



CLASSICAL ELECTRICITY and MAGNETISM

by

WOLFGANG K. H. PANOFSKY

DEPARTMENT OF PHYSICS
STANFORD UNIVERSITY

and

MELBA PHILLIPS

ADDISON — WESLEY PUBLISHING COMPANY, Inc.
CAMBRIDGE 42, MASS.

В. ПАНОВСКИЙ, М. ФИЛИПС

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

В. П. БЫКОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

С. П. КАПИЦЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1963

АННОТАЦИЯ

В книге изложены классическая электродинамика и специальная теория относительности. Приведенный материал излагается наглядно, отчетливо выявляется физическая сущность рассматриваемых явлений и вместе с тем дается достаточный для овладения предметом теоретический аппарат. Другая характерная особенность книги — ее современность. Рассматриваются наиболее современные приложения электродинамики (теория эффекта Черенкова, фокусировка потоков заряженных частиц и др.). Книга является хорошим дополнением к распространенным у нас книгам И. Е. Тамма «Теория электричества» и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля».

Расчитана на студентов старших курсов университетов и некоторых вузов как подробное учебное пособие по электродинамике, будет полезна для аспирантов и научных работников-физиков.

В. Пановский, М. Филипс

Классическая электродинамика

М., Физматгиз, 1963 г., 432 стр. с илл.

Редактор *А. Л. Черняк*.

Технический редактор *Н. Я. Мурашова*.

Корректор *Е. В. Кузнецова*

Сдано в набор 30/IV 1962 г. Подписано к печати 23/X 1962 г.

Физ. печ. л. 27.

Условн печ л. 27.

Уч.-изд. л. 25,73.

Бумага 60×90/16.

Тираж 12 000 экз.

Цена книги 1 р. 49 к. Заказ № 435.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29

Отпечатано со стереотипа

в Ленинградской типографии Госгортехиздата
Заказ № 3/62 Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина. 54

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	11
Из предисловия авторов	12
Глава 1. Электростатическое поле в вакууме	15
§ 1.1. Векторные поля	15
§ 1.2. Электрическое поле	20
§ 1.3. Закон Кулона	21
§ 1.4. Потенциал электростатического поля	23
§ 1.5. Распределение зарядов и потенциал	24
§ 1.6. Особенности поля	26
§ 1.7. Совокупность точечных зарядов	27
§ 1.8. Дипольное взаимодействие	30
§ 1.9. Поверхностные особенности	32
§ 1.10. Объемное распределение дипольных моментов	35
Задачи	36
Литература	38
Глава 2. Граничные условия и связь между микроскопическими и макроскопическими полями	39
§ 2.1. Электрическая индукция	39
§ 2.2. Граничные условия	41
§ 2.3. Электрическое поле в материальной среде	44
§ 2.4. Поляризуемость	48
Задачи	50
Литература	51
Глава 3. Общие методы решения задач о нахождении потенциала	52
§ 3.1. Теорема о единственности	52
§ 3.2. Теорема взаимности Грина	54
§ 3.3. Функция Грина	55
§ 3.4. Инверсия	57
§ 3.5. Метод изображений	59
§ 3.6. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных	61
Задачи	66
Литература	68
Глава 4. Задачи с двумерным распределением потенциалов	69
§ 4.1. Комплексно-сопряженные функции	69
§ 4.2. Емкость и напряженность электрического поля	71
§ 4.3. Потенциал однородного поля	72
§ 4.4. Потенциал линейного заряда	72
§ 4.5. Преобразование в комплексной плоскости	73
§ 4.6. Преобразование Шварца	74
§ 4.7. Преобразование при наличии одного угла	77
§ 4.8. Кочформное отображение прямоугольника	80
§ 4.9. Прямое решение уравнения Лапласа путем разложения потенциала на гармоники	81

§ 4.10.	Потенциал линейного заряда и диэлектрического цилиндра . . .	82
§ 4.11.	Линейный заряд между двумя пересекающимися проводящими поверхностями	85
	Задачи	87
	Литература	88
Глава 5.	Задачи с трехмерным распределением потенциалов . . .	89
§ 5.1.	Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат	89
§ 5.2.	Потенциал точечного заряда	90
§ 5.3.	Потенциал диэлектрической сферы и точечного заряда	91
§ 5.4.	Потенциал диэлектрической сферы в однородном поле	92
§ 5.5.	Выражение для аксиально симметричного потенциала, заданного на сфере	93
§ 5.6.	Потенциал заряженного кольца	94
§ 5.7.	Задачи без осевой симметрии	95
§ 5.8.	Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат	96
§ 5.9.	Применение цилиндрических функций к решению различных задач	98
	Задачи	100
	Литература	101
Глава 6.	Сила и энергия электростатического поля	102
§ 6.1.	Энергия поля в свободном пространстве	102
§ 6.2.	Плотность энергии в диэлектриках	105
§ 6.3.	Термодинамический смысл энергии U	106
§ 6.4.	Теорема Томсона	107
§ 6.5.	Объемные силы электростатического поля	108
§ 6.6.	Тензор натяжений Максвелла	111
§ 6.7.	Поведение диэлектрических жидкостей в электростатическом поле	116
	Задачи	120
	Литература	121
Глава 7.	Токи и их взаимодействие	122
§ 7.1.	Закон Ома	122
§ 7.2.	Электродвижущая сила	123
§ 7.3.	Решение задач с постоянным током	124
§ 7.4.	Время релаксации	126
§ 7.5.	Магнитное взаимодействие постоянных токов	127
§ 7.6.	Магнитное поле	128
§ 7.7.	Магнитный скалярный потенциал	129
§ 7.8.	Векторный магнитный потенциал	131
§ 7.9.	Разновидности токов	132
§ 7.10.	Поляризационные токи	133
§ 7.11.	Токи намагничения	134
§ 7.12.	Ток смещения в вакууме	137
	Задачи	138
	Литература	139
Глава 8.	Магнитные среды и краевые задачи	140
§ 8.1.	Напряженность магнитного поля	140
§ 8.2.	Источники магнитного поля	141
§ 8.3.	Магнетики: магнитная восприимчивость и граничные условия	145
§ 8.4.	Магнитные цепи	146
§ 8.5.	Решение краевых задач с помощью магнитного скалярного потенциала	147
§ 8.6.	Теорема о единственности векторного потенциала	148

§ 8.7.	Решение задач с помощью векторного потенциала	149
§ 8.8.	Векторный потенциал в двумерном случае	152
§ 8.9.	Векторный потенциал в цилиндрических координатах	154
	Задачи	157
	Литература	158
Глава 9.	Уравнения Максвелла	159
§ 9.1.	Закон индукции Фарадея	159
§ 9.2.	Уравнения Максвелла для покоящейся среды	160
§ 9.3.	Закон Фарадея для движущихся сред	161
§ 9.4.	Уравнения Максвелла для движущихся сред	164
§ 9.5.	Движение проводника в магнитном поле	166
	Задачи	168
	Литература	169
Глава 10.	Энергия, сила и импульс электромагнитного поля	170
§ 10.1.	Энергия системы квазистационарных токов	170
§ 10.2.	Силы, действующие в системе токов	173
§ 10.3.	Индуктивность	174
§ 10.4.	Объемная магнитная сила	177
§ 10.5.	Общие выражения для электромагнитной энергии	178
§ 10.6.	Закон сохранения импульса	181
	Задачи	183
	Литература	184
Глава 11.	Волновое уравнение и плоские волны	185
§ 11.1.	Волновое уравнение	185
§ 11.2.	Плоские волны	188
§ 11.3.	Давление излучения	191
§ 11.4.	Плоские волны в движущейся среде	194
§ 11.5.	Отражение и преломление на плоской границе	196
§ 11.6.	Волны в проводящей среде. Отражение от металлов	201
§ 11.7.	Общее решение однородного волнового уравнения	202
	Задачи	203
	Литература	204
Глава 12.	Решение волнового уравнения при наличии проводящих границ	205
§ 12.1.	Граничные условия на поверхности металла	205
§ 12.2.	Собственные функции и собственные значения волнового уравнения	207
§ 12.3.	Колебания в прямоугольном резонаторе	211
§ 12.4.	Цилиндрические резонаторы	213
§ 12.5.	Круглый цилиндрический резонатор	215
§ 12.6.	Волноводы	217
§ 12.7.	Рассеяние электромагнитных волн круглым цилиндром	220
§ 12.8.	Сферические волны	222
§ 12.9.	Рассеяние электромагнитных волн сферой	225
	Задачи	229
	Литература	230
Глава 13.	Неоднородное волновое уравнение	231
§ 13.1.	Волновое уравнение для потенциалов	231
§ 13.2.	Решение волнового уравнения с помощью преобразования Фурье	233
§ 13.3.	Компоненты Фурье для полей. Излучение	236
§ 13.4.	Потенциал Герца	240
§ 13.5.	Вычисление поля излучения с помощью вектора Герца	241

§ 13.6.	Излучение электрического диполя	243
§ 13.7.	Излучение мультиполей	246
	Задачи	250
	Литература	251
Глава 14. Экспериментальные основы специальной теории относительности		252
§ 14.1.	Принцип относительности Галилея и электродинамика	252
§ 14.2.	Поиски абсолютной системы отсчета, связанной с эфиром	254
§ 14.3.	Гипотеза Лоренца и Фитцджеральда о сокращении длины движущихся тел	258
§ 14.4.	Гипотеза «увлекаемого эфира»	259
§ 14.5.	Эмиссионные теории	260
§ 14.6.	Выводы	262
	Задачи	264
	Литература	264
Глава 15. Кинематика теории относительности и преобразования Лоренца		266
§ 15.1.	Скорость света и одновременность	266
§ 15.2.	Кинематические соотношения специальной теории относительности	268
§ 15.3.	Преобразования Лоренца	274
§ 15.4.	Геометрическое истолкование преобразований Лоренца	278
§ 15.5.	Формулы преобразования для скорости	282
	Задачи	284
	Литература	285
Глава 16. Ковариантность и релятивистская механика		286
§ 16.1.	Преобразование Лоренца для четырехмерного вектора	287
§ 16.2.	Некоторые тензорные соотношения	289
§ 16.3.	Закон сохранения импульса	293
§ 16.4.	Связь энергии с импульсом и массой	295
§ 16.5.	Сила Минковского	297
§ 16.6.	Соударение двух одинаковых частиц	299
	Задачи	301
	Литература	302
Глава 17. Ковариантная формулировка вакуумной электродинамики 303		303
§ 17.1.	Четырехмерный векторный потенциал	303
§ 17.2.	Тензор электромагнитного поля	306
§ 17.3.	Сила Лоренца	311
	Задачи	311
	Литература	312
Глава 18. Потенциалы Лиенара — Вихерта и поля равномерно движущегося электрона		313
§ 18.1.	Потенциалы Лиенара — Вихерта	313
§ 18.2.	Поле равномерно движущегося заряда	316
§ 18.3.	Прямое решение волнового уравнения	319
§ 18.4.	«Конвективный потенциал»	320
§ 18.5.	Виртуальные фотоны	322
	Задачи	324
	Литература	324

Глава 19. Излучение движущегося заряда	325
§ 19.1. Поля движущегося заряда	325
§ 19.2. Излучение при малой скорости	329
§ 19.3. Излучение в случае, когда ускорение \mathbf{u} параллельно скорости \mathbf{v}	330
§ 19.4. Излучение при ускорении, перпендикулярном скорости	334
§ 19.5. Излучение при произвольных ускорении и скорости	336
§ 19.6. Сечение тормозного излучения в кулоновском поле	337
§ 19.7. Эффект Черенкова	338
Задачи	341
Литература	342
Глава 20. Реакция излучения	343
§ 20.1. Электромагнитная масса	343
§ 20.2. Реакция излучения, определяемая законом сохранения энергии	346
§ 20.3. Расчет реакции излучения через поле частицы	347
§ 20.4. Трудности классической теории электрона	349
Задачи	350
Литература	350
Глава 21. Излучение, рассеяние и дисперсия	351
§ 21.1. Радиационное затухание колебаний	351
§ 21.2. Вынужденные колебания	353
§ 21.3. Рассеяние отдельным свободным электроном	354
§ 21.4. Рассеяние связанными электронами	357
§ 21.5. Влияние объемного распределения центров рассеяния	358
§ 21.6. Скорость распространения	360
§ 21.7. Рассеяние волн объемным распределением осцилляторов. Реле-евское рассеяние	362
§ 21.8. Поглощение излучения осциллятором	364
§ 21.9. Равновесие между осциллятором и полем излучения	367
Задачи	368
Литература	369
Глава 22. Ковариантная форма уравнений поля для материаль-ных сред и законы сохранения	370
§ 22.1. Ковариантное описание источников полей	370
§ 22.2. Уравнения поля для материальной среды	372
§ 22.3. Характер преобразования отдельных полей	373
§ 22.4. Ковариантная форма законов сохранения в вакуумной электро-динамике	377
§ 22.5. Некоторые следствия ковариантной формы законов сохранения	378
§ 22.6. Тензор энергии — импульса для материальных сред	381
Задачи	382
Литература	383
Глава 23. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях	384
§ 23.1. Вариационный принцип	384
§ 23.2. Уравнения Гамильтона и переход к трехмерному формализму	386
§ 23.3. Уравнения траекторий	389
§ 23.4. Простейшие электронно-оптические устройства	392
Задачи	397
Литература	398

Глава 24. Гамильтонова форма уравнений Максвелла	399
§ 24.1. Переход к одномерному континууму	399
§ 24.2. Обобщение на трехмерный континуум	401
§ 24.3. Электромагнитное поле	404
§ 24.4. Периодические решения для ограниченной области. Представление поля в виде суперпозиции плоских волн	407
Задачи	409
Литература	409
Приложение I. Единицы и размерности в электромагнитной теории	410
Таблицы I.1. Основные соотношения электродинамики вакуума в различных системах координат	416
I.2. Переходные множители	418
I.3. Связь между полями и их источниками	419
I.4. Полезные численные соотношения	420
Приложение II. Векторные соотношения в криволинейных координатах	422
Таблица II.1. Векторные соотношения в криволинейных координатах	424
Литература	426
Дополнительная литература	428
Предметный указатель	429

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю книга В. Пановского и М. Филипс «Классическая электродинамика» по существу представляет собой учебник по электродинамике. Если попытаться определить ее место в ряду других книг, хорошо известных нашему читателю, то ее следует расположить между «Основами теории электричества» И. Е. Тамма и «Теорией поля» и «Электродинамикой сплошных сред» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

В. Пановский, директор лаборатории физики высоких энергий Станфордского университета (США), наиболее известен своими экспериментальными исследованиями в физике высоких энергий. Его имя связано также с созданием линейных ускорителей электронов на большие энергии. М. Филипс — преподавательница в том же университете.

Плодотворные экспериментальные исследования в современной физике возможны только при глубоком понимании основ теории. Поэтому не случайно, что книга по электродинамике написана на основе лекций, прочитанных физиком, которого принято считать экспериментатором. Эта книга будет полезна тем, кому нужно знание электродинамики как основы современной техники СВЧ и ускорителей, равно как и тем, кому классическая электродинамика елужит введением в квантовую теорию поля.

В конце каждой главы авторы приводят подробный список рекомендуемой литературы, сопровождаемый краткими, но выразительными характеристиками почти каждой книги. Большинство рекомендуемых авторами книг переведены на русский язык. Список литературы дополнен ссылками на книги советских авторов (отмечены звездочками). В конце книги авторы приводят общий список литературы, к которому мы добавили список дополнительной литературы.

С. Капица

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

В данной книге главное внимание уделено тем разделам классической электродинамики, которые стали необходимой основой в экспериментальной физике и в то же время могут служить введением в квантовую теорию вещества и излучения. Мы не стремились к особой новизне и оригинальности изложения, помимо той, которая неизбежно возникает при изложении предмета, ставшего краеугольным камнем физики. Мы не следовали строго историческому развитию предмета.

Электродинамика излагается нами как физическая теория, основанная на законах, установленных опытом, а не как чисто математическая и логически замкнутая система. Поэтому уравнения Максвелла не постулируются вначале, а получаются из экспериментальных законов Кулона, Ампера и Фарадея. По мнению авторов, физическое содержание понятий выявляется при этом более полно, и кроме того, такой подход соответствует фактическому развитию теории.

Электродинамика и даже электростатика рассматриваются в данной книге как теория поля, поскольку при этом облегчается переход от статических явлений к динамическим. Однако следует иметь в виду, что можно совершенно последовательно построить электродинамику как теорию, полностью основанную на понятии запаздывающего дальнего действия.

Вершиной электродинамики XIX в. было создание теории электромагнитных волн и ее подтверждение на опыте. Любое совершенно изложение должно включать теорию электромагнитных волн, ограниченных металлическими поверхностями. Эта сторона дела приобрела

практическое значение в сравнительно недавнее время. При рассмотрении их мы вводим, как это обычно делается со времен Герца, поляризационный потенциал с решениями волнового уравнения для него.

Мы сочли необходимым сначала изложить специальную теорию относительности, а потом перейти к теории электрона. Исторически развитие этих вопросов происходило параллельно, и многие трудности, первоначально возникшие в теории излучения элементарных зарядов, были впоследствии сняты теорией относительности.

В книге всюду использована рационализированная система единиц МКС просто потому, что большинство современных справочников и статей используют эту систему. Однако (особенно в случае теории электрона) все уравнения написаны так, что их без ущерба можно переписать в гауссовых единицах.

Различные системы единиц приведены в приложении I. Там же даны таблицы, содержащие все основные соотношения электродинамики, выраженные в различных системах, вместе с численными значениями переводных множителей.

Книга создана на основе лекций, прочитанных одним из нас (Пановским) на старших курсах в Калифорнийском и Станфордском университетах.

Предполагается знание читателем анализа, дифференциальных уравнений и векторного анализа.

При изучении последних глав предполагается знакомство с теоретической механикой. Знание тензорного анализа желательно, но не обязательно.

В каждой главе указана дополнительная литература с краткими пояснениями.

Полная библиография приведена в конце книги.

Книга может служить пособием и в том случае, когда лекционный курс построен по иной программе. Так, в чисто теоретических курсах могут быть опущены гл. 4 и 5 вместе с теми разделами других глав, где рассматриваются специальные приложения теории потенциала. Часть гл. 2 часто излагается в курсе оптики. Если

теория относительности входит в отдельный курс, то можно пропустить гл. 14—17. Гл. 18 служит прямым продолжением гл. 13, поскольку в ней рассматривается теория излучения.

Несколько слов о задачах. Задачи главным образом дополняют основной текст. Некоторые задачи придуманы нами, другие взяты из различных источников. В большинстве случаев истинного автора указать трудно.

Задачи, как открытия, редко возникают изолированно, и в столь почтенной области изобретательность авторов обычно лишь воскрешает старые идеи.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Взаимодействие между материальными телами можно описать двумя способами. Один из них заключается в введении понятия действия на расстоянии — дальнего действия, другой — состоит в представлении процесса взаимодействия из двух частей: сначала рассматривается поле, созданное одним из тел, затем описывается действие этого поля на другое тело, т. е. путем ближнего действия. В случае статического поля оба описания равнозначны. Для движущихся тел и конечной скорости распространения взаимодействия рационально как с физической, так и с математической точки зрения считать поле реально существующим. Однако для электромагнитного поля и в этом случае возможно заменить понятие поля понятием «прямого запаздывающего взаимодействия». Представление о поле как о физических условиях в пространстве играет основную роль в электромагнитной теории. Поэтому даже электростатическое взаимодействие мы будем рассматривать с полевой точки зрения, обобщив ее затем на случай переменного поля.

§ 1.1. Векторные поля

Теории поля, применимые к различным типам взаимодействий, отличаются числом параметров, необходимых для определения поля, и характером его симметрии. Электрическое поле — это трехмерное векторное поле, определяемое набором трех составляющих. Само название «векторное поле» указывает на то, что компоненты поля преобразуются при преобразованиях координат так же, как отрезок. Электрическое поле является линейным полем и подчиняется принципу суперпозиции. Два или более полей, складываясь геометрически, определяют результирующее поле.

Исторически теория векторных полей развивалась в связи с изучением движения жидкости. Это нашло свое отражение в терминологии, где многие понятия имеют гидродинамический образ.

Рассмотрим сначала некоторые общие математические свойства таких полей, а затем обратимся к физическому смыслу введенных понятий.

Любое векторное поле определяется однозначно, если известны плотность циркуляции \mathbf{c} и плотность источников s поля как функции координат во всех точках пространства при условии, что общее количество источников и их плотность обращаются в нуль на бесконечности. Рассмотрим трехмерное векторное поле $\mathbf{V}(x, y, z)$, определяемое уравнениями

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = s, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{c}. \quad (1.2)$$

Сначала мы покажем, что если

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.3)$$

где

$$\varphi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)} d\mathbf{v}' \quad (1.4)$$

и

$$\mathbf{A}(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)} d\mathbf{v}', \quad (1.5)$$

то \mathbf{V} удовлетворяет уравнениям (1.1) и (1.2).

В уравнениях (1.4) и (1.5) x_α означает координаты (x, y, z) точки поля и x'_α — координаты x', y', z' источника поля. Расстояние между точками x_α и x'_α определяется выражением

$$r(x_\alpha, x'_\alpha) = \left| \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_\alpha - x'_\alpha)^2} \right|.$$

Очевидно, что эта функция симметрична по x_α и x'_α . Следует хорошо усвоить принятое написание формул (1.4) и (1.5), поскольку в дальнейшем мы не будем полностью выписывать эти постоянно встречающиеся функции. Например, объемные интегралы типа (1.4) и (1.5) в более краткой форме будут записываться так:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s}{r} d\mathbf{v}', \quad (1.4')$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}}{r} d\mathbf{v}'. \quad (1.5')$$

Перейдем к доказательству нашего утверждения. Подставив вектор (1.3) в уравнение (1.1), получим

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla^2\varphi + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2\varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left\{ \int \frac{s}{r} d\mathbf{v}' \right\}.$$

Так как оператор Лапласа ∇^2 действует на координаты поля, то

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (1.6)$$

Докажем теперь, что

$$\nabla^2 \left\{ \frac{1}{r(x'_\alpha, x'_\alpha)} \right\} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака, обладающая следующими функциональными свойствами. В) первых,

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \neq 0. \quad (1.8)$$

во-вторых, если точка $\mathbf{r} = 0$ находится в области интегрирования, то

$$\int \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' = 1, \quad (1.9)$$

и в-третьих, для произвольной функции f

$$\int f(x'_\alpha) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' = f(x_\alpha), \quad (1.10)$$

если, как и прежде, точка $\mathbf{r} = 0$ также находится в области интегрирования. δ -функция — не аналитическая функция. Ее следует рассматривать как выражение функциональных свойств, содержащихся в определяющих ее уравнениях. δ -функция будет употребляться нами только в таком смысле. Дифференцирование показывает, что $\nabla^2(1/r) = 0$ при $\mathbf{r} \neq 0$, и для доказательства соотношения (1.7) нам остается показать, что

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = -4\pi. \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) точка $\mathbf{r} = 0$ находится в объеме интегрирования. Используя теорему Гаусса — Остроградского, применимую к любому вектору

$$\int \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{v} = \int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S},$$

преобразуем объемный интеграл к поверхностному

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \int \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{S}' = - \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'}{r^3} = - \int d\Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым поверхность интегрирования S' по переменным x'_α видна из точки x_α . Поскольку поверхность S' охватывает точку x_α , то $\int d\Omega = 4\pi$, что и доказывает равенство (1.11). Из уравнений (1.6) и (1.10) следует

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = - \frac{1}{4\pi} \int s \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \int s(x'_\alpha) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' = s(x_\alpha), \quad (1.12)$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= -\nabla \times \nabla \varphi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int (c \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' - \int c \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' \right\}. \quad (1.13)\end{aligned}$$

Ниже будет показано, что первый интеграл обращается в нуль, если c отлично от нуля в ограниченном объеме. Учитывая это, а также равенство (1.7), получаем

$$\nabla \times \mathbf{V} = \int c(x'_\alpha) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' = c(x_\alpha), \quad (1.14)$$

т. е. уравнение (1.2) также удовлетворяется.

Для доказательства того, что первый интеграл в равенстве (1.13) обращается в нуль, исследуем подынтегральные выражения. Введем оператор $\nabla'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}$, действующий на координаты источника. Тогда для любой функции $g[\mathbf{r}(x_\alpha, x'_\alpha)]$ будет справедливо равенство

$$\nabla g = -\nabla' g, \quad (1.15)$$

где оператор дифференцирования ∇ имеет уже компоненты $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$. Запишем интересующий нас интеграл в следующем виде:

$$I = \int (c \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \int (c \cdot \nabla') \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'.$$

Дифференциальный оператор теперь действует на переменные интегрирования, и можно поэтому произвести интегрирование по частям

$$\begin{aligned}I_\alpha &= \int (c \cdot \nabla') \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \\ &= \int \nabla' \cdot \left\{ c \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\mathbf{v}' - \int (\nabla' \cdot c) \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (1.16)\end{aligned}$$

Второй интеграл обращается в нуль, так как в силу определения $c = \nabla \times \mathbf{V}$ дивергенция c равна нулю. Первый интеграл по теореме Гаусса — Остроградского можно преобразовать к поверхностному интегралу. В силу того, что вектор c отличен от нуля в ограниченном объеме поверхность интегрирования можно выбрать настолько большой, что вектор c на ней будет обращаться в нуль. Следовательно, выражение (1.16) равно нулю.

Таким образом, мы показали, что если заданы плотность источников s и плотность циркуляции c векторного поля, то решение для \mathbf{V} может быть получено с помощью скалярного потенциала φ и векторного потенциала \mathbf{A} . Потенциалы φ и \mathbf{A} выражаются интегралами от плотности источников и плотности циркуляции.

Можно показать, что эта система решений единственна, если источники расположены в ограниченном объеме, иными словами, источников на бесконечности нет, и сами поля бесконечно уменьшаются на достаточно большом расстоянии от источников. Пусть имеются две функции V_1 и V_2 , удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.2). Их разность, функция $W = V_1 - V_2$, очевидно, удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \cdot W = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla \times W = 0 \quad (1.18)$$

в каждой точке пространства и обращается в нуль на бесконечности. Если мы докажем, что функция W везде равна нулю, то тем самым будет показана единственность решения уравнений (1.1) и (1.2) в случае ограниченных источников. Для доказательства заметим, что из уравнения (1.18) следует

$$W = -\nabla\psi. \quad (1.19)$$

Совместно с уравнением (1.17) это дает

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (1.20)$$

Применив теорему Гаусса — Остроградского к вектору $\psi \nabla\psi$, получим

$$\int \psi \nabla\psi \cdot dS = \int [\psi \nabla^2\psi + (\nabla\psi)^2] dv. \quad (1.21)$$

Левая часть стремится к нулю, если поверхность интегрирования провести на достаточно большом расстоянии от источников, так как ψ стремится к нулю по крайней мере как $1/r$. Первый член правой части равен тождественно нулю в силу (1.20). Поэтому равенство (1.21) сводится к следующему:

$$\int (\nabla\psi)^2 dv = \int (W)^2 dv = 0, \quad (1.22)$$

и следовательно, $W = V_1 - V_2 = 0$ во всех точках пространства. Таким образом, вектор V , определяемый равенством (1.3), является единственным решением уравнений (1.1) и (1.2).

Доказательства теорем, касающихся векторных полей, были проведены столь подробно не только из-за их фундаментальной важности, но также и потому, что примененные методы будут полезны в дальнейшем при изучении электромагнитного поля.

Резюмируем полученные результаты.

а) Векторное поле V однозначно определяется, если плотность источников s и плотность циркуляции c заданы в конечном объеме.

б) Если поле V имеет источники s , а плотность циркуляции c равна нулю, то V определяется скалярным потенциалом φ .

в) Если плотность циркуляции c отлична от нуля, а плотность источников s равна нулю, то поле V определяется векторным потенциалом.

г) Скалярный и векторный потенциалы во всех случаях определяют поле V .

д) В той части пространства, где s и c равны нулю, поле V определяется скалярным потенциалом φ , удовлетворяющим уравнению $\nabla^2\varphi = 0$, или векторным потенциалом A , удовлетворяющим уравнению $\nabla \times (\nabla \times A) = 0$. Поле вне источников принято называть гармоническим.

е) Если s и c во всем пространстве тождественно равны нулю, то V также везде обращается в нуль.

ж) Решение уравнений поля, выражающее V через s и c , единственно и определяется потенциалами (1.4) и (1.5).

з) Условимся, что вектор r направлен от источника к точке поля, тогда ряд полезных математических соотношений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) &= -4\pi\delta(r), \\ \nabla[g(r)] &= -\nabla'[g(r)], \\ \nabla r &= -\nabla'r = \frac{r}{r}, \\ \nabla \cdot r &= 3.\end{aligned}$$

Общие свойства векторных полей будут необходимы нам в дальнейшем при выяснении физического содержания теории.

Последовательная теория электромагнитного поля будет сформулирована тогда, когда из установленных опытом законов электричества и магнетизма нам удастся выразить поля через распределение плотности их источников и циркуляции в виде системы уравнений. В этом и заключается основная программа классической электродинамики.

§ 1.2. Электрическое поле

Рассмотрим электростатическое поле в пустоте. Электрическое поле определяется силой F , действующей на пробный заряд q , внесенный в поле, согласно соотношению

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = E. \quad (1.23)$$

Это определение напряженности поля не зависит от выбора системы единиц ¹⁾. В системе МКС электрическое поле E выражается в вольтах на метр.

¹⁾ Выбор и анализ систем единиц и связь между ними даны в приложении I.

Предельный переход введен для того, чтобы исключить влияние самого пробного заряда на источники поля, поскольку при $q \rightarrow 0$ поле не будет зависеть от присутствия пробного тела. Требование бесконечной малости пробного заряда по сравнению с источниками поля приводит к фундаментальной трудности, связанной с конечной величиной заряда электрона. Таким образом, определение (1.23) применимо лишь в том случае, когда источники поля соответствуют большому числу электронных зарядов, т. е. в случае макроскопических явлений. При рассмотрении элементарных зарядов, из которых состоит реальное вещество, определение (1.23) следует применять с большой осторожностью. Поэтому микроскопические поля не могут быть определены «операционно», по производимым ими действиям так, как это сделано выше. Поле следует описывать непосредственно по его источникам, уже предполагая справедливость макроскопических законов для источников поля.

§ 1.3. Закон Кулона

Установленный опытом закон для силы взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме первоначально толковался как действие на расстоянии

$$F_2 = \frac{q_1 q_2 r}{4\pi\epsilon_0 r^3} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.24)$$

где F_2 — сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , r — радиус-вектор, соединяющий начало координат, где расположен заряд q_1 , с зарядом q_2 , ϵ_0 — некоторая постоянная, равная $10^7/4\pi c^2$ ф/м, в системе МКС; c — скорость распространения плоских электромагнитных волн в свободном пространстве (см. приложение I). Оператор в правой части соотношения (1.24) действует на координаты заряда q_2 .

Этот закон, одинаково приложимый как к положительным, так и к отрицательным зарядам, показывает, что одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются. Если пробный заряд в соотношении (1.23) выбрать положительным, то уравнение (1.24) приводит к следующему соотношению:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.25)$$

которое определяет электрическое поле E в точке r , созданное зарядом q , находящимся в начале координат. Этот заряд q соответствует заряду q_1 в соотношении (1.24). Теорему Гаусса о потоке электрического вектора

$$\int_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.26)$$

можно теперь вывести непосредственно из закона Кулона. Для этого рассмотрим элемент поверхности dS , представленный в виде вектора, направленного по внешней нормали к этой поверхности, как показано на рис. 1.1; заряд q находится в точке x'_a на расстоянии r от

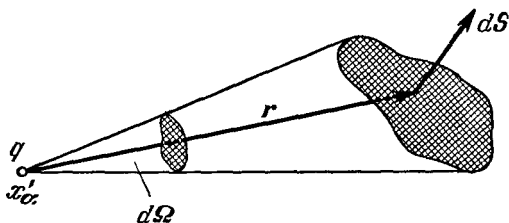


Рис. 1.1. К доказательству теоремы Гаусса.

этого элемента поверхности. Умножая скалярно обе части уравнения (1.25) на dS , получим

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Теорема Гаусса следует из этого соотношения, поскольку для любой замкнутой поверхности, охватывающей точку x'_a , $\int d\Omega = 4\pi$. Принцип суперпозиции дает нам возможность суммировать поля произвольного числа точечных зарядов, поэтому заряд q в уравнении (1.26) можно считать суммарным зарядом, заключенным внутри граничной поверхности S .

Преобразуем поверхностный интеграл к объемному от дивергенции \mathbf{E}

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dv$$

и используем тот факт, что полный объемный интеграл от плотности заряда ρ есть просто заряд q . Это позволит представить уравнение (1.25) в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.27)$$

где ρ — заряд на единицу объема в той точке, в которой электрическое поле равно \mathbf{E} . Так как ротор градиента скаляра равен нулю, то из уравнения (1.25) и принципа суперпозиции следует

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.28)$$

Таким образом, электростатическое поле безвихревое. Из теоремы о том, что всякое векторное поле единственным образом определяется

ротором и дивергенцией, следует, что электростатическое поле полностью определяется распределением зарядов.

Поучительно обратить внимание на то, что соотношения (1.27) и (1.28) вытекают непосредственно из закона Кулона, записанного в следующем виде:

$$E(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x'_\alpha) \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{v}' = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (1.29)$$

Из последнего выражения следует, что

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x'_\alpha) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' = \frac{\rho(x_\alpha)}{\epsilon_0}. \quad (1.30)$$

Аналогично

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = 0,$$

так как ротор вектора, являющегося градиентом скаляра, тождественно равен нулю.

§ 1.4. Потенциал электростатического поля

Поскольку статическое поле безвихревое, то его можно выразить через градиент некоторой скалярной функции φ , которая называется потенциалом поля

$$\mathbf{E} = - \nabla \varphi. \quad (1.31)$$

В декартовых координатах компоненты поля, параллельные осям x_α , определяются выражениями

$$E_\alpha = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}. \quad (1.32)$$

Применим теорему Стокса

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.33)$$

где $d\mathbf{l}$ — бесконечно малый вектор, касательный к замкнутому пути интегрирования. Тогда получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.34)$$

поскольку $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Это соотношение показывает, что электростатическое поле консервативно. В таком поле работа, совершенная над зарядом, равна нулю, если заряд описал замкнутую кривую. Следовательно, работа, произведенная при перемещении пробного заряда из одной точки в другую, не зависит от пути. Работа, необходимая для перемещения единичного заряда из бесконечности в данную точку, однозначно определяет потенциал этой точки. Однако,

если рассматриваются поля менее чем трех измерений (например, поля, созданные зарядами, бесконечно протяженными вдоль какой-нибудь линии или поверхности), это определение потенциала приводит к трудностям. В этом случае в качестве начала отсчета нельзя принять бесконечность и следует выбрать какую-нибудь другую точку. Если же рассматриваются конечные источники в трехмерном пространстве, то это определение потенциала точно и удобно. Подстановка соотношения (1.31) непосредственно в уравнение (1.27) приводит к уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.35)$$

а в области, где плотность зарядов равна нулю, к уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (1.36)$$

Основная задача электростатики состоит в отыскании решения уравнения Пуассона в различных частных случаях.

§ 1.5. Распределение зарядов и потенциал

Соотношение (1.31) связывает электростатический потенциал с электрическим полем в данной точке. С помощью соотношения (1.4) электрическое поле можно выразить также через плотность источников

$$\varphi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_\alpha) dv'}{r(x_\alpha, x'_\alpha)},$$

где ρ/ϵ_0 — плотность источников электростатического поля. Теория поля дает возможность найти решение, даже если плотность зарядов $\rho(x'_\alpha)$ известна лишь внутри некоторой произвольной поверхности S , и при этом остальные заряды учитываются посредством граничных условий, накладываемых на потенциалы и их производные на поверхности S .

Воспользуемся теоремой Грина

$$\int (\varphi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\varphi) dv = \int (\varphi \nabla\psi - \psi \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.37)$$

и выразим потенциал $\varphi(x_\alpha)$ через плотность зарядов ρ внутри поверхности S и значения φ и $\nabla\varphi$ на этой поверхности. В равенстве (1.37) φ и ψ — непрерывные скалярные функции, зависящие от координат, с непрерывными первыми и вторыми производными в области интегрирования и на ее границах.

Мы будем производить интегрирование по координатам источника x'_α ; координаты точки поля будут при этом параметрами. За φ примем электростатический потенциал, определяемый равенством

(1.31), а за ψ примем функцию $1/r$, представляющую собой решение уравнения Лапласа для точечного источника. Ранее было показано, что $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -r/r^3$ и $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$. Подстановка этих выражений в (1.37) дает

$$4\pi \int \left[\varphi(x'_\alpha) \delta(r) - \frac{1}{r} \frac{\rho(x'_\alpha)}{4\pi\epsilon_0} \right] d\tau' = \int \left[-\varphi \frac{r}{r^3} \cdot \frac{\nabla\varphi}{r} \right] \cdot dS.$$

Отсюда

$$\varphi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_\alpha)}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int \left(\varphi \frac{r}{r^3} + \frac{\nabla\varphi}{r} \right) \cdot dS. \quad (1.38)$$

При выводе формулы (1.38) мы использовали свойства δ -функции. Очевидно, что можно было бы обойтись и без нее, совершая предельный переход, но так как предельный переход заключен в определении δ -функции, то здесь его не надо повторять.

Первый интеграл в формуле (1.38) определяет потенциал, создаваемый объемным зарядом, находящимся в объеме τ . Следует заметить, что расстояние r зависит не только от координат точки наблюдения x_α , но также и от координат x'_α , по которым производится интегрирование.

Заряды, расположенные вне объема τ и не содержащиеся, таким образом, в первом члене, учитываются поверхностными интегралами формулы (1.38). Следовательно, потенциал в любой точке внутри поверхности S однозначно определяется распределением зарядов внутри этой поверхности, а также значениями потенциала φ и нормальной компоненты его градиента $\nabla\varphi$ во всех точках этой поверхности. Если же в каком-либо объеме заряды отсутствуют, то потенциал однозначно определяется граничными условиями на поверхности, ограничивающей данный объем. Таким образом, мы показали, что достаточно знать потенциал и его нормальную производную на поверхности для определения потенциала в точках внутри поверхности. Позже мы увидим, что это условие не является необходимым и что для определения потенциала с точностью до аддитивной постоянной в объеме, где отсутствуют заряды, необходимо знать только потенциал или только его нормальную производную на поверхности. Это связано с тем, что φ и $\nabla\varphi$ не могут быть независимы на поверхности, поскольку φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Если все заряды заключены внутри бесконечно расширяющейся поверхности S , то второй и третий члены в формуле (1.38) стремятся к нулю, поскольку подинтегральные выражения содержат φ и $\nabla\varphi$ и уменьшаются по крайней мере как $1/r^3$, в то время как поверхность увеличивается пропорционально r^2 .

Далее будет показано, что поле, описываемое формулой (1.38), эквивалентно полю, создаваемому распределением зарядов и диполей.

по поверхности S . Поэтому в общем случае потенциал получается либо сложением полей всех зарядов, либо путем замены части зарядов некоторой эквивалентной поверхностью с определенным образом расположенными на ней зарядами и диполями.

Член с объемным интегралом в формуле (1.38) следует рассматривать как частное решение уравнения Пуассона, а члены с поверхностными интегралами — как общее решение соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения Лапласа.

§ 1.6. Особенности поля

Таким образом, мы выразили потенциал через краевые условия и некоторый интеграл, взятый по объему, занятому зарядами.

Если плотность зарядов ограничена, то объемный интеграл в формуле (1.38) не имеет особенностей. Если же заряды считаются поверхностными, линейными или точечными, то появляются особенности. Различные виды особенностей приведены в табл. 1.1. Напом-

Таблица 1.1

Виды особенностей поля

Распределение зарядов	Зависимость потенциала от расстояния вблизи данного распределения зарядов	Зависимость поля от расстояния вблизи данного распределения зарядов
Поверхностное	r	const
Линейное	$\lg r$	r^{-1}
Точечное	r^{-1}	r^{-2}
Мультиполь порядка 2^n	r^{-n-1}	r^{-n-2}

ним, что при бесконечной протяженности поверхностных или линейных зарядов (например, в случае одномерных или плоских полей) уже нельзя считать, что бесконечность находится под нулевым потенциалом.

Особенности рассматриваемого типа в действительности не существуют, но во многих случаях реальные поля мало отличаются от полей с достаточно просто расположенными особенностями. Такая замена реальных зарядов точечными, линейными и поверхностными позволяет сильно упростить математические расчеты при решении конкретных задач. Кроме того, такие заряды удобны как простые физические понятия при описании реальных полей. Поэтому обсудим более детально свойства потенциалов таких источников.

§ 1.7. Совокупность точечных зарядов

Заряд q , расположенный в точке x'_α , создает в точке x_α потенциал, равный

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[\sum (x_\alpha - x'_\alpha)^2]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Этот потенциал имеет особенность первого порядка в точке $r=0$. Особенности следующего порядка можно получить, если этот потенциал сложить с потенциалом, создаваемым равным, но противоположным по знаку зарядом, смещенным на расстояние $\Delta x'$ от первого заряда. Это равнозначно дифференцированию выражения (1.39) по x'_α . Как было отмечено ранее (соотношение (1.15)), производная функции расстояния по x'_α равна производной по x_α , взятой с обратным знаком. Кроме того, в точках поля рассматриваемый потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как производная решения также удовлетворяет уравнению Лапласа, то указанное дифференцирование порождает новые решения с особенностями более высокого порядка при $r=0$. Такие потенциалы называются мультипольными потенциалами. При первом дифференцировании мы получим

$$\varphi^{(2)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \Delta x' = \frac{q \Delta x' (x - x')}{4\pi\epsilon_0 r^3} = (q \Delta x') \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.40)$$

Величина

$$q \Delta x' = p^{(1)} \quad (1.41)$$

называется дипольным моментом данного распределения зарядов (положительным считается направление от $-q$ к $+q$, как показано на рис. 1.2.). Учитывая это, потенциал можно записать в следующей форме:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^{(1)} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^{(1)} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^{(1)} \cdot r}{r^3} \quad (1.42)$$

(знаки векторов r и ∇ рассмотрены выше, в § 1.1). Очевидно, что решение (1.42) и есть потенциал диполя.

Потенциалы, а следовательно и поля, соответствующие мультиполям, т. е. моментам более высокого порядка, можно получить аналогичным образом. Например, потенциал с особенностью порядка 2^{n+1} получается из потенциала с особенностью порядка 2^n путем вычитания из него потенциала такого же распределения заря-

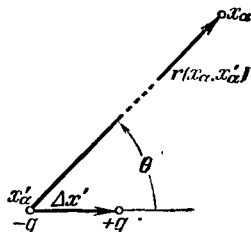


Рис. 1.2. Образование электрического диполя.

дов, но сдвинуто о в произвольном направлении на бесконечно малую величину (вычитание можно заменить сложением, изменив знаки зарядов).

В общем виде потенциал полюса порядка 2^n имеет следующий вид:

$$\varphi^{(2n)} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!} \frac{\partial^n}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta \dots} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{(-1)^n p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.43)$$

где $p^{(n)}$ представляет мультипольный момент, определяемый рекуррентным соотношением $p^{(n)} = n p^{(n-1)} \Delta x'_n$, где $\Delta x'_n$ — смещение, приводящее к возникновению полюсов порядка 2^n . Это смещение не обязательно должно происходить вдоль координатных осей. Производную в любом направлении можно выразить в виде суммы производных по направлениям x , y , z с направляющими косинусами данного направления в качестве коэффициентов. Несколько примеров простых мультиполей приведены на рис. 1.3. В случае, когда все смещения производятся в одном направлении — вдоль оси, система обладает аксиальной симметрией, и каждая точка поля определяется значением одного угла θ и расстояния r .

Потенциал линейного полюса порядка 2^n имеет вид

$$\varphi^{(2n)}(x, y, z) = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!} \frac{\partial}{\partial x'^n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} = \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (1.44)$$

где $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра порядка n ,

$$\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (1.45)$$

Отметим, что выражение (1.43) представляет собой по существу n -й член разложения функции $\frac{1}{r}$ по координатам источника в ряд Тейлора. Коэффициенты же этого разложения определяются конкретным распределением зарядов.

Покажем, что потенциал произвольного распределения зарядов $\rho(x'_\alpha)$ конечной протяженности на больших расстояниях можно всегда аппроксимировать в виде суммы мультипольных потенциалов. Коэффициентами в этой сумме являются некоторые интегралы по распределению зарядов.

Для упрощения доказательства будем считать, что заряды расположены вблизи начала координат. Пусть R — расстояние от начала координат до точки поля, т. е. координатами вектора \mathbf{R} будут x_α . Тогда, считая, что $a/R \ll 1$ (a — максимальное расстояние между зарядами), потенциал $1/r$ можно разложить по степеням x'_α вблизи

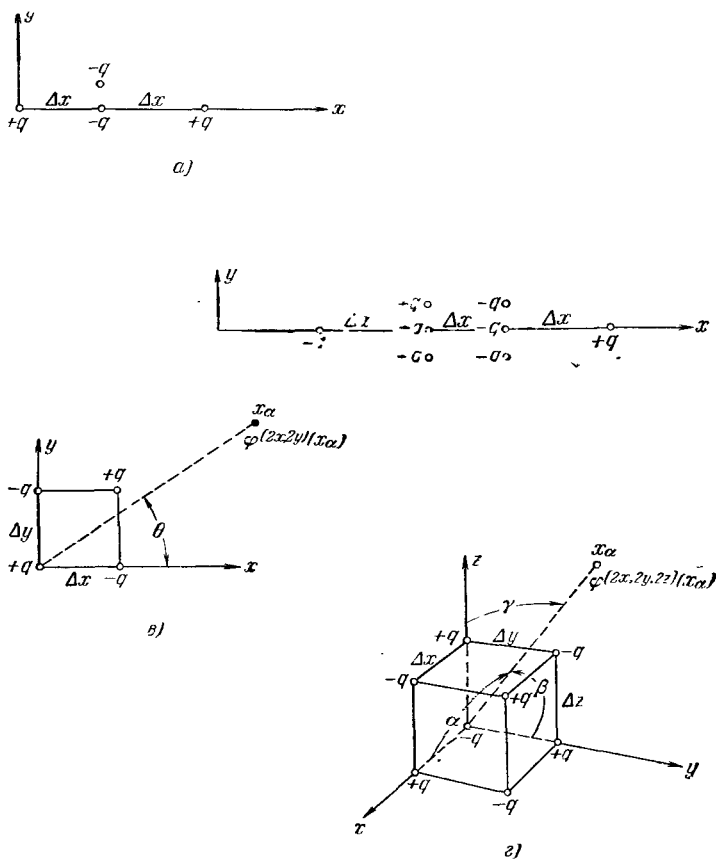


Рис. 1.3. Примеры мультиполей:

а) линейный квадруполь:

$$\varphi^{(2)} = \frac{q(\Delta x)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} = \frac{p^{(2)} P_2(\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad p^{(2)} = 2!q(\Delta x)^2;$$

б) линейный октополь:

$$\varphi^{(3)} = \frac{q(\Delta x)^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{15\cos^3\theta - 9\cos\theta}{r^4} = \frac{p^{(3)} P_3(\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^4}, \quad p^{(3)} = 3!q(\Delta x)^3;$$

в) двумерный квадруполь:

$$\varphi(2x, 2y) = \frac{3q\Delta x\Delta y\cos\theta\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r};$$

г) трехмерный октополь:

$$\varphi(2x, 2y, 2z) = \frac{15q\Delta x\Delta y\Delta z\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

точки O . Ряд Тейлора в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + x'_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R} + \frac{1}{2!} x'_\alpha x'_\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R} + \dots \quad (1.46)$$

В этом выражении мы придерживаемся следующего условия: если в каком-либо члене индекс повторяется дважды, то по этому индексу следует произвести суммирование. Этим условием мы будем часто пользоваться в дальнейшем. Подставляя равенство (1.46) в общее выражение для потенциала, получаем так называемое мультипольное представление поля

$$\begin{aligned} \varphi(x_\alpha) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_\alpha)}{r} dv' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} \int \rho dv' + \left[\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R} \int x'_\alpha \rho dv' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R} \int x'_\alpha x'_\beta \rho dv' + \dots \right\}. \quad (1.47) \end{aligned}$$

Коэффициенты этого разложения называются моментами данного распределения зарядов: $\int \rho dv'$ есть просто суммарный заряд q ,

$\int x'_\alpha \rho dv'$ — α -компонента дипольного момента и т. д. Зависимость каждого члена соотношения (1.47) от радиуса и угла совпадает, конечно, с аналогичной зависимостью в (1.43).

Заметим, что термины «диполь», «квадруполь» и т. д. употребляются в двух смыслах. В одном случае они соответствуют некоторому определенному распределению зарядов, в другом — моменту некоего произвольного распределения. Естественно, что выражения для соответствующих потенциалов в обоих случаях одинаковы.

Отношение величин последующих членов в мультипольном представлении поля (1.47) порядка a/R , где a — параметр, характеризующий размер распределения зарядов. Следовательно, если $R \gg a$, то потенциал произвольного распределения зарядов можно заменить потенциалом соответствующих моментов.

§ 1.8. Дипольное взаимодействие

Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле равна

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.48)$$

В задаче в конце главы предлагается показать, что это соотношение вытекает из выражения для крутящего момента, действующего на диполь

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (1.49)$$

Знак момента L таков, что он стремится приблизить положительный конец диполя к направлению поля. Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле, если ориентация диполя относительно поля не меняется, равна¹⁾

$$\begin{aligned} F &= -\nabla U = \\ &= -\nabla(-p \cdot E) = (p \cdot \nabla) E. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В однородном поле эта сила обращается в нуль, что и следовало ожидать из соображений симметрии.

Рассмотрим силу взаимодействия и энергию двух диполей, моменты которых произвольно ориентированы в пространстве (рис. 1.4). Объединяя приведенные выше соотношения для потенциала диполя (1.42) и силы, действующей на него (1.50), получим выражение для силы F_1 , действующей на диполь 1 со стороны диполя 2, и наоборот, для силы F_2 , действующей на диполь 2 со стороны диполя 1,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right), \quad E_1 = -\nabla_1 \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_1 \left[p_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right], \\ F_1 &= (p_1 \cdot \nabla_1) E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (p_1 \cdot \nabla_1) \left\{ \nabla_1 \left[p_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\}, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (p_2 \cdot \nabla_2) \left\{ \nabla_2 \left[p_1 \cdot \nabla_2 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\} = -F_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Выражение для энергии взаимодействия можно получить, подставляя выражение для поля E_1 в выражение для энергии U . В результате для энергии U_{12} диполя 1 в поле диполя 2 и соответственно для энергии U_{21} имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= -p_1 \cdot E_1 = -\frac{(p_1 \cdot \nabla_1)}{4\pi\epsilon_0} \left[p_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right], \\ U_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_1 \cdot p_2}{r^3} - \frac{3}{r^5} (p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) \right], \\ U_{21} &= U_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

очевидно, что

$$U_{21} = U_{12}.$$

Это — общие выражения для взаимодействия двух диполей.

¹⁾ Уравнение (1.50) имеет место в силу равенства $\nabla(p \cdot E) = p \times (\nabla \times E) + (p \cdot \nabla) E = (p \cdot \nabla) E$, если только $\nabla \times E = 0$. Если же $\nabla \times E \neq 0$, то в выражении для силы появляется дополнительный член.

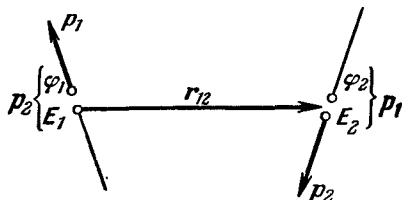


Рис. 1.4. Взаимодействие двух диполей.

§ 1.9. Поверхностные особенности

Поверхностные особенности второго порядка или особенности дипольного вида представляют интерес не только в электростатике, но и в магнитостатике.

Рассмотрим двойной слой с дипольным моментом τ на единицу площади. Потенциал такого распределения зарядов равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau \cdot r}{r^3} dS. \quad (1.53)$$

Если вектор τ постоянен по величине и нормален поверхности S , то это выражение можно упростить

$$\varphi = \frac{|\tau|}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r \cdot dS}{r^3} = \frac{|\tau|}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (1.54)$$

где Ω обозначает телесный угол, под которым двойной слой виден из точки поля (рис. 1.5). Телесный угол изменяется скачком на 4π

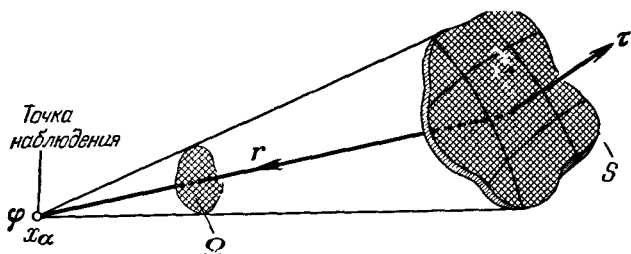


Рис. 1.5. Потенциал двойного слоя.

при пересечении точкой поля поверхности двойного слоя. Это означает, что в случае идеального бесконечно тонкого двойного слоя потенциальная функция терпит разрыв, равный $|\tau|/\epsilon_0$. Производная же этой функции непрерывна по обе стороны от поверхности двойного слоя.

В случае же просто заряженной поверхности потенциал непрерывен, а его нормальная производная терпит разрыв, равный σ/ϵ_0 , где σ — поверхностная плотность зарядов. Разница между этими случаями показана на рис. 1.6.

Заряженные и дипольные слои позволяют образовывать на любой поверхности разрывы произвольной величины в потенциале и его производных. Поэтому мы можем потенциал вне какого-либо объема обратить в нуль, окружив этот объем соответствующим образом подобранным заряженным и дипольным слоями. В этом заключается смысл поверхностных членов в формуле (1.38), выведенной из теоремы Грина. Если в этих членах соответствующим образом выра-

зять ψ и $\nabla\psi$ через τ и σ , то поле зарядов, находящихся внутри поверхности S , обратится в нуль вне этой поверхности. Это можно показать, переписав (1.38) следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int \frac{\rho dv}{r} + \int \tau \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} + \int \sigma \frac{dS}{r} \right), \quad (1.55)$$

где $\tau = \epsilon_0 \nabla\varphi$ и $\sigma = \epsilon_0 \nabla\varphi$.

В качестве примера заряженной и дипольной поверхности, вне которой поле обращается в нуль, а внутри остается неизменным, рассмотрим поверхность $R = a$, окружающую заряд q , находящийся

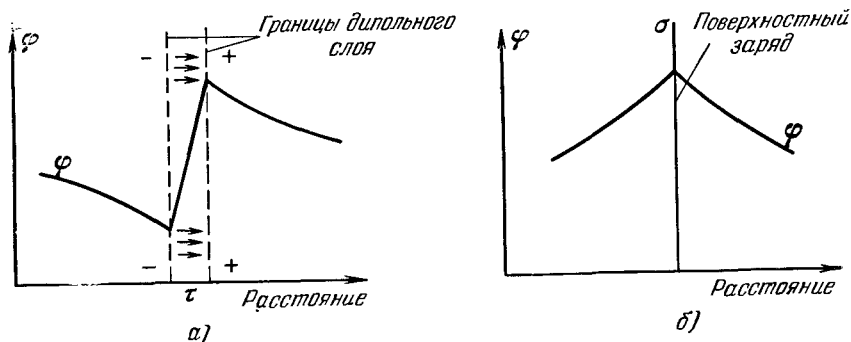


Рис. 1.6. Изменение потенциала

а) вблизи двойного слоя; б) вблизи заряженного слоя.

в точке $R = 0$. Если плотность зарядов на этой поверхности положить равной $\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2}$, то ее потенциал будет равен

$$\varphi_\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad R < a,$$

$$\varphi_\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad R > a.$$

Кроме того, будем считать, что на единицу площади этой сферы приходится дипольный момент $\tau = \frac{qR}{4\pi aR}$. Тогда потенциал, создаваемый дипольными моментами:

$$\varphi_\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad R < a,$$

$$\varphi_\tau = 0, \quad R > a.$$

Потенциал же заряда q равен $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ при всех R . Складывая все эти потенциалы, получаем

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \varphi_\sigma + \varphi_\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & R < a, \\ \varphi &= 0, & R > a.\end{aligned}$$

Электрическое поле, создаваемое дипольным слоем с площадью S , можно найти следующим образом. Рассмотрим изменение потенциала, вызванное перемещением точки поля x на расстояние dx

$$d\varphi = -E \cdot dx. \quad (1.56)$$

Изменение телесного угла, под которым дипольный слой виден из точки поля, не зависит от того, перемещается ли точка поля на dx или сам слой на $-dx$. Последний случай иллюстрирует рис. 1.7. Элемент границы двойного слоя dl , смещаясь, проходит площадь $dx \times dl$; полное изменение телесного угла равно

$$d\Omega = \oint \frac{(dx \times dl) \cdot r}{r^3} = \oint \frac{(dl \times r) \cdot dx}{r^3}. \quad (1.57)$$

Изменение потенциала, соответствующее такому изменению телесного угла, согласно соотношению (1.54) составит

$$d\varphi = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (1.58)$$

(Знак минус обусловлен тем, что дипольный слой обращен к точке поля отрицательно заряженной стороной.) Приравнивая оба выражения (1.56) и (1.58) для $d\varphi$, получим

$$-E \cdot dx = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{(dl \times r) \cdot dx}{r^3}. \quad (1.59)$$

Так как dx — произвольное смещение и поскольку предыдущее равенство справедливо при всех возможных dx , то его можно переписать следующим образом:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dl \times r}{r^3} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint dl \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (1.60)$$

Наличие разрыва потенциала на поверхности двойного слоя связано с тем, что толщина двойного слоя предполагалась бесконечно

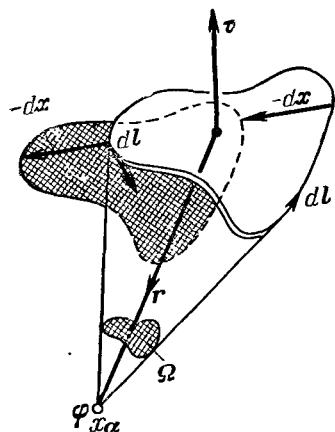


Рис. 1.7. К выводу электрического поля двойного слоя.

малой; поэтому в действительности таких разрывов не существует (см. рис. 1.6). Тем не менее метод образования неконсервативных потенциалов с помощью таких разрывов весьма полезен, особенно в теории магнитных полей, создаваемых токами. Соответствующий им потенциал действительно многозначен, и его свойства полностью аналогичны свойствам потенциала двойного слоя.

§ 1.10. Объемное распределение дипольных моментов

Потенциал объемного распределения дипольных моментов можно вычислить, исходя из формулы (1.42). Если \mathbf{P} есть дипольный момент единицы объема, то потенциал некоторого объема равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv'. \quad (1.61)$$

Переходя от объемного интеграла к поверхностному и используя соотношение

$$\nabla' \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.62)$$

выражение (1.61) можно преобразовать к виду, физически более ясному:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) dv' - \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{P} dv' \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{r} - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} dv' \right]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

В последнем выражении поверхностный интеграл эквивалентен потенциалу некоторого поверхностного распределения зарядов; объемный интеграл — потенциалу объемного распределения зарядов. Соответствующие плотности зарядов равны¹⁾

$$\sigma_P = P_n, \quad \rho_P = -\nabla' \cdot \mathbf{P}. \quad (1.64)$$

Связь между поверхностными и объемными зарядами, с одной стороны, и поляризацией — с другой, может быть непосредственно получена из геометрических соображений. Например, при неоднородном распределении дипольных моментов ρ_P представляет собой плотность тех зарядов, которые некомпенсированы из-за неоднородности.

¹⁾ Поскольку $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ есть просто уравнение поля, то штрих при ∇ может быть опущен. Штрих необходим лишь в интегральных выражениях, в которых имеются как координаты поля, так и координаты источников.

распределения, а σ_p есть плотность зарядов, возникающих на поверхности ввиду отсутствия компенсирующих соседей у тех диполей, концы которых лежат на этой поверхности. В однородной среде ρ_p , очевидно, обратится в нуль, для этого достаточно, чтобы дивергенция P равнялась нулю.

В общем случае потенциал поляризационных зарядов обоих видов выражается соотношением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\sigma_p dS}{r} + \int \frac{\rho_p dv'}{r} \right]. \quad (1.65)$$

Геометрический характер соотношений (1.64) ясен также из следующих соображений. Вычислим суммарный дипольный момент p некоторого объема. Следуя соотношениям (1.64), имеем

$$p = \int P dv' = \int \xi \rho_p dv' + \int \xi \sigma_p dS = - \int \xi (\nabla' \cdot P) dv' + \int \xi (P \cdot dS), \quad (1.66)$$

где ξ — вектор с компонентами x'_α . С другой стороны, α -компоненту вектора p можно получить, интегрируя по частям тождество

$$\nabla' \cdot (x'_\alpha P) = x'_\alpha \nabla' \cdot P + P_\alpha.$$

Получим

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \int P_\alpha dv' = - \int x'_\alpha \nabla' \cdot P dv' + \int \nabla' \cdot (x'_\alpha P) dv' = \\ &= - \int x'_\alpha \nabla' \cdot P dv' + \int x'_\alpha P \cdot dS. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (1.64) не зависят от характера взаимодействия и носят чисто геометрический характер.

Задачи

1. Покажите, что теорема Грина (1.37) следует из теоремы Гаусса — Остроградского.

2. «Одномерная» δ -функция определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \int \delta(x-a) dx &= 1, \\ \int f(x) \delta(x-a) dx &= f(a), \end{aligned}$$

если точка $x = a$ находится в области интегрирования; в противном случае оба интеграла равны нулю.

С помощью интеграла Фурье покажите, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx dk = 2\pi \delta(x).$$

Нужно показать, что обе части равенства, будучи множителями в подынтегральном выражении, ведут себя одинаково.

3. Докажите, что при пересечении заряженного диска по оси потенциал не испытывает разрыва. Покажите, что то же самое справедливо в отношении нормальной производной потенциала, если диск представляет собой двойной слой.

4. Функции вида $\varphi = x$ или $\varphi = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ удовлетворяют уравнению Лапласа во всех точках пространства. Означает ли это, что соответствующие потенциалы не имеют источников? Обсудите значение подобных решений и их отношение к доказательству теоремы о единственности.

5. Предположим, что электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q , пропорционально $qr^{-2-\delta}\mathbf{r}_0$, где \mathbf{r}_0 — единичный вектор вдоль радиуса-вектора, а $\delta \ll 1$. а) Вычислите в этом случае $\nabla \cdot \mathbf{E}$ и $\nabla \times \mathbf{E}$ при $r \neq 0$.

б) Пусть даны две концентрические сферы с радиусами a и b , соединенные проводником; на внешней сфере имеется заряд q_a . Покажите, что на внутренней сфере появится заряд

$$q_b = \frac{-q_a \delta}{2(a-b)} \{ [2b \ln 2a - (a+b) \ln(a+b) + (a-b) \ln(a-b)] + O(\delta^2) \}.$$

(Задача взята из книги Джинса [3].)

6. Покажите, что потенциал $\varphi(x, y, z)$ с точностью до величин третьего порядка малости по a равен среднему арифметическому от потенциалов в точках $x \pm a, y, z$; $x, y \pm a, z$; $x, y, z \pm a$.

7. Для сферически симметричного распределения зарядов потенциал,

рассчитанный по формуле $\varphi = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, равен

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr''}{r''^2} \int_0^{r''} pr'^2 dr'.$$

Разделите распределение зарядов на тонкие сферические области, каждая из которых внутри сферы дает постоянный потенциал. Используя такое разбиение, получите выражение для φ , в котором имеются лишь однократные интегралы. Докажите тождество обоих выражений.

8. а) Используя соотношение между крутящим моментом и потенциальной энергией, докажите, что $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, если для диполя $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.

б) Рассмотрите два компланарных диполя с центрами на фиксированном расстоянии друг от друга. Покажите, что если один из векторов образует фиксированный угол θ с линией, соединяющей их центры, то при равновесии

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{r} \operatorname{tg} \theta',$$

где θ' — угол, образуемый вторым вектором с той же линией.

9. Силовые линии определяются следующим уравнением:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Найдите функцию $f(x, y) = \text{const}$, которая описывает в плоскости $z = 0$ силовые линии поля диполя с моментом \mathbf{p} , расположенным в начале координат.

10. Вычислите квадрупольный момент двух концентрических колец с радиусами a и b , несущих заряды q и $-q$.

11. Два линейных заряда постоянной плотности, каждый длиной $2a$, пересекаются в начале координат так, что их концы находятся в точках $(\pm a, 0, 0)$ и $(0, \pm a, 0)$. Вычислите потенциал φ для точек $r > a$ с точностью до членов порядка r^{-4} .

12. Покажите, что потенциал полюса порядка 2^n , полученный путем дифференцирования потенциала точечного заряда последовательно n раз вдоль направлений, составляющих друг с другом угол $2\pi/n$, равен

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\text{const}}{r^{n+1}} P_n^n(\cos \theta) \cos n(\varphi - \varphi_0)$$

13. Покажите, что в формулах (1.51) $F_1 = -F_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abraham and R. Becker, The Classical Theory of Electricity and Magnetism, v. 1. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, Электричество и магнетизм, т. 1.)

Широко известный учебник, изложение в котором проведено на высоком уровне. В начале книги рассмотрены векторный анализ и свойства векторных полей. Как и в большинстве классических учебников по электродинамике, в книге используется гауссова система единиц.

2. G. P. Hartwell, Principles of Electricity and Electromagnetism.

Учебник, в котором рассмотрены технические приложения теории.

3. J. H. Jeans, Electricity and Magnetism.

Исчерпывающий обзор по электростатике. Недостатком является то, что автор избегает векторных обозначений.

4. W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity. (Русский перевод: В. Смайг, Электростатика и электродинамика.)

Наиболее полный современный обзор задач электростатики и электродинамики.

5. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

Автор строит изложение, исходя из уравнений Максвелла, как из наперед заданных постулатов. В связи с этим рассмотрение электростатики перенесено в середину книги. Рассмотрена теория мультиполей, образованных при неортогональных смещениях.

Электростатика рассмотрена также в следующих широко известных учебниках по теоретической физике:

6. P. G. Bergmann, Basic Theories of Physics: Mechanics and Electrodynamics.

7. G. Joos, Theoretical Physics.

8. L. Page, Introduction to Theoretical Physics.

9. J. Slater, N. Frank, Introduction to Theoretical Physics of Electromagnetism.

Свойства функций Лежандра рассмотрены в книгах Джинса [3] и Смайга [4], а также в руководствах по математике.

10. H. Margenau, G. M. Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry.

11. L. A. Pipes, Applied Mathematics for Engineers and Physicists.

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества.

* Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред,

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И СВЯЗЬ МЕЖДУ МИКРОСКОПИЧЕСКИМИ И МАКРОСКОПИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Дипольные моменты, рассмотренные в предыдущей главе, представляют собой разновидность источников поля. В уравнении Пуассона этим источникам соответствует определенный вид плотности зарядов. Подобные дипольные моменты возникают в веществе под действием электрического поля, и естественно, что поведение вещества можно описать с помощью его поляризации — дипольного момента единицы объема. Обычно, для более ясного понимания явления поляризации, все источники электрического поля разделяют на истинные — свободные, подвижные, нескомпенсированные заряды ρ и на связанные, скомпенсированные, поляризационные заряды ρ_p , суммарный заряд которых равен нулю даже в малом объеме. Это разделение в значительной мере произвольно. Если изменить масштаб явлений, то первоначально недоступные наблюдению заряды, которые считались связанными, станут при более детальном рассмотрении свободными. Так, например, поместив кусок металла в конденсатор, результирующее поле можно описывать двояко: либо как поле тех истинных зарядов, которые возникли на поверхности металла, либо как результат поляризации этого куска металла, в зависимости от того, считаются ли заряды доступными измерению или нет.

§ 2.1. Электрическая индукция

Как было указано, различие между ρ и ρ_p довольно произвольно, однако этот произвол ни в коей мере не мешает тому формальному описанию полей поляризационных зарядов, которое будет проведено ниже.

Так как источники электрического поля разделены нами на два вида, то уравнение Пуассона принимает следующий вид:

$$\nabla^2\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p). \quad (2.1)$$

Теперь ρ означает плотность лишь свободных зарядов в той точке, где берется дивергенция. Если плотность ρ_p согласно соотноше-

нию (1.64), выражена через дивергенцию поляризации P , то формула (2.1) преобразуется к такому виду:

$$\nabla \cdot \left(E + \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.2)$$

На основании (2.2) удобно ввести вектор электрической индукции, называемый также электрическим смещением — термин, введенный еще Максвеллом,

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (2.3)$$

(В системе МКС этот вектор измеряется в кулонах на m^2 .) Уравнение Пуассона можно записать теперь двумя способами:

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.4)$$

или

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}, \quad (2.5)$$

где ρ_t обозначает сумму плотностей поляризационных и свободных — истинных зарядов. С помощью теоремы Гаусса — Остроградского можно получить и соответствующие интегральные соотношения

$$\int D \cdot dS = q, \quad (2.6)$$

$$\int E \cdot dS = \frac{q_t}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

где q_t есть суммарный заряд в объеме интегрирования, т. е. сумма q и интеграла от $-(\nabla \cdot P)$ по объему.

Поле D представляет собой лишь ту часть поля, которая создается свободными зарядами. Согласно соотношению (2.3) разность между D и $\epsilon_0 E$ есть поляризация P . Отметим кстати, что хотя поляризация и является чисто геометрическим образом — дипольным моментом единицы объема, она играет тем не менее роль электрического поля. Это поле поляризации образуется только поляризационными зарядами. Решение конкретных задач, связанных с поляризующимися телами, зависит от того, каким образом поляризация зависит от внешнего поля. В большинстве случаев поляризация пропорциональна полю

$$P = \epsilon_0 \chi E. \quad (2.8)$$

Коэффициент пропорциональности χ называется электрической восприимчивостью. Этому соотношению не подчиняются электреты (вещества, обладающие постоянным дипольным моментом), однако в практике они не играют большой роли¹). В случае же обычных

) Более интересны вещества, в которых постоянный дипольный момент возникает под влиянием деформации (явление пьезоэлектричества). (Прим. ред.)

веществ, когда соотношение (2.8) выполняется, все три вектора D , E и P пропорциональны друг другу

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \chi) E. \quad (2.9)$$

Если мы введем диэлектрическую проницаемость, или, как ее иногда называют, диэлектрическую постоянную среды

$$k = 1 + \chi, \quad (2.10)$$

то получим

$$D = k\epsilon_0 E \quad (2.11)$$

и

$$P = \epsilon_0 (k - 1) E. \quad (2.12)$$

В соотношении (2.8) предполагается, что среда поляризуется изотропно и ее поляризационные свойства не зависят от направления. Физически этот наиболее простой случай имеет место лишь у газов, жидкостей, аморфных твердых тел и кубических кристаллов. В кристаллах с симметрией ниже кубической зависимость компонент вектора поляризации от компонент вектора электрического поля остается линейной, однако коэффициент пропорциональности может быть различным для разных направлений. Это означает, что зависимость поляризации от электрического поля носит тензорный характер

$$P_\alpha = \epsilon_0 \chi_{\alpha\beta} E_\beta, \quad (2.13)$$

и вектор P в общем случае не параллелен вектору E . Исходя из того факта, что величина вектора P пропорциональна величине вектора E при заданном угле между ними и заданной ориентации тела во внешнем поле, можно показать, что тензор $\chi_{\alpha\beta}$ симметричный (доказательство этого утверждения предлагается в качестве задачи). Поэтому, выбирая соответствующим образом систему координат, тензор $\chi_{\alpha\beta}$ можно выразить только через три константы. Отсюда же следует, что имеется по крайней мере три направления, когда P и E параллельны. Симметрия тензора $\chi_{\alpha\beta}$ следует также из энергетических соображений.

Мы не будем касаться случая, когда E и P не пропорциональны и связаны между собой нелинейным соотношением. Этот случай важен для магнитных сред и будет рассмотрен в дальнейшем. Следует подчеркнуть, что приводившееся выше соотношение между поляризацией и напряженностью поля не есть фундаментальное уравнение теории, а лишь некоторое упрощающее предположение.

§ 2.2. Граничные условия

В дальнейшем при решении уравнений Максвелла нам придется разделить заряды на свободные и связанные. Решение уравнений потребует установления связи между полями свободных зарядов и полями зарядов связанных. Уравнения, которые устанавливают связь

между связанными зарядами и внешними полями, имеют смысл уравнений состояния. Примером подобных уравнений является уравнение (2.8). Ясно, что уравнение состояния определяется свойствами вещества, в котором проявляют себя связанные заряды.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда диэлектрическая проницаемость является произвольной функцией координат. Мы будем пользоваться уравнениями (2.8) — (2.13). Только линейность этих соотношений ограничивает их общность. Это не мешает, конечно, применять их к неоднородным средам. Наибольший интерес представляет случай, когда проницаемость меняется скачком, как, например, на границе двух диэлектриков.

Рассмотрим небольшой цилиндр, расположенный у границы раздела между диэлектриками так, как показано на рис. 2.1. Пусть основания

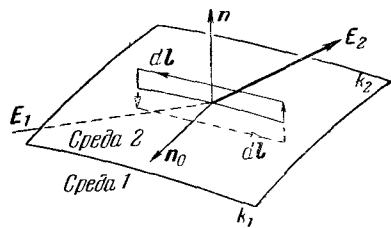
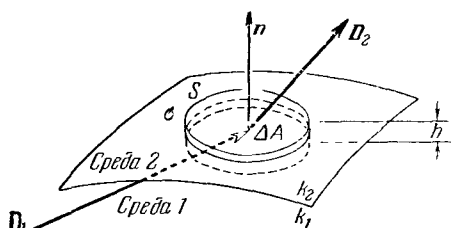


Рис. 2.1. К выводу граничных условий для нормальных компонент D .

Рис. 2.2. К выводу граничных условий для касательных компонент E .

цилиндра параллельны границе раздела, причем одно из них лежит в среде 1, другое — в среде 2. Площадь каждого основания равна ΔA . Будем также считать, что его высота h значительно меньше диаметра. Вычислим поток вектора D через поверхность, ограничивающую этот объем. Согласно соотношению (2.6) имеем

$$\int D \cdot dS = q. \quad (2.6)$$

При $h \rightarrow 0$ q стремится к $\sigma \Delta A$, где σ — плотность свободных зарядов на границе раздела. Так как вклад боковой поверхности цилиндра в поверхностный интеграл стремится к нулю, то уравнение (2.6) дает

$$\mathbf{n} \cdot (D_2 - D_1) = \sigma, \quad (2.14)$$

где $\mathbf{n} = \frac{dS}{\Delta S}$ — единичный вектор, нормальный основанию цилиндра ΔA . Полагая справедливым соотношение (2.11), получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (k_2 \mathbf{E}_2 - k_1 \mathbf{E}_1) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \\ \mathbf{n} \cdot (k_2 \nabla \varphi_2 - k_1 \nabla \varphi_1) &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Как обычно, предполагается, конечно, что площадь основания цилиндра достаточно мала, чтобы поля можно было считать постоянными.

Поведение тангенциальных компонент поля можно понять, рассматривая небольшой контур, изображенный на рис. 2.2. Пусть его большие стороны параллельны поверхности раздела и одна из них лежит в среде 1, а другая — в среде 2. Согласно соотношению (1.34) циркуляция электрического поля по замкнутому контуру равна нулю

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.34)$$

Если мы применим это соотношение к описанному выше контуру и затем короткие его стороны устремим к нулю, то получим

$$E_2 \cdot dl - E_1 \cdot dl = 0. \quad (2.16)$$

На рис. 2.2 \mathbf{n} , как и раньше, единичный вектор, нормальный поверхности раздела, а \mathbf{n}_0 — единичный вектор, нормальный контуру, по которому производится интегрирование. Преобразовав соотношение (2.16) в соответствии с равенством $\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}$, получим

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (2.17)$$

Так как соотношение (2.17) остается справедливым при произвольных ориентациях вектора \mathbf{n}_0 относительно \mathbf{E} , то

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.18)$$

т. е. тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} одинаковы по обе стороны от границы раздела. Выражая поля через соответствующие потенциалы, получим

$$\mathbf{n} \times (\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1) = 0. \quad (2.19)$$

Здесь также контур предполагается настолько малым, что поля на его сторонах можно было считать постоянными.

Как показано выше, соотношение (2.18) следует из уравнения $\nabla \times \mathbf{E} \equiv \text{rot } \mathbf{E} = 0$ и теоремы Стокса. Однако было бы неправильным думать, что для выполнения соотношения (2.18) необходимо условие $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Ниже мы увидим, что даже в нестатическом случае, когда $\text{rot } \mathbf{E}$ не равен нулю, тангенциальная компонента \mathbf{E} непрерывна на поверхности раздела двух диэлектриков. Вообще, граничные условия на нормальные компоненты вектора \mathbf{D} и тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} уже содержатся в уравнениях поля. Для вывода же связи между тангенциальными компонентами \mathbf{D} или соотношений (2.15) необходимо привлечение уравнений состояния.

В силу того, что касательная компонента $\nabla\varphi$ непрерывна на поверхности раздела, можно положить $\varphi_1 = \varphi_2$. Кроме того, нормальная

компонента вектора $\nabla\varphi$ непрерывна, если на поверхности раздела нет особенности в виде заряженного слоя. Этими двумя соотношениями завершается совокупность граничных условий, накладываемых на поля и их потенциалы на поверхности раздела двух диэлектриков.

§ 2.3. Электрическое поле в материальной среде

В предыдущих разделах мы рассмотрели электростатические поля свободных зарядов в вакууме. Были также рассмотрены материальные среды, содержащие связанные заряды, не поддающиеся непосредственному измерению. Свойства таких сред описывались с помощью дипольного момента, приходящегося на единицу их объема и возникающего при наложении внешнего электрического поля. Рассмотрим теперь вопрос об электрическом поле в материальной среде. Оказывается, что если строго придерживаться феноменологической точки зрения, то возникает ряд трудностей, связанных с определением электрического поля.

Дело в том, что электрическое поле можно определить следующими тремя различными способами, причем априори они не обязаны быть непротиворечивыми.

а) Мы можем определить поле в атомном масштабе, т. е. через поле, действующее на электроны в атоме. В этом случае, по существу не возникает вопроса о поляризуемости вещества. Для перехода к макроскопическому определению это поле нужно усреднять по пространству и времени. Например, быстрый электрон, движущийся в среде, подвергается действию именно этого поля.

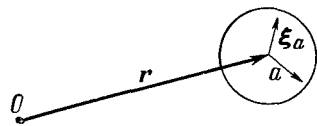


Рис. 2.3. Усреднение атомных полей; $\xi_a = (\xi, \eta, \zeta)$.

б) Можно рассмотреть поле в полости в диэлектрике и определить его (подобно определению поля в вакууме) по силе, действующей на единичный заряд в этой полости. Однако поле, определенное таким образом, зависит от геометрии полости и ее ориентации относительно поля в среде. Однозначное определение получится только в том случае, если каким-либо образом условиться относительно формы и ориентации полости.

в) Можно определить поле по его воздействию на отдельную молекулу диэлектрика.

Рассмотрим каждое определение отдельно.

а) *Определение поля посредством усреднения по пространству и времени.*

Пусть некоторая функция $f(x, y, z; t)$ задана в какой-либо области пространства в течение определенного отрезка времени (рис. 2.3). Усреднение ее по сфере с радиусом a и по отрезку времени $2T$ про-

изводится следующим образом:

$$\overline{f(x, y, z; t)} = \frac{1}{2T \frac{4}{3} \pi a^3} \int_{-T}^T \int_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq a^2} \int f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta; t + \theta) d\xi d\eta d\zeta d\theta. \quad (2.20)$$

Определение этого интеграла есть линейная операция, и поэтому она коммутирует с линейным оператором дифференцирования

$$\overline{\nabla f} = \nabla \overline{f}. \quad (2.21)$$

Микроскопические поля описываются уравнением (2.5)

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho_a}{\epsilon_0}. \quad (2.22)$$

Здесь \mathcal{E} — микроскопическое электрическое поле, ρ_a — плотность зарядов в атоме. Усредняя ρ_a по пространству и времени, получим

$$\overline{\nabla \cdot \mathcal{E}} = \frac{\overline{\rho_a}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}. \quad (2.23)$$

Тогда из уравнений (2.21), (2.23) и (2.5) следует

$$\nabla \cdot \overline{\mathcal{E}} = \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (2.24)$$

Следовательно, макроскопическое поле \mathbf{E} и в присутствии диэлектриков можно рассматривать как среднюю величину микроскопического поля \mathcal{E} .

б) *Определение поля с помощью полости в диэлектрике.* Рассмотрим три вида полостей, показанных на рис. 2.4. Будем считать,

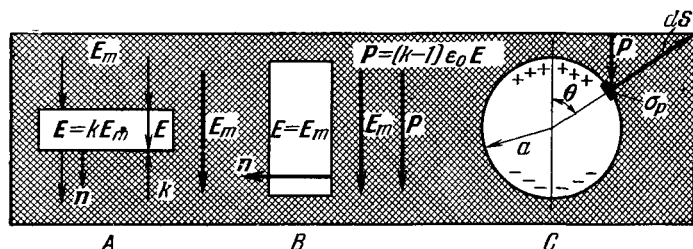


Рис. 2.4. Полости для определения полей в диэлектрике:

щель A с малой протяженностью вдоль поля; щель B с большой протяженностью вдоль поля; сфера C.

что на их поверхностях свободные заряды отсутствуют. Согласно граничному условию (2.15) поле, измеренное в полости A, расположенной перпендикулярно полю, равно $k\mathbf{E}_m$, где \mathbf{E}_m — поле в среде. Поле же, измеренное в полости B, ориентированной параллельно

полю, равно E_m в силу условия (2.18). Как будет показано в гл. 5, поле, измеренное в сферической полости C , равно

$$E = \frac{3kE_m}{2k+1} = E_m + \frac{P}{\epsilon_0} \frac{1}{2k+1}. \quad (2.25)$$

Это соотношение здесь приводится лишь для того, чтобы показать как измеряемое поле зависит от формы полости. При больших значениях k соотношение (2.25) принимает вид

$$E = \frac{3}{2} E_m. \quad (2.26)$$

Поля, возникающие в рассмотренных полостях, графически изображены на рис. 2.5.

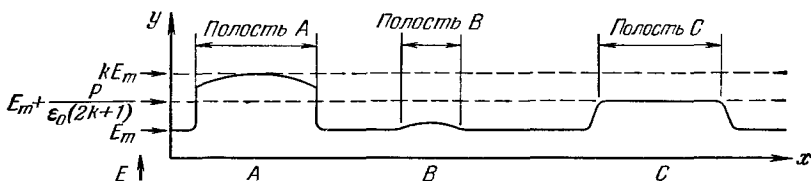


Рис. 2.5 Изменение поля вдоль горизонтальной линии, проходящей через центры полостей A , B и C рис. 2.4

Таким образом, ясно, что по измерениям в полостях можно определить поле.

в) Поля, действующие на молекулу. Рассмотрим диэлектрик, расположенный между пластинами конденсатора, как показано на

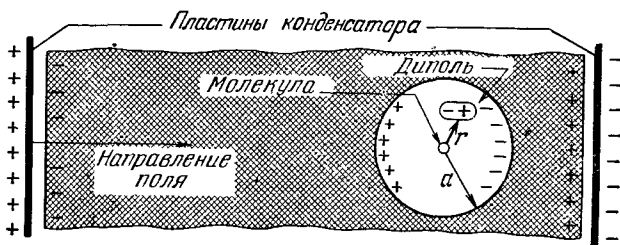


Рис. 2.6. К вычислению поля, действующего на одну из молекул диэлектрика.

Стрелкой показано направление поля.

рис. 2.6. И диэлектрик, и пластины конденсатора будем считать достаточно большими, чтобы можно было пренебречь краевым эффектом. Выделим одну из молекул диэлектрика и опишем вокруг нее сферу радиуса a . Можно сказать, что эта сфера условно разграничивает макроскопическую область от микроскопической. В резуль-

те на молекулу будут действовать поля, обусловленные следующими зарядами:

- 1) зарядами на пластинах конденсатора;
- 2) зарядами, расположенными на поверхностях диэлектрика, обращенных к пластинам конденсатора;
- 3) поверхностными зарядами, расположенными на внутренней поверхности сферы радиуса a ;
- 4) зарядами отдельных молекул, находящихся в сфере радиуса a , за вычетом заряда выделенной молекулы в центре сферы. Вычислим поле каждого из этих источников.

Заряды, расположенные на пластинах конденсатора, создают в месте расположения молекулы поле, равное

$$\frac{D}{\epsilon_0} = E + \frac{P}{\epsilon_0}. \quad (2.27)$$

Поле поляризационных зарядов $\sigma_P = P_n$, расположенных на поверхностях диэлектрика, обращенных к пластинам конденсатора, равно

$$-\frac{P}{\epsilon_0}. \quad (2.28)$$

Поле E_P поляризационных зарядов, расположенных на внутренней поверхности сферы, дается следующим соотношением:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_P \cos \theta dS}{a^2}, \quad (2.29)$$

где θ — угол между P и радиусом-вектором, проведенным от молекулы к элементу поверхности dS . Элемент поверхностного заряда, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$, равен

$$\sigma_P dS = |P| 2\pi a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (2.30)$$

и соотношение (2.29) преобразуется к следующему виду:

$$E_P = \frac{P 2\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.31)$$

После интегрирования получим $E_P = P/3\epsilon_0$ или

$$E_P = \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (2.32)$$

Следует отметить, что электрическое поле E_P не есть реальное поле в сферической полости в диэлектрике, ибо при выводе его предполагалось, что поляризация диэлектрика не возмущена наличием полости, в отличие от (2.25).

Просуммируем теперь поля отдельных диполей, расположенных внутри сферы. Уравнение для потенциала отдельного диполя было

получено в гл. 1:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.42)$$

Поле на расстоянии r от диполя равно

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]. \quad (2.33)$$

Суммирование по всем диполям внутри сферы эквивалентно нахождению средней величины x -компоненты поля

$$\bar{E}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3(p_x x^2 - p_y xy - p_z xz)}{r^5} \right]. \quad (2.34)$$

Мы предполагаем, что диэлектрик изотропен и поэтому направления x , y , z эквивалентны. Тогда имеем

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{\overline{r^2}}{3}, \quad \overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0. \quad (2.35)$$

Отсюда сразу следует, что поле, созданное молекулами внутри сферы, равно нулю.

Таким образом, поле в месте расположения выделенной молекулы равно сумме полей (2.27), (2.28), (2.32) и (2.34):

$$\mathbf{E}_{\text{эфф}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (2.36)$$

Кроме изотропных веществ, этому соотношению подчиняются также кристаллы кубической симметрии. Кристаллы с симметрией более низкого порядка ему не удовлетворяют. Более того, в расчете учитывались лишь дипольно-дипольные взаимодействия, что заведомо неверно для тех веществ, где имеются большие группы ориентированных молекул.

Разница между определениями а) и в) состоит в том, что в случае в) мы рассматривали явления, реально происходящие с отдельной молекулой, в случае же а) усредняется микроскопическое поле.

§ 2.4. Поляризуемость

Определение в) оказывается полезным при описании макроскопического поведения диэлектриков с точки зрения свойств их молекул. Для такого описания необходимо диэлектрическую проницаемость связать с поляризуемостью отдельной молекулы. Это можно сделать с помощью соотношения (2.36), в котором сила, действующая на отдельную молекулу, выражается через внешнее поле. Поляризуемость α определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}_{\text{эфф}}, \quad (2.37)$$

где \mathbf{p} — дипольный момент, индуцированный в изолированной молекуле. Если в единице объема имеется N молекул, то поляризация равна

$$\left. \begin{aligned} P &= N\mathbf{p} = \alpha N \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{эфф}}, \\ P &= \frac{N_0 g \alpha}{M} \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{эфф}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где g — плотность, а M — молекулярный вес вещества, N_0 — число Авогадро, так что $N = N_0 g / M$. Таким образом, поляризация \mathbf{P} может быть вычислена, если известна величина α . Комбинируя далее соотношения (2.38), (2.12) и (2.36), можно исключить поле и получить формулу

$$\frac{k-1}{k+2} = \frac{\alpha N}{3} = \frac{N_0 g \alpha}{3M}. \quad (2.39)$$

Эту формулу называют соотношением Клаузиуса — Мосотти, а также формулой Лоренц — Лорентца. Ее правильнее всегда считать интерполяционной формулой, позволяющей в рамках простой модели учитывать взаимодействие молекул и связывать поляризуемость молекул со свойствами среды. Она удовлетворительно описывает зависимость диэлектрической проницаемости от плотности для широкого класса жидкостей и твердых тел. Для газов, у которых проницаемость k близка к единице, соотношение (2.39) принимает следующий вид:

$$k - 1 = N\alpha = \frac{N_0 g \alpha}{M}, \quad (2.40)$$

т. е. мы пренебрегаем взаимодействием соседних молекул. Поляризация вещества в общем случае обусловлена двумя основными причинами: 1) удлинением связей между атомами и 2) преимущественной ориентацией моментов молекул вдоль внешнего поля. В отсутствие поля дипольные моменты молекул ориентированы хаотически из-за теплового движения и малого взаимодействия между ними.

Вторая из этих причин ответственна за температурную зависимость диэлектрической проницаемости. Из статистической физики известно, что вероятность молекуле иметь энергию U пропорциональна $e^{-\frac{U}{kT}}$, где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Если молекула с дипольным моментом \mathbf{p}_0 находится в поле \mathbf{E} , то согласно задаче 13 гл. 8 имеем

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos \theta,$$

и энергия молекулы зависит от ее ориентации относительно поля. Для вычисления суммарного дипольного момента необходимо просуммировать вклады отдельных молекул. Если в единице объема

содержится N молекул, то средняя поляризация будет равна

$$P = \frac{\int N p_0 \cos \theta e^{x \cos \theta} d\Omega}{\int e^{x \cos \theta} d\Omega}, \quad (2.41)$$

так как вклад отдельной молекулы равен $p_0 \cos \theta$. Для удобства в формуле (2.41) принято обозначение $x = \frac{p_0 E}{kT}$. Знаменатель в этой формуле легко интегрируется, числитель же с точностью до постоянного множителя $N p_0$ равен производной знаменателя. В результате расчета получаем формулу Ланжевена

$$P = N p_0 \left(\operatorname{ch} x - \frac{1}{x} \right). \quad (2.42)$$

При малых x эта формула принимает следующий вид:

$$P \approx N p_0 \frac{x}{3} = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \quad (2.43)$$

Кроме поляризации, обусловленной ориентацией молекул, в общем случае следует учесть поляризацию, возникающую из-за удлинения связей в поле и характеризующую величиной α_0 . Тогда соотношение (2.40) принимает вид

$$k - 1 = N \alpha_0 + \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 kT}. \quad (2.44)$$

В следующей главе мы снова вернемся к задаче об электростатическом поле в вакууме. Однако теперь мы можем включать в рассмотрение диэлектрики, учитывая их влияние граничными условиями и источниками поля.

Задачи

1. При данной ориентации кристалла в поле величина вектора P пропорциональна величине вектора E , а угол между ними постоянен. Математически это выражается следующим соотношением:

$$P = (e \cdot e) E - (e \cdot E) e.$$

Выразите e через P и E и угол между ними и докажите, что тензор $\chi_{\alpha\beta}$ в соотношении $P_\alpha = \epsilon_0 \chi_{\alpha\beta} E_\beta$ симметричен.

2. Рассмотрите простую кубическую решетку из диполей с одинаковыми моментами и одинаковой ориентацией. Покажите, что в месте расположения одного из диполей поле, создаваемое другими диполями, расположенными внутри сферы произвольного радиуса с выделенным диполем в центре, равно нулю.

3. Ось длинного тонкого цилиндра с диэлектрической проницаемостью k параллельна внешнему полю E . Каковы величины E и D внутри цилиндра? Определите поля в тонком диэлектрическом диске, ориентированном перпендикулярно полю?

4. Покажите, что в случае электрета (величина P постоянна) интеграл $E \cdot D dv$ равен нулю при интегрировании по всему объему, занятому полем.

5. Рассмотрите электрон с зарядом $-e$, движущийся по круговой орбите радиусом a вокруг заряженной частицы $+e$, в поле, направленном под прямым углом к плоскости орбиты. Покажите, что поляризуемость α в этом случае примерно равна $4\pi a^3$.

ЛИТЕРАТУРА

Диэлектрики и граничные условия рассматриваются во всех работах, список которых приведен в конце гл. I. Вывод формулы Ланжевена можно найти почти в любом учебнике по статистической физике. Например:

1. R. H. Fowler, *Statistical Mechanics*.

В книге применяются изящные методы с использованием функции распределения.

2. J. E. Mayer and M. G. Mayer, *Statistical Mechanics*.

С математической точки зрения эта книга проще, чем книга Фаулера, и более чем достаточна для круга вопросов, изложенных выше.

* Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*.

* Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*.

* М. А. Леонтович, *Статистическая физика*.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАХОЖДЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА

В гл. 1 было показано, что задача о нахождении потенциала решается, по крайней мере принципиально, если известно распределение зарядов. Однако в действительности более или менее легко решаются лишь некоторые самые простые задачи. Для практических целей были разработаны специальные методы как измерения, так и приближенного вычисления полей, а также графические и полуграфические способы, требующие лишь некоторых расчетов. Аналитические методы редко приводят к решению в замкнутом виде; решения в виде рядов пригодны только при достаточно быстрой их сходимости. Тем не менее аналитические решения при упрощенных граничных условиях дают ценные сведения, даже если необходимо последующее, более точное определение полей. Кроме того, графические методы требуют предварительного знания общего характера поведения потенциала. Решения задач с относительно простыми граничными условиями и простым распределением зарядов играют большую роль и в технических приложениях.

К сожалению, общего метода решения простых по своей геометрии задач нет. Каждая отдельная задача требует, по существу, особого рассмотрения. Однако есть несколько методов, которые приложимы к относительно широким классам задач. Рассмотрению этих методов и посвящена настоящая глава. Мы начнем с доказательства теоремы о единственности решений задач теории потенциалов.

§ 3.1. Теорема о единственности

Эта теорема утверждает, что если найдено какое-либо решение задачи о потенциале, удовлетворяющее граничным условиям, то оно единственно, т. е. другие решения отсутствуют. Под граничными условиями понимаются условия, которым должен удовлетворять потенциал или его нормальная производная на границе рассматриваемой области.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы об однозначном определении векторного поля плотностью его источников и плотностью циркуляции (§ 1.1). Отличие состоит в том, что интегрирование теперь производится в конечном объеме. Применим теорему Гаусса к вектору

$$\int \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dv = \int [(\nabla \varphi)^2 + \varphi \nabla^2 \varphi] dv. \quad (3.1)$$

Последний член правой части обращается в нуль в силу уравнения Лапласа, если поверхность интегрирования выбрать так, чтобы исключить из рассмотрения все заряды. Для этого придется, быть может, ввести дополнительные внутренние поверхности.

Пусть имеются два различных решения φ_1 и φ_2 одной и той же задачи о потенциале. И φ_1 и φ_2 удовлетворяют граничным условиям, т. е. на границе области $\varphi_1 = \varphi_2$ или $(\nabla \varphi_1)_n = (\nabla \varphi_2)_n$ (компоненту $\nabla \varphi$, нормальную поверхности, часто называют «нормальной производной» и обозначают $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$). Если в формулу (3.1) вместо функции φ подставить разность $\varphi_1 - \varphi_2$, то получается следующее соотношение:

$$\int (\varphi_1 - \varphi_2) \nabla (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot d\mathbf{S} = \int [\nabla (\varphi_1 - \varphi_2)]^2 dv. \quad (3.2)$$

Любое из граничных условий (и равенство потенциалов, и равенство их нормальных производных) обращает в нуль левую часть соотношения (3.2). Следовательно, подынтегральное выражение в правой части, будучи величиной неотрицательной, должно обращаться в нуль; тогда имеем

$$\nabla \varphi_1 = \nabla \varphi_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \text{const.} \quad (3.3)$$

Таким образом, два решения, предполагавшиеся сначала различными, отличаются только аддитивной постоянной, которая в градиент никакого вклада не дает и, следовательно, никак не сказывается на величине электрического поля.

Если имеются диэлектрики с проницаемостью, не зависящей от поля, то формула (3.1) заменяется следующей:

$$\int \varphi k \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int [k (\nabla \varphi)^2 + \varphi \nabla \cdot (k \nabla \varphi)] dv. \quad (3.1)$$

Написав уравнение Лапласа для диэлектриков

$$\nabla \cdot (k \nabla \varphi) = 0,$$

убеждаемся, что доказательство остается в силе. При наличии так называемых нелинейных диэлектриков область интегрирования может быть разделена на подобласти с однородной плотностью поляризации, в каждой из которых теорема справедлива.

§ 3.2. Теорема взаимности Грина

Имеется большое число теорем, которые позволяют одну электростатическую задачу свести к другой, более простой, решение которой известно. Одной из самых полезных теорем такого рода является теорема взаимности Грина. Рассмотрим систему точечных зарядов q_j , расположенных в точках с потенциалами φ_j . Предполагается, что потенциал φ_j создается всеми зарядами, кроме q_j . Потенциал в точке j и заряды в остальных точках (они будут обозначаться индексом i) связаны следующим соотношением:

$$\varphi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n{}' \frac{q_i}{r_{ij}}, \quad (3.4)$$

где штрих означает, что при суммировании член с $i=j$ опускается. Пусть имеется другая система зарядов q'_j , расположенная в тех же точках. Тогда соответствующие потенциалы будут равны

$$\varphi'_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n{}' \frac{q'_i}{r_{ij}}. \quad (3.5)$$

Умножим соотношение (3.4) на q'_j , а соотношение (3.5) — на q_j и просуммируем полученные выражения по индексу j :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varphi_j q'_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n{}' \frac{q_i q'_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \\ \sum_{j=1}^n \varphi'_j q_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n{}' \frac{q'_i q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Если теперь поменять порядок суммирования в одном из этих соотношений, то получается равенство

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j q'_j = \sum_{j=1}^n \varphi'_j q_j. \quad (3.7)$$

Это равенство и есть теорема взаимности Грина.

Эту теорему можно обобщить на случай n проводников с зарядами q_j и потенциалами φ_j , если в формуле (3.7) все члены с одинаковыми потенциалами объединить в один. Легко видеть, что равенство (3.7) применимо непосредственно к заряженным проводникам.

Пусть все проводники, кроме двух (i и j), заземлены. Тогда из теоремы взаимности Грина следует, что потенциал незаряженного

проводника i при наличии заряда q на проводнике j равен потенциалу незаряженного проводника j , когда на проводнике i имеется заряд q . Применение теоремы взаимности к решению задач о нахождении потенциала будет рассмотрено в конце § 3.3.

§ 3.3. Функция Грина

Большое число задач может быть решено с помощью функции Грина. Функцией Грина называется потенциальная функция данной системы заземленных проводников, в которой имеется один единичный заряд, расположенный в точке x_α . Следует отметить, что проводники могут находиться в бесконечности. С помощью теоремы взаимности можно показать, что функция Грина данной задачи представляет собой симметричную функцию координат точки поля и точки, где расположен единичный заряд.

Эта функция дает возможность решать два типа задач нахождение потенциала. В задачах первого типа считается известным распределение потенциала на некоторой проводящей поверхности; в задачах второго типа — распределение зарядов внутри какой-либо поверхности. Решения задач обоих типов могут быть получены с помощью векторной теоремы Грина

$$\int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot dS, \quad (3.8)$$

где ψ и φ — произвольные функции координат, не имеющие особенностей в рассматриваемом объеме.

Пусть φ — решение какой-либо конкретной задачи, а ψ — G -функция Грина этой задачи, т. е. ее решение для случая, когда все проводники заземлены и имеется точечный единичный заряд, расположенный в точке $r \doteq 0$. Функция G имеет вид

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} + \chi, \quad (3.9)$$

где χ — потенциал зарядов, индуцированных на поверхности S . χ — функция гармоническая, т. е. она удовлетворяет уравнению Лапласа. Таким образом, функция G имеет особенность только при $r = 0$, однако оперирование с такими особенностями не представляет труда благодаря свойствам δ -функции. Подставляя (3.9) в соотношение (3.8), получим

$$\int (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) dv = \int \left[G \nabla^2 \varphi + \frac{\varphi \delta(r)}{\epsilon_0} \right] dv = \int (G \nabla \varphi - \varphi \nabla G) \cdot dS. \quad (3.10)$$

Так как по определению $G=0$ на поверхности S , то соотношение (3.10) можно преобразовать к следующему виду:

$$\varphi = -\epsilon_0 \left(\int G \nabla^2 \varphi \, dv + \int \varphi_S \nabla G \cdot d\mathbf{S} \right). \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь отдельно два случая, упомянутые выше.

1) Поверхность, окружающая точку x'_α , заземлена, следовательно, $\varphi_S = 0$ и $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$, где ρ — плотность зарядов в объеме v . Тогда из соотношения (3.11) следует

$$\varphi(x'_\alpha) = -\epsilon_0 \int G \nabla^2 \varphi \, dv = \int G \rho \, dv. \quad (3.12)$$

По существу это выражение является следствием принципа суперпозиции.

2) Предположим теперь, что в объеме v заряды отсутствуют, а функция φ задана на поверхности S . Тогда $\nabla^2 \varphi = 0$, и соотношение (3.11) принимает следующий вид:

$$\varphi(x'_\alpha) = -\epsilon_0 \int \varphi_S \nabla G \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.13)$$

Это соотношение дает решение задачи о потенциале в том случае, когда окружающая данный объем проводящая поверхность состоит из нескольких частей, заряженных до разных потенциалов. Потенциал при этом выражается в виде поверхностного интеграла от произведения потенциала на граничной поверхности S на нормальную производную функции Грина. Нормальная производная функции Грина равна плотности поверхностных зарядов, индуцированных на заземленной поверхности единичным зарядом, расположенным в точке x'_α . Поэтому фактически в выражении (3.13) под интегралом стоит произведение потенциала на поверхности S на плотность поверхностных зарядов, наведенных на заземленной граничной поверхности единичным зарядом, расположенным в точке поля. Плотность поверхностных зарядов σ_S можно явно ввести в соотношение (3.13). Для этого заметим, что согласно (2.15)

$$\nabla G \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dS} = \frac{\sigma_{1S}}{\epsilon_0}. \quad (3.14)$$

Тогда соотношение (3.13) сводится к следующему:

$$\varphi(x'_\alpha) = - \int \varphi_S \sigma_{1S} \, dS. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) можно вывести непосредственно из теоремы взаимности:

1) Предположим, что поверхность S заземлена, а в точке x'_α расположен точечный заряд $q_{x'_\alpha}$. Обозначим заряд, индуцированный на элементе поверхности S с индексом j , через q_{jS} .

2) Пусть теперь в точке x'_α заряда нет. Разделим поверхность S на отдельные элементы, каждый из которых находится при постоянном потенциале, причем потенциал элемента с индексом j равен φ_{jS} . Потенциал в точке x'_α обозначим $\varphi(x'_\alpha)$. Свяжем оба эти случая соотношением (3.7)

$$q'_{x'_\alpha} \varphi(x'_\alpha) + \sum_{j=1}^n q_{1jS} \varphi_{jS} = 0 + 0. \quad (3.16)$$

Нули в правой части появляются из-за того, что в случае 1) потенциал всей граничной поверхности равен нулю, а в случае 2) заряд в точке x'_α равен нулю. Полагая $q'_{x'_\alpha}$ равным единице, получаем

$$\varphi(x'_\alpha) = - \sum_{j=1}^n \varphi_{jS} q_{1jS}. \quad (3.17)$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (3.15), однако оно получено более прямым и ясным путем.

При рассмотрении конкретных задач мы выведем функции Грина для различных проводящих поверхностей. Зная эти функции, легко написать решения задач обоих типов, указанных в начале параграфа.

§ 3.4. Инверсия

Существуют преобразования различных видов, сводящие одну задачу к другой. Инверсия представляет собой весьма важный частный случай таких преобразований, поскольку она применима как

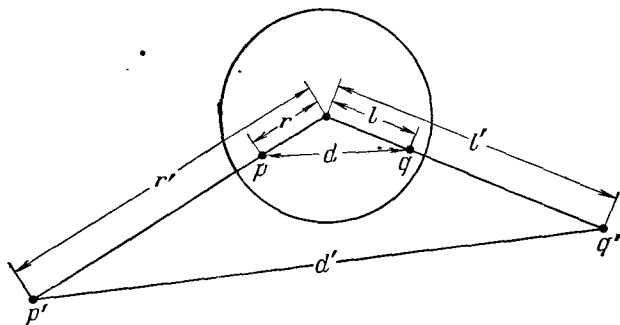


Рис. 3.1. Инверсия.

в трех, так и в двух измерениях. В двух измерениях существуют преобразования более общего характера, чем инверсия.

Для решения задач наиболее простым и полезным методом оказывается инверсия на сфере, показанная на рис. 3.1. При этом точки

$P(r, \theta, \varphi)$, расположенные внутри сферы, переводятся в точки $P'(a^2/r, \theta, \varphi)$ вне сферы с помощью соотношения $rr' = a^2$, где a — радиус сферы. Прямым дифференцированием можно показать, что если функция $\Phi_P = \Phi(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то ему же удовлетворяет функция $\Phi_{P'} = \Phi(r', \theta, \varphi) = \frac{a}{r'} \Phi\left(\frac{a^2}{r'}, \theta, \varphi\right)$.

Пусть заряды q и q' расположены соответственно на расстояниях l и l' от центра сферы таких, что $ll' = a^2$ (см. рис. 3.1). Тогда из соотношений $rr' = a^2$ и $ll' = a^2$ следует, что $r/l' = l/r'$, т. е. треугольники со сторонами rl и $r'l'd'$ подобны.

До инверсии потенциал в точке P был равен $\Phi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$; после инверсии потенциал в точке P' равен $\Phi_{P'} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d'}$. Отсюда следует

$$\frac{\Phi_P}{\Phi_{P'}} = \frac{q'}{d'} \cdot \frac{d}{q} = \frac{q'}{q} \cdot \frac{l}{r'} = \frac{q'}{q} \cdot \frac{r}{l'}. \quad (3.18)$$

Выясним теперь, как при инверсии преобразуются заряды. Для этого воспользуемся тем, что поверхность с нулевым потенциалом сохраняет свой потенциал и после инверсии. Мы можем считать потенциал сферы, на которой производится инверсия, равным нулю, если предположить, что вначале имелись два заряда $q_1 = q$ и $q_{II} = -qa/l$, расположенные соответственно на расстояниях l и l' от центра сферы таких, что $ll' = a^2$. После инверсии потенциал сферы должен остаться неизменным. Это имеет место, если предположить, что заряды изменяются следующим образом: $q_1 = q$ переходит из точки l в точку a^2/l и становится равным $q'_1 = aq/l$, $q_{II} = -qa/l$ переходит из точки a^2/l в точку l и становится равным $q'_{II} = q$.

В обоих случаях инвертированный заряд равен заряду до инверсии, умноженному на радиус инверсии и деленному на первоначальное расстояние заряда до центра сферы. Вследствие этого имеем

$$\frac{q'}{q} = \frac{a}{l} = \frac{l'}{a} = \sqrt{\frac{l'}{l}}. \quad (3.19)$$

Ради удобства можно считать, что знаки зарядов при инверсии не меняются, хотя это и не обязательно, если все заряды равным образом подвергаются инверсии. Подставляя соотношение (3.19) в (3.18), получаем правило инверсии потенциалов

$$\frac{\Phi_{P'}}{\Phi_P} = \frac{a}{r'} = \frac{r}{a}, \quad (3.20)$$

согласующееся с равенством $\Phi_{P'} = \frac{a}{r'} \Phi(r, \theta, \varphi)$. Правила преобразования для объема и плотности поверхностных зарядов легко

вывести из правил преобразования расстояний и зарядов (соотношение (3.19)).

Часто в центре сферы инверсии после преобразования оказывается точечный заряд. Это происходит потому, что в первоначальной системе часть силовых линий замыкалась в бесконечности на заряд, равный по величине суммарному заряду системы, но противоположный по знаку, а бесконечность при инверсии преобразуется в центр сферы инверсии.

Главное достоинство инверсии состоит в том, что сферические поверхности, проходящие через центр инверсии, преобразуются в плоскости. Соответственно две пересекающиеся сферы могут быть преобразованы в две пересекающиеся плоскости; задачи же с плоскими граничными поверхностями обычно легко решаются методом изображений.

§ 3.5. Метод изображений

Известно, что потенциал плоскости, расположенной посередине между двумя равными зарядами противоположных знаков так, что каждая точка плоскости одинаково удалена от обоих зарядов, равен нулю. Поэтому эту плоскость можно заменить заземленной проводящей поверхностью (рис. 3.2, а), при этом потенциал и поле останутся

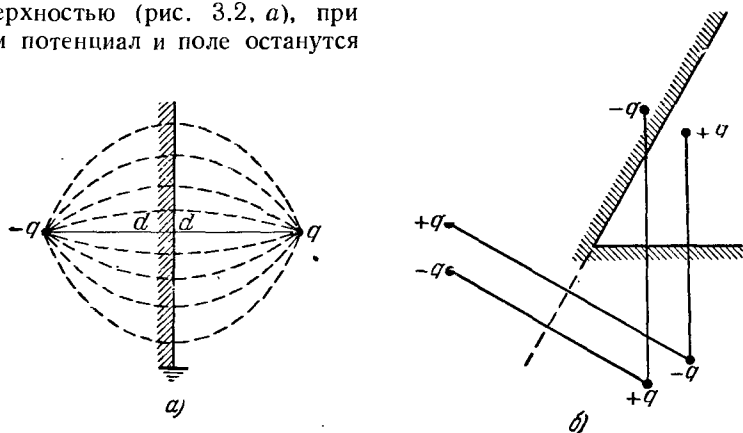


Рис. 3.2. Примеры изображений заряда в плоском заземленном проводнике.

неизменными как справа, так и слева от поверхности. Таким образом, задача о заряде, расположенном вблизи заземленной проводящей поверхности, эквивалентна задаче о двух зарядах. Фиктивный заряд $-q$ называется «изображением» заряда q по аналогии с отражением в зеркале. Рис. 3.2, б отвечает случаю, когда две пересекающиеся плоскости создают пять изображений заряда q .

При решении задачи о нахождении потенциала точечного заряда, расположенного вблизи заземленной проводящей сферы, следует воспользоваться как методом изображений, так и инверсией. Сумма потенциалов, создаваемых зарядом q_1 , расположенным вблизи проводящей сферы радиуса a , и зарядами, наведенными на сфере, даст такой потенциал, при котором сфера будет поверхностью нулевого потенциала. С помощью инверсии на сфере радиуса $2a$ (рис. 3.3)

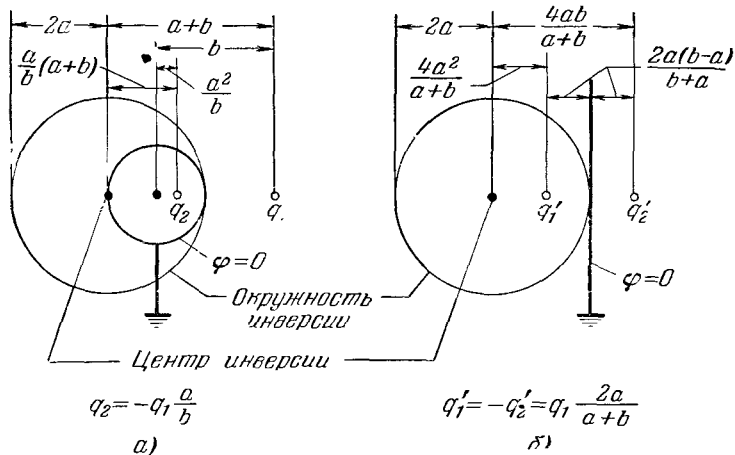


Рис. 3.3. Инверсия точечного заряда и проводящей сферы (а) в точечный заряд и проводящую плоскость (б).

эта система может быть преобразована соответственно в заряд q_1' и проводящую плоскость. Теорема о единственности требует, чтобы потенциал вне первоначальной сферы соответствовал потенциалу заряда и плоскости, полученных в результате инверсии, т. е., по существу, потенциалу заряда и его изображения. С помощью обратной инверсии изображению заряда q_1' в плоскости можно сопоставить заряд q_2 , который называется изображением заряда q_1 в проводящей сфере. Следовательно, потенциал точечного заряда и его изображения в проводящей сфере адекватен функции Грина в области, лежащей между проводящей сферой и бесконечностью.

Комбинируя оба метода, легко получить решения всевозможных задач, в которых отдельные участки проводящей сферы имеют различные потенциалы. Для этого нужно сферу преобразовать в плоскость, а соответствующая задача для плоскости легко решается, если потенциал точечного заряда и его изображения использовать в качестве функции Грина. Задачи с заданным распределением зарядов вне проводящей сферы также легко решаются с помощью инверсий и метода

изображений. Аналогичным образом решаются задачи с зарядами, находящимися внутри сферы. Даже задачи с двумя или тремя пересекающимися сферами могут быть сведены к задачам с пересекающимися плоскостями, если центр инверсии взять на пересечении этих сфер.

§ 3.6. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных

Если отвлечься от задач с заданным распределением зарядов, то основная проблема теории потенциала состоит в решении уравнения Лапласа при заданных условиях на границах рассматриваемой области. Если эти границы совпадают с координатными поверхностями в ортогональной системе координат, то решение посредством разделения переменных часто оказывается более удобным, чем с помощью функции Грина. Если граничная поверхность соответствует постоянному значению одной из координат, то с граничными условиями очень удобно оперировать, будь то непрерывность потенциала или его производных, или постоянство этих величин. Это справедливо при любой системе координат. Однако при специально выбранных координатах мы можем пойти несколько дальше и записать решение в виде произведения функций отдельных координат. Тогда граничные условия нужно будет применять к функциям одной переменной. Следует добавить, что нет общего метода решения уравнения с частными производными, а разделение переменных сводит уравнение Лапласа к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, по крайней мере принципиально, всегда разрешимы.

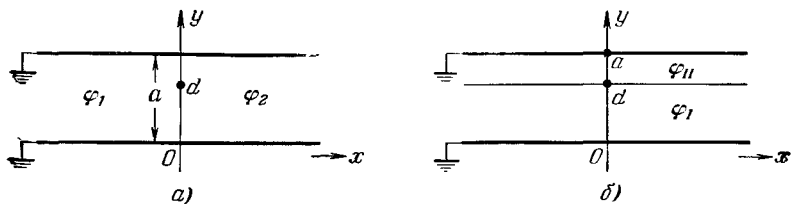


Рис. 3.4. Два способа разделения пространства между пластинами конденсатора плоскостями, содержащими линейный заряд: $x = 0$ и $y = d$.

Характерные черты рассматриваемого метода лучше всего выявить на примере. Рассмотрим два параллельных заземленных прогонника $y = 0$ и $y = a$ (рис. 3.4). Пусть через точку $(0, d)$ проходит линейный заряд, параллельный оси z , и других зарядов между пластинами нет. Таким образом, рассматриваемая задача двумерна и прямоугольные координаты очень удобны для ее решения. Предположим, что

$\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$, где X есть функция только координаты x , а Y — функция только координаты y . Везде, кроме точки $(0, d)$, должно удовлетворяться уравнение

$$\nabla^2 \varphi = YX'' + XY'' = 0, \quad (3.21)$$

где два штриха обозначают вторую производную соответствующей функции по ее аргументу. Разделим это уравнение на φ , тогда получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0. \quad (3.22)$$

Так как переменные x и y независимы, то оба члена в уравнении (3.22) не должны зависеть ни от одной из переменных. Следовательно, можно написать

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C. \quad (3.23)$$

Константа C называется параметром разделения. Если нет никаких ограничений на величину C , то произведение общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений будет общим решением двумерного уравнения Лапласа. Однако граничные условия накладывают ограничения как на характер возможных решений, так и на величину параметра разделения. Решение мы выразим в виде суммы (или интеграла в зависимости от того, являются ли допустимые значения параметра разделения дискретными или непрерывными) допустимых частных решений с такими коэффициентами, чтобы удовлетворить граничным условиям. Для отыскания этих коэффициентов нужно использовать свойство ортогональности решений уравнения Лапласа.

Теперь нужно выбрать тот или иной знак параметра разделения. Предположим сначала, что параметр C в уравнении (3.23) положителен, $C = k^2$. Тогда соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Y'' + k^2 Y &= 0, \\ X'' - k^2 X &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Их общими решениями являются функции

$$\left. \begin{aligned} Y &= A \sin ky + B \cos ky, \\ X &= Ce^{kx} + De^{-kx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Эти решения должны удовлетворять граничному условию $\varphi = 0$ при $y = 0$, $y = a$ и $x = \pm \infty$. Для того чтобы потенциал на проводящих пластинах равнялся нулю, достаточно положить, что $B = 0$, а $k = n\pi/a$, где n — целое число. Условия в бесконечности на оси x не удовлетворяются ни одним из членов функции X . Поэтому для

положительных и отрицательных значений x нужно написать отдельные решения

$$\left. \begin{aligned} -\infty < x < 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}, \\ 0 < x < \infty &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Так как потенциал φ непрерывен при $x = 0$, то коэффициенты соответствующих членов в обоих рядах равны, т. е. $C_n = A_n$. Однако эти коэффициенты еще не известны. Не учтено также влияние линейного заряда.

Линейный заряд можно описать с помощью двумерной δ -функции, однако ввиду того, что решения различны при положительных и отрицательных значениях x , можно воспользоваться граничными условиями на заряженной поверхности. Для этого введем одномерную δ -функцию, описывающую распределение зарядов на поверхности $x = 0$. Будем считать, что плотность зарядов на этой поверхности равна

$$\sigma(y) = q\delta(y - d), \quad (3.27)$$

где функция $\delta(y - d)$ определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \delta(y - d) dy &= 1, \\ \int_0^a f(y) \delta(y - d) dy &= f(d), \quad 0 < d < a, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

а q — заряд, приходящийся на единицу длины линейного заряда. Тогда потенциал должен удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\sigma(y)}{\epsilon_0} = \frac{q\delta(y - d)}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{x=0} = \sum A_n \frac{2n\pi}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (3.29)$$

Коэффициенты Фурье определяются обычным образом — умножением обеих частей соотношения (3.29) на $\sin \frac{n\pi y}{a}$ и последующим интегрированием от 0 до a . Тогда все члены, кроме члена с индексом $m = n$, исчезнут. Это свидетельствует о том, что функции синуса в этом интервале «ортгональны». Следовательно, имеем

$$\frac{q}{\epsilon_0} \sin \frac{m\pi d}{a} = \frac{2m\pi}{a} A_m \frac{a}{2},$$

или, заменяя m на n , получаем

$$A_n = \frac{q}{\epsilon_0 n \pi} \sin \frac{n \pi d}{a}. \quad (3.30)$$

Таким образом, полное решение задачи имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{\epsilon_0 \pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi d}{a} e^{\frac{n \pi x}{a}} \sin \frac{n \pi y}{a}, \\ \varphi_2 &= \frac{q}{\epsilon_0 \pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi d}{a} e^{-\frac{n \pi x}{a}} \sin \frac{n \pi y}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Следует отметить, что выражение для того же потенциала выглядело бы совсем иначе, если выбрать другой знак у параметра разделения в соотношении (3.23). Пусть $C = -k^2$, тогда $X(x)$ есть просто $\cos kx$, так как $X(x)$ — четная функция переменной x . Никаких ограничений на величину k не накладывается. Ввиду того, что нельзя подобрать единую функцию Y так, чтобы она обращалась в нуль на обеих границах, рассматриваемую область следует опять разбить на две части, теперь уже плоскостью $y = d$. Легко проверить, что при произвольном k решения, которые обращаются в нуль на плоскостях $y = 0$, $y = a$ и непрерывны при $y = d$, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_I &= \frac{\text{sh } ky}{\text{sh } kd}, & 0 < y < d \\ Y_{II} &= \frac{\text{sh } k(a-y)}{\text{sh } k(a-d)}, & d < y < a. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Потенциалы выражаются в виде интегралов по k от этих решений с коэффициентом $A(k)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos kx \frac{\text{sh } ky}{\text{sh } kd} dk, \\ \varphi_{II} &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos kx \frac{\text{sh } k(a-y)}{\text{sh } k(a-d)} dk. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Плотность зарядов на плоскости $y = d$ следует теперь рассматривать как функцию переменной x . В результате условие, накладываемое на потенциал в плоскости $y = d$, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{q^d(x)}{\epsilon_0} &= \left[\frac{\partial \varphi_I}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial y} \right]_{y=d} = \\ &= \int A(k) \cos kx \left[\frac{\text{ch } kd}{\text{sh } kd} + \frac{\text{ch } k(a-d)}{\text{sh } k(a-d)} \right] k dk = \\ &= \int A(k) \frac{\cos kx \text{ sh } ka}{\text{sh } kd \text{ sh } k(a-d)} k dk. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Но, как показано в одной из задач гл. I, формальное применение теоремы Фурье к δ -функции приводит к такому равенству:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx dk = 2\pi\delta(x). \quad (3.35)$$

Смысл этого равенства состоит в том, что обе его части ведут себя одинаково, будучи подинтегральными выражениями. Поэтому

$$A(k) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\text{sh } kd \text{ sh } k(a-d)}{k \text{ sh } ka}, \quad (3.36)$$

и потенциал в явном виде выглядит таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{\text{sh } k(a-d)}{k \text{ sh } ka} \cos kx \text{ sh } ky dk, \\ \varphi_{II} &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{\text{sh } kd}{k \text{ sh } ka} \cos kx \text{ sh } k(a-y) dk. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Если $q = 1$, то полученное решение (соотношения (3.31) и (3.37)) обращается в функцию Грина данной задачи. В дальнейшем мы увидим, что этот метод отыскания функции Грина обобщается на случай системы из координатных плоскостей.

Этим примером мы стремились проиллюстрировать характерные черты метода разделения переменных, не вникая в частности данной задачи. При решении задач весьма важен правильный выбор параметра разделения: обычно одна из возможностей более удобна, чем другие.

В трехмерных задачах разделение переменных производится тем же методом. Например, в декартовых координатах $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, и уравнение Лапласа приобретает следующий вид:

$$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (3.38)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= -\frac{Z''}{Z} = C_1, \\ \frac{X''}{X} &= C_1 - \frac{Y''}{Y} = C_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Таким образом, теперь имеются два параметра разделения; вообще, при N независимых переменных имеется $N - 1$ параметров разделения. Отсутствие симметрии в уравнениях для отдельных множителей решения — характерное свойство уравнения Лапласа. Это свойство вытекает из симметрии оператора Лапласа по отношению к знаку координат. В случае прямоугольных координат только два множителя из трех могут быть тригонометрическими функциями, но не все три. Для отыскания коэффициентов нужно, чтобы функции были ортогональны на поверхности, соответствующей постоянству одной

из координат. Легко показать, что это общее свойство решений уравнения Лапласа, не зависящее от системы координат, в тех случаях, когда возможно разделение переменных.

Ортогональность этих функций доказывается с помощью теоремы Грина. Приведем здесь доказательство для сферических координат. Далее мы увидим, что оно применимо и в других случаях. Пусть переменные разделяются следующим образом: $\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, а Φ_1 и Φ_2 — два возможных независимых решения. Применим к ним теорему Грина

$$\int (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) dv = \int [R_1 Y_1 \nabla (R_2 Y_2) - R_2 Y_2 \nabla (R_1 Y_1)] \cdot dS. \quad (3.40)$$

Левая часть соотношения (3.40) обращается в нуль, так как Φ_1 и Φ_2 — решения уравнения Лапласа. В качестве поверхности S возьмем сферу. Тогда компонента оператора ∇' , параллельная поверхности S , не будет действовать на функцию Y , и поэтому

$$\left(\frac{R_2'}{R_2} - \frac{R_1'}{R_1} \right) \int Y_1 Y_2 dS = 0. \quad (3.41)$$

В силу того, что функции R_1 и R_2 соответствуют разным значениям параметра разделения, они по-разному зависят от r , и следовательно, их логарифмические производные не равны друг другу. Тогда из уравнения (3.41) следует, что функции Y_1 и Y_2 ортогональны друг другу на сфере.

Если координатная поверхность не замкнута, то доказательство отличается лишь тем, что следует учесть обращение потенциалов в нуль на бесконечности. Действительно, если источники заключены в ограниченной области, потенциал достаточно быстро стремится к нулю и интеграл по бесконечно увеличивающейся поверхности обращается в нуль. Поэтому можно сделать вывод, что решениями уравнения Лапласа являются ортогональные функции и что если переменные разделяются, то принципиально задача решается.

Можно также показать, что система возможных решений является полной. Мы не будем этого делать, хотя полнота весьма важна для теории потенциала. Без нее не была бы гарантирована возможность представить потенциалы произвольных распределений поверхностных зарядов через возможные решения уравнения Лапласа.

Задачи

1. Пусть функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Докажите, что функция $\frac{1}{r} \varphi\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ есть также решение уравнения Лапласа.

2. Пусть в случае осевой симметрии $\varphi(r, z)$ — электростатический потенциал в точке (r, z) , причем $r^2 = x^2 + y^2$. Пусть также $r = na$, где a — малая величина.

Покажите, что если заряды в рассматриваемом пространстве отсутствуют, то с точностью до членов порядка a^3 потенциал выражается следующей формулой:

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{8\pi} \{2n [\varphi(r, z+a) + \varphi(r, z-a)] + (2n+1)\varphi(r+a, z) + (2n-1)\varphi(r-a, z)\}.$$

Это одна из типичных теорем, используемых при отыскании потенциала методом последовательных приближений.

3. Разность потенциалов между двумя коаксиальными трубками одного диаметра при небольшом зазоре между ними равна v . Разделите зазор между трубками на прямоугольные участки и оцените потенциал каждого участка. Учтя результат предыдущей задачи, проверьте Вашу оценку. Поправьте неправильные значения и повторяйте операцию до тех пор, пока не получите достаточно правильного результата. Такой метод называется методом релаксации.

4. Найдите условие того, что двумерная система эквипотенциалей $\varphi_2 = f(z, y)$ при вращении вокруг оси z переходит в трехмерную систему эквипотенциалей. Покажите, что если это возможно, то потенциал выражается следующим равенством:

$$\varphi = A \int e^{-\int F(\varphi_2) d\varphi_2} d\varphi_2 + B.$$

где $F(\varphi_2) = \frac{1}{y} \frac{1}{(\nabla\varphi_2)^2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$ (см. книги Джинса и Смайта, указанные в гл. 1).

5. Вычислите поле электрического диполя с моментом p . Какое распределение зарядов нужно создать на сфере с диполем p в центре, чтобы поле вне сферы равнялось нулю?

6. Найдите распределение зарядов, создающих потенциал Юкавы

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}.$$

7. Пусть две замкнутые эквипотенциали φ_1 и φ_0 расположены так, что поверхность φ_0 заключена внутри поверхности φ_1 , а φ_P — потенциал некоей точки P между ними. Покажите, что если в точку P поместить заряд q , а эквипотенциальные поверхности заменить заземленными проводниками, то на последних появятся наведенные заряды q_1 и q_0 , связанные соотношением

$$\frac{q_1}{(\varphi_0 - \varphi_P)} = \frac{q_0}{(\varphi_P - \varphi_1)} = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_0)}.$$

8. Покажите, что ряды (3.31) и (3.37) сходятся и удовлетворяют условиям задачи.

9. Найдите распределение потенциала внутри бесконечно длинной прямоугольной призмы с заземленными гранями, если внутри призмы расположен линейный заряд с плотностью q на единицу длины. Грани призмы задаются уравнениями $x=0, a; y=0, b$; линейный заряд проходит через точку (c, d) .

10. а) Найдите распределение зарядов на заземленной проводящей сфере радиуса a_0 , если на расстоянии $r_0 > a_0$ от ее центра расположен точечный заряд q .

б) Найдите распределение зарядов на изолированной проводящей сфере, находящейся в однородном электрическом поле.

в) На расстоянии r_0 от центра изолированной проводящей сферы радиуса a расположен точечный заряд q . Какова минимальная величина заряда, которым должна быть заряжена сфера, чтобы поверхностная плотность зарядов на ней была везде положительной?

11. Найдите потенциал $\varphi(x)$ следующей задачи:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad 0 < x < \pi,$$

$$\varphi(0) = A, \quad \varphi(\pi) = B,$$

при произвольных $\rho(x)$, A , B с помощью функции Грина, определяемой соотношениями

$$\frac{d^2}{dx'^2} G(x', x) = -\delta(x' - x), \quad 0 < x < \pi,$$

$$G(0, x) = G(\pi, x) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Weber, *Electromagnetic Fields*. v. 1, Mapping of fields. Книга представляет собой прекрасный обзор ряда конкретных задач. Основы теории изложены последовательно и ясно.

2. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*. Математические основы теории представлены в классической форме.

* Сретенский, Теория ньютоновского потенциала.

3. J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, v. 1. Впервые методы изображений и инверсии применялись Томсоном. Максвелл развил и дал их блестящее изложение.

Из работ, список которых приведен в конце гл. 1, для задач электростатики наиболее полезными являются монографии Джинса, Смайта, Стрэттона.

4. P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. (Русский перевод: П. Морс и Х. Фешбах, *Методы теоретической физики*.)

Эта исчерпывающая монография по математическим методам делает почти ненужными все остальные ссылки на математические работы.

5. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*. (Русский перевод: Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, *Современный анализ*.)

С математической точки зрения эта книга гораздо более формальна, чем предыдущая. Однако она оказывается весьма полезной при рассмотрении свойств различных функций и особенно вопроса о сходимости разложений.

Отдельные математические вопросы элементарно изложены в руководствах

6. W. E. Byerly, *Fourier's Series and Spherical Harmonics*.

7. R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*.

* Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений

* А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*.

ЗАДАЧИ С ДВУМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Решение задач значительно упрощается, если их геометрию с достаточной точностью можно считать двумерной, т. е. бесконечно протяженной вдоль третьей оси. При этом возникает ряд методов решения, не имеющих аналога в случае трех измерений, а методы, пригодные в трехмерном случае, значительно упрощаются. Одним из наиболее мощных методов решения двумерных задач является метод комплексных переменных и конформных преобразований.

§ 4.1. Комплексно-сопряженные функции

Ниже мы покажем, что в двух измерениях как действительная, так и мнимая части любой аналитической функции W комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$ удовлетворяют уравнению Лапласа. (Обозначение комплексной переменной символом z не может привести к недоразумениям, ибо зависимость от третьей декартовой координаты отсутствует.) Поэтому функцию $W = W(z_1)$ можно подобрать таким образом, чтобы она одновременно описывала и эквипотенциальные поверхности, и силовые линии данной задачи. Пусть $\varphi + i\psi = W = W(z_1) = W(x_1 + iy_1)$. Разделяя действительную и мнимую части этой функции, мы получаем в результате две функции $\varphi(x_1, y_1)$ и $\psi(x_1, y_1)$. Уравнения $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ описывают поверхности равного потенциала и силовые линии или наоборот. Поэтому при переходе от одной комплексной переменной z_1 к другой z_2 функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, переходит в функцию, также удовлетворяющую этому уравнению, но полученное таким способом решение может соответствовать другой задаче. Вообще, целый ряд двумерных задач может быть решен следующим образом.

1) С помощью преобразования $z_2 = f(z_1)$ граничные условия данной задачи сводим к геометрически более простым условиям. При этом преобразовании $z_2 = f(z_1)$ или $z_1 = g(z_2)$ функция $W = W(z_1)$ должна преобразоваться к более простой $W_1(g(z_2)) = W_2(z_2)$. Может оказаться, что решение вновь полученной задачи гораздо легче, чем первоначальной.

2) Подберем аналитическую функцию $\varphi + i\psi$ нового переменного z_2 так, чтобы функция φ была решением преобразованной задачи о потенциале.

3) Преобразуем эту функцию обратно к переменной z_1 .

Рассмотрим обоснование этого способа. Если функция $W = \varphi + i\psi = f(z)$, где $z = x + iy$, аналитическая, то φ и ψ удовлетворяют соотношениям Коши — Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Продифференцировав соотношение (4.1) по x , а соотношение (4.2) по y и затем сложив их, мы получим выражения

$$\nabla^2 \psi = 0 = \nabla^2 \varphi. \quad (4.3)$$

Второе из уравнений получим, поменяв местами x и y . Таким образом, φ и ψ представляют собой гармонические функции.

Функция $W = W(z)$ на плоскости $z = x + iy$ может быть представлена двумя семействами кривых: $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Соотношения Коши — Римана показывают, что кривые этих семейств ортогональны друг другу. Если кривые, соответствующие постоянному φ , определяют эквипотенциальные поверхности, то кривые

$\psi = \text{const}$ соответствуют силовым линиям поля. Их называют также линиями тока.

Поток электрического поля через поверхность S определяется соотношением

$$\Phi = \int E \cdot dS. \quad (4.4)$$

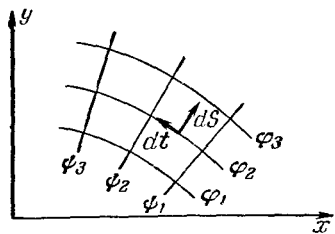


Рис. 4.1. Связь между силовыми линиями и эквипотенциалами.

Рассмотрим участок эквипотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$, расположенный между двумя линиями тока ψ_1 и ψ_2 , единичной высоты по перпендикуляру к плоскости xy . Пусть i , j и k представляют собой единичные векторы вдоль направлений x , y , z , а t — единичный вектор вдоль кривой $\varphi = \text{const}$ (рис. 4.1). Так как высота поверхности равна единице, то $dt = k \times dS$. Тогда формула (4.4) принимает такой вид:

$$\Phi = \int_1^2 E \cdot dS = - \int_1^2 \nabla \varphi \cdot dS = - \int_1^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j \right) \cdot dS.$$

Подставляя сюда соотношения Коши — Римана (4.1) и (4.2), получим

$$\Phi = \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{j} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 (\nabla \psi \times \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 \nabla \psi \cdot d\mathbf{t} = \psi_2 - \psi_1. \quad (4.5)$$

Таким образом, разность между ψ_1 и ψ_2 равна потоку вектора \mathbf{E} через эквипотенциальную поверхность единичной высоты, ограниченную соответствующими линиями тока. Это означает, что две линии тока никогда не пересекаются. Теперь понятно также происхождение названия «линия тока»: в гидродинамике эти кривые соответствуют линиям тока жидкости. В нашем случае они описывают силовые линии электрического поля, а кривые $\varphi = \text{const}$ — эквипотенциальные поверхности. Наоборот, если функция ψ описывает потенциал, то функция φ описывает линии тока. Возможность менять местами φ и ψ часто используется при решении двумерных задач.

§ 4.2. Емкость и напряженность электрического поля

Изложенные соображения позволяют вывести формулу для емкости между двумя проводниками, поверхности которых совпадают с эквипотенциальными поверхностями φ_1 и φ_2 . Будем считать, что поток вектора \mathbf{E} ограничен при этом линиями тока ψ_1 и ψ_2 . Из соотношения (1.26) и определения потока Φ следует

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Емкостью называется величина

$$C = \frac{q}{|\Delta\varphi|} = \frac{\epsilon_0 \Phi}{|\Delta\varphi|}. \quad (4.6)$$

Так как поток Φ равен разности функций ψ , соответствующих краям проводников, то соотношение (4.6) преобразуется следующим образом:

$$C = \epsilon_0 \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (4.7)$$

При выводе (4.7) предполагалось, что все заряды лежат на проводящих поверхностях. В общем случае, когда заряды расположены в пространстве между ними, функция, описывающая линии тока, многозначна.

Зная функцию $W = W(z)$, соответствующую той или иной геометрии, можно вычислить абсолютную величину напряженности

электрического поля. Рассмотрим модуль производной W по z

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{dV}{dz} \right| &= \left| \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|, \\ \left| \frac{dW}{dz} \right| &= \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + i \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + i \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy \right| \left| \frac{1}{dz} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Используя соотношения Коши — Римана, получим

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2} = |\nabla\varphi| = |E|. \quad (4.9)$$

Таким образом, действительная и мнимая части $\frac{dW}{dz}$ равны проекциям градиента потенциала соответственно на оси x и y , а модуль $\frac{dW}{dz}$ равен абсолютной величине напряженности электрического поля.

§ 4.3. Потенциал однородного поля

Прежде чем рассматривать различные преобразования, упрощающие решение многих задач, исследуем потенциалы двух основных видов, к которым часто приводят эти преобразования. Наиболее простым является потенциал однородного электрического поля E , направленного вдоль оси x . Этот потенциал определяется выражением $\varphi = -|E|x$. Комплексный потенциал имеет следующий вид:

$$W = -|E|z = -|E|(x + iy) = \varphi + i\psi; \quad (4.10)$$

соответственно функция, описывающая линии тока, равна $\psi = -|E|y$ (предполагается, что потенциал $\varphi = 0$ на оси y).

§ 4.4. Потенциал линейного заряда

Поле линейного заряда с плотностью q легко найти с помощью теоремы Гаусса (1.26). В качестве поверхности интегрирования возьмем цилиндр радиуса r , единичной высоты, коаксиальный с линейным зарядом. Тогда для напряженности поля получается следующее выражение:

$$E = \frac{qr}{2\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.11)$$

Величину потенциала можно вычислить, подставляя это выражение в соотношение (1.31) и интегрируя последнее

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} (\ln r - \ln r_0). \quad (4.12)$$

В соответствии со сказанным ранее, это выражение показывает, что потенциал бесконечности нельзя считать равным нулю, так как про-

тяженность самих зарядов бесконечна. Вообще, случай плоского поля может лишь приближенно соответствовать физическим условиям, так как он предполагает не только бесконечную протяженность зарядов, но и бесконечную их величину. Задача может рассматриваться как двумерная только, если можно пренебречь крайними эффектами, связанными с конечностью системы. Обычно бывает удобно отсчитывать все потенциалы от потенциала одного из проводников независимо от того, заземлена ли в действительности какая-либо часть системы или нет. Так, при выводе соотношения (4.12) предполагалось, что потенциал цилиндра радиуса r_0 , окружающего линейный заряд, равен нулю.

Комплексную потенциальную функцию W можно вывести из соотношений Коши—Римана, однако проще всего она получается из соотношения (4.12). Для этого перейдем к полярным обозначениям $z = re^{i\theta}$. Тогда получим

$$W = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln z - \ln z_0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln r + i\theta - \ln r_0) = \varphi + i\psi, \quad (4.13)$$

где φ — потенциал, а ψ — функция линий тока. В силу осевой симметрии задачи функция линий тока должна быть пропорциональна аргументу z , т. е. полярному углу θ , если z_0 считать действительной величиной. Потенциальную функцию системы линейных зарядов легко получить, складывая выражения, аналогичные (4.13), соответствующие каждому линейному заряду в отдельности. При этом следует учесть, что заряды смещены друг относительно друга.

§ 4.5. Преобразование в комплексной плоскости

Рассмотрим теперь поведение кривых в небольшой части комплексной плоскости при ее преобразовании. Пусть преобразование от z_1 к z_2 задано уравнением $z_2 = f(z_1)$, причем функция f аналитична везде, за исключением конечного числа особых точек. Это преобразование во всех точках, кроме особых, конформно. Конформность преобразования означает, что угол между двумя кривыми на плоскости z_1 (рис. 4.2, а) равен углу между преобразованными кривыми на плоскости z_2 (рис. 4.2, б). Это можно показать следующим образом. Так как все производные аналитической функции существуют и непрерывны, то производная $\frac{dz_2}{dz_1}$ конечна во всех точках,

за исключением особых. Вычислим производную $\frac{dz_2}{dz_1} = f'(z_1)$ в точке P_1 и рассмотрим два линейных элемента, пересекающихся в точке P_1 . Так как аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, то для аргумента линейного элемента P_2Q_2 получается

следующее выражение:

$$\arg(dz_2) = [\arg f'(z_1)]_{P_1} + \arg(dz_1), \quad (4.14)$$

а для аргумента P_2R_2 —

$$\arg(dz'_2) = [\arg f'(z_1)]_{P_1} + \arg(dz'_1). \quad (4.15)$$

Вычитая соотношение (4.15) из соотношения (4.14), получим

$$\theta_1 = \theta_2. \quad (4.16)$$

Модуль производной $\frac{dz_2}{dz_1} = f'(z_1)$ представляет собой масштабный множитель, на который умножаются все отрезки по соседству

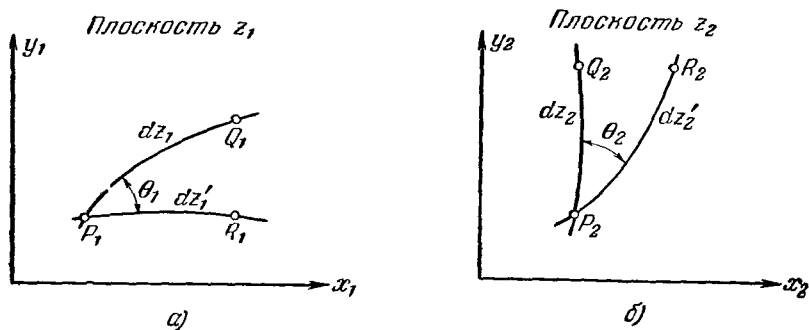


Рис. 4.2. К доказательству сохранения углов при конформном отображении.

с точкой P_1 . Это происходит из-за того, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей. Таким образом, бесконечно малый треугольник преобразуется в подобный самому себе бесконечно малый треугольник. При этом выполняется следующее равенство:

$$|dz_2| = |f'(z_1)_{P_1}| \cdot |dz_1|. \quad (4.17)$$

Подобие исходного и преобразованного треугольников является по существу другим выражением того факта, что при конформном преобразовании углы сохраняются. Очевидно, что при таких преобразованиях линии тока и эквипотенциальные поверхности остаются ортогональными.

§ 4.6. Преобразование Шварца

Шварц предложил преобразование, при котором линия, состоящая из некоторого числа прямолинейных отрезков, расположенная в плоскости z_1 , переходит в прямую линию в плоскости z_2 . При этом внутренняя часть многоугольника преобразуется в верхнюю

половину плоскости. (Многоугольник может быть замкнут в бесконечности.) В основе преобразования Шварца лежит более простое преобразование, при котором угол с вершиной в начале координат

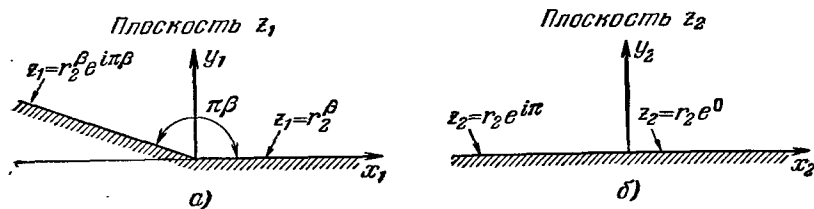


Рис. 4.3. Преобразование Шварца для одного угла.

изменяется, как показано на рис. 4.3. Это преобразование имеет и самостоятельное значение.

Рассмотрим преобразование следующего вида:

$$z_1 = z_2^\beta, \quad (4.18)$$

где β — действительное число, не обязательно целое или рациональное. При таком преобразовании положительная часть действительной оси преобразуется сама в себя, хотя масштаб вдоль этой оси меняется, так как любая абсцисса x_1 возводится в степень $1/\beta$. Во всяком случае, одна из ветвей этого преобразования может быть выражена так, чтобы удовлетворить такому условию. С другой стороны, для точек, лежащих на отрицательной части действительной оси в плоскости z_2 ($z_2 = r_2 e^{i\pi}$), соответствующие значения z_1 комплексны, так как согласно формуле преобразования $z_1 = r_2^\beta e^{i\pi\beta}$.

Таким образом, в соответствии с конформными свойствами данного преобразования отрицательная часть действительной оси в плоскости z_2 переходит в прямую линию в плоскости z_1 . Угол между этой прямой и положительной полуосью равен $\pi\beta$. Следовательно, преобразование (4.18) с $\beta < 1$ верхнюю часть плоскости z_1 , лежащую между прямыми $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi\beta$, переводит в верхнюю полуплоскость z_2 . Показатель β может быть и больше единицы; соответствующий угол в этом случае будет тупым. Это преобразование имеет одну точку ветвления при $z_2 = 0$, в которой углы не сохраняются; во всех остальных точках оно аналитично.

В более общем случае (рис. 4.4) имеется ряд точек b_i на плоскости z_1 , соответствующих вершинам углов многоугольника. Внутренние углы многоугольника равны соответственно α_i . Отразим внутреннюю область многоугольника на верхнюю полуплоскость z_2 . Для этого рассмотрим преобразование, определяемое следующим

дифференциальным уравнением:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1 \prod_{i=1}^n (z_2 - a_i)^{\beta_i}, \quad (4.19)$$

где C_1 — константа, которая может быть комплексной. Это преобразование является аналитическим во всех точках, кроме $z_2 = a_i$, которые лежат на действительной оси, но пока неизвестны. Следовательно, конформные свойства такого преобразования состоят в том, что действительная ось на плоскости z_2 , $z_2 = x_2$, представляет собой отображение прямолинейных отрезков плоскости z_1 . Угол наклона каждого такого прямолинейного отрезка относительно действительной

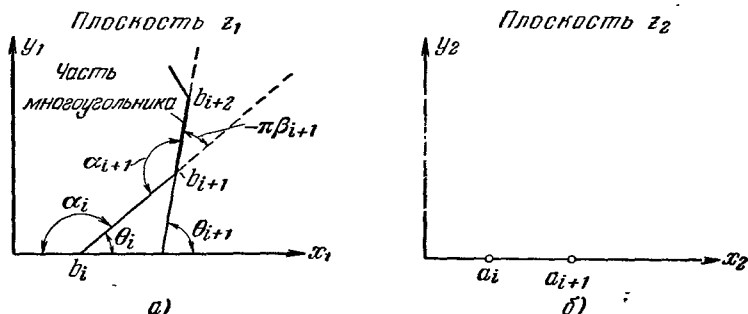


Рис. 4.4. Преобразование Шварца в общем случае.

оси определяется аргументом производной $\frac{dz_1}{dz_2}$, отнесенной к этому отрезку. Вычислим этот аргумент с помощью уравнения (4.19).

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \arg C_1 + \beta_1 \arg(z_2 - a_1) + \beta_2 \arg(z_2 - a_2) + \dots + \beta_n \arg(z_2 - a_n). \quad (4.20)$$

Кроме того,

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \arg\left(\frac{dx_1 + i dy_1}{dx_2 + i dy_2}\right) \quad (4.21)$$

и $dy_2 = 0$, ибо элемент dz_2 направлен вдоль действительной оси. Следовательно, если соотношение (4.21) отнести к i -му отрезку, то оно примет такой вид:

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \arg\left(\frac{dx_1}{dx_2} + i \frac{dy_1}{dx_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = \theta_i. \quad (4.22)$$

Рассмотрим теперь точку z_2 , лежащую на действительной оси между точками a_i и a_{i+1} . Аргумент числа $z_2 - a$ равен нулю, если точка a расположена слева от z_2 , и равен π , если она расположена справа. Следовательно, соотношение (4.20) совместно с соотноше-

нием (4.22) дает

$$\theta_i = \arg C_1 + \pi(\beta_{i+1} + \beta_{i+2} + \dots + \beta_n). \quad (4.23)$$

Таким образом, отрезок $a_{i+1} - a_i$ действительной оси плоскости z_2 отображается в прямолинейный отрезок с наклоном θ_i , лежащий в плоскости z_1 . Если соотношение (4.23) вычесть из аналогичного соотношения для θ_{i+1} , то получим

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \pi\beta_{i+1}. \quad (4.24)$$

Из геометрических соображений (рис. 4.4. а) ясно, что эта разность связана с величиной внутреннего угла α_i многоугольника $|\alpha_i|$ следующим соотношением:

$$\alpha_{i+1} = \pi + \pi\beta_{i+1}. \quad (4.25)$$

Для удобства индекс $i+1$ заменим на i и решим это уравнение относительно β_i :

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\pi} - 1. \quad (4.26)$$

Тогда уравнение (4.19) примет следующий вид:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1 \prod_{i=1}^n (z_2 - a_i)^{\left(\frac{\alpha_i}{\pi} - 1\right)}. \quad (4.27)$$

Величина C_1 определяет масштаб и угол поворота при преобразовании. Таким образом, преобразование (4.27) и есть то преобразование, которое требовалось отыскать.

В общем случае преобразование Шварца оказывается весьма полезным при условии, что уравнение (4.27) интегрируемо в элементарных функциях. Это возможно, за исключением специальных случаев, если углы кратны 90° и их всего два. Применение преобразования Шварца затруднено также тем, что в формуле преобразования $z_1 = f(z_2)$ независимой переменной является z_2 , а не z_1 , т. е. координаты точки действительной оси плоскости z_2 , а не координаты многоугольника в плоскости z_1 . Поэтому нахождение координат a_i часто требует больших усилий. Если же координаты a_i найдены, то задача обычно решается просто. Возможности этого метода будут ясны из нескольких простых примеров.

§ 4.7. Преобразование при наличии одного угла

Отдельный угол может быть всегда перемещен в начало координат так, что $a_i = 0$. При некоторых значениях углов уравнение (4.27) легко интегрируется.

а) $\alpha = \pi$. Интегрирование уравнения (4.27) дает

$$z_1 = C_1 z_2 + C_2. \quad (4.28)$$

В этом случае преобразование представляет собой параллельный перенос и вращение. С физической точки зрения оно не представляет интереса.

б) $\alpha = \pi/2$. Интегрируя уравнение (4.27), получаем

$$z_1 = C_3 z_2^{1/2} + C_2. \quad (4.29)$$

Если предположить, что константа переноса C_2 равна нулю, то уравнение (4.29) отображает первый квадрат плоскости z_1 в верхнюю

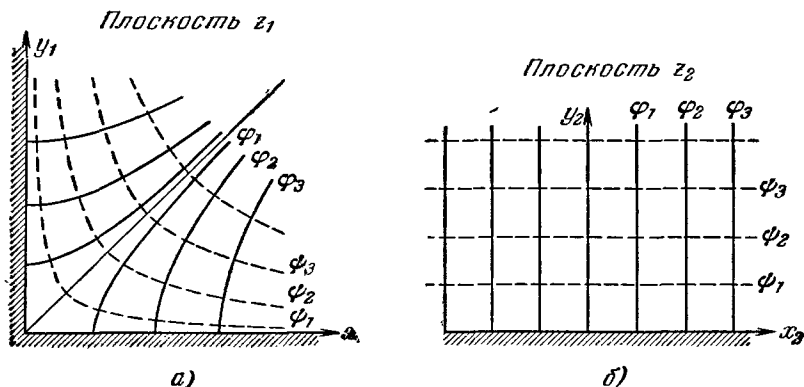


Рис. 4.5. Преобразование Шварца при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

половину плоскости z_2 . Так, если в плоскости z_2 дан потенциал, соответствующий однородному полю E :

$$\left. \begin{aligned} W &= -|E| z_2 = \varphi + i\psi, \\ \varphi &= -|E| x_2, \quad \psi = -|E| y_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

то решение для плоскости z_1 легко находится по формуле (4.29)

$$\begin{aligned} W &= -C_4 |E| z_1^2 = -C_4 |E| (x_1^2 - y_1^2 + 2i x_1 y_1), \\ \varphi &= -C_4 |E| (x_1^2 - y_1^2), \\ \psi &= -C_4 |E| (2x_1 y_1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили решение задачи о потенциале двух заряженных плоскостей, расположенных под прямым углом друг к другу (рис. 4.5). Если же φ и ψ поменять местами, то получим решение задачи о потенциале заряженных гиперболических цилиндров.

Если комплексный потенциал на плоскости z_2 положить равным потенциалу линейного заряда (формула (4.21)), то при преобразовании (4.29) получается двумерная функция Грина для внутреннего угла между двумя проводящими плоскостями при условии, конечно, что линейный заряд отображается на верхнюю половину плоскости z_2 . То же самое преобразование позволяет найти функцию Грина в случае границ в виде гиперболических цилиндров. Таким образом, в случае таких граничных условий задача поддается решению.

в) $\alpha = 0$. В этом случае интегрирование приводит к следующему результату:

$$z_1 = C_3 \ln z_2 = C_3 \ln r_2 + C_3 i\theta_2, \quad (4.30)$$

если пренебречь аддитивной постоянной. Если C_3 — действительная величина, то действительная часть z_1 равна $C_3 \ln r_2$. Следовательно, положительная часть действительной оси плоскости z_2 отображается на всю действительную ось плоскости z_1 , а верхняя половина плоскости z_2 отображается на полосу шириной $C_3\pi$, расположенную в плоскости z_1 (рис. 4.6). Это преобразование легко понять, если

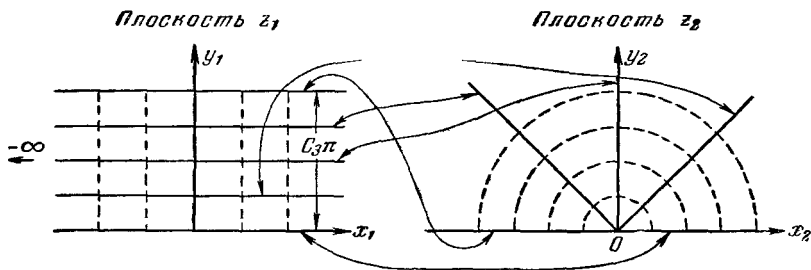


Рис. 4.6. Преобразование Шварца при $\alpha = 0$.

считать, что начало координат плоскости z_2 отодвигается в $-\infty$, а отрицательная часть действительной оси после этого поворачивается по часовой стрелке до положения, параллельного о действительной оси, смещенного, однако, на расстояние $C_3\pi$. Очевидно, что это преобразование приводит к периодической структуре в плоскости z_1 , причем полоса шириной $C_3\pi$ представляет собой как раз один из таких периодов. Верхняя половина плоскости z_2 отображается в первую полосу этой периодической структуры в плоскости z_1 , нижняя половина — во вторую, лежащую между прямыми $y_1 = C_3\pi$ и $y_1 = 2C_3\pi$, и т. д. Это преобразование оказывается весьма полезным в тех случаях, когда в задаче имеются сетки, конденсаторные пластины или, в общем случае, некоторая периодическая структура.

§ 4.8. Конформное отображение прямоугольника

Если две линии, параллельные оси y , в плоскости z_1 повернуть до совпадения с положительной и отрицательной частями действительной оси, то полубесконечная полоса, заключенная между этими прямыми, отображается на верхнюю полуплоскость z_2 (рис. 4.7, а).

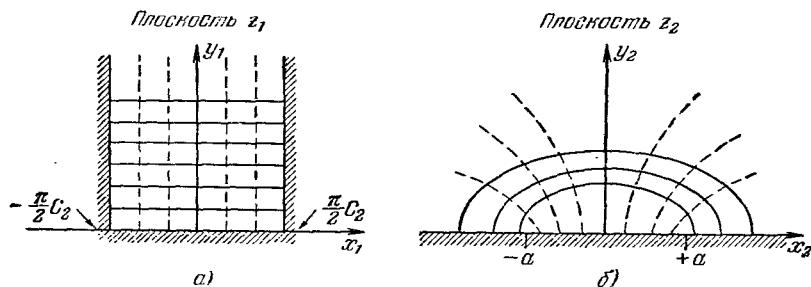


Рис. 4.7. Преобразование Шварца при наличии двух углов.

Пусть вершинам углов соответствуют точки $z_2 = \pm a$; тогда дифференциальное уравнение преобразования принимает вид

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1 (z_2 - a)^{-1/2} (z_2 + a)^{-1/2} = \frac{C_1}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} = \frac{C_2}{\sqrt{a^2 - z_2^2}}. \quad (4.31)$$

Положив в (4.31) $C_1 = iC_2$, мы поворачиваем всю систему на 90° с тем, чтобы она совпала с изображением, приведенным на рис. 4.7. После интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= C_2 \arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right), \\ z_2 &= a \sin\left(\frac{z_1}{C_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Это преобразование обычно используется для того, чтобы решение на плоскости z_1 отобразить на плоскость z_2 . Если отобразить комплексный потенциал W однородного поля в плоскости z_1

$$W = -|E|z_1 \quad (4.10)$$

на плоскость z_2 с помощью соотношения (4.32), то получим распределение потенциала вокруг проводящей заряженной полоски шириной $2a$, или, заменяя функцию φ функцией ψ , получим распределение потенциала вблизи заряженного экрана со щелью. Главная ось щели или полосы перпендикулярна плоскости рисунка. Если действительную и мнимую части преобразованного потенциала W приравнять

постоянным величинам, то получаются уравнения для силовых линий и эквипотенциалей поля. Поверхности, описываемые этими уравнениями, представляют собой кофокальные эллиптические и гиперболические цилиндры (см. рис. 4.7).

Имеются и другие случаи, когда уравнение преобразования при двух углах легко интегрируется. Ряд задач может быть сведен к последним с помощью последовательности простых преобразований. Многие задачи рассмотрены в литературе, список которой приведен в конце главы. Часто решение только кажется простым, ибо, как отмечалось выше, иногда очень трудно выразить z_2 в функции z_1 . Несмотря на эти трудности, метод конформных преобразований оказывается весьма эффективным.

§ 4.9. Прямое решение уравнения Лапласа путем разложения потенциала на гармоники

Многие двумерные задачи одинаково легко решаются как методами, аналогичными тем, которые применяются в трех измерениях, так и с помощью комплексных потенциалов. Так, методы изображений и инверсии есть по существу частные случаи более общих методов. Одним из наиболее мощных является метод разделения переменных. Он особенно полезен в случае круговых или радиальных границ, совпадающих с координатными линиями.

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.33)$$

Для разделения переменных положим $\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Подставив это равенство в (4.33) и поделив последнее на φ , получим

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.34)$$

Теперь переменные разделены, и каждый член этого уравнения должен быть равен некоторой постоянной. Постоянную разделения выберем так, чтобы решениями для Θ были тригонометрические круговые функции угла. В силу периодичности и однозначности решения θ изменяется от 0 до 2π и разрешенными будут лишь некоторые значения параметра разделения, полученные ранее в § 3.6. Первый член уравнения можно положить равным k_n^2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k_n^2 \Theta &= 0, \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - k_n^2 R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Параметр k_n может принимать только дискретные значения, и при $k_n \neq 0$ имеем

$$\Theta_n = A_n \cos k_n \theta + B_n \sin k_n \theta,$$

$$R_n = C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}.$$

Если же $k_n = 0$, то

$$\Theta_0 = E + F\theta,$$

$$R_0 = G + H \ln r.$$

Общее решение представляет собой сумму частных решений соответствующих гармоник

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Theta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n \theta + B_n \sin k_n \theta) (C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}) + (E + F\theta)(G + H \ln r). \quad (4.36)$$

Прежде чем решать конкретные задачи, полезно некоторые уже известные нам потенциалы представить в таком виде, а затем перейти к потенциалам более общей формы. Коэффициенты разложения определяются граничными условиями конкретной задачи, подобно тому, как это делалось в § 3.6.

§ 4.10. Потенциал линейного заряда и диэлектрического цилиндра

Рассмотрим задачу о потенциале линейного заряда, расположенного на расстоянии r_0 от оси диэлектрического цилиндра радиуса a и проницаемостью k (см. рис. 4.9). Сначала логарифмический потенциал одного линейного заряда представим в виде ряда (4.36). Это

равносильно смещению начала отсчета потенциала, как показано на рис. 4.8. Если пренебречь аддитивной постоянной, то формула (4.12) сводится к следующей:

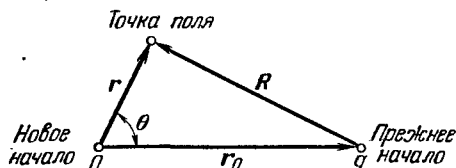


Рис. 4.8. К вычислению потенциала линейного заряда, смещенного относительно начала координат O на расстояние r_0 .

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln R. \quad (4.37)$$

Ряд (4.36) кроме точки $r = 0$ нигде особенностей не имеет.

Поэтому потенциал (4.37) нельзя представить в виде одного ряда, отнесенного к новому началу координат. Его нужно записать в виде двух отдельных решений: одного — справедливого при $r < r_0$, другого — при $r > r_0$. При $r = r_0$ оба решения должны совпадать. Более того, производная при $r = r_0$ должна быть непрерывна во всех точках, за исключением той, где расположен заряд. Разрыв в этой точке дол-

жен быть такой величины, чтобы суммарный поток, исходящий из нее, соответствовал заряду, приходящемуся на единицу длины.

Выражение для логарифмического потенциала (4.37) линейного заряда, расположенного в начале координат, можно свести к выражению для потенциала заряда, расположенного в точке $\theta = 0$ и $r = r_0$ (рис. 4.8), и представить последнее в виде ряда (4.36) следующим образом. Выразим R согласно теореме косинусов: $R = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}$, и затем разложим потенциал в ряд по степеням r/r_0 при $r < r_0$ и по степеням r_0/r при $r > r_0$. Оба ряда, каждый в своей области, сходятся

$$\varphi_{0 < r < r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0 \right\}, \quad (4.38)$$

$$\varphi_{r_0 < r < \infty} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\theta - \ln r \right\}. \quad (4.39)$$

При рассмотрении задачи о линейном заряде и диэлектрическом цилиндре полярную систему координат выберем так, чтобы ее начало находилось на оси цилиндра, а $\theta = 0$ соответствовало бы направлению на линейный заряд (рис. 4.9). Именно этой системе координат соответствуют выражения (4.38) и (4.39). Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности $r = a$, потенциал линейного заряда (4.38) нужно сложить с общим решением вида (4.36) при $k_n = n$ и рассматривать выражение для потенциала в двух областях: внутри и вне цилиндра. Коэффициенты A_n, B_n, E и F , входящие в общее решение, определяются граничными условиями на поверхности диэлектрического цилиндра с учетом его поляризации. Решения внутри цилиндра и вне его разделяются, во-первых, для того, чтобы потенциал в начале координат оставался конечным, а во-вторых,

о линейном заряде и диэлектрическом цилиндре полярную систему координат выберем так, чтобы ее начало находилось на оси цилиндра, а $\theta = 0$ соответствовало бы направлению на линейный заряд (рис. 4.9).

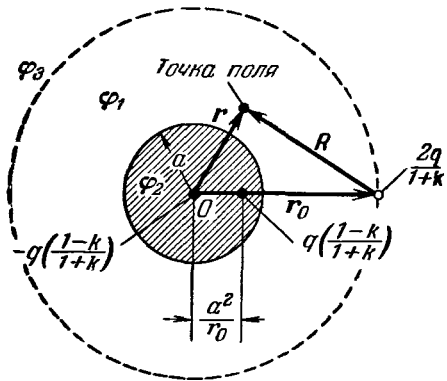


Рис. 4.9. Линейный заряд и диэлектрический цилиндр (последний показан на рисунке штриховкой):

$-q \frac{(1-k)}{(1+k)}$ и $q \frac{(1-k)}{(1+k)}$ — эффективные заряды
 для φ_1 ; $\frac{2q}{1+k}$ — эффективный заряд для φ_2 .

потенциал в начале координат оставался конечным, а во-вторых,

чтобы вторые ряды в каждом из выражений сходились. Итак,

$$\begin{aligned}
 a < r < r_0 \quad \varphi_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n\theta - \ln r_0 \right\} + \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \cos n\theta + F, \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

$$0 < r < a \quad \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n\theta - \ln r_0 \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + E. \quad (4.41)$$

Так как поляризационные заряды в цилиндре не имеют особенностей ни в начале координат, ни в бесконечности и задача симметрична относительно плоскости $\theta = 0$, то выражение (4.36) упрощается: исчезает логарифмический член, член, пропорциональный углу, и члены, содержащие синусы угла. Показатель степени r оказывается или положительным, или отрицательным в зависимости от того, в какой области сходится ряд.

Граничные условия на поверхности диэлектрического цилиндра $r = a$ при всех θ имеют вид (см. § 2.2)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= k \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Подставляя в (4.42) выражения (4.40) и (4.41) и приравнивая коэффициенты при всех $\cos n\theta$ нулю, получим выражения для коэффициентов A_n , B_n , E и F . Справедливость такой операции математически обусловлена тем фактом, что разложение Фурье производится по полной системе ортогональных функций. Таким образом, для потенциала получим выражения

$$a < r < r_0 \quad \varphi_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^n + \left(\frac{1-k}{k+1} \right) \left(\frac{a^2}{r_0^2} \right)^n \frac{1}{r^n} \right] \cos n\theta - \ln r_0 \right\}, \quad (4.43)$$

$$0 < r < a \quad \varphi_2 = \frac{q}{\pi\epsilon_0(1+k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n\theta - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0. \quad (4.44)$$

Решение для $r > r_0$ может быть легко написано по аналогии с выражениями (4.38) и (4.39).

Прибавив к соотношению (4.43) и вычтя из него величину

$$q \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{\ln r}{2\pi\epsilon_0},$$

легко показать, что потенциал φ_1 вне цилиндра равен потенциалу системы из трех линейных зарядов. Один из этих зарядов величиной $-q(1-k)/(1+k)$ расположен в начале координат, второй, величиной $q(1-k)/(1+k)$ — в точке, полученной при инверсии первоначального заряда q , и третий — просто заряд q . Точка, получаемая при инверсии заряда q , находится на расстоянии a^2/r_0 от начала координат и лежит на том же радиусе, что и заряд q . Таким образом, задача может быть решена и методом изображений. Это легко проверить, непосредственно применив логарифмические потенциалы. С другой стороны, потенциал внутри диэлектрического цилиндра с точностью до аддитивной постоянной равен потенциалу одного линейного заряда величиной $2q/(1+k)$, расположенного в той же точке, что и заряд q . Следовательно, потенциал в любой точке эквивалентен потенциалу системы линейных зарядов в отсутствии диэлектрического цилиндра.

§ 4.11. Линейный заряд между двумя пересекающимися проводящими поверхностями

В качестве другого примера решения задачи с помощью круговых гармоник рассмотрим задачу о потенциале линейного заряда, расположенного в точке r_0 , β , в клине, образованном двумя проводящими заземленными плоскостями, пересекающимися в начале координат под углом α (рис. 4.10). Решение этой задачи будет функцией Грина для области, заключенной между двумя проводящими плоскостями. Очевидно, мы опять не сможем представить решение в виде одного ряда, пригодного для всей области от $r=0$ до $r=\infty$. Его нужно разбить на две части: одну, пригодную при $r < r_0$, вторую — при $r > r_0$. На поверхности $r=r_0$ обе части решения должны сопрягаться так, чтобы поток электрического поля соответствовал заряду q .

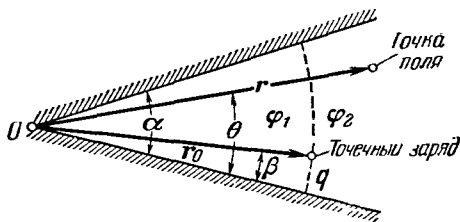


Рис. 4.10. Линейный заряд, параллельный двум пересекающимся проводящим плоскостям.

Так как потенциал обращается в нуль на поверхностях $\theta=0$ и $\theta=\alpha$, то зависимость решения от угла должна иметь вид $\sin(n\pi\theta/\alpha)$, т. е. $k_n = n\pi/\alpha$ (см. (4.36)). Выражения для потенциала в обеих

областях будут

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \\ \varphi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Из непрерывности потенциала на цилиндрической поверхности $r=r_0$ следует, что коэффициенты C_n и D_n должны быть равны. Поэтому задача будет решена, если мы найдем коэффициенты C_n .

Линейный заряд эквивалентен поверхностному заряду на цилиндрической поверхности $r=r_0$ с плотностью $\sigma(\theta) = q\delta(\theta - \beta)$. Угловая δ -функция определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} r_0 \int_0^\alpha \delta(\theta - \beta) d\theta &= 1, \\ \int_0^\alpha f(\theta) \delta(\theta - \beta) d\theta &= \frac{f(\beta)}{r_0}, \quad 0 < \beta < \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Сохранение потока от заряда приводит к условию

$$q\delta(\theta - \beta) = -\epsilon_0 \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{r=r_0}. \quad (4.47)$$

Далее, определение коэффициентов производится так же, как в § 3.6, и мы получаем

$$C_n = \frac{q}{n\pi\epsilon_0} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha}. \quad (4.48)$$

Таким образом, полное решение задачи описывается потенциалами

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}, \\ \varphi_2 &= \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Положив $q=1$, получим функцию Грина для клиновидной области. Метод разделения переменных очень удобен для отыскания функций Грина в случае областей, ограниченных координатными поверхностями.

Задачи

1. С помощью инверсии найдите правило образования изображения линейного заряда в параллельном ему проводящем круглом цилиндре. Примените это правило в случае, когда внутри большого цилиндра радиуса b содержится меньший — радиуса a , причем расстояние между их центрами $c < b - a$. Найдите емкость на единицу длины и покажите, что при $c = 0$ она равна емкости коаксиальных цилиндров.

2. Выведите теорему Грина для двумерного случая, т. е. покажите, что

$$\varphi(x', y') = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_S (\lg r) \nabla^2 \varphi \, dS - \oint_C \left(\lg r \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \lg r}{\partial n} \right) dt \right\},$$

если $\varphi(x, y)$ — двумерный потенциал, S — площадь, ограниченная контуром C , r — расстояние между точками x, y и x', y' и n — внешняя нормаль.

3. Определите поле вблизи заряженного проводящего цилиндра эллиптического сечения.

4. Рассмотрите две проводящие плоскости, заряженные до потенциалов $V/2$ и $-V/2$ и пересекающиеся под прямым углом. Найдите электростатическое поле.

5. При преобразовании

$$z_2 = \frac{a}{2} \left(\frac{z_1}{a_1} + \frac{a_1}{z_1} \right)$$

область вне цилиндра $r_1 = a_1$ в плоскости z_1 отображается на всю плоскость z_2 с разрезом вдоль действительной оси от $-a$ до a . С помощью конформного преобразования потенциала проводящего цилиндра, находящегося в однородном поле, найдите комплексный потенциал проводящей полосы шириной $2a$, расположенной а) параллельно внешнему полю E и б) перпендикулярно полю E .

6. Рассмотрите конденсатор, состоящий из двух бесконечных пластин $y = \pm a$ и одной полубесконечной $y = 0$ (рис. 4.11). Внешние пластины заряжены до одного и того же потенциала. Вычислите емкость, приходящуюся на единицу длины в направлении оси z , обусловленную краевым эффектом, т. е. найдите разность между действительной емкостью на единицу длины и той, которая получается, если предположить, что при $x < 0$ поле отсутствует, а при $x > 0$ оно однородно.

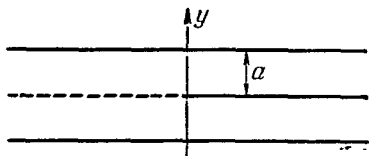


Рис. 4.11.

7. Бесконечный круглый цилиндрический экран радиуса a разрезан продольно на четыре равные части, заряженные соответственно до потенциалов $V, 0, -V, 0$. Покажите, что потенциал внутри цилиндра описывается уравнением

$$\varphi = \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{2ay}{a^2 - r^2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax}{a^2 - r^2} \right) \right\}.$$

Каков потенциал вне цилиндра?

8. Рассмотрите область, заключенную между цилиндром $x^2 + y^2 = b^2$ и плоскостью xz . Цилиндрическая граница этой области и часть плоской границы, соответствующая $a < x < b$, находится под нулевым потенциалом. Часть плоской границы, соответствующая $-a < x < a$, находится под потенциалом V . Покажите, что силовые линии в области $a < r < b$

подчиняются уравнению

$$\sum_n \frac{a^n}{n} \left[\frac{1}{r^n} + \left(\frac{r}{b^2} \right)^n \right] \cos n\theta = \text{const},$$

причем n принимает только нечетные значения.

9. Предположим, что $\varphi(x, y)$ — двумерный потенциал; пусть $F(x) = \varphi(x, 0)$, а F_n — n -я частная производная F по x . Покажите, что если $\varphi(x, y) = \varphi(x, -y)$, то

$$\varphi(x, y) = \sum A_n y^{2n} F_{2n},$$

где

$$A_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. (Русский перевод: В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*.)

Гл. 4 посвящена двумерным задачам; в ней приведено большое число примеров.

2. J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, v. 1.

Со времен Максвелла теория потенциала получила дальнейшее значительное развитие, тем не менее его книга до сих пор остается одним из основных руководств по этому вопросу.

3. J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*.

Общий характер изложения подобен максвелловскому. Рассмотрено много примеров.

4. E. Weber, *Electromagnetic Fields*, v. 1. Более современный обзор.

5. L. A. Pipes, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*.

Гл. XX представляет собой пример ясного и простого изложения присоединенных функций Лежандра.

ЗАДАЧИ С ТРЕХМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Уравнение Лапласа легко написать для любой ортогональной системы координат: оператор ∇^2 есть просто дивергенция градиента, и поэтому, применив к градиенту теорему о дивергенции в бесконечно малом объеме, получим искомое выражение (см. приложение II). Многие системы координат допускают разделение переменных в уравнении Лапласа. Сферические координаты дают также возможность представить в удобном виде потенциал произвольной системы зарядов, расположенных вблизи начала координат.

§ 5.1. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат

Уравнение Лапласа в сферической системе координат

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.1)$$

допускает разделение переменных

$$\Psi = R(r) Y(\theta, \varphi). \quad (5.2)$$

После обычных преобразований получаем два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n(n+1)R = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \sin \theta Y = 0. \quad (5.4)$$

Параметр разделения равен $n(n+1)$, где n — целое число, так как только при таких его значениях решения уравнения для Y не имеют особенностей при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Решения $Y(\theta, \varphi)$ называются сферическими гармониками. Ранее было показано, что функции $Y_n(\theta, \varphi)$ ортогональны и аналогичны функциям Фурье, выведенным в связи с задачами в плоскости. Общее решение радиального уравнения (5.3) имеет простой вид

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}. \quad (5.5)$$

Переменные сферических гармоник могут быть разделены еще раз:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi). \quad (5.6)$$

Новый параметр разделения положим равным m^2 , а вместо полярного угла θ введем более удобную переменную $\mu = \cos \theta$. После разделения переменных получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] \Theta = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0. \quad (5.8)$$

Решения этих уравнений выражаются функциями

$$\Theta = C_n P_n^m(\mu) + D_n Q_n^m(\mu), \quad (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi, & m \neq 0, \\ \Phi &= G\varphi + H, & m = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

где функции $P_n^m(\cos \theta)$ и $Q_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра соответственно первого и второго рода. Следует отметить, что при $\mu = \pm 1$ конечным остается только P_n . Следовательно, когда рассматриваемая область пространства содержит полярную ось, в решение входит лишь P_n^m .

§ 5.2. Потенциал точечного заряда

В случае осевой симметрии, т. е. когда решение не зависит от угла φ , параметр разделения m равен нулю. Потенциал точечного заряда, расположенного на расстоянии r_0 от начала координат, будет обладать такой симметрией, если его радиус-вектор принять за полярную ось. Потенциал точечного заряда легко выразить через угловые и радиальные функции, полученные выше, разлагая по степеням r/r_0 и r_0/r выражение для $1/R$ (рис. 5.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{r_0} \cos \theta \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r_0}{r} \cos \theta \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В результате находим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\mu) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\mu). \quad (5.12)$$

Каждый из этих рядов сходится в своей области и их можно считать определением функций $P_n(\mu)$. Из разложения ясно, что эти функции представляют собой полиномы n -й степени от переменной μ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ удовлетворяют уравнению (5.7) при $m = 0$.

Как и ранее, мы получим два выражения для потенциала: одно справедливо при $r < r_0$, другое — при $r > r_0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu), \\ \varphi_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

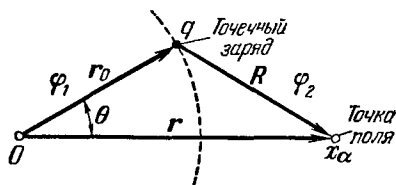


Рис. 5.1. К вычислению потенциала заряда, смещенного относительно начала координат:

$$\varphi(x_\alpha) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Таким образом, потенциал представлен как разложение Тейлора — Лорана по степеням r , коэффициенты которого есть полиномы Лежандра от $\cos \theta$.

§ 5.3. Потенциал диэлектрической сферы и точечного заряда

Задачи о поле точечного заряда и сферической границе легко решаются с помощью сферических функций. Найдем потенциал точечного заряда q , расположенного вблизи диэлектрической сферы радиуса a (рис. 5.2). Расстояние от центра сферы до точечного заряда равно r_0 . Для потенциала φ используем три выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu), \\ \varphi_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu), \\ \varphi_3 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Сшивание φ_1 и φ_2 при $r = a$ производится так же, как и в двумерном случае. При любом значении θ должны удовлетворяться

граничные условия (2.15) и (2.19). В силу ортогональности сферических гармоник ряды можно приравнивать почленно и тем самым определять коэффициенты A_n и B_n . Функции φ_2 и φ_3 сшиты по

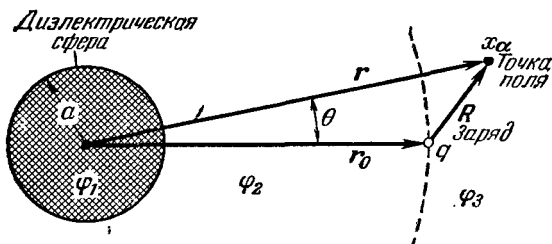


Рис. 5.2. Диэлектрическая сфера и точечный заряд.

определению (5.13). При $k = \infty$ решение совпадает с тем, которое получено методом инверсии в гл. 3.

§ 5.4. Потенциал диэлектрической сферы в однородном поле

Классическим примером задачи со сферической геометрией может служить задача о диэлектрической сфере с проницаемостью k , помещенной в однородное поле. Линии вектора электрической индукции D в сфере показаны на рис. 5.3.

Так как поле в бесконечности однородно, то потенциал определяется следующим соотношением:

$$\varphi_\infty = -E_0 x = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r \mu = -E_0 r P_1(\mu). \quad (5.15)$$

Согласно (5.5) и (5.9), потенциалы внутри и вне сферы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum A_n r^n P_n(\mu), \\ \varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu) - E_0 r P_1(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

При всех значениях θ и $r = a$ должны выполняться граничные условия $\varphi_1 = \varphi_2$ и $k d\varphi_1/dr = d\varphi_2/dr$. Подставляя сюда выражение (5.16) и приравнявая коэффициенты при $P_n(\mu)$ с одним и тем же n , легко найти A_n и B_n :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= B_n = 0 = A_n = B_n \quad \text{при } n > 1, \\ A_1 &= \frac{-3E_0}{k+2}, \\ B_1 &= \frac{(k-1)E_0 a^3}{k+2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Потенциалы соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{3E_0 r}{k+2} \cos \theta, \\ \varphi_2 &= \frac{(k-1)}{(k+2)} \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Заметим, что поле внутри сферы однородно, однако по величине меньше, чем поле в бесконечности в $(k+2)/3$ раз. Легко также видеть, что поле, наведенное в области вне сферы, равно полю диполя с моментом

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 \left(\frac{k-1}{k+2} \right) E_0. \quad (5.19)$$

Величина L , определяемая соотношением

$$L = \frac{|E_0| - |E_{\text{внут}}|}{\epsilon_0 |P_{\text{внут}}|}, \quad (5.20)$$

называется фактором деполяризации диэлектрического тела. Так как согласно соотношению (2.12) $P = \epsilon_0(k-1)E$, то для сферы $L = 1/3$; для тонкого стержня, ориентированного вдоль поля, $L = 0$, для тонкого диска, ориентированного перпендикулярно полю, $L = 1$. Таким образом, электрическое поле внутри диэлектрика, находящегося в однородном поле, всегда меньше, чем поле в бесконечности, а индукция — больше.

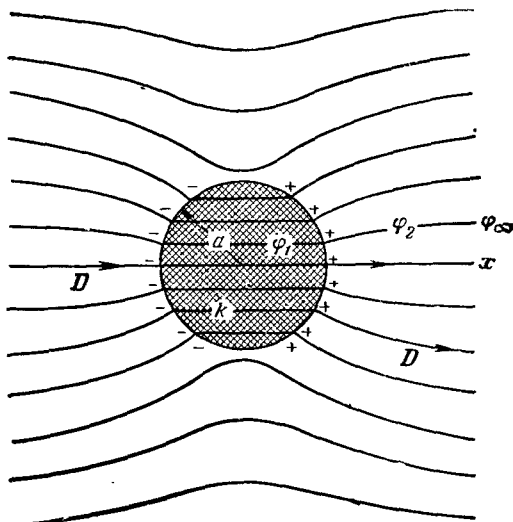


Рис. 5.3. Диэлектрическая сфера в однородном поле.

§ 5.5. Выражение для аксиально симметричного потенциала, заданного на сфере

С помощью функций Лежандра можно найти потенциал во всех точках пространства, если известно его распределение на сфере. Согласно соотношениям (5.5) и (5.9) для потенциала получим два выражения, одно из которых пригодно внутри сферы, другое

снаружи:

$$\left. \begin{aligned} r < a \quad \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu), \\ r > a \quad \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Пользуясь ортогональностью функций $P_n(\mu)$ и зная их норму, можно вычислить коэффициенты A_n и B_n . Нормой функции $P_n(\mu)$ называется интеграл от P_n^2 по всей области изменения μ . Определения нормы и ортогональности функций следуют из соотношений

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad (5.22)$$

где $\delta_{mn} = 1$, если $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$, если $m \neq n$.

Приравняем теперь каждое из соотношений (5.21) при $r = a$ заданному распределению потенциала. Полученные уравнения умножим на $P_m(\mu)$ и проинтегрируем по μ от $\mu = -1$ до $\mu = +1$. Тогда от каждого ряда останется только один член, а именно тот, для которого $n = m$. В результате для A_n получим выражение

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^{+1} \varphi(a, \theta) P_n(\mu) d\mu, \quad (5.23)$$

а для B_n

$$B_n = a^{2n+1} A_n. \quad (5.24)$$

Таким образом, потенциалы внутри и вне сферы имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} r < a \quad \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2a^n} r^n P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} \varphi(a, \theta') P_n(\mu') d\mu', \\ r > a \quad \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} a^{n+1} r^{-n-1} P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} \varphi(a, \theta') P_n(\mu') d\mu'. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

§ 5.6. Потенциал заряженного кольца

Вычислим потенциал заряженного кольца с полным зарядом q , расположенного на расстоянии r_0 от начала координат O (рис. 5.4). Пусть r_0 составляет угол θ_0 с осью симметрии. Распределение потенциала вдоль оси симметрии можно найти, разлагая в ряд

кулоновский потенциал $1/R$:

$$\left. \begin{aligned} r < r_0 \quad \varphi(z, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta_0), \\ r > r_0 \quad \varphi(z, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Потенциал в произвольной точке получим, умножая n -е члены раз-

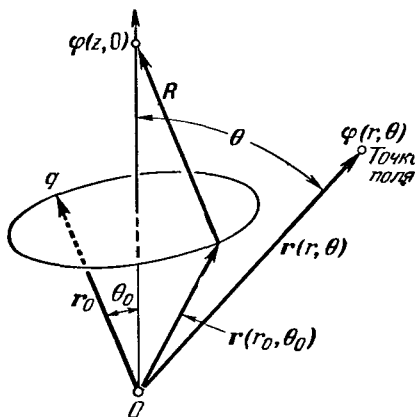


Рис. 5.4. К вычислению потенциала заряженного кольца.

ложений (5.26) на $P_n(\mu)$ и подставляя r вместо z (так как $P_n(1) = 1$):

$$\left. \begin{aligned} r < r_0 \quad \varphi(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta), \\ r > r_0 \quad \varphi(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Справедливость такого решения следует из теоремы единственности.

§ 5.7. Задачи без осевой симметрии

Для решения задач, в которых нет осевой симметрии, следует воспользоваться параметром m , введенным в общем выражении при разделении переменных в сферических координатах. Таким образом, сферические гармоники $Y_n^m(\theta, \varphi)$ будут зависеть уже от двух

параметров, и ряды, представляющие решения задачи, будут двойными суммами: каждому значению n соответствует несколько значений m ($m < n$). Функции Φ представляют собой просто тригонометрические функции, а функции Θ — присоединенные функции Лежандра. Таким образом, собственные функции задачи теперь другие, однако принципиальных отличий от уже рассмотренных случаев нет. Поэтому мы не будем подробно рассматривать такие задачи. Мы не будем также рассматривать задачи с коническими границами, когда ось симметрии исключена из изучаемой области. В этом случае, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо применение функций $Q_n^m(\rho)$, имеющих особенность на оси.

§ 5.8. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.28)$$

также допускает разделение переменных. Представляя решение в виде произведения трех функций

$$\Psi(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z), \quad (5.29)$$

получим следующие уравнения для радиально угловой и осевой частей решения:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0, \quad (5.31)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (5.32)$$

где k и n — параметры разделения. Уравнение (5.30) называется уравнением Бесселя, а его решения — функциями Бесселя. Характер решения существенно зависит от знака параметра разделения, т. е. от того, являются ли k и n действительными или мнимыми. Если решение для Φ должно быть однозначным, то оно должно быть периодически по φ , и следовательно, n — целое число. Если k — действительная величина, то $Z(z)$ есть просто экспонента, а $R(r)$ представляется линейной комбинацией функций Бесселя, обозначаемых $J_n(kr)$ и $N_n(kr)$. Отметим, что J_n и N_n — осциллирующие функции своих аргументов, и J_n дает решения, регулярные при $r=0$, где уравнение (5.30) имеет особенность. При действительных n и k решения

имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} R(r) &= A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr), & k \neq 0, \\ R(r) &= Ar^n + Br^{-n}, & k = 0, \\ \Phi(\varphi) &= C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi, & n \neq 0, \\ \Phi(\varphi) &= C\varphi + D, & n = 0, \\ Z(z) &= E_k e^{kz} + F_k e^{-kz}, & k \neq 0, \\ Z(z) &= Ez + F, & k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Если n и k равны нулю, то

$$\Psi = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F).$$

Общую идею использования свойств цилиндрических функций мы поясним на следующем примере. Рассмотрим случай с осевой симметрией, когда $n = 0$. Если рассматриваемая область пространства по радиусу простирается до бесконечности и нет цилиндрических границ, ограничивающих функции $R(r)$, то соответственно не будет никаких ограничений на величину k и решение будет выражаться интегралом по всем значениям k :

$$\int_0^{\infty} e^{\pm kz} f(k) J_0(kr) dk. \quad (5.34)$$

Вместо отыскания коэффициентов суммы нам предстоит определить функцию $f(k)$. Потенциал точечного заряда может быть выражен интегралом такого типа с помощью следующего тождества:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{\pm kz} J_0(kr) dk. \quad (5.35)$$

Положительный знак в экспоненте берется при $z < 0$, а минус при $z > 0$. Соответственно для кулоновского потенциала $\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ получим следующее интегральное представление:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} e^{\pm kz} J_0(kr) dk. \quad (5.36)$$

Если нужно найти потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат, при наличии нескольких плоских границ, перпендикулярных оси z , то следует воспользоваться комбинацией потенциала (5.36) с потенциалами наведенных зарядов вида (5.34).

Подобная структура, составленная из нескольких слоев диэлектрика с различной диэлектрической проницаемостью k_1, k_2 и т. д., показана на рис. 5.5. Потенциалы, соответствующие различным слоям диэлектрика, приведены в подписи к рисунку.

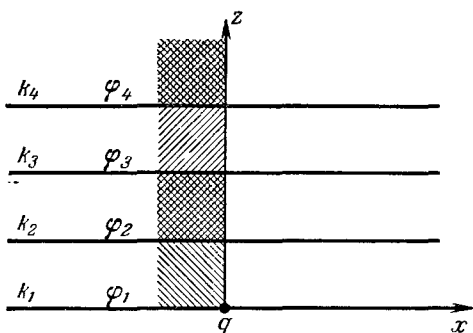


Рис. 5.5. Параллельные слои диэлектриков в поле точечного заряда q :

$$\varphi_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) dk + \int_0^\infty f(k) e^{kz} J_1(kr) dk;$$

$$\varphi_3 = \int_0^\infty g(k) e^{kz} J_0(kr) dk + \int_0^\infty h(k) e^{-kz} J_0(kr) dk;$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty l(k) e^{kz} J_0(kr) dk + \int_0^\infty m(k) e^{-kz} J_0(kr) dk;$$

$$\varphi_1 = \int_0^\infty n(k) e^{-kz} J_0(kr) dk.$$

тим, что как в случае декартовых и сферических координат, так и в случае цилиндрических — все три функции, составляющие решение, не могут быть осциллирующими.

§ 5.9. Применение цилиндрических функций к решению различных задач

Внутри цилиндрической области радиуса r_0 с проводящими границами каждое решение должно подчиняться требованию $J_n(kr_0) = 0$, так что величина k может принимать лишь дискретный ряд значений k_l , где l — порядковый номер корня функции J_n , принимающий все значения от 1 до бесконечности. Общее решение представляет собой двойную сумму по n и l , причем коэффициенты ее подбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Бесселевы функции образуют систему ортогональных функций. Это непосред-

на рис. 5.5. Потенциалы, соответствующие различным слоям диэлектрика, приведены в подписи к рисунку. Если для всех поверхностей раздела написать граничные условия и приравнять функции, стоящие под знаком интеграла, то получим необходимое и достаточное число уравнений для нахождения функций переменной k , и, следовательно, потенциалов в каждом из слоев.

Если потенциал должен быть периодическим по переменной z , то параметр k оказывается мнимым и решениями уравнения (5.30) будут функции Бесселя от мнимого аргумента. Функции Бесселя от мнимых аргументов обычно обозначают символами I_n и K_n . и для них составлены обширные таблицы, так же как и для функций J_n и N_n . Заме-

ственно следует из уравнения (5.30):

$$\int_0^{r_0} J_n(k_l r) J_n(k_{l'} r) r dr = 0, \quad \text{если } l \neq l'.$$

Ортогональность потенциалов, соответствующих различным n , следует из (5.33).

Рассмотрим как пример задачу с цилиндрической геометрией. Найдем потенциал точечного заряда в проводящем цилиндре, ось которого есть ось z (рис. 5.6). Азимутальная симметрия системы вносит в данном случае упрощения в систему функций. Потенциал не зависит от φ , а зависимость его от r выражается функциями $J_0(k_l r)$. Искомое решение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{k_l z} J_0(k_l r) & \text{при } z < 0, \\ \varphi_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-k_l z} J_0(k_l r) & \text{при } z > 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

причем величина k_l удовлетворяет условию $J_0(k_l r_0) = 0$. Условие, накладываемое на поток на плоскости $z = 0$, может быть записано с помощью двумерной δ -функции, определяемой равенством

$$2\pi \int_0^{r_0} \delta(r) r dr = 1. \quad (5.38)$$

Таким образом, условие сохранения потока от заряда примет вид

$$\frac{q\delta(r)}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right]_{z=0} = 2\sum k_l A_l J_0(k_l r). \quad (5.39)$$

Если обе части равенства (5.39) умножить на $J_0(k_{l'} r) r dr$ и затем проинтегрировать по r , то получим

$$\frac{qJ_0(0)}{2\pi\epsilon_0} = 2k_{l'} A_{l'} \int_0^{r_0} [J_0(k_{l'} r)]^2 r dr,$$

откуда

$$A_l = \frac{q}{4\pi k_l \epsilon_0} \frac{J_0(0)}{\int_0^{r_0} [J_0(k_l r)]^2 r dr}. \quad (5.40)$$

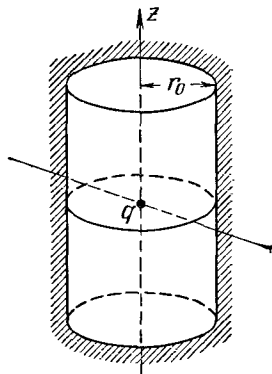


Рис. 5.6. Точечный заряд в проводящей заземленной цилиндрической полости.

По определению функций Бесселя $J_0(0) = 1$. Умножая обе части уравнения (5.30) на $\left(\frac{dJ_n}{dr}\right)^2 r^2 dr$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{r_0} [J_0(k_l r)]^2 r dr = \frac{r_0^2}{2} [J_1(k_l r_0)]^2.$$

При вычислении надо использовать граничные условия при r_0 и тождество, следующее из свойств бesselевых функций:

$$\frac{dJ_n}{d(kr)} = -J_{n+1} + \frac{n}{kr} J_n. \quad (5.41)$$

В результате соотношение (5.4) принимает вид

$$A_l = \frac{q}{2\pi k_l \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0^2 [J_1(k_l r_0)]^2}. \quad (5.42)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{2\pi r_0^2 \varepsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} e^{k_l r} \frac{J_0(k_l r)}{k_l [J_1(k_l r_0)]^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{q}{2\pi r_0^2 \varepsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-k_l r} \frac{J_0(k_l r)}{k_l [J_1(k_l r_0)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Обобщив это рассмотрение на случай, когда заряд расположен в произвольной точке с координатами $r = a$, $\varphi = \alpha$, $z = z_0$, можно найти функцию Грина для области внутри цилиндра. Потенциал будет иметь различный вид при $z < z_0$ и при $z > z_0$. Условие, накладываемое на поток, будет выражаться с помощью обобщенной двумерной δ -функции, определяемой равенством

$$\int \delta(r - a) \delta(\varphi - \alpha) r dr d\varphi = 1. \quad (5.44)$$

Искомая функция Грина представляет собой двойную сумму по индексам n и l , причем эта функция сводится к выражению (5.43) с $q = 1$, когда единичный заряд расположен в начале координат.

Задачи

1. Найдите распределение потенциала внутри шара, ограниченного двумя проводящими полусферами, заряженными до $\pm \frac{V}{2}$?

2. Вычислите потенциал вне заряженного шара, внутри которого объемная плотность зарядов пропорциональна расстоянию до диаметральной плоскости.

3. Поверхность проводника задана уравнением $r = a[1 + \delta P_n(\cos \theta)]$, где $\delta \ll 1$. Покажите, что при помещении этого проводника в однородное

электрическое поле на его поверхности индуцируются заряды с плотностью

$$\sigma = \sigma_0 + \delta \left\{ \frac{3n\epsilon_0 E}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(\cos\theta) + (n-2)P_{n-1}(\cos\theta)] \right\},$$

где σ_0 — плотность индуцированных зарядов при $\delta = 0$.

4. Покажите, что поле внутри сферической полости в диэлектрике равно

$$E = \frac{3kE_m}{2k+1},$$

если поле в диэлектрике E_m и k — диэлектрическая проницаемость среды.

5. Вычислите потенциал проводящей сферы радиуса a с зарядом q , помещенной в однородное поле E_0 . Каков дипольный момент зарядов, индуцированных на сфере?

6. Какова емкость тонкой проводящей полусферы? (Указание: примените инверсию к круглому заряженному диску. Впервые эта задача была решена Кельвином.)

7. Из сферы радиуса a удален сектор, после чего она одета на проводящий клин так, что ее поверхность ортогональна граням клина. Покажите, что если клин заряжен, то потенциалы внутри и вне сферы выражаются следующими формулами:

$$\Psi = \text{const} \frac{\alpha + 2\pi}{\alpha(1+k)} (r \sin\theta)^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}, \quad r < a$$

$$\Psi = \text{const} \left[r^{\pi/\alpha} - \frac{\pi(k-1)a^{\pi/\alpha}}{\alpha + \pi(k+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^{(\pi/\alpha)+1} \right] (\sin\theta)^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}, \quad r > a$$

(Указание: геометрия задачи позволяет применить только одну поверхностную гармонику. Какова она?) (Смайт).

8. Покажите, что в цилиндрической системе координат потенциал заряженного проводящего диска радиуса a равен

$$\Psi(r, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr) \frac{\sin ka}{k} dk,$$

где q — заряд диска. Предложите также иное решение этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Для решения задач о нахождении потенциала, более сложных, чем рассмотренные нами, весьма полезны монографии Смайта, Джинса, Стрэттона, Вебера и Морса и Фешбаха. Свойства функций Лежандра и Бесселя элементарно изложены в книге Байерли. Более полный их обзор можно найти в книгах:

1. T. M. MacRobert, Spherical Harmonics.
2. G. N. Watson, Theory of Bessel Functions. (Русский перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций.)

СИЛА И ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

До сих пор наше исследование электрического поля целиком основывалось на единственном экспериментальном законе, а именно на законе Кулона. Этот закон выражается соотношением (1.24) и описывает силу взаимодействия между двумя точечными зарядами. Электрическое поле было введено в качестве промежуточного агента с целью упростить описание этого взаимодействия. Поэтому вопрос о реальности поля, как независимого физического понятия, не возникал. Максвелл пытался приписать электрическому полю простой механический смысл. Для наших целей в этом нет необходимости, ибо потребность в физической интерпретации поля возникает лишь при рассмотрении нестационарных процессов. Однако поскольку понятия поля совершенно достаточно для описания действительности, то все механические величины, относящиеся к электрически взаимодействующим системам, могут выражаться либо через источники, участвующие во взаимодействии, либо через поля, создаваемые этими источниками.

Это означает, что действие поля на какую-либо систему зарядов не зависит от конкретной природы источников этого поля. Для описания взаимодействия, возникающего при внесении зарядов в поле, достаточно знать только само поле. Это взаимодействие может быть выражено через поле и не будет явно зависеть от зарядов, создающих это поле.

Следовательно, в теории поля такие механические величины, как сила и энергия, можно выразить либо через заряды, либо через интегралы от функций поля. Единственным критерием правильности соотношений, выражающих механические величины через электрическое поле, является их эквивалентность соотношениям, в которые входят непосредственно заряды, создающие поле.

§ 6.1. Энергия поля в свободном пространстве

Рассмотрим систему зарядов q_i в свободном пространстве. Работа, совершаемая при сближении этих зарядов из бесконечности, равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (6.1)$$

где φ_i — потенциал в точке расположения заряда q_i , создаваемый остальными зарядами. При сближении этих зарядов энергия системы изменяется и так как все силы консервативны, то это изменение энергии мы можем отождествить с совершенной работой. Эта энергия должна быть где-то запасена. Однако, как и в механике, локализация энергии определяется неоднозначно и зависит от принятой точки зрения.

Рассмотрим, например, две массы, прикрепленные к концам сжатой пружины. Такая система располагает запасом потенциальной энергии, которая высвободится, если пружине предоставить свободу. При этом массы приобретут кинетическую энергию. В начальных условиях не обязательно считать, что потенциальная энергия сосредоточена в пружине. С феноменологической точки зрения можно полагать, что в первоначальный момент массы находятся в области с большей потенциальной энергией, нежели после растяжения пружины. Соотношение (6.1) соответствует именно такой точке зрения. Ниже мы попробуем преобразовать его таким образом, чтобы показать, что энергию можно считать запасенной в самом поле благодаря «упругим» свойствам последнего. Это соответствовало бы запасанию энергии в пружине при ее сжатии.

Выражение, полученное Максвеллом для энергии электрического поля, представляет собой интеграл

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv, \quad (6.2)$$

взятый по всему пространству.

Покажем, что энергия поля U фактически совпадает с работой сближения зарядов W . Будем считать, что поле в каждой точке представляет собой сумму полей E_i отдельных точечных зарядов q_i . Тогда для E и E^2 будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n E_i, \\ E^2 &= \sum_{i=1}^n E_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{'} E_i \cdot E_j. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Штрих означает, что при суммировании опущены члены с $i=j$, выделенные в отдельную сумму. Для точечных зарядов первая сумма дает бесконечно большой вклад в интеграл (6.2). Однако этот бесконечный член не зависит от относительного расположения зарядов, и его можно считать равным той работе, которая необходима для создания самих зарядов. Поэтому член

$$U_s = \frac{\epsilon_0}{2} \int \sum_{i=1}^n E_i^2 dv \quad (6.4)$$

можно рассматривать как собственную энергию системы. Бесконечной собственной энергии заряда можно избежать, если приписать заряду конечный радиус (см. задачу в конце главы). Однако такая операция возможна только при покоящихся зарядах. Как будет показано впоследствии, введение конечного радиуса приводит к трудностям при рассмотрении движущихся зарядов.

Используя соотношение (6.4), выражение Максвелла для энергии поля (6.2) можно преобразовать следующим образом:

$$U = U_s + \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \int E_i (-\nabla \Sigma'_j \varphi_j) dv, \quad (6.5)$$

где $\Sigma'_j \varphi_j$ — сумма потенциалов всех зарядов, кроме i -го. Для интегрирования по частям воспользуемся векторным тождеством

$$\nabla \cdot (A\varphi) = \varphi \nabla \cdot A + A \cdot \nabla \varphi, \quad (6.6)$$

тогда получим

$$U = U_s - \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \int [\nabla \cdot (E_i \Sigma'_j \varphi_j) - \Sigma'_j \varphi_j \nabla \cdot E_i] dv. \quad (6.7)$$

Так как $\nabla \cdot E_i = 0$ во всех точках, кроме той, где расположен заряд q_i , то можно написать $\nabla \cdot E_i = q_i \frac{\delta(r_i)}{\epsilon_0}$ и

$$U = U_s - \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \int E_i (\Sigma'_j \varphi_j) \cdot dS + \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i^0 \frac{q_i}{\epsilon_0}, \quad (6.8)$$

где через φ_i^0 обозначено значение $\Sigma'_j \varphi_j$ в точке расположения i -го заряда, т. е. величина потенциала, создаваемого всеми другими зарядами, кроме i -го. Поверхностный интеграл может быть сделан сколь угодно малым, если поверхность интегрирования устремить к бесконечности. Действительно, при этом поле уменьшается по крайней мере как r^{-2} , потенциал как r^{-1} , а поверхность интегрирования возрастает пропорционально лишь второй степени радиуса.

Если считать, что интеграл в формуле (6.2) распространяется на все пространство, где есть поле, то соотношение (6.8) преобразуется к виду

$$U = U_s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i^0 q_i. \quad (6.9)$$

Второй член (6.9) совпадает с выражением для работы, необходимой для сближения зарядов из бесконечности. Первый член представляет собой энергию, затраченную на создание самих зарядов. Изложенные соображения показывают, что соотношения (6.2) и (6.9) соответствуют одной и той же энергии, но в соотношении (6.2) энергия

выражена в виде объемного интеграла от плотности энергии $\epsilon_0 E^2/2$ по всему пространству. Установить экспериментально, сосредоточена ли энергия в поле или носителями ее являются заряды, невозможно.

§ 6.2. Плотность энергии в диэлектриках

В диэлектриках при достаточно общих предположениях об их свойствах вместо соотношения (6.2) имеет место соотношение

$$U = \frac{1}{2} \int E \cdot D \, dv. \quad (6.10)$$

Для доказательства этого рассмотрим изменение энергии системы, вызванное внесением в поле дополнительного свободного заряда $\delta\rho$. При этом все связи, наложенные на систему, будем считать достаточно жесткими, так что они не производят никакой работы. При объемном распределении зарядов вопрос о собственной энергии не возникает, и совершенная работа выражается следующим соотношением:

$$\delta W = \int \varphi \delta\rho \, dv = \int \varphi \delta(\nabla \cdot D) \, dv = \int \varphi \nabla \cdot \delta D \, dv. \quad (6.11)$$

Векторное тождество (6.6) и теорема Гаусса — Остроградского дают возможность преобразовать это выражение

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \nabla \cdot \delta(D\varphi) \, dv - \int \delta D \cdot \nabla\varphi \, dv = \\ &= \int \delta(D\varphi) \cdot dS - \int \delta D \cdot \nabla\varphi \, dv. \end{aligned} \quad (6.12)$$

По тем же соображениям, что и при выводе формулы (6.9), поверхностный интеграл можно отбросить; тогда получим

$$\delta W = - \int \delta D \cdot \nabla\varphi \, dv = \int E \cdot \delta D \, dv. \quad (6.13)$$

Это соотношение можно проинтегрировать, если вектор E задать в виде функции от D . Пусть, например, E и D связаны через диэлектрическую постоянную k , которая зависит от координат, но не от E , тогда в результате интегрирования выражения (6.13) от $D=0$ до $D=D$ получим

$$\begin{aligned} U &= \int_0^D \delta W = \int_0^D \int E \cdot \delta D \, dv = \int_0^E \int_0^E \frac{k\epsilon_0 \delta(E^2)}{2} \, dv = \\ &= \frac{1}{2} \int k\epsilon_0 E^2 \, dv = \frac{1}{2} \int E \cdot D \, dv. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Таким образом, формула (6.10) справедлива, по крайней мере при условии, что E и D пропорциональны.

§ 6.3. Термодинамический смысл энергии U

Предположение о том, что диэлектрическая проницаемость k не зависит от времени и является функцией лишь координат, означает, что изменение поля происходит изотермически, так как k обычно зависит от температуры. Но запасание энергии может быть связано с нагреванием диэлектрика и, следовательно, с изменением k во времени. Для того чтобы обеспечить изотермические условия, диэлектрик должен находиться в термостате, который поглощал бы выделяемое тепло. Поэтому работу, определяемую соотношением (6.13), нельзя приравнять изменению полной энергии, так как необходимо учитывать тепловой обмен. Однако работа, определяемая соотношением (6.13), представляет собой ту максимальную работу, которую поле может совершить.

В термодинамике максимальная работа, которую можно изотермически получить от системы, называется свободной энергией системы F . Это означает, что в присутствии диэлектриков выражение

$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$ соответствует не полной, а свободной энергии.

Если же диэлектрические свойства веществ, находящихся в поле, не зависят от температуры, то различие между этими двумя видами энергии исчезает. С термодинамической точки зрения электрическое поле \mathbf{E} соответствует давлению газа, а индукция \mathbf{D} — его объему.

Нетрудно получить выражение и для полной энергии. Пусть, как обычно, U — полная энергия, S — энтропия и T — абсолютная температура. Тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= U - TS, \\ dF &= dU - T dS - S dT. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Как уже указывалось, $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} dv$ представляет собой прирост работы при постоянной температуре; поэтому

$$dF|_T = dU - T dS = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} dv.$$

Согласно соотношению (6.15), имеем

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{dk}{dT} dv = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \frac{1}{k} \frac{dk}{dT} dv$$

и

$$U = F + TS = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{d(Tk)}{dT} dv = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \frac{1}{k} \frac{d(Tk)}{dT} dv. \quad (6.16)$$

Таким образом, тепло, поглощенное при наложении поля, равно

$$\delta Q = T dS = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \frac{T}{k} \frac{dk}{dT} dv. \quad (6.17)$$

Если, например, диэлектрическая постоянная равна

$$k = 1 + \chi = 1 + \frac{A}{T}, \quad (6.18)$$

где A — константа, то $\frac{dk}{dT} < 0$ и, следовательно, $\delta Q < 0$ при $\delta D > 0$, т. е. тепло будет выделяться при наложении поля и, наоборот, поглощаться при снятии его. Зависимость диэлектрической постоянной от температуры, подобная (6.18), имеется у газов, молекулы которых обладают постоянным дипольным моментом (см. § 2.4).

§ 6.4. Теорема Томсона

В дальнейшем в наших расчетах мы будем пользоваться только плотностью свободной энергии, хотя обозначать ее будем по-прежнему через U , а не F . Это дает нам возможность приравнивать механическую работу непосредственно к изменению свободной энергии, не включая в энергетический баланс тепловые величины. Свободная энергия при наличии диэлектриков, определяемая соотношением (6.10), ведет себя по отношению к диэлектрическим системам точно так же, как химическая свободная энергия в химических реакциях. Химическая реакция продолжается до тех пор, пока свободная энергия не достигнет минимума, при котором в состоянии системы наступит равновесие. В случае электрических систем заряды на проводниках перераспределяются таким образом, чтобы свободная энергия была минимальна.

Докажем это утверждение. Пусть заряды находятся в равновесии на проводнике. Рассмотрим виртуальное бесконечно малое смещение этих зарядов вдоль поверхности проводника, т. е. вдоль эквипотенциальной поверхности. Полный заряд будем считать неизменным. Вариация свободной энергии равна

$$\delta U = \frac{1}{2} \int k \epsilon_0 \delta(E^2) dv = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dv. \quad (6.19)$$

Применяя теорему Гаусса и полагая поверхностный член разным нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dv = \int (-\nabla \varphi \cdot \delta \mathbf{D}) dv = \int [\varphi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta(D\varphi)] dv, \\ \delta U &= \sum \varphi_i \int \delta \rho_i dv - \int \delta(D\varphi) \cdot dS = \sum \varphi_i \int \delta \rho_i dv = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Суммирование распространяется на каждый отдельный проводник, потенциал которого постоянен в силу условия равновесия. Конечное

выражение равно нулю, так как полный заряд каждого проводника не изменился. Таким образом, вариация свободной энергии равна нулю, если система находится в состоянии равновесия. Эта теорема называется теоремой Томсона. Она показывает, что при равновесии свободная энергия действительно имеет экстремум.

Величина

$$U_v = \frac{E \cdot D}{2} \quad (6.21)$$

называется плотностью энергии (точнее, плотностью свободной энергии) электростатического поля. Плотностью она называется потому, что интеграл от нее по объему равен полной энергии поля. Следует, однако, заметить, что связывать энергию с тем или иным объемом так же невозможно, как локализовать ее в поле или его источниках. По крайней мере нельзя экспериментально установить такую связь.

При выводе выражения для энергии мы предполагали, что среда покоится и работа против внешних сил не совершается. Это показывает, что процесс объединения зарядов в диэлектрике имеет некоторые ограничения. Тем не менее, конечное выражение для энергии носит общий характер, так как все силы взаимодействия консервативны. В следующем параграфе мы рассмотрим более общий процесс, при котором возможно движение среды. Соотношение (6.10) будет применимо и в этом случае, так как конечная энергия поля не зависит от его истории.

§ 6.5. Объемные силы электростатического поля

Силу, действующую на единицу объема диэлектрика со стороны внешнего электростатического поля, можно вывести из выражения для энергии. Изменение свободной энергии δU при виртуальном смещении $\delta \mathbf{x}$ единицы объема выражается через силу F_v , действующую на этот объем следующим образом. Мы будем предполагать, что скорости \mathbf{u} при виртуальных смещениях $\delta \mathbf{x}$ достаточно малы, так что процесс одновременно обратим и изотермичен. В этом случае изменение свободной энергии может быть приравнено механической работе

$$\delta U = - \int F_v \cdot d\mathbf{x} dv. \quad (6.22)$$

Так как виртуальное смещение $\delta \mathbf{x}$ произвольно, то можно действительно считать F_v объемной силой. Ее можно определить и другим путем. Пусть \mathbf{u} представляет собой поле скоростей в диэлектрике; тогда скорость изменения энергии поля в диэлектрике равна

$$\frac{dU}{dt} = - \int F_v \cdot \mathbf{u} dv, \quad (6.23)$$

где F_v — снова сила, действующая на единицу объема.

Вычислим теперь изменение энергии, вызванное изменениями заряда $\delta\rho$ и диэлектрической постоянной δk , происходящими при перемещениях зарядов. Согласно выражению (6.21)

$$\delta U = \frac{1}{2} \delta \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{1}{2\epsilon_0} \int D^2 \delta \left(\frac{1}{k} \right) \, dv + \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \, dv \quad (6.24)$$

или, заменяя в первом интеграле D через E , получим

$$\delta U = - \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \delta k \, dv + \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \, dv. \quad (6.25)$$

Второй интеграл в (6.25) равен

$$\int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \, dv = - \int \nabla \varphi \cdot \delta \mathbf{D} \, dv. \quad (6.26)$$

Интегрируя (6.26) по частям, находим

$$\int \nabla \varphi \cdot \delta \mathbf{D} \, dv = \int \varphi \nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) \, dv = \int \varphi \delta \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \int \varphi \delta \rho \, dv. \quad (6.27)$$

Следовательно,

$$\frac{dU}{dT} = \int \left(\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{\partial k}{\partial t} \right) \, dv. \quad (6.28)$$

Чтобы перейти к выражению для F_v , производные $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и $\frac{\partial k}{\partial t}$ нужно выразить через скорости \mathbf{u} . Это можно сделать с помощью уравнений непрерывности

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.29)$$

$$\nabla \cdot (g \mathbf{u}) + \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad (6.30)$$

которые выражают соответственно закон сохранения вещества и закон сохранения заряда (ρ — плотность вещества, g — плотность заряда). Так как в поле скоростей происходит перемещение вещества, то изменение диэлектрической постоянной можно выразить через геометрическое изменение элемента объема. Для этого нужно проследить историю его движения в поле \mathbf{u} . Полная производная какой-либо величины, будь то k или g , взятая в точке, движущейся вместе с выбранным элементом объема, обычно называется субстанциональной производной. С частной производной и скоростью \mathbf{u} рассматриваемого объема она связана следующим соотношением:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial k}{\partial t} = \nabla k \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial k}{\partial t}. \quad (6.31)$$

Следовательно, искомые частные производные равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= -\nabla k \cdot \mathbf{u} + \frac{Dk}{Dt}, \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= -\nabla g \cdot \mathbf{u} + \frac{Dg}{Dt}. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Если существует уравнение состояния данного диэлектрика, например, известна зависимость диэлектрической постоянной от плотности, аналогичная соотношению Клаузиуса—Мосотти (2.39), то субстанциональная производная диэлектрической постоянной может быть выражена через субстанциональную производную плотности следующим образом:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{dk}{dg} \frac{Dg}{Dt}. \quad (6.33)$$

Предположение о том, что диэлектрическая постоянная зависит только от плотности вещества, включает в себя, конечно, условие изотермичности виртуальных процессов. Множитель $\frac{Dg}{Dt}$ в соотношении (6.33) можно вывести из соотношений (6.32) и уравнения непрерывности посредством следующих преобразований:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{dk}{dg} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{dk}{dg} [\nabla g \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (g\mathbf{u})] = -\frac{dk}{dg} g \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (6.34)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{dk}{dg} g \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla k \cdot \mathbf{u}. \quad (6.35)$$

Теперь соотношение (6.28) можно преобразовать к такому виду:

$$\frac{dU}{dt} = \int \left[-\varphi \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \frac{dk}{dg} g \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla k \cdot \mathbf{u} \right] dv. \quad (6.36)$$

Для того чтобы объемную силу F_v представить в явном виде, подынтегральное выражение следует преобразовать в скалярное произведение некоего выражения на скорость \mathbf{u} . Первый член можно представить в таком виде с помощью тождества (6.6). Интегрируя далее по частям и предполагая, что поверхность интегрирования находится вне диэлектрика и поэтому вне объема, где расположены заряды, получим

$$-\int \varphi \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dv = \int \rho \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} dv. \quad (6.37)$$

Аналогично второй член принимает нужную форму, если отбросить поверхностный интеграл

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 g \frac{dk}{dg} \nabla \cdot \mathbf{u} dv = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \nabla \left(E^2 \frac{dk}{dg} g \right) \cdot \mathbf{u} dv. \quad (6.38)$$

Таким образом, соотношение (6.36) принимает вид

$$\frac{dU}{dT} = \int \left[-\rho E + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla k - \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \frac{dk}{dg} g \right) \right] \cdot \mathbf{u} dv. \quad (6.39)$$

Сравнивая (6.39) с (6.23), получаем выражение для силы, действующей на единицу объема:

$$\mathbf{F}_v = \rho E - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla k + \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \frac{dk}{dg} g \right). \quad (6.40)$$

Первый член этого выражения в согласии с формулой (1.23) представляет собой обычную электростатическую объемную силу. Второй член равен силе, с которой электрическое поле действует на неоднородный диэлектрик. Наконец, последний член описывает объемную силу, действующую на диэлектрик в неоднородном электрическом поле. Этот член называют электрострикционным. Следует отметить, что величина этого члена через производную $\frac{dk}{dg} = \left(\frac{\partial k}{\partial g} \right)_T$ явно зависит от уравнения состояния данного вещества. Интересно, что при интегрировании по объему достаточно большого диэлектрика, границы которого находятся вне поля, этот член исчезает. Последнее связано с тем, что электрострикционный член представляет собой градиент. В связи с этим им часто пренебрегают в расчетах, поскольку градиентные члены не дают вклада в выражение для полной силы. Однако при этом получают неверные выражения для натяжения внутри диэлектрика.

§ 6.6. Тензор натяжений Максвелла

Прежде чем рассматривать конкретные применения формулы (6.40), выразим объемные силы через «пространственные натяжения». В теории поля суммарную силу, действующую на данный элементарный объем диэлектрика, можно выразить через поле на поверхности этого объема. Это означает, что поле является средой, передающей натяжения, совершенно так же, как пружина передает силу от одного конца на другой. В таких соображениях Максвелл видел указания на физическую реальность характеристик поля. Однако можно дать и иное описание действующих сил. Никакого физического доказательства преимуществ полевой концепции перед концепцией дальнего действия мы дать не можем. Следует помнить, что в основе всех приведенных рассуждений лежит единственный экспериментальный факт — закон Кулона. Все остальные следствия — математические, и потому не следует думать, что они могут дать какие-либо новые сведения, относящиеся к взаимодействию зарядов, помимо закона Кулона. Новые физические данные о поле будут рассмотрены при изучении процессов, зависящих от времени.

Если предполагается, что сила, действующая на данный элемент объема, передается через его поверхность, то эту силу можно выразить через тензор натяжений T . Надо иметь в виду, что эти натяжения представляют собой абстрактные понятия и не связаны с тем, присутствует ли вещество или нет. Компонента $T_{\alpha\beta}$ тензора T означает, что α -компонента dF_α силы dF , передаваемой через элемент поверхности dS_β , равна

$$dF_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta} dS_\beta, \quad (6.41)$$

где dS_β — проекция вектора dS на направление β . Рассматривая условия равновесия прямоугольного параллелепипеда, можно показать, что тензор T — симметричный.

Согласно принятому условию суммировать по индексу, повторяющемуся в какой-либо формуле дважды, соотношение (6.41) можно записать так:

$$dF_\alpha = T_{\alpha\beta} dS_\beta. \quad (6.42)$$

Чтобы найти α -компоненту полной силы, действующей на данный объем, соотношение (6.42) следует проинтегрировать

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta} dS_\beta. \quad (6.43)$$

Связь этой силы с α -компонентой объемной силы $F_{v\alpha}$ дается соотношением

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta} dS_\beta = \int F_{v\alpha} dv. \quad (6.44)$$

Используя теорему Гаусса, записанную в тензорных обозначениях

$$\int \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dv = \int T_{\alpha\beta} dS_\beta, \quad (6.45)$$

получим соотношение между объемной силой и тензором натяжений

$$F_{v\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \quad (6.46)$$

Таким образом, если нам удалось выразить объемную силу (6.40) через тензорную дивергенцию некой величины T , то эта величина T является тензором натяжений, компоненты которого равны натяжениям, передаваемым полем через поверхность данного объема. В тензорных обозначениях соотношение (6.40) приобретает вид

$$F_{v\alpha} = E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\epsilon_0}{2} E_\beta E_\beta \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(E_\beta E_\beta g \frac{dk}{dg} \right). \quad (6.47)$$

Введем обозначение

$$b = \frac{g}{k} \frac{dk}{dg} \quad (6.48)$$

и воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (E_\beta E_\beta k) = 2k E_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} + E_\beta E_\beta \frac{\partial k}{\partial x_\alpha}, \quad (6.49)$$

помня одновременно, что формула $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ в тензорных обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (6.50)$$

Тогда (6.47) можно преобразовать следующим образом:

$$F_{v_\alpha} = E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} + D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [E_\beta E_\beta k (1 - b)]. \quad (6.51)$$

Это выражение можно записать и несколько иначе:

$$F_{v_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} (E_\alpha D_\beta) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} [(1 - b) E_\gamma D_\gamma]. \quad (6.52)$$

Сравнивая его с (6.46), видим, что

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} (1 - b) E_\gamma D_\gamma = k \epsilon_0 \left[E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} (1 - b) E_\gamma E_\gamma \right]. \quad (6.53)$$

Этим выражением полностью и определяется тензор натяжений Максвелла. Очевидно, что к компонентам тензора $T_{\alpha\beta}$ могут быть добавлены дополнительные члены, если их тензорная дивергенция равна нулю; физический смысл тензора при этом не изменится.

Матрицу этого тензора можно написать в явном виде

$$T = k \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & \frac{1}{2} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & \frac{1}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Ради простоты b в этой матрице положено равным нулю. Отметим, что если поле вихревое, то в тензоре натяжений появятся дополнительные члены.

Тензор Максвелла представляет собой симметричный тензор второго ранга. Преобразуя его к главным осям, можно получить всего три компоненты, отличные от нуля. Главные значения тензора находят, решая уравнение

$$|T_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \lambda| = 0. \quad (6.55)$$

При $b = 0$ главные значения равны

$$\lambda_1 = \frac{k\epsilon_0}{2} E^2, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{k\epsilon_0}{2} E^2. \quad (6.56)$$

Тензор натяжений, преобразованный к главным осям, принимает простой вид

$$T' = \frac{k\epsilon_0}{2} \begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

Главные оси ориентированы таким образом, что ось, соответствующая одиночному корню λ_1 , параллельна E , а оси, соответствующие двойным корням λ_2 и λ_3 перпендикулярны E . Качественно это часто выражают словами: вдоль поля распространяется растягивающее натяжение, равное $k\epsilon_0 E^2/2$, и поперек поля — сжимающее натяжение, также равное $k\epsilon_0 E^2/2$.

Выберем координатную систему так, чтобы ось x была параллельна полю, т. е. $E_y = E_z = 0$, и вычислим натяжение на элементе поверхности, нормаль к которому составляет с осью x угол θ (рис. 6.1). Натяжение имеет в этом случае две компоненты: одну —

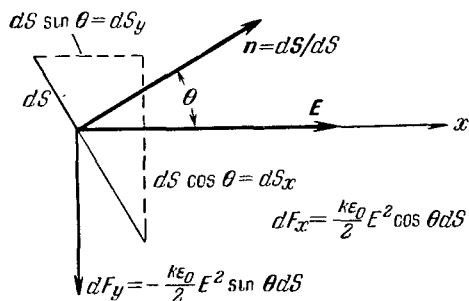


Рис. 6.1. К вычислению натяжений на элементе поверхности.

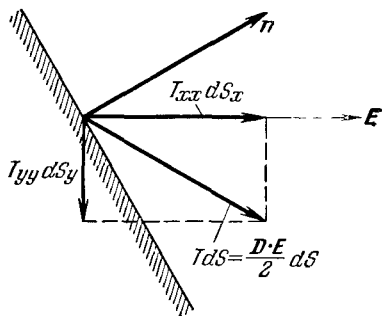


Рис. 6.2. Натяжения на плоской поверхности.

параллельную полю, другую — перпендикулярную, лежащую в плоскости, определяемой вектором поля и нормалью к элементу поверхности. Величины этих выражений равны произведениям компонент тензора (6.57) на компоненты вектора поверхностного элемента (рис. 6.2). Результирующее натяжение на dS равно векторной сумме этих двух компонент. Из рисунка видно, что электрическое поле делит пополам угол между нормалью к поверхности и направлением результирующего натяжения. Такое построение часто бывает полезным при графическом определении силы, действующей на заряжен-

ную область, если из опыта известно распределение поля. В дальнейшем при вычислении сил, действующих на магнитные материалы или проводники с током в магнитном поле, будет рассмотрен аналогичный случай.

На рис. 6.3 показаны натяжения, возникающие на плоской поверхности в некоторых частных случаях. Первые две части рисунка

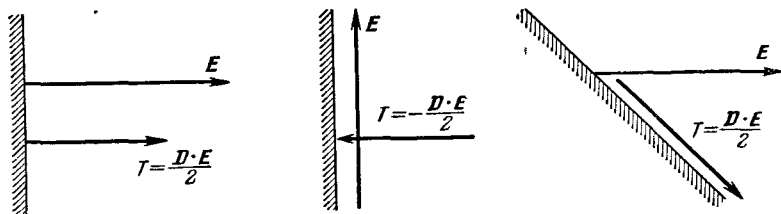


Рис. 6.3. Натяжения, когда поле перпендикулярно, параллельно и составляет угол 45° с поверхностью.

иллюстрируют соответственно случаи, когда поле перпендикулярно и параллельно поверхности. В первом случае возникает растягивающее усилие, равное по величине $ED/2$, во втором — сжимающее усилие той же величины. Третья часть рис. 6.3 относится к случаю, когда поверхность наклонена под углом 45° к направлению поля. Натяжение теперь параллельно поверхности, а величина его по-прежнему равна $ED/2$.

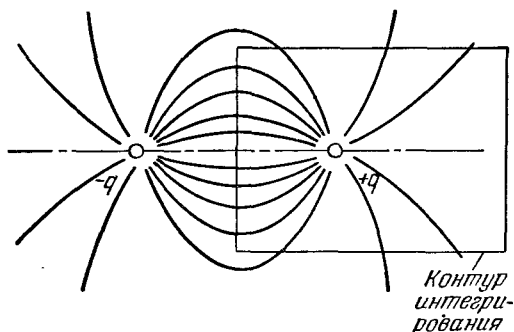


Рис. 6.4. Поле двух равных зарядов разного знака.

Применение выведенных соотношений можно продемонстрировать на простых частных случаях, например для вычисления силы притяжения между зарядами разных знаков или силы отталкивания между зарядами одного знака. Распределение силовых линий в случае зарядов равной величины, но противоположных знаков показано на рис. 6.4.

Если тензор натяжений проинтегрировать по поверхности ящика, одна грань которого лежит в плоскости симметрии системы, а другая — в бесконечности, то получим не что иное, как закон Кулона (1.24). Аналогичное рассмотрение случая двух зарядов одного знака (рис. 6.5)

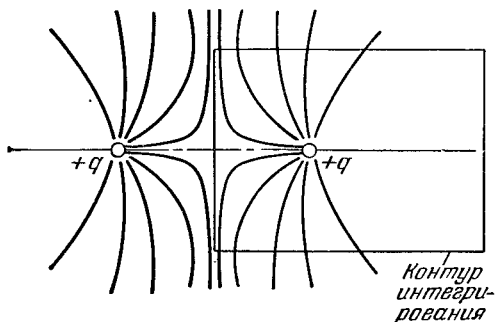


Рис. 6.5. Поле двух равных зарядов одного знака.

также приводит к закону Кулона. Так как силовые линии теперь параллельны плоскости симметрии, то между зарядами существует взаимное отталкивание.

§ 6.7. Поведение диэлектрических жидкостей в электростатическом поле

Рассмотрим поведение незаряженной диэлектрической жидкости под действием объемных сил электростатического поля. Пусть p — давление в жидкости, находящейся в равновесии в электростатическом поле. Тогда механическая объемная сила $-\nabla p$, появляющаяся из-за наличия градиента давлений, равна и противоположна электрической объемной силе F_v . Другими словами, условие равновесия выражается равенством $F_v + (-\nabla p) = 0$, т. е. $F_v = \nabla p$. Тогда согласно соотношению (6.40) градиент давления в любой точке внутри жидкости определяется соотношением

$$\nabla p = F_v = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \nabla k + \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 g \frac{dk}{dg} \right), \quad (6.58)$$

которое можно записать в несколько иной форме:

$$\nabla p = \frac{\epsilon_0 g}{2} \nabla \left(E^2 \frac{dk}{dg} \right). \quad (6.59)$$

Задавшись уравнением состояния жидкости, последнее соотношение можно проинтегрировать

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{g} = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \left[E^2 \frac{dk}{dg} \right]_2 - \left[E^2 \frac{dk}{dg} \right]_1 \right\}. \quad (6.60)$$

Отсюда следует, что давление внутри диэлектрической жидкости зависит только от электрического поля в данной точке. Характер этой зависимости определяется электрическим и механическим уравнениями состояния жидкости. Уравнение (6.60) показывает также, что разность давлений (возникающая из-за электрических сил) обращается в нуль, если точки, в которых производится измерение, расположены вне поля. Впоследствии мы рассмотрим явления, возникающие на границах диэлектрической жидкости.

Если жидкость несжимаема, то уравнение (6.60) сводится к следующему:

$$p_2 - p_1 = \frac{g\epsilon_0}{2} \left[E^2 \frac{dk}{dg} \right]_1^2. \quad (6.61)$$

Из (6.61) можно численно оценить разность давлений. Для этого следует воспользоваться соотношением Клаузиуса — Мосотти или аналогичным уравнением состояния. Если соотношение Клаузиуса — Мосотти (2.39) справедливо, то для несжимаемой жидкости уравнение (6.61) принимает вид

$$p_2 - p_1 = \frac{N_0^3 \sigma_0 g \alpha}{18M} \left[E^2 (k+2)^2 \right]_1^2 = \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{(k-1)(k+2)}{3} \right]_1^2. \quad (6.62)$$

В качестве примера натяжений, действующих на границе диэлектрика, рассмотрим границу между диэлектриком с проницаемостью k и вакуумом. Будем предполагать, что переход от диэлектрика к вакууму происходит непрерывно, как показано на рис. 6.6. Для простоты задачу будем считать двумерной. Электрическая система состоит из двух конденсаторных пластин, погруженных в диэлектрическую жидкость, как показано на рис. 6.7. Для вычисления разности давлений между точками A и D достаточно проинтегрировать тот член в (6.40), который пропорционален градиенту диэлектрической проницаемости. Получающаяся в результате разность давлений, уравновешиваемая гидростатическим давлением, равна

$$p_A - p_D = \frac{\epsilon_0}{2} \int_A^D E^2 \nabla k \cdot dx, \quad (6.63)$$

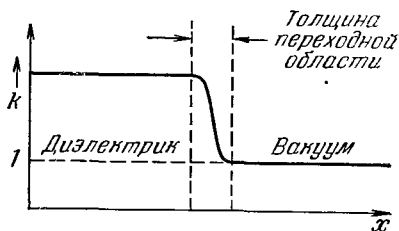


Рис. 6.6. Предполагаемое изменение k на границе между диэлектриком и вакуумом.

или

$$p_A - p_D = \frac{\epsilon_0}{2} \int_A^D (E_t^2 + E_n^2) \frac{dk}{dx} dx. \quad (6.64)$$

Если учесть граничные условия (2.15) и (2.18), которым подчиняются нормальные и тангенциальные компоненты электрического поля, то соотношение (6.64) принимает такой вид:

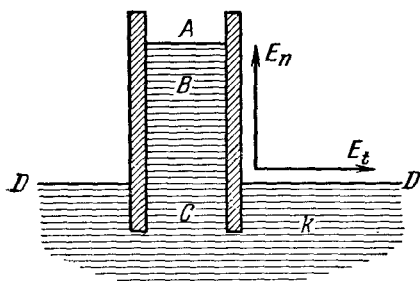


Рис. 6.7. Плоский конденсатор, погруженный в жидкий диэлектрик.

Точку D , где поле равно нулю, можно поместить в любом месте диэлектрика, достаточно удаленном от конденсатора. Для того чтобы облегчить сравнение с гидростатическим давлением, она выбрана на поверхности.

поведение жидкости в области между A и D , так как в ней не учтена электрострикция. Так, например, изменения давления от A до B и от A до D противоположны по знаку. Полное изменение давления

$$\begin{aligned} p_A - p_D &= \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[E_{tB}^2 (k-1) + k^2 E_{nB}^2 \int_A^B \frac{dk}{k^2} \right] = \\ &= \frac{\epsilon_0 (k-1)}{2} [E_t^2 + k E_n^2]_B. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Следует отметить, что характеристики поля, входящие в это соотношение, относятся к полю в жидкости. С помощью этого соотношения легко определить высоту подъема жидкости между пластинами конденсатора. Однако эта формула не полностью описывает

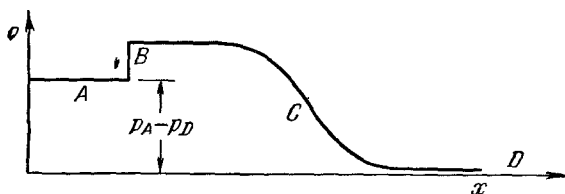


Рис. 6.8. Изменение давления от A до D .

x — координата вдоль пути, на котором производится измерение давления.

в жидкости показано на рис. 6.8. По мере уменьшения поля от B до D уменьшается и давление ниже того значения, которое имелось в A . Это уменьшение давления больше, чем увеличение его на границе $A-B$. Разность давлений, вычисленная на основе соотношения (6.65), равна разности давлений между точками A и D . То давление, которое фактически заставляет жидкость подниматься, возникает в области C , где поле неоднородно, а не на поверхности

жидкости. Физическая причина этого явления заключается в том, что энергия диполей в электрическом поле меньше, чем в свободном пространстве. Поэтому они стремятся в области, где поле максимально, чтобы удовлетворить условию минимума потенциальной энергии. Такое воздействие диполи испытывают в области C , где поле начинает расти. Падение давления в области $A—B$ из-за электрострикции частично компенсирует этот эффект. В результате полная разность давлений описывается формулой (6.65). Этот пример показывает, что нужна большая осторожность при рассмотрении сил, действующих в диэлектриках.

Разберем другой пример, на первый взгляд кажущийся исключительно простым, но на самом деле приводящий к парадоксу. Если система заряженных проводников может быть целиком погружена в диэлектрическую жидкость так, что свободные заряды на проводниках остаются неизменными, то свободная энергия системы в соответствии с формулой (6.14) уменьшается в k раз, так как D не изменяется, а E — уменьшается. С другой стороны, если при погружении оставить неизменными потенциалы проводников, то свободная энергия возрастает в k раз, так как в этом случае E останется постоянным, а D увеличится. Конечно, эти рассуждения справедливы только в том случае, если жидкость заполняет не только пространство между проводниками, но и вне их. По крайней мере все то пространство, где имеется поле, должно быть заполнено жидкостью, так как иначе нельзя предполагать, что распределение E и D не изменится при введении жидкости.

Изложенные соображения показывают, что если при погружении системы в диэлектрическую жидкость сохраняются заряды, то все механические силы уменьшаются в k раз. В выражении для закона Кулона часто пишут множитель $1/k$, чтобы указать на такое уменьшение силы. Физический смысл такого уменьшения силы кажется таинственным. На основе теории поля трудно понять, почему взаимодействие между двумя зарядами должно зависеть от свойств материала, находящегося между ними. Соответственно и происхождение множителя $1/k$ в законе Кулона требует объяснений.

Для выяснения этого рассмотрим две параллельные проводящие пластины, между которыми введен слой твердого диэлектрика (рис. 6.9). Пусть на единицу площади проводящих пластин приходятся заряды $\pm q_s$, а на единицу площади слоя диэлектрика — поляризационные заряды $\pm q_p$. Два слоя поляризационных зарядов создают на каждой пластине конденсатора равные и противоположно направленные поля, и поэтому эти поля взаимно уничтожаются. Таким образом,

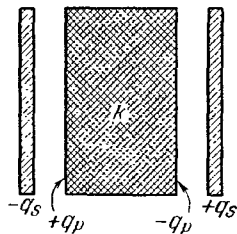


Рис. 6.9. Плоский конденсатор с твердым диэлектриком.

совершенно неясно, почему сила взаимодействия должна измениться, так как введение диэлектрика не оказывает влияния на силу взаимодействия зарядов q_s . Пока диэлектрик не касается пластин конденсатора, сила взаимодействия остается прежней

$$F_s = \frac{q_s^2}{2\epsilon_0}. \quad (6.66)$$

Следовательно, уменьшение силы до величины

$$F_s = \frac{q_s^2}{2k\epsilon_0}, \quad (6.67)$$

происходящее при погружении пластин в диэлектрическую жидкость, которая окружает их со всех сторон, не может быть объяснено только электрическими силами.

Этот очевидный парадокс разрешается, если принять во внимание разность давлений в жидкости между точками, лежащими в поле, и точками вне пластин конденсатора, где поле отсутствует. Эта разность давлений определяется формулой (6.65) и в нашем случае равна

$$p_B - p_A = \frac{\epsilon_0^{-1}}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) D_n^2 = \frac{q_s^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (6.68)$$

В целом сумма сил, обусловленных этой разностью давлений, и чисто электрических сил, определяемых соотношением (6.66), дает полную силу (6.67), полученную нами из энергетических соображений. Таким образом, уменьшение силы взаимодействия между двумя зарядами при помещении их в диэлектрическую жидкость можно понять только при учете давления, оказываемого жидкостью на сами заряды. В соответствии с концепцией дальнего действия чисто электрическое взаимодействие между зарядами не изменяется.

Задачи

1. Пусть имеется система проводников с данными потенциалами и с полным зарядом Q . Покажите, что при любом бесконечно малом отклонении распределения зарядов от задаваемого уравнениями поля полная энергия увеличивается.

2. Два заряда величиной q , расположенные на расстоянии d друг от друга, отталкиваются согласно закону Кулона. Выберите подходящую поверхность, окружающую один из зарядов, и вычислите силу взаимодействия F , интегрируя тензор натяжений Максвелла по этой поверхности.

3. В однородное электрическое поле E помещена проводящая сферическая оболочка радиуса a . Покажите, что сила, стремящаяся разорвать сферу на две половины по диаметральной плоскости, перпендикулярной E , равна

$$F = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 a^2 E^2.$$

4. Длинная плоская проводящая полоска шириной $2a$ помещена в однородное поле E . Ось полоски перпендикулярна полю, а плоскость наклонена к нему под углом θ . Какова величина крутящего момента, приходящегося на единицу длины полоски?

5. Диполь с моментом p находится в однородном поле E . Прямым интегрированием момента тензора Максвелла по сфере, в центре которой находится диполь, покажите, что крутящий момент, действующий на диполь, равен $p \times E$.

6. Определите электростатическую энергию заряда q , однородно распределенного по поверхности сферы радиуса r_0 . Какова энергия того же заряда, однородно распределенного по объему сферы? (В обоих случаях энергия порядка $q^2/4\pi\epsilon_0 r_0$.)

7. Определите энергию взаимодействия двух взаимно проникающих сфер равного радиуса, однородно заряженных с плотностями зарядов ρ_1 и ρ_2 . Ответ выразите через величину взаимного перекрытия.

8. а) Величина электрического поля в непосредственной близости от заряженной проводящей поверхности равна σ/ϵ_0 , где σ — поверхностная плотность зарядов. Покажите, что одна половина этого поля создается зарядами, расположенными на поверхности, а вторая — зарядами, расположенными вдали, и что вследствие этого натяжение, нормальное поверхности проводника, равно $\sigma^2/2\epsilon_0$. б) Листок сусального золота площадью 10 см^2 и весом $0,001 \text{ г}$ лежит на плоской горизонтальной проводящей поверхности. Какой величины поле нужно создать на поверхности, чтобы поднять листок?

9. а) Проводящая сфера массой M и радиусом a плавает в масле с диэлектрической проницаемостью k . Если сфера не заряжена, то в масло погружена ее часть $f_0 < \frac{1}{2}$. Определите заряд q , которым нужно зарядить сферу для того,

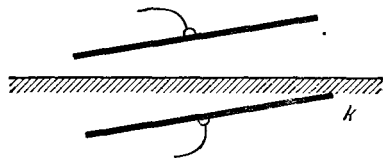


Рис. 6.10.

чтобы она погрузилась ровно наполовину. В процессе решения покажите, что зависимостью k от плотности можно пренебречь. б) Предполагая заданными все необходимые параметры, определите давление в жидкости вблизи нижней точки сферы, когда она погружена наполовину. Каково давление, оказываемое жидкостью на сферу в этой точке?

10. Одна из параллельных пластин заряженного конденсатора погружена в жидкий диэлектрик наклонно по отношению к поверхности жидкости (рис. 6.10). Проанализируйте характер полей, давлений и натяжений, возникающих в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abraham and R. Becker, The Classical Theory of Electricity and Magnetism. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, Электричество и магнетизм, т. I)

Наше изложение в основном повторяет содержание гл. V этой книги.

2. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. (Русский перевод: Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма.)

Вопрос об электрических натяжениях и энергии рассмотрен в начале гл. II.

3. J. H. Jeans, Electricity and Magnetism.

Гл. VI, посвященная состоянию среды в электростатическом поле, начинается дискуссией о поле и дальнем действии. Подробности вопроса изложены кратко.

4. M. Mason, W. Weaver, The Electromagnetic Fields.

Особенно полезны разделы 2 и 37.

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества.

ТОКИ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В электростатике мы рассматривали только покоящиеся заряды. Теперь мы изучим движение зарядов, или электрический ток. Эрстед экспериментально показал, что электрический ток приводит к возникновению магнитного поля, поэтому описание тока только с помощью электрического поля невозможно. Однако сначала мы рассмотрим токи, медленно меняющиеся со временем. Можно предполагать, что они зависят практически только от электрического поля. Пока не известны численные оценки относительных величин магнитных взаимодействий и взаимодействий токов с кристаллической решеткой среды (это взаимодействие приводит к электрическому сопротивлению), правомерность такого предположения неясна. Однако впоследствии будет показано, что магнитными эффектами можно пренебречь, если поля изменяются со столь малой частотой, что так называемая «глубина проникновения» велика по сравнению с размерами проводников. Мы будем пренебрегать также еще одним явлением, а именно эффектом Холла. Эффект Холла имеется даже при нулевой частоте и приводит к перераспределению эквипотенциальных поверхностей в проводнике с током. В металлах этот эффект ничтожен и обычно заметен только в полупроводниках.

§ 7.1. Закон Ома

Закон сохранения заряда в среде выражается уравнением непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.1)$$

где \mathbf{j} — плотность тока в среде, измеряемая в амперах на кв. метр [a/m^2]. Ток называется постоянным, если нигде не происходит накопления зарядов. Очевидно, что постоянный ток удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (7.2)$$

Для того чтобы объединить теорию токов с теорией полей, необходимо условие, которое связывало бы ток и поле в данной точке проводника. В большинстве случаев поле и ток просто пропорциональны

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.3)$$

Величина σ называется электропроводностью вещества и в системе МКС измеряется в обратных омах на метр. Уравнение (7.3) называется законом Ома. Это соотношение установлено на опыте и ни в коей мере не является универсальным. Область изменения плотностей тока, в которой выполняется уравнение (7.3), называется линейной областью данного вещества. В металлах закон Ома выполняется в очень большом диапазоне значений, но в полупроводниках его применение ограничено. Уравнение (7.3) предполагает, что проводимость изотропна. В кристаллах с симметрией, отличной от кубической, оно должно быть заменено тензорным уравнением.

§ 7.2. Электродвижущая сила

В чисто безвихревом поле не может быть постоянного тока. Дело в том, что постоянный ток расходует в единице объема и в единицу времени энергию, равную $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Такой расход энергии не может быть обеспечен безвихревым полем. Постоянные токи возможны только в том случае, если есть источники поля, которые создают потенциальное электрическое поле. Обычно говорят, что такие источники создают стороннюю электродвижущую силу. Обозначим непотенциальное поле через \mathbf{E}' ; тогда уравнение (7.3) принимает следующий вид:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}'), \quad (7.4)$$

где \mathbf{E} — потенциальное поле. Величина сторонней электродвижущей силы \mathcal{E} определяется соотношением

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma}. \quad (7.5)$$

Потенциальная часть поля \mathbf{E} при интегрировании по замкнутому пути выпадает. Ток вызывается только неконсервативными силами, хотя на него оказывают влияние проводимость и геометрия системы.

Если плотность тока постоянна на значительных частях пути интегрирования, то

$$\mathcal{E} = J \oint \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = JR, \quad (7.6)$$

где $J = |\mathbf{j}|S$ — полный ток в амперах, S — площадь поперечного сечения проводника, в котором плотность тока равна \mathbf{j} , R — сопротивление проводника в омах и \mathcal{E} — э. д. с. в вольтах. Для данной

цепи полный ток представляет собой постоянную величину. Наиболее часто закон Ома записывают именно в форме (7.6).

Проинтегрируем соотношение (7.4) вдоль некоторой линии, пересекающей всю область, где имеются неконсервативные сторонние силы, от точки 1 до точки 2, в случае, когда ток отсутствует

$$-\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}. \quad (7.7)$$

Это соотношение показывает, что электростатическое напряжение на концах разомкнутой цепи равно полной электродвижущей силе в этой цепи. Ясно также, что в области, где есть неконсервативные силы, $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$, если ток равен нулю. Такая компенсация сторонних сил (вызванных, скажем, химическими потенциалами) производится электростатическим полем тех зарядов, которые возникают на границах области, где есть неконсервативные силы.

§ 7.3. Решение задач с постоянным током

Соображения, изложенные в предыдущих параграфах, показывают, что электрическое поле и ток полностью определяются полем сторонних электродвижущих сил и проводимостью среды. Используя соотношения (1.28), (7.2) и (7.4), \mathbf{E} и \mathbf{j} можно выразить через \mathbf{E}' :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) &= \nabla \times \mathbf{E}', \\ \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) &= -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}'), \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

В области, где сторонние электродвижущие силы отсутствуют, \mathbf{E} выражается через потенциал. Следовательно, в случае постоянного тока потенциал подчиняется уравнению Лапласа

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi, \\ \nabla \cdot (\sigma \nabla\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

или $\nabla^2\varphi = 0$, если проводимость σ постоянна. Граничные условия в задачах с постоянным током иные, нежели граничные условия в электростатике, так как теперь проводимость в большей степени, чем диэлектрическая постоянная, определяет условия на границе. Согласно соотношениям (7.2) и (7.3) в отсутствие электродвижущих сил имеем

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = 0. \quad (7.9)$$

Так же как и в случае диэлектриков, рассмотренных в гл. 2, граничные условия для нормальных компонент поля определяются из равенства дивергенции \mathbf{E} нулю на поверхности раздела между двумя средами (они будут обозначаться индексами 1 и 2)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\sigma_2 \mathbf{E}_2 - \sigma_1 \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\sigma_2 \nabla \varphi_2 - \sigma_1 \nabla \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Граничные условия для тангенциальных компонент вытекают из равенства нулю ротора электрического поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \varphi_2 - \nabla \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Следовательно, отыскание распределения тока с математической точки зрения эквивалентно отысканию электростатического потенциала при той же геометрии. Таким образом, методы, развитые в гл. 3, 4 и 5, пригодны также и в этом случае. Единственное различие между этими задачами заключается в том, что проводимость какой-либо области может уменьшаться до нуля, в то время как диэлектрическая проницаемость не может быть меньше единицы. В таких случаях краевые задачи с постоянным током в некоторых случаях будут существенно отличаться от краевых задач электростатики. Например, если пространство между параллельными пластинами конденсатора заполнено веществом с проводимостью σ , то распределение тока будет точно однородным по всей площади, заполненной проводящим веществом. В электростатическом случае распределение поля будет однородным лишь приближенно из-за возмущающего действия краев пластин.

Сопротивление между электродами, расположенными в однородной проводящей среде, легко вычислить, если методы электростатики позволяют найти емкость между ними. Емкость между электродами 1 и 2 равна

$$C = \frac{k\epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}. \quad (7.12)$$

По теореме Гаусса числитель равен заряду, имеющемуся на каждом электроде, а знаменатель — разности потенциалов между ними. Сопротивление между этими двумя электродами равно

$$R = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}. \quad (7.13)$$

В знаменателе теперь стоит полный ток, а в числителе — разность потенциалов. Сравнивая формулы (7.12) и (7.13), получим

$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{C}{k\varepsilon_0}, \quad (7.14)$$

или

$$RC = \frac{k\varepsilon_0}{\sigma}. \quad (7.15)$$

Интересно отметить, что произведение сопротивления на емкость зависит только от проводимости среды и ее диэлектрической постоянной и не зависит от геометрии системы.

Если среда неоднородна и распределение диэлектрической постоянной отличается от распределения проводимости, то распределения поля в диэлектрике и тока в проводнике будут разными.

Емкость плоского конденсатора при пренебрежении краевыми эффектами равна

$$C = \frac{k\varepsilon_0 S}{l}, \quad (7.16)$$

где S — площадь пластин, а l — расстояние между ними. Подставив (7.16) в соотношение (7.15), получим выражение для сопротивления проволоки длиной l и поперечным сечением S :

$$R = \frac{l}{\sigma S}. \quad (7.17)$$

Эта формула применима, конечно, и при больших значениях l , так как нулевая проводимость окружающей среды предотвращает возникновение краевого эффекта. Распределение тока при этом сильно отличается от распределения поля, которое возникает, если концы проволоки обычной длины принять за пластины конденсатора.

§ 7.4. Время релаксации

Из уравнения непрерывности (7.1), закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и одного из уравнений Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{k\varepsilon_0}$ можно получить дифференциальное уравнение для плотности зарядов ρ :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma \rho}{k\varepsilon_0}. \quad (7.18)$$

Если среда однородна, то это уравнение можно проинтегрировать по времени

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}, \quad (7.19)$$

где τ — характеристическое время, равное

$$\tau = \frac{k\varepsilon_0}{\sigma}. \quad (7.20)$$

τ обычно называют временем релаксации данной среды. Заметим, что это понятие применимо только к однородной среде, так как в противном случае при интегрировании уравнения (7.18) нужно было бы учесть зависимость проводимости и диэлектрической постоянной от координат. Время релаксации характеризует время, необходимое для достижения стационарных условий в данной среде. Если после возникновения тока в среде прошло время, значительно большее времени релаксации, то условия можно считать стационарными и, следовательно, можно использовать законы постоянного тока.

§ 7.5. Магнитное взаимодействие постоянных токов

Магнитное взаимодействие токов лучше всего описывать, опираясь на экспериментально установленный закон взаимодействия токов в пустоте, аналогичный закону Кулона в электростатике. Взаи-

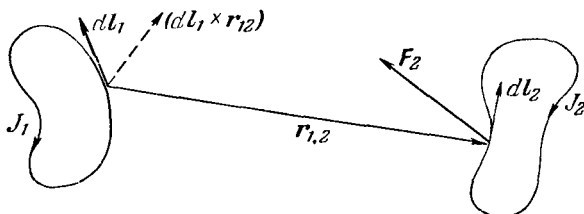


Рис. 7.1. Иллюстрация закона Ампера.

действие между токами было изучено Ампером. Сила взаимодействия между двумя контурами с токами J_1 и J_2 (рис. 7.1) равна

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint_1 \oint_2 \frac{dl_2 \times (dl_1 \times r_{1,2})}{r_{1,2}^3}, \quad (7.21)$$

где μ_0 представляет собой константу, характерную для системы единиц МКС и равную $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м; F_2 — сила, действующая на контур с током J_2 . Так как это выражение учитывает взаимные направления векторов F_2 , $r_{1,2}$ и элементов тока dl_1 и dl_2 , оно сложнее, нежели закон Кулона (1.24). На первый взгляд кажется, что это выражение противоречит третьему закону Ньютона, т. е. закону равенства действия и противодействия. Действительно, подынтегральное выражение в соотношении (7.21) не симметрично по отношению к элементам тока. Однако после интегрирования по замкнутым контурам тока сила взаимодействия оказывается симметричной по отношению к этим контурам.

Наличие такой симметрии можно доказать следующим образом. Используя векторное тождество

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) B - (A \cdot B) C, \quad (7.22)$$

преобразуем выражение для F_2

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint_1 \oint_2 \left\{ \frac{(dl_2 \cdot r_{1,2}) dl_1}{r_{1,2}^3} - \frac{(dl_1 \cdot dl_2) r_{1,2}}{r_{1,2}^3} \right\}. \quad (7.23)$$

Первый член подынтегрального выражения является полным дифференциалом по отношению к dl_2 , так как он равен интегралу по контуру от градиента $\oint \nabla \left(\frac{1}{r_{1,2}} \right) \cdot dl_2$. Поэтому при интегрировании по замкнутому контуру этот член обращается в нуль. Второй же интеграл

$$F_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\oint_1 \oint_2 \frac{(dl_1 \cdot dl_2) r_{1,2}}{r_{1,2}^3} \right] J_1 J_2 \quad (7.24)$$

симметричен относительно обоих контуров.

Таким образом, закон взаимодействия токов в действительности симметричен относительно этих токов и не противоречит третьему закону Ньютона. Возникает вопрос, не будет ли противоречия с третьим законом Ньютона, если элементы с током рассматривать не как части замкнутых цепей, а как заряды, движущиеся со скоростью u . В этом случае первый член в соотношении (7.23) не исчезает, и закон Ньютона, таким образом, не выполняется. Однако такие условия нестационарны, и поэтому возможна передача импульса электромагнитному полю. Действительно, в дальнейшем мы увидим, что электромагнитному полю следует приписать некоторый импульс, поэтому в нестационарных случаях действие, вычисленное без учета поля, может не равняться противодействию. Более детально этот вопрос будет рассмотрен после изучения нестационарных явлений.

§ 7.6. Магнитное поле

В качестве исходного соотношения для рассмотрения магнитных взаимодействий удобно взять выражение (7.21), так как при такой его форме взаимодействие легко представить через поле, создаваемое контуром 1, и силу, с которой поле действует на контур 2.

Наоборот, соотношение (7.24), неявно содержащее косинус угла между элементами тока, непосредственно не приводит к выражению силы магнитного взаимодействия через векторное поле. Поле в соотношении (7.21) можно ввести следующим образом:

$$F_2 = J_2 \oint dl_2 \times B_2, \quad (7.25)$$

где B_2 — напряженность магнитного поля, создаваемого контуром 1 в месте расположения контура 2. Из соотношения (7.21) следует

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \oint_1 \frac{dl_1 \times r_{1,2}}{r^3} = - \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \oint dl_1 \times \nabla_2 \left(\frac{1}{r_{1,2}} \right). \quad (7.26)$$

В системе МКС напряженность магнитного поля B измеряется в веберах на квадратный метр.

Вектор B аналогичен напряженности электростатического поля E . Подобно вектору E он определяет собой силу, действующую на элемент тока. Соотношение (7.26) представляет собой обобщение закона Био и Савара. Для того чтобы получить дифференциальное выражение этого закона, нужно ввести плотность тока

$$F = \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v}, \quad (7.27)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{v}'. \quad (7.28)$$

В соотношении (7.28) считается, что вектор \mathbf{r} направлен от точки интегрирования или точки источника (место расположения \mathbf{j}) к той точке поля, где вычисляется напряженность.

§ 7.7. Магнитный скалярный потенциал

Исследуем вопрос, при каких условиях магнитное поле B может быть выражено через скалярный потенциал

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_m. \quad (7.29)$$

Рассмотрим замкнутую цепь с током J (рис. 7.2). Если поле B

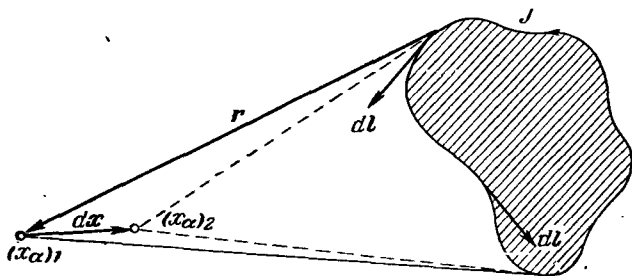


Рис. 7.2. К выводу выражения для магнитного скалярного потенциала.

в точке $(x_a)_1$ можно выразить через скалярный магнитный потенциал φ_m , то при смещении этой точки на $d\mathbf{x}$ из положения $(x_a)_1$ в положение $(x_a)_2$ изменение скалярного магнитного потенциала равно

$$d\varphi_m = -\frac{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (7.30)$$

Вектор \mathbf{B} можно найти с помощью закона Био и Савара (7.26); тогда получим

$$d\varphi_m = -\frac{1}{4\pi} J \oint \frac{d\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} J \oint \frac{\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{l})}{r^3}. \quad (7.31)$$

(При преобразовании была использована возможность циклической перестановки в смешанном векторном произведении.) Это изменение потенциала равно, конечно, его изменению в случае, когда точка поля остается неподвижной, а контур с током смещается на $-\mathbf{dx}$. Последнее обстоятельство уже отмечалось нами при выводе выражения для потенциала двойного слоя (1.59). По аналогии с формулой (1.58) изменение скалярного магнитного потенциала равно

$$d\varphi_m = \frac{J}{4\pi} d\Omega, \quad (7.32)$$

где $d\Omega$ — изменение телесного угла, под которым контур с током виден из точки наблюдения, при смещении контура на $-\mathbf{dx}$.

Магнитный скалярный потенциал обладает теми же математическими свойствами, что и электростатический потенциал дипольного слоя, рассмотренный ранее. Это видно из аналогии между выражениями для статического потенциала дипольного слоя (1.54) и магнитного потенциала контура с током (7.32). Скалярный потенциал контура с током многозначен, или иначе следует считать, что при пресечении некоторой поверхности, ограниченной контуром с током, потенциал терпит разрыв, равный J . Отличие от электростатики состоит в том, что поверхность разрыва можно выбирать теперь произвольным образом. Именно вследствие этого произвола в выборе поверхности разрыва магнитное поле в области, где токов нет, однозначно определяется потенциалом. Однако линейный интеграл от магнитного поля контура с током будет вычислен правильно только в том случае, если путь интегрирования не пересекает этой произвольно выбранной поверхности. Линейный интеграл от магнитной индукции \mathbf{B} по замкнутому контуру, охватывающему ток J , равен как раз величине разрыва потенциала на соответствующей поверхности, т. е.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 J_{\text{полн}}. \quad (7.33)$$

Графическое изображение магнитного скалярного потенциала дано на рис. 1.7; дипольному слою на этом рисунке соответствует произвольно расположенная поверхность разрыва потенциала контура с током.

Формула (7.33) представляет собой интегральное выражение дифференциальной связи, существующей между током и создаваемым им полем. Зависимость между током и индукцией в дифференциальной форме можно получить, преобразовав в (7.33) по теореме Стокса

интеграл по контуру к интегралу по поверхности и выразив $J_{\text{полн}}$ через поверхностный интеграл от плотности тока \mathbf{j} :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.34)$$

Таким образом, \mathbf{B} нельзя выразить через однозначный скалярный потенциал, поэтому использование магнитного скалярного потенциала рационально только при отсутствии распределенных токов. Магнитный скалярный потенциал нельзя использовать для вычисления циркуляции магнитного поля по контуру, охватывающему ток, а также при исследовании полей в области токов.

§ 7.8. Векторный магнитный потенциал

Непосредственно дифференцируя выражение (7.28), можно вычислить дивергенцию и ротор вектора \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{v}' = \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \left(- \int \mathbf{j} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' \right) \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \cdot \left[\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\mathbf{v}' = 0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[\mathbf{j} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\mathbf{v}' = \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla' \cdot (\mathbf{j} \cdot \nabla') \right] \frac{1}{r} d\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Интегрируя второй член этого выражения по частям и, как обычно, опуская интеграл, взятый по поверхности, получим

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \\ &= \mu_0 \int \mathbf{j} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v}' + 0 = \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

что совпадает с (7.34).

До сих пор мы, по существу, считали, что магнитное поле обусловлено токами и что поле токов всецело определяется законом Био и Савара. Однако из равенства дивергенции $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ следует, что \mathbf{B} определяется некоторым векторным потенциалом

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.37)$$

Выразим векторный потенциал через ток, создающий магнитное поле. Для этого преобразуем соотношение (7.28), имея в виду, что оператор ∇ действует только на координаты точки поля, и поэтому его

можно вынести за знак интеграла

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}}{r} d\mathbf{v}'. \quad (7.38)$$

Следовательно, векторный потенциал связан с токами выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} d\mathbf{v}' \quad (7.39)$$

с точностью до произвольной функции, ротор которой равен нулю. Пока мы положим эту функцию равной нулю, однако в дальнейшем нам придется изменить наш выбор. В случае линейного распределения тока векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j} \oint \frac{dl}{r}. \quad (7.40)$$

Таким образом, магнитные поля можно вычислить с помощью соотношения (7.37), определив сначала векторный потенциал \mathbf{A} из соотношения (7.39) или (7.40). Вычисление векторных потенциалов, соответствующих конкретным распределениям токов, мы отложим до тех пор, пока не изучим различные виды токов и их влияние на поле в материальной среде.

§ 7.9. Разновидности токов

Первоначальные экспериментальные наблюдения магнитного взаимодействия токов были проведены с линейными постоянными токами. В случае переменных токов теория более сложна. Прежде чем изложить ее, мы рассмотрим некоторые магнитные явления, происходящие в веществе. Рассмотрим токи в среде по аналогии с тем, как это было ранее сделано для зарядов в материальной среде. Все токи могут быть разбиты на две категории: свободные, соответствующие движению свободных зарядов, и все остальные токи, связанные с самой средой. Такое разделение аналогично разделению зарядов в электростатике на свободные и поляризационные.

Магнитные поля также бывают двух видов: одни создаются свободными токами, другие — всеми токами вообще, каково бы ни было их происхождение. Поле второго вида и есть магнитная индукция \mathbf{B} , которая оказывается равной среднему по времени и пространству значению микроскопических межатомных полей.

Перечислим теперь токи, подлежащие рассмотрению:

1. *Свободные токи \mathbf{j}* , соответствующие движению свободных зарядов.

2. *Поляризационные токи*, которые возникают при изменении поляризации со временем. В дальнейшем будет показано, что они

равны $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

3. *Токи намагничения* j_m — постоянные микроскопические токи, не поддающиеся макроскопическому наблюдению. Из-за неполной компенсации этих токов в атомном масштабе могут возникнуть суммарные поверхностные или объемные токи.

4. *Конвективные токи*, которые возникают при движении среды, содержащей заряды. Эти заряды могут быть как свободными, так и поляризационными.

Конвективные токи будут рассмотрены в другой главе. Сейчас нас будут интересовать только поляризационные токи и токи намагничения.

§ 7.10. Поляризационные токи

Электрический момент поляризованной молекулы p равен

$$p = \int P dv = \int \rho \xi dv, \quad (7.41)$$

где ρ — плотность зарядов в молекуле, ξ — координаты различных ее точек и $P = \rho \xi$. Если плотность зарядов в молекуле изменяется со временем, то

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \xi dv. \quad (7.42)$$

Преобразуем это соотношение, пользуясь законом сохранения зарядов

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int \nabla \cdot (\rho u) \xi dv, \quad (7.43)$$

и затем проинтегрируем по частям. Как всегда, опуская поверхностный интеграл, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \int \rho u dv, \quad (7.44)$$

или, для некоторого объема, занятого средой,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\int \rho u dv}{\int dv} = \overline{\rho u}. \quad (7.45)$$

Следовательно, производная $\frac{\partial P}{\partial t}$ действительно представляет собой усредненную по пространству и времени величину молекулярных токов, возникающих при изменении поляризации.

§ 7.11. Токи намагничения

Эти токи мы определим через магнитный момент единицы объема, или намагниченность

$$M = \frac{1}{2} (\xi \times j_m), \quad (7.46)$$

где ξ — радиус-вектор точки с плотностью тока j_m . Магнитный момент некоторого объема в целом будет равен

$$m = \int M dv = \frac{1}{2} \int (\xi \times j_m) dv. \quad (7.47)$$

Любопытно, что это соотношение аналогично выражению для механического момента, определенного через пространственное распределение скоростей и масс. Оно является чисто кинематическим в том смысле, что не зависит от характера взаимодействия, магнитного или какого-либо иного. В электростатике аналогичным образом определяется электрический момент заданного объема (7.41). Систему, в которой микроскопический ток через поверхность равен нулю, можно описывать с помощью магнитного момента этого объема. В частном случае одного контура с постоянным током магнитный момент m равен произведению тока на площадь S , охватываемую этим контуром:

$$m = JS. \quad (7.48)$$

При этом площадь считается вектором, нормальным плоскости, в которой расположен контур с током. Направление этого вектора зависит от направления тока в контуре и определяется по правилу правого винта. Обычно именно соотношение (7.48) служит для определения магнитного момента контура с током.

Ток j_m можно выразить через намагниченность M , если векторный потенциал (7.39) разложить в ряд так же, как это было сделано со скалярным потенциалом в гл. 1. Если объем, где расположены токи, много меньше, чем расстояние до точки поля, то можно положить $r = R - \xi$ и разложить $1/r$ в ряд согласно равенству (1.46). Так как это разложение справедливо для любого тока, то индекс m мы опустим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} A = \int \frac{j dv}{r} = \frac{1}{R} \int j dv - \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_R \int \xi_\alpha j dv + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_R \int \xi_\alpha \xi_\beta j dv - \dots \quad (7.49) \end{aligned}$$

В случае постоянных токов $\int j dv = 0$, и следовательно, векторный потенциал даже при незначительных размерах распределения токов будет полностью определяться вторым членом разложения.

Так как при $r = R$ $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{R_\alpha}{R^3}$, то в первом приближении

$$\frac{4\pi}{\mu_0} A_\beta = \frac{R_\alpha \int \xi_\alpha j_\beta dv}{R^3}, \quad (7.50)$$

причем интегрирование производится по ξ . Если к подынтегральному выражению прибавить и одновременно вычесть из него $\frac{1}{2} \xi_\beta j_\alpha$, то получим

$$\xi_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} (\xi_\alpha j_\beta + \xi_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2} (\xi_\alpha j_\beta - \xi_\beta j_\alpha).$$

Интеграл от первой части этого выражения в случае постоянного тока обращается в нуль. Это можно показать посредством следующего преобразования:

$$\xi_\alpha \xi_\beta (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0 = \nabla \cdot (\xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{j}) - \mathbf{j} \cdot \nabla (\xi_\alpha \xi_\beta).$$

Применяя к этому соотношению теорему Гаусса, получим

$$0 = \int \mathbf{j} \cdot \nabla (\xi_\alpha \xi_\beta) dv = \int (\xi_\alpha j_\beta + \xi_\beta j_\alpha) dv.$$

Второй член подынтегрального выражения можно представить следующим образом:

$$R_\alpha (\xi_\alpha j_\beta - \xi_\beta j_\alpha) = [(\xi \times \mathbf{j}) \times \mathbf{R}]_\beta,$$

следовательно, в конечном счете получается

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A} = \int \frac{(\xi \times \mathbf{j}) \times \mathbf{R}}{2R^3} dv = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right). \quad (7.51)$$

Таким образом, первый член мультипольного разложения сводится к векторному потенциалу магнитного диполя \mathbf{m} . Если намагниченность равна \mathbf{M} , то векторный потенциал имеет вид

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A} = \int \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{r} dv - \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{r} \right) dv. \quad (7.52)$$

Но так как

$$\int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{r} dv = - \int \frac{\mathbf{M} \times d\mathbf{S}}{r},$$

то второй член в соотношении (7.52) можно обратить в нуль, если поверхность интегрирования выбрать вне области, где имеются токи. Согласно определению векторного потенциала $\nabla \times \mathbf{M}$ можно отождествить с плотностью тока, т. е.

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (7.53)$$

Тем самым эквивалентный ток намагничения мы выразили через намагниченность среды.

Впервые эквивалентность магнитных полей намагниченных веществ и токов была отмечена Ампером. Представление о токах намагничения необходимо для того, чтобы микроскопические токи атомного происхождения ввести в макроскопическую теорию. Согласно соотношению (7.53) в области, где намагниченность однородна, эти токи взаимно уничтожаются; при неоднородной намагниченности имеется суммарная плотность тока \mathbf{j}_m .

Физический смысл соотношения (7.53) можно понять следующим образом. Рассмотрим z -компоненты магнитных моментов двух контуров с током, расположенных в плоскости xu прямоугольной системы координат (рис. 7.3). Если намагниченность неоднородна, то полной компенсации токов на границе двух контуров не произойдет, т. е. суммарный ток будет отличен от нуля.

Как видно из рисунка, магнитный момент каждого контура равен

$$m = M dx dy dz.$$

Рис. 7.3. Контур с токами Ампера в намагниченной среде.

На внутренней границе этих контуров токи направлены в противоположные стороны.

Согласно соотношению (7.48) в первом контуре течет ток

$$J_1 = \frac{M_z dx dy dz}{dx dy}.$$

Ток во втором контуре нетрудно оценить, пользуясь разложением в ряд Тейлора

$$J_2 = \frac{\left[M_z + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right) dx \right] dx dy dz}{dy dx}.$$

Разность между J_1 и J_2 даст ток в направлении оси y вдоль общей границы обоих контуров:

$$J_y = - \frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz.$$

Как нетрудно видеть, эта разность представляет собой одну из шести компонент ротора, т. е. в общем случае

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M},$$

что совпадает с (7.53).

Если намагниченность испытывает разрыв на какой-либо поверхности, то на ней возникает поверхностный ток, равный скачку каса-

тельной компоненты намагничности. Это следует из соотношения (7.53), если его применить к контуру с током, одна половина которого лежит по одну сторону поверхности разрыва, а вторая — по другую.

§ 7.12. Ток смещения в вакууме

В покоящейся среде полный ток равен сумме свободных токов, токов поляризации и намагничения

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}. \quad (7.54)$$

Для того чтобы сохранялся заряд, полный ток должен удовлетворять уравнению непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Дивергенция полного тока равна

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{полн}} = \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{своб}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}), \quad (7.55)$$

так что уравнение непрерывности для полного тока принимает следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{своб}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{полн}} = 0. \quad (7.56)$$

В силу уравнения Максвелла

$$\rho_{\text{полн}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

имеем

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{полн}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7.57)$$

и следовательно,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{своб}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.58)$$

или, используя соотношение $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, получаем

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) = 0. \quad (7.59)$$

Дивергенция полного тока (7.57) не равна нулю, и следовательно, он не соленоидален. В то же время, если к полному току прибавить величину $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, то получится вектор

$$\mathbf{c} = \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\text{полн}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7.60)$$

поле которого соленоидально. Необходимость этого дополнительного члена, для того чтобы ток стал соленоидален, была установлена

Максвеллом. Этот член $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, носящий название «тока смещения», не является током в обычном смысле слова, т. е. перемещением зарядов. Однако в дальнейшем мы увидим, что магнитные явления могут быть описаны только при условии соленоидальности тока. Поэтому ток смещения должен быть введен в формулы для магнитного взаимодействия в случае непостоянных токов.

Смысл соленоидальности тока \mathcal{C} состоит в том, что в тех точках, где полный ток терпит разрыв и происходит накопление зарядов, ток \mathcal{C} непрерывен и равен скорости изменения электрического поля, создаваемого накапливаемыми зарядами на границах разрыва. Например, цепь, состоящая из батареи, заряжающей конденсатор, является замкнутой для тока \mathcal{C} .

Задачи

1. Вычислите изменение сопротивления проволоки диаметром D , обусловленное наличием внутренней щели диаметром d (рис. 7.4), и выразите его через эквивалентное удлинение проволоки. Поле можно считать двумерным и $D - d \ll D$.

2. Центральный проводник коаксиального кабеля радиуса a окружен оболочкой с внешним радиусом b и проводимостью σ_1 . Между этой оболочкой и внешним проводником радиуса c имеется вторая оболочка с проводимостью σ_2 . Вычислите сопротивление между проводниками кабеля длиной l м.

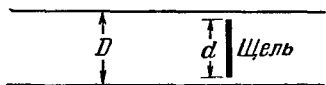


Рис. 7.4.

3. В некоторой точке p проводящей плоскости в нее втекает электрический ток и вытекает из нее в бесконечности. В стороне от точки p в проводящей плоскости имеется круглое отверстие. Покажите, что разность потенциалов между любыми двумя точками на краю отверстия вдвое больше разности потенциалов между этими точками в том случае, если отверстие отсутствует.

4. Два больших сферических электрода радиуса a погружены в проводящую среду на глубину $d > a$ от поверхности. Расстояние между электродами равно b . Определите сопротивление между электродами, если проводимость среды равна σ .

5. Пространство между двумя сферическими концентрическими электродами заполнено веществом, проводимостью которого обратно пропорциональна расстоянию от центра системы. Определите распределение потенциала в пространстве между электродами, если между ними поддерживается ток J , а потенциал внешней сферы равен φ_0 .

6. На поверхности круглого диска радиуса a от центра до края уложено N витков спирали из тонкой проволоки. Определите магнитный дипольный момент такой спирали, если через нее течет ток J .

7. По круглому контуру, положение которого в пространстве задается уравнениями $z = b$, $x^2 + y^2 = a^2$, течет ток J . Покажите, что при $r < R = \sqrt{a^2 + b^2}$ магнитный скалярный потенциал пропорционален следующему выражению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left[P_{n+1} \left(\frac{b}{R} \right) - P_{n-1} \left(\frac{b}{R} \right) \right] \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abraham and R. Becker, The Classical Theory of Electricity and Magnetism. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, Электричество и магнетизм, т. I).

Теория постоянного тока изложена в гл. IV в основном так же, как и выше. Применениям теории уделено мало внимания.

2. G. P. Harnwell, Principles of Electricity and Electromagnetism. Подробно рассмотрена теория линейных цепей.

3. W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity. (Русский перевод: В. Смайт, Электростатика и электродинамика.)

Книга содержит много полезных и интересных приложений.

4. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

Постоянный ток рассматривается параллельно с электростатическим полем.

5. J. N. Jeans, Electricity and Magnetism.

Порядок изложения столь отличен от нашего, что в теоретических вопросах книга вряд ли полезна, однако она содержит интересные приложения

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества.

МАГНИТНЫЕ СРЕДЫ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор мы рассматривали магнитные поля в вакууме и те токи, которые следует учитывать при помещении вещества в магнитное поле. В общем случае ток \mathbf{j} в соотношении (7.34), связывающем магнитное поле с током, нужно заменить полным током (7.55), включающим токи намагничения и поляризации. Однако если поляризация изменяется со временем, то полный ток оказывается несоленоидальным. Есть две возможности обобщения выражения $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$: либо сделать ток соленоидальным, либо изменить само это выражение. Выбор между этими двумя возможностями был сделан Максвеллом: Максвелл оставил неизменными соотношения между магнитным полем и током, т. е. соотношения (7.26), (7.28) и (7.38), и в качестве полной плотности тока ввел соленоидальную величину \mathbf{c} (7.60), включающую ток смещения в вакууме. Правильность этого предположения была полностью подтверждена дальнейшим развитием теории.

§ 8.1. Напряженность магнитного поля

Если в качестве полного тока использовать величину \mathbf{c} , то векторное поле \mathbf{B} определяется следующими уравнениями:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{c} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (8.2)$$

При рассмотрении поляризации диэлектриков в гл. 2 с математической точки зрения оказалось удобным отделить поле, создаваемое свободными зарядами, от полного поля, обусловленного как свободными зарядами, так и поляризационными. Аналогичным образом из полного магнитного поля удобно выделить ту его часть, которая создается атомными токами намагничения. Запишем уравнение (8.2) в виде

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (8.3)$$

и введем новое поле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (8.4)$$

В результате получаем соотношение

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (8.5)$$

В системе МКС вектор \mathbf{H} — напряженность магнитного поля — измеряется в ампер-витках на метр. Соотношение (8.5) показывает, что плотность циркуляции вектора \mathbf{H} равна сумме плотности тока свободных зарядов и плотности полного тока смещения. В последний входят как поляризационные токи $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$, так и вакуумный ток смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. В стационарных или квазистационарных условиях, когда ток смещения пренебрежимо мал по сравнению с током свободных зарядов,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{своб}} \quad (8.6)$$

или в интегральной форме

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{своб}}. \quad (8.7)$$

Заметим, что в этом случае векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} аналогичны соответственно векторам \mathbf{E} и \mathbf{D} в диэлектрических явлениях. Это легко видеть, сравнивая приведенные выше соотношения с формулами гл. 2:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{полн}}}{\epsilon_0},$$

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{своб}}.$$

§ 8.2. Источники магнитного поля

Рассмотрение диэлектриков в гл. 2 было ограничено линейным случаем, т. е. поляризация в веществах предполагалась пропорциональной приложенному электрическому полю. Однако в случае ферромагнитных веществ нелинейное поведение более обычно. Рассмотрим поэтому некоторые свойства магнитных полей, обусловленные тем, что намагниченность \mathbf{M}_0 нелинейно, а часто даже и неоднозначно зависит от внешнего поля. Предположим сначала, что \mathbf{M} зависит только от среды и не зависит от внешнего магнитного поля, что в предельном случае имеет место в постоянных магнитах. Как видно из соотношения (8.6), поле вектора \mathbf{H} обладает потенциалом и поэтому в математическом отношении ведет себя подобно электро-

статическому полю; в то же время поле вектора \mathbf{B} остается соленоидальным:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}) \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Однако статическое магнитное поле \mathbf{H} создается источниками, плотность которых

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_m \quad (8.9)$$

равна дивергенции намагниченности, взятой с обратным знаком. Единица плотности магнитных зарядов обычно называется единичным магнитным полюсом. Магнитные полюса и заряды вводятся чисто формально. Благодаря им математическое описание магнитного поля становится подобным описанию электрического поля. Так как магнитное поле постоянных магнитов безвихревое, его можно выразить через магнитный скалярный потенциал φ ; точно так же, как \mathbf{E} выражается через электростатический потенциал φ . Положив

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m, \quad (8.10)$$

потенциал можно выразить через объемную и поверхностную плотности магнитных зарядов

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \left[\int \frac{\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{r} - \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{r} dv \right]. \quad (8.11)$$

Поле постоянного магнита с заданной намагниченностью выражается также и через векторный потенциал \mathbf{A} , который в свою очередь связан с поверхностными и объемными токами. Соотношение (7.52) приобретает в этом случае такой вид:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{r} dv - \int \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS \right]. \quad (8.12)$$

Поверхностью интегрирования в этом соотношении служит поверхность магнита. Плотность поверхностных токов равна $-\mathbf{n} \times \mathbf{M}$, где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный поверхности магнита. Из этого соотношения с помощью формулы (7.37) легко получить выражение для поля магнитной индукции.

В случае однородно намагниченной среды все внутренние токи взаимно компенсируются и имеются только поверхностные токи. Так, поле цилиндрического магнита, намагниченного вдоль собственной оси, эквивалентно полю соленоида, форма которого совпадает с цилиндрической поверхностью магнита и линии тока лежат в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Ясно, что в этом случае существенный вклад в скалярный потенциал (8.11) будут давать лишь концы цилиндра. В случае постоянных магнитов можно считать, что поле \mathbf{H} создается двумя слоями эквивалентных магнитных заря-

дов, расположенных на плоских поверхностях цилиндра, аналогично электростатическому полю, создаваемому подобно расположенными электрическими зарядами. С другой стороны, можно полагать, что поле \mathbf{B} создается тском в эквивалентном соленоиде, так же как обычное поле в вакууме создается постоянным током. \mathbf{B}/μ_0 и \mathbf{H} равны вне области, где \mathbf{M} отлично от нуля, однако внутри магнита они отличаются как раз на величину намагниченности \mathbf{M} . Заметим, что согласно рис. 8.1 внутри магнита \mathbf{B} и \mathbf{H} направлены противоположно, поскольку циркуляция \mathbf{H} по любому контуру равна нулю.

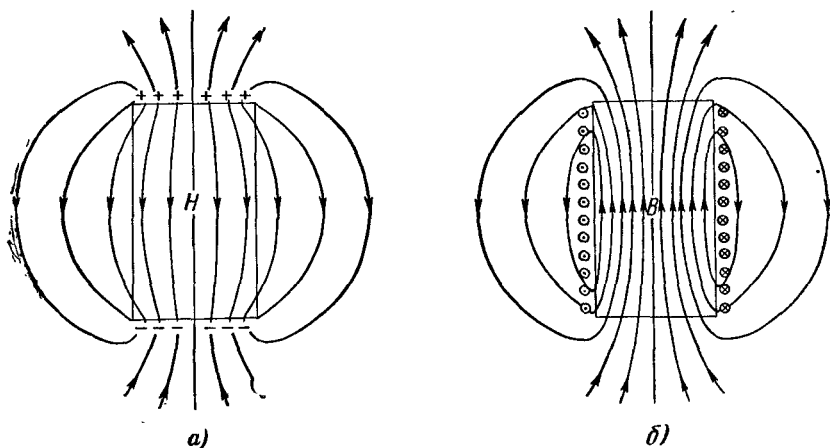


Рис. 8.1. Постоянный магнит с однородной намагниченностью:

а) эквивалентные магнитные заряды — источники поля \mathbf{H} ; б) эквивалентный соленоид, создающий поле \mathbf{B} .

Соотношения (8.11) и (8.12) выражают скалярный и векторный потенциалы через распределение эквивалентных магнитных зарядов или токов. Кроме того, их можно представить в виде суммы потенциалов отдельных магнитных моментов. Согласно соотношению (7.51) имеем

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (8.13)$$

Аналогично скалярный потенциал может быть записан в виде, подобном выражению (1.61):

$$\varphi_m = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (8.14)$$

Эквивалентность соотношений (8.13) и (8.14) соотношениям (8.11) и (8.12) легко доказывается с помощью интегрирования по частям.

Поля, вычисленные посредством той или иной пары уравнений, должны быть, конечно, одинаковыми.

Используя векторные тождества, можно показать, что поле, создаваемое в вакууме магнитным диполем с моментом $m = \int M dv'$, равно

$$B = \nabla \times A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \nabla \times \left[m \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\} = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[(m \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - m \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right]. \quad (8.15)$$

Последний член в этом соотношении равен нулю везде, за исключением точки $r = 0$. Из формулы (8.14) следует

$$H = -\nabla \varphi_m = \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla \left[m \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\} = \frac{(m \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right)}{4\pi}, \quad (8.16)$$

т. е. если не считать множителя μ_0 , то поля отличаются только в точке $r = 0$.

Таким образом, мы видим, что постоянные магниты могут быть описаны как с помощью «эквивалентных токов», так и с помощью «эквивалентных магнитных зарядов». Так как в целом описание магнитных полей основано на предположении, что они создаются движущимися зарядами, мы полагаем, что интерпретация с помощью циркуляционных атомных токов более глубока, чем концепция магнитных зарядов¹⁾. Следовательно, поле B , создаваемое токами, с физической точки зрения имеет более глубокий смысл, нежели поле H , которое создается магнитными зарядами. Однако описание с помощью поля H более привлекательно с практической точки зрения, так как при этом задачи с постоянными магнитами, или намагниченными железными полюсами, намагниченность которых можно определить независимым способом, сводятся к задачам электростатики.

Вопрос о том, какое понятие более фундаментально, можно поставить несколько иначе. Рассмотрим такую задачу. Заряд q движется со скоростью u в намагниченной среде. Если сила, действующая на заряд, имеет вид

$$F = q(u \times X),$$

то что входит в это выражение в качестве X ? B , H или, может быть, комбинация этих величин? Экспериментально этот вопрос изучил

¹⁾ Никаких принципиальных причин отсутствия магнитных зарядов нет; мы не рассматриваем поля таких зарядов просто потому, что нет никаких экспериментальных указаний на их существование. Если бы отдельные магнитные полюса существовали, то все соотношения, выведенные выше, были бы для них пригодны. В квантовой механике показано, что «элементарные» магнитные заряды, если бы они существовали, были бы связаны с элементарным электрическим зарядом постоянным множителем.

Разетти¹⁾. Он измерял отклонение космических лучей в намагниченном железе. Теоретически вопрос был исследован Ваниером²⁾, который детально рассмотрел движение заряженных частиц в намагниченной среде. Результаты этих исследований заключаются в следующем: если движение частицы полностью случайно по отношению к заряженной среде, т. е. в первом приближении наличие среды не влияет на движение частицы, то действующим полем в приведенном выражении для силы нужно считать \mathbf{B} . С другой стороны, если частица движется медленно и среда оказывает значительное воздействие на ее движение, то вероятность пройти через атомный контур с током уменьшается и отдельный атомный контур можно считать непроницаемым диполем. В этом случае процесс усреднения приводит к отклонению, соответствующему полю \mathbf{H} в выражении для силы, действующей на заряд. Действительно, экспериментальные результаты Разетти показывают, что отклонение очень быстрых частиц примерно согласуется с вычисленным, если в выражении для силы использовать \mathbf{B} . В этом смысле более точный ответ можно дать в пределе очень больших скоростей: $X_{u \rightarrow c} = \mathbf{B}$.

Дальнейшее подтверждение фундаментальной роли поля \mathbf{B} было получено в опытах по отражению и дифракции нейтронов в магнитных материалах, проведенных Юзом и другими³⁾. Было показано, что поле, влияющее на движение нейтронов, равно \mathbf{B} , а не \mathbf{H} , т. е. взаимодействие нейтронов и магнитных доменов происходит так, как если бы они были токами Ампера, а не диполями, непроницаемыми друг для друга.

§ 8.3. Магнетики: магнитная восприимчивость и граничные условия

В предыдущем разделе мы считали, что намагниченность \mathbf{M} зависит только от координат, как в постоянных магнитах. Вернемся теперь к случаю идеально проницаемой среды, т. е. среды, в которой нет свободных магнитных моментов, а величина наводимых магнитных моментов пропорциональна внешнему полю. Тогда уравнения поля имеют такой вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.1)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = J_{\text{своб}}. \quad (8.7)$$

¹⁾ F. Rasetti, Phys. Rev. 66, 1 (1944).

²⁾ G. H. Wanier, Phys. Rev. 72, 304 (1947).

³⁾ Описание и анализ этих опытов даны в книге D. J. Hughes, Pile Neutron Research, Addison Wesley, 1954. (Русский перевод: Юз, Нейтронные исследования на реакторах, ИЛ, 1957, см. раздел 11.4 и 10.6.)

Если положить $M = \chi_m H$, то получается соотношение, аналогичное соотношению (2.9) в электростатике,

$$B = \mu_0 (\chi_m + 1) H = k_m \mu_0 H = \mu H, \quad (8.17)$$

где χ_m — магнитная восприимчивость, $k_m = \chi_m + 1$ — относительная проницаемость среды и μ — абсолютная проницаемость.

Вывод граничных условий для B и H полностью аналогичен выводу граничных условий для E и D в гл. 2. На границе раздела между средами 1 и 2 нормальные компоненты полей связаны соотношением

$$n_1 \cdot (B_2 - B_1) = n_1 \cdot (\mu_2 H_2 - \mu_1 H_1) = 0. \quad (8.18)$$

Аналогично тангенциальные компоненты подчиняются соотношению

$$n_1 \times (H_2 - H_1) = n_1 \times (\nabla \varphi_{m_1} - \nabla \varphi_{m_2}) = n_1 \times \left(\frac{B_2}{\mu_2} - \frac{B_1}{\mu_1} \right) = K, \quad (8.19)$$

где K — плотность поверхностных токов на границе раздела между двумя средами. Эти соотношения аналогичны электростатическим соотношениям (2.14) и (2.18), однако имеется и некоторая разница между ними. Нормальная компонента B строго непрерывна на границе, в то время как нормальная компонента D непрерывна только, если на границе раздела нет поверхностных зарядов. Тангенциальная компонента E всегда непрерывна, а для B эта непрерывность имеет место только, если нет поверхностных токов. Эти различия обусловлены наличием свободных электрических зарядов и отсутствием истинных магнитных зарядов.

§ 8.4. Магнитные цепи

Легко заметить, что уравнения (8.1), (8.17) и (8.7) математически тождественны уравнениям постоянного тока в непрерывной среде при наличии неконсервативной электродвижущей силы

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (7.2)$$

$$j = \sigma E, \quad (7.3)$$

$$\oint E \cdot dl = \mathcal{E}. \quad (7.5)$$

Из этих соотношений выводится выражение для «сопротивления» системы последовательных проводников

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \sum_i \frac{l_i}{\sigma S_i}. \quad (7.17)$$

Эта аналогия позволяет ввести представление о магнитной цепи. В этом случае решения задач о распределении магнитного поля пол-

ностью определяются выражением для магнитного потока Φ_m :

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{J}{R_m}, \quad (8.20)$$

где величина

$$R_m = \sum_i \frac{l_i}{\mu S_i} \quad (8.21)$$

— магнитное «сопротивление» среды (*ампер-вебер*). Такое решение основано только на подобии дифференциальных уравнений магнитного поля в среде уравнениям постоянного тока. Поэтому оно будет справедливо при таких же граничных условиях, как для постоянного тока. Однако в общем случае эти граничные условия различны. Фактически это решение никогда не бывает совершенно точным, так как проводимость свободного пространства равна нулю, а проницаемость — единице. Оно применимо только в случае больших по сравнению с единицей проницаемостей, или если объем с полем, где проницаемость $k_m \simeq 1$, мал по сравнению с объемом, где проницаемость много больше. Тем не менее уравнения (8.20) и (8.21) составляют основу технического проектирования магнитов и электрических машин, так как они дают возможность приближенных расчетов в тех случаях, когда прямое решение краевой задачи практически невозможно.

§ 8.5. Решение краевых задач с помощью магнитного скалярного потенциала

В общем случае краевые задачи при наличии магнитных сред могут решаться как с помощью скалярных, так и векторных магнитных потенциалов. Однако если истинные токи, создающие внешнее поле, лежат вне интересующего нас объема, то задачи лучше всего решать с помощью скалярных потенциалов. В этом случае граничные условия (8.18) и (8.19) выражаются через скалярный потенциал и оказываются полностью аналогичными электростатическим граничным условиям, только диэлектрическую постоянную заменяет магнитная проницаемость.

Так, например, задачи о магнитных экранах могут быть рассмотрены методами электростатики. Единственным осложняющим обстоятельством является зависимость проницаемости μ от внешнего поля, что особенно важно при больших полях, действующих в магнитной среде. Если зависимость проницаемости от величины поля известна, то в случае сильных полей или насыщения можно применить метод последовательных приближений. Сначала находится решение в предположении, что проницаемость постоянна. Это решение используется для определения проницаемости в разных точках. Затем

задача решается вновь с учетом поправок на ρ . Этот метод дает точное решение, если поле в среде оказывается однородным. Так обстоит дело, например, в случае ферромагнитного эллипсоида, помещенного во внешнее поле. Зависимость проницаемости от внешнего поля можно получить, измеряя крутящий момент, действующий на эллипсоид, подвешенный в магнитном поле. Описание поведения магнитных материалов в сильных полях, когда намагниченность существенно неоднородна, чисто аналитическими методами, по существу, невозможно.

§ 8.6. Теорема о единственности векторного потенциала

В некоторых случаях токи намагничивания трудно заменить эквивалентными дипольными поверхностями. Тогда необходимо пользоваться векторным потенциалом. В § 1.1 мы видели, что векторный потенциал единственен, если поле занимает все пространство, а источники расположены в ограниченной области. Для решения практических задач важно также быть уверенным в единственности векторного потенциала при наличии в поле определенных границ. Доказательство очень похоже на доказательство единственности скалярного потенциала, данное в гл. 3. В ходе доказательства нам придется использовать теорему Грина в векторной форме. Эта теорема заключается в следующем. Пусть U и W — произвольные векторные функции. Применим к вектору

$$V = U \times (\nabla \times W)$$

теорему Гаусса $\int \nabla \cdot V \, dv = \int V \cdot dS$. Тогда получим

$$\int [(\nabla \times W) \cdot (\nabla \times U) - U \cdot \nabla \times (\nabla \times W)] \, dv = \int U \times (\nabla \times W) \cdot dS. \quad (8.22)$$

Это и есть теорема Грина. Рассмотрим теперь область пространства, ограниченную поверхностью S , на которой задан векторный потенциал. Объем этой области равен v . Будем считать, что токи внутри нее отсутствуют. Для этого, возможно, придется ввести подповерхности, которые исключают области с поверхностными токами. Положим теперь $U = W = A$ во всех точках объема v и, учитывая, что $j_{\text{полн}} = 0$, получим

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = 0.$$

Тогда соотношение (8.22) приводится к виду

$$\int (\nabla \times A)^2 \, dv = \int (A \times B) \cdot dS = \int (A \times B) \cdot n \, dS, \quad (8.23)$$

который можно преобразовать к

$$\int (\nabla \times \mathbf{A})^2 dv = \int (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{A} dS = \int \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{A} dS, \quad (8.24)$$

причем \mathbf{B}_t — тангенциальная компонента вектора \mathbf{B} , параллельная поверхности и перпендикулярная к вектору \mathbf{S} . Предположим, что имеются два решения одной и той же краевой задачи, т. е. тангенциальные компоненты вектора \mathbf{B} этих двух решений совпадают на границе или то же самое происходит с тангенциальными компонентами вектора \mathbf{A} . Пусть вектор \mathbf{A} в соотношениях (8.23) и (8.24) равен разности этих решений. Тогда правая часть соотношения (8.24) обратится в нуль, так как она относится только к границе, где решения совпадают. С другой стороны, левая часть этого соотношения не может быть отрицательной. Следовательно, подынтегральное выражение равно нулю. Таким образом, выражение $\nabla \times \mathbf{A}$, где \mathbf{A} — разность двух векторных потенциалов, во всем объеме v равно нулю, т. е. поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ в общем случае единственно. Так как единственность имеет место лишь для ротора \mathbf{A} , то само поле \mathbf{A} определяется с точностью до произвольного безвихревого вектора.

§ 8.7. Решение задач с помощью векторного потенциала

Мы доказали, что тангенциальные составляющие вектора магнитной индукции или векторного потенциала на поверхности S однозначно определяют магнитное поле внутри этой поверхности. Аналогичное положение имеет место в электростатике, где скалярный потенциал или нормальная компонента поля, заданные на этой поверхности, определяют поле внутри поверхности. Эту аналогию можно продолжить и дальше, если потенциал в объеме v выразить через токи в этом объеме и через значения поля на границе. Граничные значения поля выберем так, чтобы вне поверхности S поле отсутствовало. Поверхностный интеграл в таком случае будет соответствовать полному решению однородного дифференциального уравнения, а объемный интеграл от токов — частному решению неоднородного уравнения. Мы не будем входить в детали этого расчета¹⁾. Частное решение равно общему решению, когда границы предполагаются расположенными в бесконечности, т. е. когда известны все источники поля. Это общее решение определяется соотношением (1.5), или, более конкретно, соотношением (7.39).

Выражение для векторного потенциала можно непосредственно вывести из уравнений поля, воспользовавшись векторным преобразо-

¹⁾ См., например, Дж. Стрэттон, Теория электромагнетизма, стр. 220.

ванием двойного ротора:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (8.25)$$

Применять операцию ∇^2 к вектору следует с осторожностью. В декартовой системе координат $\nabla^2 \mathbf{A}$ означает вектор, α -компонента которого равна $\nabla^2 A_\alpha$. В других системах координат этот вектор следует вычислять с помощью тождества

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (8.26)$$

Выбор $\nabla \cdot \mathbf{A}$ пока остается произвольным, так как потенциал определен только равенством $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Удобно принять

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (8.27)$$

Никаких новых физических предположений при этом не делается. Позже, при изучении переменных токов мы увидим, что вместо соотношения (8.27) нужно употреблять несколько более сложное выражение, во-первых, для того, чтобы сохранить симметрию между электрическими и магнитными полями; во-вторых, чтобы последующие уравнения были релятивистски ковариантны. Однако в случае постоянных токов между этими двумя выражениями нет противоречия.

При упрощающем предположении (8.27) дифференциальное уравнение для \mathbf{A} сводится к следующему:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (8.28)$$

Это — векторная форма уравнения Пуассона, частное решение которого равно

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} d\tau'. \quad (8.29)$$

Это частное решение становится общим, если интегрирование распространить на все токи, создающие поле. Соотношение (8.29) тождественно (7.39); предположение $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ соответствует равенству нулю произвольной функции, возникающей при интегрировании уравнения (7.38).

Решение уравнения (8.28) при произвольных граничных условиях обычно гораздо сложнее, чем решение соответствующего скалярного потенциального уравнения. Причина этого состоит в том, что в силу соотношения (8.27) компоненты \mathbf{A} не независимы. Таким образом, нельзя ожидать, что каждую компоненту \mathbf{A} в отдельности удастся разложить по ортогональным функциям, коэффициенты при которых определяются из достаточного количества граничных условий. Можно рассуждать и иначе. Каждая «гармоника» отдельного скалярного решения, зависящего от одной координаты, имеет две постоянные интегрирования, а каждый член ряда имеет, таким образом, шесть

таких постоянных. Для вектора в целом должно было бы получиться 18 произвольных постоянных, однако в силу условия $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ их всего 12.

По этим причинам мы постараемся выразить \mathbf{A} через две скалярные потенциальные функции, скажем, U и V , так, чтобы равенство $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ выполнялось тождественно. Исследуем решение вида

$$\mathbf{A} = \nabla V + \nabla \times (\mathbf{a}_1 U), \quad (8.30)$$

которое, очевидно, удовлетворяет условию $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ и где \mathbf{a}_1 — вектор некоторой (вообще говоря, криволинейной) системы координат, выбор которой подчинен определенным условиям. Выражение $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ не зависит от V , и поэтому поле всецело определяется U . Этого следовало ожидать, так как в области, где нет источников поля, нет и разницы между полем, полученным от скалярного или векторного потенциала. В общем случае V необходимо лишь для удовлетворения граничных условий по \mathbf{A} .

Определенная через (8.30) функция \mathbf{A} удовлетворяет условию $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, если только $\nabla \times \mathbf{a}_1 = 0$. В тензорных обозначениях это означает, что матрица $\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha}$ диагональна и что ее члены

равны, т. е. $\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} = \text{const } \delta_{\alpha\beta}$. Это условие удовлетворяется, например, для единичных векторов $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1$; \mathbf{y}_1 или \mathbf{z}_1 , а также для вектора \mathbf{r} сферической системы координат.

Для доказательства заметим, что

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \times (\mathbf{a} \times \nabla U)$$

или в тензорных обозначениях

$$-\nabla \times \mathbf{A}|_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[a_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \right] - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[a_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right].$$

Это выражение легко приводится к виду

$$-\nabla \times \mathbf{A}|_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[a_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \right] + 2 \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\beta},$$

используя условия $\nabla^2 U = 0$ и $\nabla \times \mathbf{a} = 0$. Первый член чисто градиентный. Остальные члены также будут чисто градиентными при условии $\nabla \times \mathbf{a} = 0$. Следовательно, и $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

Условия для \mathbf{A} на границе раздела двух сред выводятся из граничных условий для \mathbf{B} . Сохранение магнитного потока при переходе через границу требует сохранения линейного интеграла от \mathbf{A} по произвольной кривой на поверхности раздела. Таким образом, на границе между средами 1 и 2

$$\mathbf{A}_{r_1} = \mathbf{A}_{r_2},$$

где индекс t обозначает касательную компоненту. Если на поверхности раздела нет истинных токов, то сохраняется касательная составляющая H ; если при этом проницаемости не зависят от поля, то это эквивалентно равенству

$$\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \mathbf{A})_{t_1} = \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \mathbf{A})_{t_2}.$$

Оба эти соотношения имеют по две компоненты и, следовательно, граничных условий всего четыре. Заметим, что для скалярного потенциала φ имеется всего два граничных условия (2.15) и (2.19). Таким образом, мы имеем достаточное количество условий, чтобы связать функции V и U на границе.

Практически, если границ нет, решение удобно искать в виде (8.30) при $V=0$. Тогда при данном выборе \mathbf{a} разложение \mathbf{A} по ортогональным функциям может быть сделано с тем же набором функций, что и в скалярном случае.

Выражение \mathbf{A} через скалярные решения уравнения Лапласа позволяет также обойти дополнительные трудности, возникающие из-за того, что только в прямоугольных координатах оператор Лапласа, действующий на вектор \mathbf{A} , равен сумме таких операторов, действующих на отдельные компоненты вектора \mathbf{A} . С этой проблемой мы еще встретимся при решении волнового векторного уравнения.

§ 8.8. Векторный потенциал в двумерном случае

В двумерных задачах, т. е. когда поля не зависят от координаты z , применение векторного потенциала весьма просто. Если силовые линии электрического поля параллельны оси z , то из формулы (8.29) следует, что векторный потенциал имеет только z -компоненту. В этом случае магнитное поле выражается через потенциал следующим образом:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (8.31)$$

а уравнение Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 A_z = 0. \quad (8.32)$$

Так как A_z не зависит от z , то очевидно, что дивергенция \mathbf{A} равна нулю. Уравнение (8.32) представляет собой двумерное уравнение Лапласа, и поэтому векторный потенциал можно считать действительной или мнимой частью комплексного потенциала. С математической точки зрения соотношения (8.31) аналогичны соотношениям, связывающим функцию потока с соответствующим электростатическим полем. Так как каждая компонента векторного потенциала имеет такой же вид, как электростатический потенциал Кулона, то

векторный потенциал линейного двумерного тока равен

$$A_z = \frac{\mu_0}{2\pi} J \ln \frac{r}{r_1}, \quad (8.33)$$

и соответствующий комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\psi = \frac{i\mu_0}{2\pi} J \ln \frac{x + iy}{x_1 + iy_1}. \quad (8.34)$$

Мнимая часть W — функция потока ψ и есть векторный потенциал. Все методы, развитые в электростатике для определения функции потока, могут применяться также и для решения магнитных двумерных краевых задач.

Для того чтобы из известного решения простой задачи, например задачи о токе, расположенном вблизи магнитной среды с прямолинейными границами, получить решения более сложных задач, можно использовать конформные отображения, такие как преобразования Шварца. Задача о токе, расположенном на данном расстоянии от поверхности полубесконечной магнитной среды, решается с помощью метода изображений (изображение тока имеет теперь ту же величину и знак, что и ток в проводнике). Из этого простого решения с помощью соответствующего преобразования Шварца можно получить решения различных задач, в которых фигурируют щели или зазоры в магнитной среде, находящейся в поле намагничивающих обмоток.

Метод двумерных гармоник также весьма полезен в задачах с цилиндрами из магнитного материала. Рассмотрим, например, проводящий и пронизываемый магнитный цилиндр радиуса a , в котором течет постоянный ток J . Цилиндр находится в поперечном внешнем магнитном поле B_0 . Как обычно, разделим плоскость на две области. При $r > a$ векторный потенциал A_z равен такому решению уравнения Лапласа, которое при больших r дает как постоянное поле, так и поле тока J . При $r < a$ мы должны решать неоднородное уравнение

$$\nabla^2 A_z = -\mu_i j. \quad (8.35)$$

где $j = J/\pi a^2$, а μ_i — магнитная проницаемость цилиндра. Частное решение уравнения (8.35) равно $-\mu_i j r^2/4$, а так как степень при r может быть только положительной, чтобы начало координат было регулярной точкой, то общее решение имеет вид

$$A_z = -\frac{\mu_i j r^2}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n. \quad (8.36)$$

Решение вне цилиндра легко найти, если учесть, что постоянное поле, направленное вдоль x , описывается векторным потенциалом $B_0 y = B_0 r \sin \varphi$, а поле тока равно полю линейного тока, располо-

женного в начале координат. Таким образом, решение имеет следующий вид:

$$A_z = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln \frac{a}{r} + B_0 r \sin \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^{-n}. \quad (8.37)$$

Непрерывность нормальной составляющей B на границе $r = a$ эквивалентна непрерывности A_z . Непрерывность касательной составляющей H приводит при $r = a$ к условию

$$\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial}{\partial r} (A_{z<}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} (A_{z>}). \quad (8.38)$$

Эти два условия позволяют найти коэффициенты в разложениях. В конечном счете решения принимают такой вид:

$$\begin{aligned} A_{z<} &= -\frac{\mu_i j r^2}{4} + \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_0} B_0 r \sin \varphi, \\ A_{z>} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{r} \right) + \left(1 + \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_i + \mu_0} \cdot \frac{a^2}{r^2} \right) B_0 r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Теперь легко рассчитать B_r и B . Если потенциал внутри цилиндра записать в прямоугольных координатах

$$A_{z<} = -\frac{\mu_i j (x^2 + y^2)}{4} + \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_0} B_0 y, \quad (8.40)$$

то легко видеть, что намагниченность, создаваемая внешним полем, однородна и что при больших проницаемостях поле индукции, без поля электрического тока, вдвое больше приложенного.

§ 8.9. Векторный потенциал в цилиндрических координатах

В трехмерном случае практически важны задачи с цилиндрической симметрией, например, когда токи текут только по коаксиальным окружностям. В этом случае потенциал A имеет единственную составляющую A_φ , которая не зависит от φ и в цилиндрических координатах удовлетворяет уравнению

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_\varphi = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu j_\varphi. \quad (8.41)$$

Как показано в § 5.8, решения этого уравнения имеют вид

$$A_\varphi = \cos(kz - \alpha_k) [A(k) I_1(kr) + B(k) K_1(kr)], \quad (8.42)$$

или

$$A_\varphi = e^{\mp kz} [A^\pm(k) J_1(kr) + B^\pm(k) N_1(kr)], \quad (8.43)$$

в зависимости от того, действительный или мнимый параметр разделения k . В случае тока, текущего по контуру или в соленоиде, решение можно записать в виде (8.42) как в области 1, при $r < r_0$, так и в области 2, при $r > r_0$. Коэффициенты определяются из граничных условий на границе между областями 1 и 2, т. е. при $r = r_0$:

$$A_\varphi^{(1)} = A_\varphi^{(2)}, \quad (8.44)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi^{(1)}) - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi^{(2)}) = j_{s\varphi}. \quad (8.45)$$

$j_{s\varphi}$ представляет собой поверхностную плотность тока на границе раздела. Соотношения (8.44) и (8.45) вытекают соответственно из уравнений $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ (z -компонента \mathbf{H} разрывна при $r = r_0$).

Если же все контуры с током лежат в одной плоскости, например в плоскости $z = 0$, то решение при положительных и отрицательных z можно записать в виде (8.43). Тогда вместо граничного условия (8.45) нужно использовать условие, что радиальная составляющая H , т. е. величина $\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} / \mu$, испытывает разрыв, соответствующий определенной поверхностной плотности тока в плоскости $z = 0$.

Применим этот метод к вычислению векторного потенциала тока J , текущего в плоском контуре радиуса r_0 . Выбор того или иного вида решения в этом случае произволен. Если выбрать решение (8.42), то поверхностью раздела между двумя областями будет цилиндр радиуса r_0 . Заметим, что для регулярности решения во внутренней области следует исключить $K_1(kr)$, а во внешней $I_1(kr)$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} A_\varphi^{(1)} &= \int_0^\infty A(k) I_1(kr) \cos kz \, dk, \\ A_\varphi^{(2)} &= \int_0^\infty B(k) K_1(kr) \cos kz \, dk, \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

и соотношение (8.44) приводит к равенству

$$A(k) I_1(kr_0) = B(k) K_1(kr_0), \quad (8.47)$$

а соотношение (8.45) при $j_\varphi = J\delta(z)$ дает

$$\left[\int_0^\infty \left\{ A(k) \frac{\partial}{\partial r} [r I_1(kr)] - B(k) \frac{\partial}{\partial r} [r K_1(kr)] \right\} \frac{\cos kz \, dk}{r} \right]_{r=r_0} = \mu J\delta(z). \quad (8.48)$$

Умножим соотношение (8.48) на $\cos kz$ и применим интегральную теорему Фурье, или, что равносильно, воспользуемся представлением δ -функции в виде $\int \cos kz dk$. Тогда получим

$$\frac{\pi}{r_0} \left[A(k) \frac{\partial}{\partial r} [r I_1(kr)] - B(k) \frac{\partial}{\partial r} [r K_1(kr)] \right]_{r=r_0} = \mu J. \quad (8.49)$$

Но функции Бесселя и их производные связаны соотношением

$$I'_n(kr) K_n(kr) - K'_n(kr) I_n(kr) = \frac{1}{kr}. \quad (8.50)$$

Поэтому коэффициенты имеют такой вид:

$$A(k) = \frac{r_0^{\mu J}}{\pi} K_1(kr_0),$$

$$B(k) = \frac{r_0^{\mu J}}{\pi} I_1(kr_0),$$

и потенциалы

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi}^{(1)} &= \frac{r_0^{\mu J}}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(kr_0) I_1(kr) \cos kz dk, \\ A_{\varphi}^{(2)} &= \frac{r_0^{\mu J}}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(kr_0) K_1(kr) \cos kz dk. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

С другой стороны, если в качестве границы между двумя областями взять плоскость $z=0$, то соотношение (8.43) приводит к

$$A_{\varphi}^{\pm} = \int A^{\pm}(k) J_1(kr) e^{\mp kz} dk. \quad (8.52)$$

так как функция $N_1(kr)$ не регулярна в начале координат. Поверхностный ток в плоскости $z=0$, равный $J \delta(r-r_0)$, приводит к разрыву производной $\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z}$ в этой плоскости. Коэффициенты $A(k)$ можно определить с помощью интеграла Фурье — Бесселя

$$\int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} r dr f(k) J_n(kr) J_n(k'r) = f(k'), \quad (8.53)$$

и искомый потенциал равен

$$A_{\varphi}^{\pm} = \frac{r_0^{\mu J}}{2} \int_0^{\infty} J_1(kr_0) J_1(kr) e^{\mp kz} dk. \quad (8.54)$$

Задачи

1. Рассмотрите магнит, полюсные наконечники которого гораздо шире зазора. Обмотка магнита расположена вдали от зазора. Определите комплексный потенциал и изобразите на графике зависимость поля от радиуса в плоскости симметрии. Один из концов графика должен соответствовать точке, расположенной далеко вне зазора, другой — точке, где поле уже почти постоянно.

2. Определите B и H внутри и вне сферической оболочки с радиусами a и b с постоянной намагниченностью M . Что произойдет, если внутренняя сферическая полость не концентрична внешней поверхности?

3. В длинном проводящем цилиндре радиусом b просверлено отверстие радиуса a параллельно оси цилиндра. Расстояние между осями цилиндра и отверстия равно x_0 . По цилиндру течет ток с постоянной плотностью j . Вычислите магнитное поле в отверстии (при конструировании магнитов некоторых больших ускорителей используется решение более общей задачи, когда цилиндр имеет эллиптическое сечение).

4. Как на поверхности сферы намотать обмотку, чтобы внутри нее поле было однородно? (Такой вид обмотки использован в масс-спектрометре Вестингауза — Гаудсмита.)

5. Поверхность сферы, вращающейся с угловой скоростью ω , однородно заряжена. Каков эффективный дипольный момент этой сферы для точек, находящихся вне ее?

6. В первоначально однородное поле B_0 помещена сферическая оболочка, изготовленная из вещества с проницаемостью $\mu \neq \mu_0$. Внешний и внутренний радиусы ее равны соответственно a и b . Какова величина поля во внутренней полости?

7. В бесконечно длинной проволоке, координаты которой $x = a$, $y = 0$, течет ток J . Полупространство, соответствующее отрицательным значениям x , заполнено средой с проницаемостью $\mu \neq \mu_0$. Определите поле во всех точках пространства.

8. Определите магнитное поле тока J , текущего по бесконечно длинной проволоке с координатами $x = a$, $y = b$, если вся область пространства с отрицательными x и y заполнена магнитным веществом с очень большой проницаемостью $\mu \rightarrow \infty$.

9. Вычислите магнитный векторный потенциал кольца с током радиусом a , концентричного круглому магнитному цилиндру с восприимчивостью $\mu \neq \mu_0$ и радиусом $b < a$ (Смайт).

10. На кольцо из мягкого железа намотано N витков проволоки, по которой течет ток J . Радиус кольца b , радиус поперечного сечения $a \ll b$. Кольцо разрезано в некоторой точке, причем величина зазора равна δ . Вычислите магнитное сопротивление цепи, предполагая, что проницаемость железа велика.

11. Покажите, что B и H удовлетворяют соотношению

$$B = \mu_0 H + M.$$

если

$$B = \nabla \times A \quad \text{и} \quad H = -\nabla \varphi_m.$$

где A и φ_m определяются соответственно соотношениями (8.13) и (8.14).

12. Пусть вектор a , в соотношении (8.30) направлен вдоль оси z цилиндрической системы координат. Пусть также $V = 0$. Разложите функцию U в ряд, как скалярный потенциал в цилиндрических координатах, и докажите, что получающееся в конечном счете разложение векторного потенциала согласуется с соотношениями (8.42) и (8.43), полученными прямым интегрированием.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. (Русский перевод: Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма.)

В гл. IV имеется вывод полного решения для векторного потенциала при наличии граничных условий.

2. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. (Русский перевод: Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики.)

Более полное математическое рассмотрение, чем у Стрэттона.

3. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. (Русский перевод: В. Смайт, Электростатика и электродинамика.)

В гл. VII рассмотрены методы определения векторного потенциала и много примеров его использования.

* Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 9.1. Закон индукции Фарадея

В гл. 7 было показано, что для поддержания постоянным электрического тока необходимо вихревое электрическое поле E' . Электростатические поля консервативные, т. е. $\text{rot } E = 0$. Однако экспериментально было обнаружено, что изменению магнитных полей сопутствуют неконсервативные электрические поля. Закон, описывающий эту связь, называется законом индукции Фарадея и может быть сформулирован следующим образом. Пусть под действием электродвижущей силы \mathcal{E} в цепи с сопротивлением R течет ток J . С этой цепью связан магнитный поток

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (9.1)$$

где интегрирование производится по поверхности, ограниченной контуром с током. Экспериментально найдено, что если поток меняется со временем, то

$$JR - \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (9.2)$$

Это означает, что величина тока в цепи отличается от предсказываемой законом Ома. Это отличие определяется дополнительной электродвижущей силой, равной скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком. Соотношение (9.2) представляет собой независимый закон, полученный экспериментально, который никоим образом не может быть выведен из соотношений, приводившихся ранее. Вопреки некоторым утверждениям закон индукции Фарадея не выводится также и из закона сохранения энергии полной системы токов в магнитном поле.

В соотношении (9.2) входит полный поток, пронизывающий данную цепь. Этот поток может изменяться в силу нескольких причин, например вследствие изменения во времени внешнего поля или вследствие движения самой цепи или ее части. Мы будем считать соотношение (9.2) применимым во всех подобных случаях, включая и токи в движущихся средах.

Как было показано Максвеллом, закон индукции Фарадея распространяется не только на тот случай, для которого написано соотношение (9.2). Если это соотношение записать в другом виде,

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = JR - \mathcal{E}, \quad (9.3)$$

то становится ясно, что в проводнике существует непотенциальное электрическое поле. В силу граничных условий тангенциальные компоненты электрического поля непрерывны на границе проводника. Поэтому можно сделать вывод, что соотношение (9.3) справедливо также и в области, непосредственно прилегающей к проволоке. Так как сопротивление проводника не содержится в левой части соотношения (9.3), то это соотношение, по-видимому, не зависит от присутствия проводника с током и представляет собой общий физический закон, связывающий электрическое поле в вакууме со скоростью изменения магнитного поля. Если это так, то соотношение (9.2) можно преобразовать в дифференциальное выражение, применимое в свободном пространстве или покоящейся среде. Для этого полную производную потока (9.1) запишем в виде интеграла от частной производной магнитного поля по времени. Тогда соотношение (9.3) принимает такой вид:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.4)$$

Используя теорему Стокса, приходим к уравнению

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (9.5)$$

Таким образом, электрическое поле перестает быть безвихревым. Уравнение (9.5) описывает как раз те изменения в электрическом поле, которые возникают вследствие закона индукции Фарадея.

§ 9.2. Уравнения Максвелла для покоящейся среды

Таким образом, мы имеем выражения как для плотности источников (дивергенции), так и для плотности циркуляции (ротора) обоих векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Согласно соотношениям (2.5), (7.35), (8.3) и (9.5) имеем

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0^{-1} \rho_{\text{полн}} = \epsilon_0^{-1} (\rho_{\text{своб}} - \nabla \cdot \mathbf{P}), \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Это и есть электродинамические уравнения Максвелла, записанные в виде, пригодном для покоящейся среды. Ограничение покоящимися средами обусловлено отсутствием конвективных токов в последнем уравнении, а также тем, что при выводе уравнения (9.5) мы пренебрегли изменениями потока из-за движения среды. В уравнения (9.6) в явном виде входят эквивалентные вакуумные заряды и токи, приводящие к возникновению полей. Если с помощью соотношений

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (8.4)$$

ввести дополнительные векторные поля \mathbf{D} и \mathbf{H} , то уравнения Максвелла принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{своб}}, \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Формально уравнения (9.7) проще, чем уравнения (9.6), однако с физической точки зрения они сложнее. Решение этих уравнений возможно только, если имеются дополнительные уравнения состояния, связывающие \mathbf{D} и \mathbf{j} с \mathbf{E} и \mathbf{H} с \mathbf{B} . В случае среды с линейными параметрами эти уравнения таковы:

$$\mathbf{D} = k\epsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\mathbf{j}_{\text{своб}} = \sigma \mathbf{E},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}.$$

Если среда обладает нелинейными свойствами, то уравнения состояния имеют другой вид.

§ 9.3. Закон Фарадея для движущихся сред

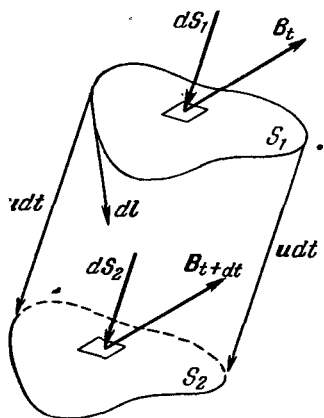
Несколько сложнее обобщение закона индукции на случай движения среды. Докажем сначала вспомогательную теорему, по которой полная скорость изменения потока через данную движущуюся поверхность может быть выражена через поверхностный интеграл от векторной функции \mathbf{B} .

Пусть, как и ранее, Φ_m равно потоку вектора \mathbf{B} через поверхность S . Нам нужно найти функцию $\frac{DB}{Dt}$, определяемую равенством

$$\frac{d}{dt} \Phi_m = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{D\mathbf{B}}{Dt} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.8)$$

Для этого рассмотрим поверхность, изображенную на рис. 9.1, которая в момент t находится в положении 1, а в момент $t + dt$ в положении 2. Согласно правилам дифференцирования

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta t} \int (\mathbf{B}_{t+dt} \cdot d\mathbf{S}_2 - \mathbf{B}_t \cdot d\mathbf{S}_1). \quad (9.9)$$



Применяя к объему, ограниченному поверхностями S_1 и S_2 и поверхностью, образующейся при движении контура поверхности S , теорему Гаусса в момент t , получим

$$\int \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \int (\mathbf{B}_t \cdot d\mathbf{S}_2 - \mathbf{B}_t \cdot d\mathbf{S}_1) - \oint \mathbf{B}_t \cdot (\mathbf{u} dt \times d\mathbf{l}). \quad (9.10)$$

Рис. 9.1. К выводу производной DB/Dt .

Последний член представляет собой изменение потока через боковую поверхность при движении контура поверхности

S , элемент которого равен $d\mathbf{l}$. Подчеркнем, что поток через поверхности S_1 и S_2 в соотношении (9.10) вычисляется в момент t , ибо теорема Гаусса применима лишь к мгновенным значениям векторного поля \mathbf{B} . Величину вектора \mathbf{B} на поверхности S_2 в момент $t + dt$ можно выразить через его величину в момент t разложением в ряд

$$\mathbf{B}_{t+dt} = \mathbf{B}_t + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt + \dots \quad (9.11)$$

Подставляя в соотношение (9.9) соотношения (9.10) и (9.11), в пределе получаем

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B} \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} + \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{B} dv}{dt}. \quad (9.12)$$

Используя равенство

$$dv = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} dt, \quad (9.13)$$

а также теорему Стокса, получаем искомое соотношение

$$\frac{DB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (B \times u) + (\nabla \cdot B) u. \quad (9.14)$$

В этом выражении первый член представляет собой изменение потока через поверхность S вследствие изменения векторного поля со временем. Второй член описывает те изменения потока, которые возникают при пересечении силовых линий контуром, ограничивающим данную поверхность. Наконец, третий член появляется при прохождении поверхности S через область неоднородного векторного поля, где возникают силовые линии.

С помощью соотношения (9.14) закон Фарадея (9.2) можно представить в дифференциальной форме и для движущейся среды. Так как магнитное поле B всегда соленоидально, то из соотношений (9.3) и (9.14) следует

$$\oint E' dl = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \int \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (B \times u) \right] \cdot dS. \quad (9.15)$$

Символом E' мы обозначили электрическое поле в цепи, измеренное в движущейся системе отсчета. При этом мы считали, что закон Фарадея применим к любой цепи, если пронизывающий эту цепь магнитный поток изменяется со временем, какова бы ни была причина этого изменения. Применяя к соотношению (9.15) теорему Стокса, получим

$$\nabla \times E' = - \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \times (B \times u), \quad (9.16)$$

где E' - поле, измеренное в движущейся среде. Это соотношение можно записать иначе

$$\nabla \times (E' - u \times B) = - \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (9.17)$$

Но выражение под знаком ротора есть не что иное, как напряженность поля, измеренная неподвижным наблюдателем. Причина этого заключается в том, что для наблюдателя, несущего заряд q через поле B со скоростью u , будет существовать дополнительная сила $q(u \times B)$, кроме силы электрического поля E . Поэтому напряженность электрического поля, измеренная неподвижным наблюдателем, равна напряженности электрического поля E' , измеренной движущимся наблюдателем минус эффективное поле $u \times B$, т. е. $E = E' - u \times B$. Таким образом, для неподвижного наблюдателя соотношение (9.17) имеет вид

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Это означает, что дифференциальная форма закона индукции Фарадея не зависит от движения среды в поле. Этого и следовало ожидать, так как в соотношении (9.15) входят только \mathbf{B} и \mathbf{E} , и поэтому оно не должно зависеть от характеристик среды, в том числе от ее движения. В то же время поле, измеренное движущимся наблюдателем, состоит из двух частей: во-первых, из «поля индукции», вызванного изменением во времени внешних магнитных полей, и во-вторых, поля, пропорционального $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, которое возникает вследствие движения наблюдателя в магнитном поле. При таком рассмотрении предполагалось, что свойства электрического поля не зависят от движения наблюдателя. Как увидим ниже, это предположение справедливо только, если скорость наблюдателя значительно меньше скорости света. Поэтому все выводы относительно уравнений Максвелла в движущихся средах, которые мы сделаем в этой главе, можно применять только, если скорость среды много меньше скорости света.

§ 9.4. Уравнения Максвелла для движущихся сред

Как было показано, движение среды, в которой определяется поле, не сказывается на виде третьего уравнения Максвелла (9.6). Первое и второе уравнения также не зависят от движения среды, так как в нерелятивистском приближении плотность зарядов в среде не зависит от движения наблюдателя. Таким образом, единственное изменение заключается в поправке к току в четвертом уравнении (9.6). Эта поправка касается конвективных и поляризационных токов. Конвективные токи, образованные движением свободных и поляризационных зарядов, равны $\mathbf{u}(\rho_{\text{своб}} - \nabla \cdot \mathbf{P})$. Чтобы учесть потерю зарядов при изменении потока поляризации через движущуюся поверхность, собственно поляризационные токи следует положить равными

$\frac{D\mathbf{P}}{Dt}$ вместо $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$. Таким образом, полный ток, создающий магнитное поле, состоит из следующих частей:

- 1) истинные токи;
- 2) конвективные токи;
- 3) токи, связанные с изменением поляризации и движением поляризованной среды. По аналогии с соотношением (9.14) они равны

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{u};$$

- 4) вакуумный ток смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Учитывая эти поправки к четвертому уравнению Максвелла, можно выписать полную систему уравнений поля, применимую к немагнитным средам, движущимся со скоростью \mathbf{u} , которая мала по сравнению

со скоростью света:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{своб}}, \\
 2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 4) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{своб}} + \mathbf{u} (\rho_{\text{своб}} - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + \right. \\
 &\quad \left. + (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{u} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \\
 &= \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{своб}} + \rho_{\text{своб}} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) \right].
 \end{aligned} \right\} (9.18)$$

С помощью уравнений состояния истинные токи и поляризацию в движущихся средах можно выразить через поля, измеренные также в движущихся средах:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}', \\
 \mathbf{P} &= \epsilon_0 (k - 1) (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).
 \end{aligned} \right\} (9.19)$$

Для незаряженного диэлектрика без тока уравнения Максвелла принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\
 2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 4) \quad \nabla \times [\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P} \times \mathbf{u}] &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.
 \end{aligned} \right\} (9.20)$$

Из последнего уравнения видно, что с макроскопической точки зрения движущийся поляризованный диэлектрик эквивалентен веществу с магнитным моментом

$$\mathbf{M}_{\text{экр}} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}. \quad (9.21)$$

Это легко понять, если рассмотреть движение поляризованной пластинки под прямым углом к направлению поляризации. В этом случае имеется два тока: один, в направлении движения, обусловлен движением положительных поляризационных зарядов, другой, в противоположном направлении, обусловлен движением отрицательных поляризационных зарядов. Эти токи разделены пространственно и образуют замкнутый контур с током, обладающий магнитным моментом. Следовательно, движущийся поляризованный диэлектрик создает магнитное поле, которое нельзя отличить от поля в намагниченном веществе. Экспериментально этот эффект был обнаружен Рентгеном, Эйхенвальдом и др.

§ 9.5. Движение проводника в магнитном поле

Для примера применим уравнение Максвелла к проводящему бруску прямоугольного сечения и бесконечной длины, движущемуся параллельно самому себе со скоростью u относительно однородного магнитного поля B . Поле B перпендикулярно направлению движения бруска и постоянно во времени (рис. 9.2). Два скользящих контакта, соединенные с зажимами неподвижного гальванометра, касаются противоположных сторон бруска, как показано на рисунке. Расстояние между ними равно ширине бруска l .

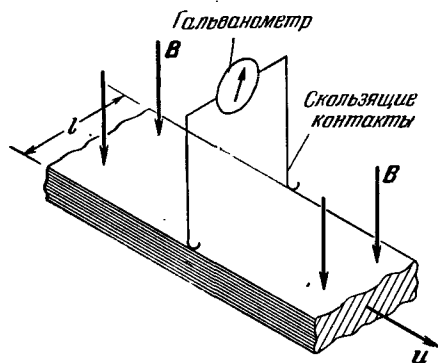


Рис. 9.2. Проводящий брусок, движущийся в магнитном поле параллельно своей длине.

соединенные с зажимами неподвижного гальванометра, касаются противоположных сторон бруска, как показано на рисунке. Расстояние между ними равно ширине бруска l .

Из физических соображений можно ожидать возникновения тока во внешней неподвижной цепи. Электрон, движущийся вместе с проводником, будет испытывать действие эффективного поля, равного $E' = u \times B$. Вследствие этого через контакты во внешнюю цепь потечет ток, который будет измерен неподвижным наблюдателем. Для этого наблюдателя ротор E должен равняться нулю, так как B не меняется со временем (для описываемых явлений не имеет значения, движутся или покоятся источники поля B . Эти явления характеризуются только полем и не зависят от механизма, с помощью которого это поле создается). Следовательно, если электрическое поле имеется, то оно должно быть безвихревым, т. е. электростатическим.

Благодаря наличию эффективных электрических полей в движущемся проводнике возникнет электрический ток, который создаст заряды на его поверхностях. Электрическое поле этих зарядов и будет измерено внешним наблюдателем. С другой стороны, поле этих зарядов полностью компенсирует эффективное электрическое поле $u \times B$ в проводнике. Поэтому, если рассмотреть контур, часть которого расположена в движущемся проводнике, а другая часть — вне его, то интеграл от электрического поля по этому контуру будет отличен от нуля. Этот результат согласуется с наблюдаемой на опыте электродвижущей силой uBl , возникающей на противоположных сторонах проводника. Если вся система покоится, то никакой электродвижущей силы не возникнет.

Если вместо проводящего бруска будет двигаться цепь с гальванометром относительно бруска в поле B , то опять будет на-

блюдаться электродвижущая сила uBl , так как в этом случае проводящий параллелепипед и цепь с гальванометром просто поместились ролями. Различные случаи относительных движений приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Электродвижущая сила, возникающая при различных относительных движениях параллелепипеда, источника магнитного поля и наблюдателя (рис. 9.2)

параллелепипеда	Движение		Электродвижущая сила, измеренная наблюдателем
	источника поля B	наблюдателя (цепи с гальванометром)	
u	0	0	uBl
0	u	0	0
0	u	u	uBl
u	u	0	uBl
0	0	u	uBl
u	0	u	0

Эта таблица позволяет сделать два вывода: 1) движение источника поля B не имеет значения, если поле B однородно; 2) в такой системе нельзя заметить абсолютного движения. Последнее обстоятельство означает, что уравнения Максвелла при правильной интерпретации согласуются с принципами относительности. Подробнее и с большей общностью это положение будет доказано впоследствии.

Более сложное положение возникает, если кроме внешнего магнитного поля имеется еще и поле магнитного момента параллелепипеда, постоянного или наведенного в нем. Вывод о том, что поле, возникающее в покоящемся контуре, будет электростатическим, остается верным. Однако причина возникновения этого поля не вполне ясна, пока уравнения для движущейся среды не учитывают магнитных свойств среды. К сожалению, эти свойства нельзя учесть достаточно обоснованно без изучения теории относительности. Тем не менее результат этого учета физически ясен, так как источник поля при условии его постоянства во времени не влияет на эффекты, вызванные этим полем. Другими словами, сила, действующая на электрон, движущийся вместе с параллелепипедом, не зависит от того, будет ли магнитное поле внешним или обусловлено магнитным моментом самого параллелепипеда. Поэтому следует ожидать, что электродвижущая сила по-прежнему будет равна uBl , где B — магнитное поле в движущемся намагниченном параллелепипеде. Так как магнит представляет собой по существу систему из контуров с током, то мы приходим к парадоксальному заключению, что движение контуров с постоянным током приводит к возникновению электростатического поля.

В дальнейшем на основе теории относительности будет показано, что это действительно так. Наблюдатель, движущийся со скоростью \mathbf{u} относительно среды с намагниченностью \mathbf{M} , обнаружит электрический момент, равный

$$\mathbf{P}_{\text{экр}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{M}. \quad (9.22)$$

Следовательно, плотность соответствующих источников поля определяется соотношением

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{экр}}}{\epsilon_0}. \quad (9.23)$$

Хотя этот эффект внешне подобен классическому эффекту, описываемому соотношением (9.21), его объяснение возможно только на основе специальной теории относительности. Он связан с тем обстоятельством, что для покоящегося наблюдателя время движения заряда по направлению движения цепи отлично от времени его движения в противоположном направлении. Это приводит к возникновению эффективной поляризации, перпендикулярной к направлению движения и лежащей в плоскости контура с током. В дальнейшем этот эффект будет рассмотрен более подробно.

Если длина намагниченного параллелепипеда конечна, то поле \mathbf{E} уже не будет безвихревым, так как производная $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ в покоящейся системе отсчета отлична от нуля. Действительно, так как при равномерном движении со скоростью \mathbf{u}

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

то

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

что в силу равенства нулю дивергенции \mathbf{B} сводится к $-\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Следовательно, если \mathbf{B} не будет однородным, то \mathbf{E} не будет безвихревым. Однако, как и прежде, ротор \mathbf{E} равен ротору величины $-(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, которая представляет собой эффективное электрическое поле в движущейся среде.

Задачи

1. Докажите, что с помощью вращающейся катушки, намотанной на поверхности сферы с плотностью витков, пропорциональной $\sin \theta$, где θ — полярный угол, измеряется аксиальная компонента поля в ее центре независимо от степени неоднородности поля (см. задачу 4 гл. 8).

2. Свойства катушки, описанной в первой задаче, аппроксимируйте с помощью простой цилиндрической катушки. Каковы должны быть размеры такой катушки, т. е. отношение высоты к диаметру, чтобы влияние неоднородности было минимальным?

3. Диэлектрический цилиндр ($k > 1$) радиуса a вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси, которая параллельна магнитному полю B . Вычислите поляризацию единицы объема и заряд, приходящийся на единицу длины, возникающий на поверхности цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

Закон индукции и его следствия рассмотрены во всех книгах по электродинамике. Изложение, наиболее близкое нашему, имеется в книге: M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, *Электричество и магнетизм*, т. 1.)

ЭНЕРГИЯ, СИЛА И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Выражение для плотности энергии электрического поля удалось связать с электрическим полем (гл. 6), рассматривая некоторый специальный процесс. Этот процесс состоял в сближении зарядов, при котором производилась работа и изменялось поле. Приравнявая работу и энергию, можно было получить выражение для плотности термодинамической свободной энергии. Рассмотрим аналогичный процесс для магнитного поля, а затем перейдем к выводу общих соотношений в случае электромагнитного поля.

§ 10.1. Энергия системы квазистационарных токов

Рассмотрим процесс, посредством которого энергия батареи, создающей неэлектростатическое поле E' , расходуется на тепловые потери и на создание магнитного поля. Умножим скалярно на \mathbf{j} выражение для тока

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}'), \quad (7.4)$$

в результате получим

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{j} = \frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (10.1)$$

Левая часть этого соотношения представляет собой скорость, с которой батарея совершает работу: первый член правой части равен теплоте, выделяемой при прохождении тока; наконец, последний член, как мы увидим, равен скорости возрастания энергии магнитного поля. Если все поля квазистационарны, т. е. меняются медленно, то током смещения можно пренебречь. Тогда четвертое уравнение Максвелла принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Если это уравнение подставить в соотношение (10.1) и проинтегрировать по всему пространству, то полная мощность, расходуемая батареей, определяется выражением

$$\int \mathbf{E}' \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\mathbf{v} = \int \frac{(\nabla \times \mathbf{H})^2}{\sigma} d\mathbf{v} - \int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\mathbf{v}. \quad (10.2)$$

С помощью соотношения

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (10.3)$$

последний член выражения (10.2) можно проинтегрировать по частям. Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского и третьим уравнением Максвелла, получим

$$\int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = - \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv - \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (10.4)$$

Так как в случае электростатических и квазистационарных магнитных полей величина $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ уменьшается по крайней мере как $1/r^5$, то поверхностный интеграл в этом соотношении равен нулю. Заметим, что это было бы не так, если бы \mathbf{E} и \mathbf{H} изменялись пропорционально $1/r$, как, например, в случае излучения. Однако в отсутствие токов смещения такие поля не возникают. Иными словами, предположение о медленном изменении полей соответствует пренебрежению всеми радиационными членами в магнитном поле. Аналогичные ограничения имели место и при рассмотрении энергии электростатического поля. Таким образом, мы имеем отдельные выражения для энергии электростатического поля и для энергии магнитного поля, образованного квазистационарными токами. Ниже мы покажем, как следует изменить эти соотношения, чтобы получить общее выражение для энергии электромагнитного поля

Согласно соотношению (10.2) полная мощность, расходуемая батареей, равна

$$\int \mathbf{E}' \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = \int \frac{(\nabla \times \mathbf{H})^2}{\sigma} dv + \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv. \quad (10.5)$$

Первый член правой части, как мы уже указали, равен джоулевым потерям. Второй член представляет собой скорость увеличения энергии магнитного поля. Таким образом, изменение энергии магнитного поля определяется соотношением

$$\delta U_m = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dv. \quad (10.6)$$

Для электростатического поля имеет место аналогичное соотношение

$$\delta U = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dv. \quad (6.19)$$

В электростатическом и магнитном полях выражения для U и U_m определяют изменение свободной энергии.

Для интегрирования выражения (10.6) необходимо знать зависимость между \mathbf{H} и \mathbf{B} . Для среды, намагниченность которой линейно

зависит от поля, интегрирование аналогично (6.14)

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv. \quad (10.7)$$

В случае веществ с нелинейной зависимостью, таких как ферромагнетики, выражение (10.6) можно проинтегрировать, если задан переход из одного состояния в другое. В общем случае результат интегрирования будет зависеть от предыстории образца. Для ферромагнетиков интеграл (10.6) отличен от нуля, даже если \mathbf{B} опишет полный цикл, например в поле переменного тока. Потери энергии при таком цикле равны

$$\Delta U_m = \int \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} dv. \quad (10.8)$$

Энергия, рассеянная в единице объема при замкнутом цикле перемагничивания, равна площади гистерезисной петли на графике зависимости B от H .

Соотношение (10.7) выражает энергию через интеграл по объему, занятому полем. Если объемный интеграл желательно выразить через источники поля, то для этого достаточно \mathbf{B} выразить через векторный потенциал \mathbf{A} , а \mathbf{H} — через ток \mathbf{j} . Сначала получаем

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv. \quad (10.9)$$

Проинтегрировав по частям и, как прежде, отбросив поверхностный член, получим

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dv. \quad (10.10)$$

Аналогичное выражение для энергии электростатического поля содержит плотность зарядов и скалярный потенциал.

Соотношения (10.6), (10.7) и (10.10) были выведены с помощью некоторого специального «виртуального процесса». Однако эти соотношения зависят только от конечной величины полей, а не от характера процесса. Следовательно, можно считать, что и в общем случае энергия магнитного поля определяется этими соотношениями (с учетом, конечно, того, что соотношения (10.7) и (10.10) справедливы только при линейной зависимости между \mathbf{B} и \mathbf{H}).

Множитель $1/2$ в соотношении (10.10) учитывает аналогично (6.1) то, что векторный потенциал включает в себя поле самих токов \mathbf{J} . Следовательно, энергия взаимодействия системы токов и зарядов с внешним полем, потенциалы которого φ и \mathbf{A} , равна

$$U_{\text{взаимод}} = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_{\text{внешн}} + \rho \varphi_{\text{внешн}}) dv. \quad (10.11)$$

§ 10.2. Силы, действующие в системе токов

Полученные выражения для энергии могут быть использованы для решения следующих задач. Во-первых, выразим силы между токами через величины токов и геометрические параметры. Во-вторых, определим изменения магнитной энергии при изменении токов и их положения.

Рассмотрим систему, состоящую из n линейных цепей с токами J_k . Преобразуем по теореме Стокса соотношение (10.10)

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n J_k \oint A \cdot dl_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n J_k \int (\nabla \times A) \cdot dS_k = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n J_k \int B \cdot dS_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n J_k \Phi_k, \quad (10.12)$$

где $\Phi_k = \int B \cdot dS_k$ — поток, охватываемый k -й цепью (см. § 8.4 и соотношение (9.1)). Для определения сил предположим, что i -я цепь движется с бесконечно малой скоростью u_i . Скорость, с которой сила F_i , действующая на эту цепь, совершает работу, равна $F_i \cdot u_i$. Полная скорость изменения энергии при таком виртуальном процессе равна нулю. Однако это равенство нулю получается в результате сложения следующих четырех слагаемых:

1) скорость, с которой совершается механическая работа $F_i \cdot u_i$ над i -й цепью;

2) скорость изменения энергии магнитного поля $\frac{dU_m}{dt}$;

3) скорость, с которой в цепях выделяется теплота $\sum J_k^2 R_k$, где R_k — сопротивление k -й цепи;

4) скорость, с которой электродвижущие силы в цепях совершают работу — $\sum J_k \mathcal{E}_k$. В результате получим

$$F_i \cdot u_i + \frac{dU_m}{dt} + \sum J_k^2 R_k - \sum J_k \mathcal{E}_k = 0. \quad (10.13)$$

Мы предполагаем, что энергия магнитного поля U_m явно выражена через координаты x_k и ток J_k k -й цепи. Будем считать эти переменные независимыми. Так как в цепях имеются тепловые потери и батарея совершает работу даже при покоящихся цепях, то работу, совершаемую над i -й цепью силой F_i , нельзя приравнять изменению магнитной энергии U_m . Это можно было бы сделать, если бы не было никаких других вкладов в энергию.

Рассмотрим следующий процесс, происходящий при постоянном токе. Будем считать, что внешние электродвижущие силы представляют собой такие функции виртуальной скорости u_i , соответствующей изменению параметра x_i , что токи в системе остаются

постоянными. Если теперь в соотношение (10.13) подставить выражение для магнитной энергии U_m (10.12), а также воспользоваться законом Фарадея (9.2) $\mathcal{E} = JR + \frac{d\Phi}{dt}$, то получим

$$F_i \cdot u_i + \frac{1}{2} \sum J_k \frac{d\Phi_k}{dt} - \sum J_k \frac{d\Phi_k}{dt} = 0$$

или

$$F_i \cdot u_i = \frac{\partial U_m}{\partial t} = \frac{\partial U_m}{\partial x_{ia}} u_{ia}. \quad (10.14)$$

Еще раз подчеркнем, что это справедливо только, если все токи постоянны, а положения всех цепей, кроме i -й, фиксированы. Следовательно, величина

$$F_{ia} = \left. \frac{\partial U_m}{\partial x_{ia}} \right|_{J_{\text{const}}} \quad (10.15)$$

представляет собой силу, с которой поле действует на i -й проводник. Отметим, что знак этой силы противоположен тому, который получился бы, если можно было бы пренебречь двумя последними членами в соотношении (10.13). Это означает, что для поддержания постоянства тока в цепи при изменении геометрии цепи батарея должна совершить работу, вдвое большую, чем работа против внешних сил, помимо компенсации тепловых потерь. Соотношение (10.15) весьма полезно при расчете сил, действующих на цепь с током, если энергию магнитного поля можно выразить через токи, его создающие.

§ 10.3. Индуктивность

Если энергию магнитного поля

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k J_k \Phi_k \quad (10.12)$$

нужно выразить через величины токов и геометрические параметры, то очень удобно ввести понятие индуктивности. Поток через k -ю цепь равен

$$\Phi_k = \int B \cdot dS_k = \int (\nabla \times A) \cdot dS_k = \oint_k A \cdot dl_k. \quad (10.16)$$

Общее выражение для A

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j}{r} dv \quad (8.29)$$

в случае линейных цепей может быть записано в виде линейного интеграла

$$A(x_k) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \oint \frac{J_i dl_i}{r_{ik}}. \quad (10.17)$$

Подставляя (10.17) в (10.16), находим

$$\Phi_k = \sum L_{ik} I_i, \quad (10.18)$$

где величина

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_i \cdot dl_k}{r_{ik}} = L_{ki} \quad (10.19)$$

определяется только геометрией системы и называется коэффициентом взаимоиנדукции цепей i и k . Соотношение (10.19) иногда называют формулой Неймана.

Таким образом, соотношение (10.12) принимает вид

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} I_i I_k. \quad (10.20)$$

Из (10.15) следует, что сила, действующая на i -ю цепь, равна

$$F_{ia} = + \left. \frac{\partial U_m}{\partial x_{ia}} \right|_{J_{\text{const}}} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k J_j J_k \frac{\partial L_{jk}}{\partial x_{ia}}. \quad (10.21)$$

При суммировании (10.20) и (10.21) члены с разными индексами встречаются дважды, а члены с одинаковыми индексами — только один раз. Поэтому энергия взаимодействия двух цепей равна

$$U_m = J_1 J_2 L_{12}, \quad (10.22)$$

а собственная их энергия —

$$U_m = \frac{1}{2} (J_1^2 L_{11} + J_2^2 L_{22}). \quad (10.23)$$

Величины L_{ii} называются коэффициентами самоиндукции.

Выражение (10.21) для силы взаимодействия двух цепей согласуется с исходным выражением для силы магнитного взаимодействия (7.21). Если в выражение для силы между двумя цепями подставить соотношение (10.19), то получим

$$F_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint \oint (dl_1 \cdot dl_2) \nabla \frac{1}{r} = - \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint \oint r_{12} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{12}^3},$$

что совпадает с соотношением (7.24).

Так как от x_i зависят только те члены, для которых $j = i$ или $k = i$, и, следовательно, только их производные отличны от нуля, то выражение для силы (10.21) примет вид

$$F_{ia} = J_i \sum_k J_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_{ia}}, \quad (10.24)$$

которое можно преобразовать так:

$$dF_{ia} = J_i \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{ia}} \right|_{J_{\text{const}}}, \quad (10.25)$$

где Φ_i — поток, пронизывающий i -ю цепь. Очевидно, что это соотношение находится в полном согласии с выражением для элемента силы

$$dF = J dl \times B. \quad (10.26)$$

Эти соображения показывают, что в общем случае изменение свободной энергии можно разбить на две части: одну — зависящую от координат и, другую — от токов. Из соотношения

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} J_i J_k, \quad (10.20)$$

принимая во внимание, что каждый его член повторяется дважды, следует

$$\delta U_m = \sum_i \left[\left(\sum_k L_{ik} J_k \right) \delta J_i + \sum_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_{ia}} \delta x_{ia} J_i J_k \right]. \quad (10.27)$$

Воспользовавшись формулами (10.18) и (10.24), можно получить

$$\delta U_m = \sum_i (\Phi_i \delta J_i + F_{ia} \delta x_{ia}), \quad (10.28)$$

где Φ_i — полный поток магнитного поля, пронизывающий i -ю цепь. С точки зрения термодинамики токи и координаты играют роль экстенсивных переменных, а потоки и силы — интенсивных.

Если потоки, связанные с данными цепями, поддерживаются постоянными, то при вычислении силы можно пренебречь членом, соответствующим «обратной э. д. с.». В этом случае работа, совершенная батареей, в точности равна джоулевым тепловым потерям. Таким образом, в противоположность соотношению (10.15) из уравнения (10.13) получаем

$$F_{ia} = - \left. \frac{\partial U_m}{\partial x_{ia}} \right|_{\Phi_{\text{const}}}. \quad (10.29)$$

Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции могут быть найдены не только с помощью формулы Неймана. Один из методов их отыскания основан на использовании (10.18) в качестве определяющего соотношения. Поток, пронизывающий k -ю цепь и создаваемый током в i -й цепи, может быть найден непосредственно из картины поля или из векторного потенциала i -й цепи. Второй метод особенно полезен при непрерывных распределениях токов, когда поток, пронизывающий данную цепь, составляет лишь часть полного потока. В этом методе используются оба выражения для энергии магнитного поля

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} J_i J_k = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\sigma. \quad (10.30)$$

Методы определения H и B рассмотрены выше. Таким образом, вычисление индуктивности сводится к нахождению интегралов от $H \cdot B$.

При вычислении индуктивности проводника с током удобно задачу разделить на две части: 1) определение части индуктивности, связанной с полем вне проводника, и 2) определение части индуктивности, связанной с полем внутри проводника. Такое разделение необходимо, ибо индуктивность, связанная с внешним полем, не может быть рассчитана, исходя из предположения, что радиус проводника равен нулю. Это предположение приводит к логарифмической расходимости соответствующего интеграла. В дальнейшем мы увидим, что при высоких частотах индуктивность, связанная с полем внутри проводника, становится пренебрежимо малой, так как высокочастотные поля не проникают в металл. Эта часть индуктивности может быть значительной при низких частотах, особенно, если проводники ферромагнитны.

§ 10.4. Объемная магнитная сила

В предыдущих параграфах силы взаимодействия между системами с током были выражены через величины токов и соответствующие геометрические параметры. Как и следовало ожидать, эти силы являются другим выражением закона Ампера (7.21). По аналогии с электростатикой можно вывести выражение для магнитной силы, действующей на единицу объема. Эту силу можно выразить через поле, восприимчивость и ток в данной точке. В электростатике сила F_v определялась соотношением

$$\frac{dU}{dt} = - \int F_v \cdot u dv, \quad (6.23)$$

откуда для F_v получается следующее выражение:

$$F_v = \rho E - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla k + \frac{\epsilon_0}{2} \nabla (E^2 \frac{dk}{dg} g). \quad (6.40)$$

Аналогично имеем

$$\frac{dU_m}{dt} = - \int F_v \cdot u dv;$$

F_v будем считать объемной магнитной силой. Прежде чем выводить общие выражения для силы F_v , введем следующие ограничения: 1) среда обладает линейными свойствами, т. е. восприимчивость не зависит от поля; 2) постоянный магнитный момент равен нулю; 3) магнитострикция отсутствует, т. е.

$$\frac{dk_m}{dg} = 0.$$

При таких предположениях прямой расчет приводит к следующему результату:

$$F_v = j \times B - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \nabla k_m. \quad (10.31)$$

Как и в электростатике, силу, действующую на данный объем, можно выразить через величину поля на границах объема. Другими словами, можно ввести тензор натяжений, из которого объемная сила выводится с помощью тензорного соотношения (6.41). Тензор Максвелла для магнитного поля при отсутствии магнитострикции по форме подобен тензору (6.54)

$$T_{\alpha\beta} = H_{\alpha}B_{\beta} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} H_{\gamma}B_{\gamma}, \quad (10.32)$$

где суммирование производится согласно обычному условию. Геометрическая интерпретация этого тензора приводит к тем же выводам относительно магнитных сил, которые в гл. 6 были получены применительно к электрическим силам: направление магнитного поля делит пополам угол между нормалью к поверхности и направлением натяжения, вызванного магнитным полем на этой поверхности. Величина магнитного натяжения, параллельного или перпендикулярного полю, равна $HB/2$.

§ 10.5. Общие выражения для электромагнитной энергии

До сих пор электростатические поля и магнитные поля постоянных или почти постоянных токов рассматривались отдельно. Теперь мы исследуем вопрос, как следует изменить выражения для энергии, силы и импульса, чтобы они остались справедливыми и в общем случае, когда нет никаких ограничений на скорость изменения поля. В дальнейшем мы ограничимся случаем полей в вакууме и проводников с проницаемостью, равной единице. Никаких существенных результатов мы при этом не упустим.

Как было показано, уравнения поля в вакууме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{своб}}, \\ (2) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (3) \quad \mathbf{V} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \mathbf{V} \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Эти уравнения полностью описывают поведение электромагнитных полей, если имеются соответствующие уравнения состояния и граничные условия. Они верны и в случае быстропеременных полей. По крайней мере никаких внутренних противоречий не возникает, даже при произвольной скорости изменения полей. Однако при пользовании уравнениями состояния следует соблюдать известную осторожность, так как обычно свойства веществ зависят от частоты изменения поля. В дальнейшем мы будем часто ограничиваться усло-

виями для вакуума, чтобы избежать усложнений, обусловленных свойствами вещества.

Умножим скалярно третье и четвертое уравнения Максвелла соответственно на \mathbf{H} и \mathbf{E} , вычтем полученные соотношения друг из друга и затем воспользуемся векторным тождеством (10.3) для дивергенции векторного произведения. Тогда получим

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (10.33)$$

Проинтегрировав по объему, предполагая уравнения состояния линейными, получим скорость изменения энергии

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dv = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (10.34)$$

Интеграл по поверхности в этом выражении определяется из теоремы Гаусса. Легко видеть, что левая часть равенства (10.34) представляет собой скорость изменения суммы энергий электрического и магнитного полей (соотношения (6.14) и (10.7)) в том виде, какой они имеют в статическом случае. Воспользовавшись соотношением (10.1), можно показать, что первый член правой части представляет собой разность между джоулевым теплом и мощностью внешней электродвижущей силы:

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv = \int \left(\frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{E}' \cdot \mathbf{j} \right) dv. \quad (10.35)$$

Второй член правой части соотношения (10.34) требует особого рассмотрения.

До сих пор мы пренебрегали энергией, которую он представляет. При статических и квазистатических процессах этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым, если поверхность интегрирования выбрать достаточно большой. Однако, как мы покажем в дальнейшем, при излучении электрические и магнитные поля изменяются обратно пропорционально только первой степени z на больших расстояниях от источника. В этом случае при увеличении поверхности интегрирования $\int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ будет стремиться к постоянному значению, и следовательно, его нужно учитывать в общем балансе энергии.

Вектор

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (10.36)$$

называется вектором Пойнтинга. В уравнении (10.34) вектор Пойнтинга представляет собой поток энергии электромагнитного поля через единицу площади данной поверхности в единицу времени. Однако следует отметить, что в балансе энергии смысл имеет лишь весь поверхностный интеграл от \mathbf{N} . Если же вектор Пойнтинга отождествлять

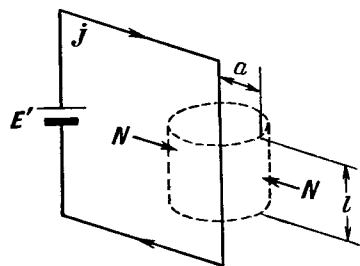
с потоком энергии через единицу площади в каждой точке, то можно прийти к кажущимся противоречиям. Поверхностный интеграл от вектора Пойнтинга можно преобразовать к объемному от $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$; следовательно, суммарный поток энергии обратится в нуль, если дивергенция вектора Пойнтинга равна нулю. Например, в скрещенных статических электрическом и магнитном полях величина вектора Пойнтинга будет отлична от нуля в различных точках пространства, однако его дивергенция везде равна нулю.

Таким образом, полный баланс между энергией электрического и магнитного полей, тепловыми потерями, обусловленными сопротивлением проводников, работой, совершаемой внешней электродвижущей силой, и, наконец, потерями на излучение описывается соотношением (10.34). Следовательно, выражения для плотности энергии электростатического и магнитоэлектростатического полей остаются справедливыми и при произвольной скорости изменения полей. Единственным новым фактором, учет которого необходим для написания закона сохранения энергии, оказывается предположение, что поле может

переносить энергию внутрь рассматриваемого объема или из него; при этом поток энергии равен поверхностному интегралу от вектора Пойнтинга.

В результате введения в законы сохранения поверхностного члена появляется возможность применить эти законы к части электродинамической системы независимо от того, имеются ли в ней процессы излучения или нет.

Рис. 10.1. Вектор Пойнтинга и сохранение энергии для элемента цепи.



Для иллюстрации этого положения рассмотрим простой пример: батарея с электродвижущей силой E' питает ток плотностью j проводник с проводимостью σ (рис. 10.1). Исследуем теперь вопрос о балансе энергии в объеме проводника, обозначенном на рисунке пунктиром. Длина рассматриваемого объема l , а радиус — a . Из элементарных соображений имеем

$$E = \frac{j}{\sigma},$$

$$H = \frac{1}{2} ja,$$

$$N = \frac{j^2 a}{2\sigma},$$

причем вектор N на боковой поверхности цилиндра направлен внутрь.

Следовательно,

$$\int \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = -j^2 \frac{(\pi a^2 l)}{\sigma} = - \int \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \text{джоулево тепло.}$$

Таким образом, уравнение (10.34) удовлетворяется. При этом потери в проводнике компенсируются энергией, определяемой вектором Пойнтинга, т. е. энергией поля. Явное введение источника энергии — внешнего поля батареи \mathbf{E}' — оказалось излишним.

§ 10.6. Закон сохранения импульса

Рассмотрим теперь вопрос об импульсе электромагнитного поля. Для этого исследуем полный тензор натяжений Максвелла. Дивергенция этого тензора определяет некоторую объемную силу. Выясним, как реализуется эта сила. Если пренебречь электрострикцией и магнитострикцией, то тензор натяжений представляет собой сумму тензоров (6.53) и (10.32)

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E_\gamma D_\gamma + H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} H_\gamma B_\gamma. \quad (10.37)$$

Дивергенция тензора натяжений равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = & E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} + D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} - D_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ & + H_\alpha \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\beta} + B_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \frac{\partial k_m}{\partial x_\alpha} - B_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Это равенство можно записать в векторном виде, если принять во внимание следующие обстоятельства. Первый член преобразуется к векторному виду с помощью уравнения Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{своб}}$. Второй и четвертый члены преобразуются к виду $-\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})$, что в свою очередь равно $\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Шестой и восьмой члены дают соответственно $-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})$, что равно $-\mathbf{B} \times \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$. Пятый член обращается в нуль, так как $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Наконец, третий и седьмой члены пропорциональны компонентам градиентов от k и k_m . Следовательно,

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[E \rho_{\text{своб}} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla k - \frac{\mu_0}{2} H^2 \nabla k_m - \mathbf{B} \times \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right]_\alpha. \quad (10.39)$$

Это выражение можно представить в виде суммы двух членов

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[F_{\text{ев}} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right]_\alpha, \quad (10.40)$$

причем первый

$$F_{ev} = E\rho_{\text{своб}} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla k - \frac{\mu_0}{2} H^2 \nabla k_m - \mathbf{B} \times \mathbf{j}_{\text{своб}} \quad (10.41)$$

представляет собой обычную объемную силу, действующую на материальные тела в квазистационарном электромагнитном поле. Объемные силы, действующие на свободные заряды или неоднородные диэлектрики в электрическом поле, а также на свободные токи или неоднородные магнетики в магнитном поле, полностью описываются этим членом. Второй член в (10.40) новый, он пропорционален скорости изменения вектора Пойнтинга. Выражая (10.40) в явной форме, имеем

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[F_{ev} + \mu\epsilon \frac{\partial(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{\partial t} \right]_{,\alpha} = \left[F_{ev} + \frac{kk_m}{c^2} \frac{\partial N}{\partial t} \right]_{,\alpha}, \quad (10.42)$$

где

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (10.43)$$

Существование силы F_{ev} зависит от наличия материальных тел, обладающих зарядами или наделенных диэлектрическими свойствами. С другой стороны, второй член в соотношении (10.42) не исчезает даже в вакууме, и казалось бы, что на вакуум действует некоторая объемная сила. В свое время этот член вызывал большую дискуссию. Он имел смысл в теории эфира, где вакууму приписывались механические свойства для передачи упругих волн и воздействия на материальные тела. Это воздействие было единственным мерилom сил, действующих со стороны эфира на материю.

Однако согласно электронной теории Лоренца физический смысл имеет только та сила, которая получается в результате усреднения по времени и пространству сил, действующих на заряды и токи, т. е. в результате усреднения выражения

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (10.44)$$

В дальнейшем будет показано, что в рамках специальной теории относительности нельзя поставить опыты, которые позволили бы определить скорость или другие свойства эфира. Таким образом, если мы будем считать, что единственной силой, которая должна фигурировать в теории, является сила Лоренца (10.44), то второй член в соотношении (10.42) следует вычесть. Тогда для области, где $k = k_m = 1$:

$$F_{v\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t}, \quad (10.45)$$

т. е. равна силе Лоренца.

Если это соотношение применить к объему, ограниченному некоторой поверхностью, внутри которой имеется как вещество, так

и поле. то получим¹⁾

$$F_{\alpha} = \int T_{\alpha\beta} dS_{\beta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int N_{\alpha} dv. \quad (10.46)$$

Так как полная сила F_{α} , действующая на тело, равна скорости изменения механического количества движения p_{α} , то соотношение (10.46) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left[p_{\alpha} + \frac{1}{c^2} \int N_{\alpha} dv \right] = \int T_{\alpha\beta} dS_{\beta}. \quad (10.47)$$

Это соотношение показывает, что скорость изменения механического количества движения и объемный интеграл от вектора Пойнтинга, деленного на c^2 , равны потоку натяжений Максвелла, переносимых через поверхность, окружающую данный объем. Если эту поверхность сделать столь большой, чтобы она находилась в области, где поля нет, то сумма механического количества движения и объемного интеграла от вектора Пойнтинга будет оставаться постоянной во времени. Это показывает, что дополнительный член в соотношении (10.45), введенный нами, исходя из физической интерпретации объемной силы, заставляет изменить наше представление об импульсе.

Так как эфир не обладает свойствами, доступными для измерения, то необходимо изменить закон сохранения количества движения. В этом законе следует учитывать не только импульс вещества, но также и плотность импульса электромагнитного излучения, которая равна вектору Пойнтинга, деленному на c^2 . Таким образом, вектор Пойнтинга играет двойную роль: как носитель энергии и как носитель импульса. В специальной теории относительности будет показано, что перенос энергии всегда сопровождается переносом импульса в указанном соотношении. Более того, это свойство не только электромагнитного излучения, но и любых потоков энергии.

Задачи

1. С помощью формулы Неймана рассчитайте коэффициент взаимной индукции двух одинаковых параллельных проводников единичной длины. Вычислите силу взаимодействия между ними, если они образуют единую цепь.

2. Рассмотрите коаксиальный кабель, состоящий из центрального проводника радиуса a и внешнего тонкого экрана радиуса $b \gg a$. Определите самоиндукцию единицы длины, рассматривая оба проводника как единую цепь, а также взаимную индукцию сердечника и экрана. Покажите, что взаимная индукция сердечника и экрана равна самоиндукции экрана. Изменятся ли ответы, если сердечник и экран не коаксиальны?

¹⁾ Мы опускаем член, равный $\frac{kk_m - 1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int N_{\alpha} dv$. Такая сила действительно возникает при распространении электромагнитных волн в веществе. Однако полный импульс, передаваемый ею, всегда равен нулю в силу конечности волнового пакета.

3. Определите крутящий момент, действующий на твердый проводящий цилиндр, медленно вращающийся в магнитном поле, направленном перпендикулярно оси цилиндра.

4. Тонкий сферический экран с проводимостью σ , толщиной t и радиуса a вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной однородному магнитному полю. Вычислите мощность, необходимую для вращения.

5. В стальной сфере радиуса a имеется постоянная и однородная намагниченность M . Круглая катушка радиуса $b > a$, состоящая из N витков с током J , расположена в плоскости, параллельной M , так, что ее центр совпадает с центром сферы. Определите крутящий момент, действующий на катушку.

6. Найдите полную энергию поля, а также плотность энергии в железе и в воздушном зазоре в железном кольце, рассмотренном в задаче 10 гл. 8. Рассмотрите изменение энергии при некотором увеличении зазора с помощью внешней механической силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, *Электричество и магнетизм*, т. I.)

Энергетические соотношения очень ясно изложены в гл. VIII и IX.

2. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. (Русский перевод: В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*.)

Книга характерна богатством подробно рассмотренных приложений.

3. J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Как и прежде, изложение материала весьма отлично от нашего, однако имеются интересные приложения.

* И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 11.1. Волновое уравнение

В соотношении для энергии (10.34), полученное из уравнений Максвелла, входит поверхностный интеграл, который не обращается в нуль при бесконечном расширении поверхности интегрирования. Этот интеграл был интерпретирован как поток энергии, который мы назвали излучением. Уравнения Максвелла дают возможность представить эти распространяющиеся поля в более явном виде, поскольку четыре линейных уравнения в частных производных первого порядка можно свести к двум линейным уравнениям в частных производных второго порядка. Для этого выпишем еще раз уравнения поля

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Рассмотрим область, где нет свободных зарядов и отсутствуют источники электродвижущей силы, т. е. $\rho_{\text{своб}} = 0$ и $\mathbf{E}' = 0$. Будем считать, что в этой области ϵ и μ не зависят ни от координат, ни от времени. Вычислим ротор обеих частей уравнения (3) системы (9.7) и заменим в нем \mathbf{B} на $\mu \mathbf{H}$. В результате получим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mu \mathbf{H}). \quad (11.1)$$

Заменим \mathbf{H} в правой части его выражением через ток уравнения (4) системы (9.7)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j}_{\text{своб}} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (11.2)$$

Воспользуемся векторным тождеством

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

и тем, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ в области, где отсутствуют заряды, а также, что $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В результате уравнение (11.2) преобразуется к виду

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{k k_m}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (11.3)$$

в котором произведение констант свободного пространства $\mu_0 \varepsilon_0$ заменено постоянной $1/c^2$. Очевидно, величина c должна иметь размерность скорости.

Уравнение (11.3) называется обобщенным волновым уравнением. При решении тех или иных конкретных задач второй или третий члены обычно выпадают. Так, в случае непроводящей среды третий член обращается в нуль. Как мы увидим в дальнейшем, получающееся при этом уравнение описывает волны, распространяющиеся со скоростью $u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$. В проводящей среде второй член обычно пренебрежимо мал, и дифференциальное уравнение в этом случае аналогично уравнению теплопроводности или диффузии. Если поле меняется с угловой частотой ω

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_\alpha) e^{-i\omega t}, \quad (11.4)$$

то легко оценить относительные величины обоих членов. Подставив выражение (11.4) в уравнение (11.3), исключим время

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{k k_m}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} + i \mu \sigma \omega \mathbf{E} = 0. \quad (11.5)$$

Далее, объединяя коэффициенты при \mathbf{E} , получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}\right) \mu \varepsilon \omega^2 \mathbf{E} = 0. \quad (11.6)$$

Напомним, что время релаксации среды, введенное в § 7.4, равно

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (7.20)$$

Таким образом, если время релаксации τ много больше периода колебаний $2\pi/\omega$, то мнимым членом в уравнении (11.6) можно пренебречь и мы имеем волновое уравнение. Если же время релаксации мало по сравнению с периодом колебаний, то мнимая часть велика по сравнению с единицей и, следовательно, мы имеем уравнение диффузии.

У всех чистых металлов время релаксации порядка 10^{-14} сек, поэтому при частотах, меньших оптических, к металлам применимо уравнение диффузии. Следовательно, в металлических проводниках волновым членом $\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ можно пренебречь вплоть до са-

мых высоких радиочастот. Иначе говоря, даже при самых высоких частотах, которые теоретически можно получить от макроскопических генераторов, ток смещения в металлах пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Коэффициенты, входящие в уравнение (11.5), можно представить в другом, иногда более удобном виде. Так, например, если λ_0 — длина волны в пустоте, деленная на 2π , т. е.

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\lambda_0}, \quad (11.7)$$

то для среды, характеризуемой коэффициентами k и k_m , можно написать

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\lambda}, \quad (11.8)$$

где

$$u = \frac{c}{\sqrt{k k_m}}.$$

Таким образом, отношение тока проводимости к току смещения равно

$$\frac{1}{\omega\tau} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma\lambda}{\epsilon u} = \sigma\lambda \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sigma\lambda R_0 \sqrt{\frac{k_m}{k}}, \quad (11.9)$$

где величина

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (11.10)$$

имеет размерность сопротивления и численно равна 376,7 ом. Эту величину иногда называют характеристическим импедансом или волновым сопротивлением свободного пространства. Аналогия между распространением волн в свободном пространстве и в линиях передачи с сосредоточенными постоянными оказывается весьма полезной в некоторых практических случаях. Однако мы не будем продолжать этой аналогии и рассмотрим свойства самих электромагнитных полей. Смысл соотношения (11.9) можно проиллюстрировать следующим образом. Если сопротивление куба с ребром λ больше R_0 , то в такой среде токи смещения будут преобладающими, в противном случае основную роль будут играть токи проводимости.

Уравнение (11.3) и аналогичные ему уравнения для \mathbf{H} или \mathbf{V} однородны относительно векторов поля, так как они получены в предположении, что свободные заряды и источники электродвижущей силы отсутствуют. Как и в статическом случае, для исследования связи между полями и их источниками в качестве промежуточного звена удобно ввести потенциалы. К этой задаче мы вернемся в гл. 13. Однако ряд важных и интересных следствий, не зависящих от происхождения полей, можно получить, не обращаясь к потенциалам.

§ 11.2. Плоские волны

Рассмотрим случай, когда все поля зависят только от расстояния между данной плоскостью и началом координат (рис. 11.1). Пусть \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный плоскости, а расстояние от плоскости до начала координат равно ζ . Пространственные производные во всех точках плоскости зависят только от ζ , и оператор ∇ принимает вид

$$\nabla = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Таким образом, уравнения Максвелла в этом случае сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \zeta} &= 0, \\ (2) \quad \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} &= 0, \\ (3) \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Умножая последнее уравнение скалярно на \mathbf{n} , находим

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} = 0. \quad (11.12)$$

Уравнение (11.12) и уравнение (1) системы (11.11) показывают, что продольные компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} , т. е. компоненты, перпендикулярные к рассматриваемой плоскости, не зависят от ζ , а от времени зависят экспоненциально в соответствии с временем релаксации данной среды. Следовательно,

$$E_n = E_{n0} e^{-t/\tau} = E_{n0} e^{-\sigma t/\epsilon}. \quad (11.13)$$

Это означает, что единственным решением уравнений поля для продольных компонент является электростатическое решение. В случае конечной проводимости среды это

электростатическое поле со временем экспоненциально уменьшается до нуля.

Умножим теперь скалярно на \mathbf{n} уравнение (3) системы (11.11)

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

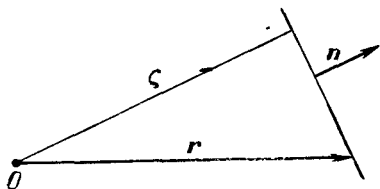


Рис. 11.1. На плоскостях, перпендикулярных единичному вектору \mathbf{n} , все поля постоянны.

В результате получим равенство

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (11.14)$$

которое совместно с уравнением (2) системы (11.11) показывает, что только однородное статическое магнитное поле может иметь продольные компоненты. Таким образом, всякое нестатическое поле, удовлетворяющее уравнениям, состоит только из поперечных компонент, т. е. векторы этого поля параллельны плоскости, изображенной на рис. 11.1.

Исключив \mathbf{H} из уравнений (3) и (4) системы (11.11), получим дифференциальное уравнение, которому подчиняются поперечные компоненты электрического поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (11.15)$$

вытекающее также из уравнения (11.3). Соотношение (11.15) называется «телеграфным уравнением». В отсутствие проводимости это уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.16)$$

Общее решение этого уравнения

$$\mathbf{E} = f(\zeta - ut) + g(\zeta + ut) \quad (11.17)$$

представляет собой волны, распространяющиеся в направлениях $+\zeta$ и $-\zeta$, причем f и g являются произвольными функциями своих аргументов и $u = \frac{c}{\sqrt{kk_m}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$, как и раньше. Возмущение, описываемое функцией f , с течением времени распространяется в направлении возрастания ζ , а возмущение g распространяется в обратном направлении. Скорость распространения таких возмущений равна u . Эта скорость называется фазовой или волновой. Отношение фазовых скоростей в вакууме и в среде с проницаемостью k_m

$$\frac{c}{u} = \sqrt{kk_m}$$

называется показателем преломления n этой среды.

Для случая, когда \mathbf{E} зависит от времени синусоидально, введем комплексную функцию $e^{-i\omega t}$, где ω — угловая частота. Тогда решение уравнения (11.6) будет

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \pm k\zeta)}, \quad (11.18)$$

где

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Часто оказывается удобным волновое число k представлять в виде волнового вектора, направленного в сторону распространения:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{u^2} \mathbf{u} = \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{u}}{u}. \quad (11.19)$$

Таким образом, решение уравнения (11.16) принимает вид

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (11.20)$$

Рассмотрим случай, когда в выражении (11.18) стоит знак минус. Это значит, что волны распространяются в сторону увеличения ζ . Тогда уравнение (3) системы (11.11) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = i\omega \mathbf{B} = i\mathbf{k}n \times \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (11.21)$$

Следовательно, каждой поперечной компоненте электрического поля \mathbf{E} соответствует определенное магнитное поле. Если направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} не меняются с течением времени, то говорят, что волна плоско или линейно поляризована. Согласно уравнениям (11.11) различные компоненты одного и того же поля никак не связаны между собой. Следовательно, не теряя общности, мы можем ограничиться рассмотрением плоско поляризованных волн. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны направлению распространения и друг другу. Из уравнений (11.11) видно, что три вектора \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{n} (или \mathbf{k}) образуют правую систему векторов.

Комплексное представление полей дает возможность представить уравнения Максвелла в особенно простой форме. Более того, выражения, подобные (11.20), очень удобны и с математической точки зрения. Однако следует помнить, что реальные поля определяются действительными частями соответствующих комплексных величин. Плотность энергии в поле, синусоидально меняющемся со временем, изменяется периодически, так как она пропорциональна

$$E^2 = E_0^2 \cos^2(k\zeta - \omega t),$$

т. е. квадрату действительной части выражения (11.20). Среднее по времени от E^2 равно $\frac{1}{2} E_0^2$. В общем случае, среднее по времени от произведения действительных частей двух векторов, зависящих от времени как $e^{-i\omega t}$, равно половине действительной части произведения одного из векторов на вектор, сопряженный второму, т. е.

$$\overline{(\text{Re } \mathbf{F}) \cdot (\text{Re } \mathbf{G})} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{G}), \quad (11.22)$$

где знак * обозначает вектор, сопряженный данному. Стоящее в правой части произведение не зависит от времени, поэтому черта, обозначающая усреднение, не имеет смысла. Справедливость этого соотношения легко доказать, если F и G представить в виде суммы действительных и мнимых частей. Подробный вывод этого соотношения предлагается в качестве упражнения.

Средняя плотность энергии в плоской волне равна

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \overline{(H \cdot B + E \cdot D)} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \text{ дж/м}^3. \quad (11.23)$$

Электрическое и магнитное поля дают одинаковый вклад в среднюю плотность энергии. Вектор Пойнтинга $N = E \times H$ направлен в сторону распространения волн, а его среднее значение равно

$$\overline{E \times H} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 n \text{ вт/м}^2 = \bar{U} u. \quad (11.24)$$

Таким образом, плотность энергии, связанная с плоской волной, в покоящейся однородной непроводящей среде распространяется с той же скоростью, что и сами поля.

§ 11.3. Давление излучения

В § 10.6 мы видели, что теория эфира и электронная теория Лоренца дают различные выражения для объемной силы. Дивергенция тензора натяжений Максвелла приводит к объемной силе, не исчезающей даже при отсутствии зарядов и токов. Чтобы эта сила совпадала с силой Лоренца, необходимо приписать электромагнитному полю некоторую плотность импульса. Мы видели, что плоские волны переносят энергию. Рассмотрим теперь закон сохранения импульса применительно к плоским волнам.

Сначала рассмотрим линейно поляризованную плоскую волну, падающую нормально на поверхность вещества, полностью ее поглощающего, т. е. на черное тело. Пусть ось x совпадает с направлением распространения волны, ось y параллельна электрическому полю и ось z — магнитному.

Тензор натяжений Максвелла

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} (E_\gamma D_\gamma + H_\gamma B_\gamma) \quad (10.37)$$

имеет в этом случае только диагональные компоненты

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= -\frac{1}{2} (E_y D_y + H_z B_z), \\ T_{yy} &= E_y D_y - \frac{1}{2} (E_y D_y + H_z B_z), \\ T_{zz} &= H_z B_z - \frac{1}{2} (E_y D_y + H_z B_z). \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

Согласно (10.45) объемная сила, соответствующая силе Лоренца в материальной среде, равна

$$F_{v_a} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_a. \quad (11.26)$$

Составляющая этой силы вдоль оси x равна

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_y D_y + H_z B_z) - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_y H_z). \quad (11.27)$$

Другие составляющие равны нулю, так как поля не зависят от координат y и z и поэтому вектор Пойнтинга не имеет составляющих вдоль осей y и z .

Так как волна поглощается, то для определения полного давления на вещество необходимо проинтегрировать эту силу

$$\int_0^\infty \bar{F}_{v_x} dx = \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \mu \bar{H}^2), \quad (11.28)$$

в результате оказывается, что полное давление в точности равно плотности энергии, приходящей с волной. Так как среднее значение производной вектора Пойнтинга по времени равно нулю, если E_y и H_z меняются синусоидально, то соответствующий член в соотношении (11.28) выпадает. Производная вектора Пойнтинга выпадает и в случае конечной длины волнового пакета, так как интегрировать по времени следует от $-\infty$ до $+\infty$. Этот член скажется только на мгновенном значении давления во время поглощения волнового пакета, но не на суммарном эффекте. Таким образом, давление излучения точно такое же, как и в теории эфира, — тот поправочный член, который мы ввели для согласования объемной силы с силой Лоренца, не влияет на давление (если не считать начального и конечного моментов времени). Следует заметить, что давление, вычисленное из предположения, что единицей поверхности за время dt поглощается импульс объема $c dt$, равный $Nc dt/c^2$, совпадает с (11.28).

Итак, расчет показывает, что существование давления излучения согласуется с представлением об импульсе электромагнитного поля, а также с более общим представлением о переносе импульса при любом процессе переноса энергии. Однако давление излучения было предсказано еще дорелятивистской классической теорией эфира, и представление о нем не изменилось при последующем развитии теории электромагнитного излучения. Так как рассматриваемая сила есть просто сила Лоренца, то все микроскопические модели процесса поглощения приводят к тому же самому результату, а именно: давление равно плотности энергии падающего излучения. Измерения этого давления подтвердили правильность теоретических предсказаний его

величины. Давление излучения можно рассчитать и в случае полного или частичного отражения, а также при косом падении.

Представляет интерес случай изотропного однородного излучения в полости. Излучение будем считать неполяризованным, а интенсивность его в различных направлениях — одинаковой. Из соображений симметрии следует, что не обращается в нуль только та компонента объемной силы, которая нормальна поверхности стенки. За ось x выберем направление нормали к рассматриваемому элементу поверхности. Тогда объемная сила принимает такой вид:

$$F_{v_x} = \epsilon \left[\frac{\partial E_x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] + \mu \left[\frac{\partial H_x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x H_z) \right] - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} \quad (11.29)$$

(член с производной вектора Пойнтинга опущен по причине, указанной выше). Средние значения членов, содержащих произведения различных компонент одного и того же поля, равны нулю, так как эти компоненты не связаны между собой. Следовательно, остаются только квадратичные члены

$$\overline{F}_{v_x} = \epsilon \frac{\partial \overline{E_x^2}}{\partial x} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \overline{E^2}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \overline{H_x^2}}{\partial x} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \overline{H^2}}{\partial x}. \quad (11.30)$$

Согласно предположению о том, что различные ориентации поля равновероятны, должно быть

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \frac{1}{3} \overline{E^2}$$

и аналогично

$$\overline{H_x^2} = \frac{1}{3} \overline{H^2}.$$

Таким образом, сила, перпендикулярная поверхности, равна

$$\overline{F}_{v_x} = -\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon \overline{E^2} + \mu \overline{H^2}] = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{U}}{3} \right),$$

где U — плотность энергии излучения. Чтобы найти полное давление излучения, проинтегрируем это выражение от поверхности среды до места, где излучение отсутствует:

$$\int_0^{\infty} \overline{F}_{v_x} dx = \frac{1}{3} \overline{U}. \quad (11.31)$$

Следовательно, давление излучения равно одной трети плотности энергии этого излучения. Полученное соотношение лежит в основе

термодинамического вывода закона Стефана — Больцмана и закона смещения Вина для излучения черного тела.

При упрощении выражения (11.29) мы использовали предположение, что различные ориентации полей равновероятны. Это предположение следует из полной однородности и изотропности излучения. Для того чтобы это осуществлялось на практике, стенки полости должны быть «черными», т. е. полностью поглощающими излучение. В противном случае, например в полостях с зеркальными стенками, соотношение (11.31) не справедливо.

§ 11.4. Плоские волны в движущейся среде

В отличие от давления излучения, впервые предсказанного электромагнитной теорией, скорость света в движущейся среде была рассчитана Френелем на основе предположения об упругих волнах в покоящемся эфире. Физо в 1853 г. экспериментально подтвердил эти расчеты. Формула Френеля согласуется с уравнениями Максвелла для движущейся среды при условии, что скорость среды отсчитывается относительно такой системы координат, в которой скорость света в свободном пространстве равна c . В дальнейшем расчеты Френеля мы повторим в рамках теории относительности.

Согласно Френелю и Физо скорость света в среде, движущейся со скоростью v относительно наблюдателя, равна

$$u = u_0 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \cdot n, \quad (11.32)$$

где $n = \sqrt{kk_m}$ — показатель преломления среды, а $u_0 = \frac{c}{n}$. Показатель преломления не следует путать с единичным вектором n , направленным в сторону распространения волн $u = un$. Скорость электромагнитных волн в немагнитной среде, движущейся со скоростью, значительно меньшей c , можно вывести, используя результаты § 9.4. Уравнения Максвелла в движущейся среде в отсутствие свободных зарядов и токов легко вывести из уравнений (9.18)

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (4) \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}). \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

Поляризация обуславливается эффективным полем в движущейся среде

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (k - 1) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (9.19)$$

Заметим, что все поля, входящие в соотношения (11.33) и (9.19), измеряются в неподвижной системе координат, связанной с наблюдателем. Подставим выражение для поля поляризации (9.19) в четвертое уравнение Максвелла (11.33) и затем учтем третье уравнение Максвелла. Тогда с точностью до членов, линейных относительно \mathbf{v} , получим

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \\ &= \mu_0 \left\{ \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0 (k-1) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0 (k-1) \left[\mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) \right] \right\} = \\ &= \frac{k}{c^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left[-\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) \right] \right\}. \quad (11.34) \end{aligned}$$

Тройные векторные произведения можно разложить по обычной формуле. Если при этом учесть, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, то при постоянном \mathbf{v} соотношение (11.34) принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{k}{c^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{k} \right) [2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})] \right\}. \quad (11.35)$$

Вычисляя ротор обеих частей и используя уравнения (3) и (2) системы (11.33), получим волновое уравнение для среды, движущейся с небольшой скоростью

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{k}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (11.36)$$

Так как до сих пор нас интересовали лишь члены, линейные относительно скорости, то для плоских волн можно положить

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial \zeta} = - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u_0} \frac{\partial}{\partial t},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный в сторону распространения волн, а ζ — координата, вдоль которой происходит распространение. Следовательно,

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \left[1 - 2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u_0} \right] = 0. \quad (11.37)$$

Это волновое уравнение соответствует скорости распространения

$$u = u_0 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right) 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u_0} \right]^{-1/2} \approx u_0 + \left(1 - \frac{1}{k} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (11.38)$$

которая с точностью до членов порядка v/c совпадает с (11.32). Кроме Физо, эту формулу с большей точностью проверяли Майкельсон и Морли.

Физический смысл соотношения (11.38) заключается в том, что движение среды оказывает влияние лишь на часть скорости

распространения, пропорциональную

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \sim \frac{\frac{\partial P}{\partial t}}{\frac{\partial D}{\partial t}}, \quad (11.39)$$

т. е. отношению поляризационных токов к токам смещения. Так как поляризационные токи обуславливаются реальными движениями зарядов в диполях, то естественно полагать, что движение среды повлияет на ту часть волны, которая обусловлена этими диполями. Впоследствии мы увидим, что действительно влияние среды на падающую волну обусловлено излучением диполей, возникающих в среде под действием падающей волны. Это излучение взаимодействует с падающей волной, что и приводит к изменению фазовой скорости. Именно эта когерентная замедленная компонента, излучаемая движущимися источниками, приводит к возникновению коэффициента Френеля—Физо. В дальнейшем будет показано, что все предположения и результаты этой классической нерелятивистской теории согласуются с теорией относительности.

§ 11.5. Отражение и преломление на плоской границе

Граничные условия, вытекающие из уравнений поля, полностью определяют явления, происходящие при падении плоской волны на границу раздела между двумя средами с различными электрическими и магнитными свойствами. Пусть плоская волна распространяется в среде 1 в направлении \mathbf{k} (рис. 11.2) и падает на плоскую границу между средами 1 и 2, которые характеризуются постоянными μ_1 , ϵ_1 и μ_2 , ϵ_2 . Волновой вектор \mathbf{k} и единичный вектор \mathbf{n} , нормальный поверхности раздела, определяют так называемую плоскость падения волны. Согласно соотношениям (11.20) и (11.21) поля в падающей волне равны

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu_1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

Одна распространяющаяся волна не может удовлетворить граничным условиям, так как касательные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} должны быть непрерывны на границе. Для отраженной и преломленной волн можно написать

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= E_0' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, & \mathbf{H}' &= \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{\omega \mu_2}, \\ \mathbf{E}'' &= E_0'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, & \mathbf{H}'' &= \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{\omega \mu_1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

Штрихом обозначена преломленная волна в среде 2, двойным штрихом — отраженная волна. Непрерывность касательных компонент возможна только, если показатели в экспоненте одинаковы для всех трех полей на границе раздела. Таким образом, неявно использованное нами при написании соотношений (11.41) предположение, что частота не меняется при переходе из одной среды в другую, оказывается справедливым. Кроме того, на поверхности раздела получаем дополнительные условия

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}, \quad (11.42)$$

из которых видно, что все волновые векторы компланарны. Предположим для удобства, что начало радиуса-вектора \mathbf{r} лежит в плоскости раздела, определяемой единичным вектором \mathbf{n} . Тогда уравнение плоскости имеет вид $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$, и следовательно, для всех точек плоскости

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) &= \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Подстановка этого равенства в соотношение (11.42) приводит к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) &= 0, \\ (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

Таким образом, волновые векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}'' , соответствующие одной и той же среде, равны по величине, а отношение модулей волновых векторов $\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} = \frac{u_2}{u_1}$ равно отношению фазовых скоростей в этих средах. Следовательно, законы отражения и преломления содержатся в соотношениях (11.43). Для того чтобы написать их в обычной форме, нужно ввести углы в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta'', \\ \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} &= \frac{u_1}{u_2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

Второе соотношение называется законом Снеллиуса.

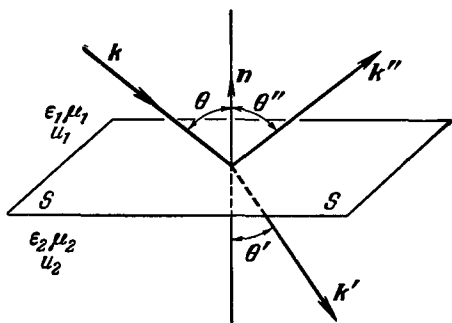


Рис. 11.2. Волновые векторы при преломлении и отражении на плоской поверхности.

Волновой вектор \mathbf{k} и вектор \mathbf{n} , нормальный отражающей поверхности, определяют плоскость падения

Амплитуды полей должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}'') &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}', \\ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'')}{\mu_1} &= \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}')}{\mu_2}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях амплитуды магнитных полей выражены через амплитуды электрических полей. Практически достаточно рассмотреть случай $\mu_1 = \mu_2$. Ориентация вектора \mathbf{E} произвольна, но его можно всегда считать состоящим из двух взаимно перпендикулярных компонент. Кроме того, амплитуду \mathbf{E} будем считать комплексной, чтобы учесть различные разности фаз.

а) *Электрическое поле \mathbf{E} перпендикулярно плоскости падения.*

В этом случае все электрические векторы параллельны поверхности раздела и, следовательно,

$$E_0 + E_0'' = E_0'. \quad (11.45)$$

Так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$, то преобразование тройного векторного произведения для второго граничного условия дает

$$E_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) + E_0''(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'') = E_0'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'),$$

или, вводя углы, изображенные на рис. 11.2,

$$E_0 \cos \theta - E_0'' \cos \theta'' = \frac{u_1}{u_2} E_0' \cos \theta'. \quad (11.46)$$

Уравнения (11.45) и (11.46) позволяют выразить амплитуды преломленной и отраженной волн через амплитуду падающей волны

$$\left. \begin{aligned} E' &= E \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \frac{u_1}{u_2} \cos \theta'}, \\ E'' &= -E \frac{\frac{u_1}{u_2} \cos \theta' - \cos \theta}{\frac{u_1}{u_2} \cos \theta' + \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (11.47)$$

При выводе мы воспользовались тем, что $\theta'' = \theta$. Если угол θ исключить с помощью закона преломления, то эти соотношения будут зависеть лишь от угла падения. Величина $\frac{u_1}{u_2} = n_{21}$ называется показателем преломления среды 2 относительно среды 1. Обычно индексы у n опускают.

б) *Электрическое поле \mathbf{E} параллельно плоскости падения.*

В этом случае магнитное поле \mathbf{H} параллельно поверхности раздела, и рассуждения аналогичны предыдущему, за исключением того,

что в силу соотношения

$$E = -\mu\omega \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{H}}{k^2}, \quad (11.48)$$

вытекающего из уравнений Максвелла, распределение постоянных получается несколько иным. Предположим опять, что обе среды имеют одинаковую магнитную проницаемость. Тогда

$$\left. \begin{aligned} H' &= H \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \frac{u_2}{u_1} \cos \theta'} \\ H'' &= -H \frac{\frac{u_2}{u_1} \cos \theta' - \cos \theta}{\frac{u_2}{u_1} \cos \theta' + \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

Соотношения (11.47) и (11.49) называются формулами Френеля. Впервые они были получены в теории упругого эфира. Их преобразование к другим, более удобным видам, а также вывод коэффициентов отражения и прохождения предлагаются в качестве задач.

Из того факта, что две компоненты поля отражаются и преломляются по-разному, следует ряд интересных выводов. В первом из рассмотренных выше случаев, когда электрическое поле перпендикулярно к плоскости падения, отражение имеется всегда, если только оптические свойства двух сред различны, т. е. если $\theta \neq \theta'$. Во втором же случае отраженная волна может отсутствовать. Это происходит, когда $\theta + \theta' = 90^\circ$, т. е. \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' взаимно перпендикулярны¹⁾. Угол падения, удовлетворяющий этому условию, называется углом Брюстера или углом поляризации. Из закона преломления следует, что угол Брюстера определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{u_1}{u_2}. \quad (11.50)$$

При таком угле падения в отраженном луче имеется лишь одна компонента с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения. Это свойство можно использовать для поляризации колебаний: если одну или несколько пластинок диэлектрика расположить под углом Брюстера к падающей волне, то отраженная волна будет плоско поляризованной.

С другой стороны, имеется ряд углов, для которых преломленный луч отсутствует. Если u_2 больше, чем u_1 , то закон преломления (закон Снеллиуса) при $\theta > \arcsin \frac{u_1}{u_2}$ приводит к значениям $\sin \theta'$, большим единицы. В этом случае говорят, что произошло полное отражение. Так как амплитуды иногда могут быть комплексными,

¹⁾ Это ясно из формул задачи 2, см. ниже.

то мы исследуем этот случай более детально с помощью формулы Френеля. Воспользовавшись законом преломления, исключим угол θ . Тогда в случае а) электрическое поле E , перпендикулярное к плоскости падения, равно

$$E'' = E \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta' \cos \theta'}{\sin \theta \cos \theta + \sin \theta' \cos \theta'} = E \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}. \quad (11.51)$$

Мнимая величина $\cos \theta' = \frac{i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n}$ представлена в этом выражении в явном виде. Отсюда видно, что амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей, однако фаза отраженной волны иная:

$$E'' = E e^{-2i\varphi}, \quad (11.52)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta}. \quad (11.53)$$

Согласно соотношениям (11.49), если электрический вектор лежит в плоскости падения, то имеет место равенство

$$H'' = H \frac{\cos \theta - \frac{i}{n^2} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + \frac{i}{n^2} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} = H e^{-2i\psi}, \quad (11.54)$$

где

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta}.$$

Таким образом, излучение с различной поляризацией изменяет фазу по-разному. Вследствие этого плоско поляризованное излучение после отражения становится эллиптически поляризованным. Разность фаз двух компонент $2(\varphi - \psi)$ зависит как от угла падения, так и от относительного показателя преломления. Простой расчет показывает, что

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sin^2 \theta}. \quad (11.55)$$

Хотя в случае полного отражения коэффициент прохождения равен нулю, мгновенные значения поля во второй среде не равны нулю. Тот факт, что θ' — чисто мнимая величина, обуславливает экспоненциальное уменьшение поля во второй среде. Поле во второй среде может быть обнаружено на опыте, если вблизи поверхности раздела поместить прозрачный предмет с большим показателем преломления.

§ 11.6. Волны в проводящей среде. Отражение от металлов

Если предположить, как и ранее, что все переменные синусоидально зависят от времени, то решение общего волнового уравнения (11.15) имеет вид, аналогичный решению уравнения для распространяющихся волн (11.16). Для любой поперечной компоненты E можно написать

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} = -(\mu \epsilon \omega^2 E + i \omega \mu \sigma E) = -K^2 E, \quad (11.56)$$

где

$$K = \alpha + i\beta = k \sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}}. \quad (11.57)$$

Если разделить действительную и мнимую части K , то получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}{2}}, \\ \beta &= k \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

Таким образом, векторы E и H равны

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 e^{-\beta \zeta} e^{i(\alpha \zeta - \omega t)}, \\ H &= \frac{k \times E}{\mu \omega} (\alpha + i\beta). \end{aligned} \right\} \quad (11.59)$$

где, как и ранее, вектор k направлен по оси ζ . Из этих уравнений следует, что проводимость среды приводит к двум особенностям: во-первых, волны становятся затухающими и, во-вторых, фазы электрического и магнитного векторов перестают быть одинаковыми.

Отражение от плоской металлической границы определяется формулами Френеля. Однако они приводят к довольно сложным выражениям. При частотах, меньших чем частоты оптической области, весьма полезным оказывается приближение, когда $\epsilon\omega \ll \sigma$. В этом случае

$$K = (1 + i) k \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \quad (11.60)$$

Для простоты предположим, что плоская волна, распространяющаяся в диэлектрике в направлении ζ , падает нормально на поверхность

проводника. Поля в проводнике равны

$$\left. \begin{aligned} E' &= E_0' e^{-\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \zeta} e^{i \left(\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \zeta - \omega t \right)}, \\ H' &= \frac{B'}{\mu} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} n \times E'. \end{aligned} \right\} \quad (11.61)$$

Расстояние ζ отсчитывается от границы раздела. Оба поля уменьшаются по мере проникновения в проводник. На глубине

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (11.62)$$

их величины в e раз меньше, чем на поверхности. Это расстояние называется скин-глубиной или глубиной проникновения. Заметим, что δ стремится к нулю, если проводимость стремится к бесконечности, а также уменьшается с увеличением частоты. К бесконечным частотам равенство (11.62) экстраполировать нельзя, так как при нарушении неравенства $\epsilon\omega \ll \sigma$ следует пользоваться более общими формулами (11.58).

При распространении волн в металле энергия уже не разделяется поровну между двумя полями: среднее значение плотности электрической энергии равно $\epsilon \bar{E}^2/2$, а магнитной — $\sigma \bar{E}^2/2\omega$, т. е. их отношение, равное $\epsilon\omega/\sigma$, весьма малая величина согласно нашему предположению. Таким образом, в проводнике плотность электрической энергии пренебрежимо мала по сравнению с магнитной, иначе говоря, электрическое поле почти не проникает в хорошие проводники при условии, что $\epsilon\omega \ll \sigma$.

Легко вычислить «коэффициент отражения» от металлической поверхности. Для этого вспомним, что отраженная волна распространяется в сторону больших отрицательных значений ζ , т. е.

$$E'' = E_0'' e^{-i(k\zeta + \omega t)}.$$

Воспользуемся затем условием непрерывности E и H на границе. Тогда для отношения отраженной энергии к падающей получим выражение

$$\left| \frac{E''}{E} \right|^2 = 1 - 2 \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}, \quad (11.63)$$

если пренебречь членами со степенями $\sqrt{2\epsilon_0\omega/\sigma}$ выше первой.

§ 11.7. Общее решение однородного волнового уравнения

Согласно теореме Фурье общее решение волнового уравнения в трех измерениях может быть разложено в интеграл Фурье по трем компонентам волнового вектора k . Вектор k связан с частотой посредством соотношения $k^2 = \frac{\omega^2}{u^2}$. Интегралы Фурье распространяются

на все положительные и отрицательные значения k , и кроме того, производится суммирование по всем возможным поляризациям. В результате общее решение однородного волнового уравнения представляется в виде суперпозиции плоских волн

$$E = \sum_{\alpha=1}^3 \left[\epsilon_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 a_{\alpha k}^{\alpha} e^{i(k \cdot r - \omega t)} \right], \quad (11.64)$$

где ϵ_{α} — единичные векторы вдоль координатных осей, a_k — амплитуды, зависящие от частоты. Они могут быть комплексными, что соответствует произвольным начальным фазам. Это разложение часто используется в общей теории излучения. Условие «поперечности» $\nabla \cdot E = 0$ уменьшает число возможных значений α от трех до двух.

В предыдущем параграфе мы видели, что при частотах, меньших оптических, хорошие проводники весьма эффективно отражают излучение. В случае вакуумной полости или диэлектрика, ограниченных проводниками, волновое уравнение становится однородным уравнением Штурма — Лиувилля с дискретными собственными значениями, т. е. граничные условия удовлетворяются только при некоторых значениях частоты. При этом решение (11.64) сводится к сумме по k . В гл. 12 мы рассмотрим подобные случаи с более общей точки зрения.

Общее решение однородного волнового уравнения можно разложить также на сферические или цилиндрические волны как при непрерывных, так и дискретных значениях k . В дальнейшем мы увидим, что выбор того или иного разложения зависит от симметрии рассматриваемой задачи.

Задачи

1. Покажите, что среднее по времени значение действительной части произведения двух комплексных векторов, каждый из которых зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, равно половине действительной части произведения одного вектора на вектор, комплексно сопряженный другому.

2. Докажите, что формулы Френеля имеют следующий вид:

а) для преломленной волны $E' = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} E$,

б) для отраженной волны $E'' = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} E$, если электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения. Докажите также, что если вектор E лежит в плоскости падения, то коэффициент отражения равен

$$\frac{|E''|}{|E|} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta')}.$$

3. С помощью формул Френеля покажите, что коэффициент прохождения обращается в нуль при условиях, соответствующих полному отражению.

4. Докажите, что при нормальном падении коэффициент отражения от границы раздела между двумя диэлектриками равен $(n - 1)^2 / (n + 1)^2$, где n — показатель преломления среды 2 по отношению к среде 1. Чему равен коэффициент прохождения? Выразите через показатель преломления стекла долю света, прошедшего при нормальном падении через прозрачную стеклянную пластинку, находящуюся в воздухе.

5. Плоская волна зеркально отражается от некоторой поверхности под углом θ к нормали. Определите давление излучения.

6. Найдите отношение сопротивления проводящей проволоки при высоких частотах к ее сопротивлению постоянному току. Полученное соотношение носит название формулы Релея для скин-эффекта.

7. В положительном и отрицательном направлениях оси z распространяются плоские монохроматические волны. В начале координат поля равны

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos \omega t, & E_y &= 0, \\ H_x &= 0, & H_y &= B \cos \omega t. \end{aligned}$$

Выразите средние интенсивности излучения в каждом направлении через величины A и B и константы среды.

ЛИТЕРАТУРА

Плоские электромагнитные волны рассмотрены во многих книгах по электродинамике и физической оптике, а также в учебниках по теоретической физике. Наш список включает лучшие и наиболее доступные книги.

1. M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*. (Русский перевод: М. Абрагам и Р. Беккер, *Электричество и магнетизм*, т. I, гл. X.)

Изложение ясно, строго и довольно просто.

2. M. Born, *Optic*. (Русский перевод: М. Борн, *Оптика*, гл. 1.) По-видимому, это наиболее полный и строгий обзор по физической оптике.

3. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. (Русский перевод: Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, гл. V.)

Очень полезная книга как с точки зрения общности, так и детальности изложения.

Более краткое рассмотрение можно найти в книгах:

4. J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*.

5. G. Joos, *Theoretical Physics*.

В гл. XIX рассмотрено распространение электромагнитных волн в анизотропной среде.

6. J. C. Slater and N. H. Frank, *Electromagnetism*.

7. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. (Русский перевод: В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*.)

8. H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*. (Русский перевод: Г. Лорентц, *Теория электронов*.)

Книга содержит прекрасное изложение вопроса о давлении излучения.

*. И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*.

*. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, IV изд.

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОВОДЯЩИХ ГРАНИЦ

Прежде чем перейти к теории излучения, исследующей возбуждение электромагнитных волн, мы рассмотрим решения однородного волнового уравнения при наличии проводящих границ. Задача имеет большое теоретическое значение, а также множество практических применений, особенно в области радиотехники (СВЧ). Мы рассмотрим лишь физическую сторону вопроса и не будем касаться практических устройств, основанных на этих принципах.

С самого начала следует заметить, что в отсутствие зарядов и токов введение потенциалов никаких существенных преимуществ не дает: можно оперировать непосредственно с электрическим и магнитным полями, помня, однако, что они не независимы и могут быть получены одно из другого с помощью уравнений поля.

§ 12.1. Граничные условия на поверхности металла

Напомним еще раз граничные условия общего вида, которым должны подчиняться поля на границе раздела между двумя средами:

$$\left. \begin{aligned} n \cdot (D_1 - D_2) &= \tau, \\ n \times (E_1 - E_2) &= 0, \\ n \cdot (B_1 - B_2) &= 0, \\ n \times (H_1 - H_2) &= K, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

где τ — поверхностная плотность зарядов и K — поверхностная плотность токов. В § 11.6 мы видели, что при нормальном падении электромагнитной волны амплитуда ее внутри хорошего проводника быстро уменьшается с глубиной. При этом касательная составляющая H может достигать больших значений, в то время как касательная составляющая E на поверхности идеального проводника обращается в нуль.

Исследуем теперь поведение нормальных компонент. Для этого рассмотрим хороший проводник, для которого $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$. Компонента ротора \mathbf{H} , нормальная поверхности металла, равна

$$\left. \begin{aligned} \text{вне проводника } \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) &= -i\omega\epsilon\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}, \\ \text{в проводнике } \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) &= (-i\omega\mathbf{D} + \sigma\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

и должна быть одинакова вне и внутри проводника, так как $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{V} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$. Если пренебречь током смещения в металле, то

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \text{ (внутри)} = -\frac{i\omega\epsilon}{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \text{ (снаружи)},$$

следовательно, и в этом приближении нормальная компонента \mathbf{E} испытывает разрыв. Подобно касательной компоненте она становится бесконечно малой внутри металла по мере того, как его проводимость приближается к бесконечности. С другой стороны, нормальная компонента \mathbf{B} непрерывна при переходе через поверхность проводника.

Если в идеальном проводнике \mathbf{E} обращается в нуль, то и $\mathbf{V} \times \mathbf{E} = 0$, а следовательно, и производная \mathbf{B} по времени также становится равной нулю. Поэтому внутри такого проводника никаких переменных полей существовать не может. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= \tau, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{K}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Из этих условий видно, что электрическое поле нормально, а магнитное — параллельно поверхности проводника. Для хороших проводников применение этих условий позволяет точно рассчитать геометрию полей; однако ряд существенных факторов, например потери в резонаторах и затухание при передаче волн по волноводам, при таком рассмотрении выпадают.

Для оценки потерь в металле интересно посмотреть, как нормальные и тангенциальные поля изменяются в первом приближении по параметру $1/\sigma$. Касательная компонента \mathbf{E} строго непрерывна на границе, и следовательно, согласно § 11.6 имеем

$$\mathbf{H} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (12.4)$$

Не рассматривая полного решения, предположим, что вдоль поверхности металла распространяется волна с тангенциальной компонен-

той H и нормальной компонентой E . Пусть компонента волнового вектора, параллельная поверхности металла, равна k ; тогда вблизи этой поверхности

$$|H_{\parallel}| = \frac{k}{\mu\omega} |E_{\perp}|. \quad (12.5)$$

Однако согласно соотношению (12.4) тангенциальной компоненте H сопутствует небольшая тангенциальная компонента E . Сравнивая выражения (12.4) и (12.5), легко видеть, что отношение тангенциальной компоненты E к нормальной по порядку величины равно отношению скинновой глубины к длине волны излучения

$$\frac{|E_{\parallel}|}{|E_{\perp}|} \approx k \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} = \frac{\delta}{\lambda}. \quad (12.6)$$

Для оценки потерь в проводнике нас интересует тангенциальная компонента E , но нетрудно показать, что отношение соответствующих компонент H того же порядка величины.

Таким образом, при большой проводимости скинновая глубина становится бесконечно малой, и поля не проникают в проводник. Граничные условия в этом случае имеют вид (12.3). Рассмотрим решения однородного волнового уравнения, удовлетворяющие этим условиям.

§ 12.2. Собственные функции и собственные значения волнового уравнения

В декартовых координатах векторное волновое уравнение эквивалентно системе трех скалярных уравнений, каждое из которых соответствует одной ортогональной компоненте вектора. В других системах координат положение сложнее. Однако, как мы увидим в дальнейшем, по крайней мере в цилиндрических и сферических координатах, поля также могут описываться скалярными функциями. Таким образом, наша задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (12.7)$$

где Ψ представляет собой компоненты E или H и удовлетворяет соответствующим граничным условиям.

В отличие от уравнения Лапласа, уравнение (12.7) не симметрично относительно своих независимых переменных: вторая производная по времени входит с другим знаком, нежели производные по координатам. В результате этого характер возможных решений с физической точки зрения по существу отличается от статических решений. Так, например, теперь возможны периодические решения в полностью экранированном объеме, не содержащем источников, в то время как статистическое поле внутри заземленного проводника равно нулю.

Пусть зависимость T от времени — синусоидальная:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) T(t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (12.8)$$

где ψ — функция только пространственных координат, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\omega^2}{c^2} \psi = -k^2 \psi. \quad (12.9)$$

Прямоугольные координаты допускают разделение переменных, т. е., если $\psi = X(x) Y(y) Z(z)$, то

$$\left. \begin{aligned} X'' + k_1^2 X &= 0, \\ Y'' + k_2^2 Y &= 0, \\ Z'' + k_3^2 Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

причем параметров разделения три:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (12.11)$$

как и следовало ожидать при четырех независимых переменных. Уравнения (12.10), или аналогичные им в других системах координат, следует решать при тех граничных условиях, которым подчиняются компоненты поля, соответствующие скалярной функции ψ .

Рассмотрим эту задачу в несколько более общем виде. Каждое из уравнений (12.10) представляет собой частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] X = 0, \quad (12.12)$$

где λ — параметр, в данном случае — параметр разделения. Нас интересуют решения этого уравнения, ограниченные и непрерывные в интервале $a \leq x \leq b$ и удовлетворяющие определенным граничным условиям в точках $x = a$ и $x = b$. Относительно $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ будем лишь предполагать, что в этом интервале решения особенностей не имеют, за исключением, быть может, границ. В общем случае граничным условиям можно удовлетворить лишь при определенных значениях λ . Эти значения λ называют собственными значениями, и решения уравнения (12.12), соответствующие собственным значениям λ , называют собственными функциями. С аналогичной одномерной задачей мы уже встречались раньше при изучении метода разделения переменных в случае статического потенциала. Однако в данном случае решение трехмерной задачи в целом характеризуется собственным значением, определяемым частотой.

Для того чтобы упростить рассуждения, рассмотрим сначала случай, когда $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ и $X(x) = 0$ на границах области.

Тогда уравнение (12.12) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] = -\lambda X, \quad (12.13)$$

из которого видно, что если $\lambda < 0$ и $X(x) = 0$ при $X = a$, то при $X = b > a$ $X(x)$ не может равняться нулю, ибо, отклонившись от нуля, функция $X(x)$ будет продолжать увеличиваться по абсолютной величине. С другой стороны, при положительных λ знак второй производной противоположен знаку $X(x)$, следовательно, при некотором значении λ функция $X(x)$ снова пересечет ось x как раз в точке b . Дальнейший рост λ приведет к тому, что функция $X(x)$ пересечет ось x левее точки b . Однако, в конце концов, будет достигнуто такое значение λ , при котором функция $X(x)$ опять будет равна нулю в конце интервала, имея, однако, при этом один нуль в середине интервала. Таким образом, собственные значения имеют нижний предел и могут быть перенумерованы в порядке возрастания $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, причем индекс собственного значения равен числу нулей соответствующей собственной функции внутри интервала.

Эти рассуждения могут быть повторены и в общем случае уравнения (12.12), за исключением того, что знак второй производной зависит теперь от знака коэффициента при $X(x)$ в уравнении (12.12), при котором существуют решения. Если же решение существует, то имеется и наименьшее значение для λ . Так, например, уравнение Бесселя

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_n}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{n^2}{r} \right) J_n = 0$$

не будет иметь решений, обращающихся в нуль в обоих концах интервала, пока $k^2 r > \frac{n^2}{r}$.

Если граничные условия на концах интервала требуют обращения в нуль самой функции $X(x)$ или ее первой производной, то собственные функции уравнения (12.12) ортогональны в этом интервале. Для доказательства этого утверждения предположим, что имеются два решения X_n и X_m , соответствующие собственным значениям λ_n и λ_m . Умножим теперь уравнение для X_n на X_m , а уравнение для X_m на X_n . После этого вычтем одно уравнение из другого и результат проинтегрируем по рассматриваемому интервалу. Так как сами функции или их производные обращаются в нуль на границах интервала, то после интегрирования получим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) X_m X_n dx = 0. \quad (12.14)$$

В математических исследованиях функцию $r(x)$ часто называют «весом функций $X(x)$ ».

Если при данном значении λ возможно более, чем одно решение, то говорят, что решение вырождено. Число независимых решений, соответствующих данному значению λ , называется степенью вырождения. В этом случае соотношение (12.14) не означает ортогональности решений, так как λ_m может равняться λ_n при $m = n$. Тем не менее, и теперь могут быть подобраны ортогональные решения. Дело в том, что любая линейная комбинация независимых решений есть также решение, и эти линейные комбинации могут быть сделаны ортогональными друг другу. Выбор коэффициентов в ортогональных линейных комбинациях неоднозначен. Обычно их подбирают таким образом, чтобы решение, получаемое в конечном счете, описывало некоторое, легко обнаруживаемое физическое свойство системы. Во всяком случае все независимые решения можно всегда считать ортогональными, предполагая, что для вырожденных значений λ произведена ортогонализация решений,

В любой системе координат, допускающей разделение переменных, ψ есть произведение функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. Таким образом, частота, для которой существует решение (12.9), зависит от трех параметров, по одному от каждой из переменных.

Для дальнейшего полезно доказать, что решения волнового уравнения ортогональны. Применим к функциям ψ_n и ψ_m теорему Грина

$$\int (\psi_m \nabla^2 \psi_n - \psi_n \nabla^2 \psi_m) dv = \int (\psi_m \nabla \psi_n - \psi_n \nabla \psi_m) \cdot dS.$$

В силу граничных условий, требующих обращения в нуль поля или его нормальной производной, поверхностный интеграл обращается в нуль. Объемный интеграл, используя (12.9), можно преобразовать к виду

$$(k_n^2 - k_m^2) \int \psi_m \psi_n dv = 0, \quad (12.15)$$

откуда непосредственно следует ортогональность решений ψ_n и ψ_m . Сравнивая соотношения (12.14) и (12.15), можно видеть, что «вес» $r(x)$ представляет собой множитель, дающий правильный элемент объема в трехмерном пространстве.

Таким образом, в замкнутом объеме, на границах которого поле или его производные обращаются в нуль, могут существовать характерные для этого объема электромагнитные колебания, подобные колебаниям натянутой струны. Частоты этих колебаний определяются собственными значениями, причем наименьшему собственному значению соответствует основная частота колебаний, за которой следует бесконечное множество других. Пока мы пренебрегаем проводимостью стенок, эти колебания обладают нулевой шириной и не взаимодействуют друг с другом. Однако в действительности эти колебания затухают, и затухание их определяется проводимостью стенок. Сле-

дует указать также, что реально возникающее в полости колебание зависит от метода возбуждения.

В нестационарном случае все четыре множителя, соответственно числу переменных, могут быть периодическими, однако лишь трем из них соответствуют замкнутые границы. Что касается четвертой переменной — времени, то решение зависит только от начальных условий, $\Psi(x, y, z, t_0)$ и $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=t_0}$. Решение, удовлетворяющее и начальным, и конечным условиям, в общем случае отсутствует.

§ 12.3. Колебания в прямоугольном резонаторе

Рассмотрим часть пространства в форме прямоугольного параллелепипеда, ограниченного проводящими стенками. В этом случае все компоненты поля можно представить в виде произведений решений уравнений (12.10). При этом k_1 , k_2 и k_3 следует выбрать так, чтобы на стенках электрическое поле было нормально им, а магнитное — касательно. Если размеры резонатора A , B и C , то легко проверить, что электрическое поле имеет следующие составляющие:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_2 \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z e^{-i\omega t}, \\ E_z &= E_3 \sin k_1 x \sin k_2 y \cos k_3 z e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

причем собственные значения должны удовлетворять условиям

$$k_1 = \frac{l\pi}{A}, \quad k_2 = \frac{m\pi}{B}, \quad k_3 = \frac{n\pi}{C}, \quad (12.17)$$

где l , m и n — целые числа. Возможные значения частоты определяются соотношением

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} + \frac{n^2}{C^2} \right). \quad (12.18)$$

Из соотношений (12.16) видно, что по крайней мере два из трех целых чисел должны быть отличны от нуля, для того чтобы поле не обращалось тождественно в нуль. Магнитное поле, полученное из соотношений (12.16) с помощью уравнения

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B},$$

автоматически удовлетворяет граничным условиям. По фазе оно на четверть периода не совпадает с электрическим полем. Вследствие этого сумма электрической и магнитной энергий в резонаторе остается постоянной, хотя в отдельности каждая из них изменяется.

Амплитуды компонент электрического поля не независимы, ибо должны удовлетворять условию $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, т. е.

$$E_1 k_1 + E_2 k_2 + E_3 k_3 = 0. \quad (12.19)$$

Если величины k_1, k_2, k_3 представляют собой составляющие вектора \mathbf{k} , то условие (12.19) есть условие перпендикулярности векторов \mathbf{E} и \mathbf{k} . В общем случае этому условию удовлетворяют два линейно независимых вектора, что соответствует двум возможным поляризациям (за исключением случая, когда одно из чисел l, m, n равно нулю; тогда направление \mathbf{E} фиксировано). Эти два вектора произвольны, но не должны быть коллинеарны. Каждому из этих векторов соответствует электрическое поле и перпендикулярное ему магнитное поле. Таким образом, как и прежде, тройка векторов $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ образует ортогональную систему.

Поля, соответствующие определенному набору целых чисел l, m, n , образуют одно из возможных собственных колебаний данного резонатора. Произвольное поле в резонаторе представляет собой сумму всех возможных колебаний, амплитуды которых зависят от метода возбуждения.

В реальных резонаторах энергия электромагнитных колебаний поглощается стенками. Скорость затухания легко оценить из соображений, указанных в § 12.1. Согласно соотношению (12.4) при конечной проводимости σ величина касательной компоненты \mathbf{E} равна

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} \mathbf{H}_{\parallel} \times \mathbf{n}.$$

Тангенциальная компонента \mathbf{H} также будет несколько отличаться от соответствующей компоненты для идеального случая; однако это отличие относительно невелико, и им можно пренебречь. Для того чтобы найти мощность потерь в стенках, нужно вычислить среднее по времени значение вектора Пойнтинга, направленного внутрь стенки:

$$\bar{N} = \frac{\text{Re}(\mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{H}_{\parallel})}{2} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} H_{\parallel 0}^2 = \frac{H_{\parallel 0}^2}{2\sigma\delta}. \quad (12.20)$$

В этом выражении величина $H_{\parallel 0}$ представляет собой амплитудное значение касательной компоненты магнитного поля, равное амплитудному значению поверхностного тока. Введем поверхностное сопротивление R_s

$$\bar{N} = n(\bar{K}^2 R_s),$$

равное

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta}.$$

Полную мощность потерь в резонаторе можно получить, интегрируя

(12.20) по всей поверхности резонатора. Потери в стенках при данном виде колебаний можно характеризовать «добротностью» Q резонатора. Добротность определяется соотношением

$$Q = \frac{\text{энергия, запасенная в резонаторе}}{\text{энергия, теряемая в стенках за один период}},$$

где Q не зависит от амплитуды колебаний.

§ 12.4. Цилиндрические резонаторы

Прямоугольный резонатор, только что рассмотренный нами, имеет много общего с цилиндрическими резонаторами произвольного сечения. В любом резонаторе возможные значения k , а следовательно, и резонансные частоты, определяются геометрией резонатора. В прямоугольном резонаторе, как мы видели, набору чисел k_1, k_2, k_3 в общем случае соответствуют два независимых вида колебаний, различающиеся поляризацией. Вследствие этого ориентацию векторов поля можно положить в основу классификации видов колебаний. Разделим колебания на два вида: в первом — электрический вектор лежит в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, во втором — в этой плоскости расположен магнитный вектор. Такое разделение колебаний на поперечно-электрические (TE) и поперечно-магнитные (TM)¹⁾ возможно для всех цилиндрических резонаторов. Однако только в прямоугольном параллелепипеде колебания разных видов, но с одинаковой конфигурацией соответствуют одинаковым частотам (возможно вырождение и более высокого порядка, например при равенстве сторон параллелепипеда).

Покажем теперь, что такая классификация не только возможна, но и полна, т. е. охватывает все колебания цилиндрического резонатора. В этом случае, как нетрудно видеть, координату z в волновом уравнении можно выделить. Действительно, граничные условия при $z = 0$ и $z = C$ сводят зависимость от z к функциям $\sin k_3 z$ и $\cos k_3 z$, где $k_3 = \frac{n\pi}{C}$. Другими словами, каждая компонента поля должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_3^2 \right) \begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix} = 0, \quad (12.21)$$

равно как и

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix} = 0, \quad (12.22)$$

¹⁾ Волны поперечно-магнитные TM называют также волнами типа E а поперечно-электрические TE типа H . (Прим. ред.)

где величина k пока не определена. Кроме того, должны выполняться уравнения поля

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

Векторы и операторы, входящие в эти уравнения, разобьем на продольную и поперечную компоненты, причем последнюю обозначим индексом S . Для поперечных компонент поля получатся уравнения

$$\left. \begin{aligned} i\omega\mu\mathbf{H}_S &= \nabla_S \times \mathbf{E}_z + \nabla_z \times \mathbf{E}_S, \\ -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_S &= \nabla_S \times \mathbf{H}_z + \nabla_z \times \mathbf{H}_S. \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

поскольку $\nabla_S \times \mathbf{E}_S = i\omega\mu\mathbf{H}_z$ и т. д. В правую часть одного из уравнений (12.24) подставим поперечную компоненту поля, определенную из другого уравнения, а затем воспользуемся соотношением (12.21). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_S &= \frac{\nabla_S \frac{\partial E_z}{\partial z}}{k^2 - k_3^2} + \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_3^2} \nabla_S \times \mathbf{H}_z, \\ \mathbf{H}_S &= \frac{\nabla_S \frac{\partial H_z}{\partial z}}{k^2 - k_3^2} - \frac{i\omega\varepsilon}{k^2 - k_3^2} \nabla_S \times \mathbf{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

Таким образом, все поперечные компоненты выражены через продольные, каждая из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\nabla_S^2 + (k^2 - k_3^2)] \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (12.26)$$

где ∇_S^2 — двумерный оператор Лапласа.

Отсюда сейчас же следует, что возможны два вида колебаний: $E_z = 0$, $H_z \neq 0$ (TE) и $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ (TM), хотя граничные условия для компонент E_z и H_z на боковой поверхности цилиндра различны: в первом случае сама компонента E_z обращается в нуль, во втором — достаточно обращения в нуль лишь нормальной производной H_z . Когда сечение цилиндра — прямоугольник, оба условия приводят к одинаковым собственным значениям $(k^2 - k_3^2) = k_S^2 = k_1^2 + k_2^2$. В остальных случаях резонансные частоты различны, но классификация колебаний по поляризации электрического или магнитного векторов остается прежней.

Резонансные частоты определяются собственными значениями уравнений (12.21) и (12.26). Если зависимость E_z или H_z от координат в плоскости поперечного сечения описывается функцией $f(x, y)$, то уравнение (12.26) имеет вид

$$\nabla_S^2 f = -(k^2 - k_3^2) f = -k_S^2 f. \quad (12.27)$$

Покажем, что $k_S^2 > 0$ и поэтому $k > k_3$. По теореме Грина

$$-k_S^2 \int f^2 dv + \int (\nabla_S f)^2 dv = \int f \nabla f \cdot dS,$$

и если функция f или ее нормальная производная на цилиндрической поверхности S обращаются в нуль, то

$$k_S^2 = \frac{\int (\nabla_S f)^2 dv}{\int f^2 dv} > 0. \quad (12.28)$$

Мы уже видели, что $k_3 = \frac{n\pi}{C}$. Значения же k_S зависят как от геометрии поперечного сечения, так и от вида колебаний.

Для колебаний типа TM $H_z = 0$ и E_z зависит от z как $\cos \frac{n\pi z}{C}$. Для определения E_z и k уравнение (12.27) должно быть решено при условии, что функция $f(x, y)$ обращается в нуль на боковой поверхности цилиндра. Поперечные компоненты полей можно найти из соотношений (12.25):

$$\left. \begin{aligned} E_S &= \frac{1}{k_S^2} \nabla_S \frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ H_S &= -\frac{i\omega\epsilon}{k_S^2} \nabla_S \times E_z = \frac{i\omega\epsilon}{k_S^2} \hat{z} \times \nabla_S E_z, \end{aligned} \right\} \quad (12.29)$$

где \hat{z} — единичный вектор вдоль оси цилиндра.

Для колебаний типа TE $E_z = 0$ и граничные условия для H_z на основаниях цилиндра приводят к зависимости вида $\sin \frac{n\pi z}{C}$, а k_S должно быть таким, чтобы нормальная производная H_z обращалась в нуль на боковой поверхности цилиндра. Как и раньше, из соотношений (12.25) легко определить поперечные компоненты поля

$$\left. \begin{aligned} H_S &= \frac{1}{k_S^2} \nabla_S \frac{\partial H_z}{\partial z}, \\ E_S &= \frac{i\omega\mu}{k_S^2} \nabla_S \times H_z = -\frac{i\omega\mu}{k_S^2} \hat{z} \times \nabla_S H_z. \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

§ 12.5. Круглый цилиндрический резонатор

С помощью только что изложенных методов рассмотрим TM колебания прямого круглого цилиндрического резонатора. Компоненту E_z можно представить в следующем виде:

$$E_z = Af(r, \varphi) \cos(k_3 z) e^{-i\omega t},$$

где функция $f(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k_S^2 f = 0. \quad (12.31)$$

Разделение переменных приводит к уравнению Бесселя для радиальной координаты, так же как в электростатических задачах с цилиндрической симметрией. Если ось $r=0$ находится в объеме резонатора, то следует воспользоваться решением без особенностей в начале координат. Для резонатора радиусом r_0 и высотой C имеем

$$E_z = A J_m(k_l r) e^{im\varphi} \cos(k_3 z) e^{-i\omega t}. \quad (12.32)$$

Величины k_l определяются условием $J_m(k_l r_0) = 0$ и представляют собой собственные значения k_S уравнения (12.31). Резонансная частота того или иного типа колебаний определяется соотношением

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_l^2 + \frac{n^2 \pi^2}{C^2}.$$

Таким образом, частоты колебаний определяются нулями бесселевых функций. Как и в случае прямоугольного резонатора, вид колебаний характеризуется тремя целыми числами: l — порядковый номер нуля, m — порядок функции Бесселя и n — собственное значение по оси z . Поперечные компоненты поля находятся по формулам (12.29).

Частоты TE колебаний определяются условием $J'_m(k_l r_0) = 0$ на поверхности цилиндра. Таким образом, собственные значения k_l отличаются от собственных значений в случае поперечно-магнитных колебаний, и собственные частоты колебаний TM и TE разные. Число собственных колебаний бесконечно и каждое из них характеризуется тремя целыми числами.

Резонаторы в виде цилиндрического сектора описываются с помощью функций Бесселя нецелого порядка, так как в этом случае порядок собственных функций m определяется граничным условием на поверхностях $\varphi = \text{const}$. Методы решения, развитые выше, применимы к резонаторам, составленным из коаксиальных цилиндров. В этом случае, однако, нужно использовать полное решение уравнения Бесселя. Наиболее интересным свойством двусвязных резонаторов является наличие, кроме обычных колебаний типа TE и TM , колебаний типа TEM , при которых $E_z = 0 = H_z$. При таких колебаниях границы многосвязных областей ведут себя подобно внутренним источникам полей. Легко видеть, что имеется даже вид колебаний, соответствующий нулевой частоте. Компоненты электрического поля при таком виде колебаний вообще отсутствуют, например, когда по внешнему и внутреннему цилиндрам текут равные и противоположно направленные токи.

§ 12.6. Волноводы

Исследуем возможность передачи электромагнитной энергии вдоль оси волновода, который представляет собой длинный цилиндр с открытыми концами. Зависимость волны, распространяющейся вдоль оси z , от координат и времени можно представить следующим образом:

$$f(x, y)e^{i(k_g z - \omega t)}. \quad (12.33)$$

«Волновое число» k_g эквивалентно параметру k_z в уравнении (12.21), за исключением того обстоятельства, что число k_g не ограничивается теперь никакими граничными условиями и принимает поэтому непрерывный ряд значений. Соображения § 12.4, касающиеся классификации колебаний, справедливы и в данном случае. Поэтому мы можем отдельно рассматривать колебания типа TE и TM .

Большое значение в связи с этим приобретает особый случай, кратко затронутый в предыдущем параграфе. Если волновод представляет собой многосвязную область, т. е. границами его служат не менее, чем два цилиндра, то двумерный оператор Лапласа $\nabla_S^2 f(x, y)$ может обращаться в нуль на границах области. В этом случае решение в поперечной плоскости тождественно совпадает с решением электростатической задачи; волновое число $k^2 = k_g^2$ и скорость распространения колебаний равна c . В такой волне компоненты полей вдоль оси будут равны нулю: компонента E_z обращается в нуль, так как она равна нулю на границе и подчиняется уравнению $\nabla_S^2 E_z = 0$. Подобным образом компонента H_z обращается в нуль, так как подчиняется уравнению $\nabla_S^2 H_z = 0$, а на границе обращается в нуль ее нормальная производная. Таким образом, эта волна чисто поперечная TEM . Обычные коаксиальные и двухпроводные линии — типичные примеры подобных волноводов.

Если волновод представляет собой односвязную область, то решения для функции f аналогичны решениям в случае цилиндрических резонаторов. Хотя k_g принимает непрерывный ряд значений, однако при данном собственном значении k_S двумерного уравнения имеется нижний предел значений k , а именно $k = k_S$, при которых k_g — действительная величина (обычно в случае волноводов этот предел обозначают k_c). Соответственно имеется «предельная частота», ниже которой волны не могут распространяться при данном виде колебаний: поля экспоненциально уменьшаются при увеличении z . Абсолютная предельная частота равна наименьшей частоте, при которой возможно распространение волн в волноводе независимо от вида колебаний. Она определяется наименьшим значением k_S .

В общем случае k и k_g связаны соотношением

$$k_S^2 = k^2 - k_g^2. \quad (12.34)$$

При действительных k_g согласно выражению (12.33) волна распространяется с фазовой скоростью

$$v_p = \frac{\omega}{k_g} = \frac{k}{k_g} c.$$

Так как распространение возможно только, если $k > k_g$, то очевидно, что фазовая скорость в волноводе больше, чем скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве. Эта скорость зависит от частоты. Сложим две волны с несколько различными частотами

$$e^{i(k_g z - \omega t)} [1 + e^{i(\Delta k_g z - \Delta \omega t)}],$$

откуда видно, что сложение двух волн эквивалентно модуляции первоначальной волны. Эта модуляция распространяется со скоростью

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k_g} \rightarrow \frac{d\omega}{dk_g}, \quad (12.35)$$

которая называется групповой скоростью. Согласно соотношению (12.34) в случае волноводов групповая скорость равна

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{k_g}{k} c, \quad (12.36)$$

т. е. v_g всегда меньше c . Комбинируя формулы для групповой и фазовой скоростей, легко видеть, что

$$v_p v_g = c^2.$$

Определенную скорость распространения можно приписать импульсу только с очень узкой полосой частот. В этом случае групповая скорость вычисляется для некоторой средней частоты.

В случае волновода поля выражаются через продольные компоненты еще проще, чем в случае цилиндрического резонатора, ибо теперь $\frac{\partial}{\partial z} = ik_g$. Согласно соотношениям (12.25) для колебаний типа $TM (H_z = 0)$ имеем

$$E_S = \frac{ik_g}{k_S^2} \nabla_S E_z,$$

$$H_S = \frac{\omega \epsilon}{k_g} \hat{z} \times E_S \quad \text{или} \quad cB_S = \frac{k}{k_g} \hat{z} \times E_S; \quad (12.37)$$

для колебаний типа TE ($E_z = 0$):

$$\left. \begin{aligned} H_S &= \frac{ik_g}{k_S^2} \nabla_S H_z, \\ E_S &= -\frac{\omega\mu}{k_g} \hat{z} \times H_S \quad \text{или} \quad E_S = \frac{ck}{k_g} B_S \times \hat{z}. \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

Среднее по времени значение вектора Пойнтинга \bar{N} равно

$$\left. \begin{aligned} &\text{для колебаний типа } TE \\ \bar{N}_z &= \frac{|E_S \times H_S^*|}{2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k}{k_g} \frac{H_{S0}^2}{2}, \\ &\text{для колебаний типа } TM \\ \bar{N}_z &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_g}{k} \frac{H_{S0}^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

где индексом 0 обозначены амплитудные значения полей. Потери в волноводе при данном виде колебаний можно найти, проинтегрировав соотношение (12.20) по всей поверхности стенок волновода. Поток энергии в распространяющейся волне будет уменьшаться как e^{-Kz} , где

$$K = \frac{\text{мощность, рассеиваемая на единице длины волновода}}{\text{передаваемая мощность}} = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\int (H_S^2 + H_z^2) dS}{\frac{1}{2} \int Z_g H_S^2 dS}, \quad (12.40)$$

причем интегрирование в числителе производится по поверхности стенок волновода единичной длины, а в знаменателе — по поперечному сечению волновода. «Импеданс волновода» Z_g определяется соотношениями:

при колебаниях типа TE

$$Z_g = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k}{k_g},$$

при колебаниях типа TM

$$Z_g = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_g}{k}.$$

При $k < k_S$ волна в волноводе экспоненциально затухает, однако это затухание обусловлено не потерями в стенках, а наложением интерферирующих отражений.

§ 12.7. Рассеяние электромагнитных волн круглым цилиндром

Характерный пример краевой задачи с однородным волновым уравнением представляет собой задача о рассеянии плоской электромагнитной волны цилиндрическим проводником. Рассмотрим идеально проводящий цилиндр радиуса a , ось которого совпадает с осью z (рис. 12.1). Пусть на этот цилиндр перпендикулярно к его оси падает плоская волна с угловой частотой ω , поляризация которой такова, что магнитный вектор параллелен оси z . Полное поле будет состоять из двух частей: падающей волны и волны рассеянной

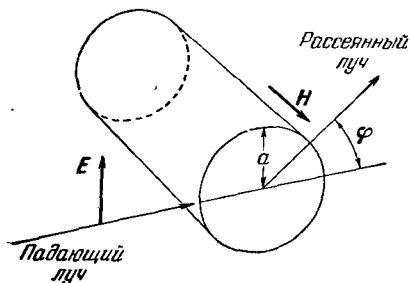


Рис. 12.1. Круглый проводящий цилиндр в поле излучения, падающего перпендикулярно оси.

Магнитное поле H параллельно оси цилиндра.

Для того чтобы рассеянное излучение представить в виде ряда, необходимо подобрать такую комбинацию функций Бесселя, которая при больших r изменялась бы как e^{ikr}/\sqrt{r} . Такой комбинацией может служить сумма $J_m(kr) + iN_m(kr)$, которую обозначают обычно $H_m^{(1)}(kr)$. Верхний индекс в дальнейшем можно не писать, так как нижний индекс и аргумент kr не позволяют нам спутать это обозначение с магнитным полем. Таким образом, рассеянная волна имеет вид

$$H_{z0} \sum_m a_m H_m(kr) e^{i(m\varphi - \omega t)}. \quad (12.42)$$

Коэффициенты a_m определяются из условия, что касательные компоненты электрического поля на поверхности цилиндра обращаются в нуль. Так как компонента H_z не зависит от z , то она единственная компонента магнитного поля, что следовало ожидать и из физических соображений. Поэтому из уравнения $\nabla \times H = -i\omega \epsilon E$ следует

$$E_\varphi = -\frac{i}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial}{\partial r} H_z. \quad (12.43)$$

(отраженной) цилиндром. Это поле представляет собой волну типа TE с $k_z = 0$ и без ограничений на частоту. Порождающая функция для функции Бесселя позволяет провести разложение в ряд магнитный вектор падающей волны

$$\begin{aligned} H_{z0} e^{i(kr \cos \varphi - \omega t)} &= \\ &= H_{z0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) i^m e^{i(m\varphi - \omega t)}. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Для того чтобы рассеянное излучение представить в виде ряда, необ-

Таким образом, для каждого члена ряда граничное условие имеет вид

$$i^m J'_m(ka) + a_m H'_m(ka) = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу или по r . Отсюда

$$a_m = -i^m \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)}. \quad (12.44)$$

Нас интересует рассеянная волна на больших расстояниях от цилиндра. В этом случае

$$H_m(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr} e^{-(2m+1)\frac{\pi}{4}i}, \quad (12.45)$$

и поля в рассеянной волне равны

$$H_z = H_{z0} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \omega t)} \sum a_m e^{i\left(m\varphi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)},$$

$$E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_z,$$

если пренебречь членами, убывающими быстрее, чем $1/\sqrt{r}$.

Вектор Пойнтинга этой волны направлен, конечно, в сторону возрастания r . Его среднее по времени значение равно

$$\bar{N}_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\varphi H_z^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |H_{z0}|^2. \quad (12.46)$$

Для того чтобы определить мощность рассеянного излучения на единицу длины цилиндра, нужно вектор \bar{N} проинтегрировать по цилиндрической поверхности, окружающей эту часть цилиндра. При этом двойная сумма в произведении сведется к одинарной в силу ортогональности функций $e^{im\varphi}$, и мы в результате получим

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^{2\pi} N r d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |H_{z0}|^2 \frac{4}{k} \sum_m \left| \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right|^2 \quad (12.47)$$

или

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{z0}^2 \frac{4}{k} \sum \frac{[J'_m(ka)]^2}{[J'_m(ka)]^2 + [N'_m(ka)]^2}. \quad (12.47')$$

Средний по времени поток энергии через единицу площади в падающей волне равен

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{z0}^2. \quad (12.48)$$

Коэффициент при этом выражении в соотношении (12.47) называется сечением рассеяния цилиндра. Сечение рассеяния определяет ту площадь, с которой энергия падающей волны переходит в рассеянную. Так как мы рассматривали цилиндр единичной длины, то сечение рассеяния имеет размерность длины. Геометрическое сечение цилиндра единичной длины равно $2a$.

В пределе для длинных волн, когда $ka \rightarrow 0$, выражение для сечения рассеяния может быть упрощено посредством разложения функций Бесселя в ряд. При этом члены с $m=0$ и $m=\pm 1$ дают равные вклады, а остальные члены дают вклады более высокого порядка по ka . Таким образом,

$$\sigma = \frac{3}{4} \pi^2 (ka)^3 a. \quad (12.49)$$

Следовательно, сечение обратно пропорционально кубу длины волны и меньше геометрических размеров цилиндра.

Для того чтобы найти угловое распределение рассеянного излучения, следует вновь вернуться к среднему значению вектора Пойнтинга. Удерживая основные члены в разложении для составляющих поля, получим

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi) d\varphi &= \frac{\bar{N}r d\varphi}{N_0}, \\ \sigma(\varphi) &= \frac{2}{\pi k} \left| \frac{J'_0(ka)}{J'_0(ka) + iN'_0(ka)} - \frac{2J'_1(ka) \cos \varphi}{J'_1(ka) + iN'_1(ka)} \right|^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2}{\pi k} \frac{\pi^2 (ka)^4}{2^4} (1 - 2 \cos \varphi)^2 = \frac{\pi (ka)^3}{8} a (1 - 2 \cos \varphi)^2. \end{aligned} \quad (12.50)$$

Следовательно, рассеяние происходит главным образом назад. В направлении падения имеется дополнительный максимум, в направлении $\varphi = 60^\circ$ интенсивность рассеянного излучения равна нулю.

§ 12.8. Сферические волны

В сферических координатах скалярное волновое уравнение легко допускает разделение переменных. Получающееся в результате этого решение уравнения

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 \psi \quad (12.51)$$

имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+\frac{1}{2}}(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (12.52)$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — обычные шаровые функции и $Z_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, удовлетворяющая граничным условиям данной задачи. Удобно

пользоваться «сферическими функциями Бесселя», определяемыми соотношением¹⁾

$$z_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{l+\frac{1}{2}}(kr),$$

так что решение уравнения (12.51) при заданной частоте имеет вид

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (12.53)$$

Пока не очевидно, каким образом скалярное решение даст необходимые векторные поля. В координатных системах, использовавшихся до сих пор, нам удавалось получать простые и физически интересные результаты, обходя трудность, свойственную векторным волновым уравнениям и аналогичную указанной в гл. 8 при изучении векторного уравнения Лапласа. Только в декартовой системе координат, где координатные векторы имеют одинаковое направление во всех точках пространства, векторные уравнения Лапласа и д'Аламбера эквивалентны трем скалярным уравнениям для компонент векторов.

Однако имеется метод решения однородного волнового уравнения, при котором легко удовлетворяются сферические граничные условия. Этот метод — обобщение метода, использованного при цилиндрической геометрии. Суть метода заключается в том, чтобы произвольное векторное поле с нулевой дивергенцией выразить в виде суммы двух отдельных полей.

Рассмотрим функцию ψ , удовлетворяющую скалярному уравнению (12.51). Производные ψ также являются решениями этого уравнения. Прямой подстановкой или исходя из свойств симметрии (см. задачу 6) нетрудно убедиться, что выражение $\mathbf{r} \times \nabla\psi$ также удовлетворяет уравнению (12.51). Так как

$$\mathbf{r} \times \nabla\psi = -\nabla \times (\mathbf{r}\psi),$$

то дивергенция этого вектора равна нулю, т. е. он удовлетворяет условию, которому должны подчиняться \mathbf{E} и \mathbf{H} . Если

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{r} \times \nabla\psi,$$

то вектор магнитного поля легко получить из соотношения $i\omega\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_1$. Вектор \mathbf{E}_1 не может описывать произвольного электрического поля, так как отсутствует компонента вдоль \mathbf{r} . Однако можно получить линейно независимое решение, если \mathbf{E} и \mathbf{H} поменять

¹⁾ Сферические функции Бесселя бывают двух видов: $j_l(kr)$ и $n_l(kr)$, причем $j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ и $n_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$.

местами, т. е.

$$H_2 = \mathbf{r} \times \nabla \psi,$$

и E_2 определять из уравнения $-i\omega D_2 = \nabla \times H_2$. В общем случае поле представляет собой сумму этих двух частных полей. Совершенно очевидно, что граничные условия теперь удовлетворяются без труда. Эти два типа волн полностью аналогичны волнам TE и TM для случая цилиндрической геометрии.

Пользуясь этими соображениями, резонансные поля в сферическом резонаторе можно выразить через функцию ψ . В частности, когда поля выражаются через E_l , в качестве z_l следует взять j_l для того, чтобы не было особенностей при $r = 0$. Кроме того, при $r = r_0$ (r_0 — радиус резонатора) это поле должно обращаться в нуль, так как оно параллельно идеально проводящей стенке. Следовательно, собственные значения определяются условием $j_l(k_{l,n}r_0) = 0$, $k_{l,n}r_0$ — соответствует n -му нулю функции j_l . Возможные значения частот получаются из соотношения $\frac{\omega^2}{c^2} = k_{l,n}^2$. В явном виде поля в резонаторе будут

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{im}{\sin \theta} \psi, \\ E_\varphi &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ H_r &= -\frac{i}{\omega \mu} \frac{l(l+1)}{r} \psi, \\ H_\theta &= \frac{i}{\omega \mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \\ H_\varphi &= \frac{i}{\omega \mu} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{m}{\mu \omega} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi). \end{aligned} \right\} \quad (12.54)$$

Выражение для H_r упростилось вследствие того, что дифференциальный оператор, действующий на ψ , имеет собственные значения $l(l+1)$.

Во втором случае, когда $\dot{H}_r = 0$, поля описываются теми же соотношениями (12.54), только E и H нужно поменять местами, а также изменить знаки и коэффициенты в соответствии с уравнением $-i\omega \epsilon E = \nabla \times H$. Граничное условие, состоящее в том, что E_θ и E_φ обращаются в нуль при $r = r_0$, приводят теперь к уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] \right\}_{r=r_0} = 0;$$

соответственно возможные значения частот будут иными.

§ 12.9. Рассеяние электромагнитных волн сферой

Рассеяние плоской электромагнитной волны сферой может быть рассмотрено с помощью двух независимых решений, указанных в предыдущем параграфе. Как в падающей, так и в рассеянной волнах оба решения должны учитываться одновременно, поэтому удобно ввести две функции одинаковой размерности, M и N :

$$M_{l, m} = \nabla \times (r \psi_{l, m}), \quad (12.55)$$

$$N_{l, m} = \frac{\nabla \times M_{l, m}}{k} = \frac{\nabla \times [\nabla \times (r \psi_{l, m})]}{k}. \quad (12.56)$$

Так как обе функции удовлетворяют волновому уравнению, а дивергенция их равна нулю, то имеет место и обратное соотношение

$$M_{l, m} = \frac{\nabla \times N_{l, m}}{k}. \quad (12.57)$$

Заметим, что функция $\psi_{l, m}$ в (12.55) и (12.56) соответствует двум линейно независимым решениям скалярного уравнения, поскольку шаровые функции содержат множитель $e^{\pm im\varphi}$. Векторные решения $M_{l, m}$ и $N_{l, m}$ получаются друг из друга посредством дифференциальной операции, если учитывать оба скалярных решения. Для того чтобы облегчить выделение ортогональных компонент поля, зависимость от φ напомним в явном виде, как $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$:

$$\psi_{l, m} \begin{cases} \text{четн} \\ \text{нечетн} \end{cases} = z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} e^{-i\omega t}. \quad (12.58)$$

Тогда составляющие M и N в сферических координатах равны

$$e^{i\omega t} M_{l, m} \begin{cases} \text{четн} \\ \text{нечетн} \end{cases} = \mp \frac{m}{\sin \theta} z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \hat{\theta} - \\ - z_l(kr) \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \hat{\varphi}, \quad (12.59)$$

$$e^{i\omega t} N_{l, m} \begin{cases} \text{четн} \\ \text{нечетн} \end{cases} = \frac{l(l+1)}{kr} z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \hat{r} + \\ + \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [r z_l(kr)] \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \hat{\theta} \mp \\ \mp \frac{m}{kr \sin \theta} \frac{d}{dr} [r z_l(kr)] P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \hat{\varphi}, \quad (12.60)$$

где \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ — единичные векторы, направленные в сторону увеличения соответствующих координат. Функции M и N называются четными или нечетными в зависимости от того, использовалась ли для их образования четная или нечетная относительно азимутального угла φ функция ψ .

Рассмотрим плоскую волну, электрический вектор которой параллелен оси x , распространяющуюся в положительном направлении оси z . Магнитный вектор ее лежит в плоскости yz . Поля этой волны следует выразить через функции M и N . Для разложения плоской волны в ряд по шаровым функциям воспользуемся соотношением

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=1}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (12.61)$$

Электрический вектор в сферических координатах имеет компоненты

$$E_x = E_0 e^{i(kr \cos \theta - \omega t)} = E_x (\sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi}). \quad (12.62)$$

Из соотношений

$$\sin \theta e^{ikr \cos \theta} = -\frac{1}{ikr} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^{ikr \cos \theta}) \quad (12.63)$$

и

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -P_l^1(\cos \theta) \quad (12.64)$$

следует, что в разложении E_x имеются функции $N_{l,m}$, так как только они имеют компоненты вдоль r . Зависимость от φ подсказывает, что нужно выбрать четную часть функции N . Функции M также можно обнаружить в этом разложении, если воспользоваться рекуррентными соотношениями для полиномов Лежандра и сферических функций Бесселя. Но их можно выявить и непосредственно, используя представления магнитного поля:

$$H_y = H_y (\sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi}) = -\frac{i}{\mu\omega} \nabla \times E. \quad (12.65)$$

Как и раньше, с помощью соотношений (12.63) и (12.64) видно, что необходима нечетная часть N . Пользуясь соотношением между электрическим и магнитным векторами, найдем функции M в разложении электрического вектора. Таким образом, система функций замыкается и принимает вид разложения

$$E_x = E_0 \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} [M_{l,1}(\text{нечетн}) - iN_{l,1}(\text{четн})], \quad (12.66)$$

$$H_y = -\frac{kE_0}{\omega\mu} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} [M_{l,1}(\text{четн}) + iN_{l,1}(\text{нечетн})]. \quad (12.67)$$

Как и в соотношении (12.61), функции Бесселя в этих разложениях не должны иметь особенностей в начале координат, т. е. нужно взять функции $j_l(kr)$. Вследствие симметрии поля m ограничено

значением $m = 1$, и поэтому оба ряда представляют собой простые суммы по l .

Если плоская волна падает на сферу радиуса a , центр которой находится в начале координат, то поля рассеянной волны будут описываться аналогичными рядами, коэффициенты которых определяются из граничных условий на поверхности сферы. Функции M и N по-прежнему определяются соотношениями (12.59) и (12.60) с $m = 1$, а функция $z_l(kr)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы при больших r она изменялась как $\frac{e^{ikr}}{r}$. Такой функцией является

$$h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + in_l(kr) \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (12.68)$$

Электрическое поле рассеянной волны можно представить в следующем виде:

$$E_s = E_0 \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} [a_l M_{l,1}(\text{нечетн}) - ib_l N_{l,1}(\text{четн})], \quad (12.69)$$

а магнитное поле согласно соотношению (12.57) в виде

$$H_s = -\frac{k}{\omega\mu} E_0 \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} [b_l M_{l,1}(\text{четн}) + ia_l N_{l,1}(\text{нечетн})]. \quad (12.70)$$

Если сфера представляет собой идеальный проводник, то сумма касательных компонент электрических полей падающей и рассеянной волн должна обращаться в нуль в любой точке поверхности сферы. Это должно иметь место и в отдельности для суммы членов соответствующих рядов с одинаковыми порядковыми номерами. Пользуясь этим условием, определяем коэффициенты a_l и b_l :

$$\left. \begin{aligned} a_l &= -\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}, \\ b_l &= -\left\{ \frac{\frac{d}{dr} [rj_l(kr)]}{\frac{d}{dr} [rh_l^{(1)}(kr)]} \right\}_{r=a} \end{aligned} \right\} \quad (12.71)$$

Прежде чем заниматься изучением того, как эти коэффициенты зависят от радиуса сферы и длины волны излучения, исследуем поведение рассеянной волны. Из асимптотического соотношения (12.68) и формул (12.59) и (12.60) следует, что радиальные компоненты полей уменьшаются пропорционально $1/r^2$, а поперечные компоненты как $1/r$ при больших r . Таким образом, как и следовало ожидать, вектор Пойнтинга направлен по радиусу. Интегрируя его по сфере

большого радиуса, получим полную мощность рассеянного излучения

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int |E_s \times H_s^*| r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (E_0 H_\varphi^* - E_\varphi H_0^*) r^2 \, d\Omega, \quad (12.72)$$

Интегрирование можно произвести, если воспользоваться интегральными формулами для присоединенных функций Лежандра:

$$\int_0^\pi \left(\frac{dP_l^1}{d\theta} \frac{dP_{l'}^1}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_l^1 P_{l'}^1 \right) \sin \theta \, d\theta = \frac{2[l(l+1)]^2}{2l+1} \delta_{l, l'},$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_l^1}{\sin \theta} \frac{dP_{l'}^1}{d\theta} + \frac{P_{l'}^1}{\sin \theta} \frac{dP_l^1}{d\theta} \right) \sin \theta \, d\theta = 0.$$

В результате получим

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{\pi E_0^2}{k^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2). \quad (12.73)$$

Поток энергии через единицу площади в падающей волне равен

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

и сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2). \quad (12.74)$$

Так как вычисление коэффициентов a_l и b_l весьма утомительно, то мы оставим его в стороне, а для того чтобы иметь некоторое представление о их поведении, запишем их в следующем виде:

$$a_l = ie^{i\gamma_l} \sin \gamma_l, \quad b_l = ie^{i\gamma'_l} \sin \gamma'_l, \quad (12.75)$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma_l = \frac{J_l(ka)}{n_l(ka)}, \quad \operatorname{tg} \gamma'_l = \left[\frac{\frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d[rn_l(kr)]}{dr}} \right]_{r=a}.$$

Сечение рассеяния выражается через эти параметры следующим образом:

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (\sin^2 \gamma_l + \sin^2 \gamma'_l). \quad (12.76)$$

Отсюда ясно, что вклад волн, электрические поля которых описываются функциями M и N , представляет собой периодические функции ka . При $ka \ll 1$ полное сечение рассеяния сводится к очень

простому выражению. В этом случае первые члены разложения функций Бесселя по ka равны

$$|a| = \frac{(ka)^3}{3}, \quad |b| = \frac{2(ka)^3}{3},$$

а следовательно,

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} k^4 a^6. \quad (12.77)$$

Таким образом, при низких частотах сечение рассеяния обратно пропорционально четвертой степени длины волны. Как и в случае цилиндра, сечение рассеяния меньше геометрического сечения.

Рассеяние плоской волны сферой с произвольными электрическими и магнитными свойствами, погруженной в диэлектрик, можно рассмотреть, следуя тем же путем. Однако в этом случае придется рассмотреть поля и внутри сферы, а коэффициенты в рядах определять из условия непрерывности касательных компонент E и H . При низких частотах сечение рассеяния по-прежнему будет обратно пропорционально четвертой степени длины волны.

Задачи

1. Покажите, что на границе с проводником отношение нормальной компоненты магнитного поля к касательной того же порядка величины, что и отношение глубины проникновения к длине волны переменного поля.

2. В прямоугольном резонаторе с размерами a , a , L и проводимостью стенок σ возбуждаются колебания

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\omega t},$$

$$H_z = E_x = E_y = 0.$$

Вычислите частоту колебаний резонатора, добротность и силы, действующие на его стенки.

3. Покажите, что в прямоугольном волноводе предельная частота для колебаний типа TE всегда ниже, чем для колебаний типа TM . Определите коэффициент затухания самых низкочастотных колебаний типа TE .

4. Выразите наименьшую резонансную частоту через радиус и высоту круглого цилиндрического резонатора. Как оценить добротность Q этого колебания?

5. Плоская волна рассеивается проводящим цилиндром. Определите поля и сечение рассеяния в пределе $ka \ll 1$, если падающая волна поляризована так, что вектор E параллелен оси цилиндра.

6. Решение волнового уравнения при заданной ориентации координатных осей должно остаться решением и при другой ориентации. Рассмотрите разность между $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $\psi(r, \theta', \varphi')$ при бесконечно малом вращении и покажите, что вектор $r \times \nabla\psi$ удовлетворяет волновому уравнению, если ψ — решение скалярного волнового уравнения.

7. Вычислите полную силу, действующую на сферу, рассмотренную в § 12.8, при условии, что $ka \ll 1$. Вычислите поправку на случай, если бы сфера оказалась медной, а не идеально проводящей.

8. Рассмотрите кубический резонатор с идеально проводящими стенками. Покажите, что число колебаний в интервале частот $d\omega$ равно $\frac{l^3 \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ и

соответственно в интервале круговых частот $d\nu$ равно $\frac{I^{38}\pi^2 d\nu}{c^3}$, если длины волн этих колебаний много меньше ребра куба. Зависит ли число колебаний, приходящихся на единицу объема, от формы резонатора? Эта формула имела большое историческое значение в теории излучения «абсолютно черного» тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

Литература по высокочастотным полям, ограниченными проводниками, растет очень быстро, но основные положения и большинство методов, применяемых на практике, рассмотрены в гл. IX. В гл. VI и XII рассмотрены цилиндрические и сферические волны.

2. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. (Русский перевод: Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики.)

Это удачное всеобъемлющее пособие по математическим методам содержит все, что только можно пожелать узнать о граничных условиях. Авторы весьма сожалют, что оно не было им доступно в момент написания данной книги.

3. E. U. Condon, *Principles of Microwave Radio*, *Rev. Modern Phys.* 14, 1942. Ранняя обзорная статья, представляющая собой прекрасное введение в физику резонаторов и волноводов.

4. J. C. Slater, *Microwave Electronics*. (Русский перевод: Дж. Слатер, Электроника сверхвысоких частот.)

В работе сделан упор на физические основы рассматриваемого вопроса.

5. P. M. Morse, *Vibration and Sound*. (Русский перевод: Ф. Морс, Колебания и звук); H. Lamb, *Hydrodynamics*. (Русский перевод: Г. Ламб, Гидродинамика.)

Книги интересны с точки зрения сравнения рассеяния продольных волн цилиндрами с результатами § 12.7.

6. M. Born, *Optik*. (Русский перевод: М. Борн, Оптика.)

В гл. VI подробно рассмотрено рассеяние электромагнитных волн сферой, включая угловое распределение для различных соотношений между диаметром и длиной волны.

7. A. Sommerfeld, *Electrodynamics*. (Русский перевод: А. Зоммерфельд, Электродинамика.)

Задача о граничных условиях рассмотрена здесь в применении к проволокам. В этом отношении работа дополняет как данную главу, так и все вышеприведенные ссылки.

8. E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. (Русский перевод: Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения.)

Задача о собственных значениях рассмотрена в гл. X.

9. E. Janke and F. Emde, *Tables of Functions*. (Русский перевод: Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций.)

Для численных расчетов это наиболее удобный краткий справочник.

10. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*. (Русский перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций.)

Изложение свойств функций Бесселя можно найти во многих книгах.

Однако по полноте изложения книга Ватсона весьма удобна.

* Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны.

ГЛАВА 13

НЕОДНОРОДНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 13.1. Волновое уравнение для потенциалов

Связь полей излучения с их источниками легче всего найти с помощью потенциалов. Однако электрическое поле нельзя выразить только через скалярный потенциал, так как вследствие закона индукции $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ не равен нулю, если магнитное поле изменяется со временем. Магнитное поле можно выразить через векторный потенциал

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (7.37)$$

так как дивергенция \mathbf{B} всегда равна нулю. Поскольку имеет место (7.37), электрическое поле может быть записано в виде суммы двух членов: градиента скалярного потенциала и дополнительного неконсервативного члена, обусловленного изменением векторного потенциала

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (13.1)$$

В таком виде \mathbf{E} удовлетворяет третьему уравнению (9.7). Дивергенция \mathbf{A} , как и прежде, остается неопределенной, по крайней мере с точностью до произвольной аддитивной функции координат. Ее можно определить с помощью соотношения

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\sigma\varphi = 0, \quad (13.2)$$

называемого условием Лоренца.

В свободном пространстве условие Лоренца упрощается:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (13.3)$$

На первый взгляд кажется, что условие Лоренца не представляет собой достаточно произвольного дополнительного соотношения. Однако в дальнейшем мы увидим, что с введением этого условия скалярный и векторный потенциалы входят симметрично в одинаковые уравнения поля и оба потенциала начинают подчиняться тому же

уравнению, что и поля. Более того, будет показано, что при условии Лоренца соотношение между векторным и скалярным потенциалами релятивистски ковариантно.

Для того чтобы найти уравнения, которым подчиняются потенциалы, подставим соотношения (7.37), (13.1) и условие Лоренца в первое и четвертое уравнения Максвелла (9.7). В результате получим следующую симметричную систему уравнений:

$$\nabla^2 A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu \mathbf{j}', \quad (13.4)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (13.5)$$

Вектор $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$ представляет собой ту часть плотности тока, которая обусловлена внешними электродвижущими силами. Токи в проводящей среде, вызванные электрическими полями, описываются последним членом левой части уравнения (13.4).

Введем символический оператор \square , называемый оператором Даламбера,

$$\square = \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (13.6)$$

Тогда для свободного пространства уравнения (13.4) и (13.5) принимают вид

$$\square A = -\mu_0 \mathbf{j}', \quad (13.7)$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (13.8)$$

где \mathbf{j}' и ρ — источники полей, создаваемые внешними силами.

Эти уравнения называются неоднородными волновыми уравнениями. Их частные решения можно выразить в виде интегралов по распределениям зарядов и токов. Дополнительными решениями, т. е. решениями однородных уравнений, будут, очевидно, волновые решения.

Как видно из соотношений (7.37) и (13.1), электрическое и магнитное поля не изменяются при преобразованиях типа

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi, \quad (13.9)$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (13.10)$$

где ψ — функция координат и времени. Это означает, что любое уравнение, связанное с электромагнитным взаимодействием и выраженное через потенциалы \mathbf{A} и φ , не должно изменяться при указанных преобразованиях. Это свойство называется градиентной инвариантностью. Любое явление, описание которого градиентно инвариантно, всегда может быть полностью отображено взаимодействием зарядов и токов.

§ 13.2. Решение волнового уравнения с помощью преобразования Фурье

Исследование частных решений неоднородного волнового уравнения мы начнем с решения неоднородного уравнения электростатики — уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.35)$$

частное решение которого имеет вид

$$\varphi(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_a)}{r(x_a, x'_a)} dV'.$$

Мы изменим это решение так, чтобы учесть в уравнении (13.7) член, зависящий от времени.

Предположим, что функцию источника $g(x_a, t)$ в общих уравнениях для φ и A .

$$\square \psi(x_a, t) = -g(x_a, t) \quad (13.11)$$

можно представить в виде интеграла Фурье

$$g(x_a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega}(x_a) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (13.12)$$

причем имеет место и обратное преобразование Фурье

$$g_{\omega}(x_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_a, t) e^{i\omega t} dt. \quad (13.13)$$

Потенциал $\psi(x_a, t)$ тоже можно представить в виде интеграла Фурье

$$\psi(x_a, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\omega}(x_a) e^{-i\omega t} d\omega \quad (13.14)$$

с соответствующим обратным соотношением

$$\psi_{\omega}(x_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_a, t) e^{i\omega t} dt. \quad (13.15)$$

Подставляя соотношения (13.12) и (13.14) в уравнение (13.11), убеждаемся, что компоненты Фурье $\psi_{\omega}(x_a)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению, подобному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \psi_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \psi_{\omega} = -g_{\omega}. \quad (13.16)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суперпозиции решений, соответствующих точечным источникам, описываемым δ -функцией Дирака, т. е. $g_\omega(x_\alpha) = \delta(x_\alpha - x'_\alpha)$, причем x'_α обозначает точку расположения источника. Потенциал такого точечного источника удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G(x_\alpha, x'_\alpha) + \frac{\omega^2}{c^2} G(x_\alpha, x'_\alpha) = -\delta(x_\alpha - x'_\alpha), \quad (13.17)$$

где G зависит как от x_α , так и от x'_α . Частное решение, соответствующее частоте ω , при источнике общего вида определяется соотношением

$$\psi_\omega(x_\alpha) = \int g_\omega(x'_\alpha) G(x_\alpha, x'_\alpha) dV'. \quad (13.18)$$

Для определения G заметим, что решение уравнения (13.17) сферически симметрично относительно переменной r — расстояния между точками x_α и x'_α , и следовательно, во всех точках, кроме $r = 0$, оно совпадает с решением уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rG)}{dr^2} + k^2 G = 0,$$

где, как обычно, $k = \frac{\omega}{c}$. Это уравнение легко интегрируется:

$$G = \frac{A}{4\pi r} e^{\pm ikr}.$$

Чтобы определить коэффициент A , вычислим объемный интеграл от уравнения (13.17) по области вблизи точки $r = 0$. Положив в этой области функцию G равной A/r и воспользовавшись соотношением (1.11), получим $-4\pi A = -1$. Следовательно, функция

$$G = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm ikr} \quad (13.19)$$

представляет собой решение уравнения (13.17), и подстановка его в соотношение (13.18) приводит к следующему решению:

$$\psi_\omega(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)} e^{\pm ikr(x_\alpha, x'_\alpha)} dV'. \quad (13.20)$$

Таким образом, наличие второго члена в уравнении (13.16) привело к появлению комплексного экспоненциального множителя в выражении для потенциала Кулона (гл. 1).

Соотношение (13.20) позволяет сразу написать решение уравнения (13.11)

$$\psi(x_a, t) = \int \psi_\omega(x_a) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{g_\omega(x'_a)}{r(x_a, x'_a)} e^{-i(\omega t \pm kr)} d\omega d\nu'. \quad (13.21)$$

Введем новое время

$$t'(x_a, x'_a) = t \pm \frac{r}{c} = t \pm \frac{kr}{\omega}, \quad (13.22)$$

что эквивалентно смещению начала отсчета времени на величину, равную времени распространения электромагнитного сигнала из точки x'_a в точку x_a . Если теперь воспользоваться преобразованием Фурье (13.12), то получим

$$\psi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x'_a, t \pm \frac{r}{c})}{r(x_a, x'_a)} d\nu'. \quad (13.23)$$

Отметим, что координаты точки наблюдения явно входят в знаменатель подынтегрального выражения и во время, при котором следует брать значения токов и зарядов при интегрировании. С математической точки зрения пригодно оба знака, однако физический смысл имеет лишь минус. Мы имеем дело с тем действием, которое источник, расположенный в точке x'_a , производит в точке x_a , и знак минус соответствует случаю, когда причина опережает следствие. Решение неоднородного волнового уравнения (13.23), взятое с отрицательным знаком, называется запаздывающим потенциалом. Решение со знаком плюс называется опережающим потенциалом. Физического смысла он не имеет, хотя и делались различные попытки использовать опережающие потенциалы для разрешения некоторых трудностей в электродинамике.

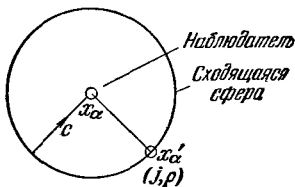


Рис. 13.1. Вспомогательная сфера для определения запаздывающего потенциала в точке x_a .

Сфера достигает точки x_a в момент t ; через источник поля сфера проходит в момент

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Смысл запаздывающего потенциала виден из следующего примера. Пусть наблюдатель находится в точке x_a (рис. 13.1) и пусть сфера с центром в этой точке сокращается с радиальной скоростью c так, что радиус обращается в нуль как раз в момент наблюдения t . Следовательно, в тот момент времени, когда сфера проходит мимо источников поля, эти источники произведут то действие, которое в точке x_a будет замечено в момент t .

Обозначим квадратными скобками [] те переменные, значения которых следует брать в момент времени t , определяемый форму-

лой (13.22). Тогда решения неоднородных волновых уравнений (13.7) и (13.8), соответствующих распределениям токов $\mathbf{j}(x'_a)$ и зарядов $\rho(x'_a)$, примут вид

$$A(x_a, t) = \frac{\nu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}(x'_a)]}{r(x_a, x'_a)} d\mathbf{v}', \quad (13.24)$$

$$\varphi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(x'_a)]}{r(x_a, x'_a)} d\mathbf{v}'. \quad (13.25)$$

§ 13.3. Компоненты Фурье для полей. Излучение

Пусть скалярный и векторный потенциалы зависят от времени синусоидально:

$$A(x_a, t) = A_\omega(x_a) e^{-i\omega t},$$

$$\varphi(x_a, t) = \varphi_\omega(x_a) e^{-i\omega t}.$$

Согласно (13.24) и (13.25) зависимость потенциалов от координат определяется соотношениями

$$A_\omega(x_a) = \frac{\nu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_\omega e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}', \quad (13.26)$$

$$\varphi_\omega(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_\omega e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}'. \quad (13.27)$$

Напряженность полей получается из потенциалов с помощью соотношений (7.37) и (13.1). При вычислении градиента «монохроматического» скалярного потенциала (13.27) следует учесть, что оператор ∇ не действует на ρ , и затем перейти к оператору ∇' , действующему на координаты источника поля. Тогда получим

$$-\nabla\varphi_\omega(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_\omega \nabla' \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (13.28)$$

Следовательно, электрическое поле равно

$$E_\omega(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_\omega \nabla' \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathbf{v}' + \frac{i\nu_0\omega}{4\pi} \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}'. \quad (13.29)$$

Аналогично определяется магнитное поле

$$\mathbf{B}_\omega = \frac{\nu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}_\omega \times \nabla' \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathbf{v}'. \quad (13.30)$$

Как и в случае постоянного поля, упрощение выражений посредством перехода от ∇ к ∇' оказалось возможным благодаря тому, что векторный оператор ∇ не действует на плотность источников.

При учете запаздывания градиентный оператор действует на величину e^{ikr}/r вместо $1/r$. Это означает, что при дифференцировании

появятся два члена: один изменяется как $1/r$, другой — как $1/r^2$. Мы уже отмечали, что член, изменяющийся как $1/r$, может дать конечный вклад в поверхностный интеграл от вектора Пойнтинга и, следовательно, привести к потерям энергии, обусловленным излучением. Область пространства, где член, пропорциональный $1/r$, играет доминирующую роль, называется волновой зоной поля излучения. Область же, где главную роль играют члены с более высокой степенью радиуса, называется квазистационарной или зоной индукции.

Соотношения (13.29) и (13.30) позволяют рассчитать полный поток энергии излучения при произвольном распределении токов $\mathbf{j}(x'_\alpha)$. Если принять в расчет только ту часть поля, которая пропорциональна $1/r$, то магнитное поле равно

$$\mu_0 \mathbf{H}_\omega = \mathbf{B}_\omega = -\frac{i\mu_0}{4\pi} \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) \frac{e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}', \quad (13.31)$$

так как волновой вектор \mathbf{k} направлен в ту же сторону, что и \mathbf{r} . Сравнивая выражение (13.31) с тем членом соотношения (13.29), который зависит только от тока, находим, что в волновой зоне \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны друг к другу и соотношение их величин равно

$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ [ср. соотношение (11.10)]. Следовательно, среднее по времени значение вектора Пойнтинга равно

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} R_0 |\mathbf{H}|^2 \hat{\mathbf{r}},$$

где $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, и для $\dot{\mathbf{N}}_\omega$ получим выражение

$$\bar{\mathbf{N}}_\omega = \frac{R_0}{32\pi^2} \left| \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) \frac{e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}' \right|^2 \hat{\mathbf{r}}, \quad (13.32)$$

причем вектор \mathbf{N}_ω является функцией координат точки наблюдения.

Эта формула позволяет рассчитать в общем случае излучение любой заданной системы токов. Если расстояние от излучающей системы до точки наблюдения велико по сравнению с ее размерами, то начало координат удобно выбрать внутри распределения токов (рис. 13.2). Тогда

$$\mathbf{B}_\omega = -\frac{i\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\xi} d\mathbf{v}', \quad (13.33)$$

если учесть, что $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \xi$ и что ξ мало по сравнению с R .

Расход энергии на излучение можно выразить в виде интеграла по сфере радиуса R , который сводится к интегралу по телесному углу Ω , вершина которого расположена в области, занимаемой источником поля. В конечном счете энергия, излучаемая системой

с частотой ω , оказывается равной

$$U_{\omega} = \int N_{\omega} \cdot dS = \frac{R_0}{32\pi^2} \int \left| \int (\mathbf{j}_{\omega} \times \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\xi} dV \right|^2 d\Omega, \quad (13.34)$$

где $d\Omega = \frac{R dS}{R^3}$.

Применим эту формулу к случаю, когда размеры излучающей системы малы по сравнению с длиной волны, так что экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении приближенно равен

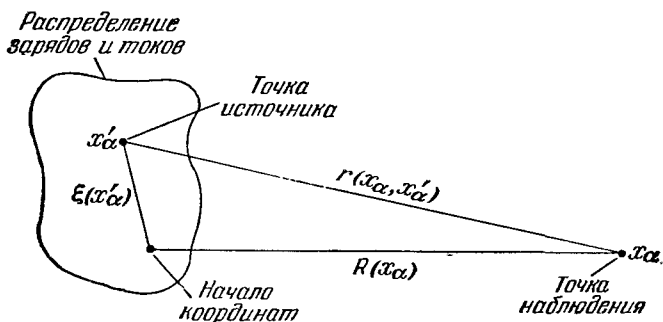


Рис. 13.2. Координаты точек поля и его источников.

Начало координат расположено внутри распределения зарядов и токов.

единице. Рассмотрим, в частности, линейное распределение токов, определяемое соотношением

$$I = I_0 \cos \frac{2\pi\xi}{\lambda}.$$

Частота колебаний соответствует длине волны λ в свободном пространстве. Объемный интеграл по распределению токов длиной L равен

$$kI_0 \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi\xi}{\lambda}\right) d\xi = kI_0 L \frac{\sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\frac{\pi L}{\lambda}} \sin \theta,$$

где θ — угол между направлением токов и \mathbf{k} . Следовательно,

$$U_{\omega} = \frac{\pi}{6} R_0 \left(\frac{I_0 L}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\frac{\pi L}{\lambda}} \right]^2. \quad (13.35)$$

Если L мало по сравнению с λ , то

$$U_{\omega} = \frac{\pi}{6} R_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_0^2.$$

При протекании тока I_0 через омическое сопротивление R на сопротивлении выделяется энергия $R I_0^2/2$; по аналогии вводят «сопротивление излучения»

$$U_\omega = R_{\text{изл}} \frac{I_0^2}{2}.$$

При малых размерах излучателя

$$R_{\text{изл}} = \frac{\pi}{3} R_0 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2.$$

Формула (13.34) относится только к монохроматическому источнику. Если нужно найти полное излучение при заданном импульсе тока, то вместо H_ω следует взять H и проинтегрировать по времени¹⁾. Необходимые вычисления выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega'} e^{-i\omega' t} d\omega' \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega'} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega H_{\omega'} \delta(\omega + \omega') d\omega d\omega' = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega H_{-\omega} d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |H_\omega|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Последнее преобразование можно сделать в силу равенства $H_{-\omega} = H_\omega^*$. Таким образом, мощность излучения, соответствующая данному интервалу частот $d\omega$, равна $4\pi U_\omega d\omega$, а полная мощность излучения во время импульса

$$\delta W = \frac{R_0}{8\pi} \int \int \left| \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{v}' \right|^2 d\Omega d\omega. \quad (13.37)$$

¹⁾ Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt$ производится нами для реального

поля $H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega e^{-i\omega t} d\omega$. Следовательно, амплитуды H_ω могут быть комплексными. В противоположность этому при синусоидальной зависимости от времени физический смысл имеет лишь действительная часть выражения $H_\omega e^{-i\omega t}$ [например, в выражениях (13.26) и (13.34)].

Ниже будет рассмотрен более общий случай, когда размеры излучающей системы невелики по сравнению с длиной волны, так что множитель $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ можно разложить в ряд вблизи начала координат. Очевидно, мощность излучения, соответствующего различным членам этого разложения, будет пропорциональна различным степеням частоты.

Мы не будем рассматривать поля в зоне индукции, хотя и не доказали строго, что они не дают вклада в излучение. Было лишь показано, что эти поля не дают вклада в поток энергии через поверхность очень большого радиуса, так как их зависимость от радиуса выше первой степени. Вычисление вектора Пойнтинга полей зоны индукции приводит к мгновенному потоку энергии, отличному от нуля; однако среднее по времени значение каждой компоненты Фурье обращается в нуль. Это показывает, что поля индукции создают колебания энергии в поле излучения. В частности, если конфигурация системы меняется во время излучения, т. е. ее колебания негармонические, то, кроме излучения, часть энергии пойдет на создание поля индукции.

§ 13.4. Потенциал Герца

Условие Лоренца (13.3), связывающее скалярный и векторный потенциалы, не противоречит уравнению непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (7.1)$$

Более того, если запаздывающие потенциалы имеют вид (13.24) и (13.25), то легко показать, что условие Лоренца следует из уравнения непрерывности. Так как заряды и токи не независимы, то для расчетов удобно выразить их через одну функцию, выбранную так, чтобы уравнение непрерывности удовлетворялось тождественно:

$$\rho_{\text{своб}} = -\nabla \cdot \mathbf{p}, \quad (13.38)$$

$$\mathbf{j}_{\text{своб}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \quad (13.39)$$

Вектор \mathbf{p} называется вектором поляризации; с истинными зарядами и токами он связан так же, как вектор диэлектрической поляризации \mathbf{P} связан с поляризационными зарядами и токами. Однако эта аналогия формальная; только величины \mathbf{j} и ρ представляют собой истинные заряды, которые являются внешними источниками поля, так что вектор \mathbf{p} по своему существу отличается от настоящего вектора поляризации \mathbf{P} .

Совершенно аналогично потенциалы \mathbf{A} и φ можно выразить через единственную векторную функцию

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \varphi = -\nabla \cdot \Pi. \quad (13.40)$$

Условие Лоренца при этом выполняется автоматически. Вектор Π называется поляризационным потенциалом или вектором Герца. Так как соотношения (13.40) линейны, то вектор Π в области, свободной от источников поля, подчиняется однородному волновому уравнению $\square \Pi = 0$. Если же потенциалы A и φ удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям, в правой части которых стоят ρ и \mathbf{j} , то вектор Герца также будет удовлетворять неоднородному волновому уравнению, правая часть которого — ρ/ϵ_0 :

$$\square \Pi = \nabla^2 \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (13.41)$$

Заметим, что теперь имеется всего три независимые компоненты вместо четырех при обычных потенциалах A и φ .

Решение уравнения (13.41) представляет собой запаздывающий потенциал

$$\Pi(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(x'_a)]}{r(x_a, x'_a)} dv' \quad (13.42)$$

при произвольной зависимости источников от времени и

$$\Pi_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_a) e^{ikr}}{r(x_a, x'_a)} dv' \quad (13.43)$$

при синусоидальной зависимости от времени.

Поля нетрудно выразить через вектор Герца, если воспользоваться определяющими соотношениями (13.40). Введем величину C

$$C = \nabla \times \Pi. \quad (13.44)$$

Тогда вектор магнитного поля равен

$$B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial C}{\partial t} \quad (13.45)$$

и вектор электрического поля

$$E = \nabla \times C. \quad (13.46)$$

Соотношение (13.45) справедливо в общем случае, в то время как соотношение (13.46) — только вне источников поля, где $\nabla \cdot E = 0$.

§ 13.5. Вычисление поля излучения с помощью вектора Герца

Вектором Герца мы воспользуемся для вычисления поля излучения в случае, когда размеры источника излучения малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения и длиной волны излучения. Эти условия, $\xi(x'_a) \ll r(x_a, x'_a)$ и $\xi(x'_a) \ll \lambda$, эквивалентны предположению, что разность фаз между волнами, приходящими из разных

точек источника, мала. Тогда множитель e^{ikr}/r в интеграле (13.43) оказывается медленно меняющейся функцией по сравнению с P . Естественно поэтому разложить эту функцию в ряд по степеням расстояния ξ от центра излучателя и изучить асимптотическое поведение этого разложения при больших расстояниях R до точки наблюдения. Параметрами разложения возьмем отношения ξ и R к длине волны $\lambda = \frac{1}{k}$. Это разложение имеет вид

$$\frac{e^{ikr}}{r} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(k\xi) h_n^{(1)}(kR). \quad (13.47)$$

Нас интересует поведение этого разложения при малых ξ и больших R . Как отмечалось в § 12.9, асимптотическое поведение функции, зависящей от R при $kR \gg 1$, определяется соотношением

$$h_n^{(1)}(kR) \simeq (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR}. \quad (12.68)$$

Таким образом, для вектора Π_{ω} получаем

$$\Pi_{\omega}(x_a) = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \int \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(k\xi) p_{\omega} d\nu'. \quad (13.48)$$

Так как функции Лежандра ортогональны, то члены ряда независимы, т. е. при возведении этого выражения в квадрат и интегрировании по телесному углу все перекрестные произведения обратятся в нуль. Вследствие этого фазовыми множителями можно пренебречь. Относительные величины членов ряда зависят от симметрии распределения зарядов. Однако ввиду того, что при $k\xi \ll 1$

$$j_n(k\xi) \simeq \frac{2^n n!}{(2n+1)!} (k\xi)^n, \quad (13.49)$$

очевидно, что единственно важным членом будет первый, не обращающийся в нуль член, при условии, конечно, что длина волны много больше размеров источника. Таким образом, воспользовавшись приближением (13.49) и оставляя только наибольший член, получаем

$$\Pi_{(\omega)}^{(n)} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{2^n n!}{2n!} \int (k\xi)^n p_{\omega} P_n(\cos \theta) d\nu'. \quad (13.50)$$

В таком виде поле излучения представляет собой момент вектора поляризации. Если распределение зарядов в источнике линейно, то функцию Лежандра можно вынести за знак интеграла; в этом случае она автоматически определяет угловое распределение соответствующих полей. В противном случае необходимо дополнительное исследование, чтобы показать, что угловое распределение полей из-

лучения определяется функцией Лежандра. Наиболее легко это проделать для первых членов. Так, в нулевой член, $n=0$, входит $p_1 = \int p_\omega d\mathbf{v}'$ — суммарный дипольный момент, который рассматривался в гл. 1. Члены более высокого порядка становятся существенными, если дипольный член отсутствует, т. е. если распределение зарядов не обладает суммарным осциллирующим дипольным моментом. Заметим, однако, что если излучение определяется более чем одним моментом, то это излучение нельзя представить в виде суммы членов вида (13.50). Дело в том, что приближение (13.49) применимо лишь к наибольшему моменту; вклад членов более высокого порядка в этом разложении будет такой же, как и членов с большим n ¹⁾.

Мультипольное разложение можно получить и чисто формальным разложением поля излучения в ряд Тейлора по степеням координат источника ξ . Если $\xi \ll 1$, то в области, где вектор поляризации \mathbf{p} отличен от нуля, выражение (13.43) можно разложить в ряд

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\Pi_{\omega\beta}(x_a) &= \int p_\beta(x'_a) \frac{e^{ikr}}{r} d\mathbf{v}' = \\ &= \frac{e^{ikr}}{R} \int p_\beta d\mathbf{v}' - \left[\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right]_{r=R} \int \xi_\gamma p_\beta d\mathbf{v}' + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right]_{r=R} \int \xi_\gamma \xi_\delta p_\beta d\mathbf{v}' \dots \end{aligned}$$

Первые два члена легко отождествить с выражениями (13.51) и (13.63), которые ниже выводятся из соотношения (13.50).

§ 13.6. Излучение электрического диполя

Рассмотрим подробнее поле излучения диполя. При $n=0$ вектор Герца равен

$$\Pi_\omega(x_a) = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 R} \int p_\omega(x'_a) d\mathbf{v}' = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \mathbf{p}_1. \quad (13.51)$$

Направление вектора \mathbf{p}_1 примем в качестве полярной оси. Для того чтобы найти поле излучения, вычислим сначала с помощью соотношения (13.44) вектор \mathbf{C} . Как видно из рис. 13.3, компоненты $\Pi_{0\omega}$ в сферической системе координат равны

$$\left. \begin{aligned} \Pi_R &= \Pi_{0\omega} \cos \theta = \frac{p_1 \cos \theta e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}, \\ \Pi_\theta &= -\Pi_{0\omega} \sin \theta = -\frac{p_1 \sin \theta e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}, \\ \Pi_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

¹⁾ Смысл этого замечания поясняется в задаче 8.

Выражение для ротора в сферических координатах (приложение II) показывает, что единственной компонентой C будет

$$C_{\varphi} = \frac{p_1 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{R} - ik \right) e^{ikR}. \quad (13.53)$$

Таким образом, мы получаем только φ -ю составляющую магнитного поля

$$H_{\varphi} = -\frac{i\omega}{4\pi} p_1 \sin \theta \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} \right) e^{ikR}, \quad (13.54)$$

и согласно соотношению (13.46) компоненты электрического поля равны

$$E_R = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta C_{\varphi}) = \frac{p_1 \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{R} - ik \right) e^{ikR}, \quad (13.55)$$

$$E_{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RC_{\varphi}) = \frac{p_1 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} - k^2 \right) e^{ikR}. \quad (13.56)$$

Два члена в выражении для H_{φ} представляют собой поле индукции и поле излучения. θ -компонента электрического поля имеет три

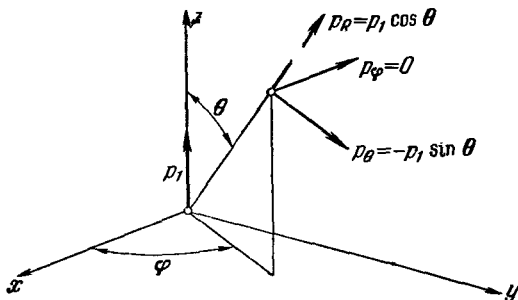


Рис. 13.3. Компоненты вектора поляризации, направленного вдоль поляриной оси.

члена: первый член — это статическое поле диполя, обратно пропорциональное кубу расстояния до диполя; второй член обратно пропорционален квадрату расстояния до диполя и называется переходным полем; третий член — поле излучения. Переходное поле не дает вклада в энергию излучения, хотя при расчетах энергии, запасенной при колебаниях, его роль значительна. Поля излучения описываются членами, пропорциональными $1/R$:

$$H_{\varphi} = -\frac{\omega k p_1 \sin \theta e^{ikR}}{4\pi R}, \quad (13.57)$$

$$E_{\theta} = -\frac{k^2 p_1 \sin \theta e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (13.58)$$

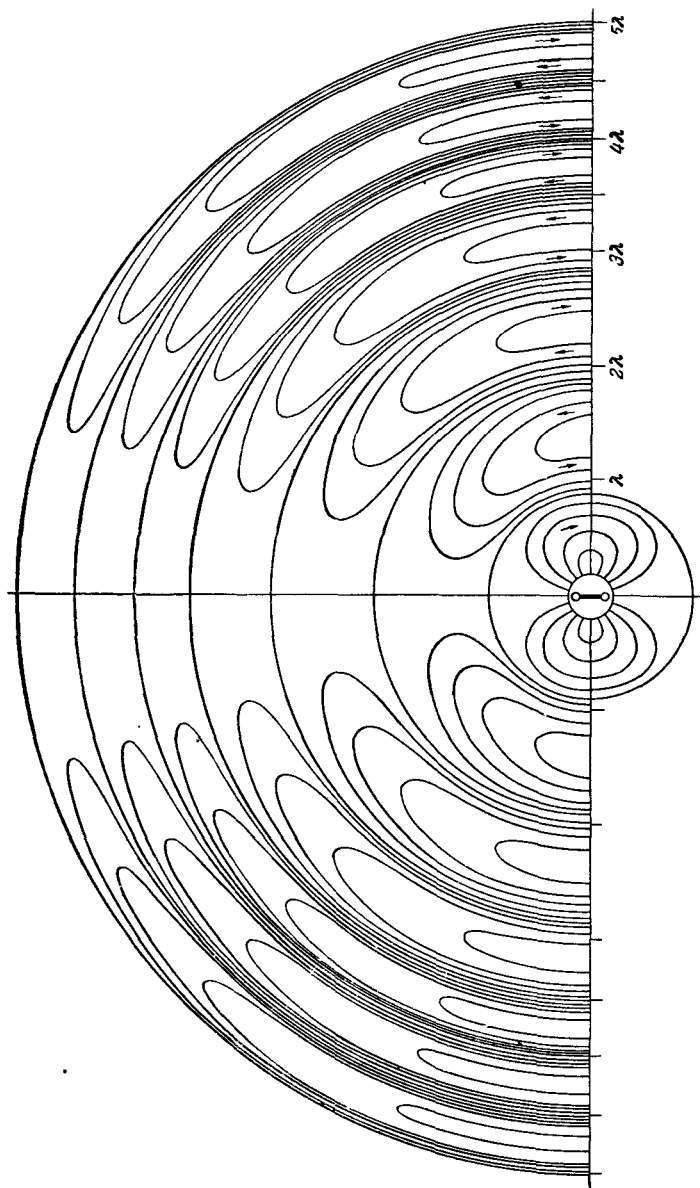


Рис. 13.4. Электрическое поле излучающего диполя.

или в векторных обозначениях:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} [(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}], \\ H &= \frac{\omega e^{ikR}}{4\pi R} (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}), \end{aligned} \right\} \quad (13.59)$$

где вектор \mathbf{k} направлен вдоль R .

С помощью вектора \mathbf{C} очень просто получить уравнения силовых линий электрического поля. Элемент ds силовой линии параллелен \mathbf{E} . Следовательно, уравнение силовой линии имеет вид

$$ds \times \mathbf{E} = ds \times (\nabla \times \mathbf{C}) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial R} (RC \sin \theta) dR + \frac{\partial}{\partial \theta} (RC \sin \theta) d\theta = 0, \quad (13.60)$$

и его решение

$$RC \sin \theta = \text{const.}$$

Подставляя выражение для C (13.53), получаем

$$\sqrt{1 - k^2 R^2} R^{-1} \sin^2 \theta \cos(kR - \omega t - \text{arctg } kR) = \text{const}, \quad (13.61)$$

причем была учтена зависимость C и от времени. Это — точное уравнение, применимое как в дальней, так и в близкой зоне индукции. Для поля излучения уравнение силовых линий упрощается

$$\sin^2 \theta \sin(kR - \omega t) = \text{const},$$

откуда видно, что поле периодически по радиусу, причем период равен длине волны λ . В близкой зоне согласно соотношению (13.61) фазовая скорость волнового фронта больше c . Переход к скорости, равной c , показан на рис. 13.4 вдали от диполя, расстояние между группами силовых линий становится равным λ . Рисунок несколько искажен, чтобы показать на нем оба поля. В книге Г. Герца¹⁾ имеется известная серия рисунков, показывающих, как со временем образуются силовые линии.

§ 13.7. Излучение мультиполей

Рассмотрим теперь излучение, соответствующее моментам более высокого порядка. При $n=1$ общее выражение (13.50) принимает вид

$$\Pi_{1\omega} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \int k \xi p \cos \theta d\omega', \quad (13.62)$$

¹⁾ G. Gertz, Gesammelte Werke, Bd. II.

или, иначе,

$$\Pi_{1\omega} = \frac{ke^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{R}) dv'. \quad (13.63)$$

Компоненты $\boldsymbol{\xi}$ равны x'_α , а компоненты \mathbf{R} равны x_α . Подынтегральное выражение в соотношении (13.63) можно представить в виде тензора, компоненты которого зависят от двух видов параметров распределения: p_β и x'_α . Этот тензор удобно разбить на две части: симметричную и антисимметричную по его параметрам:

$$x_\alpha p_\beta x'_\alpha = \frac{x_\alpha (p_\beta x'_\alpha + p_\alpha x'_\beta) + x'_\alpha (p_\beta x'_\alpha - p_\alpha x'_\beta)}{2}. \quad (13.64)$$

Таким же преобразованием мы пользовались в § 7.11. Подобные преобразования часто применяются в механике сплошных сред, например, для того, чтобы общее натяжение в твердом теле представить в виде суммы собственного натяжения, определяемого симметричным тензором, и вращения тела как целого, определяемого антисимметричным тензором. Представим теперь антисимметричную часть выражения (13.64) снова в векторном виде. Тогда интеграл (13.63) примет такой вид:

$$\frac{1}{2} \int \{ [\mathbf{R} \times (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\xi})]_\beta + x_\alpha (p_\beta x'_\alpha - p_\alpha x'_\beta) \} dv'. \quad (13.65)$$

Рассмотрим сначала антисимметричный член. Так как вектор \mathbf{R} не зависит от координат источника, его можно вынести за знак интеграла и для первого члена получим

$$\frac{1}{2} \mathbf{R} \times \int (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\xi}) dv'. \quad (13.66)$$

Смысл этого интеграла легко понять, выразив вектор поляризации через ток. При синусоидальной зависимости от времени $\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{j}}{i\omega}$, следовательно, выражение (13.66) принимает вид

$$-\frac{\mathbf{R}}{2i\omega} \times \int \mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi} dv'. \quad (13.67)$$

Напомним, что магнитный момент распределения токов равен

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j} dv'.$$

Таким образом, выражение (13.67) принимает простой вид

$$\frac{1}{i\omega} \mathbf{R} \times \mathbf{m}.$$

Поляризационный потенциал Π , соответствующий антисимметричной части подынтегрального выражения, равен

$$\Pi_{\text{антисимм}} = \frac{ke^{ikR} (R \times m)}{4\pi\epsilon_0 R^2 i\omega}. \quad (13.68)$$

Зная поляризационный потенциал, легко вычислить поле. Если пренебречь членами, соответствующими полю индукции, то получим

$$E_{\text{антисимм}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{i\mu_0 k^2 [R \times (m \times R)] e^{ikR}}{4\pi R^3}. \quad (13.69)$$

Опуская фазовый множитель, для поля H получим

$$H_{\text{антисимм}} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} [k \times (m \times k)]. \quad (13.70)$$

Магнитное поле в этом случае имеет точно такую же форму, как электрическое (13.59) в случае электрического диполя. Его называют полем излучения магнитного диполя. Излучение магнитного диполя соответствует такому распределению токов, при котором хотя и нет суммарного осциллирующего дипольного момента, но имеется гармонически изменяющаяся циркуляция зарядов.

Вернемся к рассмотрению физического смысла симметричного члена в соотношении (13.64). Соответствующий ему вектор Герца равен

$$\Pi_{\beta\text{симм}} = \frac{ke^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R^2} x_\alpha \int \frac{1}{2} (p_\beta x'_\alpha + p_\alpha x'_\beta) dv'. \quad (13.71)$$

Симметрия этого выражения становится более очевидной, если его выразить через плотность зарядов $\rho(x'_\alpha)$ и их координаты. Рассмотрим величину

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho x'_\alpha x'_\beta dv' = - \int \frac{\partial p_\gamma}{\partial x'_\gamma} x'_\alpha x'_\beta dv', \quad (13.72)$$

которая называется электрическим квадрупольным моментом распределения зарядов. Проинтегрируем (13.72) по частям, предполагая при этом, что граница области интегрирования находится вне распределения зарядов. Тогда поверхностный интеграл обратится в нуль, и вектор Герца (13.71) можно выразить через квадрупольный момент

$$\Pi_\beta = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R^2} x_\alpha Q_{\alpha\beta}. \quad (13.73)$$

Симметричная матрица квадрупольного момента (13.72) может быть представлена также семейством поверхностей второго порядка, определяемых квадратичной формой

$$x_\alpha x_\beta Q_{\alpha\beta} = C_2 = \text{const}. \quad (13.74)$$

Вектор Π выражается через параметр C_2 :

$$\Pi = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R^2} \nabla C_2, \quad (13.75)$$

откуда видно, что вектор Π всегда перпендикулярен к поверхности (13.74).

Вычислим в общем виде компоненты полей излучения квадруполья. Систему осей x, y, z возьмем вдоль главных осей квадратичной поверхности квадруполья. Тогда компоненты вектора Π равны

$$\begin{pmatrix} \Pi_x \\ \Pi_y \\ \Pi_z \end{pmatrix} = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi Q_{xx} \\ \sin \theta \sin \varphi Q_{yy} \\ \cos \theta Q_{zz} \end{pmatrix}. \quad (13.76)$$

Вычисляя ротор вектора Π , находим компоненты C :

$$\left. \begin{aligned} C_\theta &= \frac{ik^2 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R} \sin \theta \sin 2\varphi (Q_{xx} - Q_{yy}), \\ C_\varphi &= \frac{ik^2 e^{ikR}}{32\pi\epsilon_0 R} \sin 2\theta [Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx}) \cos 2\varphi]. \end{aligned} \right\} (13.77)$$

Зная вектор C , легко найти компоненты электрического поля

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= \frac{k^3 e^{ikR}}{32\pi\epsilon_0 R} \sin 2\theta [Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx}) \cos 2\varphi], \\ E_\varphi &= \frac{k^3 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R} \sin \theta \sin 2\varphi (Q_{yy} - Q_{xx}) \end{aligned} \right\} (13.78)$$

и магнитного поля

$$\left. \begin{aligned} B_\theta &= -\frac{\omega\mu_0 k^2 e^{ikR}}{16\pi R} \sin \theta \sin 2\varphi (Q_{yy} - Q_{xx}), \\ B_\varphi &= \frac{\omega\mu_0 k^2 e^{ikR}}{32\pi R} \sin 2\theta [Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx}) \cos 2\varphi]. \end{aligned} \right\} (13.79)$$

Небезынтересно отметить, что поля зависят лишь от разностей составляющих квадрупольного момента; следовательно, поля излучения определяются пятью, а не шестью моментами распределения второго порядка. В соотношениях (13.78) и (13.79) приведены только поля излучения, и поэтому радиальные компоненты отсутствуют.

Поля излучения квадруполья характеризуются двумя чертами. Во-первых, в случае равенства двух составляющих квадрупольного момента, т. е. при сфероидальном распределении поляризации в квадруполье, вектор C , а следовательно, и магнитное поле, имеет

только одну компоненту

$$C_{\varphi} = \frac{ik^2 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R} \sin 2\theta (Q_{xx} - Q_{zz}), \quad (13.80)$$

где в качестве оси z взята полярная ось сфероида. Во-вторых, в общем случае поля будут обращаться в нуль на двух конических поверхностях, в отличие от одной поверхности в случае дипольного излучения. Физически квадрупольный момент возникает при колеблющемся распределении зарядов такой симметрии, при которой дипольный момент все время равен нулю. Простейший пример квадруполья представляют два диполя, смещенные друг относительно друга и колеблющиеся в противофазе.

Аппарат, развитый в настоящей главе, обладает большой общностью. Однако в применении запаздывающих потенциалов для вычисления полей излучения элементарных зарядов возникает ряд трудностей. Часть трудностей просто разрешается с помощью теории относительности. Поэтому дальнейшее исследование излучения требует знакомства с этой теорией.

Задачи

1. Покажите, что радиально осциллирующая сфера, несущая сферически симметричный заряд, не излучает.

2. Покажите, что полная энергия, излучаемая колеблющейся системой, равна нулю, если решение волнового уравнения взять в виде

$$\varphi = \frac{\varphi_{\text{запазд}} + \varphi_{\text{опереж}}}{2},$$

$$A = \frac{A_{\text{запазд}} + A_{\text{опереж}}}{2}.$$

3. Ток в круговом контуре радиуса d определяется формулой

$$I = I_0 \sin(n\varphi) e^{-i\omega t}.$$

Покажите, что если пренебречь фазовым множителем, то векторный потенциал в волновой зоне определяется соотношением

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{a}{r} I_n'(ka \sin \varphi) \sin n\varphi e^{i(kR - \omega t)}.$$

4. Электрический диполь, лежащий в начале координат в плоскости xy , вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью. Найдите компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат на больших расстояниях от диполя.

5. Рассмотрите два диполя, ориентированные под прямым углом друг к другу, колеблющиеся с разностью фаз 90° и с одинаковой частотой:

а) Вычислите энергию, излучаемую за время dt .

б) Рассмотрите сферическое поглощающее тело, расположенное на большом расстоянии R от диполей. Крутящий момент, передаваемый этому телу за время dt , равен

$$G = \left[\int \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{c^2} dS \right] c dt,$$

где поверхностью интегрирования служит поверхность сферы. Вычислите Q и сравните с результатом пункта а). Воспользуйтесь полными выражениями для полей диполя.

6. Линейный квадрупольный осциллятор состоит из трех зарядов $-e$, $+2e$, $-e$. Положительный заряд находится постоянно в начале координат, а отрицательные — в точках z_1 и z_2

$$z_1 = -z_2 = a \cos \frac{1}{2} \omega t.$$

Вычислите среднюю мощность излучения и поля на больших расстояниях.

7. Рассмотрите случай, когда отрицательные заряды задачи 6 не колеблются, а вращаются вокруг положительного заряда с постоянной угловой скоростью. Расстояние до положительного заряда остается постоянным и равным a , а сами заряды все время находятся на одной линии. Найдите компоненты квадрупольного момента и среднюю мощность излучения.

8. Пусть антенна длиной $L = \frac{\lambda}{4}$ питается в центре током

$$I = I_0 \cos \frac{2\pi\xi}{\lambda}, \quad -\frac{\lambda}{8} < \xi < \frac{\lambda}{8}.$$

Вычислите мощность дипольного и октупольного излучений. Сложите их и результат сравните с точной формулой.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

В гл. VIII рассмотрены запаздывающие потенциалы, а также мультипольное разложение потенциала Герца.

2. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. (Русский перевод: Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики.)

В книге имеется весьма полезный материал относительно решения неоднородного волнового уравнения.

3. G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*.

Книга содержит много примеров.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 14.1. Принцип относительности Галилея и электродинамика

Мы нашли, что электромагнитные волны в вакууме распространяются со скоростью $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Эта величина представляет собой характеристическую константу теории. Наличие такой постоянной качественно отличает теорию Максвелла от классической механики. Классическая механика никаких констант не содержит и допускает подобное преобразование любых величин, входящих в нее. Вследствие этого различия теория Максвелла не обладает весьма важным свойством классической механики, а именно, независимостью от системы отсчета. Движение с постоянной скоростью вообще нельзя отличить от состояния покоя, а законы движения в равной степени справедливы во всех системах отсчета, движущихся с постоянной скоростью друг относительно друга (рис. 14.1). Математически это означает, что замена переменных

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

не изменяет уравнений движения. Такая замена переменных соответствует переходу от системы координат x, y, z к системе координат x', y', z' , движущейся относительно первой со скоростью v по направлению x . В неизменности уравнений движения легко убедиться прямой подстановкой преобразования (14.1) в уравнения движения n материальных точек, взаимодействие которых зависит лишь от взаимных расстояний между ними. Напишем уравнение движения i -й частицы

$$m_i \ddot{r}_i = - \sum_{j \neq i}^n \nabla_i [V(|r_i - r_j|)]. \quad (14.2)$$

Совершенно очевидно, что оно сохранит свой вид и в штрихованной системе отсчета. Соотношения (14.1) называются преобразованиями Галилея, и поэтому обычно говорят, что законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Система отсчета, в которой тело, не испытывающее действия сил, движется без ускорения, называется «инерциальной». Следовательно, инвариантность законов механики относительно преобразований (14.1) выражается эквивалентностью всех инерциальных систем отсчета в классической механике. Это утверждение называют принципом относительности Галилея.

Так как силы обнаруживаются по вызываемым ими ускорениям, если, конечно, источник силы не известен заранее, то инерциальные системы отсчета определены не строго. Однако с уравнениями

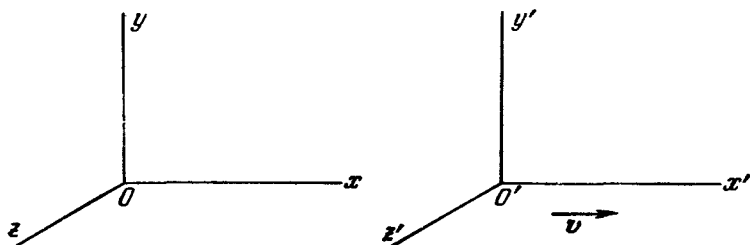


Рис. 14.1. Системы отсчета, движущиеся друг относительно друга.

Максвелла возникает гораздо более существенная трудность, так как форма этих уравнений не сохраняется при преобразованиях (14.1). Следовательно, можно предполагать, что электромагнитные эффекты будут по-разному проявляться в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью. В частности, скорость распространения плоских волн в вакууме не должна сохранять свою величину $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Если считать правильными как уравнения Максвелла, так и законы классической механики, то должна существовать некоторая преимущественная система отсчета, в которой свет распространяется со скоростью c . В классической физике полагали, что эта система отсчета связана с «эфиром».

То обстоятельство, что принцип относительности Галилея применим к законам механики и не применим к электродинамике, требует сделать выбор между следующими возможностями:

а) принцип относительности применим в механике и не применим в электродинамике, и должна существовать преимущественная система отсчета (система эфира);

б) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; при этом электродинамика в форме уравнений Максвелла неверна;

в) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; законы механики в ньютоновской форме требуют изменения.

Выбор между этими возможностями можно сделать лишь на основе опыта. В дальнейшем, анализируя соответствующие эксперименты, мы убедимся, что фактически осуществляется третья возможность в виде специальной теории относительности. В конце главы указаны основные опыты, приведшие к такому выводу. Дополнительные ссылки можно найти в более полных обзорах по теории относительности, приведенных далее. Эксперименты распадаются на три класса: а) попытки обнаружить с помощью законов электродинамики преимущественную инерциальную систему отсчета; б) попытки найти отклонения от законов классической электродинамики; в) попытки найти отклонения от законов классической механики.

§ 14.2. Поиски абсолютной системы отсчета, связанной с эфиром

Легко показать, что два заряда q и $-q$, находящиеся на концах отрезка, движущегося со скоростью \mathbf{v} , будут взаимодействовать так же, как два элемента тока величиной $Idl = q\mathbf{v}$. Силы, действующие на эти элементы тока, будут равны и направлены в противоположные стороны, и в общем случае они не коллинеарны (рис. 14.2). Стержень, соединяющий заряды, будет стремиться повернуться под прямым углом к направлению скорости. Рассчитаем величину этого эффекта. Согласно закону Ампера

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{L})}{L^3}, \quad (14.3)$$

причем направление и длина вектора \mathbf{L} определяется стержнем. Сила

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \frac{v^2}{c^2} \sin \theta \quad (14.4)$$

направлена перпендикулярно к \mathbf{v} в плоскости векторов \mathbf{L} и \mathbf{v} . Соотношение (14.4) показывает, что магнитное взаимодействие движущихся зарядов есть эффект порядка $(v/c)^2$ по сравнению с электростатическим взаимодействием тех же зарядов. Крутящий момент пары сил (рис. 14.2) составляет

$$FL \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 v^2 \sin \theta \cos \theta}{c^2 L} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L} \frac{v^2}{c^2} \sin 2\theta. \quad (14.5)$$

Если бы существовала преимущественная система отсчета, то вряд ли она покоилась бы относительно Земли. Поэтому поступа-

тельное движение Земли должно создавать вращательный момент в системе зарядов. Траутон и Нобл поставили опыт с плоским конденсатором, подвешенным на упругом подвесе, с целью обнаружить этот эффект. Однако крутящего момента обнаружено не

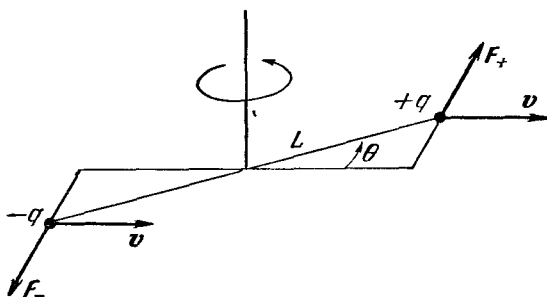


Рис. 14.2. Равные заряды разного знака, движущиеся со скоростью v .
Силы F_+ и F_- не коллинеарны.

было. Последующие, более точные опыты также дали отрицательный результат, хотя при скорости v , равной орбитальной скорости Земли, эффект мог быть легко обнаружен.

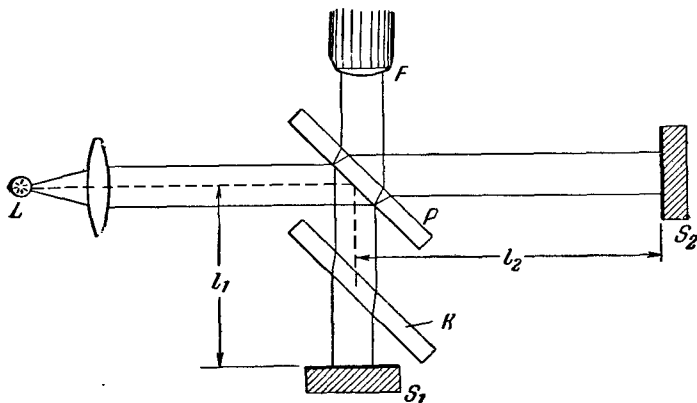


Рис. 14.3. Схема опыта Майкельсона и Морли.

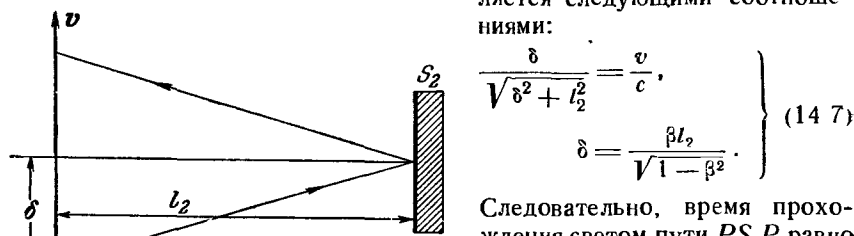
Наиболее известной попыткой обнаружить систему отсчета, связанную с эфиром, был опыт Майкельсона и Морли (рис. 14.3). Схема опыта состояла в следующем. С помощью полупрозрачного зеркала P свет от источника L разделялся на два луча. Лучи отражались от зеркал S_1 и S_2 и возвращались через полупрозрачное

зеркало в зрительную трубу F , с помощью которой можно было наблюдать интерференционную картину в этих лучах. Разность оптических длин плечей интерферометра компенсировалась пластинкой K .

Пусть интерферометр движется относительно неподвижного эфира со скоростью v параллельно плечу S_1P . Тогда с точки зрения классической физики время, необходимое для того, чтобы свет прошел путь PS_1P , равно

$$t_1 = l_1 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}, \quad (14.6)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$. При аналогичном расчете для второго плеча следует учесть то обстоятельство, что пока свет идет от P до S_2 зеркало P передвинется на расстояние δ (рис. 14.4). Это расстояние определяется следующими соотношениями:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + l_2^2}} &= \frac{v}{c}, \\ \delta &= \frac{\beta l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} (14.7)$$

Следовательно, время прохождения светом пути PS_2P равно

Рис. 14.4. К расчету опыта Майкельсона и Морли. Вычисление δ .

$$t_2 = \frac{2}{c} \sqrt{l_2^2 + \delta^2} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (14.8)$$

Таким образом, разность Δ оптических длин составляет

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2 \right). \quad (14.9)$$

Если интерферометр повернуть на 90° , то l_1 и l_2 поменяются местами и тогда

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)},$$

а новая разность оптических длин окажется равной

$$\Delta' = c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Следовательно, при повороте прибора на 90° следует ожидать смещения интерференционной картины на n полос:

$$n = \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \approx -\frac{l_1 + l_2}{\lambda} \beta^2. \quad (14.10)$$

Приближение в последнем равенстве связано с малостью скорости v по сравнению с c .

Однако никакого смещения в опыте Майкельсона и Морли обнаружено не было. По скорости точность их результатов составляла 10 км/сек, т. е. скорость Земли относительно «эфира» должна быть меньше 10 км/сек, хотя орбитальная скорость Земли равна примерно 30 км/сек. Большую дискуссию вызвали опыты Миллера, давшие скорость примерно 10 км/сек, направленную в определенную точку пространства. Однако после улучшения методики эти опыты также подтвердили отсутствие смещения интерференционной картины, а более внимательный анализ прежних данных Миллера показал, что и они не противоречат опытам других исследователей. В табл. 14.1 дана сводка различных вариантов опыта Майкельсона — Морли¹⁾.

Таблица 14.1

Опыты Майкельсона

Наблюдатель	Год	Место	l , см	$(2l/\lambda) (v/c)^2$	A	Отношение
Майкельсон	1881	Потсдам	120	0,04 по- лосы	0,01 по- лосы	2
Майкельсон и Морли	1887	Кливленд	1100	0,40	0,005	40
Морли и Миллер	1902—1904	Кливленд	3220	1,13	0,0073	80
Миллер	1921	Маунт Вильсон	3200	1,12	0,04	15
Миллер	1923—1924	Кливленд	3200	1,12	0,015	40
Миллер (с солнечным светом)	1924	Кливленд	3200	1,12	0,007	80
Томашек (со светом звезд)	1924	Гейдельберг	860	0,3	0,01	15
Миллер	1925—1926	Маунт Вильсон	3200	1,12	0,044	13
Кеннеди	1926	Пасадена и Маунт Вильсон	200	0,07	0,001	35
Иллингворт	1927	Пасадена	200	0,07	0,0002	175
Пнкар и Стахаль	1927	Маунт Риш	280	0,13	0,003	20
Майкельсон и др.	1929	Маунт Вильсон	2590	0,9	0,005	90
Иоос	1930	Йена	2100	0,75	0,001	375

¹⁾ Табл. 14.1 заимствована из статьи «Новый анализ интерференционных наблюдений Д. Миллера» с любезного разрешения ее авторов Р. Шанкланда, С. Маккаски, Р. Леоне и Г. Курти. Статья помещена в журнале Rev. Mod. Phys. 27, 167 1955.

Во всех опытах плечи интерферометра были равными. Согласно теории эфира ожидаемое смещение интерференционной картины равняется $\frac{2l}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2$, где v — орбитальная скорость Земли. Величины смещений, реально наблюдавшихся исследователями, приведены в столбце А. Для сравнения точности различных экспериментов в последнем столбце дано отношение ожидаемого смещения к 2А. Из этой таблицы видно, насколько надежно установлен отрицательный результат.

§ 14.3. Гипотеза Лоренца и Фитцджеральда о сокращении длины движущихся тел

Мы видели, что с сохранением старых идей механики и электродинамики, поиски преимущественной системы отсчета оказались безуспешными. Однако Лоренц и Фитцджеральд предприняли попытку сохранить представление о преимущественной системе отсчета, предположив, что все тела при движении относительно неподвижного эфира испытывают сокращение в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз в направлении движения. Впоследствии это сокращение получило название лоренцевского сокращения. Согласно этой гипотезе плечо l_1 на рис. 14.3 равно в действительности $l_1^0 \sqrt{1-\beta^2}$, где l_1^0 — длина этого плеча, когда оно покоится относительно эфира, а $l_2 = l_2^0$. Тогда выражение (14.9) примет вид

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1^0 - l_2^0), \quad (14.11)$$

и при повороте на 90° смещения интерференционной картины не произойдет. Смещения картины не будет и при изменении скорости, если $l_1^0 \approx l_2^0$, как это и было в первоначальных экспериментах. Однако если плечи не равны $l_1^0 \neq l_2^0$, то даже при лоренцевском сокращении изменение скорости относительно эфира приведет к смещению полос интерференции на

$$n = \frac{l_1^0 - l_2^0}{\lambda} (\beta'^2 - \beta^2), \quad (14.12)$$

что следует из наличия множителя $(\beta'^2 - \beta^2)$.

Кеннеди построил интерферометр со столь большой разностью плеч, какая только допускалась когерентностью источника света. Можно предполагать, что квадрат скорости интерферометра относительно эфира определяется выражением

$$v^2 = c^2\beta^2 = (v_E + v_R + v_S)^2,$$

где v_E — скорость Земли относительно Солнца, v_R — скорость поверхности Земли, обусловленная суточным вращением, и v_s — скорость Солнца. Каждые 12 час. эта величина изменяется на

$$\Delta v^2 = 4(v_s + v_E) \cdot v_R.$$

а каждые шесть месяцев — на

$$\Delta v^2 = 4(v_s + v_R) \cdot v_E.$$

Эти изменения должны приводить к смещению интерференционной картины. Однако вопреки гипотезе Лоренца смещения не наблюдалось.

§ 14.4. Гипотеза «увлекаемого эфира»

Еще одна возможность согласовать представление об эфире с результатом опыта Майкельсона — Морли заключается в предположении, что эфир увлекается движущимися телами. Тогда во всех опытах с интерферометрами должен автоматически получаться отрицательный результат. Однако такое предположение противоречит двум хорошо известным явлениям.

Первое явление — это абберация света «неподвижных» звезд. Вследствие движения Земли вокруг Солнца видимые положения звезд испытывают кажущееся угловое смещение примерно на $41''$. Рассмотрим подробнее это явление. Пусть звезда находится в полюсе эклиптики. При наблюдении такой звезды телескоп должен быть наклонен в направлении движения Земли на угол α (рис. 14.5). Из схемы, приведенной на рисунке и построенной на основе классических представлений, видно, что

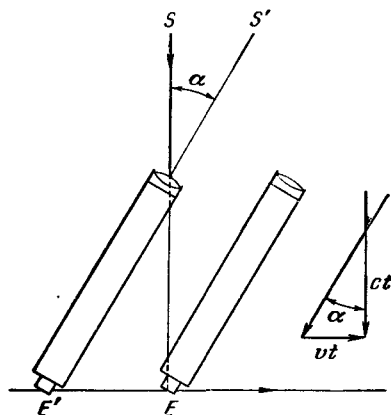


Рис. 14.5. Абберация звезд:

SE — истинное направление света от звезды в зените; $S'E'$ — кажущееся направление.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}. \quad (14.13)$$

При подстановке в это соотношение скорости Земли 30 км/сек получаем $\alpha = 10^{-4} = 20''.5$ в согласии с наблюдениями. Если бы эфир увлекался Землей, то абберация вообще не наблюдалась бы.

Второе явление, противоречащее предположению об увлечении эфира движущимися телами, связано с распространением электромагнитных волн в движущейся среде. Как мы видели в § 11.4, дви-

жение среды оказывает влияние лишь на ту часть скорости электромагнитных волн, которая зависит от поляризационных токов $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$, а часть, пропорциональная $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, остается неизменной. Если бы эфир двигался вместе со средой, то скорость электромагнитных волн определялась бы не коэффициентом Френеля — Физо, а просто равнялась бы $c \pm v$, что противоречит опыту. Следовательно, предположение об увлечении эфира движущимися телами приводит к расхождению с экспериментальными данными уже в первом порядке относительно v/c .

Эти соображения заставляют отказаться от представлений о преимущественной системе отсчета. Тем самым мы приходим к необходимости распространить на электродинамику принцип относительности. Следовательно, необходимо изменить либо электродинамику, либо классическую механику. Сначала мы рассмотрим попытки изменить электродинамику таким образом, чтобы избежать парадоксов, связанных с эфиром.

§ 14.5. Эмиссионные теории

Модификация электродинамики в так называемых эмиссионных теориях состоит в предположении, что скорость света связана с движением источника, а не с той или иной системой отсчета. Во всех эмиссионных теориях скорость света относительно источника считается равной c и не зависящей от состояния передающей среды с показателем преломления n . Между собой эти теории различаются по тому, как изменяется скорость света при отражении от движущегося зеркала. При этом возможны три случая:

1. Скорость света относительно источника остается равной c/n .
2. Скорость света относительно зеркала становится равной c/n (так называемая баллистическая теория).
3. Скорость света становится равной c/n относительно изображения источника в зеркале.

Первая теория, предложенная Ритцем, — единственная из трех, в которой не возникает трудностей с когерентностью отраженного света. Два уравнения Максвелла Ритц оставил прежними

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

причем, как и прежде, \mathbf{E} и \mathbf{B} связаны с потенциалами посредством соотношений

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= - \nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Два других уравнения, в которых фигурируют источники поля. Ритц заменил следующими:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x'_a, t - \frac{r}{c + vr})}{r} dv', \quad (14.14)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(x'_a, t - \frac{r}{c + vr})}{r} dv', \quad (14.15)$$

где v_r — компонента скорости источника в направлении излучения. Эти соотношения заменяют обычные запаздывающие потенциалы (13.24) и (13.25) и определяют поля движущихся зарядов.

В отличие от обычной электромагнитной теории, все три эмиссионные теории предсказывают для опытов по интерференции лучей, отраженных от движущихся зеркал, расхождение в первом порядке относительно v/c . Томсон, Майорана и Стюарт поставили такие опыты. Их результаты расходятся с результатами второй и третьей эмиссионных теорий, однако в пределах ошибок эксперимента согласуются с предсказаниями теории Ритца. Это кажущееся согласие обусловлено тем обстоятельством, что теория Ритца, будучи примененной к любой замкнутой системе интерферирующих лучей, дает результаты, отличающиеся от результатов теории, предполагающей скорость света постоянной, лишь членами порядка (v^2/c^2) . Если источник света движется со скоростью v по направлению к зеркалу, то согласно теории Ритца время, необходимое для того, чтобы свет прошел расстояние l до зеркала, равно $\frac{l}{c+v}$, на обратном пути он пройдет то же расстояние за время $\frac{l}{c-v}$. Суммарное время равно

$$\Delta t = \frac{2l}{c(1-\beta^2)}.$$

При постоянной скорости света $t = \frac{2l}{c}$, и следовательно, эти величины различаются лишь членами второго порядка малости относительно v/c . Таким образом, опыт с зеркалом и движущимся источником, находящимся в пределах Земли, не даст расхождений с теорией Ритца.

Имеются, однако, два явления космического масштаба, которые противоречат эмиссионной теории в любой ее форме. Первое явление, касающееся динамики двойных звезд, было детально проанализировано де Ситтером. Если бы скорость света линейно зависела от скорости источника, то свет приближающейся звезды достигал Земли скорее, нежели свет удаляющейся звезды. Как показал де Ситтер, это привело бы к кажущемуся вытягиванию орбиты по сравнению с рассчитанной по законам механики. В действительности такого

эффекта не наблюдается. Де Ситтер пришел к выводу, что если скорость света $v_{св} = c + kv_{зв}$, то $k < 0,002$. Вторым фактом, противоречащим эмиссионной теории, является опыт Майкельсона—Морли с применением солнечного света, выполненный Миллером. Теория Ритца предсказывает некоторое усложнение интерференционной картины, обусловленное, например, вращением Солнца, что в действительности не наблюдается.

§ 14.6. Выводы

Мы рассмотрели ряд опытов, показавших несовместимость электродинамики и механики Ньютона. Сводка таких экспериментов и их

Таблица 14.2

Теории	Опыты со светом							Другие опыты					
	Аберрация	Коэффициент увлечения Физо	Майкельсон — Морли	Кениеди — Торндайк	Движущиеся источники и зеркала	Де Ситтер, спектроскопически двойные звезды	Майкельсон — Морли (с солнечным светом)	Изменение массы со скоростью	Пропорциональность массы и энергии	Излучение движущихся зарядов	Распад мезона при больших скоростях	Траутон — Нобл	Угловая индукция с постоянным магнитом
<i>Теория эфира</i>	покоящийся, без сокращения												
	+	+	—	—	+	+	—	—	0	+	0	—	—
Эфир	покоящийся, с сокращением												
	+	+	+	—	+	+	+	+	0	+	0	+	—
	движущийся вместе с телом												
	—	—	+	+	+	+	+	—	0	0	0	+	0
<i>Эмиссионные теории</i>	относительно источника												
	+	+	+	+	+	—	—	0	0	—	0	0	0
	относительно зеркала												
Скорость после отражения от зеркала, равна $\frac{c}{n}$	+	0	+	+	—	—	—	0	0	—	0	0	0
	относительно изображения												
	+	0	+	+	—	+	+	0	0	—	0	0	0
<i>Специальная теория относительности</i>	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Обозначения:

- + теория согласуется с опытом,
- теория не согласуется с опытом,
- 0 теория неприменима к опыту.

Т а б л и ц а 14.3.

	Эмиссионные теории	Классические теории эфира	Специальная теория относительности
Система отсчета	Выделенная система отсчета отсутствует	Покоящийся эфир — выделенная система отсчета	Выделенная система отсчета отсутствует
Скорость	Скорость света зависит от движения источника	Скорость света не зависит от движения источника	Скорость света не зависит от движения источника
Связь пространства и времени	Пространство и время независимы	Пространство и время независимы	Пространство и время взаимосвязаны
Преобразование уравнений	Инерциальные системы отсчета связаны преобразованием Галилея	Инерциальные системы отсчета связаны преобразованием Галилея	Инерциальные системы отсчета связаны преобразованием Лоренца

связь с различными теориями даны в табл. 14.2. В табл. 14.3 даны основные следствия из трех возможных предположений, рассмотренных в § 14.1. Из табл. 14.2 видно, что экспериментальную основу теории относительности составляют те опыты, результаты которых противоречат всем иным теориям. Единого данного опыта, который доказывал бы справедливость теории относительности, нет. Значение некоторых экспериментов станет понятным лишь после рассмотрения теории относительности. Все эксперименты доказывают следующее:

1. Невозможно обнаружить существование эфира, неподвижного или увлекаемого.
2. Модификации законов электродинамики, подобные эмиссионным теориям, оказываются несостоятельными.

Таким образом, необходимо сделать вывод, что требуются изменения в основных законах механики.

В качестве решения задачи Эйнштейн в 1905 г. в соответствии с экспериментальными фактами, известными в то время, предложил следующие постулаты:

1. Законы электродинамики (в том числе вывод о распространении света в вакууме со скоростью c), так же как и законы механики, одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.
2. Никаким опытом невозможно обнаружить состояния абсолютного движения, и никакое физическое явление не в состоянии

определить преимущественную систему отсчета, обладающую особыми свойствами.

Если законы физики согласовать с этими двумя постулатами, то все опыты табл. 14.2 становятся объяснимыми. Следующую главу мы посвятим изучению содержания этих двух положений, известных как постулаты специальной теории относительности.

Задачи

1. Какой вид принимает волновое уравнение после преобразования Галилея?

2. Вращательный момент, определяемый соотношением (14.5), можно записать в виде: $\frac{1}{2} U_{\text{эл}} \frac{v^2}{c^2} \sin 2\theta$, где $U_{\text{эл}}$ — электростатическая энергия системы зарядов. Покажите, что для плоского конденсатора, фактически использовавшегося Траутоном и Ноблом, соответствующий вращательный момент определяется выражением $U_{\text{эл}} \frac{v^2}{c^2} \sin 2\theta$, отличающимся от (14.5) множителем 2.

3. Плоский конденсатор с площадью пластин 100 см^2 и расстоянием между ними 1 см , заряженный до 10 кв , подвешен на упругой нити под углом 45° к направлению орбитального движения Земли (скорость Земли $\sim 30 \text{ км/сек}$). Оцените предполагаемый вращательный момент.

ЛИТЕРАТУРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОБОСНОВАНИЮ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Trouton, Noble, Phil. Trans. A202, 165, 1903; Proc. Roy. Soc (London) 72, 132, 1903.

Попытка обнаружить крутящий момент, действующий на заряженный конденсатор.

2. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden, 1895.

Раздел, где изложена гипотеза о сокращении движущихся тел, вошел в книгу The Principle of Relativity, ссылка на которую дана ниже.

3. Kennedy and Thorndike, Phys. Rev. 42, 400, 1932.

Интерферометр с неравными плечами. Нулевой результат с точностью до $\pm 10 \text{ км/сек}$.

4. Ritz, Ann. Chim. et Phys. 13, 145, 1908.

Эмиссионная теория.

5. Tolman, Phys. Rev. 31, 26, 1910; Phys. Rev. 35, 136, 1912; J. J. Thomson, Phil. Mag. 19, 301, 1910; Stewart, Phys. Rev. 32, 418, 1911.

Обсуждение различных эмиссионных теорий.

6. Comstock, Phys. Rev. 30, 267, 1910; de Sitter, Proc. Amsterdam Acad. 15, 1297, 1913; 16, 395, 1913.

Спектроскопические исследования двойных звезд.

7. Majorana, Phil. Mag. 35, 163, 1918; 37, 145, 1919.

Эксперименты с движущимся источником и зеркалом.

8. Kennedy, Phys. Rev. 47, 965, 1935. Обсуждение геометрических эффектов высокого порядка в опыте Майкельсона — Морли.

9. Ives, Jour. Opt. Soc. Am. 215, 1938.

Доплеровское смещение.

Дополнительные ссылки можно найти в литературе по теории относительности, список которой приводится ниже.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Becker, *Theorie der Elektrizität*. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II)

Очень ясно рассмотрены экспериментальные основы специальной теории относительности.

2. P. G. Bergman, *An Introduction to the Theory of Relativity*. (Русский перевод: П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности.)

Первые три главы этой прекрасной книги убедительно обосновывают необходимость специальной теории относительности.

3. A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski and H. Weyl, *The Principle of Relativity*.

Сборник оригинальных работ по специальной и общей теории относительности с примечаниями Зоммерфельда. Для данной главы наиболее важны раздел «Опыт Майкельсона», написанный Лоренцем, и его же статья «Электромагнитные явления в системах, движущихся со скоростью, меньшей скорости света».

4. R. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*.

В гл. II дана сводка важнейших экспериментов и ссылки на оригинальные работы. Подробно эксперименты не обсуждаются.

5. C. Møller, *The Theory of Relativity*.

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества.

КИНЕМАТИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Кроме формальных постулатов Эйнштейна, в теории относительности неявно используются два дополнительных предположения, которые необходимы при пересмотре наших физических представлений. Первое из них заключается в «инвариантности смысла времени».

Асимметрия времени была предметом многих дискуссий. С точки зрения формальной физики имеется лишь одно понятие, несимметричное относительно времени, а именно энтропия. Естественно предположить, что второй закон термодинамики может быть использован для определения направления времени независимо от системы отсчета. При этом в качестве положительного направления времени мы выберем такое направление, при котором степень беспорядка статистически увеличивается, т. е. увеличивается энтропия.

Второе предположение можно было бы назвать «инвариантностью собственных величин» или «законом воспроизводимости собственных величин». Под этим мы понимаем то, что при проведении измерения длина некоторого эталона (например, длина волны данной спектральной линии или постоянная кристаллической решетки) и скорость хода основных часов (например, период полураспада радиоактивного элемента) остаются постоянными, если только наблюдатель покоится относительно этих эталонов. При рассмотрении следствий из постулатов специальной теории относительности эти дополнительные предположения позволяют сохранить за понятиями длины и времени точный смысл и воспроизводимость.

§ 15.1. Скорость света и одновременность

В гл. 14 мы рассмотрели ряд экспериментов, устанавливающих, что принцип относительности существует во всех областях физики, включая электродинамику. В числе прочих следствий оказалось, что скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве не зависит от инерциальной системы наблюдателя. Это заключение, хотя и не кажется невероятным, находится в очевидном

противоречии с нашей интуицией. Рассмотрим следующий пример. Пусть из точки O излучается световой импульс. Как это событие будет зарегистрировано двумя наблюдателями, находящимися в разных системах отсчета? Пусть начало одной системы отсчета находится в точке O , а начало другой — движется относительно точки O со скоростью v . Предположим также, что в момент излучения импульса начала координат обеих систем совпадают. Согласно принципу относительности оба наблюдателя должны увидеть сферическую световую волну, причем центр этой волны для каждого наблюдателя лежит в его собственном начале координат!

Если мы считаем, что описание положения волнового фронта возможно независимо в пространстве и во времени, то волна не может быть сферической в обеих системах отсчета. Таким образом, независимость скорости света от системы отсчета требует пересмотра обычного способа определения пространственных координат события относительно данной системы отсчета, при котором время события считалось «универсальным». Парадокс с этими волновыми фронтами основан на предположении, что одновременность событий не зависит от системы отсчета наблюдателя. Если допустить возможность различий в мнениях относительно одновременности прохождения волнового фронта через ряд точек, то парадокс разъясняется. Однако для объяснения сферических волновых фронтов в обеих системах отсчета, очевидно, необходимо построить специальную кинематику.

Таким образом, мы пришли к необходимости пересмотреть наше представление об одновременности. Если мы отказываемся от универсального времени, как не соответствующего действительности, то следует найти механизм для определения одновременности в данной системе отсчета. Этот механизм должен быть таким, чтобы измерение скорости света в данной системе координат со своими масштабами длины и времени давало в результате величину c . Естественно поэтому определить одновременность именно с помощью скорости света. Это придает величине c фундаментальное значение, и тем самым величина c проникает во все соотношения физики. Так, например, использование c для определения одновременности исключает возможность существования «абсолютно твердых тел» в механике; если бы такое тело существовало, его концы двигались бы синхронно в любой системе отсчета, что дало бы возможность определить «универсальное время» вопреки приведенным выше выводам.

В дальнейшем два события, происшедшие в точках x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 , будут считаться одновременными в данной системе отсчета, если световая волна, испущенная из точки, расположенной посередине между точками x_1 и x_2 , приходит в эти точки как раз в моменты времени t_1 и t_2 .

Из этого определения сейчас же следует, что световой импульс, испущенный из начала координат, одновременно достигнет всех равно-

удаленных точек, и следовательно, волновой фронты в данной системе отсчета представляет собой сферу. Таким образом, вне данной системы отсчета одновременность двух событий, происшедших в разных точках пространства, не имеет смысла. Соотношение между интервалами времени, наблюдаемыми в различных системах отсчета, зависит от геометрического расстояния между точками, где произошли события. Поэтому преобразования Галилея (14.1), согласно которым интервалы времени, наблюдаемые в различных системах координат, не зависят от координат, противоречат определению одновременности через скорость c . Следовательно, необходимы новые преобразования от системы координат $(x, y, z; t)$ к системе $(x', y', z'; t')$, которые заменят преобразования Галилея. Эти преобразования должны остаться линейными, поскольку математически это соответствует эквивалентности различных точек пространства и времени. Однако теперь пространственные и временные координаты не должны преобразовываться независимо.

§ 15.2. Кинематические соотношения специальной теории относительности

Преобразования, которые мы хотим получить, должны связать пространственно-временные координаты $(x, y, z; t)$ произвольного события в системе отсчета, которую мы обозначим Σ , с координатами $(x', y', z'; t')$ того же события в системе отсчета Σ' , движущейся с постоянной скоростью относительно Σ . Эти преобразования при событиях любого вида должны подчиняться постулатам специальной теории относительности, изложенным в § 14.6. Для того чтобы понять, каким образом основные постулаты теории относительности определяют характер преобразований, мы проведем ряд «мысленных опытов» (Gedanken Experiment).

Каждый такой опыт пояснит нам какую-либо черту этих преобразований.

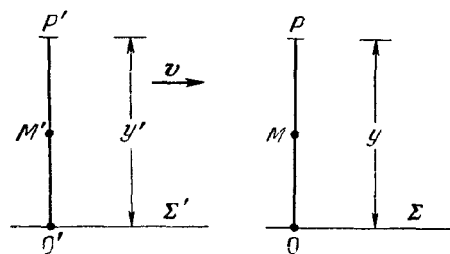


Рис. 15.1. Сравнение двух параллельных измерительных линеек, ориентированных перпендикулярно к относительному движению:

v — скорость системы отсчета Σ' в системе Σ .

Первый опыт. *Сравнение длин двух параллельных измерительных линеек, ориентированных перпендикулярно к направлению их относительного движения* (рис. 15.1). Мы будем предполагать, что свойства данного тела с определенной структурой не зависят от его движений в прошлом, если только измерения про-

изводятся в системе отсчета, где это тело покоится. Эта система отсчета называется «собственной» для данного тела. Длина линейки, измеренная в такой системе, называется ее «собственной длиной». Поэтому можно считать, что собственные длины двух линеек OP и $O'P'$, изображенных на рис. 15.1, одинаковы независимо от того, покоятся ли линейки одна относительно другой или движутся. Можно, например, считать, что длина каждой линейки равна данному числу длин волн некоторой спектральной линии в соответствующей системе отсчета. Обе линейки расположены под прямым углом к скорости \mathbf{v} (последняя направлена вдоль оси x) системы Σ' , измеренной в системе Σ . (Для наблюдателя, находящегося в системе Σ' , система Σ имеет скорость $-v$.)

Пусть обе линейки сближаются таким образом, что при прохождении их друг мимо друга средние точки M и M' совпадают. Будем считать, что система Σ' движется, а Σ покоится. Предположим, что когда точки O' и P проходят через ось y , из этих точек испускаются световые сигналы. Так как во время движения $O'M'$ остается равным $P'M'$, то O' и P' одновременно в обеих системах пересекут ось y' . Аналогично точки O и P одновременно в обеих системах пересекут ось y' . Так как время наблюдения обоих концов определено одинаково в обеих системах, то наблюдатели смогут сравнить положения концов линеек в момент их совпадения и получат одинаковые результаты. Таким образом, оба наблюдателя придут к выводу, что либо $OP \leq O'P'$, либо $OP \geq O'P'$. Обе системы полностью эквивалентны друг другу, поэтому несимметричное соотношение между длинами дало бы возможность определить абсолютное движение, что исключается постулатами теории относительности. Следовательно, мы приходим к выводу, что длина в направлении, перпендикулярном к относительному движению, одинакова в обеих системах отсчета, т. е. для этих длин остаются справедливыми преобразования Галилея

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (15.1)$$

Второй опыт. *Сравнение хода часов.* При сравнении хода часов, связанных с системами отсчета, движущимися друг относительно друга, необходимо помнить, что нельзя одни часы в системе Σ сравнивать с одними часами в системе Σ' , так как часы пространственно совпадают лишь в один момент времени. Следует пару часов в системе Σ сравнивать с одними часами в системе Σ' , причем часы в системе Σ должны быть синхронизованы посредством световых сигналов. Пусть в той точке, где расположены часы, в системе Σ' находится источник света (рис. 15.2). Световой сигнал, испущенный перпендикулярно к \mathbf{v} , отразится зеркалом, расположенным нормально оси z' на расстоянии z'_0 от источника, и вернется обратно. Для наблюдателя, покоящегося в системе Σ' , время, необходимое для этого,

равно

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c}. \quad (15.2)$$

Наблюдатель же, покоящийся в системе Σ , измерит время Δt между теми же событиями посредством пары часов, отнесенных друг от друга на расстояние $v \Delta t$ вдоль направления движения. Так как

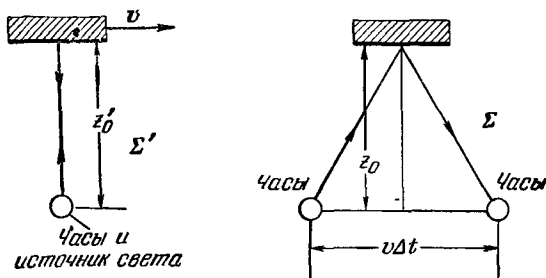


Рис. 15.2. Сравнение хода часов

скорость света не зависит от системы отсчета, этот отрезок времени определится соотношением

$$c \Delta t = 2 \sqrt{(z_0)^2 + \left(\frac{v \Delta t}{2}\right)^2},$$

или

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (15.3)$$

так как $z_0 = z'_0$, то, следовательно,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (15.4)$$

где $\Delta t'$ — интервал собственного времени, т. е. интервал времени между двумя событиями, происшедшими в одном и том же месте в системе Σ' . Время Δt не является собственным временем, так как оно измеряется различными часами в разных точках в системе Σ . Как и в случае собственной длины, рассмотренной выше, собственное время определяется физической природой часов; например, период полураспада какого-либо вещества или естественная частота кристалла, определяемая его размерами, представляют собой константы в той системе отсчета, где эти «часы» можно наблюдать в одной точке, т. е. где они покоятся.

Интересно отметить, что для наблюдателя, покоящегося в системе Σ , время Δt больше, нежели собственное время. Это явление

называется «удлинением времени». Например, время жизни быстрых мезонов, распадающихся на лету, оказывается увеличенным для земного наблюдателя, причем это увеличение зависит от скорости мезона. С другой стороны, время жизни мезона в собственной системе отсчета инвариантно.

Третий опыт. *Сравнение длин, параллельных направлению движения.* Рассмотрим стержень, собственная длина которого равна x_0 . Его длина в системе Σ есть расстояние x_0 между его концами, наблюдаемыми «одновременно» в том смысле, как это определялось выше. Чтобы избавиться от расчетов, связанных с одновременностью, рассмотрим следующее событие: пусть источник света S' , расположенный на одном конце стержня, посылает световой импульс к другому концу, где расположено зеркало M' ; отразившись от зеркала, световой импульс возвращается к источнику. Время, необходимое для прохождения светового импульса в системе Σ' , равно $\Delta t'$. Так как оно наблюдается с помощью одних часов и в одной точке, то это собственное время. Очевидно,

$$\Delta t' = \frac{2x'_0}{c}. \quad (15.5)$$

Для наблюдателя, покоящегося в системе Σ , те же события будут выглядеть более сложно. Как показано на рис. 15.3, в момент испускания светового сигнала источник S' находился в точке S_0 ,

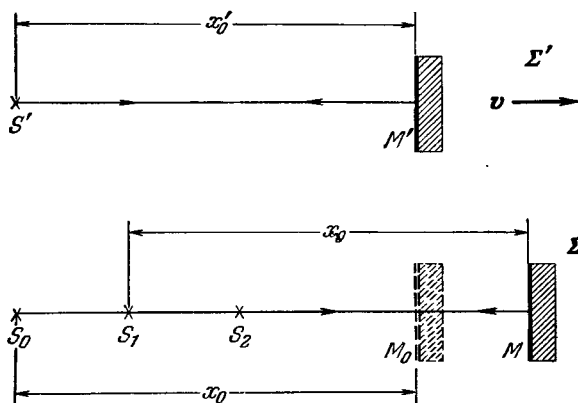


Рис. 15.3. Сравнение линеек, параллельных направлению движения.

а зеркало M' — в точке M_0 . В момент отражения зеркало M' будет находиться в точке M . Когда же сигнал возвратится к источнику S' , последний будет в точке S_2 . Как и во втором опыте, измерение

интервала времени Δt производится с помощью пары часов, расположенных в точках S_0 и S_2 . Δt — несобственное время и его можно определить из соотношения (15.4).

По определению, расстояние x_0 остается неизменным, следовательно, $S_0M_0 = S_1M$. Точка M_0 движется к M со скоростью v , а свет от S_0 до M — со скоростью c , поэтому

$$S_0M = x_0 + \frac{v}{c} S_0M,$$

$$S_0M = \frac{x_0}{1 - \beta}.$$

Аналогично для обратного пути имеем

$$MS_2 = x_0 - \frac{v}{c} MS_2,$$

$$MS_2 = \frac{x_0}{1 + \beta}.$$

Следовательно,

$$\Delta t = \frac{S_0M + MS_2}{c} = \frac{2x_0}{c(1 - \beta^2)}. \quad (15.6)$$

Совместно с соотношениями (15.5) и (15.4) это дает

$$x_0 = x'_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (15.7)$$

Это изменение длины носит название лоренцевского сокращения. Соотношение (15.7) несимметрично относительно x_0 и x'_0 , так как оно связывает собственную длину x'_0 в системе Σ' с несобственной длиной x_0 в системе Σ . Определить длину x_0 в системе Σ можно, только пользуясь предположением о постоянстве скорости света. Соотношение (15.7) эквивалентно гипотезе Лоренца и Фитцджеральда в § 14.3, однако теперь имеется также удлинение времени, вносящее существенное отличие.

Четвертый опыт. *Синхронизация часов.* Проведенные мысленные второй и третий опыты дают возможность из постулатов теории относительности вывести формулы для преобразования пространственных и временных интервалов от собственной системы отсчета к несобственной. Однако остается еще вопрос о том, какое время для наблюдателя в Σ будут показывать двое часов, синхронизованных в Σ' , но разделенных расстоянием x'_0 (рис. 15.4). Пусть в системе Σ имеются одни часы, которые в моменты прохождения концов отрезка x'_0 покажут время t_0 и t_1 . Время, показываемое в те же моменты часами в Σ' , обозначим t'_0 и t'_1 . Так как $t_1 - t_0$ есть собственное время в системе Σ , можно применить соотношение,

обратное соотношению (15.4):

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.8)$$

Для наблюдателя в системе Σ интервалы времени, отмеченные парой часов в системе Σ' , будут удлинены в одно и то же число раз, однако для него эти часы не будут синхронны. Он будет наблюдать разницу в показаниях этих часов, равную δ :

$$t_1 - t_0 = \frac{t'_1 - t'_0 + \delta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.9)$$

Для определения δ заметим, что относительные скорости обеих систем одинаковы, так как системы эквивалентны. Следовательно,

$$t'_1 - t'_0 = \frac{x'_0}{v}, \quad (15.10)$$

$$t_1 - t_0 = \frac{x_0}{v}.$$

Так как x'_0 — собственная длина в Σ' , то

$$x_0 = x'_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (15.7)$$

и из соотношений (15.9), (15.10) и (15.7) получим

$$\delta = \frac{x'_0 \beta^2}{v}. \quad (15.11)$$

Знак минус в этой формуле означает, что для наблюдателя в системе Σ вторые часы в системе Σ' будут показывать более позднее

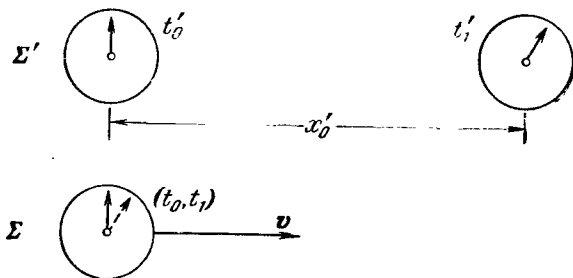


Рис. 15.4. Синхронизация часов.

время, чем первые. Часы, расположенные в ряд на равных расстояниях и синхронизованные в системе Σ' , в системе Σ будут слешить друг относительно друга, если они движутся мимо него со скоростью v .

Посредством этих четырех мысленных опытов мы показали, что постулаты специальной теории относительности приводят к следующим четырем кинематическим соотношениям:

I. Отрезки, перпендикулярные к направлению относительного движения, не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой.

II. Интервал времени Δt между двумя событиями, измеренный в системе, движущейся со скоростью $\pm v$ относительно собственной системы отсчета для данных событий (т. е. оба события в ней совершаются в одной точке), равен

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15.12)$$

где $\Delta \tau$ — собственное время между двумя событиями.

III. Длина стержня, параллельного оси x , измеренная в системе отсчета, движущейся со скоростью $v_x = \pm v$ относительно системы, в которой стержень покоится и имеет собственную длину ΔL , равна

$$\Delta x = \Delta L \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (15.13)$$

IV. Часы, синхронизованные в собственной системе отсчета и разделенные расстоянием ΔL , оказываются несинхронными в системе, движущейся относительно них со скоростью v , и величина рассогласования равна

$$\delta = - \frac{\Delta L v}{c^2}. \quad (15.14)$$

§ 15.3. Преобразования Лоренца

На основе кинематических соотношений, выведенных в предыдущем параграфе из постулатов теории относительности, можно получить соотношения между временем и пространственными координатами

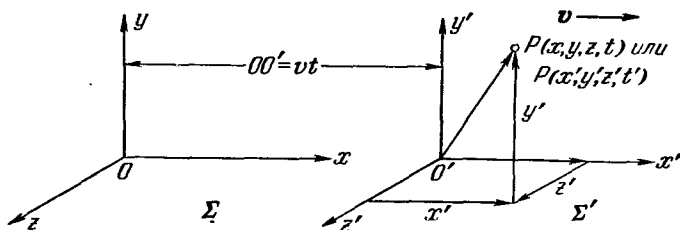


Рис. 15.5. К выводу преобразований Лоренца.

данного события, наблюдаемыми в инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга.

Пусть в точке P с координатами x' , y' , z' (рис. 15.5), покоящейся в системе Σ' , в момент t' произошло некоторое событие.

Рассмотрим это событие с точки зрения системы Σ , движущейся относительно системы Σ' . Для простоты предположим, что оси x и x' направлены вдоль относительной скорости, а начала координат выбраны так, что они совпадают при $t = t' = 0$. Таким образом, t и t' показывают время, протекшее соответственно в системах Σ и Σ' с момента совпадения начал координат. Скорость v будем считать положительной, если начало системы координат Σ' движется в положительном направлении оси x системы Σ .

Для наблюдателя в системе Σ $OO' = vt$, а x' — собственная длина в системе Σ' , которая подвергается лоренцевскому сокращению. Следовательно.

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (15.15)$$

или

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.16)$$

Часы, расположенные в точках P и O' (синхронизованные в системе Σ'), с точки зрения системы Σ имеют разность хода

$$\Delta t' = \frac{x'v}{c^2}. \quad (15.17)$$

В момент времени $t = t' = 0$ показания часов в O и O' были одинаковы. После этого, с точки зрения наблюдателя в системе Σ , часы в Σ' шли медленнее, т. е. скорость их хода должна быть помножена на $1/\sqrt{1 - \beta^2}$, чтобы получить скорость хода часов в Σ . Совместно с (15.17) это дает

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.18)$$

Подставляя сюда x' из соотношения (15.16), получаем

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.19)$$

Соотношения (15.18) и (15.19) показывают, что системы Σ и Σ' в соответствии со вторым постулатом теории относительности различаются лишь знаком v . Таким же образом из соотношений (15.18) и (15.16) следует

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15.20)$$

которое только знаком при v отличается от (15.16).

Как следует из первого опыта § 15.2, длины, перпендикулярные к направлению движения, не изменяются; это следствие и соотношения (15.16), (15.20), (15.18) и (15.19) составляют те общие преобразования, которые мы искали. Следует, однако, помнить об

ограничениях, накладываемых на выбор начала координат и ориентацию осей. Для удобства мы выпишем эти преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Эти преобразования называются преобразованиями Лоренца.

Легко показать, что при преобразовании Лоренца имеет место равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (15.22)$$

Таким образом, если световой сигнал испущен из точки O в момент $t=0$ в системе Σ и распространяется по всем направлениям со скоростью c , то тот же сигнал, испущенный из точки O' в системе Σ' в момент $t'=0$, будет также распространяться по всем направлениям со скоростью c . Тем самым эти преобразования согласуются с первым постулатом и разрешают парадокс, рассмотренный в начале главы.

Преобразования Галилея (14.1) не удовлетворяют соотношению (15.22) и приводят к двум равенствам:

$$\begin{aligned} (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 &= \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \\ (t'_1 - t'_2) &= (t_1 - t_2), \end{aligned}$$

которые показывают, что в дорелятивистской физике пространственные и временные интервалы были инвариантны независимо друг от друга. В теории относительности инвариантен комбинированный пространственно-временной интервал

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2.$$

При преобразованиях Лоренца инвариантен также дифференциальный интервал между двумя событиями

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (15.23)$$

Пространство и время входят в дифференциальный интервал несимметрично. Если в произвольной системе отсчета

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 < c^2 dt^2, \quad (15.24)$$

то можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой пространственная часть ds равна нулю, т. е. два события будут про-

исходить в одном и том же месте. В такой системе дифференциальный интервал ds равен cdt , т. е. собственному времени, умноженному на c . Если пространственно-временной интервал удовлетворяет неравенству (15.24), то он называется «временным», а величина ds/c равна интервалу собственного времени между двумя событиями. С другой стороны, если в любой системе отсчета

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 > c^2 dt^2, \quad (15.25)$$

то среди них можно найти такую систему, в которой $dt = 0$. В этой системе оба события происходят одновременно, и величина ids равна расстоянию между точками, в которых произошли события. Следовательно, если ds удовлетворяет неравенству (15.25), то интервал называется пространственным, а величина ids есть собственная длина. Ни одно преобразование Лоренца с действительным β не может нарушить неравенств (15.24) и (15.25). Следовательно, временной или пространственный характер интервала ds остается инвариантным.

Легко показать алгебраически, что два последовательные преобразования Лоренца с параметрами β_1 и β_2 эквивалентны одному преобразованию Лоренца с параметром

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (15.26)$$

Таким образом, преобразования Лоренца образуют группу, обладающую «коммутативными» свойствами.

Преобразования Лоренца можно вывести несколькими способами из предположений, что интервал ds (15.23) инвариантен, а сами преобразования — линейны. Условие линейности следует из тождественности разных точек пространства и времени в инерциальных системах отсчета. В согласии с принципом относительности мы должны также потребовать, что если $x = f(x', t', v)$, то $x' = f(x, t, -v)$. Как пример такого вывода рассмотрим преобразование

$$\left. \begin{aligned} kx &= x' - vt', \\ kx' &= x + vt, \end{aligned} \right\} \quad (15.27)$$

где k — четная функция скорости. В результате простых преобразований получаем

$$x'^2 - x^2 = \frac{v^2(t^2 - t'^2)}{1 - k^2}. \quad (15.28)$$

Для того чтобы это равенство не противоречило инвариантности интервала (15.22), нужно положить

$$c^2(1 - k^2) = v^2,$$

или

$$k = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (15.29)$$

что сразу приводит к преобразованиям Лоренца.

§ 15.4. Геометрическое истолкование преобразований Лоренца

В преобразования Лоренца переменные x и t входят равноправно. Минковский предложил величину ct принять в качестве четвертой координаты. Таким образом, пространство становится четырехмерным с координатами

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct \quad (15.30)$$

(в последующих главах станет понятно употребление верхних индексов). Пространственно-временной интервал ds определяется соотношением

$$ds^2 = - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (15.31)$$

Следовательно, преобразования Лоренца представляют собой линейные преобразования четырехмерного пространства, при которых инвариантен элемент длины ds^2 .

Интервал ds^2 можно представить в более симметричном виде, хотя и менее прозрачном с физической точки зрения. Для этого введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} X^4 &= ix^4, \\ dS &= ids. \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Тогда соотношение (15.23) принимает следующий вид:

$$dS^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dX^4)^2. \quad (15.33)$$

Так как при соответствующем выборе координат преобразования Лоренца не влияют на dx^2 и dx^3 , то достаточно рассмотреть инвариантность двумерного интервала

$$dS^2 = (dx^1)^2 + (dX^4)^2. \quad (15.34)$$

Этот интервал инвариантен относительно переноса начала координат, а также относительно поворота координатных осей в плоскости $x^1 - X^4$. Пусть координатные оси повернуты на угол θ , как показано на рис. 15.6. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1 \cos \theta + X^4 \sin \theta, \\ X^4 &= -x^1 \sin \theta + X^4 \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

Подставляя $\theta = i\varphi$ и переходя с помощью соотношений (15.30) и (15.32) обратно к обычным пространственным и временным координатам, получим

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \varphi - ct \operatorname{sh} \varphi, \\ ct' &= -x \operatorname{sh} \varphi + ct \operatorname{ch} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$

Соотношения (15.36) совпадают с преобразованиями Лоренца, если положить

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{th} \varphi = \beta. \quad (15.37)$$

Таким образом, преобразование Лоренца есть просто вращение в четырехмерном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 , в котором событие описывается четырехмерными координатами, причем временные и пространственные координаты совершенно эквивалентны. Соотношение (15.26), определяющее параметр β преобразования, состоящего из двух последовательных преобразований Лоренца, соответствует просто формуле для гиперболического тангенса суммы

$$\operatorname{th}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{th} \varphi_1 + \operatorname{th} \varphi_2}{1 + \operatorname{th} \varphi_1 \operatorname{th} \varphi_2}. \quad (15.38)$$

Представление преобразования Лоренца в виде вращения в четырехмерном пространстве x, y, z, ict весьма удобно, хотя и не-

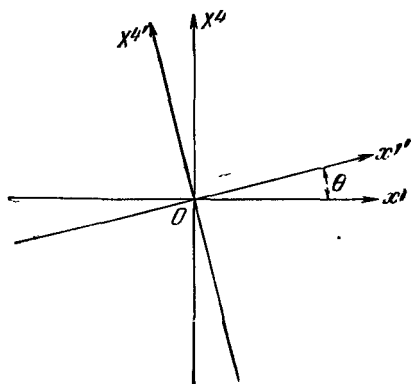


Рис. 15.6. Поворот комплексных координатных осей на угол θ .

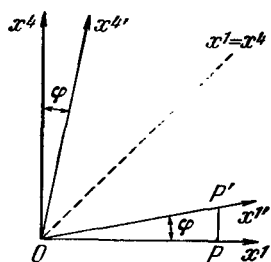


Рис. 15.7. Релятивистское преобразование осей на диаграмме Минковского. Отрезок PP' показывает относительность понятия одновременности.

Рис. 15.7 иллюстрирует также относительность понятия одновременности: все события, расположенные на оси x'^1 , одновременны в системе Σ' , и не одновременны в системе Σ . Так, событие P' для

несколько искусственно с физической точки зрения. Исследуем геометрический смысл преобразований Лоренца в реальном четырехмерном пространстве x, y, z, ct . Для того чтобы все исследования провести в плоскости, мы будем иметь дело лишь с двумя координатами $x^1 = x$ и $x^4 = ct$. Траектория события, изображенная на этой плоскости как функция пространственных координат и времени, называется мировой линией, а сама диаграмма — диаграммой Минковского. Мировая линия светового луча в вакууме представляет собой прямую $x^1 = x^4$, расположенную под углом 45° к каждой из осей (рис. 15.7). При преобразовании Лоренца (15.36) эти оси преобразуются к новым осям x'^1 и x'^4 , однако мировая линия светового луча не изменяется.

наблюдателя, покоящегося в системе Σ' , происходит одновременно с событием O , а для наблюдателя, покоящегося в системе Σ , оно происходит позже на время $t = x^1/c = PP'/c$.

Однако при интерпретации диаграммы Минковского следует быть весьма осторожным. В отличие от диаграммы на рис. 15.6, где посредством мнимого преобразования (15.32) искусственно введена «эвклидова» геометрия, на диаграмме Минковского квадрат интервала не равен сумме квадратов координатных интервалов. Вместо обычного измерения расстояний в реальном пространстве по сумме квадратов координат можно ввести семейство гипербол

$$(x^1)^2 - (x^4)^2 = (x'^1)^2 - (x'^4)^2 = \text{const}, \quad (15.39)$$

которые образуют сетку (рис. 15.8), удобную для сравнения различных величин.

Рассмотрим, как релятивистская кинематика описывается этой диаграммой. Лоренцевское сокращение (15.7) показывает, как собственная длина x'^1 в системе Σ' преобразуется к системе Σ . Пусть отрезок OP' покоится в системе Σ' . Мировая линия конца P' параллельна оси x'^4 (ct'), так как он покоится в системе Σ' . Точка O также движется вдоль оси x'^4 . В системе Σ измерение производится одновременно на обоих концах отрезка в тот момент, когда начала отсчета совпадают, т. е. измерение производится вдоль оси x^1 . Следовательно, в Σ длина отрезка равна OP . Сравнение отрезков OP и OP' следует делать с помощью гиперболической сетки. Легко видеть, что гипербола

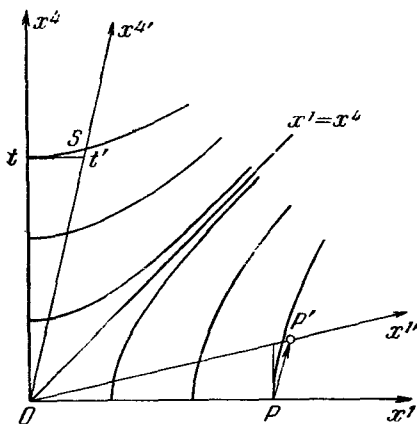


Рис. 15.8. Диаграмма Минковского, показывающая лоренцевское сокращение и удлинение времени.

$(x^1)^2 - (x^4)^2 = OP^2 = (x'^1)^2 - (x'^4)^2$

пересекает Ox'^1 между O и P ; следовательно, $OP < OP'$ в соответствии с лоренцевским сокращением собственной длины при наблюдении ее из движущейся системы координат.

Рассмотрим теперь удлинение времени. Для этого предположим, что в системе Σ' часы покоятся, причем $x' = t' = x = t = 0$. Время, показываемое этими часами, будет представлено мировой линией, проходящей вдоль оси x'^4 . Таким образом, время, протекшее в системе Σ до момента t' , равно Ot' . С точки зрения наблюдателя в системе Σ t и t' не будут расположены в одной точке пространства.

В этой системе события, одновременные с t' , произойдут в момент t , так что прямая tt' параллельна оси x^1 . Согласно гиперболической сетке $O' = OS$, и следовательно, $Ot > Ot'$. Таким образом, время, измеренное наблюдателем, покоящимся в системе Σ , будет больше, чем собственное время в системе Σ' . Это соответствует удлинению времени, описываемому соотношением (15.4).

Из диаграммы Минковского следует симметрия систем Σ и Σ' , несмотря на кажущуюся асимметрию удлинения времени и лоренцевского сокращения. В наших примерах систему Σ' мы считали собственной как для пространственного, так и временного интервалов. Если же в качестве собственной взять систему Σ , то прямая PP' будет параллельна Ot , а прямая tt' параллельна OP . Это и приведет к обращению соответствующих эффектов.

При $\beta > 1$ преобразование Лоренца становится комплексным и физически невозможным (в дальнейшем мы еще раз рассмотрим значение этого утверждения). На диаграмме Минковского это означает, что ни одна из штрихованных осей не может перейти через линию $x^1 = -x^4$. В четырехмерном пространстве эта линия соответствует конусу; его называют световым конусом. Следовательно, временной интервал $ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 > 1$ не может стать пространственным ни в какой системе отсчета, но может стать чисто временным в собственной системе отсчета. По тем же причинам пространственный интервал $ds^2 < 1$ не может стать временным ни в одной системе отсчета, хотя в собственной системе может стать чисто пространственным.

Таким образом, световой конус $x^1 = \pm x^4$ делит пространство Минковского на три области (рис. 15.9) Для наблюдателя в начале координат.

т. е. в данной точке пространства и времени, эти области имеют инвариантный смысл. В области, обозначенной «прошлое», находятся события, которые отделены от начала координат отрицательным интервалом времени в любой инерциальной системе отсчета. Аналогично в области «будущее» лежат события, отделенные от начала координат положительным временным интервалом в любой системе отсчета.

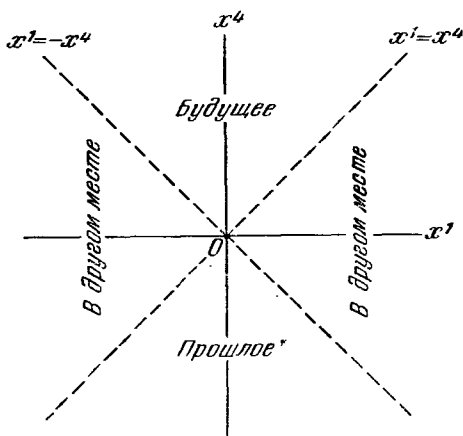


Рис. 15.9. Для наблюдателя, расположенного в начале координат, мир Минковского разделяется световым конусом на три части: «прошлое», «будущее» и «в другом месте».

Области «в другом месте» принадлежат события, пространственно отделенные от наблюдателя; однако между собой они могут быть совмещены посредством вращений и переносов.

§ 15.5. Формулы преобразования для скорости

Формулы преобразования для скорости движущейся точки можно получить, вычисляя производные преобразования Лоренца по t и t' . Как и прежде, мы будем пользоваться обозначениями $\beta = v/c$, где v — скорость системы Σ' относительно Σ , измеренная в системе Σ ; кроме того, введем обозначения $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ и т. д. для скоростей в соответствующих системах отсчета. Преобразования Лоренца от системы Σ к системе Σ' имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

Дифференцируя эти соотношения по t' , получим

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dt}{dt'}, \quad (15.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'}, \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dt'}, \end{aligned} \right\} \quad (15.42)$$

а также

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \beta u_x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.43)$$

Последнее соотношение дает возможность переписать соотношения (15.41) и (15.42) без штрихованных координат

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad (15.44)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_y &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2} u_y, \\ u'_z &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2} u_z. \end{aligned} \right\} \quad (15.45)$$

Формула сложения параллельных скоростей (15.44) согласуется с соотношением (15.26) для последовательных преобразований Лоренца, ибо одну из этих скоростей можно считать скоростью движения некоторой другой системы отсчета относительно системы Σ .

Из соотношения между интервалами времени dt и dt' (15.43) вытекают интересные следствия. Если бы соответствующим выбором можно было сделать $(dt'/dt) < 0$, то последовательность событий во времени изменилась бы при переходе от одной системы к другой. Это противоречило бы логике, если бы эти события представляли собой причину и следствие и если бы направление времени было инвариантным. Инвариантность направления времени мы уже отмечали в начале главы. Теперь, для того чтобы последовательность причины и следствия сохранялась в любой системе отсчета, мы должны сделать вывод, что

$$u \leq c, \quad (15.46)$$

где u — скорость распространения любого сигнала, связывающего причину и следствие. Очевидно, фазовые скорости и скорости, имеющие лишь геометрический смысл, не подчиняются этому ограничению. Этим ограничением связаны также относительные скорости различных инерциальных систем отсчета, так что нет смысла рассматривать преобразования Лоренца при комплексных значениях $\sqrt{1-\beta^2}$.

Формулы преобразования для скорости легко применить к распространению света в движущейся среде, а также для объяснения aberrаций звезд. Пусть однородная изотропная среда с показателем преломления n движется со скоростью v в положительном направлении оси x относительно наблюдателя, покоящегося в системе Σ . Скорость света в системе отсчета, где эта среда покоится, равна $u' = c/n$. Скорость v относительно наблюдателя, покоящегося в Σ , легко получить из соотношения (15.44), если переменить знак v :

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} \simeq \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (15.47)$$

с точностью до членов первого порядка относительно v/c . Это соотношение согласуется с экспериментальными результатами, а также с результатом, полученным в классической электродинамике (§ 11.4). Однако при классическом выводе этого соотношения применялся довольно сложный аппарат: эффект приписывался влиянию вторичных излучателей, движущихся вместе с жидкостью. Теперь соотношение (15.47) получено без детального введения такого механизма. В дальнейшем мы еще часто будем встречаться с таким положением, когда конечный результат определяется теорией относительности, однако механизм, приводящий к этому результату, далеко не очевиден.

Абerrацию удаленных звезд также можно объяснить, используя формулу для преобразования скорости. Пусть луч света от звезды распространяется перпендикулярно к скорости Земли (рис. 15.10)

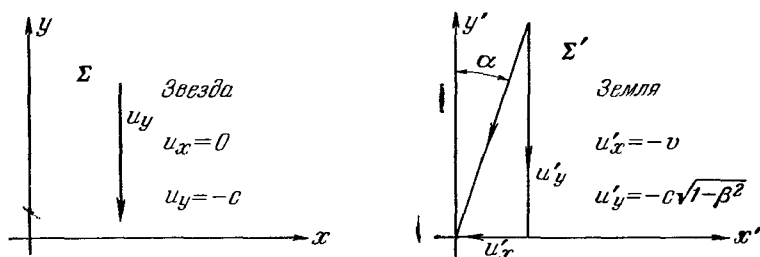


Рис. 15.10. Абerrация света звезд с точки зрения теории относительности.

В системе отсчета, связанной со звездой, испускается свет с компонентами скорости $u_y = -c$, $u_x = 0$. В системе отсчета, связанной с Землей, компоненты скорости согласно соотношениям (15.44) и (15.45) равны

$$\begin{aligned} u'_y &= -c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ u'_x &= v. \end{aligned}$$

Следовательно, угол падения определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta' &= \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \sin \theta' &= \beta. \end{aligned} \right\} \quad (15.48)$$

В гл. 14 мы видели, что механическая картина излучений и предположение о неподвижности эфира приводят к результату $\operatorname{tg} \theta' = \beta$, который на опыте неотличим от соотношений (15.48).

Задачи

1. Существенны ли ограничения, накладываемые на преобразования Лоренца (15.21) предположениями, что относительная скорость направлена вдоль оси x , а начала координат совпадают при $t = t' = 0$? Объясните подробно, как пользоваться преобразованиями Лоренца, если начала координат двух систем и их относительные скорости произвольны.

2. Используя диаграмму Минковского (рис. 15.8), объясните, как с точки зрения системы Σ выглядят собственная длина и собственное время системы Σ' .

3. Покажите, что при переходе от собственной системы отсчета к несобственной величина \dot{u}^2 подчиняется соотношению

$$\dot{u}^2 \rightarrow [\dot{u}^2 - (\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\beta})^2] \gamma^6,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

Есть множество очень хороших вводных курсов в специальную теорию относительности и преобразования Лоренца. Список, приведенный ниже, включает книги, наиболее знакомые авторам и наиболее доступные.

1. R. Becker, *Theorie der Elektrizität*. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II.)

Особенно хорошо изложено представление о мире Минковского.

2. P. G. Bergman, *An Introduction to the Theory of Relativity*. (Русский перевод: П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности.)

В гл. IV дан очень простой вывод преобразований Лоренца.

3. R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, стр. 34, или, если доступно, *The Theory of the Relativity of Motion*. Прекрасное введение в излагаемый вопрос.

4. A. Einstein and H. Minkowski в книге «*The Principle of Relativity*».

Изложение оригинальных работ.

5. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*. (Русский перевод: А. Эйнштейн, Сущность теории относительности.)

Эта книга — не учебник и требует внимательного изучения.

6. C. Møller, *The Theory of Relativity*, гл. I и II.

Одна из последних книг по данному вопросу. В последующих главах мы еще будем на нее ссылаться.

Из более общих учебников, содержащих ясное и компетентное введение в специальную теорию относительности, отметим

7. G. Joos, *Theoretical Physics*, гл. X.

8. R. B. Lindsay, H. Margenau, *Foundations of Physics*, гл. 7.

* Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. 3-е.

КОВАРИАНТНОСТЬ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

В гл. 15 мы рассмотрели связь между принципами специальной теории относительности и кинематикой. Если эти принципы верны, то они должны быть применимы во всех областях физики, ибо никакой эксперимент не в состоянии выделить преимущественную инерциальную систему отсчета. Распространение принципов теории относительности на другие области физики, как и в кинематике, возможно осуществить посредством соответствующих мысленных опытов — *Gedanken Experimente*. Другой путь заключается в применении преобразования Лоренца для пространства и времени к нерелятивистским уравнениям, содержащим данную величину. Считая, что вид уравнений должен остаться неизменным, можно найти преобразования для данной величины. Полезны оба подхода. Мысленные эксперименты в наибольшей степени выясняют физический смысл рассуждений, поэтому мы воспользуемся ими при рассмотрении соударений. Второй способ, основанный на непосредственном использовании преобразований Лоренца, обычно весьма громоздок, хотя Эйнштейн в своей основополагающей работе вывел формулы преобразования для электромагнитных полей именно этим методом, показав тем самым, что уравнения Максвелла удовлетворяют принципам теории относительности.

Однако наиболее мощным является третий метод. Этот метод состоит в том, что уравнения записываются в такой форме, которая делает очевидным преобразования величин при перемене системы отсчета. Если форма уравнения инвариантна относительно перемены системы отсчета, то опыт, основанный на этом уравнении, не может дать результата, зависящего от системы отсчета. В этом случае явление, описываемое данным уравнением, согласуется с принципами теории относительности. Уравнение, записанное в форме, не зависящей от выбора системы отсчета, называется релятивистски ковариантным.

Мы изложим этот метод в той мере, которая необходима для вывода основных релятивистских соотношений механики и электродинамики.

§ 16.1. Преобразование Лоренца для четырехмерного вектора

Преобразование Лоренца может быть записано в виде линейного преобразования компонент отрезка, соединяющего начало координат с точкой x^j ($x^1, x^2, x^3; x^4 = ct$) в четырехмерном пространстве. Пользуясь условием относительно повторяющихся индексов при суммировании, можно написать

$$x^{i'} = Q_j^{i'} x^j, \quad (16.1)$$

где Q_j^i — матрица вида

$$Q_j^i = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (16.2)$$

в которой для удобства записи введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \beta &= \frac{v}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Как мы уже отмечали, если компоненты вектора x^j преобразуются согласно равенству (16.1), то никакой эксперимент на основе переменных x^j не может указать преимущественной системы отсчета. Поэтому, если какое-либо физическое уравнение записать в виде векторного уравнения в четырехмерном пространстве, причем так, чтобы компоненты векторов преобразовывались согласно (16.1), то в таком случае говорят, что уравнение написано в релятивистски ковариантном виде.

Если соотношение (16.1) разрешить относительно x^j , то получим

$$x^j = (Q_j^i)^{-1} x^{i'}, \quad (16.4)$$

где

$$(Q_j^i)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & +\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

— матрица, обратная матрице (16.2), т. е. матрица преобразования, соответствующего относительноному движению систем отсчета с противоположно направленной скоростью. Если величина с четырьмя компонентами A_j преобразуется так же, как x^j при обратном

преобразовании Лоренца, т. е.

$$A'_i = (Q^i_j)^{-1} A_j, \quad (16.6)$$

то соотношение, приравнивающее величины типа A_j , также релятивистски ковариантно. Еще раз подчеркнем эти два случая: величины A_j или B^j релятивистски ковариантны, если при преобразовании координат они преобразуются соответственно как (16.6) или как

$$B'^i = Q^i_j B^j. \quad (16.7)$$

A_j называется ковариантным четырехмерным вектором, а B^j контравариантным четырехмерным вектором (к сожалению, слово «ковариантный» употребляется в двух смыслах, однако эта условность является общепринятой).

Матрица Q^i_j связана с матрицей обратного преобразования посредством уравнения

$$(Q^k_j)^{-1} Q^i_k = \delta^i_j, \quad (16.8)$$

где

$$\delta^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

— единичная матрица.

Мы не будем затрагивать ни общего тензорного анализа, ни преобразования координат общего вида. В преобразованиях Лоренца в специальной теории относительности коэффициенты Q^i_j постоянны и независимы от координат. Большинство авторов выводят эти преобразования как частный случай более общих преобразований, коэффициенты которых зависят от координат. В общем случае вместо соотношения (16.1) следует пользоваться преобразованием для дифференциального элемента dx^j

$$dx^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) dx^j. \quad (16.10)$$

Соответственно компоненты ковариантного и контравариантного векторов преобразуются согласно равенствам

$$\left. \begin{aligned} A'_i &= \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right) A_j, \\ B'^j &= \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) B^j. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Эти соотношения используют в общей теории относительности, где коэффициенты преобразования могут быть функциями координат. При этом различие между ковариантными и контравариантными величинами приобретает более значительный смысл. В специальной теории относительности, как видно из матрицы (16.5), ковариантный вектор A_j — это вектор, компоненты которого преобразуются так же, как x , y , z , ct . Однако и в случае постоянства коэффициентов преобразования аппарат тензорного исчисления оказывается исключительно удобным.

§ 16.2. Некоторые тензорные соотношения

Тензорами мы будем называть все величины, которые при преобразованиях Лоренца сами испытывают определенные преобразования. Простейшим тензором является инвариант, или скаляр, который можно представить в виде одного числа. Таким инвариантом оказывается, например, величина

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Эти тензоры называются тензорами нулевого ранга.

Рассмотренные в § 16.1 контравариантный и ковариантный четырехмерные векторы представляют собой тензоры первого ранга. Система из 16 величин, преобразующихся в соответствии с равенством

$$T^{kl'} = (Q_i^k) Q_j^l T^{ij}, \quad (16.12)$$

называется контравариантным тензором второго ранга. Как видно из равенства (16.12), компоненты тензора преобразуются подобно произведению двух контравариантных векторов. Аналогично ковариантным тензором второго ранга называется система из 16 величин, преобразующихся согласно равенству

$$T'_{kl} = (Q_i^k)^{-1} (Q_j^l)^{-1} T_{ij} \quad (16.13)$$

т. е. так же, как произведение двух ковариантных векторов. Смешанный тензор второго ранга преобразуется подобно произведению контравариантного и ковариантного векторов

$$T'_k{}^l = Q_j^l (Q_i^k)^{-1} T_i^j. \quad (16.14)$$

Таким образом, очевидно, что величина, преобразующаяся согласно равенству

$$T'_{k_1 k_2 \dots k_m}{}^{l_1 l_2 \dots l_n} = Q_{i_1}^{l_1} Q_{i_2}^{l_2} \dots Q_{i_n}^{l_n} (Q_{j_1}^{k_1})^{-1} (Q_{j_2}^{k_2})^{-1} \dots (Q_{j_m}^{k_m})^{-1} T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (16.15)$$

т. е. подобно произведению компонент ковариантных и контравариантных векторов, называется тензором ранга $(m + n)$. Таким образом, произведение двух тензоров ранга m и n равно тензору ранга $(m + n)$. В дальнейшем в физических приложениях нам редко придется встречаться с тензорами выше второго ранга.

Так как рассматриваемые нами преобразования линейны, то сумма или разность двух тензоров одинакового ранга есть тензор того же ранга. По той же причине приравниваться могут лишь тензоры одного ранга. Такие тензорные уравнения будут релятивистски ковариантными.

Для того чтобы различные физические законы записать в виде тензорных соотношений и тем самым распространить на них принципы теории относительности, приведем следующие правила оперирования с тензорами:

1. Если контравариантный индекс смешанного тензора совпадает с ковариантным, то предполагаемое при этом суммирование уменьшает ранг тензора на два. Такое преобразование называется сверткой. Свертка тензора T_j^i , т. е. T_i^i , есть инвариант. Ниже мы увидим, что если мы подвергнем свертке векторный градиент (тензор второго ранга), то получится дивергенция (тензор нулевого ранга).

2. В специальной теории относительности интервал $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$ является инвариантом, и величину ds^2 можно записать в таком виде:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (16.16)$$

где

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (16.17)$$

Матрица g_{ij} называется «метрическим тензором» линейного элемента (в общем тензорном анализе элементы g_{ij} представляют собой функции координат). Прямым преобразованием с помощью матрицы (16.5) легко убедиться, что g_{ij} действительно представляет собой тензор.

3. Посредством соотношения

$$B_i = g_{ij} B^j \quad (16.18)$$

из контравариантного тензора может быть образован ковариантный B_i . Если g_{ij} имеет вид (16.17), то это преобразование эквивалентно перемене знака у первых трех компонент. Полученный таким образом из контравариантного вектора dx^i ковариантный вектор dx_i удовлетворяет равенству

$$dx^i dx_i = ds^2. \quad (16.19)$$

4. Производная $\frac{\partial}{\partial x^i}$, действующая на тензор, приводит к появлению в формуле преобразования тензора дополнительного ковариантного тензорного множителя, что видно из соотношений (16.11) и формулы

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

(это неверно, если g_{ij} зависят от координат). Таким образом, оператор градиента повышает ранг тензора (ковариантный индекс) на единицу: если T^0 — скаляр, то его градиент $\partial T^0 / \partial x^i$ будет ковариантным вектором. Приращение скаляра может быть записано в тензорном виде

$$dT^0 = \frac{\partial T^0}{\partial x^i} dx^i. \tag{16.20}$$

Если же T^k — контравариантный вектор, то $\frac{\partial T^k}{\partial x^i}$ — смешанный тензор второго ранга, и $\frac{\partial T^i}{\partial x^i}$ — четырехмерная дивергенция T^i — будет скалярным инвариантом.

5. Если компоненты четырехмерного вектора (4-вектора) T^i отличны от нуля в конечной области трехмерного пространства и при этом

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^i} = 0, \tag{16.21}$$

то интеграл

$$I = \int T^4 dv \tag{16.22}$$

по трехмерному пространству будет инвариантом. Для доказательства этого утверждения воспользуемся теоремой, аналогичной теореме Гаусса,

$$\int \frac{dT^i}{dx^i} d^4x = \int T^i dS_i, \tag{16.23}$$

где $d^4x = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = dv dx^4$, и dS_i — элемент трехмерной «поверхности», нормальный T_i в четырехмерном пространстве. Область интегрирования (16.23) выберем, как показано на рис. 16.1. Поверхности A и C подобраны так, чтобы пространственные компоненты T^i обращались на них в нуль. Это можно сделать, так как компоненты T^i отличны от нуля лишь в конечной области пространства. Поверхность B выберем нормальной

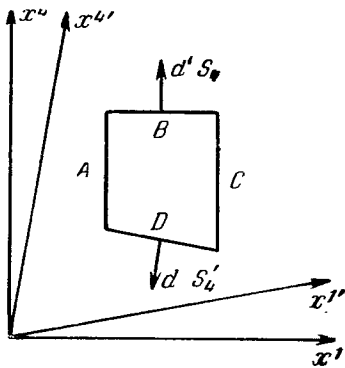


Рис. 16.1. Область интегрирования для теоремы, выражаемой соотношением (16.22).

оси x^4 и D — нормальной оси $x^{4'}$. Тогда из соотношений (16.21) и (16.23) следует

$$\int T^4 dS_4 = \int T^{4'} dS_{4'}.$$

Так как $dS_4 = dv$, а $dS_{4'} = dv'$, т. е. равны обычным трехмерным элементам объема, то интеграл

$$I = \int T^4 dv \quad (16.22)$$

инвариантен относительно преобразований Лоренца. Аналогично можно доказать, что если тензор второго ранга удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad (16.24)$$

то величина

$$B^j = \int T^{4j} dv \quad (16.25)$$

будет 4-вектором. В дальнейшем мы отождествим (16.21) и (16.24) с «законами сохранения».

6. Тензор симметричен относительно контравариантных индексов i и j или ковариантных индексов l и j , если перемена местами i и j оставляет неизменными все компоненты тензора. Тензор называется антисимметричным, если перемена местами i и j приводит к перемене знака у всех компонент. Все свойства симметрии инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Рассмотренные соотношения достаточны для ковариантного описания механики точечной массы; рассмотрение электродинамики мы пока отложим. Прежде чем перейти к рассмотрению механики, укажем три способа, посредством которых в физике появляются ковариантные соотношения.

а) Пусть некоторое соотношение установлено в какой-либо одной инерциальной системе отсчета, например в собственной, где соответствующие приборы покоятся. Если это соотношение можно представить в виде тензорного уравнения, справедливого для данной системы отсчета, то это уравнение ковариантно.

б) Из известного тензорного соотношения можно получить новое тензорное соотношение путем ковариантной тензорной операции. Простейшим примером таковой является умножение на инвариант. Кроме того, такими операциями являются тензорное умножение, свертка и ковариантное дифференцирование.

в) Если соотношение установлено в некоторой специальной системе отсчета, то в нем можно преобразовать те величины, формулы преобразований для которых известны. После этого можно вывести правильные преобразования и для остальных величин. Эти величины в таком случае можно представить в тензорном виде. В начале главы мы охарактеризовали этот способ, как весьма трудоемкий.

§ 16.3. Закон сохранения импульса

Воспользуемся одним из перечисленных выше методов для того, чтобы сформулировать закон сохранения импульса точечных масс. Полученные таким образом формальные соотношения мы в дальнейшем сравним с результатами «мысленного эксперимента» по неупругому столкновению, наблюдаемому из разных систем отсчета.

До появления теории относительности считали, что частица с массой m , движущаяся со скоростью \mathbf{u} , обладает импульсом \mathbf{p} , равным

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}. \quad (16.26)$$

Компоненты вектора \mathbf{u} не составляют первых трех компонент четырехмерного вектора, так как $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, и хотя компоненты $d\mathbf{r}$ представляют собой первые три компоненты четырехмерного вектора $dx^i = (d\mathbf{r}, cdt)$, однако величина dt не инвариантна. (Если пространственные компоненты четырехмерного вектора совпадают с обычным трехмерным вектором, то при перечислении компонент четырехмерного вектора мы будем пользоваться обычными векторными обозначениями, например, $x^i = (r, ct)$.) Если же контравариантный вектор dx^i разделить на инвариантный линейный элемент ds , то получится четырехмерный вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad (16.27)$$

который называется четырехмерной скоростью. Элемент ds равен отрезку собственного времени dt , умноженному на c , т. е.

$$ds = cdt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (16.28)$$

Таким образом, компоненты u^i равны

$$u^i = \left(\frac{u}{c \sqrt{1 - u^2/c^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (16.29)$$

Заметим, что определенный таким образом вектор u^i оказывается безразмерным¹⁾.

¹⁾ При образовании 4-векторов и тензоров мы должны заботиться о том, чтобы их компоненты обладали одинаковой размерностью; это достигается введением множителя c в определенной степени. Вопрос о том, какую размерность придать той или иной величине, зависит от удобства, и в разных книгах некоторые величины различаются степенями при c . Так, например, вектор u^i можно определить в виде $u^i = (u/\sqrt{1 - u^2/c^2}; c/\sqrt{1 - u^2/c^2})$, при этом он будет иметь размерность обычной скорости. Иногда используют систему единиц, в которой $c = 1$; соответственно многие формулы упрощаются.

Ковариантное выражение, соответствующее импульсу, можно образовать, умножив 4-скорость (16.27) на инвариантную величину $m_0 c^2$, характеризующую частицу, где m_0 — масса покоя частицы, т. е. масса, измеренная в собственной системе отсчета. Таким образом, 4-импульс

$$p^i = m_0 \frac{dx^i}{ds} c^2 \quad (16.30)$$

ковариантен относительно преобразований Лоренца и имеет размерность энергии. Сохранение импульса при столкновении двух частиц в релятивистски ковариантной форме приводит к соотношению

$$p_1^i + p_2^i = \text{const}, \quad (16.31)$$

которое заменяет классический закон

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = \text{const}, \quad (16.32)$$

где предполагалось, что массы m_1 и m_2 постоянны.

Эти рассуждения справедливы лишь при непосредственном взаимодействии двух частиц, но не при «взаимодействии на расстоянии». В теории относительности суммарный импульс двух частиц, разделенных расстоянием, в «данный» момент времени вообще не имеет смысла, а взаимодействия распространяются с конечной скоростью. В силу этого обмен импульсами между частицами имеет смысл, если только каждая частица сохраняет импульс вместе с полем, действующим на нее, или если взаимодействие происходит через посредство третьей частицы, последовательно взаимодействующей с первыми двумя. При этом, чтобы наши рассуждения были строгими, протяженность взаимодействующих масс должна быть равна нулю.

Компоненты 4-импульса (16.30) равны

$$p^i = \left(\frac{m_0 u c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right), \quad (16.33)$$

где u — обычная скорость в данной системе отсчета. Первые три компоненты имеют вид

$$c p = c m u, \quad (16.34)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (16.35)$$

Таким образом, из требования, чтобы закон сохранения импульса в своей классической форме (16.32) был релятивистски ковариантен, следует, что масса частицы не инвариантна и зависит от скорости частицы в данной системе отсчета. Следовательно, зависимость массы от скорости есть прямое следствие закона сохранения импульса в ковариантной форме.

§ 16.4. Связь энергии с импульсом и массой

Закон сохранения импульса в релятивистской форме предполагает не только сохранение трех пространственных компонент p^i , но и четвертой компоненты

$$p^4 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = mc^2. \quad (16.36)$$

Исследуем физический смысл этой величины. Скорость изменения p^4 в данной системе отсчета равна

$$\frac{dp^4}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \quad (16.37)$$

или

$$\frac{dp^4}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (16.38)$$

Если мы сохраним классическое определение силы как скорости изменения импульса

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (16.39)$$

то величина

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (16.40)$$

представляет собой скорость, с которой над данной системой совершается работа. Таким образом, если в данной системе отсчета выполняется закон сохранения энергии, то

$$\begin{aligned} \frac{dp^4}{dt} &= \frac{dE}{dt}, \\ p^4 &= E + \text{const}, \end{aligned} \quad (16.41)$$

где E — энергия в данной системе отсчета. Так как энергия проявляется только при ее изменении, то мы без ущерба для физического смысла можем положить

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (16.42)$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что энергия, измеряемая количеством «работы, которую тело способно совершить», и масса, определяемая импульсом при данной скорости, — понятия взаимосвязанные; если есть одно, то есть и другое. Ни масса, ни энергия не инвариантны; каждая величина согласно (16.42) зависит от системы отсчета наблюдателя.

Мы показали, что изменение величины mc^2 равно работе механических сил. Предположение, что это остается верным при любых силах, требует экспериментальной проверки. Опыт, накопленный

в различных областях физики, особенно в ядерной, где относительные изменения масс обычно весьма велики, вне всяких сомнений показывает, что соотношение (16.42) справедливо и в общем случае.

При малых скоростях энергия E становится равной сумме классической кинетической энергии частицы и энергии покоя $m_0 c^2$. Разлагая (16.42) в ряд при малых u/c , получим

$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{u}{c} \right)^4 + \dots \right] = \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots, \end{aligned} \quad (16.43)$$

что и должно быть, поскольку релятивистская механика при малых скоростях сводится к ньютоновской.

С точки зрения теории относительности сохранение импульса и сохранение энергии не являются независимыми законами — при ковариантной формулировке один дополняет другой. Как вектору dx^i соответствует инвариант ds , так и 4-вектору энергии-импульса соответствует некий инвариант

$$p^i p_i = E^2 - c^2 p^2 = (m_0 c^2)^2. \quad (16.44)$$

Это соотношение справедливо в любой системе отсчета; в частности, в собственной системе отсчета, где $\mathbf{p} = 0$, $E = m_0 c^2$. Таким образом, предположение, что масса m_0 представляет собой инвариантную характеристику частицы, подтверждается еще раз.

Итак, нам удалось сформулировать законы сохранения в релятивистски ковариантном виде. 4-вектор энергии-импульса p^i преобразуется подобно другим контравариантным векторам. Согласно (16.2)

$$c p'_x = \frac{c p_x - \beta E}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (16.45)$$

$$p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad (16.46)$$

$$E' = \frac{E - \beta c p_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (16.47)$$

где $E = p^4$. Из этих преобразований видно, что всякий перенос энергии сопровождается переносом массы, и следовательно импульса. Если в собственной системе отсчета (импульс равен нулю) энергия равна E , то в штрихованной системе отсчета мы получим импульс

$$p'_x = \frac{-\beta E}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-v}{c^2} E'. \quad (16.48)$$

Следовательно, каков бы ни был вид энергии, импульс мы должны приписывать тому агенту, который переносит энергию. Рассмотрим

мотор M , вращающий нагрузку L на расстоянии x (рис. 16.2). Если мотор передает нагрузке энергию со скоростью dE/dt , масса L соответственно увеличивается. На расстояние x масса переносится со скоростью $(1/c^2) \frac{dE}{dt}$, и следовательно, импульс системы равен

$$p = \frac{x}{c^2} \frac{dE}{dt}.$$

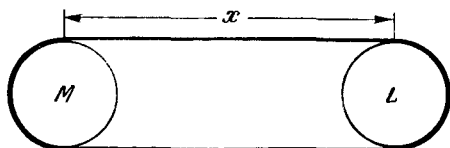


Рис. 16.2. Мотор M и нагрузка L , расположенные на расстоянии x друг от друга.

В общем случае, если тело поглощает поток энергии, его импульс увеличивается. Для того чтобы сохранялся суммарный импульс, необходимо агенту, передающему энергию через единицу площади со скоростью N в данном направлении, приписать импульс g , причем

$$g = \frac{N}{c^2}. \quad (16.49)$$

Это соотношение согласуется с рассмотренным нами в гл. 11 давлением излучения, а также с изложенными в § 10.6 соображениями о сохранении импульса. При рассмотрении электромагнитного излучения и связанного с ним потока энергии N , падающего на наблюдателя, мы были вынуждены приписать ему плотность импульса (16.49). Это пришлось сделать, так как мы отказались от эфира как носителя объемной силы. Неудачи в попытках наблюдать эфир экспериментально, рассмотренные в гл. 14, укрепили уверенность в том, что система, состоящая из излучения и поглощающего тела, представляет собой замкнутую систему. В результате этого закон сохранения импульса приводит к соотношению (16.49). Верно и обратное: предположение о сохранении импульса и отсутствии эфира может быть использовано для вывода соотношения между массой и энергией. Таким образом, соотношение $E = mc^2$ можно получить, не пользуясь всей релятивистской кинематикой.

§ 16.5. Сила Минковского

Сила $F = \frac{dp}{dt}$ не представляет собой пространственной части 4-вектора. С другой стороны, величина, называемая силой Минковского:

$$F' = \frac{dp'}{ds} = \frac{d}{ds} (cp, mc^2) = \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dp}{dt}, \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d(mc)}{dt} \right], \quad (16.50)$$

представляет собой контравариантный 4-вектор. Компоненты F^i могут быть записаны в виде

$$F^i = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right), \quad (16.51)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{u} — обычные трехмерные сила и скорость (заметим, что размерность F^i такая же, как у обычной силы!). Закон преобразования силы определяется свойствами 4-вектора F^i . Мы ограничимся случаем перехода от собственной системы (будем ее называть система Σ), где $\mathbf{u} = 0$, $F^i = (F, 0)$, к системе Σ' , где $\mathbf{u}'_x = \mathbf{v}$. В результате получим

$$F'_x = F_x, \quad (16.52)$$

$$F'_y = F_y \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (16.53)$$

$$F'_z = F_z \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (16.54)$$

Формулы преобразования силы \mathbf{F} находят интересное приложение при рассмотрении равновесия прямоугольного рычага (рис. 16.3).

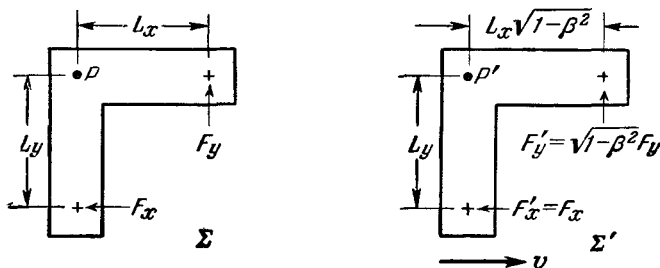


Рис. 16.3. Прямоугольный рычаг в покоящейся и движущейся системах отсчета.

Для наблюдателя, покоящегося в системе Σ , рычаг находится в статическом равновесии под действием сил F_x и F_y , так что

$$F_x L_y = F_y L_x. \quad (16.55)$$

Можно ожидать, что и для наблюдателя, покоящегося в системе Σ' , рычаг будет находиться в равновесии, ибо в противоположном случае эти инерциальные системы отсчета были бы различимы. Воспользовавшись формулами преобразования для сил и длин, легко видеть, что наблюдатель, покоящийся в системе Σ' , обнаружит суммарный

крутящий момент T' , действующий на рычаг против часовой стрелки, т. е.

$$T' = F_x L_y - (\sqrt{1 - \beta^2} F_y)(\sqrt{1 - \beta^2} L_x) = \frac{F_x L_y v^2}{c^2}. \quad (16.56)$$

Однако этот момент не приведет к вращению, так как сила совершает над рычагом работу, мощность которой равна $F'_x v = F_x v$, и поэтому момент импульса рычага увеличивается со скоростью

$$\frac{dM}{dt} = \frac{(F_x v) v L_y}{c^2} = \frac{F_x L_y v^2}{c^2}. \quad (16.57)$$

Таким образом, для наблюдателя в Σ' как суммарный крутящий момент, так и изменение момента импульса отличны от нуля. Тем не менее условия равновесия сохраняются, оставаясь инвариантным свойством, так как наличие крутящего момента точно компенсируется изменением момента импульса. (В нашем рассмотрении мы опустили все, что касается механизма, через который силы передаются вдоль рычага. Законы упругости весьма кардинально меняются в теории относительности; рычаг уже нельзя рассматривать как абсолютно жесткое тело, поскольку скорость распространения возмущения должна быть ограничена. Однако более подробное рассмотрение, учитывающее эти обстоятельства, не изменяет приведенных выше выводов.)

Кратко рассмотрим движение частицы под действием внешних сил. Из равенства

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (16.39)$$

следует

$$F = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{du}{dt} + \frac{m_0 u u}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt}. \quad (16.58)$$

Это соотношение показывает, что при ускорении частицы сила должна иметь компоненты как параллельные ускорению, так и параллельные скорости. При малых скоростях второй член правой части становится много меньше первого, и следовательно, при $\frac{u}{c} \ll 1$ соотношение (16.58) может быть аппроксимировано равенством $F = m_0 \frac{du}{dt}$, т. е. классическим вторым законом Ньютона.

§ 16.6. Соударение двух одинаковых частиц

Не обращаясь к тензорным методам, зависимость массы от скорости можно установить, опираясь на преобразования Лоренца и закон сохранения импульса при столкновении двух частиц. Такой вывод может служить примером применения упоминавшихся выше

мысленных опытов к распространению принципов теории относительности на различные области физики.

Рассмотрим столкновение двух частиц с одинаковыми свойствами, движущихся по одной прямой. Систему отсчета, связанную с центром масс, обозначим Σ' . В этой системе столкновение симметрично, т. е. частицы сближаются с равными скоростями (рис. 16.4). На

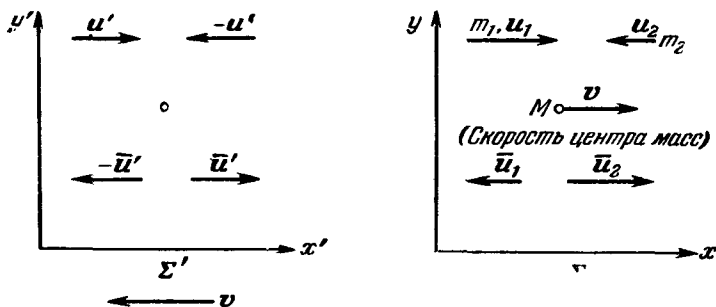


Рис. 16.4. Столкновение двух одинаковых частиц.

u — скорость до столкновения, \bar{u} — после столкновения.

некоторое время частицы сливаются и затем разлетаются в противоположные стороны с равными скоростями.

Мы постулируем, что законы сохранения импульса и массы справедливы в любой системе отсчета. Тогда в системе Σ имеем

$$m_1 + m_2 = M, \quad (16.59)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = Mv, \quad (16.60)$$

где M — полная масса в момент столкновения. Согласно формулам сложения скоростей имеем

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad (16.61)$$

$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}.$$

Исключая M из соотношений (16.59) и (16.60) и пользуясь формулами (16.61), можно получить

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{u'v}{c^2}}{1 - \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}. \quad (16.62)$$

Таким образом, для того чтобы постулированные законы сохранения выполнялись во всех системах отсчета, следует положить

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (16.63)$$

где m_0 — масса частицы в собственной системе отсчета. Это равенство согласуется с соотношением (16.35) и со всеми вытекающими из него следствиями.

Такой вывод представляет особый интерес, так как из соотношения (16.61) следует, что масса M в момент столкновения равна

$$M = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} \right) = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \quad (16.64)$$

и больше, чем $\frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, т. е. больше, чем сумма масс двух ча-

стиц с массой покоя m_0 , движущихся со скоростью v . Это увеличение массы вызвано увеличением энергии двух частиц во время столкновения, так как часть кинетической энергии переходит в упругую или какой-либо иной вид энергии, не переходящий обратно в кинетическую. В этом смысле различие между упругими и неупругими столкновениями исчезает по крайней мере в отношении первой фазы столкновения. Если после столкновения частицы разлетаются, то для определения их скоростей в любой системе отсчета нужно знать изменение энергии в момент столкновения.

Задачи

1. Пусть частица с полной энергией W и энергией покоя W_0 соударяется с такой же покоящейся частицей. Покажите, что в системе отсчета, где суммарный импульс равен нулю, полная энергия приблизительно равна $\sqrt{2WW_0}$, если $W \gg W_0$.

2. π_0 -Мезон с энергией покоя W_0 , движущийся со скоростью u в лабораторной системе отсчета, распадается на два γ -кванта. Определите энергию и угол разлета γ -квантов в лабораторной системе отсчета.

3. Частица с кинетической энергией T_0 и энергией покоя W_0 сталкивается с такой же покоящейся частицей. Покажите, что кинетическая энергия T частицы, рассеянной на угол θ , равна

$$T = \frac{T_0 \cos^2 \theta}{1 + \frac{T_0 \sin^2 \theta}{2W_0}}.$$

4 Для создания «протонной пары» в системе центра масс необходима энергия $2M_0c^2 = 1862$ Мэв. Каковы должны быть энергии протона и

электрона. чтобы при их столкновении с покоящимся протоном было возможно такое явление.

5. В опытах по рассеянию протонов на нейтронах при нерелятивистских скоростях частицы после столкновения разлетаются под углом 90° друг к другу. Вычислите поправки первого порядка к этому углу (считая их малыми) для скоростей достаточно больших, когда эти поправки становятся необходимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Bergmann, An Introduction to the Theory of Relativity. (Русский перевод: П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, гл. 5, 6.)

Тензорное исчисление представлено в форме, применимой к общей теории относительности.

2. R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, гл. III и IV. «Мысленный опыт» относительно столкновения двух одинаковых частиц был придуман Толманом и его сотрудниками.

3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, гл. 1 и 2.

В дальнейшем мы будем неоднократно ссылаться на эту превосходную книгу по релятивистской электродинамике. Авторы, оставаясь на формальных позициях, стремятся подчеркнуть внутреннюю логику предмета. Изложение начинается с принципа относительности и вариационного принципа.

4. C. Møller, The Theory of Relativity, гл. IV. В гл. IV рассмотрена механика упругих сред, однако ее изучение лучше отложить, пока электродинамика не будет сформулирована в релятивистской форме, гл. V.

5. H. Goldstein, Classical Mechanics. (Русский перевод: Г. Голдстейн, Классическая механика, гл. 6.)

Во многих книгах по механике имеется раздел, посвященный теории относительности. Книга Голдстейна — одна из лучших книг такого типа.

По тензорному исчислению можно рекомендовать следующие книги:

6. C. E. Weatherburn, An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus.

7. J. L. Synge, A. Schild, Tensor Calculus.

* Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика.

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВАКУУМНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Преобразования Лоренца были получены из рассмотрения электромагнитных волн. Однородное волновое уравнение, определяющее характер распространения электромагнитной волны, уже имеет ковариантную форму, ибо оператор Д'Аламбера

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (17.1)$$

инвариантен. Вообще, как уравнения Максвелла, так и их следствия легко поддаются ковариантному описанию вследствие того, что в законы электродинамики не нужно вносить никаких изменений, чтобы удовлетворить требованиям теории относительности. Простая подстановка в уравнения пространственно-временных координат в ковариантном виде автоматически приводит эти уравнения к ковариантной форме.

§ 17.1. Четырехмерный векторный потенциал

Совершенно ясно, что с точки зрения теории относительности заряды и токи представляют собой различные стороны одного и того же явления. Если «собственная» плотность зарядов (т. е. плотность, измеренная в системе отсчета, где эти заряды покоятся) равна ρ_0 , то можно составить контравариантный вектор

$$j^i = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \quad (17.2)$$

с компонентами

$$j^i = \left(\rho \frac{u}{c}, \rho \right), \quad (17.3)$$

где

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (17.4)$$

Таким образом, формулы преобразования зарядов и токов получаются автоматически. Так как плотности зарядов и токов представляют собой компоненты одного 4-вектора, то аналогичным образом можно объединить неоднородные волновые уравнения (13.7) и (13.8)

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (17.5)$$

$$\square c\mathbf{A} = -\frac{\rho\mathbf{u}}{c\epsilon_0}. \quad (17.6)$$

Они эквивалентны соотношению

$$\square \varphi^i = -\frac{j^i}{\epsilon_0}, \quad (17.7)$$

где

$$\varphi^i = (c\mathbf{A}, \varphi). \quad (17.8)$$

Таким образом, скалярный и векторный потенциалы не являются более независимыми; они также представляют собой различные стороны одного и того же понятия. То же можно сказать и об электрическом и магнитном полях; в некотором смысле и они — различные стороны одного и того же явления.

Уравнение непрерывности в ковариантной форме имеет очень простой вид

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (17.9)$$

Аналогично записывается условие Лоренца (13.3):

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0. \quad (17.10)$$

Преобразования (13.9) и (13.10), будучи выражены через ковариантные компоненты φ^i , описываются одним уравнением

$$\varphi'_i = \varphi_i + \frac{\partial}{\partial x^i} (c\psi). \quad (17.11)$$

При этом сохраняются и смысл, и знак преобразования. Поля, описываемые φ^i , и физические законы, выраженные через потенциалы, не должны зависеть от выбора скалярной функции ψ .

Преобразование плотности зарядов от собственной системы отсчета к несобственной определяется формулой (17.4). Эта формула такова, что полный заряд остается инвариантным при преобразовании. Действительно, объемные элементы dv и dv_0 в соответствующих системах отсчета связаны соотношением

$$dv = dv_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (17.12)$$

так как при преобразовании Лоренца изменяется только один размер. Следовательно,

$$\rho dv = \rho_0 dv_0, \quad (17.13)$$

и заряд внутри данной поверхности остается неизменным. Таким образом, в теории относительности заряд электрона по-прежнему является универсальной постоянной. Так как в природе не обнаружено зарядов, которые не были бы целыми кратными e , то полный заряд можно определить простым пересчетом. Очевидно, эта операция также должна быть инвариантна. Эти выводы теории согласуются с опытными фактами. Инвариантность полного заряда является, кроме того, прямым следствием теоремы, выражаемой соотношением (16.22) совместно с уравнением (17.9).

Определим теперь интеграл неоднородного волнового уравнения (17.7), соответствующий (инвариантному) точечному заряду e , находящемуся в точке $(x^j)_1$. В собственной системе отсчета (рис. 17.1) интеграл уравнения (17.7) есть просто кулоновский потенциал

$$\varphi_0^i = \left(0, \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} \right), \quad (17.14)$$

где r_0 — вектор, проведенный от источника к точке поля в собственной системе отсчета. Потенциал в точке $(x^j)_2$ следует измерять в момент времени, соответствующий условию запаздывания

$$R^j R_j = 0 = -r^2 + c^2 t^2, \quad (17.15)$$

где

$$R^j = (x^j)_2 - (x^j)_1 = (r, ct) = (r, r). \quad (17.16)$$

Для того чтобы соотношение (17.14) сделать пригодным в любой системе отсчета, попытаемся записать потенциал в тензорном виде так, чтобы при $u = 0$ получался кулоновский потенциал. В собственной системе отсчета 4-скорость $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ имеет компоненты

$$u_0^i = (0, 1). \quad (17.17)$$

В собственной системе отсчета, где $R_0^i = (r_0, r_0)$, инвариант $u^i R_i$ имеет вид

$$u^i R_i = r_0. \quad (17.18)$$

Следовательно, соотношение (17.14) в тензорной форме может быть записано следующим образом:

$$\varphi^i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^i}{u^j R_j}, \quad (17.19)$$

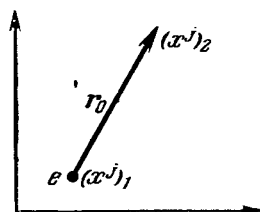


Рис. 17.1. Точки поля и источника в собственной системе отсчета.

при условии, что $R_j R^j = 0$. Теперь это соотношение справедливо в любой системе отсчета как в собственной, так и несобственной.

Для того чтобы соотношение (17.19) выразить через трехмерные векторы, напомним соотношение

$$u^j = \left(\frac{u}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right), \quad (16.29)$$

из которого следует

$$u^j R_j = \frac{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (17.20)$$

Таким образом, потенциал (17.19) имеет компоненты

$$\varphi^i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{u}}{cs}, \frac{1}{s} \right), \quad (17.21)$$

где

$$s = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}. \quad (17.22)$$

Потенциалы (17.21) называются потенциалами Лиенара — Вихерта. Впоследствии мы выведем их из запаздывающих потенциалов, рассмотренных в гл. 13. Скорость u , входящая в потенциал (17.21), есть скорость наблюдателя относительно той системы, в которой заряд покоился в момент «излучения» сигнала.

§ 17.2. Тензор электромагнитного поля

При ковариантном выражении полей через потенциалы возникает проблема, которая связана с обычным трехмерным векторным анализом: оказывается, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} разного вида. Обычный вектор имеет своим образом смещение точки в пространстве. Такие векторы называются полярными. Векторы \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{E} , \mathbf{D} как раз такого типа. Скалярное произведение этих векторов не изменяется при любых ортогональных преобразованиях координат — переносах, вращениях, отражениях, — хотя если одна или все координатные оси изменяют знак, то соответствующие компоненты векторов также изменяют знак. Этого нельзя сказать о «векторном произведении» двух полярных векторов: само определение векторного произведения зависит от того, используется правое или левое вращение при его вычислении (обычно векторное произведение представляется площадью параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{A} и \mathbf{B} , однако направление его можно сделать произвольным). Очевидно, что если все три компоненты векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} изменяют знак, то произведение $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ не изменится. Величины, преобразующиеся подобно векторным произведениям, называются аксиальными векторами. Примерами их могут служить вра-

щающий момент, угловой момент, \mathbf{B} , \mathbf{H} и \mathbf{M} . При переносах и вращениях координатной системы эти векторы преобразуются как и обычные, однако при отражении относительные знаки аксиальных и полярных векторов изменяются. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов не есть истинный скаляр, это — псевдоскаляр: оно меняет знак при инверсии координатных осей. В соотношениях для физических величин могут приравняться, конечно, только векторы одного и того же вида.

Аксиальный вектор не может быть пространственной составляющей 4-вектора. Компоненты вектора $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ имеют два индекса, соответствующие векторам \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$C_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha = -C_{\beta\alpha}, \quad (17.23)$$

где

$$C_{1,2} = C_z, \quad C_{2,3} = C_x, \quad C_{3,1} = C_y, \quad (17.24)$$

в случае правой декартовой системы координат. В этих обозначениях уравнение $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} = -\dot{B}_{\alpha\beta}. \quad (17.25)$$

Соотношение $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ также изменит свой вид

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = B_{\alpha\beta}, \quad (17.26)$$

где α и β принимают значения 1, 2, 3 в случае обычных трехмерных векторов. С другой стороны, \mathbf{E} — вектор полярный; через потенциалы он выражается следующим образом:

$$E_\alpha = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (17.27)$$

Исследование соотношений (17.26) и (17.27) с тензорной точки зрения приводит к представлению об антисимметричном 4-тензоре поля F_{ij} , который является функцией ковариантного четырехмерного векторного потенциала

$$\varphi_i = (-cA, \varphi) \quad (17.28)$$

и определяется соотношением

$$F_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j}. \quad (17.29)$$

Соответствующий контравариантный тензор равен

$$F^{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}. \quad (17.30)$$

Согласно соотношениям (17.26) и (17.27) компоненты F_{ij} равны

$$F_{ij} = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ \downarrow i & \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & +cB_y & -E_x \\ +cB_z & 0 & -cB_x & -E_y \\ -cB_y & +cB_x & 0 & -E_z \\ +E_x & +E_y & +E_z & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (17.31)$$

а компоненты контравариантного тензора F^{ij} равны

$$F^{ij} = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ \downarrow i & \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & +cB_y & +E_x \\ +cB_z & 0 & -cB_x & +E_y \\ -cB_y & +cB_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & E_z & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = g^{in} g^{jm} F_{nm}. \quad (17.32)$$

Таким образом, уравнения Максвелла можно выразить в ковариантной форме, так как сами поля выражаются ковариантно через потенциалы. Легко проверить, что два уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\rho \mathbf{u} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.33)$$

соответствуют соотношениям

$$\frac{\partial F^{ji}}{\partial x^j} = \frac{j^i}{\epsilon_0}, \quad (17.34)$$

в левой части которых стоит ковариантная дивергенция тензора поля. Очевидно, что эти соотношения согласуются с уравнением непрерывности (17.9) в силу антисимметричного характера тензора поля. Остальные два уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (17.35)$$

менее удобны для ковариантного представления. Они соответствуют соотношениям

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad (17.36)$$

левая часть которых равна тождественно нулю, если $i \neq j \neq k$. Перестановка индексов не изменяет смысла соотношения. Следова-

тельно, из 64 соотношений, определяемых равенством (17.36), только четыре нетривиальны.

Соотношение (17.36) можно записать в виде, подобном (17.34), обе части которого представляют собой 4-вектор. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что левая часть соотношения (17.36) представляет собой абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга. Абсолютно антисимметричный тензор четвертого ранга P^{ijkl} определяется следующим образом: его компоненты равны нулю, если справедливо хотя бы одно из равенств $i \neq j \neq k \neq l$, и равны $+1$ или -1 в зависимости от того, получается ли набор индексов $ijkl$ из 1234 с помощью четного или нечетного числа перестановок. При переносах или вращениях системы координат P^{ijkl} преобразуется подобно тензору. Однако, в противоположность последнему, при отражениях или инверсиях изменение знака нечетного числа координатных осей не меняет компонент P^{ijkl} . Таким образом, строго говоря, это не тензор, а псевдотензор. Псевдотензор, получающийся в результате умножения антисимметричного тензора поля на P^{ijkl} , называется дуальным

$$G^{ij} = P^{ijkl} F_{kl}. \quad (17.37)$$

Легко видеть, что тензор G^{ij} подобен тензору F^{ij} , за исключением того, что \mathbf{E} и $c\mathbf{B}$ поменялись местами. Будучи выраженным через тензор G^{ij} , соотношение (17.36) принимает вид

$$\frac{\partial G^{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad (17.38)$$

который позволяет легко ввести магнитные заряды и токи магнитных зарядов, если они существуют. Гипотетический 4-вектор, который описывает эти заряды и который следует добавить в соотношение (17.38), является псевдовектором, так как G^{ij} — псевдотензор.

Тензорные выражения для полей позволяют легко найти для них формулы преобразования. Из соотношения (16.12) имеем

$$(F^{ij})' = Q_k^i Q_l^j F^{kl}, \quad (17.39)$$

что в свою очередь дает

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad (17.40)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad (17.41)$$

$$E'_{\perp} = \gamma (E_{\perp} + \mathbf{v} \times B_{\perp}), \quad (17.42)$$

$$B'_{\perp} = \gamma \left(B_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times E_{\perp}}{c^2} \right), \quad (17.43)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, а E_{\parallel} , B_{\parallel} и E_{\perp} , B_{\perp} — компоненты E и B , соответственно параллельные и перпендикулярные \mathbf{v} .

Физический смысл соотношений (17.42) и (17.43) довольно прост. Члены, линейные относительно \mathbf{v} (за исключением множителя γ), описываются в основном классическими соотношениями, т. е. уравнениями Максвелла без явного использования теории относительности.

Соотношение (17.42) показывает, что частица, движущаяся в магнитном поле, испытывает действие электрического поля с точностью до членов порядка β^2 , равного $E + \mathbf{v} \times B$. Подробно это было рассмотрено в гл. 9.

Для интерпретации соотношения (17.43) рассмотрим поток, пронизывающий прямоугольную рамку, движущуюся в электрическом поле (рис. 17.2). Часть рамки расположена вне поля. Аналогично

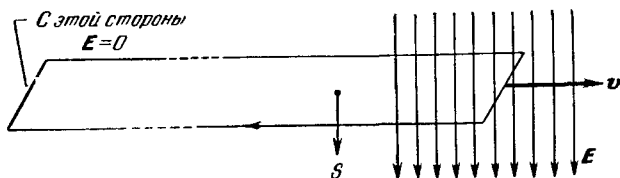


Рис. 17.2. Прямоугольный контур, движущийся через неоднородное электрическое поле.

случаю с магнитным полем, рассмотренному в § 9.3, циркуляция магнитного поля, определенная наблюдателем, движущимся вместе с рамкой, будет зависеть от скорости изменения потока электрического поля и тока I , текущего в рамке. Скорость изменения потока электрического поля определяется соотношением

$$-\oint \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = - \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (17.44)$$

Следовательно, циркуляция B' равна

$$\oint B' \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 I = - \frac{1}{c^2} \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} + \mu_0 I. \quad (17.45)$$

т. е. движущийся наблюдатель будет испытывать действие эффективного магнитного поля

$$B' = B + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}, \quad (17.46)$$

что соответствует соотношению (17.43) при малых значениях β .

Формулы преобразования для полей имеют большое значение при решении конкретных задач о движении электронов и ионов в электромагнитных полях. Часто подбором системы координат удается избавиться от электрического или магнитного поля, вследствие чего решение сильно упрощается.

§ 17.3. Сила Лоренца

Сила Лоренца, приходящаяся на единицу объема, $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ представляет собой пространственную часть 4-вектора

$$f^i = F^{ik} j_k = \left(\mathbf{f}, \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c} \right). \quad (17.47)$$

Четвертая компонента f^4 есть мощность, расходуемая электрическим полем в единице объема, умноженная на $1/c$. Однако полная сила, действующая на заряд $\delta q = \rho \delta v$, занимающий объем δv , равная

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \delta v = \delta q [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (17.48)$$

не может быть представлена пространственной частью 4-вектора. Благодаря инвариантности δq в собственной системе отсчета

$$\mathbf{F}_0 = \delta q \mathbf{E}_0. \quad (17.49)$$

Таким образом, в силу общих соотношений (17.40) и (17.42)

$$F_{\parallel} = F_{0\parallel}, \quad (17.50)$$

$$F_{\perp} = \gamma^{-1} F_{0\perp}. \quad (17.51)$$

Соотношения (17.50) и (17.51) подобны формулам преобразования механических сил (16.52), (16.53), (16.54). Следовательно, равновесие механических и электрических сил инвариантно относительно преобразований Лоренца, т. е. природа силы не влияет на закон преобразования. Более того, определяя силу с помощью соотношения $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, где \mathbf{F} — сила Лоренца, мы убеждаемся, что соотношение (17.48), а следовательно и соотношение (16.50), представляют собой корректные с точки зрения теории относительности уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 23, где будет рассмотрена ковариантная форма уравнений как для частиц, так и для полей, выраженных через функцию Гамильтона.

Задачи

Докажите:

1. Если \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны в одной системе отсчета, то они перпендикулярны и во всех других инерциальных системах отсчета.

2. Если в какой-либо инерциальной системе отсчета $|\mathbf{E}| > |c\mathbf{B}|$, то и в других инерциальных системах отсчета справедливо это неравенство. То же верно в отношении обратного неравенства.

3. Если в какой-либо инерциальной системе отсчета угол между E и B острый (или тупой), то в других инерциальных системах отсчета он остается таким же.

4. Если E и B перпендикулярны, но $|E| \neq |cB|$, то имеется такая система отсчета, в которой поле либо чисто электрическое, либо чисто магнитное.

ЛИТЕРАТУРА

Превосходное изложение вопроса можно найти в указанных ранее монографиях Беккера, Бергмана, Меллера и Толмана. Ландау и Лифшиц проводят рассуждения, исходя из поведения частицы в поле. Кроме этих укажем еще ряд работ.

1. A. Sommerfeld, *Electrodynamics*. (Русский перевод: А. Зоммерфельд, *Электродинамика*, ч. III, Теория относительности и теория электрона.)

Эта книга представляет собой третий том знаменитого курса лекций профессора Зоммерфельда.

2. A. Einstein, Оригинальная работа по электродинамике движущихся сред в книге *The Principle of Relativity*.

3. W. Pauli, *Relativitätstheorie*. (Русский перевод: В. Паули, *Теория относительности*.)

Исчерпывающий обзор по данному вопросу на 1921 г.

ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА — ВИХЕРТА И ПОЛЯ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА

Мы убедились, что математический аппарат, основанный на ковариантных свойствах физических соотношений, представляет собой мощный метод решения задач электродинамики. Однако для того чтобы результаты, полученные с его помощью, сравнивать с опытом, их необходимо преобразовать к обычным пространственно-временным координатам, связанным с наблюдателем. Большая часть результатов классической теории излучения была получена до создания теории относительности. При этом предполагалось, что в системе отсчета, связанной с наблюдателем, уравнения Максвелла справедливы. Для физической интерпретации соответствующих формул весьма поучительно повторить некоторые из этих расчетов. Сейчас это особенно полезно сделать, так как из теории относительности мы знаем, что правомочность этих выводов носит гораздо более общий характер, нежели можно было предполагать первоначально.

§ 18.1. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Применим запаздывающие потенциалы (13.24) и (13.25) для расчета поля излучения электрона. В классической электродинамике об электроном известно лишь, что он имеет определенный суммарный заряд. Поэтому любые расчеты поля излучения не могут основываться на каком-то конкретном распределении заряда внутри электрона. С физической точки зрения невозможно считать электрон не имеющим размера, так как это привело бы к появлению в теории бесконечностей. Однако некоторые черты поля излучения действительно не зависят от радиуса электрона по крайней мере, если радиус мал по сравнению с характеристическим размером поля. Мы будем предполагать, что электрон имеет конечный радиус, однако физическое значение мы будем приписывать лишь тем свойствам, которые не зависят от величины этого радиуса. Радиус электрона есть величина не наблюдаемая, поскольку из квантовомеханических соображений следует, что никакими измерениями длины нельзя определить радиус

электрона. Более того, мы уже отмечали, что приписывать какому-либо объекту «жесткий» размер внутренне противоречиво с точки зрения теории относительности.

В дорелятивистских теориях и расчетах следовало с большой осторожностью применять запаздывающие потенциалы к системам, у которых известен лишь полный заряд. Если для вычисления потенциала $\varphi(x_\alpha, t)$ в выражение (13.25) подставить плотность $[\rho]$, взятую в соответствующий момент, то интеграл $\int [\rho] dv$ не будет равен полному заряду системы. Причина этого заключается в том, что различные слагаемые в подинтегральном выражении $[\rho] dv$ берутся в различные моменты времени. Пока сфера радиуса $r = c(t - t')$ (рис. 18.1) проходит по распределению зарядов, последние могут сдвинуться так, что будут более плотными или менее плотными, чем те, которые дали бы правильный полный заряд. Рассмотрим этот процесс более подробно. Пусть сфера, изображенная на рис. 18.1, сходится со скоростью c к точке наблюдения x_α и сообщает сведения о плотности зарядов в некоторой системе. Если средняя скорость системы зарядов имеет компоненту того же направления, что и движение сферы, то интеграл от плотности заряда, взятой в тот момент времени, когда через данную точку проходит сфера, даст величину, большую полного заряда системы. Если же средняя скорость распределения зарядов имеет компоненту противоположного направления, то интеграл даст меньшую величину, нежели полный заряд системы.

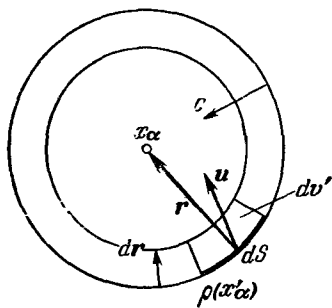


Рис. 18.1. Вспомогательная сфера для определения потенциала заряда, движущегося со скоростью u .

Если же средняя скорость распределения зарядов имеет компоненту противоположного направления, то интеграл даст меньшую величину, нежели полный заряд системы.

Аналогичная ситуация складывается при переписи населения в стране. Предположим, группа переписчиков с определенной скоростью сходится к некоторому «информационному центру» и по мере продвижения измеряет плотность населения. Полная численность населения будет отличаться от численности, определенной переписчиками. Отличие будет в ту или иную сторону в зависимости от того, происходит ли миграция населения к «информационному центру» или от него (в первом случае истинная численность населения меньше, чем определенная переписчиками, во втором — больше). Подобным образом при равных расстояниях до наблюдателя запаздывающий потенциал приближающегося заряда будет больше, чем потенциал удаляющегося, так как приближающийся заряд дольше остается внутри сходящейся сферы.

Рассмотрим поле излучения электрона, скорость которого сравнима с c . Относительно электрона будем предполагать известными следующие данные: а) его полный заряд равен e и б) все части электрона расположены внутри некоторого небольшого объема и движутся со скоростью \mathbf{u} . Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий место расположения заряда с точкой наблюдения. К этой точке сходится сфера, изображенная на рис. 18.1. Радиус-вектор \mathbf{r} измеряется в тот момент, когда через данный заряд проходит сфера. Если электрон покоится, то заряд, пересекаемый сферой за время dt , равен $[\rho] dS dr$, где dr — расстояние, проходимое сферой за время dt . Если же скорость \mathbf{u} отлична от нуля, то величина заряда, пересекаемого сферой, будет меньше чем $[\rho] dS dr$ на величину

$$[\rho] dS \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dt.$$

Таким образом, сфера соберет информацию о заряде

$$de = [\rho] dv' - [\rho] \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{r} dS dt. \quad (18.1)$$

Так как $dt = dr/c$ и $dS dr = dv'$, то

$$de = [\rho] dv' - [\rho] \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{rc} dv'. \quad (18.2)$$

Определяя отсюда плотность в соответствующий момент времени, получим

$$[\rho] dv' = \frac{de}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{cr}},$$

или

$$\frac{[\rho] dv'}{r} = \frac{de}{r - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c}}. \quad (18.3)$$

В результате запаздывающие потенциалы (13.25) и (13.24) примут следующий вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{de}{r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}}; \quad (18.4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{u} de}{r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}}. \quad (18.5)$$

В пределе для точечного заряда величиной $\int de = e$ потенциалы станут равными

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e}{r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}} \right], \quad (18.6)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{e\mathbf{u}}{r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}} \right]. \quad (18.7)$$

Эти выражения называются потенциалами Лиенара — Вихерта одного электрона. Они не зависят от протяженности электрона, а следовательно, и от его внутренней структуры. По форме они совпадают с выражением (17.21), однако значения скоростей в этих формулах различны. В данном случае — это скорость заряда относительно некой специальной системы отсчета, в которой справедливы уравнения Максвелла. Она измеряется в тот момент, когда через заряд проходит измерительная сфера. В гл. 17 скорость \mathbf{u} — это скорость наблюдателя относительно системы отсчета, где заряд покоится в момент излучения сигнала. Тогда все конкретные расчеты полей движущихся зарядов, сделанные на основе предположения о существовании одной системы отсчета, где справедливы волновые уравнения, станут эквивалентны следствиям ковариантной электродинамики.

§ 18.2. Поле равномерно движущегося заряда

Так как связь между положением заряда в момент излучения и его настоящим положением в общем случае неизвестна, потенциалы Лиенара — Вихерта выражают поля только через скорости и положения зарядов в момент излучения. Однако если движение линейно и равномерно, то потенциалы и поля можно выразить через положение заряда в данный момент, т. е. в тот момент времени t , когда измерительная сфера (см. рис. 18.1) сходится в точке наблюдения.

Рассмотрим электрон (рис. 18.2), движущийся с постоянной скоростью вдоль оси x . Выразим знаменатель потенциалов Лиенара — Вихерта $s = r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})/c$ через координаты электрона в данный момент. Если учесть, что $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$, то используя геометрические соображения, легко получить, что

$$s^2 = r_0^2 - \left(\frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}}{c} \right)^2. \quad (18.8)$$

Теперь нетрудно знаменатель s выразить явно через координаты частицы x_0, y_0, z_0 или \mathbf{r}_0 в момент наблюдения и угол ψ (между ско-

ростью u и r_0 :

$$s = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{u^2}{c^2}(y_0^2 + z_0^2)} = \sqrt{x_0^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y_0^2 + z_0^2)} = r_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \psi}. \quad (18.9)$$

Если это выражение подставить в соотношения (18.6) и (18.7), то потенциалы Лиенара — Вихерта окажутся выраженными через координаты электрона в момент излучения.

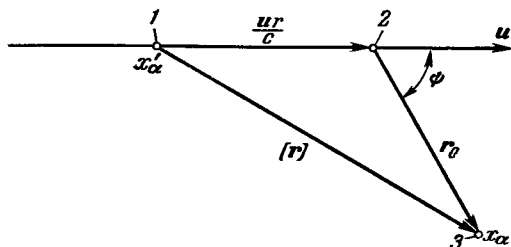


Рис. 18.2. К определению потенциала равномерно движущегося электрона:

1—положение при излучении, 2—положение в момент приема излучения, 3—точка поля.

Поля также нетрудно вычислить в явном виде. Электрическое поле равно

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (13.1)$$

Производную по времени можно выразить через производную по координатам, если учесть, что поле вместе с зарядом движется прямолинейно и равномерно. Неподвижный наблюдатель за время dt увидит такое же изменение, как наблюдатель, переместившийся на расстояние $-u dt$ без изменения времени. Следовательно, производная по времени равна

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (18.10)$$

Подставляя это соотношение в равенство (13.1), находим компоненты электрического поля

$$E_x = \frac{ex_0}{4\pi\epsilon_0 S^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \quad (18.11)$$

$$E_y = \frac{ey_0}{4\pi\epsilon_0 S^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \quad (18.12)$$

$$E_z = \frac{ez_0}{4\pi\epsilon_0 S^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \quad (18.13)$$

Хотя \mathbf{A} имеет лишь x -компоненту, электрическое поле симметрично (за исключением знаменателя) относительно всех трех компонент. Любопытно отметить, что поле направлено к положению заряда в момент наблюдения (для отрицательного электрона), а не к положению в момент излучения. Это направление легко определить, если электрическое поле представить в векторной форме

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left[\mathbf{r} - \frac{u\mathbf{r}}{c} \right]_{t-r/c} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{e\mathbf{r}_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 s^3} = \frac{e\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \psi \right)^{3/2}}. \quad (18.14)$$

Магнитное поле равномерно движущегося заряда вычисляется с помощью уравнения $\mathbf{B} = \mathbf{V} \times \mathbf{A}$ и оказывается равным

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{u \times \mathbf{r}_0}{s^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{E}}. \quad (18.15)$$

При малых скоростях $u \rightarrow 0$, $s \rightarrow r$, и выражения (18.14) и (18.15) сводятся к законам Кулона и Био и Савара. При больших скоростях, $u \rightarrow c$, величины обоих полей зависят от угла между направлением движения электрона и радиусом-вектором \mathbf{r}_0 . Из соотношения (18.14) видно, что под прямым углом к направлению движения поле возрастает пропорционально $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, в то время как в направлении движения оно уменьшается пропорционально $(1 - u^2/c^2)$. Таким образом, при очень больших скоростях поле все больше и больше напоминает поле плоской волны. В течение короткого времени, когда быстрый электрон пролетает мимо наблюдателя, последний видит чисто поперечные электрическое и магнитное поля. Заметим, однако, что равномерно движущийся электрон не излучает в том смысле, что в его поле нет излучения энергии. Это можно показать, вычислив вектор Пойнтинга, соответствующий полям (18.14) и (18.15)

Эти поля тождественно совпадают с полем статического заряда, подвергнутому преобразованиям Лоренца без каких-либо ограничений на скорость (доказательство этого утверждения предлагается в качестве задачи). Однако до создания теории относительности применение полученных результатов вызывало сомнение, в частности, подвергалось сомнению предположение, что наблюдатель покоится относительно системы отсчета, где применимы уравнения Максвелла. Теория относительности сняла эти трудности, придав \mathbf{u} смысл относительной скорости электрона и наблюдателя.

§ 18.3. Прямое решение волнового уравнения

Интересно проследить, каким образом поле равномерно движущегося заряда может быть получено из неоднородных волновых уравнений. Для этого нужно решить уравнения (13.7) и (13.8) с учетом условия Лоренца (13.3). Поле равномерно движущегося электрона должно двигаться вместе с электроном. Следовательно, производная по времени и производные по координатам не будут независимы. Соотношение между ними можно написать, обобщив равенство (18.10):

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (18.16)$$

Это равенство означает, что любой параметр поля за время dt изменяется на ту же величину, что и при смещении на расстояние $-u dt$ вдоль направления движения электрона.

Рассмотрим однокомпонентное неоднородное волновое уравнение

$$\square \psi(x_\alpha, t) = -g(x_\alpha), \quad (13.11)$$

предполагая, что заряд движется с постоянной скоростью вдоль оси x . Согласно равенству (18.16) его можно преобразовать

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -g(x, y, z). \quad (18.17)$$

Посредством замены переменных

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ y_1 &= y, \\ z_1 &= z, \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

уравнение (18.17) можно свести к обычному электростатическому уравнению Пуассона

$$\nabla_1^2 \psi = -g\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} x_1, y_1, z_1\right), \quad (18.19)$$

решением которого является кулоновский потенциал

$$\psi(x_{\alpha_1}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x'_{\alpha_1}) dv'_1}{r(x'_{\alpha_1}, x_{\alpha_1})}. \quad (18.20)$$

Переходя обратно к первоначальным переменным, получим

$$\psi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x'_\alpha)}{s} dv', \quad (18.21)$$

где

$$s = \sqrt{(x - x')^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) [(y - y')^2 + (z - z')^2]}. \quad (18.22)$$

Для заряда e , движущегося со скоростью u , получим

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s}, \quad (18.23)$$

$$A = \frac{eu}{4\pi\epsilon_0 c^2 s}. \quad (18.24)$$

Эти выражения полностью эквивалентны потенциалам Лиенара — Вихерта. Однако при таком выводе вопросы, касающиеся скорости распространения волны, а также связи между положениями заряда в момент излучения и момент приема, отпали. Это произошло вследствие того преобразования, посредством которого уравнение (13.11) было сведено к статическому (18.19). Очевидно, что математическая операция замены переменных (18.18) есть на самом деле преобразование Лоренца, при котором положение наблюдателя преобразуется к системе отсчета, в которой рассматриваемый электрон покоится.

§ 18.4. «Конвективный потенциал»

Два электрона, движущихся параллельно друг другу с одинаковой скоростью u , взаимодействуют между собой. Сила взаимодействия определяется выражением для силы Лоренца

$$F = e(E + u \times B).$$

Входящие в это выражение поля можно вычислить из потенциалов (18.23) и (18.24). В результате сила примет такой вид:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{s} \right) + (u \cdot \nabla) \frac{u}{c^2 s} + \frac{u}{c^2} \times \left(\nabla \times \frac{u}{s} \right) \right], \quad (18.25)$$

а после преобразования векторного произведения —

$$F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{s} \right). \quad (18.26)$$

Это выражение можно записать в виде градиента

$$F = -\nabla\psi. \quad (18.27)$$

Функция

$$\psi = \frac{e^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 s} \quad (18.28)$$

называется конвективным потенциалом. Таким образом, сила взаимодействия двух электронов выводится из скалярного потенциала ψ , однако этот потенциал не обладает сферической симметрией относительно положения электрона, создающего поле. Сила F_2 , с которой электрон e_1 , находящийся в точке (x_1, y_1, z_1) , действует на электрон e_2 ,

находящийся в точке (x_2, y_2, z_2) , должна быть перпендикулярна поверхности эллипсоида

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]} = \text{const}, \quad (18.29)$$

ибо последняя является эквипотенциальной поверхностью (рис. 18.3).

С другой стороны, обратная сила F_1 на электрон e_1 перпендикулярна к эллипсоиду, описанному вокруг электрона e_2 (показан на рисунке пунктирной линией). Таким образом, за исключением случаев, когда линия, соединяющая электроны, параллельна или перпендикулярна к направлению движения, силы действия и противодействия не коллинеарны. Следовательно, если бы электроны были соединены жестким стержнем, то образовалась бы пара, ось которой перпендикулярна к плоскости, определяемой направлением движения и прямой, соединяющей электроны. Такой же крутящий момент предсказывается законом

Ампера, когда вместо электронов во взаимодействии участвуют элементы токов. Траутон и Нобл пытались наблюдать этот момент на опыте. Парадокс, вызванный отрицательным результатом опыта, показал трудности в интерпретации скорости движущихся зарядов, существовавшие в дорелятивистской электродинамике.

Вращательный момент, предсказываемый теорией, реально существует для наблюдателя, движущегося относительно зарядов со скоростью u . Он мог бы быть измерен, если бы не нужно было учитывать механические соображения. Мы уже указывали, что представление о «жестком» стержне несовместимо с теорией относительности. Теория относительности говорит, что независимо от происхождения, механического или электрического, механические величины преобразуются одинаковым образом. Следовательно, силы, обусловленные упругими напряжениями, будут также зависеть от скорости, как и сила Лоренца. Положение полностью аналогично тому, которое было при рассмотрении равновесия рычага — вращательный момент компенсировался приростом момента импульса. Во всяком случае равновесие есть свойство, инвариантное относительно преобразований Лоренца.

Для наблюдателя, движущегося с зарядами, заряды не представляют собой элементов тока. Поэтому взаимодействие между ними будет чисто кулоновским.

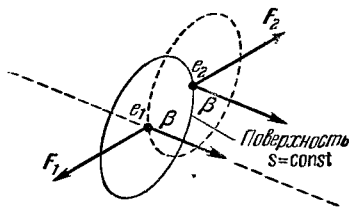


Рис. 18.3. Силы между двумя точечными зарядами, определяемые конвективным потенциалом.

§ 18.5. Виртуальные фотоны

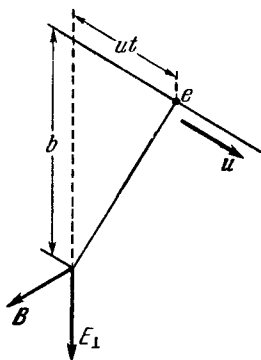
Как было показано, поле движущегося заряда становится все больше похожим на поле плоской волны по мере того, как скорость заряда приближается к скорости света c . Интересно это свойство оценить количественно.

Электромагнитное поле пролетающего заряда представляет собой импульс, которому соответствует определенное распределение энергии по частоте. Очевидно, интеграл по этому спектру частот даст полную энергию поля движущегося заряда. Интеграл будет расходиться, если его не «обрезать» на малых расстояниях.

Сначала подвергнем разложению Фурье поперечное электрическое поле. Согласно (18.13) имеем

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} E_{\perp}(t) = \frac{\gamma^{-2}b}{[(ut)^2 + \gamma^{-2}b^2]^{3/2}}, \quad (18.30)$$

где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, а b — расстояние от наблюдателя до траектории частицы по перпендикуляру (рис. 18.4). Компоненты Фурье этого поля равны



$$\begin{aligned} E_{\omega\perp} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{eb\gamma^{-2}}{8\pi^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{[(ut)^2 + \gamma^{-2}b^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0 bu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\omega b}{\gamma u} \xi}}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} d\xi, \end{aligned} \quad (18.31)$$

где $\xi = \gamma ut/b$. Это выражение можно записать в виде

$$E_{\omega\perp} = \frac{e}{4\pi^2\epsilon_0 bu} \left[\left(\frac{\omega b}{\gamma u} \right) K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma u} \right) \right], \quad (18.32)$$

Рис. 18.4. К вычислению поперечного поля движущегося электрона.

где K_1 — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента. Вблизи $x = 0$ функция $K_1(x)$ пропорциональна $1/x$, а на бесконечности асимптотически приближается к нулю как e^{-x} . Следовательно, выражение (18.31) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_{\omega\perp} &= \frac{e}{4\pi^2\epsilon_0 bu}, & \omega < \frac{\gamma u}{b}, \\ E_{\omega\perp} &= 0, & \omega > \frac{\gamma u}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (18.33)$$

Такое приближение совершенно естественно, если учесть, что из-за поперечного сокращения поля «эффективное время полета» как раз порядка $b/\gamma u$.

В электромагнитной волне половина энергии переносится электрическим, а половина — магнитным полями. Следовательно, полная энергия равна

$$U = \varepsilon_0 \int E_{\perp}^2 dv = \varepsilon_0 \int \left(\int E_{\perp}^2 u dt \right) 2\pi b db. \quad (18.34)$$

Пользуясь соотношением (13.36), эту энергию можно представить в виде разложения Фурье

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} U_{\omega} d\omega = 4\pi\varepsilon_0 u \int \left(\int_0^{\infty} |E_{\omega\perp}|^2 d\omega \right) 2\pi b db = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 u} \int_0^{\infty} \int_{b_{\min}}^{\gamma u/\omega} \frac{db}{b} d\omega, \end{aligned} \quad (18.35)$$

где b_{\min} — некоторый произвольный параметр обрезания для кулоновского поля. Таким образом, величина

$$U_{\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 u} \ln \frac{\gamma u}{\omega b_{\min}} \quad (18.36)$$

описывает распределение энергии по частоте эквивалентных плоских волн. Очевидно, что в рамках классической теории величина b_{\min} остается неопределенной.

Равенство (18.36) с помощью соотношения $U_{\omega} d\omega = \hbar\omega N_{\omega} d\omega$ позволяет вычислить число «эквивалентных фотонов» N_{ω} . Пусть $u \simeq c$. Тогда

$$N_{\omega} d\omega = \left(2 \frac{\alpha}{\pi} \right) \ln(\gamma c/\omega b_{\min}) \left(\frac{d\omega}{\omega} \right), \quad (18.37)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры. С квантовомеханической точки зрения положение электрона неопределенно в пределах длины \hbar/mc . Поэтому мы можем положить $b_{\min} \simeq A\hbar/m_0c$, где A — численный множитель. Так как полная энергия E частицы равна $\gamma m_0 c^2$, можно написать

$$N_{\omega} d\omega = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right) \ln \left(\frac{E}{A\hbar\omega} \right) \left(\frac{d\omega}{\omega} \right). \quad (18.38)$$

Таким образом, спектр «эквивалентных фотонов» примерно пропорционален $1/\omega$. Число эквивалентных фотонов на электрон невелико, порядка $1/137$.

Соотношение (18.38) оказывается весьма полезным при сравнении вероятности процессов, вызываемых электроном или другой частицей, действующей в основном через свое электромагнитное поле, с вероятностью процессов, обусловленных электромагнитным излучением.

Задачи

1. Посредством релятивистского преобразования статического кулоновского поля получите общие выражения для поля равномерно движущейся частицы. Как согласовать утверждение, что поле на линии движения уменьшается, с равенством (17.40), согласно которому $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$?

2. Исходя из конвективного потенциала, вычислите крутящий момент, действующий на заряды, изображенные на рис. 18.3. Сравните ответ с результатом, полученным в гл. 14.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Веcker, Theorie der Elektrizität. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II.)

Наше изложение аналогично разделу II этой работы.

2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля.

Потенциалы Лиенара — Вихерта выводятся из четырехмерной тензорной формы уравнений электродинамики.

3. A. Sommerfeld, Electrodynamics. (Русский перевод: А. Зоммерфельд, Электродинамика.)

Дифференциальное уравнение для четырехмерного потенциала решается посредством интегрирования в комплексной плоскости.

4. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

Другой подход к комплексному интегрированию волнового уравнения. Как указал Зоммерфельд, такой метод был предложен Герглотцем в 1904 г. до создания теории относительности, исключительно из математических соображений.

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Рассмотрим теперь в общем виде поля, создаваемые зарядом e , считая, что его положение задано как функция времени. Другими словами, считается известной функция $x'_\alpha(t')$, где t' — время, когда из точки x'_α испущен сигнал, распространяющийся со скоростью c и приходящий в точку x_α в момент времени t . При этом подразумевается, что есть путь, по которому можно определить соотношение между временем испускания сигнала t и временем его приема t' в точке поля. До возникновения теории относительности предполагалось, что есть такая система отсчета, в которой справедливо волновое уравнение с параметром c , и следовательно, моменты времени t и t' могли быть связаны посредством этой скорости c . Теория относительности распространяет это положение на все инерциальные системы отсчета. Другое отличие классического подхода от релятивистского заключается в исходных предпосылках. В классической физике предполагалось, что существует универсальное время, так что связь между t' и t могла быть проверена независимо. Следовательно, справедливость волнового уравнения в данной системе отсчета также могла быть проверена независимо. Теория относительности отрицает эту гипотезу. Соответственно скорость u имеет два смысла. В классической теории — это скорость источника поля в той системе отсчета, в которой справедливо волновое уравнение; в теории относительности — это скорость в любой инерциальной системе отсчета

§ 19.1. Поля движущегося заряда

Предположим, что известна функция $x'_\alpha(t')$, определяющая движение заряда e . Вычислим полное электрическое и магнитное поля этого заряда. Очевидно, что скорость и ускорение заряда в момент излучения электромагнитного сигнала равны

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{\partial x'_\alpha}{\partial t'}, \\ \dot{u}_\alpha &= \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial t'^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

или в векторном виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt'} &= \mathbf{u}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2} &= \dot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Потенциалы Лиенара — Вихерта, как обычно, определяются формулами

$$\varphi(x_\alpha, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s}, \quad (18.6)$$

$$\mathbf{A}(x_\alpha, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{u}}{s}, \quad (18.7)$$

где $s = r - (\mathbf{ur})/c$. Величина s представляет собой функцию как координат точки поля, так и координат источника, взятых в соответствующий момент времени. Эти координаты связаны между собой условием запаздывания

$$r(x_\alpha, x'_\alpha) = [\sum (x_\alpha - x'_\alpha)^2]^{1/2} = c(t - t'). \quad (19.3)$$

При вычислении полей \mathbf{E} и \mathbf{B} из потенциалов (18.6) и (18.7) посредством соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

следует помнить, что компоненты векторного оператора — частные производные — вычисляются при постоянном t , а не t' . При частном дифференцировании по x_α сравниваются потенциалы в соседних точках в одно и то же время, однако зарядом эти потенциалы создаются в разные моменты времени. Аналогично при частном дифференцировании по t переменные x_α предполагаются постоянными, т. е. рассматривается изменение потенциалов в данной точке за некоторый интервал времени, в течение которого координаты источника будут изменяться. Так как по условиям задачи известна зависимость лишь от t' , то для определения полей необходимо операторы $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_\alpha}$ и $\nabla \Big|_t$ выразить через оператор $\frac{\partial}{\partial t'} \Big|_{x'_\alpha}$. Без такого преобразования обойтись невозможно, ибо при произвольном движении заряда потенциалы нельзя выразить только через «настоящие координаты» этого заряда, как это было возможно при равномерном движении заряда.

Для отыскания этих выражений заметим, что так как x'_α предполагается заданной функцией t' , равенство (19.3) дает следующее функциональное соотношение между x_α , t и t' :

$$r[x_\alpha, x'_\alpha(t')] = f(x_\alpha, t') = c(t - t'). \quad (19.4)$$

Для того чтобы связать производные $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial t'}$, нужно x_α считать фиксированной в этом соотношении, а также воспользоваться равенством

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t'}\right)_{x_\alpha} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r}. \quad (19.5)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r} \frac{dt'}{dt} \quad (19.6)$$

или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc}} = \frac{r}{s}. \quad (19.7)$$

В результате получается требуемое соотношение между производными

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (19.8)$$

Аналогично для векторного оператора ∇ получается соотношение

$$\nabla r = -c \nabla t' = \nabla_1 r + \frac{\partial r}{\partial t'} \nabla t' = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r} \nabla t', \quad (19.9)$$

где символом ∇_1 обозначено дифференцирование по первому аргументу функции f в соотношении (19.4), т. е. при постоянном времени t' . Из соотношения (19.9) следует

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{r}}{sc} \quad (19.10)$$

и в общем случае

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{\mathbf{r}}{sc} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (19.11)$$

Соотношения (19.8) и (19.11) представляют собой искомые преобразования дифференциальных операторов от координат точки поля к координатам источника.

Таким образом, вычисление электрического поля из потенциалов Лиенара — Вихерта сводится к следующему:

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} E = \frac{1}{s^2} \nabla s - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{u}}{sc^2} = \frac{1}{s^2} \nabla_1 s - \frac{\mathbf{r}}{cs^3} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{\mathbf{r}}{s^2 c^2} \dot{\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{u}}{c^2 s^3} \frac{\partial s}{\partial t'}. \quad (19.12)$$

Воспользуемся соотношением $\nabla_1 s = \mathbf{r}/r - \mathbf{u}/c$, а также равенством (19.5) и затем приведем подобные члены. Нетрудно заметить, что два члена, содержащие $\dot{\mathbf{u}}$, в сумме дают тройное векторное произведение, так что

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} E = \frac{1}{s^3} \left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2 s^3} \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{u}} \right] \right\}. \quad (19.13)$$

Аналогично для магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{e} \mathbf{B} &= \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{s} = -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}}{cs^2} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{s^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}}{cs^2} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{s^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{s^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{1}{cs^3} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{u}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Сравнивая это соотношение с (19.3), находим

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}}{rc}. \quad (19.15)$$

Таким образом, магнитное поле всегда перпендикулярно к \mathbf{E} и радиус-вектору \mathbf{r} , проведенному из точки, соответствующей излучению сигнала.

Электрическое поле распадается на две части. Первый член в соотношении (19.13) при больших расстояниях изменяется пропорционально $1/r^3$. Поле, описываемое им, аналогично «конвективному» полю равномерно движущегося заряда. Вектор $\mathbf{r}_u = \mathbf{r} - r\mathbf{u}/c$ можно было бы назвать «виртуальным радиусом-вектором положения заряда

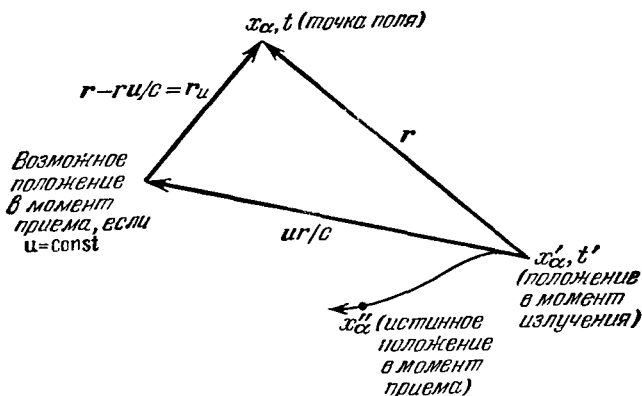


Рис. 19.1. К вычислению поля произвольно движущегося заряда.

в данный момент», причем положением заряда в данный момент считается то положение, которое он занимал бы, если бы из точки x'_u двигался с постоянной скоростью (рис. 19.1). Если вектор \mathbf{r}_u подставить в первый член соотношения (19.3), то он примет

следующий вид:

$$E_{\text{индукт}} = \frac{er_u}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \quad (19.16)$$

В таком виде он буквально совпадает с выражением (18.14) для поля равномерно движущегося заряда. Это поле аналогично квазистатическому полю или полю индукции, рассмотренному нами в главе 13, в связи с излучением системы токов и зарядов. Оно не является полем излучения в том смысле, что вклад его в поток энергии через бесконечно удаленную поверхность равен нулю. Однако суммарные потери энергии электрона могут определяться и этим членом. Если заряд движется с ускорением, то поле не будет ни статическим, ни конвективным. Энергия поля в целом будет изменяться, и эти изменения должны быть компенсированы. Эти потери энергии создадут силу реакции на тот объект, который вызывает движение электрона. В следующей главе мы более подробно изучим это явление.

Второй член в соотношении (19.13)

$$E_{\text{излуч}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2} \mathbf{r} \times (\mathbf{r}_u \times \dot{\mathbf{u}}) \quad (19.17)$$

описывает поле излучения, так как он порядка $1/r$ и, следовательно, дает конечный вклад в поток энергии через сферу очень большого радиуса. Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении двух членов соотношения (19.14). Рассмотрим некоторые важные частные случаи излучения.

§ 19.2. Излучение при малой скорости

Если скорость столь мала, что отношением u/c можно пренебречь по сравнению с единицей, то $r_u \approx r$ и $s \approx r$. В этом случае

$$E_{\text{излуч}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}), \quad (19.18a)$$

$$\mathbf{B}_{\text{излуч}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}. \quad (19.18б)$$

Эти выражения совпадают с выражениями для поля излучения электрического диполя с моментом, равным $\dot{\mathbf{u}}e/\omega^2$. Следовательно, угловое распределение излучаемой энергии, как и в § 13.6, описывается функцией $\sin^2\theta$ (рис. 19.2).

Для того чтобы вычислить мощность, излучаемую движущимся зарядом, нужно вектор Пойнтинга, определяемый соотношениями (19.18),

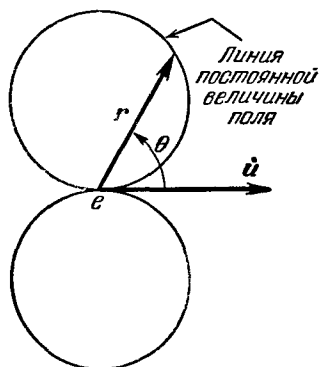


Рис. 19.2. Угловое распределение поля излучения при малых скоростях электрона.

Картина симметрична относительно полярной оси.

проинтегрировать по сфере. В результате получается соотношение ¹⁾

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{e^2 \dot{u}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (19.19)$$

§ 19.3. Излучение в случае, когда ускорение \dot{u} параллельно скорости u

Если \dot{u} и u параллельны, то независимо от величины u поле излучения определяется выражениями

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}), \quad (19.20a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}. \quad (19.20b)$$

От выражений (19.18), соответствующих медленно движущемуся электрону (дипольному случаю), выражения (19.20) отличаются лишь множителем $\frac{r^3}{s^3} = \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)^{-3}$. Качественно влияние этого

множителя сводится к увеличению мощности, излучаемой вперед (рис. 19.3).

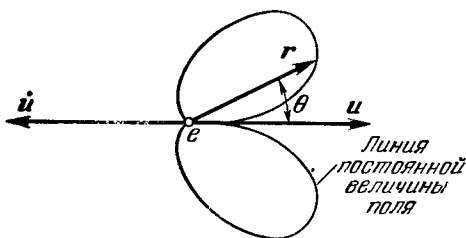


Рис. 19.3. Картина поля излучения при торможении электрона.

Скорость u сравнима с c .

Для количественного расчета углового распределения излучаемой энергии следует еще раз внимательно разобраться, что означают слова «мощность излучения» заряда. Очевидно, мощность излучения определяется энергией, теряемой электроном за время dt' в процессе

излучения, т. е. скоростью, с которой электрон теряет энергию. Вектор Пойнтинга \mathbf{N} определяет поток энергии за единицу времени t в данной точке поля. Следовательно, мощность, излучаемая

¹⁾ В гауссовой системе единиц (см. Приложение 1)

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{2e^2 \dot{u}^2}{3c^3}.$$

Все выражения для мощности излучения в этой и последующих главах написаны в таком виде, что для перехода к гауссовой системе единиц нужно сделать подстановку $\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)_{\text{MKS}} = (e^2)_{\text{гауссова}}$.

электроном в данный телесный угол $d\Omega$, равна

$$-\frac{dW(\theta)}{dt'} d\Omega = |N| \frac{\partial t}{\partial t'} r^2 d\Omega = |E \times H| \frac{\partial t}{\partial t'} r^2 d\Omega = \\ = \epsilon_0 c E^2 r^2 \frac{\partial t}{\partial t'} d\Omega = \epsilon_0 c E^2 \frac{s}{r} r^2 d\Omega. \quad (19.21)$$

где для производной $\frac{\partial t}{\partial t'}$ мы воспользовались выражением (19.7).

Таким образом, мощность, излучаемая электроном в данном направлении, определяется соотношением

$$-\frac{dW(\theta)}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^2}{c^3} \left(\frac{e}{16\pi^2 \epsilon_0} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right)^5}. \quad (19.22)$$

Физический смысл поправки s/r заключается в следующем: поле, излученное электроном за время dt' , расположено между двумя сферами — одной радиусом r с центром в точке $(x'_a)_2$ и другой — радиусом $r + c dt'$ с центром в точке $(x'_a)_1$. Расстояние между точками

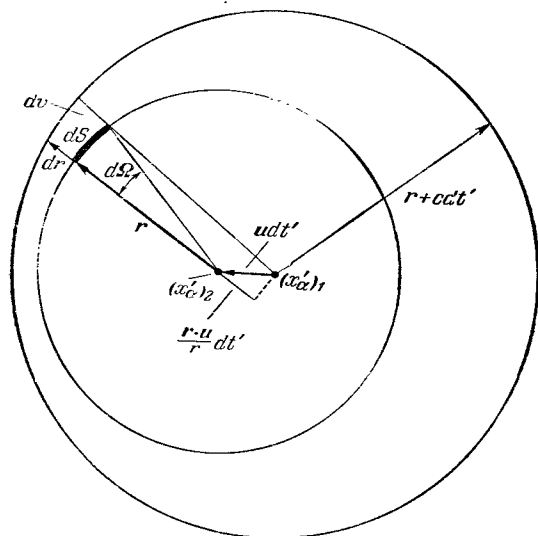


Рис. 19.4 Распределение энергии, излученной электроном при движении от $(x'_a)_1$ к $(x'_a)_2$.

$(x'_a)_1$ и $(x'_a)_2$ равно $-u dt'$, как показано на рис. 19.4. Рассмотрим элемент объема dv , заключенный в телесном углу $d\Omega = dS/r^2$ с вершиной в точке $(x'_a)_2$. Так как

$$dr = c dt' - \frac{(r \cdot u)}{r} dt',$$

то

$$d\sigma = dS dr = dS \left(c - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) dt' = \frac{cs}{r} dS dt'. \quad (19.23)$$

Следовательно, энергия, содержащаяся в этом элементе объема, равна

$$dW d\Omega = \frac{\epsilon_0 E^2 + \nu_0 H^2}{2} \frac{cs}{r} dS dt' = \epsilon_0 E^2 \frac{cs}{r} dS dt'. \quad (19.24)$$

Это соотношение тождественно соотношению (19.21).

Основное применение соотношений (19.20) и (19.21) состоит в вычислении излучения электрона при торможении, причем в данном приближении направление движения считается неизменным. Это излучение называется тормозным излучением (*Bremsstrahlung*). При точных расчетах, в рамках классической теории, в эти соотношения нужно подставить точную зависимость ускорения от времени, учтя при этом тормозную способность вещества, с которым взаимодействует электрон.

Для упрощенного рассмотрения предположим, что ускорение \ddot{u} постоянно, в то время как скорость уменьшается от u_0 до 0. Энергия, излучаемая при этом, равна

$$\left. \begin{aligned} dW &= - \frac{e^2 \sin^2 \theta \ddot{u}}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \int_{u_0}^0 \frac{\dot{u} dt}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)^5} d\Omega, \\ -dW &= \frac{e^2 \sin^2 \theta \ddot{u}}{64\pi^2 \epsilon_0 c^2 \cos \theta} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_0}{c} \cos \theta\right)^4} - 1 \right] d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (19.25)$$

Таким образом, и угловое распределение полного импульса излучения также вытянуто вперед в направлении движения. Излучение поляризовано, причем электрический вектор лежит в плоскости, определяемой радиусом-вектором и направлением движения. С помощью формулы (19.25) можно оценить эффективность рентгеновской трубки. Рассеяние электронов веществом мишени существенно изменит угловое распределение и поляризацию излучения этих трубок.

Если поле излучения разложить в интеграл Фурье, то получим частотный спектр излучения. Для простоты предположим, что изменение скорости на величину Δu происходит за очень малый промежуток времени $\Delta t'$, а также, что скорость $u \ll c$. Поле излучения, происходящего за очень короткий промежуток времени в момент t , можно выразить следующим образом:

$$E(t) = \frac{e \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{\Delta u}{\Delta t'} = \frac{e \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \Delta u \delta(t - t_0). \quad (19.26)$$

Ускорение \mathbf{u} в этом выражении описывается δ -функцией

$$\dot{\mathbf{u}} = \delta(t - t_0) \Delta \mathbf{u},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{u}} dt = \Delta \mathbf{u}.$$

Если поле разложить в интеграл Фурье

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega,$$

то для амплитуды E_{ω} получается следующее выражение:

$$E_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{e \sin \theta \Delta u}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2 r} e^{i\omega t_0}, \quad (19.27)$$

которое, если не считать фазы, не зависит от частоты ω . Полную энергию, теряемую электроном при излучении, можно оценить, если вычислить интеграл от вектора Пойнтинга по поверхности некоторой сферы, а также по времени, в течение которого происходит излучение. В случае, когда $u \ll c$, получаем

$$-W = \int -\frac{dW}{dt'} dt' = \epsilon_0 c \int \int_{-\infty}^{\infty} E^2 dt dS. \quad (19.28)$$

Распределение по частоте энергии поля, фурье-компоненты которого равны E_{ω} , рассмотрено в § 13.3. Соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E_{\omega}|^2 d\omega \quad (19.29)$$

аналогично соотношению (13.36). Следовательно, энергия излучения, заключенная в интервале частот $d\omega$, равна

$$-W_{\omega} d\omega = 4\pi \epsilon_0 c \int_S |E_{\omega}|^2 dS d\omega. \quad (19.30)$$

Для спектра (19.27) эта энергия равна

$$-W_{\omega} d\omega = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{e^2}{3\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (19.31)$$

Это соотношение показывает, что энергетический спектр излучения также не зависит от частоты. Даже с классической точки зрения

бесконечная протяженность спектра в сторону больших ω является следствием предположения, что время столкновения равно нулю. Если провести анализ Фурье в случае конечного времени столкновения, то компоненты, соответствующие большим частотам, автоматически исчезнут. Фактически спектр будет обрезан в точке, где кинетическая энергия электрона становится равной энергии одного кванта излучения:

$$h\nu_{\max} = \frac{1}{2} mu^2. \quad (19.32)$$

Такой спектр с ограничением по частоте и длине волны показан на рис. 19.5. Если воспользоваться гипотезой Планка и ввести представление о квантах излучения, то соотношение (19.31) определяет

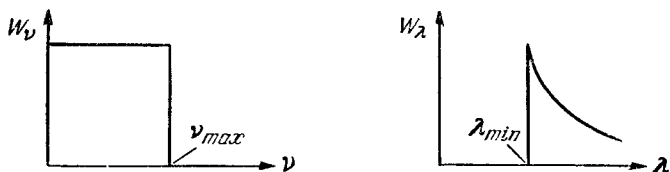


Рис. 19.5. Идеальный спектр тормозного излучения как функция частоты и длины волны.

число квантов данной частоты $dN = -W_\omega d\omega/h\omega$, «испущенных» при изменении скорости

$$dN_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{137} \cdot \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega}. \quad (19.33)$$

Это выражение показывает, что квантов нулевой энергии испускается бесконечное количество, хотя полная энергия конечна. Этот результат, носящий название «инфракрасной катастрофы», остается и при более точном исследовании.

§ 19.4. Излучение при ускорении, перпендикулярном скорости

С практической точки зрения интересно излучение при движении заряда по кругу радиуса a с угловой скоростью ω (рис. 19.6). Пусть $u = a\omega$, $\dot{u} = a\omega^2$, $r_u = r - ur/c$, $ur = u \cdot r \cos \theta$, $\dot{u}r = \dot{u}r \sin \theta \cos \varphi$, где φ - азимутальный угол. Тогда

$$[r \times (r_u \times \dot{u})]^2 = \dot{u}^2 r^4 \left[\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right].$$

и следовательно,

$$-\frac{dW(\theta, \varphi)}{dt'} d\Omega = \frac{e^2 \dot{u}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)^5} d\Omega. \quad (19.34)$$

Получающаяся в результате этих вычислений диаграмма направленности излучения обращается в нуль в плоскости орбиты при $\theta = \cos^{-1}(u/c)$. При больших скоростях излучение, направленное вперед, во много раз больше, чем в других направлениях (рис. 19.7). По мере приближения u к c излучение вытягивается вперед узким лучом.

Полная мощность излучения заряда e в данном случае определяется соотношением

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{e^2 \dot{u}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^2} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(\frac{W}{W_0}\right)^4 \dot{u}, \quad (19.35)$$

где $W_0 = m_0 c^2$ и $W = W_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ — полная энергия частицы. Исследования, аналогичные проведенному в этом параграфе, имеют

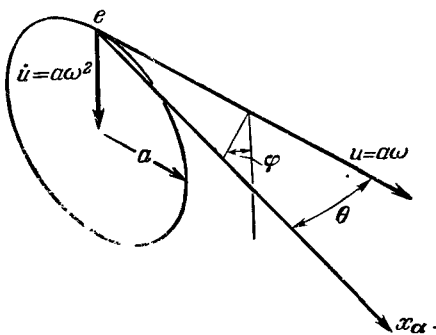


Рис. 19.6. Ускорение заряда перпендикулярно скорости.

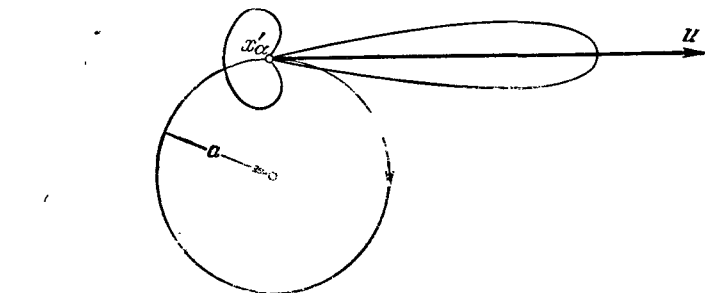


Рис. 19.7. Картина поля излучения в плоскости движения, изображенного на рис. 19.6, в случае, когда скорость u сравнима с c .

Картина несимметрична относительно полярной осн.

большое значение для теории бетатрона и синхротрона. В бетатроне, например, электроны ускоряются до очень больших энергий при движении по кругу постоянного радиуса. В задачах будут рассмотрены некоторые численные примеры относительно энергии, необходимой для компенсации потерь на излучение при ускорении частиц.

§ 19.5. Излучение при произвольных ускорении и скорости

В общем случае поле излучения определяется соотношением (19.17). Для вычисления мощности излучения в данном направлении нужно провести выкладки, подобные тем, которые делались при выводе формулы (19.21); в результате получим

$$-\frac{dW}{dt'} d\Omega = \frac{e^2 r}{16\pi^2 \epsilon_0 S^5 c^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_u \times \dot{\mathbf{u}})]^2 d\Omega. \quad (19.36)$$

Поле излучения обращается в нуль, когда вектор $\mathbf{r}_u = \mathbf{r} - \mathbf{ur}/c$ параллелен $\dot{\mathbf{u}}$. Таким образом, и в общем случае имеются две линии, вдоль которых излучение равно нулю. Положение этих линий можно определить графически, как показано на рис. 19.8. Для этого вокруг точки O , где расположен заряд, опишем окружность радиуса r ; затем построим вектор $OQ = \mathbf{ur}/c$. Проведя через точку Q прямую, параллельную $\dot{\mathbf{u}}$, найдем ее пересечения с окружностью. Эти точки, A и B , определяют два значения вектора \mathbf{r}_u , для которых поле обращается в нуль. Линии, вдоль которых излучение равно нулю, определяются направлениями OA и OB , которые всегда лежат в плоскости векторов \mathbf{u} и $\dot{\mathbf{u}}$.

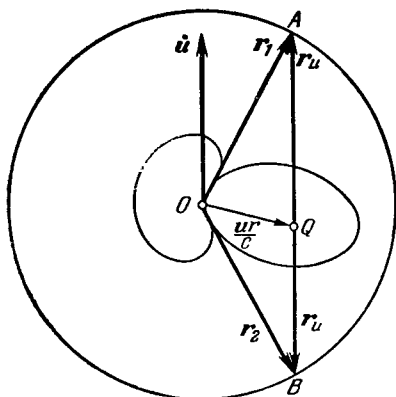


Рис. 19.8. Графическое определение направлений, вдоль которых отсутствует излучение.

Интегрирование соотношения (19.36) по телесному углу несложно, но несколько громоздко. По-видимому, простейший способ состоит в том, чтобы направление \mathbf{u} выбрать в качестве полярной оси и сначала провести интегрирование по азимутальному углу. В конечном счете полная мощность излучения оказывается равной

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{e}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{u}^2 - \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2}}{(1 - u^2/c^2)^3}. \quad (19.37)$$

Нетрудно показать, что мощности излучения, выведенные в предыдущих параграфах для специальных случаев, являются частными случаями (19.36). В одной из задач будет показано, что посредством преобразования Лоренца соотношение (19.37) можно вывести из соотношения (19.19).

§ 19.6. Сечение тормозного излучения в кулоновском поле

В случае электронов малой энергии выход «мягкого» рентгеновского излучения приближенно определяется соотношением (19.25), если пользоваться экспериментальным значением \dot{i} . В этом случае столкновения первичных электронов с ядрами редки; в основном потери энергии и импульса определяются столкновениями с электронами. Однако при столкновении двух частиц с равными e/m не возникает ни электрического, ни магнитного дипольного излучения, так как смещение и вращение центра зарядов противоречат законам сохранения импульса и момента импульса (см., например, задачу 4 в конце главы). Следовательно, в области малых энергий, где основную роль играют электрон-электронные взаимодействия, излучение при торможении падающих частиц определяется коллективным взаимодействием электронов. При больших энергиях и особенно для тяжелых мишеней выход рентгеновского излучения, по-видимому, обусловлен отклонением электронов в кулоновском поле ядра. При столкновении электрона с ядром дипольное излучение возможно, и поэтому роль этих столкновений будет доминирующей. Мы проделаем простой нерелятивистский расчет, учитывающий только поперечное ускорение, который передает, однако, существенные физические черты этого процесса.

Рассмотрим электрон, пролетающий со скоростью u мимо ядра с зарядом Ze на расстоянии b от него. Сила, действующая на заряд, как функция времени определяется соотношением

$$F = m\dot{i} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(b^2 + u^2t^2)}, \quad (19.38)$$

если наибольшее сближение происходит в момент $t = 0$. Следовательно, поперечная компонента ускорения, если последнее невелико, равна

$$\dot{i} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{b}{(b^2 + u^2t^2)^{3/2}}. \quad (19.39)$$

Для вычисления энергии излучения и ее спектрального распределения нужно \dot{i} разложить в интеграл Фурье

$$\dot{i}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{i}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{2Ze^2b}{4\pi\epsilon_0 m} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t dt}{(b^2 + u^2t^2)^{3/2}}. \quad (19.40)$$

Известно, однако, что функцию Бесселя $K_1(\omega b/v)$ можно представить в виде интеграла

$$K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right) = \frac{b}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t dt}{\left[\left(\frac{b}{u}\right)^2 + t^2\right]^{3/2}}, \quad (19.41)$$

и таким образом,

$$\dot{u}_\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{2\omega}{u^2} K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right). \quad (19.42)$$

При $\omega b/u < 1$ функция $K_1(\omega b/u)$ подчиняется приближенному соотношению $K_1(\omega b/u) \approx u/\omega b$, а при больших значениях аргумента она экспоненциально уменьшается. Следовательно, можно положить

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_\omega &= \frac{1}{\pi} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{1}{ub}, & \omega < u/b, \\ \dot{u}_\omega &= 0, & \omega > u/b. \end{aligned} \right\} \quad (19.43)$$

Тогда согласно соотношению (19.30) энергия, обусловленная ускорением \dot{u}_ω и излучаемая в телесный угол $d\Omega$, равна

$$-W_\omega d\omega d\Omega = \frac{Z^2 e^2 r_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi^2} \frac{c}{u^2 b^2} \sin^2 \theta d\omega d\omega, \quad (19.44)$$

где $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ — классический радиус электрона. Полная мощность излучения в интервале частот $d\omega$ равна

$$-W_\omega d\omega = \frac{2Z^2 e^2 r_0^2}{3\pi^2 \epsilon_0} \frac{c}{u^2 b^2} d\omega. \quad (19.45)$$

Если учесть возможные расстояния b , то соотношение (19.45) определит сечение излучения кванта энергии $\hbar\omega$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{W_\omega d\omega}{\hbar\omega} 2\pi b db = \frac{4Z^2 r_0^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{c^2}{u^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \frac{d\omega}{\omega} = \\ &= \frac{16\alpha}{3} \frac{Z^2 r_0^2}{u^2/c^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \frac{d\omega}{\omega} \end{aligned} \quad (19.46)$$

При этом следует помнить, что $\omega < u/b_{\min}$. Максимальное значение b_{\max} определяется тем расстоянием, на котором кулоновское поле перестает быть эффективным из-за «экранирующего» действия атомных электронов. Наличие предела b_{\min} эквивалентно обрезанию спектра, когда $\hbar\omega$ больше кинетической энергии электронов. Соотношение (19.46) приближенное, однако зависимость от Z , r_0 и $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$ остается такой же и при квантовомеханическом расчете.

§ 19.7. Эффект Черенкова

В гл. 18, а также в § 19.1 мы видели, что заряд, равномерно движущийся в вакууме, не излучает. Вектор Пойнтинга, обусловленный полем индукции (19.16) и соответствующим магнитным полем (19.15), при увеличении r уменьшается слишком быстро, чтобы дать

конечный вклад в поверхностный интеграл при больших расстояниях. Однако при наличии диэлектрической среды с $\epsilon > \epsilon_0$, $k > 1$ положение может измениться. Рассмотрим поле заряда, движущегося в непроводящей среде, причем для простоты предположим, что $\rho = \rho_0$. Неоднородное волновое уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\square A = \nabla^2 A - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = - \rho_0 \mathbf{j}. \quad (13.7)$$

Решения этого уравнения такие же, как и в случае вакуума, за исключением того, что вместо c стоит c/n , где $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{k}$ — показатель преломления среды. Следовательно, связь между временем излучения и временем приема этого излучения определяется соотношением $t' = t - rn/c$. Скорость частицы u ограничена скоростью света в вакууме c ; таким образом, если частица со скоростью, близкой к скорости света, входит в диэлектрик, то ее скорость может оказаться больше скорости света в среде. При этом знаменатель в соответствующем выражении для потенциала может обратиться в нуль, а амплитуда поля в направлении, определяемом равенством $1 - un/c \cos \theta = 0$, возрастает до бесконечности. Таким образом, на конусе с осью вдоль направления движения и углом при вершине $\theta = \arccos(c/nu)$ можно ожидать излучение. Черенков впервые изучил такое излучение в 1934 г.¹⁾ Интересно, что при $u > c/n$ преобразование уравнения (13.7) к соответствующему статическому случаю, рассмотренное в § 18.2, невозможно.

Для количественных оценок излучения Черенкова удобно воспользоваться разложением Фурье, полученным в гл. 13. Плотность тока \mathbf{j} , соответствующая заряду e , движущемуся со скоростью u , имеет вид

$$\mathbf{j} = eu \delta(x' - ut) \delta(y') \delta(z'). \quad (19.47)$$

Согласно этому соотношению заряд расположен в точке (x', y', z') и $\int \mathbf{j} dy' dz' dt = e \hat{x}$, где \hat{x} — единичный вектор в направлении движения. Для того чтобы воспользоваться соотношением (13.33), вычислим интеграл Фурье от \mathbf{j}

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{j} e^{i\omega t} dt = \frac{e}{2\pi} \delta(y') \delta(z') e^{i\omega x' / u} \hat{x}. \quad (19.48)$$

Следовательно, если x' , y' , z' считать компонентами ξ радиуса-вектора источника поля в соотношении (13.33), то фурье-компоненты

¹⁾ На особый характер этого излучения впервые обратил внимание С. И. Вавилов, в лаборатории которого работал П. А. Черенков, и поэтому справедливо называть это явление излучением Черенкова — Вавилова. (Прим. ред.)

магнитного поля оказываются равными

$$H_{\omega} = -\frac{i}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{ek \sin \theta}{2\pi} \int e^{i\left(\frac{\omega x'}{u} - kx' \cos \theta\right)} dx'. \quad (19.49)$$

В этом выражении интегрирование по y' и z' уже выполнено. Согласно соотношению (11.19) $k = \omega n / xc$, а θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{u} . Далее ход рассуждений такой же, как и при выводе соотношения (13.37), за исключением того, что теперь в уравнение входит показатель преломления n .

В волновой зоне амплитуды E и H связаны соотношением

$$|E| = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |H|,$$

и следовательно, мощность, излучаемая в данной полосе частот $d\omega$, равна

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{4\pi}{\epsilon_0 cn} \int |H_{\omega}|^2 R^2 d\Omega d\omega = \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0 cn} \frac{e^2 n^2 \omega^2}{4\pi^4 c^2} \int \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{\omega x'}{u} - kx' \cos \theta\right)} dx' \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega d\omega. \end{aligned} \quad (19.50)$$

Интеграл по x' равен δ -функции, $\delta\left(1 - \frac{nu \cos \theta}{c}\right)$. Тем самым еще раз показано, что в направлении $\theta = \arccos(c/nu)$ амплитуда поля бесконечно возрастает. Однако эта трудность легко устраняется, поскольку электрон не может пройти бесконечный путь, следовательно, интеграл следует вычислять от $-X$ до X :

$$\int_{-X}^X e^{i\omega\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)x'/u} dx' = \frac{2 \sin\left[\omega\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)\frac{X}{u}\right]}{\omega\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)/u}. \quad (19.51)$$

Таким образом,

$$\delta W = \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2 n \omega^2}{\epsilon_0 c^3} \int_{-1}^{+1} \sin^2 \theta \frac{\sin^2\left[\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)\frac{\omega X}{u}\right]}{\omega^2\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)^2/u^2} d(\cos \theta) d\omega. \quad (19.52)$$

Интеграл по углу также имеет некоторые черты δ -функции. При $\cos \theta = c/nu$ он имеет острый максимум. Если это значение θ подставить в медленно меняющуюся функцию $\sin^2 \theta$ и затем воспользоваться тем обстоятельством, что пределы не играют роли, пока

между ними заключен лишь один максимум, то интеграл (19.52) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{n^2 u^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \left[\left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right) \frac{\omega X}{u} \right]}{\omega^2 \left(1 - \frac{nu}{c} \cos \theta\right)^2 / u^2} d(\cos \theta) = \\ = \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \frac{cX}{\omega n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{cX\pi}{\omega n} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right), \end{aligned} \quad (19.53)$$

т. е. энергия, излучаемая в полосе частот $d\omega$, равна

$$\delta W = \frac{e^2 X}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \omega d\omega, \quad (19.54)$$

а на единицу длины —

$$\frac{\delta W}{\delta L} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \omega d\omega, \quad (19.55)$$

так как полная длина предполагалась равной $2X$. Будучи выраженным через число квантов $\hbar\omega$, соотношение (19.55) принимает следующий вид:

$$\frac{\delta N}{\delta L} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \frac{d\omega}{c} = \alpha \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \frac{d\omega}{c}. \quad (19.56)$$

Отсюда следует, что число излученных квантов зависит от частоты только через показатель преломления n . Так как скорость распространения электромагнитных волн при больших частотах приближается к своему значению в вакууме, то $n(\omega)$ станет меньше c/u и полное число квантов останется конечным.

Задачи

1. Соотношение (19.19) применимо лишь в собственной системе отсчета. Докажите, что если обе части этого соотношения подвергнуть преобразованию Лоренца, то получим соотношение (19.37).

2. В бетатроне электроны ускоряются до скоростей, сравнимых со скоростью света, при движении по кругу постоянного радиуса. Вычислите энергию, излучаемую электроном за один оборот при $u \sim c$.

3. Покажите, что основная часть излучения быстрых электронов сосредоточена в конусе с углом $\theta_0 = W_0/W$, где W — полная энергия электрона, а $W_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя.

4. Покажите, что угловое распределение всей энергии, излученной при прохождении одной частицы с зарядом e_1 и массой m_1 мимо другой с зарядом e_2 и массой m_2 с относительной скоростью $u \ll c$, подчиняется соотношению

$$-\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\text{const}}{b^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (4 - n_x^2 - 3n_y^2),$$

где n_x и n_y — компоненты единичного вектора n вдоль направления движения, а b — прицельный параметр, который считается постоянным при движении.

5. Рассмотрите заряд e , пролетающий мимо тяжелой заряженной частицы Ze на прицельном расстоянии b , считая его скорость произвольной. Предполагая угловое отклонение небольшим, вычислите импульс, полученный зарядом в поперечном направлении.

6. На основе решения задачи 5 вычислите средний квадрат угла рассеяния при прохождении заряда через слой вещества толщиной t , содержащего N_v зарядов Ze на единицу объема. Прицельный параметр считайте меняющимся от b_1 до b_2 .

7. Вычислите сечение излучения (на единичный интервал частот) при соударении электрона с идеально жесткой сферой радиуса a при $u \ll c$.

8. Оцените выход черенковского излучения для нейтрона с энергией 350 Мэв , движущегося в стекле с показателем преломления 1,9. При движении нейтрона возникает ток, обусловленный его дипольным моментом. Сравните это излучение с излучением протона с той же энергией и при тех же условиях.

Указание. Соотношение $j = \nabla \times M$ подставьте в равенство (19.48) и проинтегрируйте по частям.

ЛИТЕРАТУРА

Излучение движущихся зарядов рассмотрено практически во всех книгах по электродинамике. Лучшие из них — следующие три:

1. R. Becker, *Theorie der Elektrizität*. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II).

2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля.

3. A. Sommerfeld, *Electrodynamics*. (Русский перевод: А. Зоммерфельд, Электродинамика.)

4. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

Основное внимание уделено антенным устройствам, однако поля движущихся зарядов также рассмотрены.

5. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. (Русский перевод: В. Смайт, Электростатика и электродинамика.)

Излучение движущихся зарядов рассмотрено в гл. XIV вместе со специальной теорией относительности.

Эффект Черенкова рассмотрен в книге Шиффа (L. J. Schiff, *Quantum Mechanics*). Квантовая механика, а также в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Электродинамика сплошных сред.

* А. А. Соколов и Д. Д. Иваненко, Классическая теория поля

РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как было показано в гл. 10, закон сохранения импульса может быть согласован с электромагнитным взаимодействием в виде силы Лоренца

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (20.1)$$

только если предположить, что электромагнитное поле обладает импульсом с плотностью

$$\mathbf{g} = \frac{N}{c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}. \quad (20.2)$$

Кроме того, чтобы выполнялся закон сохранения энергии в системе вещество — излучение, необходимо предположить, что электромагнитное поле переносит энергию с плотностью

$$U_v = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}. \quad (20.3)$$

Применим теперь эти результаты к полю электрона.

§ 20.1. Электромагнитная масса

Если мы рассмотрим баланс энергии и импульса для поля электрона, то сейчас же придем к следующим качественным выводам:

1. При равномерном движении электрона его поле дает вклад в импульс, так как при небольших виртуальных изменениях скорости изменяется как импульс частицы, так и импульс поля.

2. Если ускорение излучающего электрона обусловлено действием внешней силы, то энергия и импульс изменяющихся полей также определяются этой силой. Это справедливо только, если имеется сила, действующая на электрон со стороны поля излучения. Эта сила называется реакцией излучения.

Рассмотрим эти выводы количественно. Пусть электрон движется равномерно со скоростью $u \ll c$. Если скорость изменилась на δu , то магнитное поле изменится на

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \delta \mathbf{u}}{r^3}. \quad (20.4)$$

Вычислим магнитный поток, пересекающий узкую полоску, простирающуюся от электрона до бесконечности, как показано на рис. 20.1. Изменение потока в соответствии с формулой (20.4) создает электродвижущую силу на границах полоски. Если ось z направить

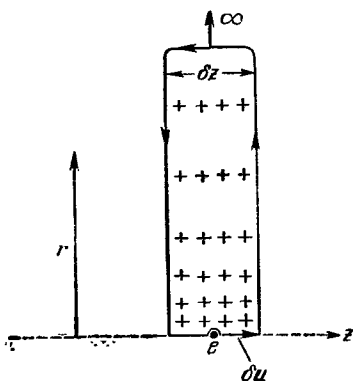


Рис. 20.1. Путь интегрирования при качественной оценке реакции излучения, если скорость электрона невелика.

протяженностью с радиусом r_0 , то максимальную реакцию оказывало бы магнитное поле на расстоянии r_0 от центра электрона; в центре реакция спадала бы до нуля. При этом согласно соотношению (20.5) ускоряющая сила, приводящая к изменению скорости на δu , связана с ускорением через эффективную «массу» порядка

$$m \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 c^2}; \quad (20.6)$$

или в гауссовых единицах $m = e^2/r_0 c^2$.

Это соотношение получено из рассмотрения реакции, оказываемой полем на ускоряющую силу. Согласно результатам гл. 10 мы получим полный импульс, если проинтегрируем по всему пространству $\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$. Если предполагать заряд точечным, то интеграл расходится. Поэтому нужно ввести нижний предел интегрирования — конечный радиус электрона r_0 . При малых скоростях интегрирование легко выполнимо, если воспользоваться квазистатическими полями, для которых

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E}. \quad (20.7)$$

При симметричном распределении заряда импульс

$$\mathbf{G} = \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E})}{c^2} d\tau = \epsilon_0 \int \frac{\mathbf{u} E^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}}{c^2} d\tau \quad (20.8)$$

вдоль $\delta \mathbf{u}$, то уравнение $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ можно привести к виду

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Следовательно, импульс полученный зарядом при изменении скорости на $\delta \mathbf{u}$, примерно равен

$$\delta g = e E_z \delta t = e \int_{\infty}^{r_0} \delta B dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\delta u}{r_0}, \quad (20.5)$$

где r_0 — «радиус электрона». Из этого выражения видно, что импульс был бы равен бесконечности, если бы электрон был точечным зарядом. С другой стороны, если бы электрон имел конечную

также обладает осевой симметрией относительно направления скорости; следовательно, вектор \mathbf{G} направлен вдоль скорости \mathbf{u} . Это направление выберем в качестве оси x . Второй член подынтегрального выражения равен $\mathbf{u}E_x^2$. При малых скоростях электрическое поле \mathbf{E} сферически симметрично, следовательно,

$$\mathbf{G} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 (E_y^2 + E_z^2) \mathbf{u} dv}{c^2} = \frac{2\mathbf{u}}{3} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2 dv}{c^2} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \mathbf{u}, \quad (20.9)$$

где

$$U_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv \quad (20.10)$$

— энергия электростатического поля заряда e . Например, если заряд считать однородно распределенным по сферической поверхности радиуса r_0 , то

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 e^2 4\pi r^2 dr}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \quad (20.11)$$

и соотношение (20.9) качественно согласуется с величиной электромагнитной массы, определяемой формулой (20.6).

При больших скоростях для расчета \mathbf{G} необходимо пользоваться полями, вычисленными в гл. 18 с $s \neq r$. Получающееся соотношение между импульсом и скоростью зависит от характера изменения формы электрона при движении. Если предположить, что он испытывает лоренцевское сокращение вдоль движения (такое предположение было выдвинуто Лоренцем и позднее подтверждено релятивистскими соображениями), то интегрирование относительно просто и импульс оказывается равным

$$\mathbf{G} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (20.12)$$

где U_0 определяется соотношением (20.10).

Если не считать множителя $4/3$, это выражение согласуется с правильными релятивистскими соотношениями между массой, энергией и импульсом

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= m\mathbf{u}, \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ U_0 &= m_0 c^2. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Однако множитель $4/3$ является важным; он показывает, что чисто «электромагнитная масса» не есть истинная масса, хотя ее отношение к полной энергии поля не зависит от r_0 , а следовательно, и от

сделанных приближений в отношении поля. Для того чтобы получалась наблюдаемая на опыте величина, подчиняющаяся релятивистски правильным соотношениям (20.13), необходима дополнительная масса — $U_0/3c^2$, неэлектромагнитного происхождения. Можно предполагать, что эта дополнительная масса (или энергия) определяется той неэлектромагнитной связью, которая обуславливает устойчивость системы зарядов электрона.

§ 20.2. Реакция излучения, определяемая законом сохранения энергии

Как мы видели, масса обусловленная импульсом поля, оказывает реактивное действие на объект, стремящийся изменить скорость электрона при установившемся движении. Вычислим теперь силу реакции, если ускоренный электрон излучает энергию со скоростью

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{e^2 \dot{u}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (19.19)$$

Никаких существенных ограничений это соотношение не имеет, так как соответствующим преобразованием Лоренца оно может быть обобщено на все возможные скорости. Для того чтобы энергия сохранялась, должна существовать сила реакции, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{u}^2}{c^3} = 0. \quad (20.14)$$

Очевидно, это уравнение не имеет такого решения относительно \mathbf{F} , которое было бы верно в любой заданный момент времени, так как \mathbf{u} и $\dot{\mathbf{u}}$ не связаны между собой. Мы должны удовлетвориться решением, верным в среднем за значительный период времени. Это означает, что баланс энергии между полем излучения и силой реакции осуществляется в среднем. Значительные отклонения от него могут происходить за счет энергии, запасенной в поле индукции. При этих условиях уравнение (20.14) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{u}^2 dt = 0. \quad (20.15)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F} - \frac{e^2 \dot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) \cdot \mathbf{u} dt + \left[\frac{e^2 \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (20.16)$$

Проинтегрированная часть описывает как раз те отклонения от закона сохранения энергии, о которых говорилось выше; при периодическом движении или при ускорении в течение ограниченного промежутка времени этот член не повлияет на суммарный баланс энергии. В среднем энергия будет сохраняться, если реакцию излучения положить равной

$$F_{\text{изл}} = \frac{e^2 \ddot{u}}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (20.17)$$

Это — дополнительная сила реакции, помимо той, которая следует из сохранения импульса. Полная сила реакции на электрон равна

$$F = \frac{e^2 \ddot{u}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m_{\text{эл. маг}} \dot{u}, \quad (20.18)$$

где $m_{\text{эл. маг}}$ — электромагнитная масса электрона

$$m_{\text{эл. маг}} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \quad (20.19)$$

§ 20.3. Расчет реакции излучения через поле частицы

Весьма полезно получить выражение (20.18) посредством прямого вычисления взаимодействия одной части электрона с полем излучения другой его части. Этот расчет, предложенный Лоренцем, хорошо выявляет ограниченный характер теории.

Для расчета воспользуемся следующими предположениями:

1. При рассмотрении воздействия, которое оказывают на элемент de электрона другие его элементы de' , систему отсчета выберем так, чтобы элемент de в ней покоился:

$$u(t)_{de} = 0.$$

2. Изменения величин u , \dot{u} , \ddot{u} и т. д. не слишком велики за время распространения электромагнитного сигнала по электрону. Это равносильно условиям $u \ll c$, $\dot{u} \ll c^2/r_0$, $\ddot{u} \ll \dot{u}c/r_0$ и т. д. Решение в этом случае можно представить в виде ряда по степеням времени

$$\tau_0 = r_0/c = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^3, \text{ умноженного на оператор } \frac{\partial}{\partial t}.$$

3. Поля будем вычислять из потенциалов Лиенара — Вихерта, хотя их применимость сомнительна при расстояниях порядка r_0 . Физическое значение мы будем придавать только тем членам, которые не зависят явно от r_0 .

4. Распределение зарядов электрона будем считать сферически симметричным.

Рассмотрим действие, которое элемент de с координатами x_a испытывает со стороны элемента de' с координатами x'_a (рис. 20.2). Согласно формуле (19.3) электрическое поле*, создаваемое зарядом de' в точке x , равно

$$4\pi\epsilon_0 dE(t) = \frac{de'}{s^3} \left\{ \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}(t')\mathbf{r}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{u}}(t') \right] + \left[1 - \left(\frac{u(t')}{c} \right)^2 \right] \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}(t')\mathbf{r}}{c} \right) \right\}. \quad (20.20)$$

Так как поля зависят от условий в электроде в момент t' , задача была бы неразрешима без знания всей предыдущей истории электрона при произвольном движении. Однако если воспользоваться ограничениями пункта 2, то задача окажется разрешимой. В этом случае все скорости и ускорения можно отнести к моменту прибытия сигнала в точку x_a . Этот момент, конечно, одинаков для всех элементов de' . Только таким образом можно провести интегрирование по всему электроду. Переход от t' к t осуществляется посредством разложения функций $t' = t - r/c$ в ряд по степеням r/c . При этом следует помнить, что согласно пункту 1

$$\dot{\mathbf{u}}(t') = \dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \dots, \quad (20.21)$$

$$\mathbf{u}(t') = -\frac{\dot{\mathbf{u}}(t)\mathbf{r}}{c} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}(t)\mathbf{r}^2}{2c^2} - \dots, \quad (20.22)$$

$$s^{-3} = r^{-3} \left[1 - \frac{3\dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{r}}{c^2} + \frac{3r}{2} \left(\frac{\ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{r}}{c^3} \right) \dots \right]. \quad (20.23)$$

Рис. 20.2. К вычислению взаимодействия между частями одного и того же электрона.

В дальнейшем будем оставлять лишь члены порядка $(r/c)^3$. Тогда величиной $[u(t')/c]^2$ можно пренебречь и выражение (20.20) существенно упрощается

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 dE &= de' \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}})}{r^3 c^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}}{rc^2} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{u}})}{r^2 c^3} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{c^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3r(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})}{r^3 c^2} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}}{r^2 c^3} (\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}) + \frac{\dot{\mathbf{u}}}{rc^2} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{2c^3} \right] = \\ &= de' \left[-\frac{2r(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})}{r^3 c^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})}{r^2 c^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{2c^3} \right]. \quad (20.24) \end{aligned}$$

Для того чтобы легче было воспользоваться предположением о сферической симметрии электрона, запишем это выражение в тензорном

форме

$$dE_\alpha = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2r_\alpha (\dot{u}'_\beta r'_\beta)}{r^3 c^2} + \frac{1}{2} \frac{r_\alpha (\ddot{u}'_\beta r'_\beta)}{r^2 c^3} + \frac{r_\alpha}{r^3} + \frac{\dot{u}'_\alpha}{2c^3} \right]. \quad (20.25)$$

Среднее значение r_α в сферически симметричной области равно нулю, а среднее значение $r_\alpha r'_\beta = \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}$. Следовательно, третий член в выражении (20.25) не дает никакого вклада в конечный интеграл, и мы, таким образом, получаем

$$\overline{dE_\alpha} = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{3} \frac{\dot{u}'_\alpha}{c^2 r} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{u}'_\alpha}{c^3} \right). \quad (20.26)$$

Интегрируя далее по de' и de , получим полную силу реакции

$$\mathbf{F} = \int \int de dE = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m_{\text{эл. маг}} \dot{\mathbf{u}}, \quad (20.27)$$

где

$$m_{\text{эл. маг}} = \frac{4}{3c^2} \int \int \frac{de de'}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{4}{3c^2} U_0, \quad (20.28)$$

причем, как и раньше, U_0 представляет собой электростатическую энергию поля электрона. Это соотношение полностью согласуется с соотношением (20.18), которое вытекает из законов сохранения.

Член, пропорциональный $\ddot{\mathbf{u}}$, в выражении (20.27) не зависит от размера электрона, а также, по-видимому, и от его внутреннего строения. Член, пропорциональный массе, зависит от структуры электрона, а его отношение к электростатической энергии не зависит от структуры. Если бы мы продолжили дальше наши расчеты до более высоких степеней r/c , то возникли бы дополнительные члены с возрастающими степенями r_0 . Однако согласно пункту 3 наших предположений им нельзя приписывать физический смысл.

§ 20.4. Трудности классической теории электрона

Прямой расчет силы реакции показывает, что в классической теории электрона ряд задач остаются нерешенными:

1. Теория дает соотношение между энергией электростатического поля и массой, однако ни та, ни другая не остаются конечными при точечном источнике поля.

2. Не вся масса электрона электромагнитного происхождения; электрон должен иметь неэлектромагнитную массу, ответственную за его устойчивость.

3. Ограничение $\ddot{\mathbf{u}} \ll \dot{\mathbf{u}}c/r_0$, введенное нами для вывода соотношения (20.27), эквивалентно неравенству

$$|m\dot{\mathbf{u}}| \gg \left| \frac{e^2 \ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^2 r_0} \frac{r}{c} \right| = |F_{\text{изл}}|. \quad (20.29)$$

Это означает, что для того, чтобы теория была справедлива, внешняя сила должна быть много больше силы реакции излучения. Следовательно, выражения для силы реакции излучения, выведенные выше, применимы лишь к электронам, движение которых определяется главным образом внешними силами. Если же попытаться силу реакции излучения применить к движению свободной частицы, то получим уравнение

$$k\ddot{u} - \dot{u} = 0, \quad (20.30)$$

где

$$k \approx \tau_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3}.$$

Его решением будет

$$u = u_0 e^{t/k} + \text{const} \times t. \quad (20.31)$$

Так как для электрона τ_0 равно примерно 10^{-23} сек, то частица мгновенно ушла бы в бесконечность.

Квантовая механика не разрешает этих трудностей. Фактически в ней появляются дополнительные трудности с зарядом, аналогичные трудностям с электронной массой в классической теории. Однако для описания поведения электрона под действием внешних сил можно пользоваться экспериментальными значениями e и m . Нерешенными остаются вопросы, связанные с деталями строения электрона.

Задачи

1. Определите силу реакции на электрон при движении его в бетатроне (т. е. по кругу фиксированного радиуса). Как сила реакции зависит от энергии частицы?

2. Пусть электрон вращается вокруг протона по кругу радиуса a . Что произойдет, если его энергия теряется посредством излучения согласно классическому закону? Определите продолжительность жизни системы.

3. Две параллельные дипольные антенны возбуждаются синусоидальными токами, сдвинутыми по фазе на 90° . Определите суммарную силу, действующую на антенны, если расстояние между ними составляет четверть длины волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. Lorentz, The Theory of Electrons. (Русский перевод: Г. А. Лорентц, Теория электрона.)

Реакция излучения рассмотрена в примечаниях в конце книги.

2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля.

Реакция излучения рассмотрена в гл. 9.

3. A. Sommerfeld, Electrodynamics. (Русский перевод: А. Зоммерфельд, Электродинамика.)

Прекрасное изложение вопроса о реакции излучения имеется в § 36.

Обсуждение вопроса об электромагнитной массе можно найти в следующих книгах.

4. R. Becker, Theorie der Elektrizität. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II.)

5. I. H. Jeans, The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.

6. M. Mason, W. Weaver, The Electromagnetic Field.

ИЗЛУЧЕНИЕ, РАССЕЯНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

§ 21.1. Радиационное затухание колебаний

Соображения, изложенные в предыдущей главе о реакции излучения, могут быть применены к связанным электронам, если выполнены все условия § 20.3. Рассмотрим электрон, на который действует упругая сила $F = -kx$. Частота его колебаний равна $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Уравнение движения с учетом реакции излучения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e^2 \ddot{x}}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} = \frac{2}{3} \tau_0 \ddot{\ddot{x}}, \quad (21.1)$$

реакция электрона на самого себя, дающая вклад в массу, уже учтена в этом уравнении. так как m — наблюдаемая на опыте масса электрона, т. е. включающая и электромагнитную массу. Из соотношения (20.29) видно, что правая часть уравнения (21.1) должна быть малой по сравнению со связью электрона. В этом случае можно воспользоваться следующим приближенным соотношением:

$$\ddot{\ddot{x}} \approx -\omega_0^2 \dot{x}. \quad (21.2)$$

Введем для удобства обозначение

$$\gamma = \frac{2}{3} \tau_0 \omega_0^2 = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}, \quad (21.3)$$

тогда уравнение (21.1) примет вид

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (21.4)$$

и при малых значениях γ решение равно

$$x = Ae^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}. \quad (21.5)$$

Таким образом, энергия осциллятора уменьшается пропорционально $e^{-\gamma t}$

$$W \approx \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} e^{-\gamma t} \quad (21.6)$$

и

$$-\frac{dW}{dt} = \gamma W = \frac{e^2 \omega_0^4 A^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} e^{-\gamma t}. \quad (21.7)$$

Правая часть последнего соотношения есть мощность излучения, усредненная за период. Следовательно, энергия сохраняется в соответствии с предположением, которое мы использовали при выводе $F_{\text{излуч}}$. Соотношение (21.7) соответствует затухающему цугу волн, излученному осциллятором после того, как он был возбужден внешним импульсом до амплитуды A . Из соотношения (21.7) видно, что величина $1/\gamma$ равна средней продолжительности излученного импульса, усредненного по энергии. Эта классическая величина соответствует квантовомеханическому «времени жизни» возбужденного состояния, возникшего в результате внешнего воздействия.

Ограничение на частоту вследствие неравенства $\gamma \ll \omega_0$ абсолютно несущественно во всех случаях, кроме γ -лучей очень высоких энергий, и с квантовой точки зрения это неравенство выполняется при

$$\hbar\omega_0 \ll \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} mc^2 = 137 mc^2 \approx 70 \text{ Мэв}. \quad (21.8)$$

Из-за радиационного затухания излучение осциллятора немонохроматично. Ширину спектральной линии можно получить из спектрального разложения Фурье. Очевидно, поле излучения пропорционально выражению (21.5), следовательно,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega = E_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}, \quad (21.9)$$

где

$$E_{\omega} = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}}. \quad (21.10)$$

Интенсивность излучения (рис. 21.1), соответствующая амплитуде (21.10), равна

$$I_{\omega} = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (21.11)$$

причем нормирована так, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\omega} d\omega = I_0. \quad (21.12)$$

Таким образом, полная ширина спектральной линии по частоте, соответствующая уменьшению интенсивности вдвое, равна

$$\Delta\omega \approx \gamma = \frac{2}{3} r_0 \omega_0^2. \quad (21.13)$$

В длинах волн ширина линии определяется соотношением

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi \Delta\omega c}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} c r_0 = \frac{4\pi}{3} r_0 \approx 10^{-12} \text{ см}. \quad (21.14)$$

Это — постоянная величина, не зависящая от частоты осциллятора. Однако радиационное затухание — не единственный источник уширения спектральных линий: в газе прерывание волнового цуга при

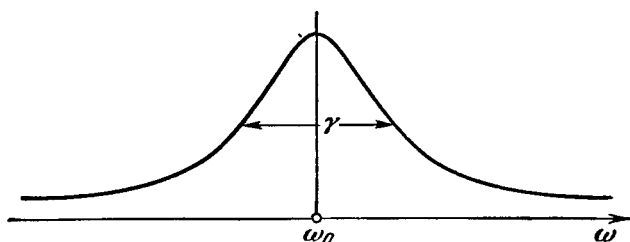


Рис. 21.1. Интенсивность излучения, определяемая соотношением (21.11), в зависимости от частоты.

атомных столкновениях и эффект Доплера также приводят к уширению линий.

Связь между шириной линии и средней продолжительностью жизни, определяемая соотношением (21.13), т. е. $\Delta\omega\gamma^{-1} = 1$, эквивалентна соотношению

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar, \quad (21.15)$$

где $\Delta E = \hbar \Delta\omega$. Равенство (21.15) представляет собой квантовомеханическое соотношение неопределенности между временем жизни некоторого состояния и шириной уровня.

§ 21.2. Вынужденные колебания

Мы рассмотрели движение и сопутствующее ему излучение связанного электрона после того, как на него подействовал возмущающий импульс; в этом и состоит классическая теория излучения. Рассмотрим теперь установившееся гармоническое движение связанного электрона, обусловленное внешним электромагнитным полем. Именно на этом рассмотрении основана классическая теория рассеяния, поглощения и дисперсии света.

При исследовании в области оптического спектра и даже мягких рентгеновских лучей можно считать, что скорость электрона много меньше скорости света, следовательно, действием магнитного поля падающего излучения можно пренебречь. В этом случае уравнение движения связанного электрона в поляризованной плоской волне имеет вид

$$\ddot{\mathbf{x}} - \frac{2}{3} \tau_0 \ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (21.16)$$

где τ_0 определяется соотношением (21.1). Нас интересует только установившийся процесс; соответствующее решение пропорционально $e^{-i\omega t}$, так что можно считать

$$\ddot{\mathbf{x}} \approx -\omega^2 \dot{\mathbf{x}}. \quad (21.17)$$

Введем обозначение

$$\gamma = \frac{2}{3} \tau_0 \omega^2. \quad (21.18)$$

Оно несущественно отличается от обозначения (21.3), ибо величина τ_0 мала и соответствующий член существенен только, если $\omega \sim \omega_0$, т. е. при резонансе. Таким образом, решение уравнения (21.16), соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид

$$\mathbf{x} = E_0 \frac{e}{m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) e^{-i\omega t}. \quad (21.19)$$

Ускорение заряда во внешнем поле равно

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \left(\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \mathbf{E}. \quad (21.20)$$

Если $\ddot{\mathbf{x}}$ подставить в выражение для дипольного излучения (19.20), то получим рассеянное излучение. Некоторые приложения формулы (21.20) мы рассмотрим подробнее.

§ 21.3. Рассеяние отдельным свободным электроном

Для несвязанного и не очень быстрого электрона имеем $\gamma \approx 0$, $\omega_0 \approx 0$, так что

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (21.21)$$

Вследствие ускорения возникает поле излучения, равное

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e \sin \alpha \ddot{\mathbf{x}}}{4\pi \epsilon_0 r c^2}, \quad (21.22)$$

где α — угол между \mathbf{E} и \mathbf{r} (рис. 21.2). Поток рассеянной энергии через единицу площади равен

$$|N| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{e \sin \alpha \ddot{\mathbf{x}}}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \right]^2 \quad (21.23)$$

и

$$|N| = r_0^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{I_0}{r^2} \right), \quad (21.24)$$

где $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ — классический радиус электрона, а

$$I_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \quad (21.25)$$

— интенсивность падающего излучения. Таким образом,

$$-\frac{dW}{dt} = \int r^2 N d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3}. \quad (21.26)$$

Если поток энергии при рассеянии поделить на интенсивность падающего излучения I_0 , то получим эффективное сечение рассеяния на один электрон

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (21.27)$$

Соотношение (21.26) называется формулой рассеяния Томсона, а формула (21.27) — томсоновским сечением рассеяния; оба соотношения не зависят от частоты.

Сравнение с экспериментом значительно облегчается, если в соотношении (21.24) ввести угол рассеяния θ и угол поляризации φ

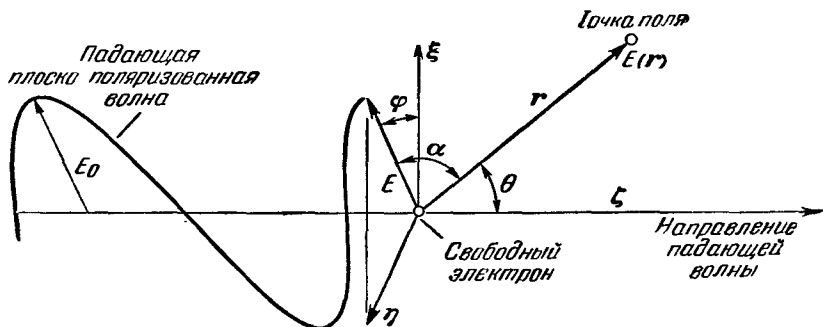


Рис. 21.2. Углы поляризации и рассеяния при рассеянии плоской волны электроном.

(рис. 21.2). Углы α , θ и φ связаны соотношением $\cos \alpha = \cos \varphi \sin \theta$, или

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \theta).$$

Если падающая волна неполяризована, т. е. поляризована произвольно, необходимо усреднение по φ ; в результате получим

$$\overline{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

так как среднее значение $\overline{\cos^2 \varphi} = 1/2$. Будучи выраженной через угол θ , полная мощность рассеянного излучения принимает вид

$$-\frac{dW}{dt} = I_0 r_0^2 \int \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3}. \quad (21.28)$$

Дифференциальное сечение рассеяния на единицу телесного угла равно

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{r_0^2 (1 + \cos^2 \theta)}{2}. \quad (21.29)$$

Это сечение изображено графически на рис. 21.3 в виде функции угла рассеяния. Квантовомеханическое сечение рассеяния приближается к классическому (21.29) по мере того, как частота стремится

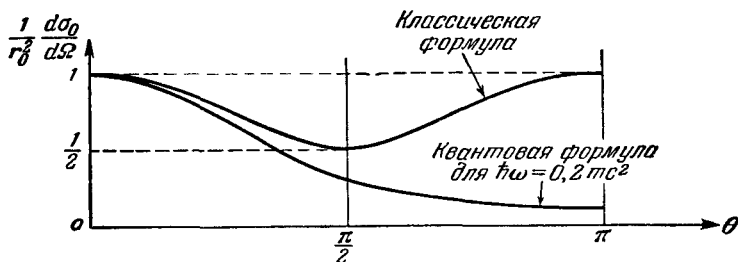


Рис. 21.3. Дифференциальное сечение рассеяния как функция угла рассеяния.

При высоких частотах наступает отклонение от формулы Томсона.

к нулю, однако рассеяние при этом несимметрично. В общем случае рассеянное излучение сконцентрировано несколько вперед. Показанная на рисунке кривая изображает интенсивность рассеянного излучения при энергии первичного излучения, равной 100 кэВ.

Квантовая механика указывает и еще на одну черту рассеяния на свободных электронах. В отличие от классического случая, частота рассеянного излучения не совпадает с частотой падающего. С классической точки зрения качественная картина такова: импульс, подобно энергии, отбирается от падающего излучения и, очевидно, в силу симметрии рассеянного излучения передается электрону. Это эквивалентно наличию средней силы, действующей в направлении падающего луча и равной $(I_0/c_0)\sigma_0$. В результате действия этой силы электрон приобретает некоторую скорость. В действительности этого не наблюдается. Вместо этого каждый квант излучения передает электрону часть своей энергии и импульса, а частота рассеянного излучения зависит от угла рассеяния. Это явление называется эффектом

Комптона. Рассмотрение его, а также квантовомеханический вывод формулы Клейна — Нишины можно найти в книге W. Heitler, *The Quantum Theory of radiation*, 1954. (Русский перевод: В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, ИЛ, 1956.)

§ 21.4. Рассеяние связанными электронами

Для того чтобы определить интенсивность рассеянного излучения, падающего на единицу площади в данном направлении, следует воспользоваться формулой (21.23); причем ускорение в случае упругой связи будет определяться соотношением (21.20). В результате этого расчета получим полное сечение рассеяния

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (21.30)$$

где σ_0 — томсоновское сечение, определяемое соотношением (21.27). Угловое распределение такое же, как и в случае свободного электрона.

Выражение (21.30) имеет максимум при $\omega \approx \omega_0$, т. е. при резонансном рассеянии. Сечение рассеяния в этом случае сильно возрастает

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 \approx 6\pi\lambda_0^2 \quad (21.31)$$

и становится значительно больше, нежели томсоновское сечение.

При сильной связи

$$\omega \ll \omega_0, \quad \gamma \ll \omega_0$$

выражение (21.30) принимает такой вид:

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (21.32)$$

Таким образом, в этом случае сечение рассеяния обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего излучения. Формула, выведенная в гл. 12 для рассеяния проводящей сферой, приводит к такой же зависимости сечения от длины волны при условии, что ее размеры много меньше длины волны λ . Было также показано, что и для диэлектрической сферы частотная зависимость остается такой же. Впервые обратная пропорциональность между интенсивностью рассеянного излучения и четвертой степенью длины волны была получена Релеем и применена для объяснения голубого цвета неба. В основе объяснения Релея лежит предпосылка, что в среднем отдельные молекулы рассеивают независимо друг от друга, так что фазы рассеивателей произвольны и интенсивности складываются. Соотношение (21.32) не только качественно объясняет голубой цвет неба. Если воспользоваться эмпирически найденным средним

значением ω_0 , то получается хорошее согласие с наблюдаемым атмосферным рассеянием как по интенсивности, так и по поляризации. Справедливость предположения о произвольности фаз будет рассмотрена ниже.

§ 21.5. Влияние объемного распределения центров рассеяния

Пусть в единице объема имеется N электронных центров рассеяния. Каждый из них рассеивает падающую плоскую волну в соответствии с соотношением (21.30). В общем случае рассеянное излучение будет когерентно складываться с внешним полем и тем самым изменять эффективную скорость волны. Влияние большого числа рассеивающих центров можно учесть, складывая отдельные рассеянные волны. Однако с математической точки зрения при исследовании преломления проще считать, что рассеянное излучение обусловлено электрической поляризацией целых объемных элементов, а не совокупностью отдельных электронных смещений. Поляризация связана со смещениями отдельного электрона соотношением

$$P = Nex. \quad (21.33)$$

Влияние объемной поляризации сводится к тому, что к току смещения $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ прибавится дополнительный поляризационный ток $\frac{\partial P}{\partial t}$. В соответствии с этим уравнение (4) системы (9.6) принимает вид

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \right). \quad (21.34)$$

Это уравнение и уравнение $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ обычным образом приводят к однородным волновым уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 B - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.35)$$

где

$$n = \sqrt{1 + \frac{|P|}{\epsilon_0 |E|}} = \sqrt{\bar{k}} \quad (21.36)$$

есть показатель преломления среды.

В разреженных системах, где рассеянное излучение много меньше падающего, можно с хорошей точностью полагать, что поле в месте расположения данного центра рассеяния равно полю падающего излучения. Тогда из соотношения (21.19) следует

$$n^2 = k = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (21.37)$$

Это соотношение представляет собой формулу дисперсии для разреженного электронного газа при одной частоте связи. При $\omega < \omega_0$ мы имеем то, что называется «нормальной дисперсией»; показатель преломления при этом уменьшается с увеличением длины волны. При $\omega \approx \omega_0$ имеется полоса поглощения, внутри которой мнимая часть n играет существенную роль. Со стороны волн, короче резонансных, $n < 1$, что приводит к скорости распространения, большей c . Однако это касается лишь фазовой скорости; групповая скорость $\frac{d\omega}{dt}$ меньше c по обе стороны от резонанса. В непосредственной близости к ω_0 вопрос о скорости распространения волн более сложен. Его рассмотрение будет продолжено в следующем § 21.6.

Если среду нельзя считать разреженной, то местное поле не будет равно внешнему. Приближенно оно определяется соотношением (2.36)

$$E_{эфф} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Это значение поля следует подставить в соотношение (21.9), чтобы в дальнейшем посредством формулы (21.33) вычислить поляризацию. Если исключить поля, то получится соотношение, подобное соотношению Клаузиуса — Мосотти (2.39):

$$\frac{k-1}{k+2} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}. \quad (21.38)$$

Их подобие становится еще более близким, если в соотношение (21.38) ввести классический радиус электрона r_0 , волновые числа $k_0 = \omega_0/c$, $k = \omega/c$, $\Gamma = \gamma/c$, а число молекул N выразить через плотность ρ , молекулярный вес и число Авогадро N_0 — $N = \rho N_0/M$. Тогда получим

$$\frac{3M}{g} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2} \right) = N_0 \alpha = \frac{4\pi N_0 r_0}{k_0^2 - k^2 - ik\Gamma}. \quad (21.39)$$

При заданной частоте правая часть этого соотношения зависит лишь от атомарных свойств вещества и не зависит от плотности. Величина, стоящая слева, будучи отнесенной к одной грамм-молекуле, называется «молярной рефракцией». Как видим, она равна поляризуемости одной грамм-молекулы.

Соотношения (21.37), (21.38) и (21.39) могут быть обобщены на тот случай, когда электроны имеют различные энергии связи. Например, если f_i электронов имеют частоту ω_i и параметр затухания γ_i , то соотношение (21.38) примет вид

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_i}. \quad (21.40)$$

На практике имеется ряд случаев, когда электроны можно считать свободными, например, преломление электромагнитных волн ионосферой, отражение и преломление «плазмы» электрического разряда и даже преломление рентгеновых лучей, ибо по отношению к частоте рентгеновых лучей резонансные частоты электронов в легких атомах столь малы, что электроны можно считать свободными. В случае разреженного газа свободных электронов соотношение (21.37) принимает вид

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}. \quad (21.41)$$

Если теперь в это выражение подставить длину волны $\lambda = c/\omega$ и классический радиус электрона $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$, то получим

$$n^2 = 1 - 4\pi N r_0 \lambda^2. \quad (21.42)$$

Показатель преломления газа свободных электронов всегда меньше единицы, хотя групповая скорость меньше c . Однако при длинах волн, больших некоторого значения $\lambda > \sqrt{4\pi/Nr_0}$, n^2 становится отрицательным, а показатель преломления — чисто мнимым. При таких частотах происходит полное отражение от среды, содержащей свободные электроны, при любом угле падения. Свойства этой среды в таком случае напоминают свойства волновода при частотах, меньших предельной.

§ 21.6. Скорость распространения

Скорость, входящая в решение волнового уравнения $f(x \pm vt)$, есть фазовая скорость волны: соответственно показатель преломления определяется равенством $n = c/v$. Если скорость распространения при всех частотах одинакова, то дисперсия отсутствует, и скорость c/n остается единственной скоростью, существенной при данном процессе. Согласно соотношениям (21.37) и (21.38) этот случай осуществляется с хорошей точностью, если ω_0 много больше частоты переменного поля. Однако обычно прохождение через среду волны, в спектре которой имеется более одной частоты, осложняется из-за разницы в фазовых скоростях ее компонент.

В § 12.6 было дано определение групповой скорости применительно к случаю двух волн близкой частоты, фазовые скорости которых различны. Понятие групповой скорости применимо также к системе волн, или «волновому пакету» с непрерывным спектром, заключенным в узкой полосе частот. Пусть поля E и B , соответствующие такой узкой полосе частот, описываются функцией $\psi(x, t)$, которую можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\psi = \int a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (21.43)$$

Если амплитуда $a(k)$ не равна нулю лишь вблизи данной частоты ω с волновым числом k_1 , то можно написать

$$\psi = A(x, t) e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}, \quad (21.44)$$

где

$$A = \int a(k) e^{i[(\Delta k)z - (\Delta\omega)t]} dk. \quad (21.45)$$

Если A — медленно меняющаяся функция, то группу можно рассматривать, как одну волну с частотой ω_1 и амплитудой A . Скорость распространения этой амплитуды определяется условием, что для наблюдателя, движущегося с этой скоростью, амплитуда остается постоянной. Следовательно,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

откуда получаем

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{A=\text{const}} = - \frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega=\omega_1}, \quad (21.46)$$

в согласии с прежним определением групповой скорости v_g (12.35). Выражение для групповой скорости v_g можно написать и в другом виде

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}. \quad (21.47)$$

Если фазовая скорость слабо зависит от частоты, то при прохождении через преломляющую среду волновой пакет будет испытывать небольшое изменение. В этом случае групповая скорость, определенная для средней частоты, соответствующей максимуму амплитуды, равна скорости распространения энергии. Однако в области аномальной дисперсии производная $\frac{dv}{d\lambda}$ отрицательна, и групповая скорость может стать больше c . Поэтому более правильно скорость переноса энергии при данной частоте определить как отношение среднего значения вектора Пойнтинга к плотности энергии. Эта скорость имеет минимум при ω_0 .

Практически трудность описания передачи сигнала в области с аномальной дисперсией обусловлена тем обстоятельством, что группа волн, или волновой пакет, сильно искажается и представление о групповой скорости, как она была определена выше, становится неправомерным. Проблемы, касающиеся распространения плоской волны в среде, были рассмотрены Зоммерфельдом и Бриллюэном. Подробности их работы можно найти в трудах Congrès International

d'Electricité, т. II, Париж, 1932¹⁾). Оказывается, что скорость распространения сигнала зависит как от формы сигнала, так и от характера приемника излучения; однако детальный анализ показывает, что

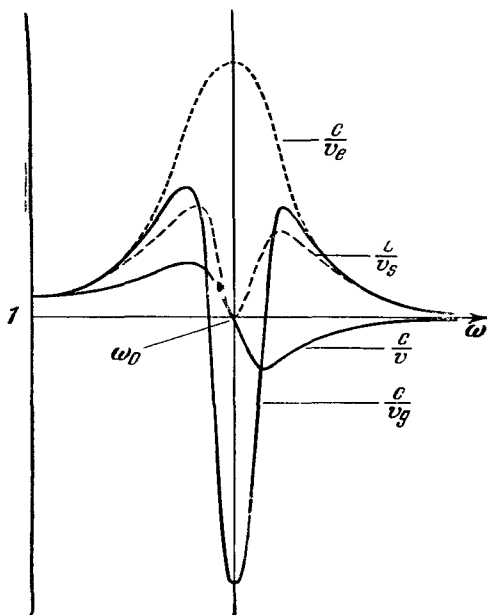


Рис. 21.4. Поведение различных скоростей распространения вблизи резонанса (по Бриллюэну):

v — фазовая скорость; v_g — групповая скорость;
 v_e — скорость переноса энергии; v_s — скорость распространения сигнала.

эта скорость никогда не превосходит c . На рис. 21.4 показано поведение всех четырех скоростей вблизи полосы поглощения ω_0 .

§ 21.7. Рассеяние волн объемным распределением осцилляторов. Релеевское рассеяние

Часть рассеянного излучения, когерентная с падающей волной и распространяющаяся в том же направлении, была рассмотрена нами через поляризацию системы осцилляторов. При рассеянии под дру-

¹⁾ Метод рассмотрения заключался в следующем: падающую группу волн они разлагают в интеграл Фурье; затем полагают, что каждая компонента распространяется с фазовой скоростью $v(\omega)$. После этого волновой пакет восстанавливался по своим компонентам.

гими углами в общем случае следует складывать волны, рассеянные отдельными осцилляторами, с учетом их фаз. Если распределение электронов совершенно произвольно, то можно предполагать, что разности фаз в среднем равны нулю. Тогда полная интенсивность рассеянного излучения будет равна сумме интенсивностей отдельных рассеянных волн. Если же центры рассеяния расположены в определенном порядке, как, например, в кристалле, то предыдущие рассуждения неверны. В этом случае получается дифракция на трехмерной решетке. Максимумы интенсивности имеют место только в тех направлениях, в которых волны, рассеянные соседними центрами, находятся в фазе. Для лучей Рентгена в обычных кристаллах имеется много таких направлений, и получающаяся в результате дифракция называется дифракцией Брэгга¹⁾. Если же длина волны велика по сравнению с расстоянием между соседними центрами, то условие максимума может быть выполнено лишь для одного направления, а именно вперед. Аналогично одномерная дифракционная решетка не дает дифракционной картины, если параметр решетки много меньше длины волны.

В связи с последним замечанием возникает еще один вопрос, касающийся рассеяния произвольно расположенными центрами. Рассмотрим куб с ребром, равным половине длины волны, содержащий много атомов или молекул. Даже если внутри куба электроны расположены в полном беспорядке, их излучение при наблюдении под прямым углом к падающему лучу будет в противофазе с излучением такого же соседнего объема. Таким образом, суммарное излучение множества таких объемов будет равно нулю при наблюдении в любом направлении, кроме, разумеется, направления вперед²⁾. Однако рассмотренные условия вполне применимы к рассеянию видимого света в атмосфере! Почему же тогда результат Релея согласуется с наблюдениями?

Ответ на этот вопрос был дан Эйнштейном и Смолуховским на основе исследования флуктуаций в атмосфере. Оказывается, число рассеивающих центров в одной «ячейке», или одном кубе с ребром $\lambda/2$, постоянно только в среднем. Именно отклонение этого числа от сред-

¹⁾ В действительности вследствие трехмерности кристаллической решетки интерференция, описанная выше, имеет место только для определенной длины волны и определенного угла падения по отношению к системе плоскостей, образуемых центрами рассеяния. Поэтому для получения полной дифракционной картины от монокристалла его необходимо вращать во время экспозиции. В случае одно- или двумерной решеток всегда имеется угол, при котором происходит усиление рассеянных волн, если только длина волны достаточно мала.

²⁾ В таком виде эти рассуждения обосновывают способ рассмотрения преломляющих сред, использованный в § 21.5. Если флуктуациями можно пренебречь, то влияние отдельных осцилляторов сказывается лишь на амплитуде волны, распространяющейся в направлении падающего излучения.

него значения и ответственно за рассеяние. Пусть N_j — число рассеивающих электронов в одной ячейке, а δN_j — разность между средним числом таких электронов и его истинным значением, тогда интенсивность рассеянного излучения пропорциональна

$$\left| \sum_j e^{i\varphi_j} \delta N_j \right|^2 = \sum_j (\delta N_j)^2 + \sum_{j \neq k} e^{i(\varphi_j - \varphi_k)} \delta N_j \delta N_k, \quad (21.48)$$

где φ_j — фаза, соответствующая j -й ячейке. Для сравнения с опытом соотношение (21.48) нужно усреднить. В разреженных газах флуктуации в различных ячейках независимы, и так как по определению среднее значение δN равно нулю, то второй член правой части обращается в нуль. Если флуктуации невелики, то их «дисперсия», квадрат которой в теории вероятности называется средним квадратичным отклонением, определяется соотношением

$$\overline{(\delta N_j)^2} = N_j. \quad (21.49)$$

Таким образом, полная интенсивность рассеяния просто пропорциональна $\sum N_j = N$ — полному числу рассеивающих центров в согласии с предположением Релея. Для конденсированных сред усреднение выражения (21.49) более сложно. Вблизи точек фазовых переходов флуктуации приводят к явлению, которое называется критической опалесценцией.

§ 21.8. Поглощение излучения осциллятором

До сих пор рассматривались лишь те следствия соотношения (21.19), которые относились к распространению и рассеянию электромагнитных волн. Другой весьма важный случай касается количества энергии, которая передается связанному электрону электромагнитной волной.

Рассмотрим несколько более сложный случай, нежели плоская монохроматическая волна. Зависимость $E(t)$ общего вида представим интегралом Фурье

$$E = \int E_\omega e^{-i\omega t} d\omega.$$

Пусть, кроме того, x_ω — фурье-компонента смещения $x(t)$. Очевидно, как и в случае монохроматических волн,

$$x_\omega = \frac{eE_\omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (21.50)$$

Определим теперь работу, совершаемую электрическим полем в единицу времени, а потом вычислим интеграл от этой работы по вре-

мени. Для этого нужно несколько обобщить теорему, выражаемую равенством (13.36). В § 13.3 было доказано, что если $A(t)$ — действительная величина, то имеют место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt &= 4\pi \int_0^{\infty} |A_{\omega}|^2 d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (21.51)$$

где A_{ω} — фурье-компонента $A(t)$. Доказательство этой теоремы легко обобщить на произведение двух действительных величин $A(t)$ и $B(t)$, зависящих от времени. В этом случае будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) B(t) dt = 2\pi \int_0^{+\infty} (A_{\omega} B_{\omega}^* + A_{\omega}^* B_{\omega}) d\omega. \quad (21.52)$$

В соответствии с этой теоремой из соотношения (21.50) следует, что энергия ΔU , поглощенная электроном при прохождении электрического поля, равна

$$\Delta U = \int_{-\infty}^{+\infty} e E(t) \dot{x}(t) dt = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} |E_{\omega}|^2 \frac{2\omega^2 \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\omega. \quad (21.53)$$

Этот интеграл можно вычислить, если предположить, что резонансный пик гораздо уже спектрального распределения внешнего поля. Тогда имеем

$$\Delta U = \frac{2\pi e^2}{m} |E_{\omega_0}|^2 2\omega_0^2 \gamma \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{d\xi}{(2\omega_0 \xi)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (21.54)$$

где $\xi = \omega - \omega_0$. Нижний предел можно заменить на $-\infty$. В результате получим очень простой результат

$$\Delta U = \frac{2\pi^2 e^2}{m} |E_{\omega_0}|^2. \quad (21.55)$$

Любопытно, что в правую часть этой формулы γ не входит, т. е. энергия, заимствованная электроном у внешнего поля, не зависит от ширины линии, какова бы ни была физическая причина, обуславливающая ее.

Смысл соотношения (21.55) можно выразить несколько иначе. Согласно соотношению (13.36) или (21.51) поток энергии S через

единицу площади в падающем луче можно представить в виде

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_0 c E^2 dt = 4\pi\epsilon_0 c \int_0^{\infty} |E_\omega|^2 d\omega. \quad (21.56)$$

Если теперь S_ω определить посредством равенства

$$S = \int_0^{\infty} S_\omega d\omega, \quad (21.57)$$

то соотношение (21.55) принимает простой вид

$$\Delta U = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}, \quad (21.58)$$

где r_0 — классический радиус электрона. Так как ΔU представляет собой долю энергии, поглощенную из падающего потока S , то соотношение (21.58) можно представить в виде интеграла по частоте от сечения поглощения

$$\int_0^{\infty} \sigma(\omega) d\omega = 2\pi^2 r_0 c. \quad (21.59)$$

Это равенство выражает собой классическое «правило суммирования», посредством которого полное сечение поглощения определяется интегралом по частоте от всех сечений. Наличие у заряда более чем одной частоты связи не изменит соотношения (21.59).

Здесь уместно сделать некоторые замечания. Соотношение (21.59) определяет суммарное сечение только для «дипольного поглощения», ибо амплитуда x колебаний заряда считалась малой по сравнению с длиной волны. Кроме того, смещение x предполагалось параллельным E . Для трехмерного осциллятора это всегда верно. При одномерном же это верно лишь для некоторых углов падения и поляризации. Если же излучение произвольного направления и поляризации падает на одномерный осциллятор, то правые части соотношений (21.55), (21.58) и (21.59) следует поделить на три, так как в этом случае соотношение (21.53) будет содержать множитель $\cos^2\theta$, где θ — угол между x и E . Среднее значение этого множителя на сфере равно $1/3$.

Соотношение (21.59) может быть обобщено на случай произвольного механизма дипольного электрического поглощения. Однако следует помнить, что если заряженные частицы нельзя считать легкими по сравнению с массой всей системы, то вместо заряда e в соотношении (21.59) следует воспользоваться величиной $e_{эфф}$, определяемой соотношением

$$\frac{e_{эфф}}{e} = \frac{\text{смещение заряда относительно центра масс}}{\text{абсолютное смещение заряда}}.$$

а вместо m — «приведенной» массой поглощающей системы. Если в системе имеется более одной заряженной частицы, то правило суммирования обобщается следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \sigma(\omega) d\omega = 2\pi^2 c \sum_i \frac{e_{i\varepsilon\Phi}^2}{4\pi\varepsilon_0 m_i c^2}, \quad (21.60)$$

§ 21.9. Равновесие между осциллятором и полем излучения

В предыдущем параграфе мы вычислили энергию, поглощаемую упруго связанным электроном из внешнего поля, в котором поток энергии равен S , а спектральное распределение определяется функцией S_ω . Рассмотрим теперь линейный осциллятор, находящийся в произвольно направленном и поляризованном поле излучения, у которого спектральное распределение плотности энергии U_ν определяется соотношением

$$U_\nu = \int_0^\nu U_{\nu\omega} d\omega. \quad (21.61)$$

Пусть ΔU — энергия, поглощенная за данный отрезок времени Δt . Очевидно, $U_{\nu\omega} = S_\omega/c \Delta t$. Далее воспользуемся соотношением (21.58). Как было показано выше, для этого его правую часть следует поделить на три. В результате преобразований получим

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{2\pi^2}{3} r_0 c^2 U_{\nu\omega}. \quad (21.62)$$

Согласно соотношению (19.19) энергия, излученная осциллятором за время Δt , равна

$$\frac{\Delta U_{\text{изл}}}{\Delta t} = \frac{2}{3} r_0 \frac{m \dot{u}^2}{c}. \quad (21.63)$$

После усреднения по периоду осцилляции это соотношение принимает следующий вид:

$$\frac{\overline{\Delta U_{\text{изл}}}}{\Delta t} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega^2}{c} \bar{U}, \quad (21.64)$$

так как $\overline{m \dot{u}^2} = \overline{m \dot{u}_0^2}/2 = \bar{U}$, где \dot{u}_0 — амплитудное значение \dot{u} , а \bar{U} — энергия осциллятора. Рассмотрим теперь осциллятор, окруженный стенками (температура которых такая же, как у осциллятора), которые поглощают излучение и произвольно снова его испускают. В этом случае осциллятор будет находиться в равновесии со своим окружением, и следовательно, выражения (21.64) и (21.62) можно

приравнять друг другу. В результате получим

$$U_{\nu\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{U}. \quad (21.65)$$

Этим соотношением определяется частотное распределение плотности энергии электромагнитного излучения в полости с абсолютно «черными» стенками; это распределение непосредственно связано со статистическими свойствами осциллятора при данной температуре. Если к нашему осциллятору применить классическую статистическую механику, т. е. считать, что $\bar{U} = kT$, то соотношение (21.65) приводит нас к спектральному распределению Релея — Джинса для излучения черного тела. Этот результат парадоксален, ибо очевидно, что плотность энергии, соответствующая некоторой частоте, не может бесконечно возрастать с увеличением частоты при данной температуре.

Закон распределения (21.65) можно вывести иным способом. В гл. 24 будет показано, что уравнения поля излучения можно преобразовать таким образом, что они будут эквивалентны уравнениям обычных гармонических осцилляторов. Действительно, имеется однозначное соответствие между эквивалентными осцилляторами и нормальными колебаниями данной полости. Коэффициент $\omega^2/\pi^2 c^3$ в соотношении (21.65) определяет число нормальных колебаний в единичном интервале угловой частоты ω (сравните этот факт с ответом задачи 8 в конце гл. 12).

Задачи

1. Покажите, что сечение рассеяния свободным электроном эллиптически поляризованной волны (электрическое поле волны равно $E = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, где A и B — взаимно-перпендикулярные векторы) определяется соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left[\frac{(A \times n)^2 + (B \times n)^2}{A^2 + B^2} \right],$$

где n — единичный вектор в направлении излучения.

2. Какова минимальная частота, с которой волна может распространяться без затухания, если в 1 см^3 пространства находится один электрон? Вычислите групповую скорость при более высоких частотах.

3. Покажите, что при наличии магнитного поля H , параллельного направлению распространения волны, в электронном газе имеются две скорости, соответствующие двум показателям преломления

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2} = 1 - \frac{4r_0 N}{k^2},$$

$$1 \pm \frac{e\mu_0 H}{m\omega} \quad 1 \pm \frac{\omega_L}{\omega},$$

где ω_L — частота ларморовой прецессии.

4. Вычертите с достаточной точностью зависимость волновой и групповой скоростей, а также коэффициента поглощения от частоты вблизи резонанса. Укажите наиболее характерные черты этих зависимостей. Покажите,

что максимум и минимум показателя преломления соответствуют точкам, где коэффициент поглощения равен половине своего максимального значения.

5. Вычислите скорость переноса энергии, т. е. среднее значение вектора Пойнтинга, деленное на среднее значение плотности энергии, при $\omega = \omega_0$.

6. Какую поляризацию следует ожидать в излучении, рассеянном атмосферой под углом θ ? Солнечное излучение можно считать неполяризованным и принимать во внимание лишь однократное рассеяние.

7. Предположим, что в соотношении (21.43) $a(k) = e^{-(k-k_0)^2 b^2/2}$, где k_1 и b — постоянные. Определите форму волнового пакета в пространстве и проследите за его преобразованием при проникновении в диэлектрик. Найдите общее выражение для его ширины в пространстве, т. е. для расстояния между точками, где амплитуда в l раз меньше своего максимального значения. Частоту пакета считайте не слишком близкой к резонансной частоте диэлектрика.

8. Докажите равенство (21.52).

9. Рассмотрите ядро, состоящее из N нейтронов и Z протонов ($A = N + Z$). Предполагая поглощение чисто дипольным, покажите, что «интегральное сечение» определяется соотношением

$$\int \sigma dE = 2\pi^2 \frac{NZ}{A} \alpha \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 Mc^2,$$

где α — постоянная тонкой структуры $\approx 1/137$, а M — масса протона, примерно равная массе нейтрона. Дайте численную оценку этой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Веcker, Theorie der Elektrizität. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, т. II.)

Очень полезные разделы *B*, об упруго связанном электроне, и *СIII*, о дисперсии и поглощении.

2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля.

Очень хорошее рассмотрение вопроса об излучении и рассеянии можно найти в § 9.

3. H. A. Lorentz, Problems of modern Physics.

Множество вопросов, затронутых в этом курсе лекций 1922 г., до сих пор представляет большой интерес. Здесь приводится ссылка на эту книгу, так как в ней дано применение формулы Релея к рассеянию в атмосфере.

4. L. Rosenfeld, Theory of Electrons.

По-видимому, один из лучших обзоров классической теории дисперсии, в том числе критической опалесценции, с современной точки зрения.

5. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. (Русский перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма.)

В книге рассмотрено прохождение электромагнитных волн через ионосферу.

* Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн.

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

С точки зрения электронной теории обычные макроскопические уравнения Максвелла появляются в результате усреднения электрических величин по объему, содержащему достаточно большое число атомов. В гл. 17 мы показали, что электродинамика зарядов и токов, находящихся в вакууме, легко может быть представлена в простой ковариантной форме. Следовательно, уравнения макроскопической электродинамики для материальных сред также могут быть записаны в ковариантной форме.

§ 22.1. Ковариантное описание источников полей

Новым в электродинамике среды будет то, что и в той системе отсчета, где среда покоится, все четыре компоненты четырехмерного тока j^i могут быть отличны от нуля, т. е.

$$(j^i) = \left(\frac{j^0}{c}, \rho^0 \right), \quad (22.1)$$

где j^0 — обычная трехмерная плотность тока в собственной системе отсчета. Рассмотрим теперь, какой вид имеют компоненты j^i в несобственной системе отсчета. Для того чтобы сохранялось соответствие со случаем вакуума, вектор j^i должен содержать компоненты

$$(j^i) = \left(\frac{J}{c}, \rho \right) \quad (22.2)$$

в любой системе отсчета, поэтому в общем случае

$$j_x = \gamma (j_x^0 - \rho^0 v), \quad (22.3)$$

$$\rho = \gamma \left(\rho^0 - \frac{j_x^0 v}{c^2} \right), \quad (22.4)$$

где v — скорость системы отсчета (вдоль оси x), измеренная в собственной системе отсчета.

Физический смысл соотношения (22.3) совершенно ясен. Второй член в (22.3) представляет собой конвективный ток, обусловленный переносом зарядов, и множитель γ , обеспечивающий инвариантность заряда. Смысл соотношения (22.4) не столь очевиден: оно показывает, что электрически нейтральный в собственной системе отсчета проводник с током не обязан быть нейтральным в другой инерциальной системе отсчета. Этот эффект можно понять из кинематических соображений. Пусть в собственной системе отсчета ($\rho^0 = 0$) плотности положительных и отрицательных зарядов равны. Для простоты (хотя это и не обязательно) будем считать, что положительные заряды покоятся, а отрицательные — движутся. На диаграмме Минковского (рис. 22.1)

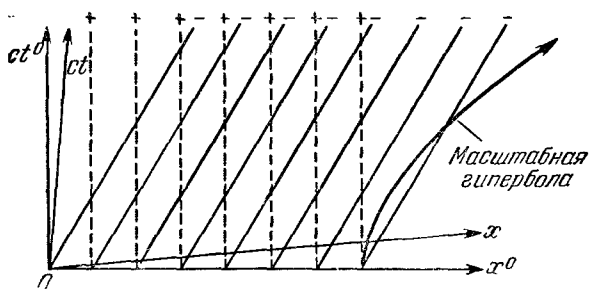


Рис. 22.1. Диаграмма Минковского, показывающая, что плотности зарядов различны в разных системах отсчета.

показаны мировые линии положительных (пунктир) и отрицательных (сплошные линии) зарядов, а также системы отсчета: собственная Σ^0 и произвольная Σ . В системе Σ^0 плотность зарядов измеряется числом положительных и отрицательных зарядов одновременно с точки зрения этой системы отсчета, находящихся в единичном объеме, т. е. на оси x^0 . В системе Σ одновременность означает, что плотность зарядов нужно вычислить на оси x . Очевидно, что плотность отрицательных зарядов на оси x меньше, чем на оси x^0 , а плотность положительных зарядов изменяется незначительно. (Заметим, что при переходе от одной системы отсчета к другой изменяется масштаб вдоль соответствующих осей, поэтому плотность зарядов следует относить к единичным отрезкам, которые отсекаются на осях гиперболой, показанной на рисунке.) Следовательно, в соответствии с соотношением (22.4) вещество окажется положительно заряженным в системе Σ , хотя в системе Σ^0 оно было нейтральным.

Этот эффект приводит к тому, что покоящийся в системе Σ^0 нейтральный контур с током в системе Σ приобретает электрический момент. Рассмотрим прямоугольный контур, по которому течет ток I

(рис. 22.2). В системе Σ на сторонах, параллельных x , будут находиться заряды $\pm Iav/c^2$ (при этом мы пренебрегаем членами,

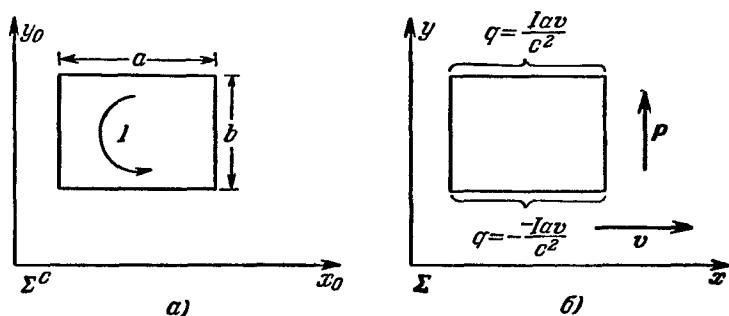


Рис. 22.2. Электрический момент контура с током в движущейся системе отсчета.

квадратичными относительно v). Таким образом, контур будет обладать электрическим моментом

$$P = \frac{vabI}{c^2} = -\frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{m}|}{c^2}, \quad (22.5)$$

где $\mathbf{m} = I \cdot \mathbf{S}$ — магнитный момент петли, \mathbf{S} — вектор, представляющий площадь петли, $|\mathbf{S}| = ab$.

§ 22.2. Уравнения поля для материальной среды

Если 4-вектор токов-зарядов разделить на две части, одна из которых соответствует «истинным» или свободным зарядам и токам j^i , а вторая — зарядам и токам, обусловленным намагничиванием и поляризацией j_M^i , то уравнения Максвелла (17.34), описывающие источники поля, примут такой вид:

$$\frac{\partial F^{il}}{\partial x^i} = \frac{j^l + j_M^l}{\epsilon_0}. \quad (22.6)$$

Уравнения (17.36) останутся неизменными. Как и прежде, тензор F^{ij} выражается через \mathbf{B} и \mathbf{E} матрицей (17.32). Уравнения (22.6) желательно записать так, чтобы источниками поля были только свободные заряды и токи, а наличие «индуцированных» зарядов и токов учитывалось бы в самих полях подобно тому, как это было сделано в трех измерениях. Это можно сделать, если посредством соотношения

$$j_M^l = \frac{\partial M^{il}}{\partial x^i} \quad (22.7)$$

вести тензор M^{ij} . Для того чтобы вектор j_M^i соответствовал наведенным источникам поля, рассмотренным в гл. 7, он должен иметь компоненты

$$j_M^i = \left(\frac{j_M + j_P}{c}, \rho_P \right) = \left(\frac{\nabla \times M}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t}, -\nabla P \right). \quad (22.8)$$

Следовательно, матрица тензора M^{ij} имеет вид

$$(M^{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} i \rightarrow \\ 0 \\ M_z/c \\ -M_y/c \\ P_x \end{matrix} & \begin{matrix} -M_z/c \\ 0 \\ M_x/c \\ P_y \end{matrix} & \begin{matrix} M_y/c \\ -M_x/c \\ 0 \\ P_z \end{matrix} & \begin{matrix} -P_x \\ -P_y \\ -P_z \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \downarrow \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & & & & \end{matrix}. \quad (22.9)$$

По аналогии с трехмерными соотношениями

$$\frac{H}{c\epsilon_0} = cB - \frac{M}{c\epsilon_0}, \quad (22.10)$$

$$\frac{D}{\epsilon_0} = E + \frac{P}{\epsilon_0} \quad (22.11)$$

введем теперь новое поле

$$\frac{H^{ij}}{\epsilon_0} = F^{ij} - \frac{M^{ij}}{\epsilon_0}. \quad (22.12)$$

Тогда уравнения (22.6), описывающие источники поля, примут простой вид

$$\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^i} = j^j, \quad (22.13)$$

где

$$(H^{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} j \rightarrow \\ 0 \\ H_z/c \\ -H_y/c \\ -D_x \end{matrix} & \begin{matrix} -H_z/c \\ 0 \\ H_x/c \\ -D_y \end{matrix} & \begin{matrix} H_y/c \\ -H_x/c \\ 0 \\ -D_z \end{matrix} & \begin{matrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \downarrow \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & & & & \end{matrix}. \quad (22.14)$$

Знаки в уравнениях, определяющих дополнительные поля, соответствуют тому, как магнитные и электрические моменты выражаются через эквивалентные заряды и токи.

§ 22.3. Характер преобразования отдельных полей

Формулы преобразования электрического и магнитного моментов вытекают непосредственно из ковариантной формы уравнений поля, рассмотренной в общем виде в гл. 17. Пусть штрихованная система отсчета движется относительно нештрихованной со скоростью v .

Тогда компоненты поляризации и намагниченности будут связаны соотношениями

$$P'_{\parallel} = P_{\parallel}, \quad (22.15)$$

$$M'_{\parallel} = M_{\parallel}, \quad (22.16)$$

$$P'_{\perp} = \gamma \left(P_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}_{\perp}}{c^2} \right), \quad (22.17)$$

$$M'_{\perp} = \gamma (M_{\perp} + \mathbf{v} \times P_{\perp}). \quad (22.18)$$

Первое соотношение совершенно очевидно, так как поляризация представляет собой произведение заряда (инвариант) на расстояние, деленное на объем, а последние преобразуются подобным образом. Аналогичные соображения можно высказать и относительно второго соотношения. Член, пропорциональный $\mathbf{v} \times \mathbf{P}$, в соотношении (22.18) нерелятивистского происхождения, за исключением множителя γ , который возникает вследствие того, что перемещение поляризованной среды соответствует циркуляции зарядов. Мы уже встречались с этим явлением в гл. 9 при нерелятивистском рассмотрении уравнений Максвелла в движущихся средах. Рассмотрим поляризованный диэлектрик, изображенный на рис. 22.3. В движущейся системе

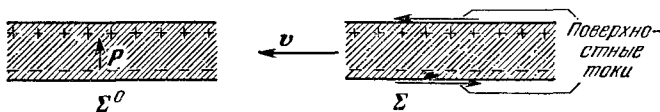


Рис. 22.3. Движущийся поляризованный брусок эквивалентен намагниченной среде.

отсчета Σ поляризационные заряды на поверхностях диэлектрика образуют противоположно направленные токи, которые и обеспечивают однородную намагниченность среды.

Соотношение (22.17) не имеет нерелятивистского аналога. Как мы уже видели, результатом его является возникновение заряда на нейтральном проводнике с током при рассмотрении его в несобственной системе отсчета. Дополнительный электрический момент, предсказываемый соотношением (22.5), возникает вследствие релятивистского определения одновременности. Именно этот эффект объясняет парадокс, заключенный в действии униполярного индукционного генератора.

В § 9.5 мы рассматривали движение проводника, находящегося в контакте с внешней цепью, перпендикулярно к магнитному полю и пришли к выводу, что во внешней цепи потечет ток. При этом, если поле \mathbf{B} внешнее, то никаких трудностей не возникает. Если же это поле обусловлено постоянной намагниченностью самого проводника,

которая может быть описана эквивалентными токами Ампера, то возникает вопрос, каким образом эти токи приведут к образованию электростатического поля в движущейся системе отсчета. Теперь мы видим, что это поле является следствием общих свойств релятивистского преобразования магнитного момента M . Так как возникновение электрического момента обусловлено релятивистским определением одновременности, то униполярная индукция представляет собой существенно релятивистский эффект.

В практических устройствах для наблюдения униполярной индукции обычно используется вращение, поэтому необходимо сделать несколько замечаний относительно вращательного, а в общем случае ускоренного движения. Детальное рассмотрение систем отсчета, движущихся ускоренно, не входит в рамки этой книги, однако некоторые соображения все же необходимы для того, чтобы выяснить, насколько теория, изложенная здесь и в § 9.5, применима к реальным условиям опыта.

В отличие от инерциальных систем отсчета, которые нельзя различить никаким опытом, во вращающихся (ускоренных) системах такие опыты возможны. До сих пор мы имели дело с лоренцевыми (инерциальными) системами отсчета, в которых имеют место законы специальной теории относительности. Инерциальность систем отсчета определяется, по-видимому, силами гравитации. Поэтому преимущественная система отсчета среди вращательных будет определяться расположением масс во вселенной. Строго говоря, нет такой системы отсчета, в которой законы специальной теории относительности выполнялись бы точно. Дело в том, что гравитационные или «эквивалентные» (т. е. неотличимые от последних) инерциальные ускорения имеются всегда. Однако для всех электрических явлений поверхность Земли представляет вполне удовлетворительную инерциальную систему отсчета. Заметим, что все опыты, поставленные для проверки специальной теории относительности, учитывали влияние лишь поступательного, а не криволинейного движения Земли. Поэтому они и не могли выявить преимущественной системы отсчета.

В системах отсчета, вращающихся относительно Земли, можно наблюдать ряд электромагнитных явлений, указывающих на вращение системы отсчета. Существует множество парадоксов, основанных на неверном предположении, что явления в таких системах происходят так, как будто системы покоятся, а вращается весь остальной мир.

Рассмотрим так называемый «диск Фарадея» (рис. 22.4). Действие его основано на явлении, рассмотренном в § 9.5. Многие свойства диска Фарадея согласуются с выводами этого параграфа. В частности, все результаты, сведенные в табл. 9.1, касающиеся возможных относительных движений источника поля и внешней цепи, остаются верными. Остается в силе также и важное заключение, что вращение источника магнитного поля не влияет на физические яв-

ния, если поле при этом остается постоянным. Как и прежде, электродвижущую силу можно находить из закона Фарадея (9.2), определяя изменение магнитного потока через контур, по которому движутся носители тока. Правильный ответ дает также рассмотрение, основанное на «эффективной силе, действующей на электрон». Однако на этом общность инерциальной и неинерциальной систем отсчета кончается. Во вращающейся системе отсчета эффективное электрическое поле при малых скоростях определяется соотношением $E_r = \omega Br$. Дивергенция этого выражения не равна нулю, а следовательно, появляется объемный заряд. Это противоречит формулам преобразования при

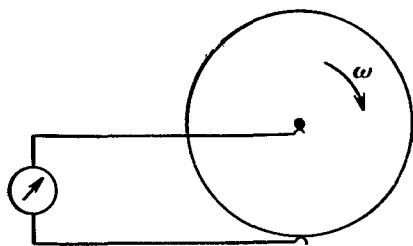


Рис. 22.4. Диск Фарадея, при вращении которого возникает униполярная индукция.

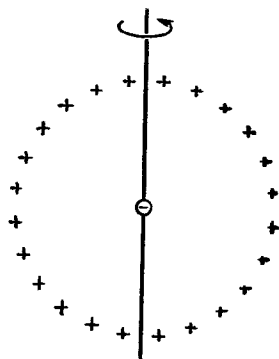


Рис. 22.5. Вращение распределения зарядов, суммарный заряд которого равен нулю.

прямолинейном движении (т. е. к инерциональной системе отсчета); таким образом, «абсолютное» вращение в принципе может быть обнаружено.

На рис. 22.5 приведена схема другого опыта, обнаруживающего абсолютное вращение. Пусть точечный отрицательный заряд расположен в центре положительно заряженной сферической поверхности. Если система покоится, то согласно теореме Гаусса вне сферы $E = B = 0$. Если же она вращается, то положительные заряды образуют кольцевые токи и, таким образом, система в целом обладает магнитным моментом. Следовательно, поле B как вне, так и внутри сферы отлично от нуля. Тем самым законы преобразования для прямолинейного движения вновь нарушаются. Непротиворечивое рассмотрение покоящихся и вращающихся систем отсчета возможно лишь на основе общей теории относительности ¹⁾.

¹⁾ См. L. I. Schiff, Proc. Nat. Acad. Sci. 25, 391 (1939).

Следует, однако, указать, что в рамках специальной теории относительности все соображения, изложенные в предыдущих разделах, применимы к любым полям в лоренцевских (инерциальных) системах отсчета независимо от того, движутся ли создающие их источники равномерно или ускоренно.

§ 22.4. Ковариантная форма законов сохранения в вакуумной электродинамике

Законы сохранения, рассмотренные в гл. 10, могут быть записаны в виде трехмерных тензорных соотношений

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\alpha} + \rho E_\alpha u_\alpha + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(E^2 + c^2 B^2)}{2} \right] = 0, \quad (22.19)$$

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}^M}{\partial x_\beta} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E \times cB)_\alpha = \rho [E_\alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_\alpha], \quad (22.20)$$

где вектор $N = E \times H$ представляет собой вектор Пойнтинга, а $T_{\alpha\beta}^M = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \delta_{\alpha\beta} (E_\gamma D_\gamma + H_\gamma B_\gamma)/2$ — тензор натяжений Максвелла. Соотношение (22.19) приравняет изменение электромагнитной энергии мощности, с которой энергия электромагнитного поля теряется на излучение и переходит в механическую и тепловую энергию. Второе соотношение связывает объемную силу со скоростью увеличения механического и электромагнитного импульсов. Оба соотношения можно свести в одно с помощью тензора энергии — импульса, определяемого симметричной матрицей

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -T_{11}^M & -T_{12}^M & -T_{13}^M & cG_x \\ -T_{12}^M & -T_{22}^M & -T_{23}^M & cG_y \\ -T_{13}^M & -T_{23}^M & -T_{33}^M & cG_z \\ cG_x & cG_y & cG_z & W \end{pmatrix}, \quad (22.21)$$

где $G = N/c^2$ — плотность импульса электромагнитного поля¹⁾, а $W = (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$ — плотность его энергии. При этом законы сохранения (22.19) и (22.20) принимают простую ковариантную форму

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = -f^i, \quad (22.22)$$

где

$$(f^i) = \rho \left(E + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \frac{E \cdot \mathbf{u}}{c} \right) \quad (22.23)$$

— четырехмерный вектор, представляющий собой силу Лоренца,

¹⁾ Соотношение $G = N/c^2$ можно считать следствием симметрии тензора $T^{ij} = T^{ji}$.

действующую на единицу объема, и мощность, с которой электромагнитное поле совершает работу над токами и зарядами в единице объема.

Для того чтобы показать, что T^{ij} действительно тензор, обратим внимание на то обстоятельство, что он может быть получен из тензора F^{ij} посредством тензорной операции

$$T^{ij} = \varepsilon_0 \left(F^{ik} F_k^j - \frac{1}{4} \delta^{ij} F^{kl} F_{kl} \right), \quad (22.24)$$

где $F_k^j = g_{kn} F^{jn}$; это преобразование позволяет легко проверить правильность соотношения (22.22). Второй член правой части соотношения (22.24) представляет собой инвариантный «след» тензора

$$F^{kl} F_{kl} = 2(c^2 B^2 - E^2). \quad (22.25)$$

Инвариантность $c^2 B^2 - E^2$ снова показывает, что отношение амплитуд электрического и магнитного полей в плоской волне постоянно.

§ 22.5. Некоторые следствия ковариантной формы законов сохранения

Законы сохранения, как и уравнения поля, удовлетворяют теории относительности без всякого изменения. Более того, релятивистское преобразование тензора (22.21) вновь подтверждает эквивалентность импульса переносу энергии. Из ковариантной формы законов сохранения и вида тензора энергии импульса следует еще ряд важных и интересных заключений.

1. Если «состояние равновесия» является инвариантным свойством системы, то следует вывод, что тензорному соотношению $f^j = \partial T^{ij} / \partial x^i$ подчиняются не только электромагнитные силы, энергия и импульс, но также и соответствующие механические величины. Например, среда, в которой существуют упругие натяжения, также должна подчиняться этому соотношению, причем в качестве W следует взять плотность энергии вещества (включая и плотность упругой энергии), G — плотность механического импульса, а $T_{\alpha\beta}^j$ — упругие натяжения. Такое представление дает возможность вывести формулы преобразования для всех величин, рассматриваемых в механике сплошных сред. Заметим, в частности, что плотность вещества в непрерывной среде не может рассматриваться как скаляр или даже как компонента четырехмерного вектора; она представляет собой компоненту тензора энергии — импульса с индексами (4.4). Величина $m = \int W dv$ преобразуется точно так же, как масса точечной частицы. Эти обстоятельства соответствуют тому факту, что имеется элементарный единичный заряд, а элементарная единичная масса отсутствует. Тензорный характер плотности оказывается весьма важным в общей теории относительности при изучении гравитационных свойств материи.

2. Рассмотрим объем v , абсолютно свободный от зарядов и токов, но содержащий некоторое количество излучения. Тензор энергии этого излучения (22.21) будет подчиняться закону сохранения

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad (16.24)$$

и, следовательно, в силу равенства (16.25) величина

$$G^i = \left(\int c \mathbf{G} dv, \int W dv \right) = - \int T^{4i} dv \quad (22.26)$$

представляет собой контравариантный четырехмерный вектор. Таким образом, энергия и импульс излучения, заключенного в конечном объеме, подчиняются точно тем же преобразованиям, как энергия и импульс точечной частицы. В отношении поля какого-либо заряда это утверждение неверно, так как соотношение (16.24) в этом случае не удовлетворяется; в последующем мы еще вернемся к этому вопросу.

Для плоской волны инвариант

$$G^i G_i = W^2 - c^2 G^2 \quad (22.27)$$

равен нулю, а следовательно, частицы, свойства которых эквивалентны свойствам этой волны, должны обладать нулевой массой покоя. С другой стороны, излучение, распространяющееся со скоростью c , подчиняется тем же преобразованиям, что и частица; при этом энергия и импульс остаются конечными, что было бы невозможно, если бы масса покоя не равнялась нулю. Поэтому представление о «квантах света» вполне согласуется с выводами электродинамики.

3. «Фаза» электромагнитной волны определяется соотношением

$$E = E_0 e^{i\varphi} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (22.28)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, а ω — угловая частота волны. Обращение поля в нуль в какой-либо точке пространства в определенный момент времени представляет собой инвариантный физический факт. Поэтому следует ожидать, что фаза φ также будет инвариантом. В этом случае ее можно представить в виде

$$\varphi = k_i x^i, \quad (22.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_i &= \left(\mathbf{k}, -\frac{\omega}{c} \right), \\ k^i &= - \left(\mathbf{k}, \frac{\omega}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

Так как $k_i k^i = 0$, то вектор k^i преобразуется так же, как вектор энергии — импульса частицы с нулевой «массой» покоя. Поэтому энергию и импульс световых квантов можно считать пропорциональными соответственно \mathbf{k} и ω , что и делается в квантовой теории.

Соотношения (22.30), определяя характер преобразования k и ω , дают вместе с тем простой способ получить релятивистски правильные выражения для доплеровского смещения и абберации света звезд. Рассмотрим источник света, покоящийся в системе отсчета Σ^0 и излучающий в направлении x , так что $k_x^0 = \omega^0/c$. Согласно преобразованиям Лоренца в системе отсчета Σ для ω получаем выражение

$$\omega = c\gamma \left(\frac{\omega^0}{c} - \beta k_x^0 \right) = \frac{\omega^0 (1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega^0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (22.31)$$

Это релятивистское соотношение для смещения Доплера. Выражение для абберации получится, если формулы преобразования применить к пространственным компонентам k^i . Угол абберации θ будет определяться соотношением

$$\sin \theta = \beta, \quad (22.32)$$

что согласуется с ранее полученным выражением (15.48).

4. Мы уже отмечали, что только при отсутствии зарядов энергии и импульс поля преобразуются так же, как энергия и импульс частицы с нулевой массой покоя. Рассмотрим теперь электромагнитное поле точечного заряда, движущегося равномерно со скоростью u в направлении оси x . В собственной системе отсчета тензор энергии — импульса имеет вид

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -T_{\alpha\beta}^M & 0 \\ 0 & W_0 \end{pmatrix}, \quad (22.33)$$

где W_0 — плотность энергии электростатического поля заряда. В произвольной системе отсчета компоненты тензора энергии — импульса согласно преобразованиям Лоренца будут иметь вид

$$T^{14} = \frac{\beta (W_0 - T_{11}^{M_0})}{1 - \beta^2}, \quad (22.34)$$

$$T^{44} = \frac{W_0 - \beta^2 T_{11}^{M_0}}{1 - \beta^2}. \quad (22.35)$$

Преобразование Лоренца мы выбрали таким, что система Σ^0 имеет положительную скорость в системе Σ . Тогда импульс и энергия поля в системе Σ будут равны

$$cG_x = \int T^{14} dv = \int \sqrt{1 - \beta^2} T^{14} dv_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int (W_0 - T_{11}^{M_0}) dv_0, \quad (22.36)$$

$$U = \int T^{44} dv = \int \sqrt{1 - \beta^2} T^{44} dv_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int (W_0 - \beta^2 T_{11}^{M_0}) dv_0, \quad (22.37)$$

где dv_0 — элемент объема в собственной системе отсчета. Если в этой системе заряд обладает сферической симметрией, то

$$\int W_0 dv_0 = U_0 \quad (22.38)$$

и

$$\int T_{11}^{M_0} dv_0 = \epsilon_0 \int \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E_0^2 \right) dv_0 = -\frac{\epsilon_0}{6} \int E_0^2 dv_0 = -\frac{U_0}{3}. \quad (22.39)$$

где U_0 — электростатическая энергия заряда. При выкладках мы воспользовались соотношением

$$E_x^2 = \frac{1}{3} E^2,$$

которому удовлетворяет сферически симметричное поле. Следовательно, импульс и энергия равны

$$G = \frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (22.40)$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right). \quad (22.41)$$

Совершенно очевидно, что эти выражения не преобразуются как компоненты 4-вектора. Это обстоятельство является дополнительным указанием на то, что электромагнитная масса частицы не составляет ее полной массы.

§ 22.6. Тензор энергии — импульса для материальных сред

Выше была показана плодотворность представления законов сохранения электродинамики вакуума в ковариантной форме. В случае, когда пространство заполнено материальной средой, ковариантное представление макроскопических полей встречается с некоторыми трудностями. Мы лишь вкратце остановимся на этом вопросе.

Законы сохранения в электродинамике вакуума (22.22) можно записать в виде

$$-f^j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = j_l F^{jl}, \quad (22.42)$$

где j^l — 4-вектор плотности тока. Если считать, что в материальной среде сила f^j по-прежнему определяется выражением $j_l F^{jl}$, где j^l — плотность свободных макроскопических зарядов и токов, подчиняющаяся соотношению (22.13), то необходимо ввести новый тензор энергии — импульса. Тогда уравнение, соответствующее уравнению (22.42), примет вид

$$-f^j = \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i}, \quad (22.43)$$

где

$$S^{ij} = g^{ik} \left(H^{il} F_{kl} - \frac{1}{4} \delta_k^i H^{ml} F_{ml} \right). \quad (22.44)$$

Соотношение (22.43) ковариантно, так как величина S^{ij} , определяемая соотношением (22.44), представляет собой тензор. Следовательно, с алгебраической точки зрения законы сохранения определены верно. Единственным возражением такому виду тензора энергии — импульса является его несимметричность: $S^{4i} \neq S^{i4}$ в случае диэлектриков и магнитных сред. Уравнения Максвелла появляются в результате усреднения микроскопических уравнений для вакуума. Казалось бы, что в результате такой операции никаких асимметричных свойств возникнуть не может. Поэтому большинство физиков в течение многих лет признавали лишь «исправленный» (т. е. симметризованный) тензор энергии — импульса.

Однако впоследствии было показано, что требование симметрии в случае поляризационных полей не является необходимым, так как при этом из рассмотрения выпадают все механические свойства системы. Единственное требование, которому должен подчиняться тензор S^{ij} , состоит в том, чтобы из него получалось правильное выражение для объемной силы Лоренца. Более полно этот вопрос разобран в монографии Мёллера, ссылка на которую дана ниже. Он показал, что верно соотношение (22.44), первоначально выведенное Минковским. Полный тензор энергии — импульса замкнутой системы, включающий и механические и электромагнитные составляющие, оказывается, конечно, симметричным. Отсюда можно сделать вывод, что соотношению $G = N/c^2$ должны подчиняться и механические свойства системы.

З а д а ч и

1. Покажите, что уравнения состояния в релятивистской форме имеют вид

$$H_{ij} u^i = \varepsilon F_{ij} u^i$$

и

$$u_j F_{kl} + u_k F_{lj} + u_l F_{jk} = \mu c^2 (u_j H_{kl} + u_k H_{lj} + u_l H_{jk}),$$

где $u_i = \frac{dx_i}{ds}$. Перепишите их в трехмерных обозначениях.

2. Проверьте правильность законов сохранения, полученных из тензора (22.24).

3. С помощью соотношения (22.44) определите компоненты тензора S^{ij} и покажите, что плотность электромагнитного импульса в веществе пропорциональна $D \times B$.

4. Докажите, что величина $F^{ik} F_l^j$ в соотношении (22.24) симметрична относительно индексов i и j .

5. Покажите, что $T_i^i = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Мøller, The Theory of Relativity.

Работа содержит очень хорошее подробное обсуждение законов сохранения в замкнутых системах. Рассмотрено также их распространение на случай макроскопических полей.

2. R. Вескер, Theorie der Elektrizität. (Русский перевод: Р. Беккер, Теория электричества, II)

В этой работе, кроме обычного тензора макроскопического поля, приведен также симметричный тензор энергии — импульса Абрагама. Предлагается заменить им асимметричный тензор, полученный Минковским для электромагнитной среды.

3. R. С. Толман, Relativity, Thermodynamics and Cosmology.

Гл. IV посвящена разбору релятивистской макроскопической электродинамики.

4. W. Паули, Relativitäts Theorie. (Русский перевод: В. Паули, Теория относительности.)

Классическое изложение вопроса, включая обсуждение проблем в том виде, как они представлялись в 1921 г.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Все материальные тела состоят из заряженных частиц, и поэтому, как указал Эйнштейн, описание вещества посредством тензора энергии весьма условно. Основная проблема электромагнетизма состоит в отыскании движения заряженных частиц, взаимодействующих посредством электромагнитных сил. Уравнения этого движения не обязательно выражать через поле: их можно сформулировать релятивистски ковариантным образом на основе действия на расстоянии¹⁾. Разделение задачи на «излучение» (т. е. создание поля системой зарядов) и «движение зарядов в поле» в некотором смысле искусственно и иногда приводит к трудностям. Такое разделение предполагает, в частности, что излучение может быть вычислено из движения заряда под действием внешних сил. В действительности, однако, имеется еще «реакция излучения», которую следует принять во внимание для того, чтобы удовлетворить законам сохранения. Реакцию излучения можно определить из самого излучения и затем учесть в качестве поправки к внешним силам. Если движение достаточно устойчиво, то процесс последовательных приближений дает конечный результат. Если реакция излучения пренебрежимо мала, то упомянутое выше разделение имеет ряд достоинств, так как при этом не нужно знать природу источников, создающих поле. Ниже мы будем рассматривать только такие случаи, в которых реакцией излучения можно пренебречь.

§ 23.1. Вариационный принцип

Как показано в гл. 16 и 17, ковариантная форма уравнений движения частицы с зарядом e , массой покоя m_0 и четырехмерной скоростью u^i во внешнем поле F^{ij} имеет вид

$$m_0 c^2 \frac{du^i}{ds} = eu_j F^{ij}. \quad (23.1)$$

¹⁾ J. A. Wheeler and R. P. Feynman, *Revs. Modern. Phys.* 21, 425 (1949).

В трех измерениях это соответствует уравнению

$$\frac{dp}{dt} = e(E + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (23.2)$$

Как и раньше

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (23.3)$$

Так как уравнение (23.2) эквивалентно трем компонентам уравнения (23.1), то последнее является релятивистским продолжением уравнений движения при малых скоростях, вытекающих из определения поля.

Обычно для того, чтобы найти канонические уравнения движения, функцию Лагранжа выбирают так, чтобы сразу получить правильные уравнения. Так именно поступим и мы с тем, чтобы особо подчеркнуть инвариантные свойства этих уравнений.

Пусть мировая линия частицы задается уравнением $x^i(s)$, где s — «собственное время» этой частицы. Функцию Лагранжа L_4 в четырехмерном пространстве нужно выбрать так, чтобы движение частицы удовлетворяло вариационному принципу

$$\delta \int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i) ds = 0, \quad (23.4)$$

где вариация берется между двумя фиксированными точками x_0^i и x_1^i , как показано на рис. 23.1. Из условия инвариантности следует, что функция Лагранжа L_4 должна быть скаляром, а для того чтобы уравнения движения были линейными, функция L_4 должна быть не выше, чем второго порядка относительно u^i . Для свободной частицы можно положить

$$L_4 = \frac{m_0 c^2}{2} u^i u_i, \quad (23.5)$$

причем явная зависимость от x^i отсутствует, так как для свободной частицы все мировые точки эквивалентны. (Коэффициент при $u^i u_i$ может быть произвольным.) Введем скалярное взаимодействие с полем, описываемым четырехмерным потенциалом $\varphi^i(x^i)$. При этом функция Лагранжа примет такой вид:

$$L_4 = \frac{m_0 c^2}{2} u^i u_i + e u_i \varphi^i. \quad (23.6)$$

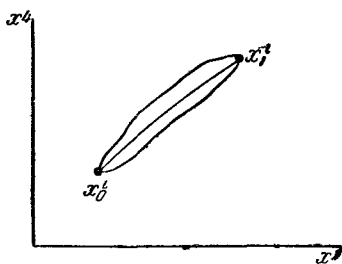


Рис. 23.1 Вариация мировой линии частицы.

(Константы в соотношении (23.6) выбраны так, чтобы в уравнениях движения фигурировали обычным образом определенные массы покоя и заряд.) Для того чтобы получить уравнения Эйлера соответствующей вариационной задачи, воспользуемся вариационным принципом (23.4)

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i) ds &= \\ &= \int_{x_0^i}^{x_1^i} \left[m_0 c^2 u_i \delta u^i + e \left(\varphi_i \delta u^i + \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \delta x^j u^i \right) \right] ds. \end{aligned} \quad (23.7)$$

В силу того, что $\delta u^i = \frac{d(\delta x^i)}{ds}$ и $\frac{d\varphi_i}{ds} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} u^j$, можно произвести интегрирование по частям

$$\delta \int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i) ds = \int_{x_0^i}^{x_1^i} \left[-\frac{d}{ds} (m_0 c^2 u_j) + e \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right) u^i \right] \delta x^j ds, \quad (23.8)$$

при этом проинтегрированная часть выпадает, так как вариации всех функций в точках x_0^i и x_1^i равны нулю. В силу того, что вариация $\delta x^j(s)$ произвольна вдоль пути интегрирования, выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком интеграла, должно быть равно нулю, т. е.

$$m_0 c^2 \frac{du_j}{ds} = e F_{j\mu} u^\mu. \quad (23.9)$$

Это ковариантный эквивалент контравариантному выражению (23.1)

§ 23.2. Уравнения Гамильтона и переход к трехмерному формализму

Обычную функцию Гамильтона нелегко ввести в наше рассмотрение в ковариантном виде, так как в обычные уравнения Гамильтона время входит несимметрично

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{dq_\alpha}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{dp_\alpha}{dt}. \quad (23.10)$$

С другой стороны, можно ввести функцию Гамильтона H_4 для

четырёхмерного пространства, подчиняющуюся соотношениям

$$\frac{\partial H_4}{\partial p^i} = \frac{dq_i}{ds}, \quad \frac{\partial H_4}{\partial q^i} = -\frac{dp_i}{ds}. \quad (23.11)$$

Тогда функция H_4 (отличная от H) должна быть скаляром.

Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что уравнений (23.11) восемь, в то время как уравнений (23.10) всего шесть. Связь между этими уравнениями мы установим следующим образом. Мы покажем, что если найти такой скаляр $H_4(p^i, q^i)$, который при подстановке в уравнения (23.11) давал бы правильные уравнения движения мировой точки, то величина этого скаляра была бы универсальной постоянной для данной частицы. Затем можно показать, что найденная из этих уравнений четвертая компонента импульса $p^4(x_\alpha, p_\alpha, x^4)$ удовлетворяет уравнениям (23.10), будучи подставленной в них вместо H . Так как компонента p^4 выведена посредством ковариантного процесса, то полученные в конце концов уравнения, хотя «явно» и не ковариантны, тем не менее релятивистски верны. Окончательной проверкой будет получение правильных релятивистских уравнений движения.

Функция Гамильтона в четырёхмерном пространстве, подчиняющаяся уравнениям (23.11), определяется посредством соотношений

$$H_4 = p^i u_i - L_4, \quad p^i = \frac{\partial L_4}{\partial u_i}; \quad (23.12)$$

последнее равенство согласно соотношению (23.6) можно представить в таком виде:

$$p^i = m_0 c^2 u^i + e\varphi^i. \quad (23.13)$$

Следовательно, явная функциональная зависимость H_4 от p^i и x^i имеет следующий вид:

$$H_4 = \frac{1}{2} m_0 c^2 u^i u_i = \frac{1}{2 m_0 c^2} \{ [p^i - e\varphi^i(x^i)] [p_i - e\varphi_i(x^i)] \}. \quad (23.14)$$

Однако, как легко проверить простой подстановкой компонент,

$$u^i u_i = 1.$$

Функция Гамильтона (23.14) совместно с уравнениями (23.11) даёт правильные уравнения движения. Прямым дифференцированием убеждаемся

$$\frac{\partial H_4}{\partial q^i} = \frac{e}{m_0 c^2} (p^j - e\varphi^j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} = -\frac{dp_i}{ds} = -m_0 c^2 \frac{du_i}{ds} - e \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} u^j. \quad (23.15)$$

Следовательно,

$$eu^j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} \right) = m_0 c^2 \frac{du_i}{ds}, \quad (23.16)$$

что согласуется с уравнениями (23.1).

Вернемся теперь к обычной трехмерной функции Гамильтона. Пусть

$$H(p_\alpha, q_\alpha, t) = p^4(p_\alpha, q_\alpha, x^4), \quad (23.17)$$

где p^4 — решение уравнения (23.14) при $H_4 = \frac{1}{2} m_0 c^2$, т. е.

$$H(p_\alpha, q_\alpha, t) = e\varphi + c \sqrt{(p - eA)^2 + (m_0 c)^2}. \quad (23.18)$$

Если предположить, что

$$L = -H + p \cdot u, \quad (23.19)$$

и

$$p - eA = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m u,$$

то получим

$$L(u, q_\alpha, t) = -e\varphi + e(A \cdot u) - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (23.20)$$

т. е. обычную трехмерную функцию Лагранжа. Заметим, что эта функция Лагранжа удовлетворяет релятивистскому условию, чтобы интеграл действия

$$\int L dt = - \int (u^i \varphi_i + m_0 c^2) ds \quad (23.21)$$

был бы скалярным инвариантом. Легко показать, что трехмерные функции Гамильтона (23.18) и Лагранжа (23.20) приводят к уравнениям движения (23.2).

Остается показать, что если $p^4 = H$, то H удовлетворяет уравнениям (23.10). С помощью уравнений (23.11) можно установить связь между x^4 и s , т. е. между «временем» и «собственным временем»:

$$\frac{dx^4}{ds} = \frac{\partial H_4}{\partial p^4}. \quad (23.22)$$

Следовательно, в общем случае

$$\frac{dx_\alpha}{dx^4} = - \frac{\frac{\partial H_4}{\partial p_\alpha}}{\frac{\partial H_4}{\partial p^4}}, \quad \frac{dp_\alpha}{dx^4} = \frac{\frac{\partial H_4}{\partial x_\alpha}}{\frac{\partial H_4}{\partial p^4}}. \quad (23.23)$$

(Следует обратить внимание на перемену знака из-за наличия ковариантных компонент в уравнениях (23.11).) Приравняем теперь

нулю полные производные инварианта (23.14); в результате получим

$$\frac{\partial H_4}{\partial x_a} + \frac{\partial H_4}{\partial p_4} \frac{\partial p_4}{\partial x_a} = 0, \quad (23.24)$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial p_a} + \frac{\partial H_4}{\partial p_4} \frac{\partial p_4}{\partial p_a} = 0. \quad (23.25)$$

Совместно с соотношениями (23.23) это дает

$$\frac{dx_z}{dt} = \frac{\partial p_4}{\partial p_a}, \quad (23.26)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial p_4}{\partial x_a}. \quad (23.27)$$

Таким образом, $p_4(x_a, p_a)$ удовлетворяет обычным трехмерным уравнениям Гамильтона, и следовательно, постулированное нами равенство (23.17) приводит к релятивистски правильным функциям Гамильтона и Лагранжа.

§ 23.3. Уравнения траекторий

В предыдущем параграфе мы нашли различные релятивистски правильные выражения, удобные для того, чтобы интегрировать уравнения движения по времени. Однако часто встречаются случаи, когда желательно получить уравнения для траектории частицы, не рассматривая ее движение во времени. Эти уравнения можно найти, проинтегрировав уравнения движения по времени и затем исключить время. Однако в общем случае менее громоздко непосредственно получить дифференциальные уравнения для траектории в пространстве. Наиболее просто это сделать с помощью «принципа наименьшего действия».

Напомним, что в классической механике чаще всего используются

два вариационных принципа: 1) принцип Гамильтона, $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$,

2) принцип наименьшего действия, $\delta \int_{x_{a1}}^{x_{a2}} p \cdot dx = 0$. Эти принципы весьма

различны по физическому смыслу. Мы уже пользовались принципом Гамильтона, при этом варьировался путь между двумя неизменными точками в пространстве и времени; на варьированном пути уравнения движения или законы сохранения не выполняются. В принципе наименьшего действия конечные точки закреплены в пространстве, но не во времени; при этом на варьированном пути выполняется закон сохранения энергии.

Совместно со вторым соотношением (23.19) принцип наименьшего действия дает

$$\delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = \delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} (m\mathbf{u} + e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = \delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + e\mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (23.28)$$

Пусть теперь одна из трех координат, например x , будет независимой переменной. Тогда уравнение (23.28) примет такой вид:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} [m u \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + e(A_x + A_y y' + A_z z')] dx = 0, \quad (23.29)$$

где y' и z' равны соответствующим производным $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Соответствующие уравнения Эйлера и будут дифференциальными уравнениями траектории, если величина скорости известна как функция x . Так как в принципе наименьшего действия на варьированном пути выполняется закон сохранения энергии, то u можно выразить через кинетическую энергию T и энергию покоя частицы E_0 :

$$\frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{E_0}.$$

Если ввести параметр $\tau = \frac{T}{E_0}$, то вариационное уравнение сведется к следующему:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \left[\sqrt{2\tau \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) (1 + y'^2 + z'^2)} + \frac{ec}{E_0} (A_x + A_y y' + A_z z') \right] dx = 0. \quad (23.30)$$

Основное приложение этих результатов — это расчет траекторий в электрических и магнитных оптических устройствах. Это довольно специальная область; и мы рассмотрим только решения, представляющие общий интерес. Более подробное изложение можно найти в трудах по электронной оптике (см. литературу в конце главы).

В электронной и ионной оптике обычно имеют дело с траекториями вблизи какой-либо оси. Рассмотрим поэтому случай осевой симметрии, в которой единственной компонентой A будет A_θ , не зависящая от θ . Воспользуемся цилиндрическими координатами и будем считать z независимой переменной. Тогда $r' = \frac{dr}{dz}$ и $\theta' = \frac{d\theta}{dz}$, а уравнение (23.30) преобразуется к такому виду:

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} \left[\sqrt{2\tau \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) (r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)} + \frac{ec}{E_0} A_\theta r \theta' \right] dz = 0. \quad (23.30')$$

Уравнения Эйлера для $r(z)$ и $\theta(z)$ получаются из (23.30') обычным образом. Первый интеграл уравнения для $\theta(z)$ находится сразу же и приводит к закону «сохранения канонического углового момента»

$$\frac{r^2 \theta' \sqrt{2\tau \left(1 + \frac{\tau}{2}\right)}}{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)^{1/2}} + \frac{ec}{E_0} A_0 r = C. \quad (23.31)$$

Можно показать, что это уравнение эквивалентно следующему:

$$r p_\theta + e A_0 r = C', \quad (23.32)$$

где

$$p_\theta = \frac{r \dot{\theta} m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, частица, находящаяся в поле, при вылете из него получит механический угловой момент. Угловой момент частицы, влетающей в поле, изменится, однако при вылете из поля он восстановится до прежнего значения.

Соотношение (23.31) можно подставить в дифференциальное уравнение для $r(z)$. Тем самым зависимость от θ' может быть исключена. Получающееся в результате этого уравнение довольно сложно, однако его можно упростить следующей заменой переменных:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2\tau \left(1 + \frac{\tau}{2}\right), \\ \eta &= \frac{1}{\xi^{1/2}} \left(\frac{C}{r} - \frac{ec}{E_0} A_0\right), \\ \lambda &= \xi(1 - \eta^2), \end{aligned} \right\} \quad (23.33)$$

где C — та же константа, что и в соотношении (23.31). Тогда уравнение Эйлера без каких-либо приближений будет иметь вид

$$r'' = \frac{1 + r'^2}{2\lambda} \left[(1 + r'^2) \frac{\partial \lambda}{\partial r} - r' \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right]. \quad (23.34)$$

Это уравнение весьма общего вида. В практически интересных случаях оно упрощается. Так, в чисто электростатической системе λ — кинетическая энергия частицы, т. е. просто электростатический потенциал.

Уравнение (23.34) существенно упрощается, если рассматривать «параксиальное» движение, т. е. такое движение, при котором наклон лучей к оси всегда невелик. В этом случае возможны два приближения: можно пренебречь r'^2 и, кроме того, производные $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ можно связать посредством уравнений поля. Для области вблизи оси

мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (23.35)$$

и

$$A_0 = \frac{B_r}{2} \quad (23.36)$$

с точностью до членов порядка r^2 . Таким образом, значения φ и B нужно знать только на оси. При таких приближениях уравнение (23.34) приводится к виду

$$r'' + r' \frac{\tau'}{2\tau} \left(\frac{1+\tau}{1+\tau/2} \right) + \frac{r}{4} \frac{\tau''}{\tau} \left(\frac{1+\tau}{1+\tau/2} \right) + \frac{r}{8} \frac{(eB/m_0c)^2}{\tau(1+\tau/2)} - \frac{C^2}{2\tau(1+\tau/2)r^3} = 0. \quad (23.37)$$

Если ввести обозначения $\beta = u/c$ и $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, то запись уравнения упрощается

$$r'' + \frac{r'\gamma'}{\beta^2\gamma} + \frac{r\gamma''}{2\beta^2\gamma} + \frac{r}{4} \left(\frac{Be}{m_0c\beta\gamma} \right)^2 - \frac{C^2}{\beta^2\gamma^2 r^3} = 0. \quad (23.38)$$

Физический смысл этого уравнения очевиден. Первые три члена соответствуют действию электрических линз при отсутствии углового момента. Если же канонический угловой момент отличен от нуля, то появляется последний член, описывающий «центробежный потенциал» или эффективное «отталкивание от оси». Четвертый член описывает фокусирующее действие магнитного поля. Мы рассмотрим действие этих членов отдельно.

§ 23.4. Простейшие электронно-оптические устройства

1. *Электрическая линза и источник лучей находятся на оси, $B=0=C$.* В этом случае уравнение (23.38) приводится к такому виду:

$$r'' + \frac{r'\gamma'}{\beta^2\gamma} + \frac{r\gamma''}{2\beta^2\gamma} = 0 \quad (23.39)$$

или

$$(\beta\gamma r')' + \frac{r\gamma'}{2\beta} = 0. \quad (23.40)$$

Качественно действие электростатической линзы основано на изменении скорости частицы, пролетающей через поле. На рис. 23.2 положительно заряженная частица пересекает систему слева направо. Как в ускоряющей линзе, так и в замедляющей частица больше времени проводит в фокусирующем поле, нежели в дефокусирующем, поэтому суммарное действие в обоих случаях будет фокусирующим. Если ограничиться нерелятивистским приближением, то этот эффект легко оценить количественно. Для этого воспользуемся преобразованием

$$R = rT^{1/4}. \quad (23.41)$$

Тогда уравнение (23.39) преобразуется к уравнению

$$R'' + \frac{3}{16} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 R = 0, \quad (23.42)$$

откуда непосредственно и следуют фокусирующие свойства электростатической линзы. Интегрируя уравнения (23.42) по области, занимаемой полем, можно вычислить фокусные расстояния такой линзы.

Скорость частицы, или квадратный корень из электростатического потенциала (в нерелятивистском случае), аналогичны показателю преломления n в оптике. Это легко понять, если обратить внимание на соответствие между принципом Ферма в оптике, $\delta \int_{x_1}^{x_2} n dl = 0$, и принципом наименьшего действия для нерелятивистского случая,

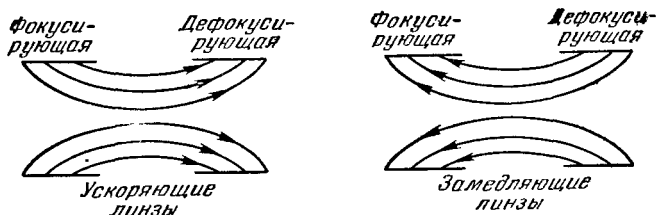


Рис. 23.2. Ускоряющая и тормозящая электростатические линзы.

Обе линзы в целом оказывают фокусирующее действие.

$\delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{T} dl = 0$. Любопытно также отметить, что линза является устройством «второго порядка» в том смысле, что ее фокусирующее действие квадратично зависит от T' , а следовательно, и от величины продольного поля. Физически это связано с тем обстоятельством, что действие линзы обусловлено как изменением скорости в поле, так и действием радиальной компоненты поля.

Ради простоты мы рассматриваем нерелятивистский случай. Однако те же рассуждения пригодны и в общем случае, за исключением того, что преобразование, приводящее к уравнению (23.42), несколько более сложно, чем (23.41).

2. *Магнитостатическая линза; источник лучей по-прежнему на оси линзы; $C=0$.* Если электростатические поля отсутствуют, то энергия частицы будет постоянна. Уравнение (23.38) в таком случае сведется к следующему:

$$r'' + \frac{r}{4} \left(\frac{B}{B\rho} \right)^2 = 0, \quad (23.43)$$

где $B\rho = ct_0\beta\gamma/e$ — магнитная жесткость частицы, т. е. произведение магнитного поля на радиус кривизны в нем. Никаких ограничений

на величину скорости частицы нет. Очевидно, что магнитная линза, подобно электростатической, всегда собирающая. Ее фокусные расстояния легко определить, проинтегрировав уравнение (23.43).

И в этом случае действие линзы квадратично зависит от поля. Поясним это физически. Рассмотрим для примера магнитную линзу в виде соленоида (рис. 23.3). Частица, входящая в соленоид, углового момента не имеет. После того как частица пролетит область

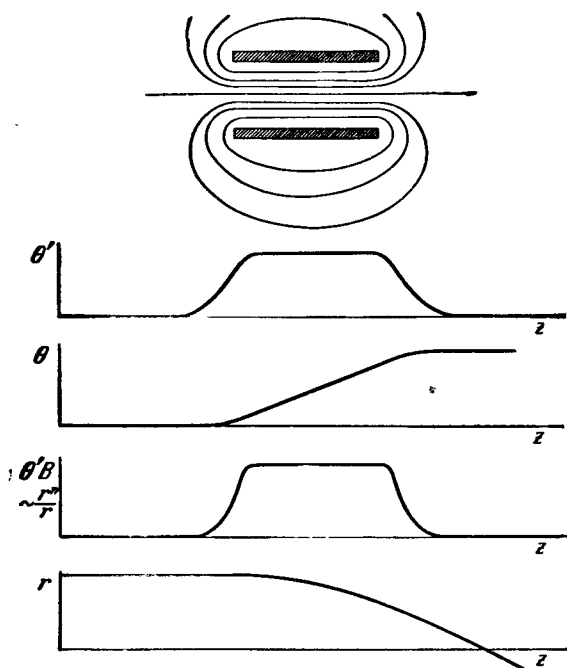


Рис. 23.3. Действие магнитной линзы.

сходящегося поля, она получит согласно соотношению (23.32) углового момента

$$-p_{\theta} = eA_{\theta} \approx \frac{eBr}{2}. \quad (23.44)$$

Этот угловой момент появляется в результате действия на частицу силы Лоренца в этой области поля. В дальнейшем вследствие взаимодействия поперечной скорости частицы с продольной компонентой B появляется сила, направленная к оси. Таким образом поле действует дважды, и суммарный эффект квадратичен. Читатель может самостоя-

тельно убедиться в том, что направление результирующей силы всегда противоположно направлению радиуса-вектора.

3. *Общий случай.* Уравнение (23.38) можно преобразовать

$$\frac{d}{dz} (\beta \gamma r') + r \left\{ \frac{\gamma''}{2\beta} + \frac{1}{4} \left(\frac{eB}{m_0 c} \right)^2 \frac{1}{\beta \gamma} - \frac{C^2}{\beta \gamma r^4} \right\} = 0. \quad (23.45)$$

В таком виде, если отвлечься от последнего члена, оно представляет собой уравнение гармонического осциллятора с переменными массой и жесткостью. Влияние последнего члена эквивалентно наличию отталкивающего центра с потенциалом, пропорциональным r^{-2} . Наличие углового момента, не равного нулю, не позволяет частице пересечь ось системы.

В общем случае для решения уравнения (23.45) требуется численное или графическое интегрирование, при этом зависимость β и γ от z через величину электростатического потенциала на оси считается известной. Если $C = 0$ и параметры слабо зависят от радиуса, то уравнение можно проинтегрировать с помощью так называемых адиабатических инвариантов в квазиклассическом приближении. В конечном счете получается соотношение

$$(Fr)' + Gr = 0. \quad (23.46)$$

Если F и G как функции z удовлетворяют условиям

$$\frac{F'}{F} \ll \sqrt{\frac{G}{F}},$$

$$\frac{G'}{G} \ll \sqrt{\frac{G}{F}},$$

то решения уравнения (23.46) имеют вид

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{FG}} e^{\pm i \int \sqrt{GF} dz}. \quad (23.47)$$

Показатель в экспоненте можно вычислять аналитически и численно в зависимости от природы поля.

4. *Линзы первого порядка.* Нетрудно показать, что линзы первого порядка, электрическая или магнитная, обладающие круговой симметрией — невозможны. Дело в том, что в силу условия $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ среднее значение E_r в области, где нет зарядов, всегда равно нулю. Аналогично в магнитном поле среднее значение азимутальной компоненты B_θ равно нулю, так как в области, где нет токов, магнитное поле — безвихревое. Следовательно, в поле с круговой симметрией частица не может получить импульс, пропорциональный первой степени E или B .

Фокусирующее действие первого порядка возможно в асимметричных линзах. Примером подобных линз являются электрические или магнитные квадрупольные линзы, обладающие, правда, полным астигматизмом. Как легко видеть из рис. 23.4, действие подобной тонкой линзы

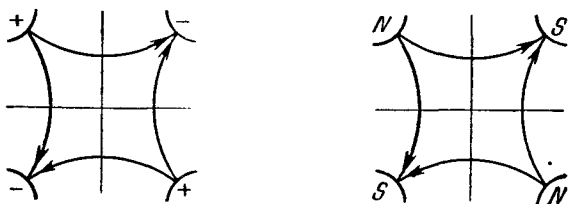


Рис. 23.4. Электрическая и магнитная квадрупольные линзы.

противоположно в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Следовательно, утверждение о том, что усредненный по азимуту радиальный импульс, сообщенный частице, равен нулю — в данном случае неверно.

Комбинация из собирающей и рассеивающей линз разной силы, разделенных некоторым расстоянием, дает собирающий эффект. Следовательно, комбинация последовательных квадрупольных линз, повернутых друг относительно друга на 90° , приведет к фокусировке. Эти соображения составляют основу принципа сильной фокусировки в электронной и ионной оптике.

5. Решения, упрощающиеся при перемене системы отсчета. Интегрирование уравнений движения часто упрощается при переходе к системе отсчета, не связанной с наблюдателем. Наиболее удобный случай, когда при перемене системы отсчета вместо двух полей — электрического и магнитного, появляется одно — чисто электрическое или чисто магнитное. Возможность подобных преобразований вытекает из наличия скалярного и псевдоскалярного инвариантов

$$E^2 - c^2 B^2 = I_1, \quad (23.48)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = I_2. \quad (23.49)$$

В гл. 17 мы видели, что если $I_1 = 0 = I_2$, то имеется плоская волна, все свойства которой инвариантны. Если $I_2 = 0$, а $I_1 \neq 0$, то можно избавиться либо от \mathbf{B} , либо от \mathbf{E} . Если $E < cB$, то можно найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$. Если магнитное поле \mathbf{B} однородно, то траектории будут представлять собой окружности (или спирали), а в лабораторной системе отсчета — циклоиды. Если же $cB < E$, то можно найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{B} = 0$. Если \mathbf{E} при этом будет однородным, то траектория представляет собой цепную линию. В случае, когда $I_2 \neq 0$, т. е. имеется компо-

нента E , параллельная B , ни от одного из полей избавиться нельзя. Однако, если E параллельно B , то движение в плоскости, определяемой полем и начальной скоростью, зависит только от E и легко интегрируется. После этого нетрудно найти движение и перпендикулярно к этой плоскости.

Задачи

1. Покажите, что функция Лагранжа вида

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - e\varphi + eA \cdot u$$

дает правильные уравнения движения.

2. Покажите, что траектория частицы с зарядом e и массой покоя m_0 в однородном электрическом поле \bar{E} , параллельном оси x , описывается уравнением

$$x = \frac{U_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c},$$

где $U_0 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 p_0^2}$, а p_0 — начальный импульс в направлении оси y . Импульс в направлении оси x при $y = 0$ предполагается равным нулю.

3. Рассмотрите электростатическую систему для ускорения заряженных частиц, подобную тем, которые применяются в электростатических генераторах. Энергия вылетающих частиц равна

$$e\varphi = k \left(z + \frac{g\alpha}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{g} \right),$$

$$e\varphi' = k \left(1 + \alpha \cos \frac{2\pi z}{g} \right),$$

где z — расстояние до оси, а k — среднее значение ускоряющего поля. Величина α , определяемая равенством

$$1 + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\bar{E}^2}{(\bar{E})^2},$$

есть мера отклонения поля на оси от среднего значения. Предположим, длина волны этих отклонений g невелика по сравнению с фокусным расстоянием каждой из линз толщиной g . Тогда вместо величины φ'^2 можно подставить среднее квадратичное значение и соответственно в φ можно пренебречь членом, обусловленным отклонением поля от его среднего значения. Каково минимальное значение α , при котором траектории еще осциллируют?

4. Как практически в линзе с сильной фокусировкой реализовать электростатическое поле, комплексный потенциал которого

$$W = \frac{E_0 z^2}{2a},$$

где E_0 — электрическое поле на радиусе a . Не предполагая толщину линзы L малой, вычислите фокусные расстояния в плоскостях x и y .

5. Пусть два коаксиальных проводящих цилиндра равного радиуса заряжены до потенциалов $-V_0/2$, $+V_0/2$. Вычислите распределение потенциала между цилиндрами, предполагая расстояние между ними малым по сравнению с их радиусом a .

6. Положите в предыдущей задаче $V_0 = A \cos \omega t$, где $\omega \ll c/a$, так что применимо статическое решение. Пусть через это поле пролетает частица с зарядом e по траектории, параллельной оси, на расстоянии b от нее. Каков будет прирост ее энергии?

7. Рассмотрите, как частица с энергией $u_0 \gg eV_0$ проходит через поле задачи 5. Определите фокусное расстояние.

8. Докажите, что решение (23.47) удовлетворяет уравнению (23.46).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. (Русский перевод: Г. Голдштейн, Классическая механика.)

Среди других книг, в которых излагается обобщенная механика частиц, эта современная книга будет наиболее полезна для читателя.

2. H. S. Corben, P. M. Stehle, *Classical Mechanics*.

Другое современное руководство по классической механике. Непосредственно релятивистской механики в книге очень мало, однако проведено различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров, что весьма полезно в релятивистской теории.

3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля.

Гл. 3 посвящена движению зарядов в полях. Рассмотрено много вопросов, изложенных выше.

4. O. Klemperer, *Electron Optics*.

Кроме обсуждения принципов и многих приложений, книга содержит подробную библиографию.

5. V. K. Zworykin, G. A. Morton, E. G. Ramberg, I. Hillier, A. W. Vance, *Electron Optics and the Electron Microscope*.

Весьма полный обзор 1945 г.

6. Представляют интерес два обзора по электронной микроскопии, появившиеся в 1950 г.: один — Косслета, другой, — Мартина и др.

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В гл. 23 путем соответствующего выбора функций Лагранжа и Гамильтона мы получили возможность вывести ковариантные уравнения движений точечной частицы. Попытаемся теперь найти подходящие функции Лагранжа и Гамильтона, из которых вытекали бы уравнения движения поля, т. е. уравнения Максвелла. Никаких новых результатов классической электродинамики мы таким образом не получим, однако, именно через каноническую форму уравнений поля осуществляется переход к квантовой электродинамике. Кроме того, таким путем можно развить методы исследования полей иной природы, нежели электромагнитные.

При отыскании канонической формы уравнений Максвелла мы сталкиваемся с новым важным обстоятельством, а именно с тем фактом, что поле обладает бесконечным числом степеней свободы. Поэтому мы начнем с исследования перехода от механической системы с N степенями свободы к системе, у которой N становится бесконечным.

§ 24.1. Переход к одномерному континууму

Рассмотрим систему из N точечных частиц одинаковой массы m , соединенных пружинками с одинаковой упругостью k и длиной a (рис. 24.1). Пусть η_i представляет смещение i -й массы из положения

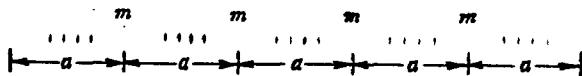


Рис. 24.1. Система материальных точек, соединенных пружинками.

равновесия. Решение задачи основано на выборе подходящей функции Лагранжа L с тем, чтобы путем вариации

$$\delta \int L(\eta_i, \dot{\eta}_i, t) dt = 0 \quad (24.1).$$

получить уравнения движения. Из механики известно, что $L = T - V$, где T и V соответственно кинетическая и потенциальная энергии. В нашей задаче, если пренебрегать влиянием концов, имеем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2]. \quad (24.2)$$

Эту функцию Лагранжа можно записать в таком виде:

$$L = \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i, \quad (24.3)$$

где

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right]. \quad (24.4)$$

Эту величину можно назвать линейной плотностью функции Лагранжа. Уравнение (24.1) с функцией Лагранжа (24.2) приводит к обычным уравнениям движения системы связанных осцилляторов; ортогонализация (24.2) дает нормальные колебания системы. •

Пусть теперь число степеней свободы стремится к бесконечности. При этом

$$\left. \begin{aligned} a &\rightarrow dx, \\ \frac{m}{a} &\rightarrow \mu, \\ ka &\rightarrow Y, \\ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} &\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

где μ — линейная плотность, а Y — модуль упругости. При таком переходе дискретный индекс i заменяется непрерывной переменной x , а функция Лагранжа приобретает следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] dx = \int \mathcal{L} dx, \quad (24.6)$$

где

$$\mathcal{L} \left(\eta, \dot{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, t \right) = \frac{1}{2} \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (24.7)$$

Таким образом, плотность функции Лагранжа явно зависит от пространственных производных «координат поля» η .

Из вариационного уравнения (24.1), которое теперь имеет вид

$$\delta \int L dt - \delta \int \int \mathcal{L} dx dt = 0, \quad (24.8)$$

можно вывести соответствующие уравнения Эйлера. Для этого в (24.8) подставим плотность функции Лагранжа (24.7). Интегрируя по частям

и не учитывая явной зависимости от времени, получим

$$\begin{aligned} \delta \int L dt &= \int \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} dx dt = \\ &= \int \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] \right\} \delta \eta dx dt = 0. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль в силу условия, что $\delta \eta = 0$ на границах области интегрирования по t . Так как $\delta \eta$ — произвольная функция x , то из (24.9) следует уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] = 0. \quad (24.10)$$

Это уравнение часто пишут в таком виде:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] = 0, \quad (24.11)$$

где выражение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] \quad (24.12)$$

называется «вариационной», или «функциональной» производной. Заметим, что при предельном переходе к непрерывной переменной система из N обычных дифференциальных уравнений Лагранжа заменяется одним уравнением в частных производных.

Подставляя в (24.11) плотность функции Лагранжа (24.7), получим волновое уравнение

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (24.13)$$

соответствующее упругим волнам, распространяющимся со скоростью $\sqrt{Y/\mu}$.

§ 24.2. Обобщение на трехмерный континуум

Изложенное в предыдущем параграфе может быть обобщено на случай трехмерного поля η , где η представляет собой произвольный ковариантный параметр. В этом случае вариационное уравнение, аналогичное (24.1), примет вид

$$\delta \int \int \mathcal{L} dv dt = 0, \quad (24.14)$$

или

$$\delta \int \int \mathcal{L} \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right) d^4 x = 0. \quad (24.15)$$

Очевидно, такая форма уравнения ковариантна, если плотность функции Лагранжа — скаляр. Проверим опять функциональную зависимость \mathcal{L} от η и $\frac{\partial \eta}{\partial x^i}$, считая x^i постоянными. Интегрирование по частям приводит к уравнению

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \right] \right\} d^4 x \delta \eta = 0, \quad (24.16)$$

откуда получаются ковариантные уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \right]. \quad (24.17)$$

Для того чтобы зависимость от времени сделать явной, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right), \quad (24.18)$$

где

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right)} \right], \quad (24.19)$$

причем $\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, а x^α представляют собой пространственные координаты.

Наша задача состоит в том, чтобы найти такую функцию \mathcal{L} , которая при подстановке в уравнения (24.17) приводила бы к уравнениям Максвелла. Очевидно, что все изложенные соображения применимы не только к электромагнитному полю, но и к любым другим полям.

Полученное нами уравнение Лагранжа в частных производных, а также принцип наименьшего действия имеют ковариантный вид. Для того чтобы ввести функцию Гамильтона, необходимо среди переменных x^i выделить время, как это сделано в соотношениях (24.18) и (24.19). После этого можно ввести «плотность импульса», сопряженную η ,

$$\pi(x^\alpha, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \quad (24.20)$$

и плотность функции Гамильтона

$$\mathcal{H} \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}, \pi, \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}, t \right) = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (24.21)$$

Уравнения Гамильтона можно получить обычным образом. Рассмотрим приращение $\delta \mathcal{H}$ полной функции Гамильтона $H = \int \mathcal{H} dv$:

$$\delta H = \int \left[\dot{\eta} \delta \pi + \pi \delta \dot{\eta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta \right] dv.$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа (24.17) и определением π , интегрируем по частям

$$\delta H = \int (\dot{\eta} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \eta) dv. \quad (24.22)$$

Так как

$$H = \int \mathcal{H} \left(\pi, \frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha}, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right) dv, \quad (24.23)$$

то можно написать

$$\delta H = \int \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha} \right)} \delta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right) \right] dv. \quad (24.24)$$

Если это выражение проинтегрировать по частям и результаты сравнить с выражением (24.22), то получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}, \\ \dot{\pi} &= - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (24.25)$$

где применено обозначение (24.19). Это и есть уравнения Гамильтона.

Уравнения Гамильтона позволяют выразить производную во времени через скобки Пуассона. Если Λ представляет собой плотность физической переменной L , т. е. $L = \int \Lambda dv$, то с помощью уравнений (24.25) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \int \left(\frac{\delta \Lambda}{\delta \eta} \dot{\eta} + \frac{\delta \Lambda}{\delta \pi} \dot{\pi} \right) dv = \\ &= \int \left(\frac{\delta \Lambda}{\delta \eta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} - \frac{\delta \Lambda}{\delta \pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \right) dv = \int [\Lambda, \mathcal{H}] dv, \end{aligned} \quad (24.26)$$

что аналогично обычным скобкам Пуассона. Эти выражения служат удобным исходным пунктом при квантовании уравнений поля. Если задана плотность функции Лагранжа \mathcal{L} , то изложенные выше соображения приводят к конкретным уравнениям поля. Для того чтобы

уравнения поля были линейными, функция Лагранжа не должна содержать η и $\frac{\partial \eta}{\partial x^i}$ в степени выше второй. В качестве простейшего примера рассмотрим функцию Лагранжа с плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \mu^2 \eta^2 \right), \quad (24.27)$$

которая при подстановке в (24.11) приводит к следующим уравнениям поля:

$$(\square - \mu^2) \eta = 0. \quad (24.28)$$

Соответствующая плотность импульса равна

$$\pi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (24.29)$$

в результате мы приходим к положительно определенной функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [c^2 \pi^2 + (\nabla \eta)^2 + \mu^2 \eta^2]. \quad (24.30)$$

Этими выражениями определяется скалярное мезонное поле Юкавы. В случае точечного источника потенциал этого поля имеет вид

$$\eta = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (24.31)$$

§ 24.3. Электромагнитное поле

В случае электромагнитного поля рассуждения более сложны. Теперь мы имеем дело с векторным полем, т. е.

$$\eta \rightarrow \varphi^i. \quad (24.32)$$

Полная функция Лагранжа должна иметь три члена: 1) член, описывающий движение материальных частиц; 2) член, описывающий взаимодействие частицы с полем, 3) член, соответствующий уравнениям поля.

Первые два члена можно написать на основе уже известных соображений предыдущих глав. Так, мы знаем, что получатся правильные уравнения движения точечной частицы во внешнем поле, если положить

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} g_0 c^2 u_i u^i, \quad (24.33)$$

где g_0 — плотность в собственной системе отсчета, а

$$\mathcal{L}_2 = j^i \varphi_i. \quad (24.34)$$

Для написания L_3 воспользуемся следующими соображениями: во-первых, плотность \mathcal{L} должна быть инвариантом, и во-вторых, функция L_3 должна быть аналогична классической функции Лагранжа в механике, пропорциональной разности потенциальной и кинетической энергий. При электромагнитных колебаниях энергия переходит из электрической в магнитную и обратно, как при механических из кинетической в потенциальную. Единственный скаляр, квадратичный относительно первых производных четырехмерного потенциала, имеет вид $F^{ij}F_{ij} = 2(c^2B^2 - E^2)$ (величина $F^{ij}G_{ij}$, где G_{ij} — тензор, дуальный тензору F_{ij} , исключается, ибо, как мы видели в § 17.2, она преобразуется не так, как другие члены функции Лагранжа). Конечно, плотность функции Лагранжа может содержать также члены, квадратичные относительно самого четырехмерного потенциала, подобные тому, который имеется в выражении (24.27), однако именно этот член приводит к экспоненциальной зависимости от r в решении для точечного источника (24.31). Таким образом, хотя плотность функции Лагранжа, аналогичная (24.27), оказывается возможной по своим трансформационным качествам, она не соответствует наблюдаемым на опыте свойствам электромагнитного поля. В квантовой механике теория, основанная на плотности функции Лагранжа, квадратичной как относительно потенциала, так и его производных, приводит к частицам с конечной массой покоя, в то время как в электромагнитной теории фотоны имеют нулевую массу покоя.

Таким образом, в случае электромагнитного поля

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\epsilon_0(E^2 - c^2B^2)}{2} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{ij}F_{ij}. \quad (24.35)$$

Заметим, что уравнения поля

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

уже содержатся в уравнениях

$$F^{ij} = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}, \quad (17.30)$$

соответствующих выражениям

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \times \mathbf{A}.$$

Таким образом, полная плотность функции Лагранжа равна

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{ij}F_{ij} + eu^i\varphi_i + \frac{1}{2}g_0c^2u^i u_i. \quad (24.36)$$

В пользу такого выбора функции Лагранжа свидетельствует также связь между плотностью функции Лагранжа и тензором энергии — импульса (22.24). Если за плотность функции Гамильтона принять по-прежнему плотность энергии, то можно написать

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (24.37)$$

Далее, вследствие равенства (24.21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L} \right) = \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^\alpha \partial t} dt = - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (24.38)$$

Следовательно,

$$N^\alpha = c T^{4\alpha} = \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\alpha} \right)}. \quad (24.39)$$

Ковариантное обобщение соотношений (24.39) и (24.21) дает

$$T_j^i = \frac{\partial \eta}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} - \mathcal{L} \delta_j^i. \quad (24.40)$$

Таким образом, наш выбор функции Лагранжа удовлетворяет и соотношению (24.39), и равенству $T_4^4 = \mathcal{H}$.

Легко показать, что плотность функции Лагранжа $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ приводит к уравнениям Максвелла. Однако такой выбор \mathcal{L} не единственен. Так как поля F^{ij} не зависят от величины $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i}$, то к \mathcal{L} можно прибавить любую функцию от $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i}$. Обычно пользуются условием Лоренца $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0$, хотя это и не обязательно.

Пользуясь равенствами $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_j} = j^j$, из соотношения (24.17) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right)} &= \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right)} \left[\left(\frac{\partial \varphi^l}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} \right) \right] \right\} = \epsilon_0 \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad (24.41)$$

и, следовательно, получаем уравнения Максвелла, описывающие источники поля

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}. \quad (17.34)$$

Те же вычисления можно проделать и для трехмерной плотности функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 (c^2 B^2 - E^2) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} + \rho \varphi, \quad (24.42)$$

и уравнения (24.19). В трехмерном случае имеем

$$\eta^\alpha = A^\alpha, \quad (24.43)$$

$$\pi^\alpha = -\epsilon_0 E^\alpha, \quad (24.44)$$

т. е. \mathbf{A} и \mathbf{E} — канонически сопряженные величины. Будучи выраженной через эти переменные, плотность функции Гамильтона для поля в отсутствие источников имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + \epsilon_0 (\nabla \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \\ & - \epsilon_0 (\nabla \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) - \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{\pi^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\nabla \times \boldsymbol{\eta})^2}{2\mu_0} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla \varphi). \end{aligned} \quad (24.45)$$

Специальным выбором калибровки последний член можно обратить в нуль; во всяком случае в силу равенства $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ объемный интеграл от последнего члена равен нулю, и таким образом, вклад в энергию он не дает.

§ 24.4. Периодические решения для ограниченной области.

Представление поля в виде суперпозиции плоских волн

Возможен и другой способ представления уравнений Максвелла в гамильтоновой форме. Для этого нужно ограничить число степеней свободы, заключив поле в прямоугольную полость с линейными размерами L . Граничные условия выберем так, чтобы поля были периодическими с периодом L во всех трех измерениях. Исторически возникновение этого метода связано с выводом закона Релея — Джинса (§ 21.9). Оказалось, что форма уравнений поля, полученная этим методом, легко поддается квантованию.

В качестве функции Гамильтона выберем величину

$$H = \int \left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \right) dv = \int \left[\frac{\pi^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} \right] dv. \quad (24.46)$$

Так как решения периодические, их можно разложить в ряд Фурье, т. е. любую векторную функцию, удовлетворяющую уравнениям

поля, можно представить в виде суммы функций

$$\mathbf{u}_{k\lambda} = \frac{1}{L^{3/2}} \mathfrak{E}_{k\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (24.47)$$

причем суммирование производится как по \mathbf{k} , так и по единичным векторам $\mathfrak{E}_{k\lambda}$. Граничные условия допускают следующие значения вектора:

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{L}\right) (l\hat{x} + m\hat{y} + n\hat{z}),$$

где l, m, n — положительные и отрицательные целые числа, а вектор $\mathfrak{E}_{k\lambda}$ может иметь три направления ($\lambda = 1, 2, 3$), что соответствует трем возможным поляризациям. Например, можно написать

$$\mathbf{A}(x^\alpha, t) = \sqrt{\mu_0} \sum_{k, \lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(r) q_{k\lambda}(t), \quad (24.48)$$

$$\boldsymbol{\pi}(x^\alpha, t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_{k, \lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(r) p_{k\lambda}(t). \quad (24.49)$$

Заметим также, что функции (24.47) удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_{k\lambda} &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{k\lambda}, \\ \nabla \times \mathbf{u}_{k\lambda} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{k\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (24.50)$$

Применим теперь все приведенные соотношения к полю излучения, т. е. к чисто поперечному полю. Калибровочное соотношение возьмем в виде $\varphi = 0$; тогда $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. В этом случае $\mathbf{k} \cdot \mathfrak{E}_{k\lambda} = 0$, и следовательно, суммирование по возможным поляризациям распространяется лишь на две компоненты \mathfrak{E}_{k_1} и \mathfrak{E}_{k_2} , перпендикулярные к \mathbf{k} . Таким образом,

$$\nabla \times \mathbf{u}_{k1} = i\mathbf{k} u_{k2}. \quad (24.51)$$

Для первого члена функции Гамильтона получаем выражение

$$\begin{aligned} \int \pi^2 d\mathbf{v} &= \frac{\varepsilon_0}{L^3} \int \sum_k \sum_{k'} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} p_k p_{k'} d\mathbf{v} = \\ &= \varepsilon_0 \sum_k \sum_{k'} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') p_k p_{k'} = \sum_k \varepsilon_0 p_k p_{-k}; \end{aligned} \quad (24.52)$$

так как $\boldsymbol{\pi}$ есть действительная величина, то выражение (24.49) равно своему комплексно-сопряженному, и вследствие равенства $\mathbf{u}_{k\lambda} = \mathbf{u}_{-k\lambda}^*$ мы должны положить $p_k = p_{-k}^*$. Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int \pi^2 d\mathbf{v} = \sum_k \sum_{\lambda=1}^2 |p_{k\lambda}|^2. \quad (24.53)$$

Кроме того, из соотношений (24.51) и (24.48) следует

$$\frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{A})^2 d\mathbf{v} = \sum_{k, \lambda} |ikq_{k\lambda}|^2 = \sum_{k, \lambda} k^2 |q_{k\lambda}|^2. \quad (24.54)$$

Таким образом, выражение для функции Гамильтона принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k, \lambda} (|p_{k\lambda}|^2 + k^2 |q_{k\lambda}|^2). \quad (24.55)$$

Каждый член этой суммы представляет собой функцию Гамильтона отдельного гармонического осциллятора. Поэтому уравнения электромагнитного поля эквивалентны уравнениям движения системы гармонических осцилляторов. Если размер ящика взять большим по сравнению с длиной волны рассматриваемого излучения, то число осцилляторов, приходящихся на интервал угловой частоты, равно $(\omega^2/\pi^2 c^3) d\omega$. Методами статистической физики можно найти среднюю энергию осциллятора, когда излучение находится в равновесии со стенками, находящимися при температуре T . Как мы видели, получающееся в результате распределение (21.65) находится в полном противоречии с опытом. Попытка Планка исправить это расхождение привела к возникновению квантовой механики.

Задачи

1. Покажите, что преобразование плотности функции Лагранжа следующего вида:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[C^i \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right) \right],$$

где C^i — произвольная векторная функция от η и $\partial\eta/\partial x^i$ не оказывает влияния на уравнения Эйлера. Тем самым будет показано, что выбор плотности функции Лагранжа для описания данного поля неоднозначен.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. (Русский перевод: Г. Голдштейн, Классическая механика.)

Вводные соображения о канонической форме теории полей имеются в гл. 11. Переход от дискретной системы к непрерывной мы проделали точно так же, как это делает Голдштейн в § 11.1.

2. G. Wentzel. (Русский перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию полей.)

Смысл канонического представления теории поля заключается в том, чтобы облегчить переход к квантовой теории. Поэтому обсуждение канонического представления имеется лишь в тех случаях, когда оно предшествует квантовомеханическому рассмотрению. Гл. 1 книги Вентцеля почти целиком посвящена классическим полям.

3. L. J. Schiff, *Quantum Mechanics*. (Русский перевод: Л. Шифф, Квантовая механика.)

Изложение, отличное от нашего, можно найти в гл. XIII и XIV.

ЕДИНИЦЫ И РАЗМЕРНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Характерной чертой классической механики является отсутствие в ней фундаментальных констант, органически свойственных теории. Поэтому законы классической механики подобно меняются при любом изменении входящих в них параметров. В классической механике все величины принято выражать, хотя это вовсе и не обязательно, через три основные величины: массу (M), длину (L) и время (T). Число таких величин может быть увеличено, если, например, в соотношении, связывающем объем с длиной [объем = K (длина)³], постоянную K считать размерной и отличной от единицы. Обычно объему приписывают размерность L^3 , однако в общем случае в этом нет необходимости. Точно так же число основных величин можно уменьшить. Для этого некоторые фундаментальные постоянные следует считать безразмерными и равными единице. Так, например, в квантовой механике часто пользуются условием $c = \hbar = 1$. В такой системе единиц $L = T = M^{-1}$.

Мы привели эти примеры для того, чтобы показать, что даже в классической механике число независимых размерностей произвольно, хотя из практических соображений то или иное их число оказывается более удобным, чем другие. В общем случае, чем больше число основных размерных величин, тем больше единиц, удобных для данных задач, может быть выбрано независимыми. Однако следует помнить, что при правильном рассмотрении изменение единиц и даже числа размерных величин никоим образом не влияет на физическое содержание уравнений.

В классической механике в основу системы единиц приняты размерности MLT , и возможности, обсуждавшиеся выше, не представляют большого интереса. В теории электромагнетизма введение единиц исторически произошло не так давно и потому вызывает большие разногласия.

В отличие от классической механики, теория электромагнетизма характеризуется фундаментальной постоянной c — скоростью света в вакууме. Вследствие этого физические законы подобно преобразуются, только если отношение длины и времени поддерживается

постоянным. Именно это свойство электродинамики теории относительности распространила на все законы физики.

Если для измерения механических величин электродинамики использовать систему размерностей MLT, то постоянная c с размерностью LT^{-1} возникает в теории явно. Введение дополнительных размерных единиц зависит целиком от дальнейших условностей. Например, константа K в законе Кулона $F = Kq_1q_2/r^2$ условно полагается безразмерной. Тогда заряд q будет иметь размерность $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$, и надобность в дополнительных единицах отпадает. Основанием для такого условия служит пример, приводившийся выше: полагая константу K в соотношении $V = KL^3$ безразмерной, получали для объема размерность L^3 .

Если в одном из соотношений, связывающих механические и электромагнитные величины, константу не считать безразмерной, то появляется возможность выбрать одну из электрических единиц произвольно и приписать ей размерность. Именно это и сделано в так называемой системе MKS.

В настоящей книге мы пользовались как раз этой системой, так как она получила в настоящее время достаточно общее признание. Главное удобство этой системы состоит в том, что ее основу составляют технические единицы — вольт, ампер, кулон и т. д., — и следовательно, она наиболее подходит для рассмотрения задач, в которые входят как цепи с сосредоточенными постоянными, так и поля. Так как эти технические единицы основаны на секунде, как единице времени, а единицей мощности является ватт, то для механических величин естественно выбрать единицы: метр, килограмм и секунда. При таком выборе механических и электрических единиц в уравнениях

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{12}}{r_{12}^3}, \quad (1)$$

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{j_1 \times (j_2 \times r_{12})}{r_{12}^3} dv_1 dv_2 \quad (2)$$

появляются константы ϵ_0 и μ_0 . Определение их численных значений мы отложим до ознакомления со способом выбора электрических единиц. Однако сразу же заметим, что в уравнениях имеются две константы μ_0 и ϵ_0 , в то время как действительно необходима лишь одна фундаментальная постоянная c .

Исторически система единиц CGSE определялась законом Кулона (1), причем постоянная $4\pi\epsilon_0$ считалась равной единице, а для механических единиц принималась система CGS. Тем самым электростатическая единица заряда определялась через механические единицы, указанные выше. Соответственно могут быть определены единицы потенциала, напряженности электрического поля и др. С другой

стороны, если в соотношении (2) положить $\mu_0 = 4\pi$, а для механических величин по-прежнему оставить единицы CGS, то это уравнение определит единицу тока (с размерностью $M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$), которая называется электромагнитной единицей (э. м. е.) или абсолютным ампером. Единицы для других электрических величин могут быть выведены из абсолютного ампера. Плотность зарядов и плотность токов, определяемые соответственно соотношениями (1) и (2), подчиняются уравнению

$$j_{\text{э. м. е.}} = \rho_{\text{э. с. е.}} \frac{u}{c}, \quad (3)$$

где c — представляет собой в данном случае отношение единиц. Впервые это отношение было измерено Вебером и Кольраушем по току разряда конденсатора, электростатическая емкость которого известна. Непротиворечивая система единиц (гауссова) получается в том случае, если для электрических величин применять электростатические единицы, а для магнитных — электромагнитные. При этом в уравнения войдет единственная константа c .

Как видно из соотношений (1) и (2), система MKS обычно употребляется в рационализированной форме, а система CGS в нерационализированной форме. Рационализированная форма отличается наличием множителя 4π в законах Кулона и Ампера; соответственно в уравнениях Максвелла этот множитель исчезает. Общие векторные соотношения не содержат такого множителя. Появление геометрического множителя с математической точки зрения обусловлено видом функции Грина. Если источник определяет сферически симметричное поле (например, точечный источник), то в рационализированной системе единиц множитель 4π получается в явном виде в конечном решении. Если же поле обладает круговой симметрией (например, от линейного источника), то появляется множитель 2π . Система единиц, аналогичная гауссовой, но в рационализированной форме, носит название системы Хевисайда — Лоренца.

Исторически ампер был принят равным точно $1/10$ абсолютного ампера, т. е. электромагнитной единицы тока. Это обстоятельство позволяет определить величину μ_0 в соотношении (2), ибо, как мы видели, абсолютный ампер определяется, если положить $\mu_0/4\pi = 1$. В качестве исходной электрической единицы обычно используется кулон, а не ампер. Поэтому для нахождения постоянных определяющие уравнения в электромагнитной системе нужно перевести в систему MKS.

В электромагнитной системе CGS имеем

$$1 \text{ дина} = 1 \text{ (абс. ампер)}^2$$

(так как все длины с правой стороны соотношения (2) сокращаются). Выражая соответствующие единицы в системе единиц MKS

(1 абс. ампер = 10 к/сек), получим

$$10^{-5} \text{ ньютон} = 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{10^2 \text{ к}^2}{\text{сек}^2},$$

т. е. для μ_0 получаем значение

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{к}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2\text{н}}{\text{м}},$$

Постоянная ϵ_0 получается из соотношения $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$:

$$\epsilon_0 = \left(\frac{10^7}{4\pi \text{ к}^2} \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \right) \left(\frac{\text{к}^2 \cdot \text{сек}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\phi}{\text{м}} \right).$$

Таким образом, мы произвольно выбрали величину и размерность электрической единицы, определив тем самым величину μ_0 . Величина ϵ_0 определяется из условия, что система единиц должна быть согласована с механическими единицами, а также из экспериментально известного значения фундаментальной постоянной c .

Электрические единицы, которые связываются с механическими эталонами посредством определяющих уравнений, называются абсолютными. Практически, однако, точность, с которой эта связь может быть осуществлена, оказывается недостаточной. Поэтому на время, пока точность проверки абсолютных единиц будет ниже воспроизводимости эталонов, условились основывать практические единицы на таких стандартах, так международный ампер и международный ом¹⁾. Улучшения в технике абсолютных электрических измерений свели прежние международные стандарты на роль вторичных стандартов. Точное численное значение $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ относится к абсолютным практическим единицам, а не к международным. Интересно отметить, что ϵ_0 в системе MKS зависит от экспериментального соотношения между скоростью электромагнитного излучения и стандартами длины и времени (а μ_0 не зависит); это соответствует явному присутствию постоянной c в системах единиц Гаусса и Хевисайда — Лоренца. В «естественной» системе единиц скорость света сама представляет собой стандарт. Конечно, только измерение скорости света может дать требуемое соотношение между скоростью распространения электромагнитного излучения и стандартами длины и времени. Следовательно, в абсолютном смысле получающееся число не имеет фундаментального значения. Практическое же значение его будет важно с точки зрения установления точной связи между стандартами длины и времени.

Совершенно ясно, что физический смысл основных соотношений будет одним и тем же во всех системах единиц. Законы электродинамики легко перевести из одной системы единиц в другую.

¹⁾ Так, например, международный ампер определяется как такой постоянный ток, который, проходя через водный раствор азотного серебра стандартного состава, выделяет каждую секунду 0,001118 г серебра.

В данной книге все соотношения для вакуума при замене

$$\begin{aligned} cB_{\text{МКС}} &\rightarrow B_{\text{гауссова}}, \\ \epsilon_0 &\rightarrow 4\pi^{-1}, \\ \mu_0\epsilon_0 &\rightarrow \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

перейдут в гауссову систему единиц. Табл. I. 1 содержит краткую сводку основных электромагнитных соотношений для вакуума в различных системах единиц. В табл. I. 2 для удобства дан список важнейших переходных множителей. Табл. I. 4 содержит другие численные постоянные и функциональные соотношения, полезные при расчетах, связанных с атомными частицами.

При рассмотрении уравнений в материальной среде положение несколько сложнее, чем при условиях пустоты, и часто приводит к ошибкам. Для иллюстрации рассмотрим процесс, посредством которого уравнения Максвелла распространяются на материальные среды.

В общем случае уравнения для вакуума имеют вид

$$D(F) = S, \quad (4)$$

где D — линейный дифференциальный оператор, действующий на поле F , а S — источник поля. В среде S распадается на две части: «свободные» (макроскопические) источники S и связанные — S_p , т. е.

$$D(F) = S + S_p. \quad (5)$$

Источник S_p связан с вспомогательной величиной F_p посредством того же дифференциального оператора

$$S_p = D(F_p), \quad (6)$$

и следовательно,

$$D(F - F_p) = S. \quad (7)$$

Таким образом, можно ввести специальное поле $F_H = F - F_p$:

$$D(F_H) = S, \quad (8)$$

определяемое исключительно свободными источниками. В табл. I. 3 это общее положение иллюстрируется на действительных электродинамических величинах.

Неопределенность возникает в силу того, что в этих общих соотношениях величины типа F_p (т. е. P и M) играют двойную роль. С одной стороны, в соотношениях

$$\rho_p = -\nabla \cdot P, \quad (9)$$

$$j_M = \nabla \times M \quad (10)$$

эти величины связаны с источниками — они описывают определенные распределения зарядов и токов. С другой стороны, их можно рассматривать как поля, электрическое и магнитное, источниками которых служат соответственно ρ_P и \mathbf{j}_M . В соотношениях

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (12)$$

написанных в обычной системе MKS, \mathbf{P} и \mathbf{E} , а также \mathbf{B} и \mathbf{M} даны в различных единицах: \mathbf{P} — в $\kappa/\text{м}^2$, а \mathbf{E} — в $\text{в}/\text{м}$, \mathbf{M} — в $\text{а}/\text{м}$, а \mathbf{B} — в $\text{вб}/\text{м}^2$. Это условие подчеркивает роль \mathbf{M} и \mathbf{P} , как величин, описывающих распределение токов и зарядов. Однако подход к этим величинам как к особым полям также справедлив, только несколько затемняется специальным выбором постоянных в соотношениях (11) и (12). В системе CGS эти соотношения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \end{aligned} \right\} \text{ (система Гаусса)}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{D} - \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + \mathbf{M}. \end{aligned} \right\} \text{ (система Хевисайда — Лоренца)}$$

В этом случае единицы всех величин одинаковы. Тем самым подчеркнуты свойства \mathbf{M} и \mathbf{P} как особых полей.

Для определения полей в общем случае приходится прибегать к уравнениям «состояния» — $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{B})$. Если они линейны, например,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (k - 1) \mathbf{E}, \quad (13)$$

то часто говорят, что \mathbf{E} — «интенсивная» переменная, а \mathbf{P} — «экстенсивная», т. е. \mathbf{E} — причина, а \mathbf{P} — следствие. Такая точка зрения подчеркивается еще тем обстоятельством, что $\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{P}$ представляет собой элемент произведенной работы. При таком подходе использование различных единиц для \mathbf{E} и \mathbf{P} представляется вполне обусловленным. При рассмотрении же материалов с постоянной поляризацией (электреты) или постоянных магнитов причинно-следственные соображения становятся гораздо менее ясными. Следует отметить, что основные соотношения (11) и (12) аддитивны; с другой стороны, соотношения типа (13) не являются достаточно общими.

В заключение можно сказать, что вопрос, имеют ли векторы \mathbf{E} , \mathbf{P} и \mathbf{D} (или \mathbf{B} , \mathbf{M} и \mathbf{H}) одинаковые единицы, не является вопросом принципиальным. Однако для ясного понимания классической теории материальных сред необходимо отчетливо представлять двойную роль величин \mathbf{P} и \mathbf{M} .

Основные соотношения электродинамики вакуума в различных системах координат

MKS, рационализованная	CGS, гауссова ¹⁾	Хевисайд - Лоренца	Естественная (рационализованная) $c = h = 1$
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot E = \rho$	$\nabla \cdot E = \rho$
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho r}{r^3} dv$	$E = \int \frac{\rho r}{r^3} dv$	$E = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho r}{r^3} dv$	$E = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho r}{r^3} dv$
$\nabla \times B = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times r$ $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times r}{r^3} dv$	$\nabla \times B = 4\pi j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$ $B = \int \frac{\left(j + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times r}{r^3} dv$	$\nabla \times B = j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$ $B = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\left(j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times r}{r^3} dv$	$\nabla \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t}$ $B = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\left(j + \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times r}{r^3} dv$
$\nabla \cdot B = 0$ $\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot B = 0$ $c \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot B = 0$ $c \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot B = 0$ $\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$
$F = e(E + u \times B)$	$F = e \left(E + \frac{u}{c} \times B \right)$	$F = e \left(E + \frac{u}{c} \times B \right)$	$F = e(E + u \times B)$

Продолжение

MKS, рационализованная	CGS, гауссова ¹⁾	Хевисайда -- Лоренца	Естественная (рационали- зированная $c = h = 1$)
$B = \nabla \times A$ $E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$	$B = \nabla \times A$ $E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$	$B = \nabla \times A$ $E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$	$B = \nabla \times A$ $E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$
$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot j + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot j + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & cB_y + E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x + E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 + E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}$	$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y + E_x \\ B_z & 0 & -B_x + E_y \\ -B_y & B_x & 0 + E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = 4\pi j^j$	<p>Коэффициенты F^{ij} имеют такой же вид, как в гауссовой системе единиц</p> $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = j^j$	<p>Коэффициенты F^{ij} имеют такой же вид, как в гауссовой системе единиц</p> $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = j^j$

¹⁾ В некоторых учебниках, использующих систему единиц Гаусса, ток j выражается в электростатических единицах. В этом случае в приведенных формулах перед током j следует поставить множитель $1/c$.

Переходные множители

Единица измерения в системе MKS	Фактор, на которое умножается число единиц системы MKS для получения соответствующей величины в гауссовой системе	Физическая величина в гауссовой системе единиц (CGS)
ампер	10^{-1}	Ток, абс. ампер
ампер/кв. метр	10^{-5}	Плотность тока, абс. ампер/кв. сантиметр
кулон	$3 \times 10^9 *$	Заряд, э. с. е.
кулон/куб. метр	$3 \times 10^3 *$	Плотность зарядов в э. с. е./куб. сантиметр
фарада = кулон/вольт	$9 \times 10^{-11} *$	Емкость, сантиметр
генри = вольт · секунда/ампер	10^9	Индуктивность, э. м. е.
джоуль	10^7	Энергия, эрг
ньютон	10^5	Сила, дина
ом = вольт/ампер	$1/30 *$	Сопротивление, э. с. е. потенциала на абс. ампер
	$1/9 \times 10^{11} *$	Сопротивление, э. с. е.
вольт	$1/300 *$	Потенциал, э. с. е.
вольт/метр	$1/3 \times 10^{-4} *$	Напряженность электрического поля, э. с. е.
кулон/кв. метр	$12\pi \times 10^5 *$	Электрическая индукция, э. с. е.
вебер = вольт · секунда	10^8	Магнитный поток, максвелл
вебер/кв. метр	10^4	Магнитная индукция, гаусс
ампер-виток/метр	$4\pi/10^3$	Напряженность магнитного поля, эрстед
обратный ом/метр	$3/10 *$	Проводимость, абс. ампер/кв. сантиметр
ампер-витки	$4\pi/10$	Магнитодвижущая сила, гильберт

Примечание. В переходных множителях, отмеченных звездочкой, множитель 3 представляет собой $c/10^{10}$, причем скорость c измерена в системе CGS. Если требуется большая точность, то следует воспользоваться более точным значением c . Дю Моид и Кохен дают для c значение $299792,9 \pm 0,8$ км/сек (Revs. Modern. Phys. 25, 961 (1953)).

Таблица 1.3

Связь между полями и их источниками (система MKS)

	Электрическое поле	Магнитное поле	Ковариантное описание
Вакуум (все источники считаются свободными)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}$
Материальная среда; источники разделены на свободные и связанные	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{1}{\epsilon_0} (j^j + j_M^j)$
Связанные источники выражены через вспомогательную функцию	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{(-\nabla \cdot \mathbf{P})}{\epsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(j^j + \frac{\partial M^{ij}}{\partial x^i} \right)$
Определение новых полей	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} - (-\mathbf{P})$	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	$H^{ij} = \epsilon_0 F^{ij} - M^{ij}$
Уравнения поля в среде	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^i} = j^j$

Полезные численные соотношения

А. Некоторые атомные постоянные *)

Гауссова	Хевисайда — Лоренца	МКС	Постоянная
$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}$	$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,04}$	$\frac{e^2}{4\pi\hbar c \epsilon_0} = \frac{1}{137,04}$	Постоянная тонкой структуры
$\frac{e^2}{mc^2} = 2,8178 \times 10^{-13} \text{ см}$	$\frac{e^2}{4\pi mc^2} = 2,8178 \times 10^{-13} \text{ см}$	$\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 mc^2} = 2,8178 \times 10^{-15} \text{ м}$	
$\frac{\hbar^2}{me^2} = 5,2917 \times 10^{-9} \text{ см}$	$\frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = 5,2917 \times 10^{-9} \text{ см}$	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5,2917 \times 10^{-11} \text{ м}$	Боровский радиус

Б. Если энергия частицы выражена в электронвольтах, то полезные следующие соотношения *):

$$E_0 = m_0 c^2 = 0,51097 \text{ Мэв (для электрона),}$$

$$E_0 = m_0 c^2 = 938,210 \text{ Мэв (для протона)}$$

1. «Магнитная жесткость» частицы $B\rho$ с кинетической энергией T и зарядом e .

Гауссова	МКС
$B\rho = \frac{10^8}{c} \sqrt{T^2 + 2TE_0} \sim \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{300}$	$B\rho = \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{c} \sim \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{3 \cdot 10^8}$

2. Натяжение τ -провода с током I , расположенной в магнитном поле вдоль траектории частицы с кинетической энергией T и зарядом e .

Гауссова	МКС
$\tau = I \sqrt{T^2 + 2TE_0} \times \frac{10^8}{c} \sim \frac{I \sqrt{T^2 + 2TE_0}}{300}$	$\tau c = I \sqrt{T^2 + 2TE_0}$

*) Численные величины взяты из статьи J. W. M. Du Mond и E. R. Cohen (Revs. Modern. Phys. 25, 961 (1953)).

Продолжение

3. Скорость u , импульс p , кинетическая энергия T и полная энергия E связаны следующими соотношениями.

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= \text{ch } \theta = \frac{T}{E_0} + 1 &= \sqrt{\left(\frac{cp}{E_0}\right)^2 + 1} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u^2}{c^2}\right)}} \\ \frac{cp}{E_0} &= \text{sh } \theta = \sqrt{\left(\frac{T}{E_0}\right)^2 + 2\frac{T}{E_0}} &= \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1} &= \frac{(u/c)}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \\ \frac{u}{c} &= \text{th } \theta = \frac{\sqrt{2TE_0 + T^2}}{T + E_0} &= \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{E} &= \frac{cp}{\sqrt{(cp)^2 + E_0^2}} \\ \frac{T}{E_0} &= \text{ch } \theta - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u^2}{c^2}\right)}} - 1 &= \frac{E}{E_0} - 1 &= \sqrt{\left(\frac{cp}{E_0}\right)^2 + 1} - 1 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

**ВЕКТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ
КООРДИНАТАХ**

При решении физических задач полезен список векторных операторов, выраженных в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Для вывода этих выражений можно следовать чисто формальным путем, исходя из вида этих операторов в декартовой системе координат и формул преобразования к другим системам. Поучительно однако вывести их, исходя из геометрических определений градиента, дивергенции и ротора. Можно остановиться на определенной системе координат, и в ней вывести нужные выражения, однако лучше получить выражения для произвольной системы криволинейных координат, а затем уже выделить различные частные системы координат. Мы сначала найдем соответствующие дифференциальные операторы в произвольной криволинейной правосторонней ортогональной системе координат, а затем напишем выражения для операторов в частных случаях декартовой, цилиндрической и сферической систем координат.

Трехмерный элемент длины представляет собой бесконечно малое смещение в пространстве. Если при этом изменяется только одна из трех ортогональных координат q_1, q_2, q_3 , то элемент длины равен

$$ds_1 = h_1 dq_1, \quad (1)$$

или подобные выражения для q_2 и q_3 . Для произвольного смещения

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (2)$$

Градиент скалярной функции ψ определяется условием

$$\nabla\psi \cdot ds = d\psi, \quad (3)$$

где $d\psi$ — изменение ψ при смещении на ds . Тогда компонента градиента будет иметь вид

$$(\nabla\psi)_1 = \lim_{ds_1 \rightarrow 0} \frac{\psi(q_1 + dq_1) - \psi(q_1)}{ds_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1}. \quad (4)$$

Для определения дивергенции рассмотрим бесконечно малый объем, ограниченный поверхностями $q_1 = \text{const}$, $q_1 + dq_1 = \text{const}$ и т. д., как показано на рис. II. 1. Применим теперь к вектору $A(q_1, q_2, q_3)$ с компонентами A_1, A_2, A_3 теорему Гаусса — Остроградского $\int \nabla \cdot A \, dv = \int A \cdot ds$, причем интегрирование распространим на ука-

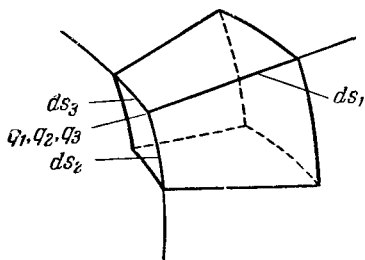


Рис. II. 1. Элемент объема для вычисления дивергенции.

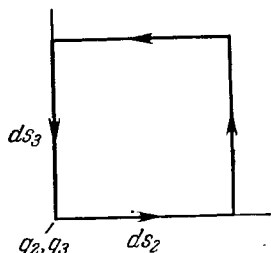


Рис. II. 2. Элемент площади в плоскости q_2q_3 для определения компоненты ротора вдоль оси q_1 .

Стрелки указывают направление пути интегрирования.

занный выше бесконечно малый объем. Интеграл от внешней нормальной компоненты A по двум поверхностям, перпендикулярным к направлению возрастания q_1 , равен

$$\begin{aligned} (A_1 \, ds_2 \, ds_3)_{q_1+dq_1} - (A_1 \, ds_2 \, ds_3)_{q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 \, ds_2 \, ds_3) \, dq_1 = \\ &= \frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} \, dv. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения имеют место для двух других систем поверхностей. Так как сумма этих трех членов по теореме Гаусса — Остроградского равна $\nabla \cdot A \, dv$, то для дивергенции получаем явное выражение

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3} \right). \quad (5)$$

Теперь мы можем написать выражение для лапласиана скалярной функции, так как это не что иное, как дивергенция градиента

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (6)$$

Для того чтобы вывести выражение для какой-либо компоненты ротора, применим теорему Стокса к бесконечно малой площади, ориентированной перпендикулярно к соответствующей координате. Рассмотрим площадь, определяемую элементами ds_2 и ds_3 (рис. II. 2).

Векторные соотношения в криволинейных координатах

Декартовы координаты	Цилиндрические координаты	Сферические координаты
Линейные элементы		
dx, dy, dz	$dr, r d\theta, dz$	$dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$
Компоненты градиента		
$(\nabla\psi)_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$
$(\nabla\psi)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}$	$(\nabla\psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$	$(\nabla\psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$
$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
Дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{A}$		
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
Компоненты ротора $\nabla \times \mathbf{A}$		
$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right)$
$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$
$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right)$
Лапласиан $\text{div grad } \psi = \nabla^2 \psi$		
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$

По теореме Стокса $\oint A \cdot ds = \int (\nabla \times A) \cdot ds$ или в нашем случае

$$(A_2 ds_2)_{q_3} + (A_2 ds_3)_{q_2+dq_2} - (A_2 ds_2)_{q_3+dq_3} - (A_3 ds_3)_{q_2} = (\nabla \times A)_1 ds_2 ds_3.$$

Следовательно,

$$(\nabla \times A)_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (7)$$

Остальные две компоненты получаются с помощью циклической перестановки координатных индексов.

В табл. II.1 приведены выражения для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в трех наиболее часто встречающихся системах координат. Определение других ортогональных систем координат можно найти, например, в книге: Margenau, Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*.

ЛИТЕРАТУРА

- Абрагам и Беккер, Теория электричества, т. I, Введение в теорию электричества Максвелла, Гостехиздат, 1939.
- Беккер Р., Теория электричества, т. II. Электронная теория. Гостехиздат, 1941.
- Gordon E. U., Principles of Microwave Radio, Rev. Mod. Phys. **14**, 341 (1942).
- Coslett V. E., Bibliography of Electron Microscopy, Arnold, 1950.
- Harnwell G. P., Principles of Electricity and Electromagnetism, 2 ed., McGraw-Hill, 1949.
- Hertz H., Electric Waves, Macmillan, London, 1893.
- Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 5 ed., Cambridge University Press, 1925.
- Klemperer O., Electron Optics, 2 ed., Cambridge University Press, 1953.
- Kraus T. D., Electromagnetics, McGraw-Hill, 1953.
- Lamont H. R. L., Wave Guides, 3 ed., Methuen, 1950.
- Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1962.
- Лорентц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, Гостехиздат, 1956.
- Marton C., and oth., Bibliography of Electron Microscopy, U. S. Government Printing Office, 1950.
- Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1919.
- Maxwell J. C., A Treatise on Electricity and Magnetism, 3 ed., Oxford University Press, 1904.
- Планк М., Введение в теоретическую физику, ч. III, Теория электричества и магнетизма, ГТТИ, 1933.
- Rosenfeld L., Theory of Electrons, Amsterdam, 1951.
- Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.
- Schott G. A., Electromagnetic Radiation, Cambridge University Press, 1912.
- Slater J. C., Microwave Electronics, Van Nostrand, 1950.
- Слэтер Дж., Электроника сверхвысоких частот, изд. «Сов. радио», 1948.
- Slater J. C., Frank N. H., Electromagnetism, McGraw-Hill, 1947.
- Смайт В., Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.
- Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958.
- Стрэттон Дж., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
- Weber E., Electromagnetic Fields, Theory and Applications, Vol. 1, Mapping of Fields, Wiley, 1950.
- Zworykin V. K., Morton G. A., Ramberg E. G., Hillier J., Vance A. W., Electron Optics and the Electron Microscope, Wiley, 1945.

Математические работы

- Byerly W. E., Fourier's Series and Spherical Harmonics, Ginn, 1893.
- Churchill R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, 1941.
- Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, ИЛ, 1933.

- Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, Госнаучтехиздат, 1939
- Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
- Kellogg O. D., Foundations of Potential Theory, Springer, 1929.
- MacRobert T. M., Spherical Harmonics, 2nd ed., Dover, 1948.
- Margenau H., Murphy G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, Van Nostrand, 1943.
- Морс П. и Фешбах Х., Методы теоретической физики, ИЛ, 1958.
- Pipes L. A., Applied Mathematics for Engineers and Physicists, McGraw-Hill, 1946.
- Syngе J. L., Schild A., Tensor Calculus, University of Toronto Press, 1949.
- Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
- Weatherburn C. E., An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus, Cambridge University Press, 1938.
- Уиттекер Э. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, 1933—1934.

Теория относительности

- Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.
- Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1960.
- Lorentz H. A., Einstein A., Minkowski H., Weyl H., The Principle of Relativity, Methuen, 1923.
- Мøller C., The Theory of Relativity, Oxford University Press, 1952.
- Паули В., Теория относительности, Гостехиздат, 1947.
- Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford University Press, 1934.
- Tolman R. C., The Theory of the Relativity of Motion, University of California Press, 1917.

Смежные проблемы

- Bergmann P. G., Basic Theories of Physics; Mechanics and Electrodynamics, 1949.
- Блатт Дж. и Вайскопф В., Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.
- Борн М., Оптика, Харьков—Киев, Госнаучтехиздат, 1937.
- Corben H. C., Stehle P. M., Classical Mechanics, Wiley, 1950.
- Fowler R. H., Statistical Mechanics, 2nd ed., Cambridge University Press, 1936.
- Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, 1957.
- Гайтлер В., Квантовая теория и гомеоплярная химическая связь, Харьков, Госнаучтехиздат, 1934.
- Joos G., Theoretical Physics, Hafner Publishing Co., 1951.
- Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.
- Lindsay R. V., Margenau H., Foundations of Physics, 1936.
- Lorentz H. A., Problems of Modern Physics, 1927.
- Mayer J. E., Mayer M. G., Statistical Mechanics, 1940.
- Морз Ф., Колебания и звук, Гостехиздат, 1949.
- Page L., Introduction to Theoretical Physics, 1952.
- Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, 1957.
- Slater J. C., Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, 1933.
- Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны, изд. «Сов. радио», 1957.
- Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л., Альперт Я. Л., Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.
- Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, 1948.
- Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, Гостехиздат, 1951.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика:
т. I. Механика, Физматгиз, 1958;
т. II. Теория поля, Физматгиз, 1962;
Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959;
Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
- Леонтович М. А., Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
- Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.
- Тамм И. Е., Основы теории электричества, Гостехиздат, 1957.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света звезд 259, 283, 284, 380
Абсолютная система отсчета 254—258
Ампера закон 127, 177, 321
— токи 136, 145, 375
Бесселя уравнение 96, 216
— функции 96—101, 220 и д.
Био и Савара закон 129, 318
Брэгга дифракция 363
Брюстера угол 199
Вариационная производная 401
Вариационный принцип 384—386
Вектор аксиальный 306, 307
— волновой 190
— поляризации 41, 240, 247
— полярный 306
— четырехмерный 288, 289 и д.
— электрической индукции 40
— эвергн-импульса 296, 379
Векторные поля 15—20
Виртуальные фотоны 322—324
Виртуальный радиус-вектор положения заряда 328
Волноводы 217—219
Волновое уравнение 185—187, 202
— — для потенциалов 231—232
— — неоднородное 232
— —, решение 233—236, 319—320
— —, решение общее 202—203
— —, собственные значения 207—211, 214
— —, функции 207—211
Волновой пакет 360—362, 369
Волны в проводящей среде 201, 202
— плоские 188—191
— сферические 222—224
— типа E и H . См. Колебания поперечно-магнитные и поперечно-электрические
Восприимчивость магнитная 145, 146
— электрическая 40
Время релаксации 126, 127, 186
Вынужденные колебания 353—354
Галилея преобразование 252, 253, 264, 268, 276
— принцип относительности 252—254
Гамильтона принцип 389
— уравнение 386—389, 403
— функция 311, 386—389, 399 и д.
Гаусса система единиц 413, 415
— теорема 21, 22, 72, 376
Гаусса—Остроградского теорема 17, 19, 36, 40, 53
Герца вектор 241—243
— потенциал 240—241, 251
Гипотеза «увлекаемого эфира» 259,
Глубина проникновения 122, 202
Граничные условия 52, 61, 62 и д.
— — в задачах с постоянным током 124, 125
— — для магнетиков 146
— — — отражения на плоской границе 196—198
— — — преломления на плоской границе 196—198
— — на заряженной поверхности 63, 64
— — — поверхности диэлектрического цилиндра 84
— — — — металла 205—207
— — — — раздела диэлектриков 41—44
Грнна теорема 24, 36, 66, 87
— — векторная 55, 148
— — взаимности 54
— функция 55—57, 60 и д.
Давление излучения 191—194
Д'Аламбера оператор 232, 303
— уравнение 223
 δ -функция 17, 36, 63 и д.
Дипольное взаимодействие 30—31
— излучение 243—246, 250, 251, 337
— поглощение 366
Дипольные моменты, объемное распределение 35—36
Дипольный момент 27, 33, 39, 49

- Дисперсия аномальная 361
 — нормальная 359
 —, формула 358, 359
 Диэлектрическая жидкость 117, 119
 — постоянная 41, 105—110, 147.
 Добротность резонатора 213, 229
 Допплера эффект 353
 Емкость 71, 126
 Закон взаимодействия токов 127
 — сохранения вещества 109
 — — заряда 109, 122
 — — импульса 181—183, 191, 293—295, 343
 — — канонического углового момента 391
 — — энергии 296
 Законы сохранения, ковариантная форма 377—381
 Заряды линейные 38, 63, 82—86
 — магнитные, эквивалентные 144
 — объемные 35
 — поверхностные 35
 — поляризационные 36, 39, 40 и д.
 — свободные 39—41
 — связанные 39, 41—43
 — точечные 27—30
 — фиктивные 59
 Зона волновая 237, 250, 340
 — индукции 237, 246
 — квазистационарная 237
 Излучение 236—243
 — дипольное 243—246, 250, 251, 337
 — магнитного диполя 248
 — мультипольное 246—250
 — октупольное 251
 — при ускорении, параллельном скорости 330—334
 — —, перпендикулярном скорости 334—335
 — тормозное 337, 338
 — электрического диполя 243—246
 Импеданс волновода 219
 — характеристический 187
 Импульс четырехмерный 294
 Инвариантность градиентная 232
 — смысла времени 266
 Инверсия 57—60, 87
 — обратная 60
 Индуктивность 174—177
 Индукция 39—41, 106
 Инерциальная система отсчета 253
 Интервал временной 277
 — пространственно-временной 277
 Интервал пространственный 277
 Инфракрасная «катастрофа» 334
 Источники магнитного поля 141—145, 169
 — поля, ковариантное описание 370—372
 — электрического поля 39, 123, 240, 372, 373
 Квадруполь двумерный 29
 — линейный 29
 Квадрупольный момент 248, 249, 250
 Кеннеди интерферометр 258
 Клаузиуса—Мосоти соотношение 49, 117
 Колебания в прямоугольном резонаторе 211—213
 — вынужденные 353—354
 — поперечно-магнитные TM 213—219, 229
 — поперечно-электрические TE 213—219, 229
 — TEM 216, 217
 Комплексно-сопряженные функции 69—71
 Компоненты намагниченности 374
 — поляризации 374
 Континуум одномерный 399—401
 — трехмерный 401—404
 Конформное отображение прямо-угольника 80, 81
 Конформность преобразования 73
 Коши—Римана соотношения 70—73
 Коэффициент отражения 202—204
 Коэффициенты взаимоиנדукции 176
 — самоиндукции 175—176
 Критическая опалесценция 364, 369
 Кулона закон 21—23, 102, 116, 318, 411
 Лагранжа уравнения 401, 402
 — функция 385, 388, 389 и д.
 — —, плотность 403, 406, 407, 409
 Ланжевена формула 50, 51
 Лапласа оператор 65, 152, 214, 217
 — уравнение 25—27, 53, 58 и д.
 Лежандра полиномы 28, 91, 226
 — функции 88, 90, 93 и д.
 Лиенара—Вихерта потенциалы 306, 313—317, 320 и д.
 Линзы магнитные квадрупольные 396
 — магнитоэлектрические 393, 394
 — электрические квадрупольные 396
 — электростатические 392, 393
 Линия тока 70, 71, 74
 Лоренца—Лорентца формула. См. Клаузиуса—Мосоти соотношение

- Лоренца преобразования 274—277,
282—286, 289 и д.
— — для четырехмерного вектора
287—289
— сила 182, 191, 192, 311 и д.
— условие 231, 232, 240 и д.
Лоренца — Фитцджеральда гипотеза
258, 272
Лоренцевское сокращение 258, 272,
275, 280, 345
- Магнетики 145—146
Магнитная жесткость 393
— сила 177—178
Магнитное взаимодействие токов
127—128
— поле 128—129
Магнитные цепи 146—147
Майкельсона и Морли опыт 255—
259, 262, 264, 265
Максвелла поток натяжений 183
— тензор натяжений 111—116, 178,
181, 191, 377
— уравнения 126, 166, 167 и д.
— — для движущихся сред 164—165
— — — покоящейся среды 160—161
Метод изображений 59—61, 85
— релаксации 67
Минковского диаграмма 279—281, 284
— сила 297—299
Молярная рефракция 359
Мультиполи 29, 38
- Напряженность магнитного поля
140—141
— электрического поля 71—72
Неймана формула 175, 176, 183
Норма функции 94
- Октуполь линейный 29
— трехмерный 29
Ома закон 122—123, 159
Особенности дипольного вида 32
— поверхностные 32—35
— поля 26
Осциллятор квадрупольный 251
—, равновесие с полем излучения 367
—, энергия 351
Отражение на плоской границе 196—
200
— от металла 201—202
- Параксиальное движение 391
Плотность источников поля 16, 20
— циркуляции поля 16, 20
— дипольная 33
- Плотность заряженная 32, 33
Пойнтинга вектор 179, 180, 183 и д.
Показатель преломления 189, 194,
Поле движущегося заряда 316—318,
325—329
— магнитное 128—129
— переходное 244
— поляризации 40
— поляризационных зарядов 47
Поляризация 35, 39, 40, 50, 194, 358, 359
Поляризуемость 48—50, 359
Потенциал аксиально симметричный
93, 94
— векторный 132—135, 142, 148—157,
236 и д.
— — четырехмерный 307
— двойного слоя 32, 33, 35, 130
— запаздывающий 235, 250, 313, 315
— заряженного кольца 94—95
— конвективный 320—321
— кулоновский 97, 319
— линейного заряда 72—73
— магнитный векторный 131—132
— — скалярный 129—131, 147
— мультиполей 29
— однородного поля 72
— поляризационный 36, 241, 248
— точечного заряда 60, 91—92, 98
— «центробежный» 392
— электростатический 23, 24, 152
Правило суммирования 366
Преломление на плоской границе
196—200
Преобразование в комплексной об-
ласти 73—74
Производная вариационная 401
— субстанциональная 109, 110
— функциональная 401
Проницаемость диэлектрическая 41,
42, 49, 106
— магнитная 147
Псевдовектор 309
Псевдоскаляр 307
Псевдотензор 309
— дуальный 309
Пуассона скобки 403
— уравнение 26, 39, 233, 319
- Радиационное затухание колебаний
351—353
Рассеяние релеевское 362—364
— свободным электроном 354—357
— связанными электронами 357
— электромагнитных волн сферой
225—230
— — — цилиндром 220—222

- Реакция излучения 343, 346—349
 Резонатор прямоугольный 211—213
 — сферический 224
 — цилиндрический 213—216
 Релея — Джинса распределение 368
 Ритца теория 260, 261
 Свертка тензора 290
 Световой конус 281
 Сечение тормозного излучения 337, 338
 Скиновая глубина 202
 Скорость волновая или фазовая 189,
 197, 218, 283, 359, 360, 362
 — групповая 218, 360, 361, 362
 — переноса энергии 361, 369
 — распространения волны 360—362
 — света и одновременность 266—268
 — четырехмерная 293, 305
 Слой двойной 32, 33
 — дипольный 32, 34
 — заряженный 32
 Снеллиуса закон 197, 199
 Соударения двух частиц 299—301,
 Степень вырождения 210
 Стефана — Больцмана закон 194
 Тейлора — Лорана разложение 91
 Тензор антисимметричный 292
 — ковариантный второго ранга 289
 — контравариантный второго ранга
 289
 — метрический 290
 — нулевого ранга 289, 290
 — первого ранга 289
 — ранга $m + n$ 290
 — симметричный 292
 — третьего ранга 309
 — четвертого ранга 309
 — четырехмерный 293
 — электромагнитного поля 306—311
 — энергии-импульса 377, 380—382
 Тензорные соотношения 289—292
 Теорема о единственности 52, 53, 60,
 148, 149
 Ток полный 137, 164
 — смещения 137, 138, 141, 164
 — соленоидальный 137
 Токи истинные 137, 164
 — конвективные 133, 164
 — намагничения 133, 134—137,
 — поляризационные 132, 133, 358
 — свободные 132
 — эквивалентные 144
 Томсона теорема 107—108
 — формула рассеяния 355, 356
 Угол поляризации 199, 355
 Угол рассеяния 355
 Уравнение движения связанного
 электрона 354
 — непрерывности 109, 122, 304
 — релятивистски ковариантное 286
 — телеграфное 189
 — траекторий 389—392
 Условие «поперечности» 203
 Фактор деполяризации 93
 Фарадея диск 375, 376
 — закон 159—164
 Френеля формулы 194, 199—201
 Функции нечетные 225
 — собственные 208, 209, 216
 — цилиндрические 97, 98
 — четные 225
 Фурье — Бесселя интеграл 156
 Фурье интеграл 202, 233, 333 и д.
 — компоненты 233, 236—240, 322, 339
 — коэффициенты 63
 — преобразование 233
 — разложение 84, 322, 323, 339
 — теорема 65, 155, 202
 Хевисайда — Лоренца система еди-
 ниц 412, 413, 415
 Центр инверсии 59
 Центры рассеяния 358
 Черенкова эффект 338—341, 342
 Шварца преобразование 74—80
 Штурма — Лиувилля уравнение 203
 Эйлера уравнения 386, 390, 391
 Эквипотенциальные поверхности 70,
 71, 74
 Электреты 40, 51, 415
 Электрическое поле 20—21, 44—48
 — смещение 40
 Электродвижущая сила 123—124
 Электромагнитная масса 343—346
 Электромагнитное поле 404—407
 Электронно-оптические устройства
 392—397
 Электропроводность 123—124
 Эмиссионные теории 260—262
 Энергия магнитного поля 171, 173
 — поля в свободном пространстве
 102—105
 — свободная 106, 108, 119
 — системы квазистационарных то-
 ков 170—172
 — электромагнитная 178—181
 Энтропия 266
 Юкавы мезонное поле 404
 — потенциал 67