсюда $\deg_K \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} \leqslant \leqslant \deg_L u - 4$ и т. д. Следовательно, для любого натурального q можно найти натуральное k такое, что функция $\frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^k}$ имеет на K непрерывные производные до порядка q. (Этот результат можно вывести также из теоремы 4 § 5.) Очевидно, что эта функция принадлежит $\mathscr{D}^*(R^n)$, является решением (1.4) в $R^n \setminus O$, но не может быть продолжена в R^n как решение (1.4).

Пример 3. Сейчас мы покажем, что следствие 4 перестает быть верным, если мы будем рассматривать неустранимые особенности в нуле всех бесконечно дифференцируемых решений (1.4) в $R^n \setminus O$ (а не только тех, которые продолжаются в окрестность начала координат как обобщенные функции).

Пусть $n = 2$, а $p = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - i \frac{\partial^3}{\partial \xi_2^3}$. Многочлен p, очевидно, неприводим, а ассоциированное с ним многообразие $N = \{z : z_1^2 = z_2^3\}$ не является гипоэллиптическим, так как содержит неограниченную вещественную часть $\{x : x_1^2 = x_2^3\}$. Построим решение соответствующего уравнения (1.4), бесконечно дифференцируемое вне нуля, имеющее в нуле неустранимую особенность. В силу теоремы 1 для этого достаточно построить отличный от нуля элемент пространства $S^{0+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$.

Опишем это пространство. Очевидно, что $p_1 = 0$. Поэтому $S^{0+}\{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})\} = S^{0+}\{p\}$. Так как многочлен p неприводим, то $\partial \equiv 1$ есть нормальный нетеровский оператор, ассоциированный с p (см. предложение 3 § 4 гл. IV). Поэтому в данном случае понятие голоморфной в C^n p-функции имеет следующий простой смысл: это функция, заданная на N, которая продолжается как голоморфная функция в окрестность любой точки $z \in N$. Тот факт, что голоморфная

p-функция f принадлежит пространству $S^{O+}\{p\}$, означает, что при любом натуральном k она удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant C(|z|+1)^{-k} \exp\left(\frac{1}{k}|y|\right) \qquad (z \in N). \qquad (13.14)$$

Пусть $\psi(\lambda)$ — некоторая не равная тождественно нулю четная целая функция в C^1, удовлетворяющая неравенству

$$|\psi(\lambda)| \leqslant \rho(|\lambda|^3+1) \exp(|\operatorname{Im}\lambda|), \qquad (14.14)$$

где $\rho(t)$ — некоторая положительная функция, монотонно убывающая при $t \to \infty$ быстрее любой степени t. (В качестве ψ можно, например, взять преобразование Фурье любой четной функции $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ с носителем в $(-1, 1)$.) Так как функция $\psi(\lambda)$ четная, она равна $\psi_0(\lambda^2)$, где ψ_0 — некоторая целая функция. Рассмотрим голоморфную p-функцию $f(z_1, z_2) = \psi_0(z_2)$, $(z_1, z_2) \in N$. Она, очевидно, не равна тождественно нулю. Покажем, что она удовлетворяет неравенствам (13).

Установим сначала неравенства

$$|\lambda^3|+|\lambda^2| \leqslant 2(|\lambda|^3+1), \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant C\left(|\operatorname{Im}\lambda^3|^{1/3}+|\operatorname{Im}\lambda^2|^{1/2}\right), \qquad (15.14)$$

где C — некоторое достаточно большое число. Первое неравенство следует из того, что $|\lambda|^2 \leqslant |\lambda|^3+1$. Поскольку $\operatorname{Im}\lambda^k = |\lambda|^k \sin k\varphi$, где $\varphi = \arg\lambda$, второе неравенство вытекает из того, что при любом φ и достаточно большом C $|\sin\varphi| \leqslant C\left(|\sin 3\varphi|^{1/3}+|\sin 2\varphi|^{1/2}\right)$. Пусть λ — любое из значений корня $\sqrt{z_2}$. Тогда на многообразии N $z_1 = \pm\lambda^3$, а $z_2 = \lambda^2$, следовательно, из (14) и (15) вытекает неравенство

$$|f(z_1, z_2)| = |\psi(\lambda)| \leqslant \\ \leqslant \rho\left(\frac{1}{2}[|\lambda|^3+|\lambda|^2]\right) \exp\left(C\left[|\operatorname{Im}\lambda^3|^{1/3}+|\operatorname{Im}\lambda^2|^{1/2}\right]\right) \leqslant \\ \leqslant C\rho\left(\frac{1}{2}|z|\right) \exp\left(C|\operatorname{Im} z|^{1/2}\right),$$

из которого следует (13) при любом $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда $f \in S^{O+}\{p\}$. Тем самым нетривиальность $S^{O+}\{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})\}$ доказана.

Пример 4. Найдем явное выражение для оператора B в случае $n = 2$, $K \supset O$ и $p = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right] = \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}$. Многочлен p неприводимый, многообразие $N = N(p)$ задается уравнением $z_1 = -iz_2$, и мы можем положить $\partial \equiv 1$.

Оператор B применим к функциям вида ζ^{-j-1}, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Так как они бесконечно дифференцируемы вне K, в качестве α мы можем выбрать характеристическую функцию некоторого компакта

$\mathscr{K} \supset\supset K$. Будем считать, что граница $\mathscr{K}$ гладкая. Так как оператор p — первого порядка, мы имеем $Ep\alpha\zeta^{-j-1} = \zeta^{-j-1}p\alpha$. Отсюда

$$B\zeta^{-j-1} = -\partial\widetilde{p\alpha\zeta^{-j-1}} =$$

$$= -\int \exp[(z_1, i\xi_1) + (z_2, i\xi_2)]\,\zeta^{-j-1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}}\,d\xi_1\,d\xi_2\Big|_N =$$

$$= -\int \exp(\zeta, z_2)\,\zeta^{-j-1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}}\,d\xi_1\,d\xi_2.$$

Поскольку функция $\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}}$ сосредоточена на $\partial\mathscr{K}$, мы можем ввести в подынтегральное выражение правой части множитель $h \in \mathscr{D}(R^2)$, равный единице в окрестности $\partial\mathscr{K}$ и нулю в окрестности начала координат. Применяя далее формулу Стокса, мы получим

$$Bu = -\frac{1}{2i}\int h(\xi)\exp(\zeta, z_2)\,\zeta^{-j-1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}}\,d\bar{\zeta}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\mathscr{K}} \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[h\exp(\zeta, z_2)\,\zeta^{-j-1}\right]d\bar{\zeta}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathscr{K}} \exp(\zeta, z_2)\,\zeta^{-j-1}\,d\zeta = \frac{\pi}{j!}\,z_2^j.$$

Таким образом, оператор $\frac{1}{\pi}B$ переводит функцию ζ^{-j-1} в $\frac{1}{j!}\,z_2^j$.

Поскольку этот оператор линеен и непрерывен, он переводит любой ряд вида $\sum\limits_{j\geqslant 0} a_j\zeta^{-j-1}$, сходящийся вне K, в ряд $\sum \frac{a_j}{j!}\,z_2^j$. Заметим, что исходный ряд $\sum a_j\zeta^{-j-1}$ является ассоциированным по Борелю по отношению к полученному ряду $\sum \frac{a_j}{j!}\,z_2^j$. Следовательно, оператор $\frac{1}{\pi}B$ осуществляет преобразование, обратное преобразованию Бореля. Таким образом, согласно теореме 1 преобразование Бореля устанавливает изоморфизм пространства $\mathscr{E}^{K+}\{p\}$ и пространства рядов вида $\sum a_j\zeta^{-j-1}$, сходящихся в $R^2 \setminus K$. Заметим, что функции такого вида голоморфны в $R^2 \setminus K$ и стремятся к нулю на бесконечности. Обратно всякая голоморфная в $R^2 \setminus K$ функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, раскладывается в ряд такого вида.

Так как оператор p гипоэллиптический, то $\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_M(\Omega \setminus K) = \mathscr{E}_M(\Omega \setminus K)$, и поэтому пространства $\mathscr{E}^{K+}\{p\}$ и $S^{K+}\{p\}$ совпадают. Из этого совпадения вытекает, что функции этих пространств характеризуются тем, что удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| \leqslant C_\varepsilon\exp(\varepsilon|y|)\,\mathscr{I}_K(-y_1, -y_2) =$$

$$= C_\varepsilon\exp(\varepsilon|z_2|)\,\mathscr{I}_K(x_2, -y_2), \quad z \in N,$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда видно, что пространство $\mathscr{E}^{K+}\{p\}$ совпадает с пространством всех целых в $C^1_{z_2}$ функций порядка не выше первого, индикаторные диаграммы которых принадлежат компакту K^*, симметричному K относительно оси ξ_1. Таким образом, мы пришли к известной теореме Пойя: *преобразование Бореля устанавливает изоморфизм пространства целых функций порядка не выше первого, индикаторы диаграммы которых принадлежат K^*, и пространства голоморфных в $R^2 \setminus K$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности.*

6°. Обобщение теоремы двойственности Гротендика.

Следствие 5. *Пусть модуль* $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})$ *эллиптический. Тогда билинейная форма* $\langle v, u\rangle = (\bar{v}, Ep\alpha u)$, *определенная на* $\mathscr{E}_{p'}(K) \times \mathscr{D}^*_p(\Omega \setminus K)$, *превращает* $\mathscr{E}_{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})}(K)$ *в пространство непрерывных функционалов над* $\mathscr{D}^*_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{D}^*_M(\Omega)}$.

Та же билинейная форма превращает $\mathscr{D}^*_{\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{P})}(K)$ *в пространство непрерывных функционалов над* $\mathscr{E}_M(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{E}_M(\Omega)}$.

Доказательство. Мы установим лишь первое утверждение, второе доказывается аналогично. По определению всякий элемент $v \in \mathscr{E}_{p'}(K)$ принадлежит пространству $\mathscr{E}_{p'}(U)$, где U — некоторая выпуклая окрестность компакта K. Поэтому форма $\langle v, u\rangle$ определена, если функцию α выбрать так, что носитель ее градиента принадлежит $U \setminus K$. Для любых двух функций α и α', удовлетворяющих этому условию, мы имеем

$$(\bar{v}, Ep\alpha u) - (\bar{v}, Ep\alpha' u) = (\bar{v}, Ep(\alpha - \alpha')u) =$$
$$= (\bar{v}, pE(\alpha - \alpha')u) = (\overline{p'v}, E(\alpha - \alpha')u) = 0,$$

так как $p'v = 0$. Отсюда вытекает, что форма $\langle v, u\rangle$ не зависит от выбора функции α и, следовательно, линейна по обоим аргументам. Отметим также, что эта форма непрерывна по второму аргументу.

Пусть $\{N_\lambda, \partial_\lambda\}$ — набор многообразий и нормальных нетеровских операторов, ассоциированный с матрицей p, причем $N_0 = C^n$, а $\partial_0 = p_1$ (см. доказательство теоремы 1). Согласно теореме 1 § 4 всякая функция $v \in \mathscr{E}_{p'}(K)$ может быть записана в виде

$$(\bar{v}, \varphi) = \sum_\lambda \int_{N_\lambda} \partial_\lambda(z, D)\tilde{\varphi}(z)\,\mu_\lambda, \tag{I}$$

где μ_λ — некоторые меры с конечными интегралами

$$\int_{N_\lambda} (|z| + 1)^q\, \mathscr{I}_{\mathscr{K}}(-y)\,|\mu_\lambda|, \tag{II}$$

где q — любое наперед заданное целое число, а $\mathscr{K}$ — некоторая компактная окрестность K. Используя формулу (I), мы перепишем нашу билинейную форму так:

$$\langle v, u\rangle = \sum_\lambda \int_{N_\lambda} \partial_\lambda \widetilde{Ep\alpha u}\,\mu_\lambda = -\sum_\lambda \int_{N_\lambda} (Bu)_\lambda\,\mu_\lambda, \tag{III}$$

где $(Bu)_\lambda$, $\lambda = 1, \ldots, l$, — компоненты p-функции Bu. Меняя функцию v, мы можем получить в качестве μ_λ любые меры с конечными интегралами (II). Поэтому если некоторая функция $u \in \mathscr{D}_p^{\bullet}(\Omega \setminus K)$ аннулирует форму $\langle v, u\rangle$ для всех v, то $Bu = 0$ и обратно. Согласно теореме 1 $Bu = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in \widehat{\mathscr{D}_p^*}(\Omega)$. Таким образом, мы можем считать второй аргумент в нашей форме элементом факторпространства

$$\mathscr{D}_p^*(\Omega \setminus K)/\widehat{\mathscr{D}_p^{\bullet}(\Omega)}; \tag{IV}$$

при этом наша форма является невырожденной по этому аргументу.

Перейдем к первому аргументу. Заметим, что форма обращается в нуль, если $v \in p_1'[\mathscr{E}(K)]^{t_2}$. В самом деле, пусть $v = p_1'w$; тогда

$$\langle v, u\rangle = \left(\overline{p_1'w}, Epau\right) = (\overline{w}, p_1 Epau) = (\overline{w}, Ep_1 pau) = 0,$$

так как $p_1 p = 0$. Покажем, что справедливо обратное утверждение: если $\langle v, u\rangle = 0$ для всех u, то $v \in p_1'[\mathscr{E}(K)]^{t_2}$.

Подберем $\mathscr{P}$-матрицы q и e так, чтобы была точна последовательность

$$0 \to \mathscr{P}^\tau/e'\mathscr{P}^\sigma \xrightarrow{q} \mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s \to 0. \tag{V}$$

Полагая $L = \mathscr{P}^t/\mathscr{P}_{p_1}$, получим еще две точные последовательности

$$0 \to L \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}^{t_2}; \quad 0 \to \mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}/p\mathscr{P}^s \to L \to 0.$$

Отсюда, используя инъективность $\mathscr{P}$-модуля $\mathscr{E}(K)$ и изоморфизм $\mathscr{P}_{p_1}/p\mathscr{P}^s \cong \cong \operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$, получаем точные последовательности

$$0 \to \mathscr{E}_{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})}(K) \xrightarrow{q'} \mathscr{E}_e(K) \to 0, \tag{VI}$$

$$[\mathscr{E}(K)]^{t_2} \xrightarrow{p_1'} \mathscr{E}_L(K) \to 0;$$

$$0 \to \mathscr{E}_L(K) \to \mathscr{E}_{p'}(K) \to \mathscr{E}_{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})}(K) \to 0.$$

Комбинируя их, найдем еще одну точную последовательность

$$p_1'[\mathscr{E}(K)]^{t_2} \to \mathscr{E}_{p'}(K) \xrightarrow{q'} \mathscr{E}_e(K) \to 0. \tag{VII}$$

Функция $q'v$ принадлежит $\mathscr{E}_e(K)$ и, следовательно, аналитична, так как модуль $\operatorname{Coker} e' \cong \operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$ эллиптический. С другой стороны, для любой функции $\varphi \in \left[\mathscr{E}_K^{\bullet}\right]^\tau$ функция $q\varphi$ анулируется оператором p_1 в виду точности (V). Поэтому функция $q\tilde{\varphi} \in [\mathscr{E}^{K+}]^t$ аннулируется матрицей $p_1(z)$, а следовательно, $\partial\widetilde{q\varphi} \in \mathscr{E}_{p_1}^{K+}\{p\}$. В силу теоремы 1 $\partial\widetilde{q\varphi} = -Bu$ с некоторой функцией $u \in \mathscr{D}_p^*(\Omega \setminus K)$, откуда

$$(\overline{q'v}, \varphi) = (\overline{v}, q\varphi) = \sum_\lambda \int \partial_\lambda \widetilde{q\varphi}\mu_\lambda = -\sum_\lambda \int (Bu)_\lambda \mu_\lambda = \langle v, u\rangle = 0.$$

Из этого равенства следует, что аналитическая функция $q'v$ обращается в нуль на K вместе со всеми своими производными. Поэтому функция $q'v$

равна нулю в окрестности K, т. е. принадлежит ядру отображения q' в (VII). Из точности этой последовательности вытекает, что $v \in p_1' [\mathscr{E}(K)]^{t_2}$, ч. и т. д.

Из сказанного следует, что форма $\langle v, u\rangle$ становится невырожденной, если рассматривать ее первый аргумент как элемент факторпространства

$$\mathscr{E}_{p'}(K)/p_1'[\mathscr{E}(K)]^{t_2}. \tag{VIII}$$

Так как наша форма непрерывна по второму аргументу, тем самым мы вложили факторпространство (VIII) в пространство непрерывных линейных функционалов над (IV). Проверим теперь, что это вложение есть эпиморфизм.

Заметим, что многообразие $\bigcup\limits_{\lambda\geqslant 1} N_\lambda$, будучи ассоциированным с модулем $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})$, эллиптично. Отсюда легко вывести, что пространство $\mathscr{E}_{p_1}^{K+}\{p\}$ совпадает с пространством голоморфных в C^n p-функций с нулевой ∂_0-компонентой, для которых конечны все нормы

$$\| f\|_{\mathscr{K}} = \max_{\lambda\geqslant 1} \sup_{N_\lambda} \frac{|f_\lambda(z)|}{\exp(\mathscr{T}_{\mathscr{K}}(-y))}, \tag{IX}$$

где $\mathscr{K} \supset\supset K$. В $\mathscr{E}_{p_1}^{K+}\{p\}$ введем топологию, определяемую совокупностью этих норм. Возвращаясь к доказательству теоремы 1, легко проследить, что оператор B устанавливает топологический изоморфизм между факторпространством (IV) и пространством $\mathscr{E}_{p_1}^{K+}\{p\}$, наделенным такой топологией. Поэтому всякий непрерывный функционал V над (IV) можно рассматривать как непрерывный функционал над $\mathscr{E}_{p_1}^{K+}\{p\}$. Семейство норм (IX) задает топологию счетного типа, следовательно, V непрерывен по одной из этих норм. Далее, применяя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 § 4, запишем функционал V в виде интеграла

$$(V, f) = \sum_\lambda \int_{N_\lambda} f_\lambda \mu_\lambda,$$

где меры μ_λ имеют конечные интегралы (II). Подставив эти меры в правую часть (I), мы получим соответствующую функцию $v \in \mathscr{E}_{p'}(K)$, которая в виду (III) совпадает с функционалом V.

Тем самым мы установили, что (VIII) есть пространство всех непрерывных линейных функционалов над (IV). Остается заметить, что в силу точности (VI) и (VII) факторпространство (VIII) совпадает с $\mathscr{E}_{\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P})}(K)$. ■

7°. Специальные результаты о продолжении решений.

Теорема 3. *Пусть L — $n - m$-мерное подпространство в R^n, $0 < m < n$. Предположим, что модуль M удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$;

б) *любое из многообразий, ассоциированных с модулем $\operatorname{Ext}^{m+1}(M, \mathscr{P})$, не является гиперболическим по отношению к L. Тогда для любого компакта $\varkappa \subset L$ и выпуклой области $\omega \subset\subset \varkappa$ всякое решение (1.4), определенное в окрестности компакта*

$\varkappa \setminus \omega$, *может быть продолжено в окрестность компакта* $\varkappa$ *как решение той же системы.*

Доказательство. Пусть u — решение системы (1.4), определенное в окрестности $\varkappa \setminus \omega$. Выберем область $\omega' \subset\subset \omega$ и выпуклую окрестность $\mathfrak{v}$ начала координат в подпространстве $L^{\perp}$ таким образом, чтобы функция u была определена и являлась решением (1.4) в окрестности $\overline{\mathfrak{v}} \times (\varkappa \setminus \omega')$. Далее, выберем некоторую функцию $\alpha \in \mathscr{D}(R^n)$, равную единице в окрестности $\overline{\mathfrak{v}} \times (\varkappa \setminus \omega)$ и нулю в окрестности $\overline{\mathfrak{v}} \times \overline{\omega}'$. Функция αu равна нулю вблизи $\mathfrak{v} \times \omega'$ и, следовательно, может быть продолжена нулем в $\mathfrak{v} \times \omega'$. Это продолжение обозначим через $\breve{u}$. Мы имеем $\operatorname{supp} p\breve{u} \subset \mathfrak{v} \times (\omega \setminus \overline{\omega}')$.

Пусть $\Delta \subset \mathfrak{v}$ — некоторый m-мерный тетраэдр, содержащий начало координат в $L^{\perp}$. Его граница $\partial\Delta$ есть объединение $m-1$-мерных граней Δ_j, $j = 1, \ldots, m+1$, пересекающихся не более чем по m. Пусть V_j, $j = 1, \ldots, m+1$, — некоторые выпуклые окрестности этих граней, также пересекающиеся не более чем по m, содержащиеся в $\mathfrak{v}$. Построим тетраэдр Δ', гомотетичный Δ, такой, что $\Delta \subset\subset \Delta' \subset \mathfrak{v}$, и столь близкий к Δ, что $\Delta' \setminus \Delta \subset V = \bigcup V_j$. Выберем функцию $\beta \in \mathscr{D}(R^n)$ с носителем в $\Delta' \times L$, равную единице в окрестности $\Delta \times L$. Очевидно, что

$$\operatorname{supp} p_1 \beta p \breve{u} \subset \Omega = V \times \omega. \tag{16.14}$$

Пусть (4.7) — свободная резольвента модуля M. Рассмотрим $\mathscr{P}$-модули $M_l = \operatorname{Coker} p_l$, $l = 1, m$. Покажем, что к модулю M_m и области Ω применима теорема 4 § 10. Применив функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathscr{P})$ к резольвенте (4.7), мы получим последовательность

$$0 \to M_1 \xrightarrow{p_2} \mathscr{P}^{t_3} \xrightarrow{p_3} \mathscr{P}^{t_4} \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{p_{m-1}} \mathscr{P}^{t_m} \xrightarrow{p_m} \mathscr{P}^{t_{m+1}} \xrightarrow{p_{m+1}} \mathscr{P}^{t_{m+2}}.$$

Из условия а) с $l = 2, \ldots, m$ следует, что она точна в членах M_1, $\mathscr{P}^{t_3}, \ldots, \mathscr{P}^{t_m}$. Таким образом, модуль M_1 вкладывается в точную последовательность вида (10.10) с $k = m-1$. Далее, применив рассуждения доказательства следствия 4 к матрице $p = p_m$, мы найдем, что набор многообразий, ассоциированный с матрицей p_m, равен набору, ассоциированному с модулем

$$\operatorname{Ext}^{m+1}(M, \mathscr{P}) = \mathscr{P}_{p_{m+1}} / p_m \mathscr{P}^{t_m},$$

плюс многообразие, ассоциированное с подмодулем $\mathscr{P}_{p_{m+1}} \subset \mathscr{P}^{t_{m+1}}$, которое равно C^n (или пустому множеству, если $p_{m+1} = 0$).

Заметим теперь, что области $U_j = V_j \times \omega$, $j = 1, \ldots, m+1$, выпуклы, пересекаются не более чем по m и образуют конечное покрытие области Ω. Пусть N_λ — некоторое многообразие из набора, ассоциированного с модулем M_m, т. е. с матрицей p_m. По доказанному выше N_λ принадлежит набору, ассоциированному с модулем $\operatorname{Ext}^{m+1}(M, \mathcal{P})$, либо $N_\lambda = C^n$. В первом случае согласно условию б) существует гиперподпространство $L_\lambda \supset L$, по отношению к которому N_λ не гиперболично. Очевидно, что проекция любой области вида $U_{j_1} \cap \ldots \cap U_{j_m}$ на $L_\lambda^\perp$ равна проекции области $V_{j_1} \cap \ldots \cap V_{j_m}$. Поскольку области V_j могут быть выбраны сколь угодно близкими к граням тетраэдра Δ, их пересечения вида $V_{j_1} \cap \ldots \cap V_{j_m}$ могут быть сделаны сколь угодно близкими к вершинам этого тетраэдра. Мы можем считать, что проекции вершин тетраэдра Δ на $L_\lambda^\perp$ различны: если это не так, достаточно сделать сколь угодно малый поворот Δ. В таком случае при подходящем выборе окрестностей $V_j \supset \Delta_j$ проекции пересечений $V_{j_1} \cap \ldots \cap V_{j_m}$ на $L_\lambda^\perp$ попарно не пересекаются, т. е. для данного многообразия N_λ условие теоремы 4 § 10 выполнено.

Многообразие $N_\lambda = C^n$ не является гиперболическим по отношению к любому гиперподпространству в R^n, следовательно, для него условие теоремы 4 § 10 также выполнено. Таким образом, выполнены все условия этой теоремы, поэтому пространство $\mathcal{E}(\Omega)$ сильно M_1-выпукло. Отсюда согласно предположению 1 § 7 вытекает равенство

$$[\mathcal{E}^*(\Omega)]^{t_2} \cap p_1 [\mathcal{E}^*(R^n)]^t = p_1 [\mathcal{E}^*(\Omega)]^t. \tag{17.14}$$

Из включения (16) следует, что функция $p_1 \beta p \check{u}$ принадлежит левой части. Поэтому она принадлежит и правой части, т. е. $p_1 \beta p \check{u} = p_1 v$, где $v \in [\mathcal{E}^*(\Omega)]^t$. Отсюда $p_1(\beta p \check{u} - v) = 0$. Из условия а) с $i = 1$ вытекает точность последовательности

$$\mathcal{P}^s \xrightarrow{p} \mathcal{P}^t \xrightarrow{p_1} \mathcal{P}^{t_2}.$$

Так как область $U = \mathfrak{v} \times \omega$ выпукла, $\mathcal{P}$-модуль $\mathcal{E}^*(U)$ плоский. Следовательно, из точности этой последовательности вытекает равенство $\mathcal{E}^*_{p_1}(U) = p[\mathcal{E}^*(U)]^s$. Поскольку $\operatorname{supp}(\beta p \check{u} - v) \subset U$, мы находим, что $\beta p \check{u} - v = pw$, где $w \in [\mathcal{E}^*(U)]^s$. Таким образом, функция $\check{u} - w$ является искомым продолжением функции u. ■

Теорема 4. *Пусть* Ω — *выпуклая область,* $K \subset \Omega$ — *компакт, а* Σ_i, $i = 1, \ldots, m$, *где* $0 < m < n$, — *замкнутые полупространства в* R^n. *Предположим далее, что выполнены условия* $\operatorname{Ext}^i(M, \mathcal{P}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Тогда для любого обобщенного решения* u *системы* (1.4), *определенного в* $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$, *где* $\Sigma = \cup \Sigma_i$, *можно найти решение* (1.4), *определенное в* $\Omega \setminus \Sigma$, *совпадающее с* u *в* $\Omega \setminus (K' \cup \Sigma)$, *где* $K' \subset \Omega$ *также компакт.*

Если модуль M эллиптический, то условие выпуклости области Ω можно заменить более слабым: множество $\complement(\Omega \cup \Sigma)$ не имеет ограниченных связных компонент.

Доказательство. Через $\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma)$ обозначим подпространство в $\mathscr{D}^*(\Omega \setminus \Sigma)$, образованное функциями, каждая из которых обращается в нуль на множестве вида $\Omega \setminus (K' \cup \Sigma)$, где $K' \subset \Omega$ — компакт. Это подпространство мы наделим дискретной топологией.

Лемма. *Если выполнены условия теоремы, а Ω — выпуклая область, то последовательность*

$$[\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma)]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma)]^t \xrightarrow{p_1} [\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma)]^{t_2} \tag{18.14}$$

точна.

Доказательство леммы. Не ограничивая общности, будем считать, что полупространства Σ_i, $i = 1, \ldots, m$, общего расположения. В R^n выберем аффинную систему координат таким образом, чтобы множество $L = \bigcap \Sigma_i$ совпало с подпространством $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$. Через B обозначим пересечение $R^n \setminus \Sigma$ с подпространством $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n) = 0$. Используя лемму 1 § 11, покроем область B локально конечным покрытием, образованным замкнутыми параллелепипедами π_j, $j = 1, 2, \ldots$, со сторонами, параллельными осям координат, пересекающимися не более чем по $m+1$-му и лишь по граничным точкам. Для каждого параллелепипеда π_j выберем выпуклую окрестность V_j, столь близкую к π_j, что из $\pi_{j_0} \cap \ldots \cap \pi_{j_\nu} = \phi$ всегда следует, что $V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_\nu} = \phi$.

Рассмотрим покрытие U области $\Omega \setminus \Sigma$, образованное областями $U_j = (V_j \times L) \cap \Omega$. Из выпуклости области Ω вытекает выпуклость этого покрытия*). На покрытии U рассмотрим предкопучок $\mathscr{E}^*$, образованный пространствами $\mathscr{E}^*(\omega)$, где $\omega \neq \Omega \setminus \Sigma$, и пространством $\mathscr{D}^*(\Omega \setminus \Sigma)$. Через S обозначим совокупность всех множеств в R^n с компактными замыканиями, принадлежащими области Ω. Очевидно, что S есть семейство носителей в смысле 11° § 2. Как легко убедиться, предкопучок $\mathscr{E}^*$ и семейство носителей S удовлетворяют условиям предложения 10 § 2. Согласно этому предложению точна последовательность

$$0 \to {}^m\mathscr{E}^*_S(U) \xrightarrow{\partial_m} {}^{m-1}\mathscr{E}^*_S(U) \to \ldots$$
$$\ldots \to {}^0\mathscr{E}^*_S(U) \xrightarrow{\partial_0} \mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma) \to 0, \tag{19.14}$$

где ${}^\nu\mathscr{E}^*_S(U)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — пространство коцепей порядка ν на покрытии U с коэффициентами в пространствах $\mathscr{E}^*(U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_\nu})$,

*) Это единственное место, где мы используем выпуклость области Ω. Таким образом, наша теорема верна для любых областей Ω таких, что все области U_j — выпуклые.

носители которых принадлежат семейству S. (Все эти пространства мы наделяем дискретной топологией.)

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & & & \\
\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma) \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma) \arrow[u] \arrow[r, "p_1"] & \mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma) & & \\
{}^0\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_0"] \arrow[r, "p"] & {}^0\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_0"] \arrow[r, "p_1"] & \cdots \arrow[u, "\partial_0"] & & \\
& \cdots \arrow[u, "\partial_1"] & \cdots \arrow[r, "p_m"] & p_m\ {}^{m-2}\mathscr{E}^*_S(U) & \\
& \cdots \arrow[r, "p_{m-1}"] & {}^{m-1}\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_{m-1}"] \arrow[r, "m\ p_m"] & p_m\ {}^{m-1}\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_{m-1}"] \arrow[r] & 0 \\
& & {}^{m}\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_m"] \arrow[r, "p_m"] & p_m\ {}^{m}\mathscr{E}^*_S(U) \arrow[u, "\partial_m"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{20.14}$$

в которой мы опустили скобки вида $[\ldots]^{t_k}$. Точность столбцов этой диаграммы, исключая последний, вытекает из точности (19).

Установим точность ее строк, исключая верхнюю. Из условия теоремы следует точность последовательности

$$\mathscr{P}^s \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}^{t_2} \xrightarrow{p_2} \ldots \xrightarrow{p_{m-1}} \mathscr{P}^{t_m} \xrightarrow{p_m} \mathscr{P}^{t_{m+1}}. \tag{21.14}$$

Любая область вида $\omega = U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_\nu}$ выпукла, следовательно, $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{E}^*(\omega)$ плоский, откуда вытекает точность последовательности

$$[\mathscr{E}^*(\omega)]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{E}^*(\omega)]^t \xrightarrow{p_1} \ldots \longrightarrow [\mathscr{E}^*(\omega)]^{t_m} \xrightarrow{p_m} p_m [\mathscr{E}^*(\omega)]^{t_m} \longrightarrow 0. \tag{22.14}$$

Ее точность влечет точность всех строк (20), кроме верхней.

Докажем точность последнего столбца. Пусть φ — произвольный элемент пространства $p_m \left[{}^{m-1}\mathscr{E}^*_S(U)\right]^{t_m}$ такой, что $\partial_{m-1}\varphi = 0$. Ввиду точности (19) $\varphi = \partial_m \psi$, где

$$\psi = \sum \psi_{j_0, \ldots, j_m} U_{j_0} \wedge \ldots \wedge U_{j_m} \in \left[{}^{m}\mathscr{E}^*_S(U)\right]^{t_{m+1}}.$$

Покажем, что каждая функция $\psi_{j_0, \ldots, j_m}$ принадлежит $p_m [\mathscr{E}^*(R^n)]^{t_m}$. Зафиксируем произвольным образом индексы $j_0, \ldots, j_m$ и выберем некоторую ломаную l, состоящую из отрезков вида $\pi_{i_1} \cap \ldots \cap \pi_{i_m}$, соединяющую точку $\pi_{j_0} \cap \ldots \cap \pi_{j_m}$, и некоторую точку вида $\pi_{k_0} \cap \ldots \cap \pi_{k_m}$, лежащую за пределами проекции $\operatorname{supp} \psi$ на B. Выпишем последовательность коэффициентов коцепи ψ, отвечающих вершинам ломаной l:

$$\psi_{k_0, \ldots, k_m}, \ \ldots, \ \psi_{l_0, \ldots, l_m}, \ \ldots, \ \psi_{j_0, \ldots, j_m}. \tag{23.14}$$

Из соотношения $\partial_m \psi = \varphi$ следует, что коэффициент коцепи φ, отвечающий любому из отрезков ломаной l, равен алгебраической сумме двух соседних функций в (23), отвечающих вершинам этого отрезка. Так как каждый коэффициент коцепи φ принадлежит пространству $p_m [\mathscr{E}^*(R^n)]^{t_m}$, а первый член в (23) согласно выбору $k_0, \ldots, k_m$ равен нулю, то все члены в последовательности (23) также принадлежат этому пространству, откуда $\psi_{j_0, \ldots, j_m} \in p_m [\mathscr{E}^*(R^n)]^{t_m}$.

Выберем некоторую выпуклую область $\omega_{j_0, \ldots, j_m} \subset U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_m}$, содержащую носитель $\psi_{j_0, \ldots, j_m}$. Из результатов § 8 следует равенство

$$[\mathscr{E}^*(\omega_{j_0, \ldots, j_m})]^{t_{m+1}} \cap p_m [\mathscr{E}^*(R^n)]^{t_m} = p_m [\mathscr{E}^*(\omega_{j_0, \ldots, j_m})]^{t_m}.$$

По доказанному функция $\psi_{j_0, \ldots, j_m}$ принадлежит левой части, следовательно, она принадлежит также и правой части, т. е.

$$\psi_{j_0, \ldots, j_m} = p_m \chi_{j_0, \ldots, j_m}, \quad \text{где} \quad \chi_{j_0, \ldots, j_m} \in \left[\mathscr{E}^*(\omega_{j_0, \ldots, j_m})\right]^{t_m}.$$

Таким образом, $\psi = p_m \chi$, где χ — коцепь, коэффициентами которой являются функции $\chi_{j_0, \ldots, j_m}$. Так как по условию $\operatorname{supp} \psi \in S$, то при подходящем выборе областей $\omega_{j_0, \ldots, j_m}$ мы можем добиться того, что $\operatorname{supp} \chi$ также принадлежит S. В таком случае $\psi \in p_m [{}^m\mathscr{E}_S^*(U)]^{t_m}$, что влечет точность последнего столбца диаграммы (20).

Применив теорему 1 § 2 гл. I к диаграмме (20), мы найдем, что ее верхняя строка алгебраически точна. ■

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\breve{u}$ — некоторая обобщенная функция в $\Omega \setminus \Sigma$, совпадающая с u в $\Omega \setminus (K' \cup \Sigma)$, где $K' \subset \Omega$ — некоторый компакт. Функция $p\breve{u}$, очевидно, принадлежит ядру оператора p_1 в (18). Из точности последовательности (18) следует, что $p\breve{u} = pv$ с некоторой функцией $v \in [\mathscr{E}^*(\Omega, \Sigma)]^s$. Функция $\breve{u} - v$, очевидно, является искомым продолжением функции u.

Предположим теперь, что M — эллиптический модуль, т. е. p — эллиптический оператор, а область Ω такова, что множество

$R^n \setminus (\Omega \cup \Sigma)$ не имеет ограниченных связных компонент. В последовательности (18) положим $\Omega = R^n$. В силу леммы полученная последовательность точна. Функция $p\check{u}$ принадлежит ядру оператора p_1 этой последовательности. Поэтому $p\check{u} = pv$, где $v \in [\mathscr{E}^*(R^n, \Sigma)]^s$. Из того, что

$$\operatorname{supp} pv = \operatorname{supp} p\check{u} \subset K' \setminus \Sigma,$$

вытекает, что $\operatorname{supp} v \subset K'' \setminus \Sigma$, где K'' — компакт, принадлежащий Ω, поскольку функция v аналитична в $R^n \setminus (K''' \cup \Sigma)$, где K''' — компакт в R^n. Отсюда следует, что функция $\check{u} - v$ является искомым продолжением функции u. ■

Теорема 5. *Утверждение теоремы* 4 *сохраняет силу также в следующих предположениях*: $n = 2\nu$, Ω — *область голоморфности в* $C^\nu = R^n$, а M — *голоморфный* $\mathscr{P}$-*модуль* (см. § 12), *причем* $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Пусть (4.7) — свободная резольвента модуля M, образованная $\mathscr{P}''$-матрицами. Установим точность последовательности (22). Рассмотрим области $U_j = (V_j \times L) \cap \Omega$. Так как каждая область $V_j \times L$ выпукла, она является областью голоморфности. Следовательно, пересечение $(V_j \times L) \cap \Omega$ также есть область голоморфности. Поэтому при любых $j_0, \ldots, j_\nu$ область $\omega = U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_\nu}$ также является областью голоморфности. Следовательно, в силу следствия 3 § 12 $\mathscr{P}''$-модуль $\mathscr{E}^*(\omega)$ плоский. Отсюда вытекает точность последовательности (22). Дальнейшие рассуждения теоремы 4 остаются без изменений. ■

8°. Единственность продолжения решений однородной системы. Используя методы теорем 3 и 4, мы получим сейчас две теоремы, дающие достаточные условия единственности для решений системы (1.4).

Теорема 6. *Пусть* L — $n - m$-*мерное подпространство в* R^n, $0 \leqslant m < n$. *Предположим, что выполнены условия*:

а) $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, m-1$, *т. е.* $\dim M \leqslant n - m$ (см. § 13);

б) *любое многообразие из набора, ассоциированного с модулем* $\operatorname{Ext}^m(M, \mathscr{P})$, *не является гиперболическим по отношению к* L. *Тогда всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в окрестности* L, *равное нулю в окрестности* $L \setminus \omega$, *где* $\omega \subset L$ — *ограниченная область, равно нулю в окрестности* L.

Доказательство. Пусть $\varkappa \subset L$ — некоторый выпуклый компакт такой, что $\omega \subset\subset \varkappa$, а β и Ω имеют те же значения, что и в доказательстве теоремы 3. Мы имеем $\operatorname{supp} p\beta u \subset \Omega$. Заметим, что матрица p удовлетворяет всем тем условиям, которым удовлетворяла матрица p_1 в теореме 3. Учитывая, что для матрицы p_1 мы установили равенство (17), мы вправе написать равенство

$$[\mathscr{E}^*(\Omega)]^t \cap p[\mathscr{E}^*(R^n)]^s = p[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s.$$

Так как функция $p\beta u$ принадлежит левой части этого равенства, она принадлежит и правой части, откуда $p\beta u = pv$, где $v \in [\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$. Следовательно, $p(\beta u - v) = 0$, и поэтому $\beta u = v$, так как $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$. Поскольку $\bar{\Omega} \cap L = \phi$, функция v равна нулю в окрестности L. Тем самым мы доказали, что функция u равна нулю в окрестности L. ■

Теорема 7. *Пусть K — компакт, а Σ_l, $l = 1, \ldots, m$, — произвольные замкнутые полупространства в R^n. Предположим, что выполнено условие* $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, m-1$, *т. е.* $\dim M \leqslant n - m$. *Тогда всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в $R^n \setminus \Sigma$, где $\Sigma = \bigcup \Sigma_l$, равное нулю в $R^n \setminus (K \cup \Sigma)$, равно нулю и в $R^n \setminus \Sigma$.*

Доказательство. Из условия вытекает точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{P}^s \xrightarrow{p} \mathscr{P}^t \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}^{t_2} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{p_{m-2}} \mathscr{P}^{t_{m-1}} \xrightarrow{p_{m-1}} \mathscr{P}^{t_m}.$$

Отправляясь от этой последовательности, аналогичной (21), и повторяя рассуждения леммы, мы установим точность последовательности

$$0 \longrightarrow [\mathscr{E}^*(R^n, \Sigma)]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{E}^*(R^n, \Sigma)]^t. \tag{24.14}$$

Пусть u — решение системы (1.4), удовлетворяющее условию теоремы. Тогда $u \in [\mathscr{E}^*(R^n, \Sigma)]^s$ и $pu = 0$ в $R^n \setminus \Sigma$. Следовательно, u принадлежит ядру оператора p в (24). Из точности (24) мы заключаем, что $u \equiv 0$ в $R^n \setminus \Sigma$. ■

9°. Примеры.

Пример 5. Пусть p — отличный от нуля элемент кольца $\mathscr{P}$. Согласно предложению 2 § 13 мы имеем $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$ и $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong M$. Пусть L — подпространство в R^n размерности $n-1$. В таком случае теорема 6 звучит так: *если ни одна из неприводимых компонент многообразия корней многочлена p не является гиперболической по отношению к L, то всякое решение* (1.4), *определенное в окрестности L, равное нулю в окрестности $L \setminus \omega$, равно нулю в окрестности всего подпространства L.*

Пример 6. Пусть $n = 2m$, а $p = {}''d_0$ — оператор, отвечающий системе Коши — Римана в $R^n = C^m$. Модуль $M = \operatorname{Coker} p'$ эллиптический, причем из предложения 2 § 13 $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots$ $\ldots, m-1$. Поэтому из теоремы 4 вытекает следующее утверждение. Пусть Σ — объединение m—1-го замкнутого полупространства в C^m,

Ω — ограниченная область такая, что множество $\mathbf{C}(\Omega\cup\Sigma)$ не имеет ограниченных связных компонент, т. е. множество $\partial\Omega\setminus\Sigma$ связно. Тогда *любая голоморфная функция, определенная в окрестности $\partial\Omega\setminus\Sigma$, может быть продолжена до голоморфной функции в $\Omega\setminus\Sigma$.*

§ 15. Влияние граничных значений на поведение решений внутри области

Сейчас мы установим другое свойство определенных и переопределенных систем (1.4): всякое решение такой системы, определенное в некоторой области Ω, непрерывно зависит от своих значений вблизи некоторой части границы Ω, тем меньшей, чем больше «степень переопределенности» этой системы. При этом роль показателей «степени переопределенности» снова играют модули $\operatorname{Ext}^l(M, \mathscr{P})$.

1°. Непрерывная зависимость решений определенных систем от их значений в окрестности границы. Как мы знаем (см. § 14), всякое решение определенной системы (1.4), заданное в некоторой области Ω, равное нулю в окрестности ее границы, равно нулю тождественно. На самом деле имеет место более сильное утверждение: решение такой системы непрерывно зависит от своих значений в $\Omega\setminus K$, где $K\subset\Omega$ — произвольный компакт.

Теорема 1. *Пусть M — определенный модуль* (т. е. $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P})=0$), *$K$ — произвольный компакт в R^n, Ω — его окрестность, а Δ — компакт такой, что $\partial K\subset\subset\Delta$. Тогда при любом целом q всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в Ω, принадлежащее $[\mathscr{E}^{q+A}_{\Delta}]^s$, принадлежит также пространству $[\mathscr{E}^q_K]^s$ и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|^q_K\leqslant C\|u\|^{q+A}_{\Delta}, \tag{1.15}$$

где A — константа, зависящая лишь от p.

Доказательство. Пусть α — бесконечно дифференцируемая функция в Ω с носителем, содержащимся в $\Delta\cup K$, равная единице в окрестности K. Носитель функции $p\alpha u$ принадлежит Δ, следовательно, имеет место неравенство

$$\|p\alpha u\|^q_{\Delta\cup K}\leqslant C\|u\|^{q+m}_{\Delta},\quad m=\deg p,\qquad -\infty<q<\infty. \tag{2.15}$$

Пусть K_q, $-\infty<q<\infty$, — некоторая строго убывающая последовательность выпуклых компактов, содержащих $\Delta\cup K$. Рассмотрим убывающую последовательность пространств $\mathscr{D}^q_{K_q}$, $-\infty<q<\infty$. Согласно предложению 2 § 3 преобразование Фурье действует непрерывно из $\mathscr{D}^q_{K_q}$ в $S^{K^*_q}_{q}{}^{q+1}$, а обратное преобразование Фурье из $S^{K^*_q}$ в $\mathscr{D}_{K_{q-2}}$. С другой стороны, последовательность $\mathscr{H}_q=S^{K^*_{-q}}_{-q}$ есть семейство $\mathscr{H}_{\cdot\mathcal{M}}$, отвечающее семейству мажорант $\mathcal{M}$ типа $\mathcal{J}$. Поэтому в силу теоремы 2 § 5 гл. IV и дополнения к этой теореме при любом целом q определено непрерывное отображение

$$p\,[\mathscr{H}_{q-m}]^s \to [\mathscr{H}_{q+a}]^s/[\mathscr{H}_{q+a}]^s \cap \operatorname{Ker} p,$$

обратное оператору p, причем a — константа, зависящая лишь от p. Комбинируя этот факт с отмеченными выше свойствами преобразования Фурье по аналогии с доказательством теоремы 1 § 4, мы приходим к следующему результату: при любом q определен непрерывный оператор

$$p^{-1}\colon\ p\left[\mathscr{D}^{q+m}_{K_{q+m}}\right]^s \to \left[\mathscr{D}^{q-b}_{K_{q-b}}\right]^s/\left[\mathscr{D}^{q-b}_{K_{q-b}}\right]^s \cap \operatorname{Ker} p, \tag{3.15}$$

обратный p. При этом левая часть наделяется топологией, индуцированной из $\left[\mathscr{D}^q_{K_q}\right]^t$, а константа b снова зависит лишь от p.

Заметим теперь, что функция $p\alpha u$ принадлежит левой части (3), следовательно, к ней применим оператор p^{-1}. Так как этот оператор непрерывен, то для любого числа $\varepsilon > 0$ мы можем найти представитель $\varphi \in p^{-1}(p\alpha u)$ такой, что

$$\|\varphi\|^{q-b}_{K_{q-b}} \leqslant C\,\|p\alpha u\|^q_{K_q} + \varepsilon, \qquad C = \|p^{-1}\|. \tag{4.15}$$

Так как носитель функции $p\alpha u$ принадлежит Δ, первое слагаемое правой части равно $C\,\|p\alpha u\|^q_\Delta$. Согласно свойству оператора p^{-1} $p\varphi = p\alpha u$. Отсюда вытекает, что $\varphi = \alpha u$, так как p — определенный оператор. Поэтому в правой части (4) мы можем положить $\varepsilon = 0$. Комбинируя (4) и (2), получаем

$$\|\alpha u\|^{q-b}_{K_{q-b}} \leqslant C\,\|p\alpha u\|^q_\Delta \leqslant C'\,\|u\|^{q+m}_\Delta.$$

Левая часть не меньше чем $\|u\|^{q-b}_K$. Поэтому заменив $q - b$ на q, мы приходим к (1). ■

2°. Теорема о непрерывной зависимости для переопределенных систем.

Теорема 2. *Пусть модуль* M *удовлетворяет условию* $\dim M \leqslant n - k$ *с некоторым* $0 < k \leqslant n$ (которое эквивалентно условию $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$, согласно § 13). *Пусть далее* Π *— ограниченный полиэдр в* R^n, Γ_{n-k} *— некоторый компакт, содержащий окрестность* $n-k$*-мерного остова полиэдра* Π, *а* Ω *— окрестность* $\Pi \cup \Gamma_{n-k}$. *Тогда при любом целом* q *всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в* Ω, *принадлежащее* $\left[\mathscr{E}^{q+A}_{\Gamma_{n-k}}\right]^s$, *принадлежит пространству* $\left[\mathscr{E}^q_\Pi\right]^s$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|^q_\Pi \leqslant C\,\|u\|^{q+A}_{\Gamma_{n-k}}, \tag{5.15}$$

где A *— константа, зависящая лишь от* p.

Отметим сначала один простой факт.

Лемма. *Для любого многочлена* $q \in \mathfrak{r}(M)$ *из* (1.4) *вытекает равенство* $Q(iD)u = 0$, *где* Q — *диагональная матрица размера* $s \times s$, *на диагонали которой находятся достаточно высокие степени оператора* q.

Доказательство леммы. По определению идеала $\mathfrak{r}(M)$ всякий многочлен $q \in \mathfrak{r}(M)$ в достаточно высокой степени аннулирует любой элемент модуля M. Отсюда следует, что при достаточно большом ρ все столбцы $q^\rho e_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, s$ (e_σ — столбцы единичной матрицы) принадлежат подмодулю $p'\mathcal{P}^t$, т. е. $q^\rho e_\sigma = p'F_\sigma$, $F_\sigma \in \mathcal{P}^t$. Отсюда $e'_\sigma q^\rho = F'_\sigma p$. Поэтому из $p(iD)(u_1, \ldots, u_s) = 0$ вытекает $q^\rho(iD)u_\sigma = 0$ для всех σ. ■

Доказательство теоремы. Случай $k = 1$ содержится в теореме 1. Допустим, что $k > 1$. Пусть $\varkappa$ — произвольная $n - k + 1$-мерная грань полиэдра Π, а L — линейное многообразие той же размерности, содержащее эту грань. В R^n выберем систему координат так, чтобы оси $\xi_k, \ldots, \xi_n$ были расположены в L. Не ограничивая общности, мы можем считать, что многообразие $N(M)$ нормально расположено в соответствующей системе координат в C^n. В самом деле, как мы отметили в § 1 гл. IV, те системы координат в C^n, в которых данное алгебраическое многообразие не является нормально расположенным, образуют нигде не плотное подмножество в множестве всех систем координат. Поэтому мы всегда можем найти полиэдр $\Pi' \supset \Pi$, сколь угодно близкий к Π, грани которого удовлетворяют указанному выше условию. Поэтому указанное условие может быть принято без потери общности.

Итак, $N(M)$ нормально расположено в фиксированной выше системе координат. Поэтому существует многочлен $q(z_k, \ldots, z_n) \not\equiv 0$, обращающийся в нуль на $N(M)$. Это означает, что он принадлежит идеалу $\mathfrak{r}(M)$, поэтому в силу леммы всякое решение системы (1.4) удовлетворяет также системе $Q(iD_{\xi''})u = 0$, где Q — определенный оператор, содержащий дифференцирования лишь по переменным $\xi'' = (\xi_k, \ldots, \xi_n)$. Положим $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$. Далее выберем замкнутый шар S с центром в нуле и допустимый компакт $\delta \subset L$, содержащий окрестность границы грани $\varkappa$, настолько малыми, что $S + \varkappa \subset \Omega$ и $S + \delta \subset \Gamma_{n-k}$.

Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}_S$ рассмотрим свертку $u * \varphi = (u(\eta), \varphi(\xi - \eta))$. В силу выбора шара S свертка $u * \varphi$ определена в некоторой n-мерной окрестности компакта $\varkappa \cup \delta$, бесконечно дифференцируема, удовлетворяет в этой окрестности системе (1.4) и, следовательно, также системе $Q(iD_{\xi''})(u * \varphi) = 0$. Отсюда вытекает, что функция $v(\xi'') = (u * \varphi)|_{\xi'=0}$, определенная в некоторой $n - k + 1$-мерной окрестности $\omega \subset L$ компакта $\varkappa$, удовлетворяет в подпространстве L определенной системе уравнений $Q(iD_{\xi''})v = 0$. Применив к функции v теорему 1, а также используя предложение 3 § 3, мы получим цепочку неравенств

$$\sup_{\xi''\in\varkappa} |(u(\eta),\ \varphi(\xi''-\eta))| = \sup_{\varkappa} |v(\xi'')| \leqslant C\|v\|_{\varkappa}^{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant C'\|v\|_{\delta}^{\nu+a} \leqslant C'' \max_{|l|\leqslant\nu+a} \sup_{\delta} |D^l_{\xi''}v| \leqslant C'' \max_{|l|\leqslant\nu+a} \sup_{\delta} |u * D^l\varphi| \leqslant$$

$$\leqslant C''\|u\|_{\Gamma_{n-k}}^{q+\nu+a} \max_{|l|\leqslant\nu+a} \sup_{\xi''\in\delta} \|D^l_{\xi''}\varphi(\xi''-\eta)\|^{-(q+\nu+a)} \leqslant$$

$$\leqslant C'''\|u\|_{\Gamma_{n-k}}^{q+\nu+a}\|\varphi\|^{-q},$$

где $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Отсюда вытекает, что для любой функции $\psi\in\mathscr{D}_{\varkappa+S}$, являющейся сдвигом некоторой функции $\varphi\in\mathscr{D}_S$, справедливо неравенство

$$|(u,\ \psi)| \leqslant C\|u\|_{\Gamma_{n-k}}^{q+\nu+a}\|\psi\|^{-q}. \qquad (6.15)$$

Так как $\varkappa$ — компакт, конечное число сдвигов шара S покрывает некоторый компакт $K\subset\Omega$, содержащий окрестность $\varkappa$. Используя разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, мы можем любую функцию $\psi\in\mathscr{D}_{\varkappa+S}$ представить непрерывным образом в виде суммы $\sum\psi_i$ с фиксированным числом слагаемых, которые являются сдвигами функций из $\mathscr{D}_S$. Применяя к каждому из них неравенство (6), получаем

$$\|u\|_{\varkappa+S}^{q} \leqslant C\|u\|_{\Gamma_{n-k}}^{q+\nu+a}.$$

Просуммировав это неравенство по всем $n-k+1$-мерным граням $\varkappa$, получим

$$\|u\|_{\Gamma_{n-k+1}}^{q} \leqslant C\|u\|_{\Gamma_{n-k}}^{q+\nu+a},$$

где Γ_{n-k+1} — некоторый компакт, содержащий окрестность $n-k+1$-мерного остова полиэдра П. Аналогичным образом мы можем установить неравенство вида $\|u\|_{\Gamma_{l+1}}^{q} \leqslant C\|u\|_{\Gamma_l}^{q+b}$ для любого $l>n-k$. Комбинируя все эти неравенства, приходим к (5). ■

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в окрестности* П, *аналитическое в окрестности* $n-k$*-мерного остова* П, *является аналитическим в окрестности* П.

Доказательство. Выберем открытую окрестность Ω полиэдра П и замкнутую окрестность Γ_{n-k} его $n-k$-мерного остова так, чтобы решение u было определено в Ω и аналитично в окрестности Γ_{n-k}. Любая производная D^lu этого решения принадлежит пространству $\left[\mathscr{E}^{\nu+A}_{\Gamma_{n-k}}\right]^s$, где $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, и удовлетворяет неравенству

$$\|D^lu\|_{\Gamma_{n-k}}^{\nu+A} \leqslant CB^{|l|}l!.$$

Согласно теореме 2 все обобщенные функции $D^i u$ принадлежат $[\mathscr{E}^{\nu}_{\Pi}]^s$ и удовлетворяют аналогичным неравенствам

$$\| D^i u \|^{\nu}_{\Pi} \leqslant C' B^{|i|} i!.$$

В силу предложения 3 § 3 из конечности левых частей следует, что все функции $D^i u$ непрерывны в $\operatorname{int} \Pi$ и не превосходят по модулю величин $C'' B^{|i|} i!$. Отсюда вытекает, что функция u аналитична в окрестности Π. ■

3°. Продолжение гладкости. Начиная с этого пункта и до конца параграфа, под дифференцируемостью функций мы будем понимать их бесконечную дифференцируемость.

Из теоремы 2, в частности, вытекает, что при выполнении условий $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$, $i = 0, \ldots, k$, всякое обобщенное решение, определенное в окрестности полиэдра Π, дифференцируемое в окрестности $n-k$-мерного остова γ_{n-k}, оказывается дифференцируемым в окрестности всего полиэдра. Сейчас мы покажем, что это свойство (даже в более сильной форме) сохраняется при ослабленных предположениях относительно модуля M.

Теорема 3. *Пусть модуль M таков, что все модули $\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P})$, $i = 0, \ldots, k$, гипоэллиптические. Пусть, далее, Ω — выпуклая область, $K \subset \Omega$ — компакт, а Σ_i, $i = 0, \ldots, k$, — замкнутые полупространства в R^n и $\Sigma = \bigcup \Sigma_i$. Тогда всякое обобщенное решение системы* (1.4), *определенное в $\Omega \setminus \Sigma$, дифференцируемое в $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$, оказывается дифференцируемым в $\Omega \setminus \Sigma$.*

Доказательство. Условие, наложенное на модуль M, сформулируем иначе. Согласно следствию 3 § 13 объединение H всех неприводимых компонент многообразия $N(M)$, размерности которых не меньше $n-k$, совпадает с $\bigcup\limits_{i \leqslant k} N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$. Каждое многообразие $N(\operatorname{Ext}^i(M, \mathscr{P}))$, $i \leqslant k$, по условию гипоэллиптическое, следовательно, их объединение H также является гипоэллиптическим. Поэтому условие теоремы можно сформулировать так: многообразие $N(M)$ является объединением гипоэллиптического многообразия H и многообразия ν, размерность которого меньше $n-k$.

Через $\mathfrak{p}_H$ обозначим пересечение всех примарных компонент $\mathfrak{p}_\lambda$ подмодуля $p'\mathscr{P}^t \subset \mathscr{P}^s$ таких, что $\dim N(\mathfrak{p}_\lambda) \geqslant n-k$, а через $\mathfrak{p}_\nu$ — пересечение остальных примарных компонент этого подмодуля. Положим $M_H = \mathscr{P}^s/\mathfrak{p}_H$ и $M_\nu = \mathscr{P}^s/\mathfrak{p}_\nu$. Мы имеем $N(M_H) = H$, а $N(M_\nu) = \nu$, следовательно, модуль M_H гипоэллиптический, а размерность модуля M_ν меньше $n-k$. Тождественное отображение $\mathscr{P}^s \to \mathscr{P}^s$ порождает отображения $M \to M_H$ и $M \to M_\nu$. Поскольку $p'\mathscr{P}^t = \mathfrak{p}_H \cap \mathfrak{p}_\nu$, пересечение ядер этих отображений равно нулю. Поэтому из следствия 5 § 8 следует, что всякое обобщенное решение u системы (1.4), определенное в выпуклой области $\Omega \setminus \Sigma$, может быть представлено в виде суммы $u_H + u_\nu$, где $u_H \in \mathscr{D}^*_{M_H}(\Omega \setminus \Sigma)$, а $u_\nu \in \mathscr{D}^*_{M_\nu}(\Omega \setminus \Sigma)$. Так как модуль M_H гипоэллиптический, функция u_H дифференцируема в $\Omega \setminus \Sigma$. Следовательно, функция $u_\nu = u - u_H$ дифференцируема в $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$.

Таким образом, наша задача свелась к тому, чтобы показать, что любая функция $u_\nu \in \mathscr{D}^*_{M_\nu}(\Omega \setminus \Sigma)$, дифференцируемая в $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$, обладает тем же свойством во всей области. Иначе говоря, доказательство теоремы для модуля M мы свели к ее доказательству для модуля M_ν, размерность которого меньше $n-k$. Чтобы сохранить прежние обозначения, мы будем доказывать теорему для исходного модуля M, предполагая, что его размерность меньше $n-k$.

Установим сначала одну лемму. Пусть Υ и $\upsilon \subset \Upsilon$ — произвольные выпуклые области в R^n. Через $\hat{\mathscr{E}}^*(\Upsilon)$ обозначим подпространство в $\mathscr{E}^*(\Upsilon)$, образованное функциями φ такими, что $\operatorname{sing\,supp} \varphi \subset \upsilon$.

Лемма. *Для любой $\mathscr{P}$-матрицы p*

$$[\hat{\mathscr{E}}^*(\Upsilon)]^t \cap p\,[\mathscr{E}^*(\Upsilon)]^s = p\,[\hat{\mathscr{E}}^*(\Upsilon)]^s.$$

Доказательство леммы. Пусть φ — произвольный элемент левой части. Выберем некоторые строго возрастающие последовательности выпуклых компактов $\varkappa_\alpha$, K_α, $\alpha = 1, 2, \ldots$, стремящиеся соответственно к υ и Υ, такие, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1$, а $\operatorname{sing\,supp} \subset \varkappa_1$. Далее, выберем некоторую функцию $e \in \mathscr{D}_{\varkappa_2}$, равную единице в окрестности $\varkappa_1$. Пусть $d = \{d^\lambda\}$ — нетеровский оператор, ассоциированный с матрицей p. Из включения $\varphi \in p\,[\mathscr{E}^*(\Upsilon)]^s$ вытекает равенство

$$F \overset{\text{Опр.}}{=\!=} d\widetilde{e\varphi} = d\,\widetilde{(e-1)\varphi}.$$

Так как $\operatorname{supp} e\varphi \subset \varkappa_2$, то $e\varphi \in [\mathscr{D}^q_{\varkappa_2}]^t$ с некоторым целым q. Отсюда $\widetilde{e\varphi} \in \left[S_q^{\varkappa_3^*}\right]^t$ и, следовательно, $\widetilde{de\varphi} \in S_{q-\varkappa}^{\varkappa_3^*}\{p\}$, где $\varkappa$ — наивысшая степень z, входящая в операторы d^λ. Поэтому

$$|F(z)| \leqslant C(|z|+1)^{-q+\varkappa} \exp(\mathscr{J}_{\varkappa_3}(-y)), \quad z \in N(p). \tag{7.15}$$

С другой стороны, функция $(e-1)\varphi$ дифференцируема, следовательно, ее преобразование Фурье удовлетворяет неравенству

$$|\widetilde{(e-1)\varphi}| \leqslant r(z) \exp(\mathscr{J}_{K_1}(-y)), \tag{8.15}$$

где $r(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ быстрее любой степени $|z|$. Поэтому функция F удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \leqslant r'(z) \exp(\mathcal{J}_{K_2}(-y)), \tag{9.15}$$

где также $r'(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ быстрее любой степени $|z|$.

Покажем, что из неравенств (7) и (9) вытекает неравенство вида

$$|F(z)| \leqslant R(z) \exp(\mathcal{J}_{\varkappa_4}(-y)), \tag{10.15}$$

где $R(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ также быстрее любой степени $|z|$. Действительно, пусть $|y| \leqslant \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r'(z)}$, где $l = \sup\{|\xi|, \ \xi \in \varkappa_4\} + \sup\{|\xi|, \ \xi \in K_2\}$. Тогда $\exp(\mathcal{J}_{\varkappa_4}(-y) - \mathcal{J}_{K_2}(-y)) \geqslant \sqrt{r'(z)}$ и, следовательно, из (9)

$$|F(z)| \leqslant \sqrt{r'(z)} \exp(\mathcal{J}_{\varkappa_4}(-y)).$$

Предположим теперь, что $|y| \geqslant \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r'(z)}$. Тогда $\exp(-\varepsilon|y|) \leqslant \leqslant [r'(z)]^{\varepsilon/2l}$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(\varkappa_3, C\varkappa_4)$, и, следовательно, из (7)

$$|F(z)| \leqslant C(|z|+1)^{-q+\varkappa} \exp(-\varepsilon|y|) \exp(\mathcal{J}_{\varkappa_4}(-y)) \leqslant$$
$$\leqslant C(|z|+1)^{-q+\varkappa} r'(z)^{\varepsilon/2l} \exp(\mathcal{J}_{\varkappa_4}(-y)).$$

Тем самым неравенство (10) доказано.

Это неравенство показывает, что $F \in \dot{S}_R^{\varkappa_4^*}\{p\}$. Построим некоторую возрастающую последовательность функций $R_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям предложения 5 § 3, такую, что $r(z) + R(z) \leqslant R_1(z)$. Поскольку семейство $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \left\{ S_{R_\alpha}^{\varkappa_\alpha^*} \right\}$ отвечает семейству мажорант $\mathcal{M}$ типа $\mathcal{J}$, к нему применима теорема 2 § 5 гл. IV. Из этой теоремы следует, что $F = d\psi$, где $\psi \in \left[S_{R_\alpha}^{\varkappa_\alpha^*} \right]^l$ с некоторым α. Отсюда $d[\widetilde{(1-e)}\varphi + \psi] = 0$. Из неравенства (8) мы делаем заключение, что функция $\widetilde{(1-e)}\varphi + \psi$ принадлежит $\left[\dot{S}_{R_\alpha}^{K_\alpha^*} \right]^l$. Поэтому из упомянутой выше теоремы следует, что

$$\widetilde{(1-e)}\varphi + \psi = p\chi, \quad \chi \in \left[S_{R_\beta}^{K_\beta^*} \right]$$

с некоторым β. Аналогичным образом $d[\tilde{e}\varphi - \psi] = 0$, где $\tilde{e}\varphi - \psi \in \in \left[S_{-q}^{\varkappa_\alpha^*} \right]^l$ с некоторым q. Применяя упомянутую теорему к семейству пространств $\left\{S_{-\alpha}^{\overset{*}{\varkappa}_\alpha},\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots\right\}$, мы находим, что

$$\widetilde{\alpha\varphi}-\psi=p\omega,\quad \omega\in\left[S_{-\beta}^{\overset{*}{\varkappa}_\beta}\right]^s.$$

Совершив обратное преобразование Фурье, получим

$$\varphi=(e\varphi-\tilde{\psi})+[(1-e)\varphi+\tilde{\psi}]=p(\tilde{\chi}+\tilde{\omega}),$$

$$\tilde{\chi}\in[\mathscr{D}(\Upsilon)]^s,\quad \tilde{\omega}\in[\mathscr{E}^*(\upsilon)]^s.$$

Отсюда $\varphi\in p\,[\widehat{\mathscr{E}}^*(\Upsilon)]^s$. ■

Следствие 2. *Пространство $\widehat{\mathscr{E}}^*(\Upsilon)$, наделенное дискретной топологией, является плоским $\mathscr{P}$-модулем.*

Доказательство предоставляется читателю.

4°. Завершение доказательства теоремы 3. По предположению размерность модуля M меньше $n-k$. Поэтому согласно следствию 1 § 13 имеют место равенства

$$\mathrm{Ext}^l(M,\ \mathscr{P})=0,\qquad l=0,\ \ldots,\ k. \tag{11.15}$$

Индуктивное предложение. *Предположим, что модуль M удовлетворяет условиям* (11) *с $i=1,\ \ldots,\ k$. Пусть Υ — выпуклая область, а Σ_l', $l=0,\ \ldots,\ k$, — открытые полупространства в R^n. Тогда для любой функции $\varphi\in p\,[\mathscr{E}^*(R^n)]^s$ с носителем в Υ, дифференцируемой в окрестности $R^n\setminus\Sigma'(\Sigma'=\bigcup\Sigma_l')$, можно найти обобщенную функцию ψ с носителем в Υ, дифференцируемую в окрестности $R^n\setminus\Sigma'$, такую, что $\varphi=p\psi$.*

Это утверждение мы докажем индукцией по числу k. При $k=0$ оно вытекает из леммы, если положить $\upsilon=\Upsilon\cap\Sigma_0$. Докажем его для произвольного $k\geqslant 1$, предполагая, что для $k-1$ оно уже доказано.

Зафиксируем свободную резольвенту (4.7) модуля M. Для модуля $M_1=\mathrm{Coker}\,p_1'$, очевидно, выполнены соотношения

$$\mathrm{Ext}^i(M_1,\ \mathscr{P})\cong\mathrm{Ext}^{i+1}(M,\ \mathscr{P})=0,\qquad i=1,\ \ldots,\ k-1,$$

следовательно, для оператора p_1 имеет место индуктивное предложение с заменой k на $k-1$.

Пусть φ—произвольная функция, удовлетворяющая условиям индуктивного предложения. Выберем замкнутое полупространство $\Sigma_0''\subset\Sigma_0'$ так, чтобы функция φ была дифференцируема в окрестности

$$R^n\setminus\left(\Sigma_0''\cup\hat{\Sigma}\right),\ \text{где}\ \hat{\Sigma}=\bigcup_1^k\Sigma_l'.$$

Выберем некоторую функцию $\alpha\in\mathscr{E}(R^n)$, равную единице в окрестности $R^n\setminus\Sigma_0'$ и нулю в окрестности Σ_0''. Произведение $\alpha\varphi$ дифференцируемо в окрестности $R^n \setminus \hat{\Sigma}$. Отсюда следует, что функция $p_1\alpha\varphi$ также дифференцируема в окрестности $R^n \setminus \hat{\Sigma}$, причем ее носитель принадлежит $(\Sigma_0' \setminus \Sigma_0'') \cap \Upsilon$. Следовательно, для функции $p_1\alpha\varphi$ выполнены условия индуктивного предложения с $k-1$ вместо k, p_1 вместо p и областью $(\Sigma_0' \setminus \Sigma_0'') \cap \Upsilon$ вместо Υ. Поэтому можно найти функцию ψ' с носителем в $(\Sigma_0' \setminus \Sigma_0'') \cap \Upsilon$, дифференцируемую в окрестности $R^n \setminus \hat{\Sigma}$, такую, что $p_1\alpha\varphi = p_1\psi'$.

Поскольку модуль $\mathscr{E}^*(R^n)$ плоский, из равенства $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) = 0$ вытекает алгебраическая точность последовательности

$$[\mathscr{E}^*(R^n)]^s \xrightarrow{p} [\mathscr{E}^*(R^n)]^t \xrightarrow{p_1} [\mathscr{E}^*(R^n)]^{t_1}. \tag{12.15}$$

Так как $p_1(\alpha\varphi - \psi') = 0$, функция $\alpha\varphi - \psi'$ принадлежит ядру оператора p_1 в этой последовательности и поэтому может быть записана в виде

$$\alpha\varphi - \psi' = p\chi, \quad \chi \in [\mathscr{E}^*(R^n)]^s. \tag{13.15}$$

Поскольку функция $\alpha\varphi - \psi'$ дифференцируема в окрестности $R^n \setminus \hat{\Sigma}$, а ее носитель принадлежит $\Upsilon \setminus \Sigma_0''$, мы можем применить к ней индуктивное предложение с $k-1$ вместо k. Из него следует, что функция χ в (13) может быть выбрана дифференцируемой в окрестности $R^n \setminus \hat{\Sigma}$ с носителем, принадлежащим $\Upsilon \setminus \Sigma_0''$.

Из равенства $p_1\varphi = 0$ следует, что $p_1[(1-\alpha)\varphi + \psi'] = 0$. Так как носитель функции $(1-\alpha)\varphi + \psi'$ принадлежит выпуклой области $\Upsilon \cap \Sigma_0'$, мы имеем

$$(1-\alpha)\varphi + \psi' = p\omega, \quad \omega \in [\mathscr{E}^*(\Upsilon \cap \Sigma_0')]^s. \tag{14.15}$$

Существование такой функции ω следует из точности последовательности (12), в которой R^n заменено на $\Upsilon \cap \Sigma_0'$. Складывая (13) и (14), получаем

$$\varphi = p(\chi + \omega).$$

Функция $\psi = \chi + \omega$ дифференцируема в окрестности $R^n \setminus \Sigma'$, а ее носитель принадлежит Υ, следовательно, она является искомой. Тем самым индуктивное предложение доказано. ■

Перейдем к доказательству самой теоремы. Пусть u — обобщенное решение системы (1.4), определенное в $\Omega \setminus \Sigma$ и дифференцируемое в $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$. Для каждого $l = 0, \ldots, k$ выберем произвольное открытое полупространство $\Sigma_l' \supset \Sigma_l$ и положим $\Sigma' = \bigcup \Sigma_l'$. Далее выберем некоторую функцию $\beta \in \mathscr{D}(\Omega)$, равную единице в окрестности K. Функция $p\beta u$ принадлежит $p[\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$ и дифференцируема в окрестности $R^n \setminus \Sigma'$. Применив к ней индуктивное предложение с $\Upsilon = \Omega$, мы найдем функцию $\psi \in [\mathscr{E}^*(\Omega)]^s$, дифференцируемую в окрестности $R^n \setminus \Sigma'$, такую, что $p\beta u = p\psi$. Функция $\breve{u} = (1-\beta)u + \psi$ дифференцируема, удовлетворяет системе (1.4) в окрестности $\Omega \setminus \Sigma'$ и совпадает с u в $\Omega \setminus (K' \cup \Sigma')$, где $K' \subset \Omega$ — компакт. Разность $u - \breve{u}$ является решением той же системы и равна нулю в $\Omega \setminus (K' \cup \Sigma')$, следовательно, мы можем продолжить ее нулем в $R^n \setminus (K' \cup \Sigma')$, снова получив решение системы (1.4). Используя теперь все соотношения (5), применим теорему 7 § 14 с $m = k+1$. Из нее следует, что $u \equiv \breve{u}$, т. е. функция u сама дифференцируема в окрестности $\Omega \setminus \Sigma'$. Поскольку полупространства $\Sigma'_i \supset \Sigma_i$ были выбраны произвольным образом, отсюда следует, что функция u дифференцируема во всей области $\Omega \setminus \Sigma$. ■

5°. Следствия. Сейчас мы получим следствия теоремы 3, по форме аналогичные следствию 1 и теореме 2.

Следствие 3. *Пусть модуль M удовлетворяет условиям теоремы* 3, L — $(n-k)$-*мерное подпространство в* R^n, $\varkappa$ — *выпуклый компакт, а* σ — *открытое полупространство, принадлежащее* L. *Тогда всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в окрестности* $\varkappa \setminus \sigma$, *дифференцируемое в окрестности* $\partial\varkappa \setminus \sigma$, *является дифференцируемым в окрестности* $\varkappa \setminus \sigma$.

Доказательство. Пусть u — обобщенное решение (1.4), определенное в области $\Omega \supset \varkappa \setminus \sigma$, дифференцируемое в области $\omega \supset \partial\varkappa \setminus \sigma$. Выберем замкнутые полупространства Σ_i, $i = 0, \ldots, k$ в R^n так, чтобы множество $R^n \setminus (\Sigma \cup \omega)$ имело связную ограниченную компоненту G такую, что $\varkappa \setminus \sigma \subset \omega \cup G \subset \Omega$. Функция u удовлетворяет (1.4) в области $(\omega \cup G) \setminus \Sigma$ и дифференцируема в $\omega \setminus \Sigma$, причем область $\omega \cup G$, содержащую $\varkappa \setminus \sigma$, мы можем предполагать выпуклой. Поэтому из теоремы 3 следует, что функция u дифференцируема в области $(\omega \cup G) \setminus \Sigma \supset \varkappa \setminus \sigma$. ■

Следствие 4. *Пусть модуль M удовлетворяет условиям теоремы* 3, Π — *ограниченный полиэдр, а* Σ_0 — *открытое полупространство в* R^n. *Тогда всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в окрестности* $\Pi \setminus \Sigma_0$, *дифференцируемое в окрестности* $\gamma_{n-k} \setminus \Sigma_0$ (γ_{n-k} — остов размерности $n-k$), *оказывается дифференцируемым в окрестности* $\Pi \setminus \Sigma_0$.

Доказательство. Пусть $\varkappa$ — некоторая грань полиэдра Π размерности $n-j$, где $1 \leqslant j \leqslant k$, причем известно, что решение u дифференцируемо в окрестности $\partial\varkappa \setminus \Sigma_0$. Тогда из следствия 3 вытекает, что эта функция дифференцируема также в окрестности $\varkappa \setminus \Sigma_0$. Применяя это рассуждение к ребрам полиэдра Π размерности $n-k$, затем $n-k+1$ и т. д. и, наконец, размерности $n-1$, мы установим, что функция дифференцируема в окрестности $\partial\Pi \setminus \Sigma_0$. Выберем окрестность $\Omega \supset \Pi$ и компакт $K \subset \Omega$ так, чтобы функция u была определена в окрестности $\Omega \setminus \Sigma_0$ и дифференцируема в окрестности

$\Omega \setminus (K \cup \Sigma_0)$. Пусть u' — некоторая обобщенная функция в Ω, совпадающая с u в окрестности $\Omega \setminus \Sigma_0$. Выберем некоторую функцию $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$, равную единице в окрестности K. Функция $p\beta u$ дифференцируема в окрестности $R^n \setminus \Sigma_0$ и имеет компактный носитель. Поэтому из леммы следует, что существует функция ψ с компактным носителем, дифференцируемая в окрестности $R^n \setminus \Sigma_0$, такая, что $p\beta u = p\psi$. Отсюда $p(\beta u - \psi) = 0$ и, следовательно, $\beta u \equiv \psi$, так как p — определенный оператор. Поэтому функция u, совпадающая с u' в окрестности $R^n \setminus \Sigma_0$, дифференцируема в окрестности этого множества. ■

Результат, аналогичный теореме 3, справедлив и для недоопределенных операторов, если решения соответствующей системы (1.4) рассматривать с точностью до решений с «компактными носителями».

Следствие 5. *Пусть модуль M удовлетворяет условиям* $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{P}) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. *Тогда в обозначениях теоремы* 3 *справедливо следующее утверждение: всякое обобщенное решение* (1.4), *определенное в окрестности* $\Omega \setminus \Sigma$ (*все* Σ_i *открытые*), *дифференцируемое в окрестности* $\Omega \setminus (K \cup \Sigma)$, *является суммой дифференцируемого в окрестности* $\Omega \setminus \Sigma$ *решения и функции в* $\Omega \setminus \Sigma$, *равной нулю вне любой наперед заданной выпуклой окрестности* K.

Доказательство. Пусть ω — произвольная выпуклая окрестность компакта K. Вернемся к концу доказательства теоремы 3. Функцию β подчиним условию $\operatorname{supp} \beta \subset \omega$. В таком случае $\operatorname{supp} p\beta u \subset \omega$, следовательно, применив индуктивное предложение с $\Upsilon = \omega$, мы найдем функцию ψ с носителем в ω. Поэтому функция $\breve{u} = (1 - \beta) u + \psi$, дифференцируемая в окрестности $\Omega \setminus \Sigma$, совпадает с u в $\Omega \setminus (\Sigma \cup \omega)$. Разложение $u = \breve{u} + (u - \breve{u})$ является искомым. ■

Результат следствия 5, дающий условия продолжения гладкости для недоопределенных операторов, сравнительно слабее теоремы 3, поскольку условие $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{P}) = 0$ значительно сильнее условия: модуль $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{P})$ — гипоэллиптический. Неизвестно, однако, можно ли в следствии 5 условие $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{P}) = 0$ заменить последним, более естественным. Известно лишь, что условие $\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{P}) = 0$ в следствии 5 можно ослабить, заменив его таким: $\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{P}) \cong \cong \operatorname{Coker} h$, где h — гипоэллиптический оператор.

6°. Примеры.

Пример 1. Пусть p — произвольный оператор. Из следствия 5 вытекает следующее утверждение: всякое решение (1.4), определенное в окрестности $\Omega \setminus \Sigma_0$ (Σ_0 — открытое полупространство), дифференцируемое в окрестности $\Omega \setminus (K \cup \Sigma_0)$, где K — выпуклый компакт, принадлежащий Ω, является суммой дифференцируемого в окрестности $\Omega \setminus \Sigma_0$ решения и решения с носителем в любом компакте $\mathcal{K} \supset\supset K$. Если области Ω и Σ_0 не пересекаются, мы приходим к заключению, которое мы использовали в 2° § 14: *если особенность на K дифференцируемого* в $\Omega \setminus K$ *решения устранима, то она устранима в классе дифференцируемых* в Ω *решений.*

Пример 2. Пусть p — определенный оператор. Тогда из следствия 4 вытекает такой результат: *всякое решение* (1.4), *заданное в* $\Omega \setminus \Sigma_0$ (Ω — произвольная область, а Σ_0 — замкнутое полупространство), *дифференцируемое в* $\Omega \setminus (K \cup \Sigma_0)$, *оказывается дифференцируемым в* $\Omega \setminus \Sigma_0$. Этот результат не может быть улучшен, если мы имеем дело сразу со всем классом определенных операторов. Действительно, как показали Зернер [2] и Хёрмандер [1], всегда существует решение (1.4) в R^n такое, что множество $\operatorname{sing\,supp} u$ совпадает с заданной бихарактеристикой оператора p ($s = t = 1$). (Понятно, что любая прямая может быть бихарактеристикой некоторого такого оператора.)

Пример 3. Пусть матрица p' имеет вид $(p_1, \ldots, p_t)$, причем не все p_τ суть нули. Тогда из предложения 3 § 13 следует, что $\operatorname{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$, а $\operatorname{Ext}^1(M, \mathscr{P}) \cong \mathscr{P}/\Delta\mathscr{P}$, где Δ — наибольший общий делитель многочленов $p_1, \ldots, p_t$. Если многочлен Δ гипоэллиптический, то для оператора p имеет место теорема 3 с $k = 1$, если же $\Delta = \mathrm{const}$, то справедлива теорема 2 с $k = 1$. Более общо, если многообразие $N(p)$ общих корней многочленов $p_1, \ldots, p_t$ есть объединение гипоэллиптического многообразия и многообразия размерности, меньшей $n - k$, то для оператора p справедлива теорема 3 в полной общности. Если само многообразие $N(p)$ имеет размерность меньше $n - k$, то имеет место общий случай теоремы 2.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I. Изучение классов эквивалентных семейств модулей как объектов категории проведено, по-видимому, впервые. Теорема 1 § 2 не является вполне новой: ее второе утверждение для случая точной категории было сформулировано ранее В. Г. Болтянским и М. М. Постниковым в редакторском дополнении к книге А. Картана и С. Эйленберга [1].

К главе II. Основные результаты главы: теоремы 1 и 2 § 4 являются новыми, исключая частный случай $s=t=1$ — саму «подготовительную лемму» Вейерштрасса.

К главе III. Метод доказательства тривиальности $\mathcal{M}$-когомологий, использованный в этой главе, имеет исходной точкой статью автора [4]. В этой статье изучались комплексные меры в C^n, порождающие нулевые функционалы над пространством Z целых функций с оценками роста на бесконечности вида $O(M_\alpha)$, где $M_\alpha(z)$ — функции вида $(|z|+1)^{-q}\exp(b|\operatorname{Im} z|)$. Один из результатов статьи можно сформулировать так: всякая мера μ с конечными интегралами $\int M_\alpha\,|\mu|$, порождающая нулевой функционал над Z, может быть записана в виде $\sum \frac{\partial}{\partial \bar z_l}\mu_l$, где μ_l — меры с конечными интегралами $\int M_\alpha\,|\mu_l|$. Этот результат тесно связан с $\mathcal{M}$-когомологиями, поскольку дуальное утверждение к такого рода теореме о строении мер, порождающих нулевые функционалы, есть тривиальность первой группы когомологий аналитических коциклов с ограничениями роста вида $O(M_\alpha)$.

Тривиальность $\mathcal{M}$-когомологий для мажорант M_α того типа содержится также в работе Б. Мальгранжа [1], где он изучал эквивалентную задачу: тривиальность $\mathcal{M}$-когомологий дифференциальных форм в C^n, удовлетворяющих тем же ограничениям роста. Позже Л. Хёрмандер [1] получил весьма общий результат: тривиальность $\mathcal{M}$-когомологий с ограничениями роста вида $O(\exp\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ — строго плюрисубгармоническая функция. Результат Хёрмандера существенно дополняет теорему 1 § 5, но не содержит эту теорему целиком, поскольку неприменим, например, к семейству мажорант вида $M_\alpha(z)=R(z)\exp(a|\operatorname{Im} z|)$, где $R(z)=O((|z|+1)^{-q})$ при любом $q>0$ (так как в этом случае функция $\ln M_\alpha(z)$ не является плюрисубгармонической).

К главе IV. Теорема, подобная теореме 2 § 5, была сформулирована впервые Л. Эренпрайсом [1] под названием «фундаментального принципа». Содержание теоремы Эренпрайса заключается в описании образа и ядра отображения $p\colon \Phi^s\to\Phi$, где p — полиномиальная матрица размера $1\times s$, а Φ — пространство целых функций в C^n, удовлетворяющих ограничениям роста на бесконечности некоторого не вполне ясно описанного типа. Строится система дифференциальных операторов ∂_k с постоянными коэффициентами, подобных нетеровским операторам, построенным в § 4; каждый из операторов ∂_k действует из Φ в пространство $\Phi(V_k)$ аналитических функций на некотором подмногообразии $V_k\subset C^n$ с теми же оценками роста, что и в Φ. Утверждается, что ядро оператора $\bigoplus\partial_k$ есть $p\Phi^s$, а его образ есть замкнутое подпространство в $\bigoplus\Phi(V_k)$.

Позднее обнаружилось (Паламодов [5]), что теорема Эренпрайса может быть справедливой лишь при дополнительных предположениях, например, при условии $s=1$. Дело в том, что первое утверждение теоремы: существование дифференциальных операторов ∂_k с постоянными коэффициентами таких, что $\bigcap \operatorname{Ker} \partial_k = p\Phi^s$, вообще говоря, неверно (см. пример 4° § 4). Эта ошибка, имеющая алгебраическую природу, не коснулась некоторых из следствий, выведенных Эренпрайсом в [1], относящихся к свойствам дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В частности, справедливыми являются его утверждения, касающиеся гипоэллиптических и гиперболических операторов, использующие, по существу, некоторую более грубую теорему типа «фундаментального принципа».

Дальнейшее изучение дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами привело к необходимости найти корректный вариант теоремы Эренпрайса. В 1960—1962 гг. автор сформулировал и доказал теорему, незначительно отличающуюся от теоремы 2 § 5 (см. [4—7]).

К главе V. § 1. Понятие регулярного возрастающего семейства под названием регулярного индуктивного предела было введено Б. М. Макаровым [1]. Ему же принадлежат предложения 3 и 4. Пространства Шварца были введены А. Гротендиком [1] на основе анализа свойств пространства $\mathscr{E}(R^n)$, введенного и изученного самим Л. Шварцем [1]. Предложение 6 принадлежит Гротендику [1]. Предложение 10, за исключением утверждения 1 А), и предложение 11, по-видимому, являются новыми.

§ 2. 1°—5° содержат изложение элементарных разделов обобщенных функций на основе теории пространств типа H, фигурирующих под более естественными в данной ситуации обозначениями. Использование понятия копучка в теории обобщенных функций является новым.

§ 3. Логарифмически выпуклые функции и логарифмическая двойственность по Юнгу была использована впервые Б. Л. Гуревичем [1], который усовершенствовал конструкции И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1]. Предложения 2 и 5 являются вариантами известных теорем Пэйли—Винера—Шварца (см. Шварц [1]) и Гельфанда—Шилова [2]. Предложение 3 есть вариант известной теоремы вложения С. Л. Соболева [1].

К главе VI. Впервые теорема об экспоненциальном представлении решений однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами была сформулирована Л. Эренпрайсом в 1960 г. [1]. Эта теорема, полученная как следствие из его «фундаментального принципа», относилась к произвольной системе уравнений из любого числа уравнений с одной неизвестной функцией. Независимо от Эренпрайса автор получил аналогичную теорему в скалярном случае (одно уравнение и одна неизвестная функция) для решений, принадлежащих специальным классам функций. Эта теорема была опубликована в [3]. В следующей работе автора [4] допустимый класс решений был расширен до пространства всех обобщенных функций и тем самым был установлен частный случай теоремы Эренпрайса, относящийся к одному уравнению. В общем же случае теорема Эренпрайса оказалась неверна по той же причине, что и его «фундаментальный принцип»: из-за отсутствия нетеровских операторов с постоянными коэффициентами; см. § 4 гл. IV и примечание к этой главе. Корректная форма экспоненциального представления была найдена автором в [5], [6], [7] для прямоугольной системы общего вида. Менее точная теорема того же типа была получена независимо Мальгранжем [1].

Теоремы 1 и 2 § 4 содержат экспоненциальное представление в наиболее важных ситуациях. Отметим, что эти теоремы, однако, не перекрывают теоремы 2 заметки [5], в которой для всякого обобщенного решения произвольной однородной системы в выпуклой области Ω получено экспоненциальное представление, которое сходится сразу во всей этой области. Этот более точный результат требует дополнительного аппарата.

Частный случай следствия 3, когда $m=1, I_\alpha=\mathcal{G}_{K_\alpha}$, где K_α — выпуклые компакты, принадлежит А. Мартино [1]. Другие способы представления решений были ранее предложены М. С. Аграновичем [5], [4].

Отмечу цикл работ по близкому вопросу — экспоненциальному представлению медленно растущих решений. Первый результат принадлежит здесь Л. Шварцу [1], который показал, что в скалярном случае ($s=t=1$), когда единственным корнем характеристического уравнения является начало координат, всякое решение однородного уравнения, принадлежащее S', есть многочлен. Этот результат был обобщен Г. Е. Шиловым [1], который описал решения того же класса уравнений, растущие на бесконечности не быстрее $C\exp(c|\xi|^\gamma)$, с некоторыми C, $c>0$ и $\gamma<1$. Экспоненциальное представление решений медленно растущих решений произвольной системы уравнений с одной неизвестной функцией было получено автором [8].

§ 5. Класс эллиптических операторов был выделен И. Г. Петровским [1], который установил, что все классические решения линейного дифференциального уравнения аналитичны тогда и только тогда, когда это уравнение эллиптично. Регулярность слабых решений впервые была изучена Вейлем [1], который установил гладкость всех слабых решений уравнения Лапласа (лемма Вейля).

Книга Л. Шварца [1] привлекла внимание к общей задаче: описание всех уравнений, имеющих лишь бесконечно дифференцируемые решения. Для класса скалярных уравнений с постоянными коэффициентами эта задача была решена Л. Хёрмандером в [2] (см. также обзор Шилова [2]). В работах Мизохата [1], Мальгранжа [2], Хёрмандера [3], [4], Ф. Броудера [1], Ф. Трева [1], [2] были выделены обширные классы гипоэллиптических скалярных уравнений с переменными коэффициентами. Л. Р. Волевич [1], [2] изучил некоторые классы гипоэллиптических систем с переменными коэффициентами.

Гипоэллиптические системы общего вида с постоянными коэффициентами были описаны Хёрмандером [5], который опирался на алгебраический результат Леха [1]. Гипоэллиптические системы уравнений с постоянными коэффициентами изучал также Мацуура [1], [2].

Наиболее общий и принципиально простой метод изучения локальных свойств решений систем с постоянными коэффициентами представляет экспоненциальное представление. Этот метод был впервые предложен Эренпрайсом в [1] (см. примечания к гл. IV), а также был применен автором в [9], [10], [7]. Изложение § 5 основано на этом методе. Теорема 1 вместе с замечанием 2 содержит упомянутый результат Хёрмандера о гипоэллиптических системах с постоянными коэффициентами.

Хёрмандер в работах [2], [5] получил оценку на рост производных $D^j u$ решений гипоэллиптических уравнений вида $O\left(\Gamma\left(\frac{|j|}{\gamma}\right)\right)$ при $|j|\to\infty$. В. В. Грушин [1] обнаружил, что показатель $1/\gamma$ в этой оценке может быть уменьшен, если на решение $u(\xi)$ наложить ограничение роста при $|\xi|\to\infty$ вида $O(\exp(c|\xi|^\beta))$. В [2] он опубликовал доказательство этого факта, не использующее теоремы об экспоненциальном представлении. Теорема 2 § 4 обобщает и уточняет эти результаты.

Понятия слабо и сильно бесконечно дифференцируемых по части переменных под другими названиями были введены Шварцем [2]. Класс слабо гипоэллиптических по части переменных скалярных уравнений (под другим названием) был введен и описан Гордингом и Мальгранжем в [1] и Эренпрайсом [2]. Мацуура [3] перенес этот результат на общие системы с постоянными коэффициентами. Сильно гипоэллиптические по части переменных операторы были изучены Эренпрайсом в [2]. Е. А. Горин [1] получил более детальные результаты в том же направлении. Другие классы гипоэллиптических по части переменных операторов изучались Гордингом и Мальгранжем [1], Эренпрайсом [5], [2], Паламодовым [9], Гориным [1], [2], Фрибергом [1], [2] и В. И. Буренковым [1].

Существование сглаживающих операторов было обнаружено Гориным и В. В. Грушиным [1] и изучалось ими также в [2]. Теорема 4 обобщает результаты этих работ.

К содержанию § 5 примыкает также цикл работ по гипоэллиптичности сверточных операторов: Эренпрайс [5], [2], Хёрмандер [8]. Бенгель [1] установил аналитичность всех решений эллиптического уравнения в классе гиперфункций. Другое доказательство этого факта было дано Комацу [1].

§ 6. Задача отыскания классов единственности решения задачи Коши имеет значительную историю. Первые работы в этом направлении принадлежат Хольмгрену [1] и А. Н. Тихонову [1], которые указали классы единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности и близких уравнений. С. Тэклинд [1] нашел условие на функцию $\varphi(x)$, необходимое и достаточное для того, чтобы функции $f(x)$, подчиненные условию $f(x) = O(\exp\,\varphi(x))$, образовывали класс единственности для уравнения теплопроводности.

Первые общие результаты принадлежат здесь Петровскому [2], который рассматривал квадратные системы уравнений с постоянными или зависящими лишь от t коэффициентами (и одним временным переменным), разрешенные относительно старших производных по t. Он показал, что ограниченные по пространственным переменным функции образуют класс единственности для любой такой системы. В. Э. Лянце [1] и Л. Шварц [3] усилили эту теорему, заменив класс ограниченных по x функций на класс медленно растущих функций. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов в [1] для систем, рассмотренных Петровским, нашли классы единственности, содержащие экспоненциально растущие функции. В уточненном виде их результаты были опубликованы в [3], где они получены методом изучения оператора $\exp\,(tp(D))$ в подходящих пространствах основных функций. Теорема единственности Гельфанда—Шилова, относящаяся к системам с постоянными коэффициентами, является частным случаем теоремы § 6; она сформулирована в примере 1. Результат § 6 впервые был опубликован автором в [7].

Классы единственности решения задачи Коши для параболических уравнений с переменными коэффициентами были указаны О. А. Ладыженской [1], а для общей параболической системы — С. Д. Эйдельманом [1], [2]. Г. Н. Золотарев [1] обобщил упомянутый выше результат Тэклинда на системы, параболические по Петровскому. Изучением классов единственности решения задачи Коши занимался также Я. И. Житомирский [1], [2]. В [3] он получил весьма точные результаты о классах единственности решения задачи Коши в случае одного пространственного переменного.

В обзоре Мальгранжа [10] описан цикл работ о единственности решения задачи Коши на нехарактеристическом подпространстве.

К главе VII. § 7. Термин «p-выпуклость» впервые был использован Хёрмандером в [6]. Однако этот термин относился не к функциональному пространству, а к области в R^n, именно, область Ω была названа Хёрмандером p-выпуклой (p — скалярный оператор с постоянными коэффициентами), если она удовлетворяла условию (S_Ω) теоремы 1 § 10. Условие же (S_Ω) впервые появилось в диссертации Мальгранжа [3], в которой он установил, что оно эквивалентно каждой из двух теорем о разрешимости неоднородного уравнения $p\mathscr{E}(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)$ и $p\mathscr{D}'^F(\Omega) = \mathscr{D}'^F(\Omega)$. Хёрмандер в [6] ввел также термин «строго p-выпуклая область», который означает выполнение некоторого более сильного условия типа (S_Ω) и эквивалентен соотношению

$p\mathscr{D}'(\Omega)=\mathscr{D}'(\Omega)$. Термин «$M$-выпуклая область» в применении к произвольному конечному $\mathscr{P}$-модулю M был использован впервые Мальгранжем [4]. Его значение близко к нашему: область Ω M-выпукла в смысле Мальгранжа тогда и только тогда, когда M-выпукло пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ в смысле нашего определения. Введенный автором термин «M-выпуклое пространство» связан с тем, что разрешимость неоднородной системы зависит не только от области, в которой она задана, но и от класса функций, в котором ищется решение (см., Хёрмандер [6], [10]).

Узкая проблема M-выпуклости была впервые сформулирована Мальгранжем в [4]. Представляет интерес более простой вариант узкой проблемы M-выпуклости, сформулированный в той же работе Мальгранжа.

§ 8. Общая проблема разрешимости неоднородного уравнения возникла из классической задачи построения фундаментальных решений в целом. В работах Фредгольма [1], Цейлона [1], Герглотца [1] и Петровского [3] были построены фундаментальные решения для специальных классов операторов с постоянными коэффициентами. Одним из первых успехов общей теории уравнений с постоянными коэффициентами было доказательство существования фундаментального решения для любого скалярного оператора, полученное Эренпрайсом [3] и Мальгранжем [3]. Этот результат был получен как следствие более общих теорем разрешимости вида $p\Phi=\Phi$. Мальгранж в [3] установил теорему разрешимости для пространств $\Phi=\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'^F(\Omega)$, где Ω — произвольная выпуклая область в R^n. Эренпрайс в [3] получил тот же результат в случае $\Omega=R^n$. В [4] Эренпрайс установил аналогичную теорему для пространства $\mathscr{D}'(R^n)$. Мальгранж [5] обобщил этот результат на случай пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ для любой выпуклой области Ω. В своей диссертации [3] Мальгранж показал также, что для всех перечисленных пространств Φ и любого скалярного оператора p экспоненциальные полиномы плотны в Φ_p. Эренпрайс [4] установил также теоремы разрешимости для некоторых пространств Φ целых функций. Разрешимость скалярного уравнения в $\mathscr{D}'(\Omega)$ изучалась в упомянутой работе Хёрмандера [6], а также Неймарком [1].

Мальгранж [3] и Хёрмандер [7] занимались вопросом о наилучших возможных локальных свойствах фундаментальных решений. Хёрмандер и Трев [3] предложили явную конструкцию фундаментального решения, основанную на многомерном контурном интегрировании. Трев [3], [4], М. Зернер [3] и Т. Широта [1] рассмотрели задачу о построении фундаментального решения для уравнения, зависящего от параметра. Агранович [1—4], усовершенствовав метод Широта, дал явную конструкцию решений в некоторых из теорем о разрешимости, описанных выше, и установил некоторые новые теоремы разрешимости.

Паламодов в [1], [2] для операторов p, подчиненных условию $p(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z=0$, нашел функциональные пространства, в которых справедливы одновременно теоремы разрешимости и единственности решения неоднородного уравнения.

Теорема о разрешимости общей системы уравнений при выполнении условий согласования впервые была высказана Эренпрайсом [1] как следствие «фундаментального принципа». Для пространств $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, где Ω — любая выпуклая область, и аналогичных эта теорема была получена автором в [5], а для пространств $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Gamma)$, где Γ — любой выпуклый компакт, также независимо Мальгранжем [4], [1].

Тот факт, что для выполнения соотношения $p\mathscr{E}(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ с любым скалярным оператором $p\neq 0$ необходима выпуклость связной области Ω, был впервые отмечен Мальгранжем [4].

Гомологическая форма теоремы о разрешимости общей системы была предложена Мальгранжем [4]. Следствие 5 и вытекающее из него аддитивное представление решений (пример 2) дают решение задачи Адамара о факторизации оператора p. Задачей Адамара в невыпуклой области занимался также Мацуура [4]. Следствие 6 обобщает результаты Грушина [3] о Q-гипоэллиптических операторах, сформулированные в примере 1. Следствие 7 впервые было отмечено автором в [6] в несколько иной форме.

Теорема 5 публикуется впервые. Второе утверждение этой теоремы ввиду замечания, сделанного в конце, содержит ранний результат Мальгранжа [6], [3], относящийся к частному случаю $s=t=1$.

К содержанию параграфа примыкают теоремы о разрешимости систем уравнений в пространствах медленно растущих функций. Для скалярных операторов теорема о разрешимости в пространстве S' была получена Хёрмандером [9] и С. Лоясевичем [1], [2]. Для систем общего вида аналогичный результат принадлежит Мальгранжу [7], см. также Паламодов [8].

Теоремы о разрешимости и экспоненциальной аппроксимации для сверточных уравнений были получены Мальгранжем [3], Эренпрайсом [2], [7], Хёрмандером [6] и Мартино [2].

Разрешимость неоднородного уравнения для операторов с переменными коэффициентами изучалась Хёрмандером [12], [13], [10]. В [13] он выделил обширный класс операторов с переменными коэффициентами, для которых неоднородное уравнение почти всегда неразрешимо. Тем же вопросом для уравнений первого порядка занимались Л. Ниренберг и Трев [1], а для систем уравнений — Мацумура [1].

§ 9. Следствие 1 (его алгебраическая часть) впервые было сформулировано Мальгранжем [4]. Теоремы 2 и 4 были опубликованы автором в [11]. Теорема 3 публикуется впервые. Алгебраическая часть теоремы 3 есть известная в гомологической алгебре формула ассоциативности. Теорема 4 обобщает теорему Серра [2] о топологии областей Рунге (см. пример 3). Метод ее доказательства использует рассуждения Серра.

§ 10. Теорема 1, по существу, принадлежит Мальгранжу [3]. В доказательстве необходимости условия (S_Ω) я следую Хёрмандеру [10]. Метод доказательства достаточности является новым. Отмечу, что для скалярных операторов с вещественной главной частью Мальгранж [8] получил достаточные и близкие к ним необходимые геометрические условия на область для выполнения условия (S_Ω) (см. также Хёрмандер [10]), Хёрмандер [6], [10] получил аналогичные условия для существования решения в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Следствие 1, по существу, также принадлежит Мальгранжу.

Теоремы 2, 3 и 4 публикуются впервые.

§ 11. Теорема 1 является аналогом теоремы конечности Андреотти—Грауэрта для дифференциальных операторов в вещественном пространстве. Доказательство теоремы 1 в общих чертах следует рассуждениям Андреотти—Грауэрта [1].

Теорема типа Андреотти—Грауэрта была получена также Мальгранжем [11]. Хёрмандер в [1] уточнил теоремы Андреотти—Грауэрта и получил ряд весьма точных теорем существования и аппроксимации для оператора $''d$. В [11] Хёрмандер нашел геометрические условия на область, обеспечивающие разрешимость системы уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и одной неизвестной функции в весьма общих предположениях.

§ 12. Теорема 1 усиливает результат Мальгранжа [12], который установил эту теорему лишь для пространства $\mathcal{E}(\Omega)$. Первая публикация этой теоремы была сделана автором в [11]. Теорема 2 публикуется впервые.

К главе VIII. § 14. Первая из теорем о возможности продолжения решений из окрестности границы область внутрь была сформулирована Эренпрайсом в [6]. Более сильные результаты были получены Мальгранжем [4], [14] и автором совместно с В. В. Грушиным [12] как следствия теорем о разрешимости общих систем. Теоремы 1 и 2 для скалярных операторов были установлены Грушиным [4], который опирался на работу автора [4]. Следствие 5 обобщает теорему двойственности Гротендика [2], относящуюся лишь к скалярным операторам.

Задачей о неустранимых особенностях гладких решений занимался Л. А. Чудов [1], Грушин [3], [4], а также Е. А. Горин и Грушин [2]. Следствие 4 обобщает результаты этих авторов. Пример 3 принадлежит Грушину [4]. Грушин в [4] нашел широкие достаточные условия отсутствия неустранимых особенностей у любых бесконечно дифференцируемых решений.

Частный случай теоремы 6, сформулированный в примере 5 9°, принадлежит Ф. Джону [1] (случай негиперболичности оператора) и Б. Бродда [1] (случай характеристического подпространства); А. А. Горин и Е. А. Горин [1] изучили смежный вопрос: существование решений, данные Коши которых имеют компактные носители. Результат, сформулированный в примере 6, есть теорема Осгуда—Броуна (см., например, Фукс [1]).

Теоремы 3, 4, 5, 6 и 7 публикуются впервые. Близкие результаты содержатся в работах автора [12], [10]. В связи с задачей о продолжении Мальгранж [13] изучил когомологии пучка решений $\mathscr{E}_M$ с компактными носителями.

§ 15. Теорема 2 впервые опубликована автором в [10]. Тот факт, что всякое решение скалярного уравнения гладкое в дифференцируемой окрестности границы, оказывается дифференцируемым и внутри, был отмечен впервые Аграновичем [1]. Более сильный результат, содержащийся в примере 2 7°, был получен Мальгранжем [5], Джоном [2] (см. также Грушин [5]). Теорема 3, следствия 3 и 4 публикуются впервые. Близкие результаты опубликованы автором в [10]. Задачей о продолжении аналитичности занимался Боман [1].

Отмечу работы Зернера [2] и Хёрмандера [10], в которых конструируется решение скалярного уравнения, носитель сингулярности которого совпадает с заданной бихарактеристикой, а также работу Широта [2], в которой найдено необходимое и достаточное условие продолжимости дифференцируемости через гиперплоскость. Тонкая теорема о продолжимости дифференцируемости решений принадлежит Грушину [6]. Задачей о продолжении гладкости решений уравнений с переменными коэффициентами занимался Широта [3], Хёрмандер [10].

ЛИТЕРАТУРА

Агранович М. С.

[1] Несколько теорем об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 128, № 3, 439—442 (1959).

[2] Об аналитических решениях уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 124, № 6, 1183—1186 (1959).

[3] Существование решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в некоторых классах функций, Вестник МГУ, № 3, 1959, 3—13.

[4] Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН 16, № 2 (98), 27—93 (1958).

[5] Общие решения дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 123, № 1, 9—12 (1958).

Бурбаки Н.

[1] Топологические векторные пространства, перев. с франц., ИЛ, Москва, 1959.

Буренков В. И.

[1] О бесконечной дифференцируемости и аналитичности убывающих на бесконечности решений уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР, 174, № 5, 1007—1010 (1967).

Ван дер Варден Б. Л.

[1] Современная алгебра, ч. II, перев. с нем., Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Волевич Л. Р.

[1] Локальные свойства решений квазиэллиптических систем, Матем. сб. 59 (101), 3—52 (1962).

[2] О гипоэллиптических системах с переменными коэффициентами, ДАН СССР 156, № 6, 1262—1265 (1964).

Волевич Л. П., Панеях Б. П.

[1] Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН 20, № 1, 3—74 (1965).

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

[1] Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН 8, № 6, 3—54 (1953).

[2] Пространства основных и обобщенных функций («Обобщенные функции», вып. 2), Физматгиз, Москва, 1958.

[3] Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений («Обобщенные функции», вып. 3), Физматгиз, Москва, 1958.

Годеман Р.

[1] Алгебраическая топология и теория пучков, перев. с франц., ИЛ, Москва, 1961.

Горин Е. А.

[1] Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, СМЖ 3, № 4, 500—526 (1962).

[2] О квадратичной суммируемости решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, СМЖ 2, № 2, 221—232 (1961).

[3] Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных, УМН 16, № 1 (97), 91—119 (1961).

Горин А. А., Горин Е. А.

[1] О разрешимости задачи Коши с финитными начальными данными, Дифф. уравнения 1, № 12, 1640—1646 (1965).

Горин Е. А., Грушин В. В.

[1] Дифференциальные уравнения, решения которых сглаживаются при дифференцировании, Вестник МГУ, № 2, 1963, 25—32.

[2] О некоторых локальных теоремах для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, ТММО 14, 200—210 (1965).

Грушин В. В.

[1] Об одном свойстве решений гипоэллиптического уравнения, ДАН СССР 137, № 4, 768—771 (1961).

[2] Связь между локальными и глобальными свойствами решений гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, Матем. сб. 66 (108), № 4, 525—550 (1965).

[3] О Q-гипоэллиптических уравнениях, Матем. сб. 57 (99), № 2, 233—240 (1962).

[4] О решениях с изолированными особенностями для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, ТММО 15, 262—278 (1966).

[5] О решениях дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 139, № 1, 17—19 (1961).

[6] Распространение гладкости решений дифференциальных уравнений главного типа, ДАН СССР 148, № 6, 1241—1244 (1963).

Гуревич Б. Л.

[1] Новые типы пространств основных и обобщенных функций и проблема Коши для операторных уравнений, Диссертация, Харьков, 1956.

Данфорд Н., Шварц Дж.

[1] Линейные операторы, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1962.

Житомирский Я. М.

[1] Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами, Изв. высш. уч. зав., Математика 1 (8), 55—74 (1959).

[2] Точные классы единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка, ДАН СССР 171, № 1, 29—32 (1966).

[3] Классы единственности решения задачи Коши, УМН 21, № 5, 269—270 (1966).

Зарисский О., Самюэль П.

[1] Коммутативная алгебра, тт. I, II, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1963.

Золотарев Г. Н.

[1] Необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши для параболических систем, Изв. высш. уч. зав., Математика 1 (1958).

[2] О точных оценках для классов единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, Диссертация, Москва, 1958.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.

[1] Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва, 1959.

Картан А., Эйленберг С.

[1] Гомологическая алгебра, перев. с франц., ИЛ, Москва, 1960.

Ладыженская О. А.

[1] О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения, Матем. сб. 27, № 2, 175—184 (1950).

Ляйце В. Э.
[1] О задаче Коши в области функций действительного переменного, Укр. матем. ж. 1, № 4, 42—63 (1949).
Макаров Б. М.
[1] Об индуктивном пределе последовательности нормированных пространств, ДАН СССР 119, № 6, 1092—1094 (1958).
Паламодов В. П.
[1] Об условиях на бесконечности, обеспечивающих корректную разрешимость некоторого класса уравнения вида $p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f$, ДАН СССР 129, № 4, 740—743 (1959).
[2] Условия корректной разрешимости в целом некоторого класса уравнений с постоянными коэффициентами, СМЖ 4, № 5, 1137—1149 (1963).
[3] Об общем виде решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 137, № 4, 774—777 (1961).
[4] Общий вид решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 143, № 6, 1278—1281 (1962).
[5] О системах дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 148, № 3, 523—526 (1963).
[6] Общие теоремы о системах линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Сов.-амер. симп., Новосибирск, 1963.
[7] Структура модулей над кольцом многочленов в пространствах аналитических функций, Диссертация, Москва, 1965.
[8] Строение полиномиальных идеалов и их факторпространств в пространствах бесконечно дифференцируемых функций, ДАН СССР 141, № 6, 1302—1305 (1961).
[9] К теории гипоэллиптических и частично гипоэллиптических операторов, ДАН СССР 140, № 5, 1015—1018 (1961).
[10] О недоопределенных и переопределенных системах дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР 156, № 6, 1288—1291 (1964).
[11] О проблеме M-выпуклости, ДАН СССР 161, № 5, 1015—1018 (1965).
[12] Полиномиальные идеалы и уравнения в частных производных, УМН 18, 2 (110), 164—168 (1963).
Петровский И. Г.
[1] Sur l'analycité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Матем. сб. 5 (47), № 1, 3—68 (1939).
[2] О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, секция А, 1, № 7 (1938).
[3] On the diffusion of waves and the lacunas for systems of hyperbolic equations, Матем. сб. 17 (59), 289—370 (1945).
Соболев С. И.
[1] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
Тихонов А. Н.
[1] Théorèms d'unicité pour l'équation du chaleur, Матем. сб. 42, № 2, 199—216 (1935).
Фукс Б. А.
[1] Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, Москва, 1962.
[2] Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, Москва, 1963.

Чудов Л. А.
[1] Об особенностях решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **125**, № 3, 504—507 (1959).
Шилов Г. Е.
[1] Аналог одной теоремы Лорана Шварца, Изв. высш. уч. зав., № 4 (23), 137—147 (1961).
[2] Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН **14**, № 5, 3—46 (1959).
Эйдельман С. Д.
[1] Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения, Матем. сб. **33**, № 3, 359—382 (1953).
[2] Параболические системы, «Наука», 1964.
Эрве М.
[1] Функции многих комплексных переменных, перев. с франц., «Мир», Москва, 1965.
Andreotti A., Grauert H.
[1] Théorèmes de finitude pour la comologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. Frace **90**, 1962, 193—259.
Перевод: Комплексные пространства, «Мир», 1965.
Bengel G.
[1] a) Sur une extension de la théorie des hyperfonctions; b) Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique, C. R. A. S., Paris, **262**, 1966.
Boman J.
[1] On the propagation of analyticity of solutions of differential equations with constant coefficients, Ark. för Math. **5**, № 7, 1964, 271—279.
Brodda B.
[1] On uniqueness theorems for differential equations with constant coefficients, Math. Scand. **9**, 1961, 55—68.
Browder F.
[1] Regularity theorems for solutions of partial differential equations with variable coefficients, Proc. N. Ac. Sc. USA **43**, № 2, 1957, 234—236.
Dieudonné J., Schwartz L.
[1] La dualité dans les espaces (F) et (DF), Ann. Inst. Fourier **1**, 1949, 61—101.
Ehrenpreis L.
[1] A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proc. Int. symp. on linear spaces, Jerusalem, 1960.
[2] Solutions of some problems of division IV, Amer. J. Math. **82**, № 3, 1960, 522—588.
[3] Solutions of some problems of division I, Amer. J. Math. **76**, № 4, 1954, 883—903.
[4] Solutions of some problems of division III, Amer. J. Math. **78**, № 4, 1956, 685—715.
[5] General theory of elliptic equations, Proc. N. Ac. Sc. **42**, № 1, 1956, 39—41.
[6] A new proof and an extension of Hartog's theorem, Bull. Amer. Soc. **67**, № 5, 1961, 507—509.
[7] Solutions of some problems of division II, Amer. J. Math. **77**, № 2, 1955, 286—292.
Fredholm J.
[1] Sur l'intégrale fondamentale d'une équation differentielle elliptique à coefficients constants, Rend. Circ. Mat. Palermo **25**, 1908, 346—351.

Friberg J.
[1] Partially hypoelliptic differential equations of finite type, Math. Scand. **9**, 1961, 22—42.
[2] Estimates for partially hypoelliptic differential operators, Lund, 1963.
Gårding L., Malgrange B.
[1] Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, Math. Scand. **9**, 1961, 5—21.
Grothendieck A.
[1] Sur les espaces (F) et (DF), Summa Bras. Math. **3**, 1954, 57—123
Перевод: Математика 2 : 3, 1958, 81—127.
[2] Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dériveés partielles, J. Analyse Math. 2, 1952/53, 243—280.
Herglotz G.
[1] Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 78, 1926, 93—126, 287—318; 80, 1928, 60—144; abh. Math. Sem. Univ. Gamburg **6**, 1928, 189—197.
Holmgren E.
[1] Sur les solutions quasianalytiques de l'équations de la chaleur, Arkiv för Mat. **18**, 1924.
Hörmander L.
[1] L^2 — estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. **113**, № 1—2, 1965, 89—152.
Перевод: Математика **10**: 2, 1966, 59—116.
[2] On the theory of general partial differential operators, Acta Math. **94**, 1955, 161—248.
Перевод: ИЛ, Москва, 1959.
[3] On interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **11**, № 2, 1958, 197—218.
Перевод: Математика **7**: 1, 1963, 66—78.
[4] Hypoelliptic differential operators, Ann. Inst. Fourier **11**, 1961, 477—492.
[5] Differentiability properties of solutions of systems of differential equations, Arkiv för Mat. **3**, № 6, 1958, 527—535.
[6] On the range of convolution operators, Ann. Math. **76**, № 1, 1962, 148—170.
Перевод: Математика **6**: 3, 1962, 37—65.
[7] Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand. **5**, 1957, 27—39.
[8] Hypoelliptic convolution equations, Acta Math. **9**, 1960, 551—585.
[9] On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Mat. **3**, 1958, 555—568.
Перевод: Математика **3**: 5, 1959, 117—130.
[10] Linear partial differential operators, Springer, 1963.
Перевод: «Мир», Москва, 1965.
[11] The Frobenius—Nirenberg theorem, Arkiv för Mat. **5**, № 5, 1964, 425—432.
[12] Differential operators of principal type, Math. Ann. **140**, 1960, 124—146.
Перевод: Математика 5 : 5, 1961, 89—114.
[13] Differential equations without solutions, Math. Ann. **140**, 1960, 160—173.
Перевод: Математика **5** : 5, 1961, 115—120.
John F.
[1] Non admissible data for differential equations with constant coefficients, Comm. Pure Appl. Math. **10**, 1957, 391—398.
[2] Continuons dependens on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound., Comm. Pure Appl. Math. **13**, 1960, 551—585.

Komatsu H.
[1] Resolutions by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, Stanford Univ., 1960.
Lech C.
[1] A metric property of the zeros of a complex polynomial ideal, Arkiv för Mat. **3**, № 6, 1958, 543—554.
Lojasiewicz S.
[1] Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles, C. R. A. S., Paris, **246**, 1958, 683.
[2] Sur le problème de la division, Studia Math. **18**, № 1, 1959, 87—136.
Malgrange B.
[1] Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Coll. Int. C. N. R. S., 1962, Paris.
[2] Sur une classe d'operateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France **85**, 1957, 283—306.
[3] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier **6**, 1956, 271—355.
[4] Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, Paris, 1962/63, № 246.
[5] Sur la propagation de la régularité des solutions des équations à coefficients constants, Bull. Math. Soc. Math. Phys. R. P. R. **3** (53), № 4, 1959, 433—440.
[6] Séminaire Schwartz, Paris, 1954/55, exp. 3.
[7] Division des distributions I—IV, Séminaire Schwartz, Paris, 1959/60, exp. 21—25; Séminaire Bourbaki, Paris, 1959/60, n° 203.
[8] Sur les ouverts convexes par rapport à un operateur différentiel, C. R. A. S., Paris, **254**, 1962, 614—615.
[9] Sur les équations de convolution, Rend. Sem. Univ. Torino **19**, 1959/60, 19—27.
Перевод: Математика **7** : 2, 1963, 53—58.
[10] Sur l'unicité du problème de Cauchy, Rend. Sem. Mat. Milano **30**, 1960, 3—10.
[11] Some remarks on the notion of convexity for differential operators, Diff. Analysis, Bombay Coll., 1964, 163—174.
[12] Quelques problèmes de convexité pour les operateurs différentiels à coefficients constants I, Séminaire Collège de France, 1962/63, exp. 7.
[13] Quelques problèmes de convexité pour les operateurs différentiels à coefficients constants II, Séminaire Collège de France, 1962/63, exp. 7.
[14] Sur les systèmes differentiels à coefficients constants, Séminaire Collège de France, 1961/62, exp. 8.
Martineau A.
[1] Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier—Borel, J. Analyse Math. **9**, 1963, 1—163.
[2] Équations différentielles d'ordre infini., Séminaire Collège de France, 1965/66.
Matzumura M.
[1] Existence locale de solutions pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles, Japan J. Math. **32**, 1962, 13—49.
Matzuura S.
[1] On general systems of partial differential operators with constant coefficients, J. Math. Soc. Japan **13**, № 1, 1961, 94—103.
[2] A remark on ellipticity of general systems of differential operators with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. **1**, № 1, 1961, 71—74.

[3] Partially hypoelliptic and partially elliptic systems of differential operators with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 1, № 2, 1962, 147—160.

[4] Factorisation of differential operators and decomposition of solutions of homogeneous equations, Osaka Math. J. **15**, № 2, 1963, 213—231.

M i z o h a t a

[1] Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France **85**, 1957, 15.

N a r a s i m h a n R.

[1] Imbedding of holomorphically complete complex spaces, Amer. J. Math. **82**, № 4, 1960, 917—934.
Перевод: Математика 8 : 6, 1964, 141—156.

N e y m a r k H.

[1] On the existence of solutions of differential equations with constant coefficients, Arkiv för Math. **5**, 1965, 433—443.

N i r e n b e r g L., T r è v e s F.

[1] Solvability of a first ordre linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **14**, 1963, 331—351.

S c h w a r t z L.

[1] Théorie des distributions I, II, Paris, Hermann, 1950/51.

[2] Distributions semi-regulières et changements de variables, J. Math. Pure Appl. (9) **36**, 1957, 109—127.

[3] Les équations d'evolution liées au produit de composition, Ann. Inst. Fourier **2**, 1950, 19—49.

[4] Комплексные аналитические многообразия, Эллиптические уравнения с частными производными, «Мир», Москва, 1964.

[5] Théorie des noyaux, Proc. Int. Congress Math. 1, 1952, 220—230.
Перевод: Математика **3** : 3, 1959, 69—79.

S e r r e J.-P.

[1] Géométrie analytique et géométrie algébrique, Ann. Inst. Fourier **6**, 1955/56, 1—42.

[2] Une propriété topologique des domains de Runge, Proc. Am. Math. Soc. **6**, № 1, 1955, 133—134.

[3] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll. Bruxelles, 1953.
Перевод: Расслоенные пространства и их приложения, ИЛ, Москва, 1958, стр. 363—371.

[4] Локальная алгебра и теория кратностей, Математика **7** : 5, 1963, 3—93.

S h i r o t a T.

[1] On solutions of a partially differential equations with a parameter., Proc. Japan. Acad. **32**, № 6, 1956, 401—405.

[2] On the propagation of regularity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc. Japan Acad. **38**, № 8, 1962, 587—590.

[3] On the propagation of regularity of solutions of partial differential equations, Proc. Japan Acad. **39**, № 2, 1963, 120—124.

T a c k l i n d S.

[1] Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Soc. Sc. Upsal. **4**, № 10, 1937.

T r è v e s F.

[1] Opérateurs différentiels hypoelliptiques, Ann. Inst. Fourier **9**, 1959, 1—73.

[2] An invariant criterion of hypoellipticity, Am. J. Math. **83**, № 4, 1961, 645—668.

[3] Solutions élementaires d'équations aux dérivées partielles dépendent d'une paramètre, C. R. A. S., Paris, **242**, 1956, 1250—1252.
[4] Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, «Мир», Москва, 1965.

Weyl H.
[1] The method of orthogonal projection in potehtial theory, Duke Math. J. **7**, 1940, 411—444.

Zerner M.
[1] Théorie de Hartogs et singularités des distributions, Bull. Soc. Math. France **90**, 1962, 165—184.
[2] Solutions de l'équations des ondes présentant des singularities sur une droite, C. R. A. S., Paris, **250**, 1960, 2980—2982.
[3] Solution élementaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendent d'un paramètre, C. R. A. S., Paris, **248**, 1959, 3679.

Zeylon N.
[1] Das Fundamentalintegral der allgemeinen partiellen linearen Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten, Ark. Mat. Astr. Fys. **6**, № 38, 1911, 1—32.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

К главе I

К главе II

К главе III

К главе IV

К главе V

К главам VI—VIII

Паламодов Виктор Павлович

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М., 1967 г., 488 стр.

Редакторы: *В. М. Гринберг* и *В. В. Грушин*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *З. В. Автонеева* и *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 20/IV 1967 г. Подписано к печати 2/X 1967 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$, тип. № 1. Физ. печ. л. 30,5. Условн. печ. л. 30,5. Уч.-изд. л. 30,43. Тираж 10 000 экз. Т-12523. Цена книги 2 р. 12 к. Заказ № 675

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.