N. N. Parfentieff.

Etudes sur la théorie de la croissance des fonctions.

ИЗСЛѢДОВАНІЯ
по
ТЕОРІИ РОСТА ФУНКЦІЙ.

Н. Парфентьева,

приватъ-доцента Императорскаго Казанскаго Университета.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1910.

Печатано по опредѣленію Физико-Математическаго факультета Императорскаго Казанскаго Университета.

Деканъ А. П. Котельниковъ.

Оглавленіе.

Стр.

Замѣченныя опечатки.

Стр.	*Напечатано:*	*Должно быть:*
	На страницахъ 77—81 буквы g и $\mathfrak{g}$ слѣдуетъ считать тожественными.	
1^{13}	относительво	относительно
1^{15}	Waschstum	Wachstum
57^{4}	урааненій	уравненій
73_{7}	отностительно	относительно
73_{6}	$\mid f(ax) \mid \backsim e^{\mid ax^{\sigma} \mid}$	$\mid f(ax) \mid \backsim e^{\mid ax \mid^{\sigma}}$
73_{4}	$\int\limits_0^\infty e^{-a(1-a^{\sigma-1} \mid x \mid)} da$	$\int\limits_0^\infty e^{-a(1-a^{\sigma-1} \mid x \mid^{\sigma})} da$
76_{11}	minimum'ѣ	minimum'ѣ
128^{12}	$Cos(\varphi-\varphi_u)$	$Cos(\varphi-\varphi_n)$.

Настоящая работа посвящена изслѣдованіямъ по теоріи роста функцій, представленныхъ или рядомъ *Taylor*'а, или произведеніями типа *Weierstrass*'а, а также изученію общихъ принциповъ роста модуля функцій съ точки зрѣнія *однозначности роста модуля функціи*; послѣднее понятіе—новое въ анализѣ, и его роль вѣроятно будетъ оцѣнена въ будущемъ.

Весьма естественно, если предложенъ *функція—рядъ* или *функція—произведеніе* (Weierstrass'овское), изучать ихъ ростъ *асимптотически* и непосредственно, изучая индивидуальности заданныхъ рядовъ или произведеній; это мы и дѣлаемъ на примѣрѣ функціи $E_\alpha(x)$ *Mittag-Leffler*'а и другихъ и приходимъ къ интереснымъ соображеніямъ *общаго* характера относительно *однозначности* роста и ея роли, а также относительно роста „новыхъ" величинъ такъ называемыхъ „croissance des fonctions" или „Waschstum", и соотношеніямъ между ними.

Что особенно интересно, мы обнаруживаемъ тѣснѣйшую связь между теоріей роста рядовъ съ точки зрѣнія ихъ сходимости или расходимости и теоріей роста вообще модуля функціи и выводимъ *общій основной принципъ* изученія роста при помощи *скалы Du-Bois Reymond*'а.

Основной принципъ позволяетъ намъ прежде всего классифицировать всѣ существующія цѣлыя трансцендентныя функціи на категоріи, а затѣмъ кромѣ того онъ же можетъ служить и исходнымъ пунктомъ въ вопросахъ изученія функціи съ точки зрѣнія роста ея модуля, роста и распредѣленія ея нулей.

Въ этомъ направленіи уже получены значительные результаты благодаря ученымъ *E. Borel*'ю, *Ed. Maillet*, *E. Lindelöf*'у, *Blumenthal*'ю и др., и мы несомнѣнно находились подъ вліяніемъ работъ только что упомянутыхъ ученыхъ, и тѣмъ не менѣе читатель откроетъ, быть можетъ, одинъ специфическій оттѣнокъ при изложеніи нами этихъ результатовъ, именно наша точка зрѣнія — точка зрѣнія *асимптотическаго* счета съ величинами „модуль функціи", „ростъ модуля нуля", и тому подобными.

Нѣкоторые результаты полученные нами совпадаютъ съ результатами Borel'я, Lindelöf'а и др.

Наша точка зрѣнія позволяетъ указать также и методы при опредѣленіи модуля функціи *асимптотически* или при опредѣленіи просто *асимптотическаго роста самой функціи*. Читатель найдетъ на это у насъ немало примѣровъ.

Весьма важными теоремами для цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, да и вообще для какихъ угодно функцій, являются теоремы подобныя теоремамъ *Hadamard*'а о *maximum*'ѣ и *minimum*'ѣ модуля трансцендентныхъ цѣлыхъ функцій на периферіи даннаго круга въ силу ихъ интимной связи съ такъ называемымъ *cas d'exception Picard*'a.

Этому вопросу, равно какъ и самой *теоремѣ Picard*'a, нами удѣлено много вниманія, и эта связь нами иллюстрируется многими примѣрами и теоремами. Кромѣ того мы даемъ самой теоремѣ Picard'a нѣсколько иную форму: обычно теорема Picard'a даетъ представленіе о *распредѣленіи нулей* функціи

$$\Phi(z)+g(z)=0,$$

гдѣ $\Phi(z)$—цѣлая трансцендентная функція, а $g(z)$—полиномъ или цѣлая функція роста менѣе быстраго, нежели $\Phi(z)$, причемъ объ этомъ распредѣленіи нулей говорятъ съ точки зрѣнія *роста модулей нулей*; мы думаемъ, что можно о томъ же говорить и съ точки зрѣнія *числа нулей* въ кругѣ даннаго радіуса$\equiv r$: теорема Picard'a такъ видоизмѣненная остается въ силѣ. Алгебраическимъ соображеніямъ о нуляхъ функціи при помощи теоремы *Rolle*'я и теоремѣ *Lucas* (*Comptes Rendus*. 89, p. 224):

„*Tout contour fermé convexe environnant le groupe des points raçines de l'équation proposée environne aussi le groupe des points raçines de l'équation derivée.*"

дано также въ нашей работѣ много мѣста, и читатель найдетъ по этому вопросу нѣсколько примѣровъ.

Занимаясь теоріей конформности, мы невольно обратили вниманіе въ работахъ *A. Schwarz*'a и *Harnack*'a (Ueber das logarithmische Potential, Leipzig, 1887) на многія теоремы и неравенства по существу являющіяся теоремами роста функцій.

Это заставило насъ углубить изысканія въ этомъ направленіи, и мы буквально встали на точку зрѣнія *E. Lindelöf*'a, развитую имъ въ его мемуарѣ „Memoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions manogenes"... (Acta Fennica, T. 35), независимо отъ E. Lindelöf'a.

Многія неравенства E. Lindelöf'a, конечно, болѣе глубокія и точныя, чѣмъ наши, схожи съ нашими; несмотря на несовершенство нашихъ размышленій по сравненію съ Lindelöf'овскими, мы все-же приводимъ наши собственныя.

Эта интимная связь между ростомъ функціи чисто нумерическимъ и ея чисто функціональнаго характера свойствами — замѣчательна; благодаря этому факту *теоремы роста* связуются съ изслѣдованіями *Hurwitz*'a (Viertelsjahr schrift d. Naturforschenden Gesell. in Zürich 1904), *Phragmen*'a (Sur une extension d'une theoreme classique de la théorie des fonctions. Acta Math. 28) и *Landau* „Sur quelques géneralisations du théoreme de M. Picard." (Annales de l'Ecole Normale, 1907). Подъ вліяніемъ работъ E. Lindelöf'a (Acta Societatis Scientiaram Fennicae, T. 35) мы занимались также и неравенствами *Чебышева*, данными имъ для полиномовъ и ихъ нулей, и пытались поставить его теоремы въ связь съ нашими изслѣдованіями, но намъ удалось лишь обнаружить связь идей Чебышева съ нѣкоторыми современными идеями (*E. Laudau* loc. cit.), положительныхъ же результатовъ въ этомъ направленіи мы получить не могли, но связь—повторяемъ—алгебры съ теоріей роста функцій нами освѣщена, смѣемъ думать, достаточно ярко.

Есть въ нашей работѣ также небольшой историческій экскурсъ въ область прошлаго, которое мы освѣщаемъ лучами современности, именно мы останавливаемъ вниманіе читателя на работѣ *Liouville*'я „Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les raçines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients" (Journal de Liouville, T. 2). Обобщеніе идей Liourille'я мы видимъ въ знаменитой теоремѣ *Borel*'я (Acta Math. 20):

„*Равенство*

$$P_1(z)e^{H_1(z)} + P_2(z).e^{H_2(z)} + \ldots + P_p(z).e^{H_p(z)} = 0$$

невозможно при

$$P_1(z) \mp\!\!\!\equiv 0;\quad P_2(z) \mp\!\!\!\equiv 0, \ldots,\quad P_p(z) \mp\!\!\!\equiv 0,$$

если ростъ $P_i(z)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ *есть по крайней мѣрѣ для одной изъ нихъ* $e^{\mu(r)}$, *а ростъ*

$$| H_i(z) - H_1(z) | \quad (i=2,3,\ldots,p)$$

не выше $e^{\mu(r)(1-\alpha)} (\alpha < 1)$."

Связывая же эту теорему съ теоремой *Lindemann*'а относительно равенства

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0,$$

гдѣ A_i и $\alpha_i (i=1,2,\ldots,n)$—*алгебраическія*, мы свяжемъ наши изслѣдованія съ теоріей чиселъ, вѣрнѣе съ *Высшей Ариѳметикой*; мысль эта впервые была высказана современнымъ греческимъ математикомъ *Rémoundos* (Annales de l'Ecole Normale, 1906), хотя читатель найдетъ по этому вопросу наши собственныя размышленія независимыя отъ идей Remoundos'а, существовавшія у насъ до знакомства нашего съ замѣчательно интереснымъ мемуаромъ греческаго геометра.

Наконецъ замѣтимъ, что ряды *sommables* въ смыслѣ Borel'я и суммируемые тѣмъ или инымъ методомъ изучаются также нами въ связи съ теоріей—роста функцій, и по этому вопросу мы даемъ нѣсколько замѣчаній и положеній не лишенныхъ интереса.

Глава I-я.

Функціи рядомъ Taylor'а заданныя и опредѣленіе для нихъ асимптотическихъ выраженій и законовъ.

1. Мы тогда только сполна оріентированы въ природѣ функціи заданной намъ безконечнымъ рядомъ (степеннымъ) или безконечнымъ произведеніемъ факторовъ *Weierstrass*'а вида

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{E_{p_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)},$$

гдѣ

$$E_{p_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{p_n},$$

причемъ p_n—функція индекса n, вообще говоря, представляетъ цѣлое число, когда мы съумѣемъ задать ряду или такому произведенію *асимптотическое* выраженіе эквивалентное безконечному числу членовъ степеннаго ряда или эквивалентное безконечному произведенію факторовъ, при этомъ мы должны еще постараться опредѣлить степень приближенія нашего асимптотическаго выраженія къ предложенной намъ для изученія функціи.

Покажемъ, какими принципами и методами при рѣшеніи подобной проблемы мы можемъ руководствоваться.

Уже изъ самой постановки проблемы видно, что такими соображеніями и методами не могутъ быть *общіе* методы, исчерпывающіе проблему во всевозможныхъ случаяхъ: индивидуальная природа каждаго отдѣльнаго случая играетъ слишкомъ видную роль; тѣмъ не менѣе мы не совсѣмъ безоружны, и нѣкоторыя *общія* соображенія, приложимыя всегда, все-же возможны; вотъ къ ихъ характеристикѣ мы и обратимся, причемъ сначала займемся только функціями заданными намъ степенными рядами. Возьмемъ сначала функціи цѣлыя трансцендентныя. Относительно нихъ можно высказать слѣдующее *общее* положеніе:

(*A*) „*Ростъ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, заданныхъ рядомъ Taylor'a, часто опредѣляется ростомъ одного члена maximum'a или группы (конечной) членовъ ряда*".

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ рядъ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots$$

Пусть $x = re^{i\varphi}$, такъ что $|x| \equiv r$. Ищемъ maxima'льный членъ ряда e^x; пусть

$$u(n) = \frac{r^n}{n!} = \left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

Условіе maximum'a есть

$$\frac{du(n)}{dn} = 0.$$

Вычисляемъ асимптотически: такъ какъ $n! \backsim e^{-n}.n^n$, то

$$Lu(n) = nLr - nLn + n,$$

и слѣд.

$$\frac{dLu(n)}{dn} = Lr - Ln = 0,$$

т. е. $n \equiv r$. Иначе говоря $n = E(r)$ (E—символъ *Legendre*'a).

Такимъ образомъ

$$\max.\ u(n) = \frac{r^r}{r^r.e^{-r}.} \equiv e^r,$$

и отсюда даже безъ оцѣнки степени приближенія мы видимъ, что *асимптотически*

$$\text{mod. max.}\,|\,e^x\,| \backsim \text{max. члену}\ \,|\,u(n)\,|\,.$$

$\backsim$—знакъ асимптотическаго равенства.

Означимъ индексъ члена—maximum'a ряда e^x черезъ N, тогда въ силу только что сказаннаго

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^N}{N!} + R_N = \varphi_N + R_N.$$

Теперь напомнимъ читателю одну очень полезную для насъ въ теченіи всей нашей работы лемму:

(a) *„Пусть $f(z)$ и $g(z)$—двѣ однозначныя внутри нѣкотораго контура K и на немъ самомъ функціи; и пусть на всемъ контурѣ K всегда*

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

тогда ур—ія $f(z)=0$ и $\Phi(z)=f(z)+g(z)=0$ обладаютъ однимъ и тѣмъ же числомъ корней внутри контура K".

Лемма эта слѣдуетъ непосредственно изъ интеграла *Cauchy*:

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_K dL\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K dLf(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_K dL\left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\},$$

но, какъ $\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, то второй интегралъ есть нуль, и слѣд. дѣйствительно

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_K dL\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K dLf(z) = N_1.$$

Пользуясь этой леммой, мы можемъ сейчасъ же асимптотически утверждать, что число нулей у функціи e^x въ кругѣ радіуса$\equiv r$ равно или меньше r.

Каковы модули этихъ нулей? Для этого докажемъ вторую лемму, также очень полезную для нашей работы, именно:

(b) *„Если предложенную намъ функцію $f(x)$ можно разсматривать какъ предѣлъ полиномовъ*

$$g_1(z), g_2(z), \ldots, g_n(z), \ldots,$$

обладающихъ тѣмъ свойствамъ, что

$$\lim_{n=\infty} | f(z)-g_n(z) | = 0,$$

то корни $g_n(z)=0$ *при* n *растущемъ и достаточно большомъ суть корни* $f(z)=0$ *съ небольшой погрѣшностью* ε_n, *стремящеюся къ нулю при* n *растущемъ.*"

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу предыдущей леммы (a) число корней у $f(z)=0$ и $g_n(z)=0$ при n—достаточно большомъ одинаково. Далѣе при n достаточно большомъ

$$| f(z)-g_n(z) | < \varepsilon_n, \ \lim \varepsilon_n = 0, \ \varepsilon_n > 0,$$

и слѣд., если z_k есть какой-либо корень $g_n(z)=0$, то предыдущее неравенство обращается въ

$$| f(z_k) | < \varepsilon_n,$$

т. е. z_k—дѣйствительно корень $f(z)$.

Туже теорему можно доказать при помощи интеграловъ *Cauchy* вида

$$\int_L x dL f(z) \quad \text{и} \int_L x dL g_n(z),$$

распространенныхъ каждый по контуру L, содержащему только лишь одинъ корень уравненія $g_n(z)=0$, имѣя въ виду лемму (a). Предоставляемъ это простое доказательство продѣлать читателю.

Пользуясь леммами (a) и (b), мы можемъ теперь утверждать, что при n достаточно большомъ корни e^x и уравненія, состоящаго изъ n первыхъ членовъ, совпадаютъ. Элементарная теорема алгебры намъ показываетъ, что наибольшій корень уравненія

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0$$

стремится по абсолютной величинѣ къ $\sqrt[n]{n!}$, т. е. асимптотически къ

$$\sqrt[n]{n!} \backsim \sqrt[n]{e^{-n}.n^n} \backsim ne^{-1} \backsim n,$$

иными словами къ ∞, и дѣйств. это предположеніе подтверждается формулой

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

говорящей, что корень e^x есть только одинъ:—∞, и конечныхъ корней нѣтъ вовсе.

Разсмотрѣніе этого тривіальнаго ряда, какъ видитъ читатель, привело насъ къ очень многимъ положеніямъ *общаго характера*; но это еще не все, и мы натолкнемся еще на нѣкоторые.

Замѣтимъ здѣсь, кстати, что методъ, взятый нами для доказательства леммы (b) при помощи интеграловъ *Cauchy*, позволяетъ еще точнѣе формулировать лемму (b), имѣя въ виду *кратность корней* уравненія $g_n(z)=0$, каковая несомнѣнно *должна сохраниться* и для уравненія $f(z)=0$ при n достаточно большомъ.

Съ разсмотрѣніемъ *члена maximum*'а функціи трансцендентной можно связать еще очень интересныя тоже довольнаго общаго характера соображенія. Въ самомъ дѣлѣ, если намъ данъ рядъ

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (*)$$

съ радіусомъ сходимости $R=\infty$, то теорема *Cauchy* непосредственно дастъ

$$|\,a_k\,|<\frac{M(r)}{r^k} \qquad (**)$$

для периферіи круга радіуса$=r$, гдѣ $M(r)$—модуль maximum $|\,f(x)\,|$ на периферіи круга, и эта теорема грубо устанавливаетъ связь между модулемъ функціи и модулемъ ея коэффиціентовъ. Нашъ же тривіальный примѣръ и примѣненіе къ нему общаго принципа (A) указываютъ, что ростъ модуля функціи $|\,f(x)\,|$ при $|\,x\,|=r$ обусловленъ часто ростомъ единственнаго maxim'альнаго члена ряда (x); разумѣется, въ рядѣ (*), въ которомъ $a_n=\varphi(n)$, мы въ правѣ полагать нѣкоторые члены равнымъ нулю, напр., положить нѣкоторое опредѣленное число членовъ *сначала* равными нулю.

Но очевидно, задавъ $M(r)$ напередъ на кругѣ радіуса$\equiv r$, мы *не въ правѣ* положить равными нулю произвольное число такихъ членовъ: такъ, напр., въ нашемъ тривіальномъ примѣрѣ мы не въ правѣ положить равными нулю больше, чѣмъ r членовъ, если модуль maximum'а $M(r)$ есть e^r для круга радіуса$\equiv r$; ростъ функціи $M(r)$ будетъ тогда *ниже* нами заданнаго при *томъ законѣ роста* модулей коэффиціентовъ, какой намъ заданъ.

Нетрудно убѣдиться, что соображенія только что произведенныя являются въ сущности общими, и мы имѣемъ слѣдующее *общее* положеніе:

(*B*) *„Если намъ задана рядомъ цѣлая трансцендентная функція, то при напередъ заданномъ ея модулѣ $M(r)$ для периферіи круга радіуса $= r$ и напередъ заданномъ законѣ роста ея коэффиціентовъ мы не въ правѣ полагать произвольное число членовъ ряда равными нулю.“*

Отсюда же, какъ слѣдствіе, вытекаетъ также нелишенное интереса предположеніе: такъ какъ согласно принципу (*A*) ростъ функціи цѣлой иногда обусловленъ ростомъ ея отдѣльныхъ членовъ—одного только maxim'альнаго или группы наибольшихъ изъ нихъ, то рядъ вида

$$\varphi(x) = a_\alpha\, x^\alpha + a_\beta\, x^\beta + \ldots\ldots + a_\mu\, x^\mu + \ldots\ldots (0),$$

представляющій пустоты ($\alpha < \beta < \ldots$), причемъ члены его растутъ *не по одному и тому* же закону $\varphi(n)$, будетъ представлять навѣрняка функцію, модуль которой будетъ расти *неправильно*.

Подъ *правильностью* или *неправильностью роста* мы понимаемъ слѣдующее: на нашемъ тривіальномъ примѣрѣ мы обнаружили, что ростъ функціи e^x обусловленъ при $|\, x \,| = r$ ростомъ ея члена maximum'а $u(N) = u(r)$, а слѣд. законъ роста e^x всегда для какого угодно r есть законъ роста $u(r)$, и слѣд. законъ роста—правиленъ въ томъ смыслѣ, что онъ всегда выражается у насъ одной и той же асимптотической функціей $|\, u(r) \,|$; теперь—законъ роста модуля функціи будетъ неправиленъ, если онъ выражается для разныхъ круговъ *разными* асимптотическими формулами.

Позже мы найдемъ для понятій „правильный ростъ“ функціи болѣе точное и болѣе узкое опредѣленіе. Функцій цѣлыхъ трансцендентныхъ неправильно растущихъ можно построить сколь угодно много. Обращаемъ вниманіе читателя на замѣтку *Borel* „Sur quelques fonctions entières" (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907, p. 120). Тамъ Borel'ь показываетъ, что ряды съ *пустотами* могутъ дать происхожденіе функцій неправильно растущихъ, причемъ законъ роста коэффиціентовъ—одинъ и тотъ же, т. е. n—ый членъ ряда $u_n = \varphi(n)$ и φ—одинаково для всѣхъ членовъ.

A fortiori, понятно, функція $\varphi(x)$ будетъ неправильнаго роста, если коэффиціенты ея ряда будутъ расти *не по одному и тому же закону* φ.

Также очевидно и еще одно обстоятельство: если мы имѣемъ функцію $\varphi(x)$, составленную изъ членовъ, принадлежащихъ сначала одной функціи $\varphi_1(x)$, а затѣмъ изъ членовъ другой, то ея ростъ и ростъ ея нулей—различенъ. Покажемъ это тоже почти на тривіальномъ примѣрѣ! Пусть намъ данъ рядъ

$$\varPhi(z) = 1 + \frac{z}{1} + \ldots + \frac{z^m}{m!} + \frac{z^{m+1}}{(m+1!)^2} + \frac{z^{m+2}}{(m+2!)^2} + \ldots \quad \text{(I)},$$

состоящій частью изъ членовъ ряда e^z, частью изъ членовъ ряда Бесселя $J_0(z)$.

Число m—здѣсь *очень большое*, иначе—нетрудно понять это!—первая часть не будетъ вліять на ростъ модуля $|\varPhi(x)|$.

Теперь узнаемъ сначала, когда ($|z| = r$)

$$\frac{r^{m+k}}{(m+k!)^2} > \frac{r^m}{m!}$$

или

$$\frac{r^k}{(m+k!)^2} > \frac{1}{m!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Иначе, такъ какъ m—большое число:

$$r^k > \frac{(m+k)^{2(m+k)} \cdot e^{-2(m+k)}}{m^m . e^{-m}},$$

откуда

$$r^k > \left(1 + \frac{k}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{m+k}{e}\right)^{m+2k}$$

или

$$r > \left(1+\frac{k}{m}\right)^{\frac{m}{k}} \cdot \left(\frac{m+k}{e}\right)^{2+\frac{m}{k}} \quad \text{(II)}.$$

Понятно r, опредѣленное изъ (II) должно значительно превышать m; въ этомъ нетрудно убѣдиться. Означимъ соотвѣтственно первую и вторую части функціи $\Phi(z)$ черезъ $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, такъ что

$$\Phi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) \qquad \text{(III)}.$$

Возьмемъ сначала z такое, чтобы

$$r < m \qquad \text{(IV)},$$

тогда асимптотически

$$|\varphi_1(z)| \backsim \frac{r^r}{r!} \backsim e^r \qquad \text{(V)}.$$

Вторая же часть $\varphi_2(z)$ по абсолютной величинѣ при $r<m$ даетъ:

$$\frac{r^{m+1}}{(m+1!)^2} + \frac{r^{m+2}}{(m+2!)^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

или асимптотически при $m+1=p$

$$\frac{r^p . e^{2p}}{p^{2p}} + \frac{r^{p+1} . e^{2(p+1)}}{(p+1)^{2(p+1)}} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

и какъ

$$r < m < p \qquad \text{(V')},$$

то

$$\sum_p^\infty \frac{r^k . e^{2k}}{k^{2k}} < \left(\frac{re^2}{p^2}\right)^p \cdot \frac{1}{1-\frac{re^2}{p^2}} =$$

$$= \left(\frac{re^2}{(m+1)^2}\right)^{m+1} \cdot \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2 - re^2} \qquad \text{(VI)}.$$

Пусть

$$\frac{re^2}{(m+1)^2}=1-q,\ q<1 \qquad (\mathrm{VI}'),$$

тогда, чтобы превалировала функція $|\varphi_1(x)|$, нужно, чтобы

$$(1-q)^{m+1}.\frac{1}{q}<1$$

$$\text{или}\quad 1-(m+1)q<q,$$

$$\text{т. е.}\quad 1<(m+2)q,\ \text{откуда}$$

$$q>\frac{1}{m+2}\ \text{и въ силу}\quad (\mathrm{VI}')$$

$$1-\frac{re^2}{(m+1)^2}>\frac{1}{m+2},$$

такъ что

$$re^2<(m+1)^2\left\{1-\frac{1}{m+2}\right\} \qquad (\mathrm{VII}).$$

При соблюденіи условія (VII) въ $\Phi(x)$ превалировать будетъ часть $\varphi_1(x)$, и слѣд. асимптотически въ этомъ случаѣ

$$\text{mod. max.}\ |\Phi(x)|\backsim e^r.$$

Но при соблюденіи условія (II) превалирующей частью $\Phi(x)$ будетъ напротивъ часть $\varphi_2(x)$, и слѣд. функціи $\Phi(x)$ въ отношеніи роста своего модуля будетъ слѣдовать то функціи e^r, то *функціи Бесселя* $J_0(z)$ для $|z|$ значительно удаляющихся отъ m и растущихъ до ∞.

Членъ функціи *Bessel*'я

$$|\omega(n)|=\frac{r^n}{(n!)^2}$$

или

$$log\,|\omega(n)|=nlogr-2nlogn+2n,$$

такъ что при *данномъ* r maxim'альнымъ членомъ является по счету членъ индекса $\sqrt{r}$, какъ это видно изъ

$$\frac{dlg\mid\omega(n)\mid}{dn}=0=lgr-2lgn.$$

Въ силу сдѣланнаго только что сейчасъ замѣчанія область, въ которой функція $\Phi(x)$ ведетъ себя съ точки зрѣнія роста, какъ функція Bessel'я, должна, конечно нѣсколько выходить за кругъ радіуса$=m$.

Такъ какъ, какъ мы видимъ, функція $\Phi(x)$ ведетъ себя неодинаково съ *точки зрѣнія роста модуля*, то и ея нули будутъ, если таковые существуютъ. *разнаго роста*; и мы эмпирически пришли къ слѣдующему *общему* положенію, которому мы дадимъ позже точную формулировку.

(*C*) „*Ростъ модуля функціи опредѣляетъ собой ростъ модуля нулей ея; у функціи* **неправильнаго** *роста должны нули расти также неправильно.*"

И еще одно курьёзное слѣдствіе мы выводимъ изъ только что произведенныхъ изслѣдованій:

(*D*) „*Сумма двухъ правильно растущихъ функцій* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *можетъ дать, какъ въ нашемъ примѣрѣ, функцію* $\Phi(z)$ *неправильно растущую въ томъ смыслѣ, что вся плоскость перемѣннаго раздѣляется на двѣ части: часть роста* $mod.\ max.\ \mid\varphi_1(x)\mid$ *и часть роста* $mod.\ max.\ \mid\varphi_2(x)\mid$."

Обращаемъ вниманіе читателя на *наше* опредѣленіе неправильности роста.

Мы предполагаемъ здѣсь, что $\varphi_2(x)$ въ нашемъ примѣрѣ правильно растущая; строго мы докажемъ это позже. Правильность же полинома—очевидна; ибо несомнѣнно, что

$$r^{m-\varepsilon}<\mid\varphi_1(x)\mid<r^{m+\varepsilon},\ \varepsilon\text{—безк. малое}$$

и это опредѣленіе роста есть уже строгое опредѣленіе роста, съ которыми мы будемъ имѣть дѣло всегда въ послѣдующемъ.

Читатель видитъ, насколько опредѣленіе роста $\mid\varphi_1(x)\mid$ — точно, и въ будущемъ мы будемъ стремиться всегда къ подобнымъ границамъ роста, ставящимъ ростъ изслѣдуемой функціи въ очень тѣсныя границы, узкіе предѣлы.

Эмпирически высказанный нами принципъ (C) можно обосновать *строго вообще* и очень просто при помощи *формулъ Cauchy.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ интегралы вида

$$\left\{\begin{array}{ll} N_r = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{K_r} dLf(z), & K_r\text{—периферія круга радіуса}=r \\ \\ \alpha_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{K_{n+1,n}} z dLf(z), & K_{n+1,n}\text{—кольцо образованное двумя концентрическими кругами, содержащими } n\text{-ый нуль } \alpha_n. \end{array}\right.$$

Изъ этихъ формулъ мы непосредственно видимъ, что *частота нулей* N_r будетъ расти *неправильно*, если только ростъ mod. $f(z)$ *растетъ неправильно* съ ростомъ r, и слѣд., вообще говоря, *нельзя утверждать*, что

$$\lim_{r=\infty} \frac{N_{r+1}}{N_r} = 1.$$

Также вторая формула Cauchy съ ясностью говоритъ намъ, что

$$\alpha_n = \varphi_n(z)$$

не можетъ быть всегда выражена функціей φ_n для всѣхъ нулей, ибо интегралъ правой части при неправильномъ ростѣ $f(z)$ будетъ различенъ для разныхъ $|z|$ съ ростомъ r.

Обращаемъ вниманіе читателя на простыя разсужденія, произведенныя нами здѣсь, и въ тоже время на интересные общаго характера результаты, добытые при помощи ихъ.

Къ соображеніямъ въ родѣ произведенныхъ только что мы еще вернемся позже, но съ другой точки зрѣнія.

Все только что сказанное нами до сихъ поръ съ ясностью и краснорѣчиво показываетъ, какъ важно знать *асимптотическое значеніе* функціи, заданной намъ рядомъ.

Понятно найти его невсегда возможно, но иногда удается; на одномъ примѣрѣ сейчасъ мы обнаружимъ методъ общій для рѣшенія подобной проблемы, именно возьмемъ функцію *Mittag-Leffler*'а $E_\alpha(x)$ (См. C. R. 1903, Séance 12 Octobre) и найдемъ для нея асимптотическое выраженіе нашимъ пріемомъ по существу не новымъ.

2. *Изученіе функціи* $E_\alpha(x)$. Функція $E_\alpha(x)$ имѣетъ слѣдующее строеніе:

$$E_\alpha(x)=1+\frac{x}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)}+\ldots+\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+1)}+\ldots \quad (1).$$

α можетъ быть комплекснымъ (См. Rendiconti dell 'Accademia dei Lincei, 1904, (13)), но мы будемъ его считать *реальнымъ.*

При данномъ x такомъ, что $|x|=r$, ищемъ *наибольшій* членъ разложенія (1), предполагая r взятымъ очень уже большимъ; тогда асимптотически ищемъ *maximum* члена

$$Lu(n)=nLr-L\Gamma(\alpha n+1)$$

или

$$Lu(n)=nLr-L\left[(\alpha n)^{\alpha n}\ e^{-\alpha n}\right]=$$

$$=nLr-\alpha nL\alpha-\alpha nLn+\alpha n,$$

откуда

$$\frac{dLu(n)}{dn}=0=Lr-\alpha L\alpha-\alpha Ln,$$

такъ что индексъ λ наибольшаго члена въ (1) при *данномъ* r есть

$$\lambda=\frac{1}{\alpha}r^{\frac{1}{\alpha}},\quad 2>\alpha>0 \quad (2).$$

Постараемся теперь показать, что

$$\lim_{r=\infty}\left|E_\alpha(x)-u(\lambda)\right|=0 \quad (3)$$

Въ *асимптотическомъ* счетѣ мы можемъ продѣлать вычисленіе только что произведенное не только для λ реальнаго и цѣлаго, но для λ=нѣкоторой опредѣленной функціи отъ z; тогда членъ maximum будетъ вида

$$\omega(\lambda)=\frac{z^{\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}}}}{\Gamma(z^{\frac{1}{\alpha}}+1)} \infty \frac{z^{\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}}}\, e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{z^{\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}}}},$$

т. е.

$$\omega(\lambda)=e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{4}$$

при

$$2>\alpha>0 \tag{5}.$$

Очевидно этотъ членъ будетъ превалировать среди членовъ индексовъ $m<\lambda$, какъ это видно изъ (2).

Что же касается до *maximum'a* остаточнаго члена

$$\left| R_\lambda(\lambda) \right| = \left| u_{\lambda+1} \right| + \left| u_{\lambda+2} \right| + \ldots \equiv$$

$$\equiv \sum_{\lambda+1}^{\infty} \frac{r^k e^{\alpha k}}{(\alpha k)^{\alpha k}}$$

Формула это — асимптотическая, ибо мы воспользовались приближенной формулой *Стирлинга*), то

$$\sum_{\lambda+1}^{\infty} \frac{r^k e^{\alpha k}}{(\alpha k)^{\alpha k}} < \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(re^{\alpha})^x\, dx}{(\alpha x)^{\alpha x}} =$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} (re^{\alpha})^x\, e^{-\alpha x Lg(\alpha x)} dx,$$

а при λ достаточно большомъ послѣднiй интегралъ асимптотически преобразуется въ такой:

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\alpha x Lg(\alpha x)+xLg(re^{\alpha})}dx \backsim \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\alpha x\, Lg\, x(1+\varepsilon(x))}dx$$

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon\ (x)=0,$$

такъ что

$$\left| R_\lambda\ (x) \right| < \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\alpha x Lgx}dx < \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\lambda}\ ,$$

иными словами

$$\left| R_\lambda(x) \right| < \frac{1}{\alpha}\ e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (6).$$

Такимъ образомъ дѣйствительно можно утверждать, что

$$\left| E_\alpha(x)-\omega(\lambda) \right| < \lambda u(\lambda)=\frac{1}{\alpha} e.^{r^{\frac{1}{\alpha}}}\ r^{\frac{1}{\alpha}} = e^{r^{\frac{1}{\alpha}}+\ \varepsilon}$$

$$\lim_{r=\infty} \varepsilon=0$$

Мы видимъ здѣсь, что модуль maximum'а для остаточнаго члена $R_\lambda\ (x)$—точь въ точь такой же, какой былъ найденъ *Wiman*'омъ другимъ путемъ (Acta Mathematica T. 29, pag. 218).

Только что произведенныя элементарныя асимптотическія соображенія относительно функціи $E_\alpha\ (x)$ намъ кажутся нелишенными нѣкотораго интереса: они лишній разъ доказываютъ, что можно иногда элементарно и быстро обрисовать природу цѣлой трансцендентной функціи.

На природѣ функціи $E_\alpha\ (x)$ асимптотически опредѣленной условіемъ

$$E_\alpha(z) \backsim e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{7}$$

стоитъ остановиться. Изъ (7) имѣемъ

$$\left| E_\alpha(x) \right| \backsim e^{r^{\frac{1}{\alpha}} Cos \frac{\varphi}{\alpha}} \tag{8}.$$

Изъ асимптотическаго равенства (8) мы видимъ: функція $E_\alpha(x) \Big|$ растетъ въ углѣ

$$-\frac{\pi}{2}\alpha < \varphi < \frac{\pi\alpha}{2} \tag{9}$$

до $+\infty$; въ углѣ же

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \varphi < \frac{3\pi\alpha}{2} \tag{10}$$

она убываетъ до нуля; при $\varphi = \pm \frac{\alpha\pi}{2}$ она—*конечна.* Mittag-Leffler на α наложилъ условіе, опредѣленное неравенствомъ (5); это послѣднее обстоятельство ведетъ насъ къ очень важнымъ и интереснымъ выводамъ, хотя само по себѣ условіе (5) ничего особеннаго не представляетъ.

Дѣйствительно, пусть α—очень близко къ нулю, тогда уголъ, напр., въ которомъ $| E_\alpha(x) |$ растетъ, уголъ, опредѣленный неравенствомъ (9), становится *безконечно близкимъ къ нулю.* Съ точки зрѣнія *роста функцій* фактъ существованія функцій подобныхъ только—что обрисованной чрезвычайно курьезенъ.

Между прочимъ этимъ фактомъ данъ отвѣтъ на вопросъ *Borel*'я, помѣщенный въ „L'Intermédiaire" (avril, 1899), и въ тоже время опровергнуто его мнѣніе, именно:

„Peut-on trouver une fonction dont le module ne depasse l'unité qu 'a l'interieur d'un angle aussi petit que l'on veut (donné d'avance) ou même seulement à l'interieur d'une parabole?

La connaisance effective de telles fonctions entières, *s'il en existe*, me parait pouvoir rendre de grands sérvices; mais il ne serait pas non plus sans l'intérêt de demontrer rigoureusement que la question posée doit être résolue par la négative.

Читатель теперь знаетъ, какъ нужно отвѣтить Borel'ю.

Но мы съ своей стороны еще вернемся къ вопросу, поставленному Borel'емъ и освѣтимъ его еще ярче на основанiи еще другихъ вспомогательныхъ общаго характера соображенiй и методовъ.

Чтобы закончить нашу главу объ изученiи функцiи $E_\alpha(x)$, мы приведемъ еще нѣсколько результатовъ близкихъ къ результатамъ *Wiman'a* (Acta Math. 29), но уже строгимъ. Наши выводы все-же *асимптотически* достаточно хороши и какъ приближенные даютъ сравнительно много.

Такъ, напр., мы нашли, что *членъ maximum* въ $E_\alpha(x)$ есть λ-ый, причемъ

$$\lambda = \frac{1}{a} r^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда, напр., приближенно можемъ утверждать, что корней въ кругѣ радiуса r можетъ быть

$$N'_r = \frac{1}{2\pi} \int d\log \text{ мод. max. } E_\alpha(x) = \log e^{r^{\frac{1}{\alpha}}} = r^{\frac{1}{\alpha}} \quad (11).$$

Конечно эта формула—грубая, но она, какъ асимптотическая, иногда можетъ быть полезной.

Къ формулѣ (11) можно получить другую тоже грубую на основанiи другихъ соображенiй, именно: если $E_\alpha(x)$ обладаетъ нулями въ кругѣ радiуса$=r$, то *для этого круга* мы можемъ взять полиномъ *приближенно* и съ *достаточнымъ* *приближеніемъ* выражающій функцію $E_\alpha(x)$; такимъ полиномомъ для круга радіуса$=r$ будетъ полиномъ степени очевидно λ-ой, т. е. слѣд. тогда корней у функціи $E_\alpha(x)$ въ кругѣ радіуса$=r$ будетъ

$$N''_r = \frac{1}{\alpha}\, r^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (11').$$

Формула понятно—тоже сильно грубая, какъ и (11), но во всякомъ случаѣ оріентирующая, но уже менѣе, понятно, чѣмъ (11): присутствіе фактора α сильно можетъ удалить число N_r'' отъ истиннаго N_r.

Вліяніе α—громадно: для подтвержденія сказаннаго отсылаемъ читателя къ строгимъ выкладкамъ *Wiman'a* (Ueber die Nullstellen von $E_\alpha(x)$. Acta math. t. 29).

Но, если, имѣя въ виду, что

$$E_\alpha \backsim e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}(1+\varepsilon(z)),$$

причемъ правая часть отъ *истинной* отличается уже только постояннымъ факторомъ (см. изслѣдованія выше), мы примѣнимъ къ этому выраженію строгую формулу *Cauchy* вида

$$N_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{+\pi} dLog E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{+\pi} r^{\frac{1}{\alpha}}\, e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\, Sin\, \frac{\pi}{\alpha}}{\pi} \qquad (12)$$

то N_r есть уже строгое число нулей, но понятно нашъ методъ не даетъ возможности доказать, что

$$\int dLog\Big(1+\varepsilon(z)\Big) = 0,$$

и потому совпаденіе (12)—случайно.

Оставимъ изученіе функціи $E_a(x)$ и свяжемъ съ нею нѣкоторые выводы *общаго характера*, имѣющіе громадное значеніе въ современной теоріи роста функій.

3. Значеніе изученія majorant'ы цѣлой трансцендентной функціи.

Формула *Стирлинга*

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} . \quad e^{-n} \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

асимптотически запишется такъ:

$$n! \backsim n^n . \quad e^{-n} \tag{2}$$

откуда слѣдуетъ, напр., что

$$\left(n! \right)^{\frac{1}{a}} \backsim n^{\frac{n}{a}} . \; e^{-\frac{n}{a}} \tag{3}.$$

Поэтому, если намъ данъ рядъ $f_1(x)$, majorant'a котораго представится рядомъ

$$\Phi_1(r) = \sum_0^\infty \frac{r^n}{n^{\frac{n}{a}}} \tag{4},$$

то изученіе (4) можно въ силу (2) и (3) замѣнить изученіемъ другой майоранты видъ

$$\Phi_2(r) = \sum_0^\infty \frac{r^n}{\left(n! \right)^{\frac{1}{a}}} \tag{5}.$$

Нетрудно понять, что изученіе рядовъ (2) и (3) *съ точки зрѣнія роста* поведетъ къ однимъ и тѣмъ же результатамъ.

При изученіи ряда вида

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n\ x^n \tag{6}$$

очень полезно часто опредѣлять ростъ $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$; такъ, напр., $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}=k$ даетъ величину обратную радіусу сходимости круга; но и вообще, какъ мы увидимъ сейчасъ, этотъ n-ый корень изъ модуля коэффиціента будетъ играть въ общей теоріи роста функцій нѣкоторую роль.

Покажемъ это!

Допустимъ, что намъ даны два ряда, именно (6) и

$$\varphi(x)=\sum_{0}^{\infty} b_n\ x^n \tag{7}.$$

Пусть кромѣ того извѣстно, что вообще

$$\sqrt[n]{|\,a_n\,|}=\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}+\varepsilon} \tag{8}$$

и

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{b_n}\right|} = k \text{ (k можетъ быть нуль, ∞ или конечное число)} \tag{9}.$$

Очевидно при сдѣланныхъ предположеніяхъ

(10) $$\sqrt[n]{|\,b_n\,|}=\frac{1}{kn^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon \text{ (ε—безк. малое).}$$

иначе

$$\sqrt[n]{|\,b_n\,|} = \frac{1}{n^{\frac{1}{a}+\eta}}\,,\quad k=n^{\eta}\,,\quad \eta\text{—безк. малое, т. е.}$$

порядокъ роста коэффиціентовъ ряда (7)—одинаковъ съ порядкомъ роста коэффиціентовъ ряда (6).

Очевидно справедлива болѣе общая теорема, чѣмъ только что выраженная. Допустимъ, въ самомъ дѣлѣ, что ряды (6) и (7)—цѣлыя трансцендентныя функціи x.

Пусть вообще

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \frac{1}{\varphi(n)}\,,\quad \varphi(n)\text{—возрастающая функція} \\ &\sqrt[n]{|\,b_n\,|} = \frac{1}{\psi(n)}\,,\quad \psi(n)\text{—тоже возрастающая} \end{aligned}\right\} \quad (10),$$

причемъ

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{b_n}\right|} = k \qquad (11),$$

тогда

$$\sqrt[n]{|\,b_n\,|} = \frac{1}{k\varphi(n)} + \varepsilon(n) \qquad (12)$$

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0\,,$$

и мы можемъ дать такую теорему:

(A). Если намъ предложены двѣ трансцендентныя функціи (6) и (7) съ условіями (10) и (11), то ростъ коэффиціентовъ той и другой—одинаковъ, если не обращать вниманія на постоянный факторъ, которымъ могутъ разниться формулы роста коэфиціентовъ; асимптотически же ростъ той и другой—одинаковъ (если постоянный факторъ конеченъ).

Пользуясь этой теоремой, которая на практикѣ можетъ оказаться чрезвычайно полезной, можно, напр., при асимптотическомъ счетѣ ряды

$$E_a(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(na)!} \quad \text{и} \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^a} \quad (a>2)$$

считать за эквивалентные, и многія свойства функціи $E_a(x)$ могутъ быть свойствами второй функціи. Какъ извѣстно, функція

$$J_0(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n!)^2} \tag{13}$$

есть нѣсколько преобразованная *Бесселевская*, и мы на основаніи только что выраженной теоремы приходимъ къ курьезному выводу:

„*Свойства функціи (13) въ силу теоремы (A) съ точки зрѣнія роста должны быть вѣроятно подобны* **свойствамъ роста** *функціи* $E_2(x)$".

Но вѣдь

$$E_2(x) = \sum_0^\infty {}_n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_0^\infty \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!},$$

т. е.

$$E_2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right) \tag{14},$$

и свойства $E_2(x)$ сейчасъ же видны поэтому, именно

1^0 роста модуль $E_a(x)$ опредѣленъ условіемъ

$$\text{mod. max.} \left| E_2(x) \right| = \frac{1}{2} e^{\sqrt{r}}$$

2^0 Далѣе по теоремѣ Cauchy число нулей въ кругѣ радіуса r есть

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{-\pi} Log_e \sqrt{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi} r^{\frac{1}{2}}\, Sin\,\frac{\varphi}{2} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\pi}$$

3^0. Структура нулей опредѣлена формулой

$$a_n = -\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 . \pi^2,$$

т. е. они—*всѣ реальны.*

Отсюда *непосредственно тоже самое имѣемъ право сказать относительно функціи Бесселя* съ той только разницей, что мы не знаемъ сразу, какова структура нулей *не* асимптотическая, но *асимптотически ростъ нулей функціи* $J_0(x)$ опредѣленъ свойствомъ 3^0.

Этотъ небольшой примѣръ показываетъ намъ, какое дѣйствительно громадное значеніе можетъ имѣть отрытая нами простая почти тривіальная теорема (A).

И дѣйствительно читатель можетъ убѣдиться въ справедливости нашихъ выводовъ, читая работу *P. Schafheitlin'a* въ *Journal für die reine und angemandte Mathematik* (Ueber die Gaússche.... B. 114. p. 31 и сл.).

Уже изъ произведенныхъ нами до сихъ поръ изслѣдованій читатель вѣроятно замѣтилъ, что между ростомъ коэффиціентовъ и ростомъ нулей цѣлой трансцендентной функціи или ростомъ ея модуля maximum'a существуетъ какая-то связь. Весьма естественнымъ является поэтому постараться изучить эту связь и установить въ этомъ направленіи нѣкоторые опредѣленные законы. Къ этому мы теперь и приступимъ!

4. Пусть намъ данъ рядъ, цѣлую трансцендентную функцію представляющій

$$\Phi(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (1),$$

и пусть мы знаемъ, что его *majorant'a* или модуль-maximum есть $e^{r^{\rho-\varepsilon}}$ (ε—колеблется около нуля), слѣд. мы имѣемъ

$$\text{mod. max.} \left|\Phi(x)\right| = \sum_0^\infty |\,a_n\,|\, r^n = e^{r^{\rho+\varepsilon}} = \sum_0^\infty \frac{r^{n\rho+\varepsilon'}}{n!}\,,$$

иначе говоря

$$\text{Mod. max.} \left|\Phi(x)\right| \backsim \sum_0^\infty \frac{r^{n\rho}}{n!}.$$

Будемъ означать впредь *majorant'y* черезъ $\mathfrak{M}(\Phi(r))$, тогда

$$\mathfrak{M}\Big(\Phi(r)\Big) = \sum_0^\infty \left|a_n\right| r^n \backsim \sum_0^\infty \left(\frac{r^{n\rho-n}}{n!}\right) r^n \qquad (2).$$

Формулу (2) мы записали такъ, что *каждому члену* правой части отвѣчаетъ *соотвѣтствующiй* членъ лѣвой части. Имѣемъ-ли мы право отождествить теперь

$$|\,a_n\,| \quad \text{съ} \quad \frac{r^{n\rho-n}}{n!} \quad ?$$

Вообще говоря, для какого-угодно, для *любого* n конечно никакого права не имѣемъ; но для нѣкоторыхъ и для очень удаленныхъ или—точнѣе—для тѣхъ, отъ коихъ *зависитъ ростъ функцiи* въ правой и лѣвой части (онъ—одинаковъ для той и для другой частей) это сдѣлать *въ асимптотическомъ* счетѣ возможно. Почему? Возьмемъ при данномъ r членъ maximum въ правой части, отъ котораго *зависитъ* ростъ; имѣемъ изъ

$$u(n) = \frac{r^{n\rho}}{n!}\,, \quad Log u(n) \backsim n\rho Log r — n Log n + n$$

$$\frac{d\,Log\,u(n)}{dn}=Log\,r^{\rho}-Log\,n=0,$$

такъ что номеръ этого члена есть

$$\lambda=r^{\rho} \qquad (3).$$

Теперь членъ maximum лѣвой части не можетъ быть меньше этого члена, но не можетъ быть и больше его; къ тому же мы *предполагаемъ* ростъ коэффиціентовъ a_n слѣдующимъ *по одному и тому же закону*; слѣд. въ асимптотическомъ счетѣ возможно допустить, что

$$|a_\lambda| \equiv \frac{r^{\lambda\rho-\lambda}}{\lambda!} = \frac{r^{\lambda\rho-\lambda}}{\lambda^\lambda e^{-\lambda}},$$

откуда

$$\sqrt[\lambda]{|a_\lambda|} = \frac{r^{\rho}e}{\lambda . r}$$

или въ силу (3)

$$\sqrt[\lambda]{|a_\lambda|} \backsim \frac{e}{\lambda^{\frac{1}{\rho}}}.$$

Допустимость принятаго нами здѣсь метода предполагаетъ и еще одну *существенную* оговорку: мы можемъ такъ разсуждать лишь при одномъ предположеніи: рядъ $\Phi(x)$ долженъ быть такимъ, что его ростъ въ значительной степени *обусловливается* ростомъ его члена maximum'а при заданномъ

$$|x| = r.$$

Отсюда видно, какую роль играетъ принципъ $((A), 1)$ въ теоріи роста функцій.

Итакъ мы можемъ высказать слѣдующее общее положеніе (нѣсколько болѣе общее, чѣмъ то даютъ только что произведенныя выясненія, но читатель безъ труда провѣритъ результатъ):

(*B*) *„Если намъ дана функція* $\Phi(x)$, *коэффиціенты коей всѣ растутъ по одному и тому же закону* $\varphi(n)$, *и если ея* $\mathfrak{M}(\Phi(r)) = e^{Ar^{\rho}}$, *то*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \cdot e.$$

Нашъ результатъ — отличенъ отъ таковаго же даннаго, напр., *Lindelöf*'омъ (Acta Societatis Fennicae T. 31), тѣмъ не менѣе, какъ асимптотическій онъ—хорошъ. Разница обусловлена методомъ нашимъ, который является *асимптотическимъ.* Методъ этотъ—отличенъ отъ другихъ существующихъ. Можно разсуждать и еще нѣсколько иначе! Допустимъ, что рядъ $e^{Ar^{\rho}}$ представляетъ собой $\mathfrak{M}(\Phi(r))$ тогда только, когда между членами послѣдовательными въ $e^{Ar^{\rho}}$ какъ-то, напр., $\frac{A^{n-1}r^{(n-1)\rho}}{(n-1)!}$ и $\frac{A^n r^{n\rho}}{n!}$, мы себѣ представимъ рядъ членовъ ряда (1) эквивалентныхъ по росту коэффиціентамъ $|a_k|$ по порядку; тогда n-ый членъ *по аналогіи* съ $n\rho$-ымъ представится какъ

$$|a_n| = \frac{A^{\frac{n}{\rho}}}{\frac{n}{\rho}!} = \frac{(A^n e^n \rho^n)^{\frac{1}{\rho}}}{n^{\frac{n}{\rho}}} \backsim \left(\frac{A\rho e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Этотъ результатъ столь же точенъ, какъ и у *Lindelöf*'а (loc. cit.), и мы можемъ сказать:

(*C*) *„Если рядъ Taylor'а* $\Phi(x)$ *съ кругомъ сходимости безконечнаго радіуса по росту эквивалентенъ съ рядомъ* $e^{Ar^{\rho}}$, *то ростъ его коэффиціентовъ опредѣленъ закономъ*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{A\rho e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Изъ теоремы (C) мы сейчасъ же выведемъ другую тоже очень интересную и обратную (C).

Допустимъ, что коффиціенты ряда (1) растутъ по закону (C). Какъ растетъ модуль самой функціи $\Phi(r)$?

Беремъ майоранту (1)

$$\mathfrak{M}(\Phi(x)) = \sum_0^\infty \frac{(A\varrho e)^{\frac{n}{\rho}}}{n^{\frac{n}{\rho}}} r^n = \sum_0^\infty \frac{((A\varrho)^{\frac{1}{\rho}} \cdot r)^n}{(n^n e^{-n})^{\frac{1}{\rho}}} = \sum_0^\infty \frac{((A\varrho)^{\frac{1}{\rho}} \cdot r)^n}{(n!)^{\frac{1}{\rho}}}$$

Въ силу формулы (3) § 3:

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) = \sum_0^\infty \frac{[(A\varrho)^{\frac{1}{\rho}} \cdot r]^n}{\left(\frac{n}{\varrho}\right)!},$$

иначе говоря

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) = E_{\frac{1}{\rho}} ((A\varrho)^{\frac{1}{\rho}} r),$$

т. е. *асимптотически* (См. изслѣдованіе $E_\alpha(x)$)

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) = e^{[(A\varrho)^{\frac{1}{\rho}} \cdot r]^\rho} = e^{A\varrho r^\rho}.$$

Полагая же, что $\varrho = r^\varepsilon$ (ε—безконечно малое для r достаточно большого), мы ради симметріи результата съ теоремой (C) можемъ выразить такую теорему, дополненіе къ (C):

(D) *„Если коэффиціенты ряда (1) растутъ по закону (C), то*

$$\mathfrak{M}(\Phi(r) \backsim e^{Ar^{\rho+\varepsilon}}.$$

Вообще нужно замѣтить, факторъ A, въ асимптотическомъ счетѣ не играетъ большой роли, и его даже можно иногда просто опускать.

Разсужденія только что нами произведенныя, какъ нельзя лучше, устанавливаютъ положеніе:

(E). *„Ростъ модуля функціи цѣлой трансцендентной и ростъ коэффиціентовъ ея разложенія Taylor'a взаимно обусловливаютъ другъ друга, и, зная одно, можно опредѣлить другое.*

Но для того, чтобы изучать удобнѣй и законосообразнѣй ростъ того и другого, нужно обладать какой-либо подходящей *скалой сравненія.*

Къ счастью, аналисты въ данномъ случаѣ не безсильны: мы всегда можемъ использовать скалу, уже использованную какъ *Bonnet* для строкъ, такъ *Du-Bois-Reymond*'омъ для тѣхъ же строкъ, а также для его *инфинитарнаго* исчисленія.

5. Вотъ этимъ мы теперь и займемся: Итакъ пусть снова данъ рядъ (1), и пусть теперь

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) \backsim e^{Ar^{\rho}\,(Lr)^{\alpha_1}\,(L_2 r)^{\alpha_2}} \tag{4}$$

(*здѣсь* $L_2 r = LLr$).

Запишемъ majorant'y теперь такъ:

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) \backsim e^{Ar^{\rho}\,(Lr)^{\alpha_1}\,(L_2 r)^{\alpha_2}} =$$

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{A^n r^{\rho n}\,(Lr)^{\alpha_1 n}\,(L_2 r)^{\alpha_2 n}}{n!} \tag{4'}$$

Ищемъ теперь максимальный членъ (4') при заданномъ r. Изъ

$$nLA + \rho nLr + \alpha_1 nL_2 r + \alpha_2 nL_3 r - nLn + n = Lu(n)$$

имѣемъ:

$$\frac{dLu(n)}{dn}=0=LA+Lr^{\rho}+\alpha_1 L_2 r+\alpha_2 L_3 r-Ln \ ,$$

откуда наибольшій индексъ

$$\lambda=Ar^{\rho}(Lr)^{\alpha_1}.(L_2 r)^{\alpha_2}. \tag{5}$$

Разрѣшая (5) относительно r, получаемъ:

$$r=\frac{\lambda^{\frac{1}{\rho}}(Lr)^{-\frac{\alpha_1}{\rho}}(L_2 r)^{-\frac{\alpha_2}{\rho}}}{A^{\frac{1}{\rho}}} \ ,$$

т. е. въ силу (5)

$$r=\left[\frac{\lambda.(L\lambda)^{-\alpha_1}.(L_2\lambda)^{-\alpha_2}}{A\varrho^{-\alpha_1}}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad (6),$$

ибо

$$Lr=\frac{1}{\varrho}L\lambda(1+\varepsilon_1(\lambda)); \quad \lim_{\lambda=\infty}\varepsilon_1(\lambda)=0$$

$$L_2 r=L_2\lambda\,(1+\varepsilon_2(\lambda)), \quad \lim_{\lambda=\infty}\varepsilon_2(\lambda)=0 \ .$$

Представляя же (4') подъ видомъ

$$\mathfrak{M}(\Phi(r) \backsim \sum_0^{\infty}\frac{A^n.r^{\rho n-n}.(Lr)^{\alpha_1 n}.(L_2 r)^{\alpha_2 n}}{n!}r^n$$

и въ силу соображеній, подобныхъ предыдущимъ, полагая асимптотически

$$|\,a_n\,| \backsim \frac{A^n.\,r^{\rho n}.\,(Lr)^{\alpha_1 n}.\,(L_2 r)^{\alpha_2 n}}{n^n.\,e^{-n}.\,r^n} \ ,$$

находимъ

$$\sqrt[n]{|a_n|} \backsim \frac{A.r^{\rho}\,(Lr)^{\alpha_1}\,.\,(L_2 r)^{\alpha_2}}{n\,.\,e^{-1}.\,r}.$$

Но въ силу (5) и (6) имѣемъ непосредственно

$$\sqrt[n]{|a_n|} \backsim e\left[\frac{A\varrho^{-\alpha_1}}{n(Ln)^{-\alpha_1}\,.\,(L_2 n)^{-\alpha_2}}\right]^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Только что добытые результаты мы формулируемъ въ слѣдующей теоремѣ (обобщающей результаты):

(*F*) „*Если дана цѣлая трансцендентная функція* $\Phi(x)$ *majorant'a которой есть*

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) \backsim e^{Ar^{\rho}}\,(Lr)^{\alpha_1}\,.\,(L_2 r)^{\alpha_2}\ldots(L_p r)^{\alpha_p}$$

то законъ роста коэффиціентовъ ея разложенія Taylor'a, опредѣленъ формулами

$$\sqrt[n]{|a_n|} \backsim e\,.\left[\frac{A\varrho^{-\alpha_1}}{n(Ln)^{-\alpha_1}\,(L_2 n)^{-\alpha_2}\ldots(L_p n)^{-\alpha_p}}\right]^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Результаты эти —близки къ результатамъ даннымъ *Lindelöf'*-омъ (loc. cit.).

Въ теоремѣ (*F*) мы видимъ *точное* опредѣленіе принципа (*E*), точный отвѣтъ на него.

Покончивши съ связью между ростомъ коэффиціентовъ ряда (1) и ростомъ *модуля —maximum'a ряда* (1), мы обратимся къ *установленію зависимости между ростомъ модуля ряда и ростомъ его нулей.*

Изслѣдованіе, напр., функцій $J_0(z)$ и $E_2(z)$ наглядно, эмпирически устанавливаетъ такую связь.

6. *Соотношеніе между ростомъ модуля-maximum'a цѣлой трансцендентной функціи и ея нулями.*

Воспользуемся при рѣшеніи этой задачи прежде всего методомъ аналогіи.

Извѣстно, если данъ рядъ Taylor'а

$$\Phi(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

(радіусъ сходимости $= \infty$), то

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} \frac{\Phi(x)dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\Phi(re^{i\varphi})\,d\varphi}{r^n.\,e^{n\varphi i}},$$

и слѣд. грубо асимптотически

$$|\,a_n\,| \backsim \frac{\mathfrak{M}(\Phi(r))}{r^n}. \tag{2}$$

Съ другой стороны возьмемъ извѣстную *формулу Iensen'а* (См. *Petersen*. Vorlesungen über die Functionentheorie, p. 196):

$$Log \frac{r^n}{|\,\alpha_1\,|\,.\,|\,\alpha_2\,|\,...\,|\,\alpha_n\,|} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} Log \left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(o)}\right| d\varphi \tag{3}$$

Отсюда, тоже грубо асимптотически выводимъ

$$\frac{1}{|\alpha_n|^n} \backsim \frac{\mathfrak{M}(\Phi(r))}{r^n} \tag{4}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть нули функціи $\Phi(x)=0$ въ кругѣ радіуса r.

Сопоставленіе формулъ (2) и (4) ведетъ насъ тоже къ очень курьезному выводу:

(*G*) *„Асимптотическія формулы (2) и (4) позволяютъ въ первомъ приближеніи принять ростъ n го коэффиціента ряда (1) и n-ой степени величины обратной n-ому нулю функціи $\Phi(x)=0$ одинаковыми“.*

Т. о. асимптотически мы вывели слѣдующій законъ для роста $|a_n|$ и $|\alpha_n|$:

(*I*) *Асимптотически ростъ n-го коэффиціента ряда* $\Phi(x)=\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ *и его n-го нуля въ кругѣ радіуса* $=r$ *опредѣленъ закономъ*

$$|a_n| \backsim \left|\frac{1}{\alpha_n{}^n}\right|.\text{“}$$

Отсюда

$$|\alpha_n| \backsim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

или въ силу теоремы (*F*)

$$|\alpha_n| \backsim \frac{1}{e}\left[\frac{n\,(Ln)^{-\alpha_1}\,.\,(L_2 n)^{-\alpha_2}\ldots(L_p n)^{-\alpha_p}}{A\varrho^{-\alpha_1}}\right]^{\frac{1}{\varrho}},$$

если только

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) \backsim e^{Ar^\varrho}\,(L_2\, n)^{\alpha_1}\ (L_2\, r)^{\alpha_2}\ldots(L_p r)^{\alpha_p}.$$

Окончательно мы пришли къ слѣдующему интересному выводу (обращаемъ вниманіе читателя на соотвѣтствующее мѣсто у *Lindelöf* (loc. cit.)), обобщающему *всѣ* предыдущіе:

(*K*) „*Если дана цѣлая трансцендентная функція* $\Phi(x)=\sum\limits_0^\infty n\; a_n x^n$, *и если ея модуль-maximum растетъ, какъ*

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) \backsim e^{Ar^\varrho}\ (Lr)^{\alpha_1}\ldots(L_p r)^{\alpha_p},$$

то ея n-ый нуль растетъ по закону

$$|\alpha_n| \backsim \frac{1}{e}\left[\frac{n\,(Ln)^{-\alpha_1}\ldots(L_p n)^{-\alpha_p}}{A\varrho^{-\alpha_1}}\right]^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Теперь, можно сказать, мы получили всѣ результаты Lindelöf'a (Acta Fennica, T. 31), но своимъ собственнымъ путемъ.

Интереснымъ было бы опредѣлить степень точности нашихъ выводовъ, исходя изъ нашихъ результатовъ какъ изъ результатовъ перваго приближенія и ища къ нимъ другіе болѣе точные; но мы оставляемъ этотъ вопросъ въ данный моментъ въ сторонѣ.

Также нашъ пріемъ отличается отъ таковаго же употребленнаго и *Borel*'емъ.

Слѣдующимъ важнымъ шагомъ въ вопросѣ взаимной связи роста модуля функціи, роста коэффиціентовъ ея разложенія въ строку *Taylor*'a и роста ея нулей является опредѣленіе и изученіе связи между рядомъ Taylor'a опредѣленнаго только что перечисленными тремя факторами и разложеніемъ его въ *классическое произведеніе Weirstrass*'a, если онъ обладаетъ нулями.

При изученіи этой послѣдней проблемы мы натолкнемся на новыя и интересныя понятія и проблемы; но всѣмъ этимъ мы займемся нѣсколько позже.

7. *Нѣкоторыя соображенія по поводу асимптотическихъ законовъ (4, (D)), (5, (F)), и (6, (K)).*

Предыдущими соображеніями мы установили тѣсную зависимость между законами роста модулей—самой функціи, ея нулей и коэффиціентовъ ея разложенія въ строку Taylor'a, причемъ обнаружили, что знаніе роста одной изъ величинъ даетъ возможность знать ростъ двухъ другихъ.

Понятно предыдущія соображенія предполагали все время, что *скала Du-Boiš-Reymond*'a достаточна для опредѣленія роста названныхъ величинъ. Но вѣдь иногда она является безполезной, какъ она иногда является безполезной, напр., въ теоріи сходимости строкъ.

Область цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, майоранта коихъ $\mathfrak{M}(\Phi(r))$ можетъ быть усчитана при помощи *скалы Du-Bois-Reymond'a*,—очень обширна, и эту область принято выдѣлять въ особую группу. Вообще говоря, это—группа функцій, для коихъ всегда возможно асимптотическое неравенство вида

$$e^{Ar^p} < \mathfrak{M}(\Phi(r)) < e^{Ar^{p+1}}, \qquad (1)$$

причемъ равенство верхнему или нижнему предѣлу не выключено, и иногда возможно, что

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) = e^{Ar^p} \text{ или же } \mathfrak{M}(r)) = Ae^{Ar^{p+1}}. \qquad (2)$$

Числа p и $p+1$ суть то, что *Borel* называетъ *l'ordre apparent* цѣлой трансцендентной функціи.

Такъ какъ классъ функцій, ростъ *модуля-maximum'a* коихъ можетъ быть всегда опредѣленъ формулой (1) или одной изъ (2), измѣряется *скалой Du-Bois-Reymond'a*, причемъ всегда можно подъискать для $\mathfrak{M}(\Phi(r))$ такой функцій числа p и $p+1$ *конечныя*, цѣлыя или дробныя, то принято называть такія функціи—*функціями конечнаго порядка.*

Характерныя для этихъ функцій свойства нами отчасти уже были изучены и формулированы въ асимптотическихъ законахъ роста (4 (D)), (5 (F)) и (6 (K)). Всѣ остальныя цѣлыя трансцендентныя функціи, ростъ коихъ уже не можетъ быть опредѣленъ при помощи скалы Du-Bois-Reymond'a, составляютъ другую обширную группу функцій, причемъ эту группу раздѣляютъ на двѣ въ свою очередь группы:

1^0 группу функцій (цѣлыхъ трансцендентныхъ), ростъ коихъ опредѣленъ условіемъ

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) < e^{r^\varepsilon},$$

какъ бы ε мало ни было; это такъ называемыя *функціи нулевого порядка.*

2^0 группу функцій *порядка безконечнаго*, ростъ коихъ опредѣленъ условіемъ

$$\mathfrak{M}(\Phi(r)) > e^{r^p},$$

какъ бы p велико ни было.

Раздѣленіе функцій *не*-конечнаго порядка на два класса обусловлено тѣмъ, что у функцій одной группы есть свойства, не принадлежащія функціямъ другой группы. Мы обнаружимъ это позже!

Въ виду того, что мы заговорили теперь о классификаціи цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, мы считаемъ полезнымъ выдѣлить одинъ *основной принципъ изученія роста функцій*, принципъ, дающій возможность произвести точно классификацію функцій, а также указывающій методъ ихъ изученія.

Основной принципъ изученія роста, скажемъ, цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, въ сущности есть не что иное, какъ методъ сравненія данной, предложенной намъ функціи $\Phi(x)$ съ другой, которую мы выбираемъ—*и выбираемъ произвольно*—для сравненія. Такъ, напр., если мы имѣемъ функцію сравнимую относительно $Log\mathfrak{M}(\Phi(r))$ со степенью r^k модуля независимаго перемѣннаго, т. е., если, положимъ,

$$r^{k-\varepsilon} < Log\mathfrak{M}(\Phi(r)) < r^{k+\varepsilon}\,,$$
(ε—безк. малое)

то такая функція $\Phi(x)$ есть *конечнаго порядка* и притомъ порядка строго k.

Обыкновенно принято сравнивать всегда ростъ $Log\mathfrak{M}(\Phi(r)$ съ нѣкоторой другой функціей, выбранной нами какъ масштабъ, но иногда при асимптотическомъ счетѣ полезно производить сравненіе не съ $Log\mathfrak{M}(\Phi(r))$, а съ $\dfrac{\mathfrak{M}'(\Phi(r))}{\mathfrak{M}(\Phi(r))}$, при чемъ асимптотически грубо можно писать

$$\frac{\mathfrak{M}(\Phi(r+k))-\mathfrak{M}(\Phi(r))}{\mathfrak{M}(\Phi(r))} \backsim \frac{\mathfrak{M}'(\Phi(r))}{\mathfrak{M}(\Phi(r))} \qquad (3)$$

при r—достаточно большомъ и k сравнительно маломъ съ r.

Въ вопросахъ асимптотическаго счета приближенное равенство (3) можетъ оказаться чрезвычайно полезнымъ, какъ это мы сейчасъ покажемъ.

Напр., возьмемъ рядъ монотонно возрастающихъ величинъ

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots \qquad (4)$$

Нельзя-ли опредѣлить „скорость", быстроту роста (4)? Скала Du-Bois-Reymond'a можетъ быть здѣсь полезной.

Если, напр.,

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n}=\frac{1}{n},$$

то, полагая $N_n=\varphi(n)$, мы имѣемъ

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{\varphi(n)}=\frac{1}{n}$$

или въ силу (3)

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}=\frac{1}{n}, \quad \text{то есть } \varphi(n) \backsim n,$$

и слѣд. числа N_k въ *среднемъ* растутъ какъ числа натуральнаго ряда k; отсюда легко сейчасъ же сказать, какъ растетъ сумма (4), т. е. опредѣлить скорость роста суммы (4).

Предположимъ теперь, что

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n Log N_n}=\frac{1}{n},$$

(т. е. мы все время примѣняемъ скалу Du-Bois-Reymond'a; тогда, разсуждая попрежнему, мы можемъ асимптотически писать

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n) Log \varphi(n)} \backsim \frac{1}{n},$$

т. е.

$$\varphi(n) \backsim N_n \backsim e^n,$$

и слѣд. числа N_k растутъ еще быстрѣй: они растутъ здѣсь какъ k-ыя степени числа e.

Очевидно вообще для ряда величинъ (4) можно установить слѣдующую формулу:

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n}=\frac{\tau_n Log N_n . Log_2 N_n \ldots Log_p N_n}{n} \qquad (5)$$

гдѣ числа p и σ_n, мѣняющееся съ индексомъ n, вообще говоря, должны быть подобраны такъ, чтобы лѣвая часть равнялась правой. Асимптотически (5) запишется такъ:

$$Log_{p+1}\varphi(n) \backsim \int_m^n \frac{\sigma(n)}{n}\,dn. \tag{5'}$$

Понятно, если мы хотимъ продѣлать точный подсчетъ, мы должны пользоваться чаще (5), а не (5'). Формула (5) даетъ намъ при ростѣ чиселъ $\sigma(n)$ и p все бóльшія и бóльшія числа N_n.

Наоборотъ, если бы мы хотѣли получать числа все менѣе и менѣе быстро растущія, то мы бы взяли за *общую формулу ихъ образованія* такую:

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = \frac{\sigma(n)}{n\,Log n Log_2 n \ldots Log_p n} \tag{6}$$

Переходъ отъ (6) къ ея асимптотической формулѣ при помощи (3) намъ говоритъ объ этомъ непосредственно, и мы имѣемъ тогда

$$Log\varphi(n) \backsim \int \frac{\sigma(n)dn}{n\,Log n \ldots Log_p n} \tag{6'}$$

или при $\sigma(n) = \sigma \equiv \text{const.}$

$$Log\varphi(n) = \sigma Log_{p+1} n \tag{6''}$$

Конечно иногда вмѣсто формулы образованія чиселъ N_n медленно или быстро растущихъ приходится брать такія:

$$\begin{cases} \dfrac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = \dfrac{\sigma(n).LogN_n \ldots (Log_p N_n)^{\eta+1}}{n} & \text{(для быстро растущихъ)} \\[2ex] \dfrac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = \dfrac{\sigma(n)}{n.Log n.Log_2 n \ldots (Log_p n)^{\eta+1}} & \text{(для медленно растущихъ)} \end{cases}$$

η—безк. малое

Все это—въ сущности не ново; но *тоже самое* можно примѣнить къ росту функцій, причемъ здѣсь вмѣсто разности

$$\mathfrak{M}(\varphi(r+\delta)-\mathfrak{M}(\varphi(r))$$

асимптотически мы будемъ брать производную $\mathfrak{M}'(\varphi(r)$ (Производную по r), и тогда формулы, которыя мы употребляли, напр., для изученія роста модуля—maximum'а функцій конечнаго порядка не являются *абсолютно—новыми: прицнпъ*, какъ видимъ, *и въ теоріи рядовъ, и въ теоріи роста функцій —одинъ и тотъ же.*

Замѣнить функцію $\varphi(x)$ ея *функціей—масштабомъ* $\omega(x)$ во многихъ вопросахъ можетъ оказаться чрезвычайно полезнымъ и выгоднымъ даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда не идетъ рѣчь исключительно о ростѣ. Вотъ примѣръ этому!

Пусть дана функція $f(x)$ и пусть

$$[f(x)]^m=f(y) \tag{I}$$

и пусть извѣстно еще, что

$$f(x) \backsim \omega(x),$$

причёмъ

$$\omega'(x) = \frac{a\omega(x)}{xLogx} \tag{II}$$

Требуется опредѣлить y изъ (I).

Прежде всего изъ (II) мы находимъ

$$Log\omega(x)=aLog_2x=Log(Logx)^{\alpha},$$

такъ что

$$\omega(x)=(Logx)^{\alpha} \tag{III}$$

Далѣе изъ (I) *асимптотически* находимъ

$$\omega(y)=(\omega(x))^m$$

и въ силу (III)

$$(Logy)^{\alpha}=(Logx)^{m\alpha},$$

такъ что

$$y = e^{(Logx)^m},$$

и слѣд. задача—рѣшена.

Вотъ еще примѣръ! Пусть $f(x)$—такова, что

$$(\omega(x))^{1-\varepsilon} < f(x) < \omega(x)^{1+\varepsilon} \qquad (x)$$

и пусть

$$f(y) = mf(x) \qquad (xx).$$

Требуется опредѣлить y въ функціи x при условіи

$$\begin{cases} \dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \dfrac{\alpha}{xLogx} \\ \alpha \equiv \text{const.} \end{cases} \qquad (o)$$

Въ этомъ случаѣ разрѣшеніе ур-ія (xx) замѣняемо разрѣшеніемъ *асимптотическаго*

$$\omega(y) = m\omega(x) \qquad (oo).$$

Изъ (o) находитъ

$$Log\omega(x) = Log(Logx)^\alpha,$$

такъ что

$$\omega(x) = (Logx)^\alpha,$$

и слѣд.

$$(Logy)^\alpha = m(Logx)^\alpha,$$

т. е.

$$Logy = m^{\frac{1}{\alpha}} Logx \text{ и } y = x^{m^{\frac{1}{\alpha}}},$$

и мы беремъ за y въ (xx) значеніе *асимптотическое*

$$y = x^{m^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Разумѣется, успѣхъ здѣсь обусловленъ возможностью найти такую *функцію—масштабъ* $\omega(x)$ къ данной $f(x)$; что же касается до нахожденія такой $\omega(x)$ и до методовъ, дающихъ это нахожденіе то этотъ вопросъ долженъ рѣшаться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ отдѣльно; надѣемся, что читателю это утвержденіе понятно послѣ всего, что мы сказали до сихъ поръ.

Любопытнымъ является также тотъ фактъ, что *скала Du—Bois—Reymond'а* все чаще и чаще находитъ себѣ примѣненіе въ анализѣ.

Для функціи $\Phi(x)$ *не*—конечнаго порядка быстро растущихъ или медленно растущихъ мы будемъ пользоваться соотвѣтственно скалами:

$$(7). \quad \begin{cases} \dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \dfrac{\tau(x).\,Log\,\omega(x).\,Log_2\omega(x)\ldots(Log_r\omega(x))^{1+\varepsilon}}{x}, \\[2ex] \dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \dfrac{\tau(x)}{xLog x.\,Log_2 x\ \ldots\ (Log_r x)^{1+\varepsilon}} \end{cases}$$

(ε—безк. малое или же нуль).

($\tau(x)$—функція или же constant'а, иногда$\equiv$1.).

Въ заключеніе этой главы умѣстно поставить слѣдующій вопросъ: *допускаютъ-ли законы* $(4(D))$, $(5,(F))$ и $(6,(K))$ *исключенія?* Нельзя-ли иногда ошибиться, слѣдуя имъ?

Это—вопросъ, на который мы къ сожалѣнію отвѣтить сполна и ясно не умѣемъ; но во всякомъ случаѣ перечисленные законы допускаютъ исключенія, и докажемъ это мы фактами. Напр., если мы возьмемъ двѣ цѣлыя трансцендентныя функціи $Sin\,z$ и $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$, то ихъ нули *съ точки зрѣнія роста* одинаковы, ибо нули первой суть

$$0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3,\ \ldots\ldots,$$

нули же второй суть

$$0, -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots$$

Въ то же самое время ихъ модули растутъ соотвѣтственно (асимптотически) какъ $e^{\pi r}$ и $e^{r l q r}$, и мы видимъ явно отступленіе отъ вышеприведенныхъ асимптотическихъ законовъ. Почему это такъ?

Очевидно, изученія роста *только модулей* недостаточно; само собой понятно, что вліяніе аргументовъ нулей можетъ быть иногда значительнымъ. Это—съ одной стороны, а съ другой стороны въ случаѣ функцій *конечнаго* порядка и притомъ *цѣлаго* возможны также отступленія отъ общей теоріи; въ этомъ послѣднемъ случаѣ происходящія отступленія въ сущности обусловлены тоже ролью аргументовъ нулей. Для того, чтобы выяснить это явленіе глубже, мы нуждаемся въ изученіи роста произведеній *Weierstrass'a* типа

$$f(x)=e^{K(x)}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\;\cdots\;+\frac{z^n}{p_n a_n^{p_n}}},$$

а также мы должны глубже установить связь между произведеніемъ Weierstrass'a для предложенной функціи и ея разложеніемъ въ строку Taylor'a; этому мы посвятимъ спеціальное изслѣдованіе въ послѣдующихъ главахъ; сейчасъ же мы покажемъ, какъ нужно изучать функцію, если она не поддается изученію при помощи уже не разъ цитированныхъ законовъ (D), (F) и (K). Кстати замѣтимъ здѣсь еще, что на примѣрѣ функціи *Mittag-Leffler'a* $E_2(x)$ читатель можетъ наглядно убѣдиться въ справедливости законовъ $(4,(D))$, $(5,(F))$ и $(6,(K))$.

8. *Изученіе функціи*

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} m\, q^{m^2}.x^m; o<q<1 \qquad \text{(I).}$$

Этотъ примѣръ мы выбрали потому, что онъ не подходитъ подъ случай роста модуля функціи по скалѣ Du-Bois-Reymond'a, и слѣд. мы должны указать методъ изученія такой функціи. Замѣтимъ особенно, что методъ взятый нами *довольно общаго характера*, и читатель можетъ имъ пользоваться очень часто въ подобнаго рода проблемахъ. (Сравни тоже самое почти у *Hardy* „On the zeroes of certain classes of integral Taylor series". (Proceedings of the London Mathematical Society. 1905. Serie 2, p. 332). *Hardy* указываетъ въ цитированной работѣ, къ какимъ классамъ функцій взятый нами методъ примѣнимъ; мы до знакомства съ работой *Hardy* часто пользовались его же методомъ для опредѣленія роста модуля функціи.

Примѣръ этотъ нами взятъ у *Hadamard'a* (См. примѣчаніе р. 179. Etude sur les propriétés des fonctions entières... 1892. Journ. de Math. pures et app.), и мы нашли, разсуждая подобно *Hardy*, для модуля $f(x)$ предѣлъ какъ разъ данный въ примѣчаніи. Мы будемъ сейчасъ разсуждать независимо отъ мемуара *Hardy*.

Разумѣется, общая точка зрѣнія, на которой стоитъ *Hardy*, заслуживаетъ серьезнаго вниманія, и мы обращаемъ вниманіе читателя на его мемуаръ (loc. cit.). Обратимся однако къ нашему примѣру! Найдемъ членъ въ рядѣ (I) по абсолютной величинѣ меньшій 1; имѣемъ

$$q^{m^2}r^m<1 \text{ или } q^m r<1,$$

откуда

$$\lambda=E\left(-\frac{Logr}{Logq}\right) \qquad (2).$$

Наибольшій же членъ ряда (1) найдемъ изъ условій:

$$Logu_n=n^2Logq+nLogr \text{ и}$$

$$O=2nLogq+Logr, \text{ т. е. } \lambda_0=E\left(-\frac{Logr}{2Logq}\right) \qquad (3),$$

иными словами

$$\lambda_0\leqq\frac{\lambda}{2} \qquad (4).$$

Далѣе очевидно

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=q^{2n+1}r \qquad (5).$$

и потому

$$\begin{cases} u_{\lambda+1} = q^{2\lambda+1} \cdot r \cdot u_{\lambda} \\ u_{\lambda+2} = q^{2(2\lambda+2)} \cdot r^{2} \cdot u_{\lambda} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\lambda+\varkappa} = q^{\varkappa(2\lambda+\varkappa)} \cdot r^{\varkappa} \cdot u_{\lambda} \end{cases}$$

такъ что въ силу условія

$$q^{\lambda} r < 1 \tag{6}$$

имѣемъ:

$$R_{\lambda+1} = u_{\lambda+1} + u_{\lambda+2} + \ldots < u_{\lambda} \Big\{ q^{2\lambda+1} \cdot r +$$

$$+ \left(q^{2\lambda+1} \cdot r \right)^{2} + \ldots \Big\}$$

или

$$R_{\lambda+1} < u_{\lambda} \cdot \frac{q^{2\lambda+1} \cdot r}{1 - q^{2\lambda+1} \cdot r} \tag{7}.$$

Теперь, если

$$q^{\lambda} r < 1,$$

то невозможно, чтобы

$$q^{2\lambda+1} \cdot r > \frac{1}{2},$$

ибо тогда

$$\frac{1}{q^{\lambda+1}} < 2,$$

между тѣмъ изъ (6) слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{q^\lambda} > r, \text{ т. е. } \frac{r}{q} < 2,$$

что—нелѣпо. Отсюда заключаемъ, что

$$R_{\lambda+1} < u_\lambda \qquad (7),$$

иначе говоря

$$R_{\lambda+1} = u_\lambda \varepsilon, \quad \varepsilon < 1 \text{ и } \lim \varepsilon = o. \qquad (8).$$

Наибольшій членъ у насъ, какъ мы нашли, есть λ_0; поэтому члены за λ_0 будутъ понятно убывать; величину модуля u_λ по сравненію съ модулемъ u_{λ_0} находимъ изъ соотношенія

$$\frac{u_{\lambda_0}}{u_\lambda} = \frac{q^{\lambda_0^2} \cdot r^{\lambda_0}}{q^{\lambda^2} \cdot r^\lambda} = \frac{1}{q^{\lambda^2-\lambda_0^2} \cdot r^{\lambda-\lambda_0}},$$

но въ силу (4) $\lambda = 2\lambda_0$, поэтому

$$\frac{u_{\lambda_0}}{u_\lambda} = \frac{1}{q^{3\lambda_0^2} \cdot r^{\lambda_0}},$$

и, какъ $q^\lambda r < 1$, или

$$r < \frac{1}{q^\lambda} = \frac{1}{q^{2\lambda_0}},$$

то

$$\frac{u_{\lambda_0}}{u_\lambda} > \frac{q^{2\lambda_0^2}}{q^{3\lambda_0^2}} > \frac{1}{q^{\lambda_0^2}},$$

т. е.

$$u_\lambda < u_{\lambda_0} \cdot q^{\lambda_0^2} \qquad (9).$$

Формула (9) даетъ представленіе о быстротѣ убыванія членовъ послѣ λ_0—го.

Съ другой стороны сумма модулей λ_0 первыхъ членовъ (1) даетъ намъ:

$$S_{\lambda_0} = 1 + u_1 + \dots + u_{\lambda_0-1} = u_{\lambda_0}\left\{\frac{u_{\lambda_0-1}}{u_{\lambda_0}} + \dots + \frac{1}{u_{\lambda_0}}\right\} =$$

$$= u_{\lambda_0}\left\{\frac{1}{q^{\lambda_0^2-\overline{\lambda_0-1}^2}\cdot r} + \frac{1}{q^{\lambda_0^2-\overline{\lambda_0-2}^2}\cdot r^2} + \dots + \frac{1}{q^{\lambda_0^2}\, r^{\lambda_0}}\right\} <$$

$$< u_{\lambda_0}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{\lambda_0}} + \dots\right\} = u_\lambda \cdot \frac{1}{r-1},$$

т. е.

$$S_{\lambda_0} < u_{\lambda_0}, \text{ ибо } r > 2. \qquad (10).$$

Собирая добытые результаты, мы очевидно на основаніи формулъ (7) и (10) можемъ писать:

$$f(x) = \sum_1^{\lambda_0} m\, x^m q^{m^2} + \sum_{\lambda_0+1}^{\infty} m\, x^m q^{m^2} =$$

$$= x^{\lambda_0} q^{\lambda_0^2}\Big(1 + \varepsilon(x)\Big), \quad \lim_{|x|=\infty} \varepsilon(x) = 0. \qquad (11).$$

Отсюда ростъ модуля опредѣляется непосредственно, именно:

$$\left|f(x)\right| \backsim u_{\lambda_0} = q^{\lambda_0^2} r^{\lambda_0} = e^{\lambda_0^2 log q + \lambda_0 log r} =$$

$$= exp. \left\{ log q . \frac{log^2 r}{4 log^2 q} - \frac{log^2 r}{2 log q} \right\} = exp. \left\{ - \frac{log^2 r}{4 log q} \right\}$$

или при

$$\sigma = log\left(\frac{1}{q}\right) \qquad (12)$$

$$\left|f(x)\right| \backsim e^{\frac{log^2 r}{4 log \sigma}} \qquad (13).$$

Результатъ, полученный нами здѣсь,—точнѣй *Hadamard'овскаго* (loc. cit.,), Между прочимъ это показываетъ, что формулы Hadamard'a для вычисленія роста функцій, данныя имъ въ Journ. des Math. pures (1892). T. VIII—мало точны.

По его формуламъ

$$\left|f(x)\right| \backsim e^{\frac{log^2 r}{2 log \sigma}}$$

Разница, какъ видимъ,—громадная, ибо по формулѣ Hadamard'a слѣдуетъ:

$$\left|f(x)\right| \backsim \sqrt{u_{\lambda_0}} .$$

Формула (13) съ ясностью говоритъ намъ, что функція (1) есть функція *нулевого порядка.*

Но мы можемъ сдѣлать еще нѣкоторые выводы изъ нашихъ разсужденій: очевидно, напр., что

$$mod. \; mof. \left|f(x)\right| \backsim u_{\lambda}(1 + \varepsilon_1) + u_{\lambda+1}(1 + \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_1 < 1,\ lim\varepsilon_1 = 0,\ lim\varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_2 < 1,$$

а потому

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^{\lambda_0} \cdot q^{\lambda_0^2}\Big(1+\varepsilon_1(x)\Big) + x^{\lambda_0+1} \cdot q^{(\lambda_0+1)^2}\,(1+\varepsilon_2(x)) \\ \lim\limits_{|x|=\infty}\varepsilon_1(x) = 0 = lim\varepsilon_2(x) \end{array}\right\}$$

для круга радіуса$\equiv r$, причемъ въ силу (6)

$$r < \frac{1}{q^{\lambda}},\ \lambda = 2\lambda_0 \tag{14}$$

Полагая $f(x)=0$, мы находимъ изъ послѣдней формулы

$$xq^{2\lambda_0+1}+1=0, \tag{14'}$$

и можно думать поэтому, что корни $f(x)=0$ суть *отрицательные* и близки по абсолютной величинѣ къ

$$\frac{1}{q^{2\lambda_0}},$$

если они лежатъ въ кругѣ радіуса$\equiv r \leqslant \frac{1}{q^{\lambda_0^2}}$. Правда асимптотически $f(x)$ можно и такъ представить:

$$(15)\left\{\begin{array}{l} f(x) = x^{\lambda_0}\ q^{\lambda_0^2}\Big(1+\eta_1(x)\Big) + x^{\lambda_0-1}\ q^{(\lambda_0-1)^2}(1+\eta_2(x)) = 0 \\ \lim\limits_{|x|=\infty}\eta_1(x) = 0,\ \lim\limits_{|x|=\infty}\eta_2(x) = 0, \end{array}\right.$$

и тогда мы бы получили другое строеніе для нулей изъ ур-ія (14'), но асимптотически корни будутъ равными.

Во всякомъ случаѣ на нашемъ примѣрѣ читатель видитъ нѣкоторый опредѣленный методъ разрѣшенія трансцендентныхъ ур-ій; но понятно онъ не-всегда примѣнимъ, ибо фигурирующія въ (14′) и (15) функціи $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \eta_2(x), \eta_2(x)$ не всегда таковы, что

$$|\,\varepsilon_1(x)\,| < 1,\ |\,\varepsilon_2(x)\,| < 1,\ |\,\eta_1(x)\,| < 1,\ |\,\eta_2(x)\,| < 1,$$

а тогда методъ непримѣнимъ.

Такъ читатель убѣдится, что къ Бесселевской функціи $J_0(z)$, нами изученной, методъ какъ разъ въ силу этого обстоятельства не примѣняется. Лучше всего онъ примѣняется къ рядамъ типа

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{\varphi(n)}}{\varphi(n)} \qquad (16)$$

причемъ $\varphi(n)$ — *необыкновенно* быстро растущія функціи n, и на основаніи только что произведенныхъ подсчетовъ сказанное о функціи (16)—понятно.

Считаемъ полезнымъ сдѣлать нѣсколько общихъ замѣчаній относительно опредѣленія корней цѣлаго трансцендентнаго ур-ія.

9. *Общія замѣчанія относительно опредѣленія корней цѣлаго трансцендентнаго ур-ія.*

Прежде, чѣмъ закончить совсѣмъ нашу первую главу, мы хотимъ дать нѣсколько общихъ замѣчаній по поводу опредѣленія корней трансцендентныхъ ур-ій тѣмъ болѣе, что мы задѣли эту проблему.

Проблема эта сполна еще не разрѣшена, хотя ею занимались уже *Euler*, *Cauchy*, *Lagrange*, *Fuorier* и *Stern*. Такъ, напр., въ 1837 г. Королевское Общество въ Копенгагенѣ задало на премію какъ разъ задачу объ опредѣленіи, раздѣленіи, изслѣдованіи и вычисленіи корней трансцендентныхъ ур-ій, и за выполненіе этой проблемы взялся ученый изъ Геттингена *Stern*, приславшій въ Копенгагенъ свой мемуаръ (Journ. Crelle's t. 22).

Но математики того времени занимались больше численными, нумерическими изслѣдованіями трансцендентныхъ ур-ій тѣмъ болѣе, что природа этихъ послѣднихъ съ точки зрѣнія роста, связи ихъ съ полиномами имъ была невполнѣ ясна; выясненіе послѣдняго—дѣло рукъ современныхъ математиковъ, и толчокъ къ такимъ изслѣдованіямъ былъ данъ *Weierstrass'омъ*.

Что касается до нумерическаго изслѣдованія трансцендентныхъ ур-ій, то, какъ нетрудно убѣдиться, мысли *Фурье* о примѣнимости его метода раздѣленія и вычисленія корней алгебрическихъ ур-ій, остаются въ силѣ въ отношеніи къ цѣлымъ трансцендентнымъ ур-ніямъ, и съ точки зрѣнія *нумерической* анализъ въ отношеніи рѣшенія цѣлыхъ трансцендентныхъ ур-ій вовсе не безсиленъ, что и доказали Euler, Lagrange, а особенно *Cauchy* (Oeuvres complétes t. VII „Exercices mathématiques") и *Stern* (loc. cit.) Несомѣнно теорія роста функцій внесла много новаго и—что особенно важно—*общаго* въ вопросъ о корняхъ цѣлаго трансцендентнаго ур-ія, тѣмъ не менѣе изученіе каждаго индивидуальнаго случая въ отдѣльности часто и въ настоящее время является неизбѣжнымъ, если только мы хотимъ знать не только *ростъ* корней, но *самые* корни. Предложимъ, напр., себѣ изучить корни ур-ія

$$x - Cos x = 0 \qquad (1).$$

Методъ, который мы для изученія уравненія (1)—здѣсь возьмемъ, будетъ очень напоминать методы *Cauchy* (См. Т. VI. Serie II. „Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes").

Замѣтимъ, что къ аналитическимъ выкладкамъ *Stern*'а и *Cauchy* полезно всегда почти присоединять *геометрическое* изслѣдованіе, которое часто даетъ возможность быстро оріентироваться въ распредѣленіи корней уравненія, а зная даже схематическое ихъ распредѣленіе, можно уже значительно легче заняться и точнымъ ихъ опредѣленіемъ и выясненіемъ. Во всякомъ случаѣ графленая квадратами бумага и приближенное вычерчиваніе соотвѣтственно подобранныхъ кривыхъ для рѣшенія даннаго трансцендентнаго уравненія могутъ быть очень полезны. Все это мы обрисуемъ сейчасъ на взятомъ нами примѣрѣ (1).

Напр., есть-ли дѣйствительные корни у (1)? Отвѣтъ получимъ сейчасъ же, вычерчивая двѣ кривыя

$$y=x \quad \text{и} \quad y=Cosx$$

и опредѣляя ихъ *общія* точки пересѣченія; увидимъ, что такихъ точекъ можетъ быть *только одна* въ интервалѣ (0;1), и дѣйствительно точный подсчетъ для единственнаго корня (*Stern*, Loc. cit) даетъ 0,7390847 . . .

Аналитически существованіе единственнаго реальнаго корня мы докажемъ такъ: пусть ξ_0—реальное такое, что

$$\xi_0 - Co\xi s_0 < 0, \quad \xi_0 > 0$$

и вблизи $\xi=0$ мы имѣемъ дѣйствительно это неравенство; теперь изъ $y=x-Cosx$ слѣдуетъ, что

$$\frac{dy}{dx}=1+Sinx\geq 0,$$

т. е. y всегда возрастаетъ, слѣд. долженъ наступить моментъ, когда $x_0=Cosx_0$, и дальше уже мы всегда должны имѣть

$$\xi - Cos\xi > 0.$$

Есть-ли корни *чисто* мнимые у $f(x)=x-Cosx$? Полагая $x=\eta_{,}i$, имѣемъ:

$$\eta_{,}i=Ch\eta_{,},$$

что—нелѣпо, ибо $\eta_{,}$—реально.

Есть-ли комплексные корни у $f(x)=0$? Пусть $x=\xi+i\eta_{,}$, тогда (1) превращается въ

$$\xi+i\eta=Cos\xi Ch\eta - iSin\xi Sh\eta \qquad (2),$$

откуда

$$\xi=Cos\xi Ch\eta \qquad (3)$$
$$\eta=-Sin\xi Sh\eta \qquad (4).$$

Изъ (3) и (4) находимъ далѣе:

$$\frac{\xi^2}{Ch^2\eta}+\frac{\eta^2}{Sh^2\eta}=\mathrm{I},$$

т. е.

$$\xi^2=Ch^2\eta\left(1-\frac{\eta^2}{Sh^2\eta}\right) \qquad (5).$$

Будемъ давать η теперь большія значенія, тогда (мы возьмемъ сейчасъ $\xi>0$) асимптотически

$$\xi\infty Ch\eta \backsim \frac{e^\eta}{2} \qquad (6),$$

но тогда ξ должно быть близко къ $2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots\infty)$; съ другой стороны, какъ $\frac{\eta}{Sh\eta}$ — функція четная, ξ должно быть по формѣ

$$\xi=2k\pi-\omega_k,\ \omega_k>0 \text{ и очень малое} \qquad (7).$$

На основаніи сказаннаго ур—іе (3) можно записать такъ:

$$2k\pi-\omega_k=\frac{e^\eta}{2}(1+\varepsilon(\eta)),\ \lim_{\eta=\infty}\varepsilon(\eta)=0 \qquad (8),$$

и слѣд.

$$\left.\begin{array}{c}\eta=Log(4k\pi-2\omega_k)+\varepsilon'(\eta)\\ \lim\limits_{\eta=\infty}\varepsilon'(\eta)=0\end{array}\right\} \qquad (9),$$

такъ что комплексные нули даннаго уравненія суть

$$\Omega=(2k\pi-\omega_k)+iLog(4k\pi-2\omega_k) \qquad (10).$$
$$k=1,2,3,\ldots$$

Нули въ формѣ (10) могутъ быть извѣстны лишь при знаніи величины ω_k. Вычисленіемъ мы ее получимъ изъ уравненій эквивалентныхъ (3) и (4), именно:

$$\left.\begin{aligned} 2k\pi-\omega_k&=Ch\eta \\ \eta&=\omega_k-Sh\eta \end{aligned}\right\} \text{ (Уравненія асимптотическія) } \quad (11).$$

Сначала удобнѣй опредѣлить η изъ уравненія

$$2k\pi-\frac{\eta}{Sh\eta}=Ch\eta \qquad (12),$$

а затѣмъ ω_k.

Геометрическій методъ здѣсь тоже—полезенъ: онъ показываетъ съ ясностью, что у насъ только и есть при $\xi>0$ корни (10). Убѣдимся мы въ этомъ, вычерчивая кривыя (3) и (4).

Изъ уравненія (3) видно, что между прямыми

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots \left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\right), \ldots\ldots$$

кривая (3) не существуетъ, ибо $Ch\eta>0$, а въ этихъ интервалахъ $Cos\ \xi<0$.

Также очевидно, что кривая—$Sin\xi=\frac{\eta}{Sh\eta}$ не существуетъ въ интервалахъ $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(4\pi, 5\pi)$, ...

Отсюда видно, что общими интервалами, въ коихъ находятся какъ вѣтвь кривой (3), такъ и вѣтвь (4), будутъ

$$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right), \left(\frac{7}{2}\pi, 4\pi\right), \left(\frac{4k-1}{2}, 2k\pi\right), \ldots\ldots$$

Этими геометрическими соображеніями мы подтверждаемъ прежніе аналитическіе выводы и формулы (10). Для $\xi>0$ кривая (3) даетъ также и дѣйствительный корень ($\eta=0$, $\xi=Cos\xi$): онъ будетъ какъ разъ началомъ вѣтвей, расположенныхъ симметрично относительно оси ξ-овъ и идущихъ одинаково къ $+\infty$ и $-\infty$, причемъ кривая $\xi=\frac{\pi}{2}$ будетъ асимптотой для вѣтвей.

Мы остановились нѣсколько подробно на примѣрѣ (1), ибо методъ здѣсь нами употребленный—довольно общаго характера.

Замѣтимъ, что, напр., уравненіе (3) даетъ для каждаго ξ по *двѣ* вѣтви; равнымъ образомъ ур—іе (4) тоже удовлетворяется $+\eta$ и $-\eta$, а потому нужно напередъ условиться, пересѣченіе какихъ вѣтвей мы разсматриваемъ.

10. Наконецъ еще нѣсколько замѣчаній относительно нулей цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій!

Иногда для распознаванія и изученія нулей можно употреблять *непрямой* методъ, методъ дифференціальныхъ уравненій. Сущность этого метода состоитъ въ слѣдующемъ: если изученіе предложенной функціи—трудно или сложно, то можно попытаться найти дифференціальное уравненіе, удовлетворяющееся предложенной функціей, и *изучать свойства интеграла по дифференціальному уравненію*, если послѣдняя проблема проще непосредственнаго изученія интеграла.

Здѣсь мы сталкиваемся съ новой проблемой родственной нашей, а именно изученіемъ асимптотическихъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій; проблема эта—сложна и составляетъ уже новую самостоятельную работу, примыкающую къ изслѣдованіямъ настоящей работы. Проблема эта—еще сложнѣй и труднѣй; это—проблема, рѣшенія которой еще не существуетъ, причемъ подъ рѣшеніемъ ея мы понимаемъ рѣшеніе помощью принциповъ только „роста функцій", принциповъ „croissance", какъ величинъ, а также помощью принциповъ *асимптотическаго* счета. Но насколько послѣдній—примѣнимъ въ теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій, строго и категорически отвѣтить въ настоящей работѣ мы не беремся. Замѣтимъ только, что привнесеніемъ принциповъ роста въ теорію дифференціальныхъ уравненій ставится масса новыхъ задачъ, напр.: 1° изученіе хода и аллюра каждой изъ вѣтвей интеграла; 2° классификація интеграловъ въ зависимости отъ природы *особенныхъ* точекъ ихъ и *роста* вѣтвей интеграла вблизи каждой изъ нихъ; 3° законовъ соотношенія между *особенностями* интеграла.

Вѣроятно также со временемъ, когда ростъ функцій будетъ изученъ глубже, можно будетъ съ ясностью отвѣтить и на такой интересный вопросъ: „Почему однѣ функціи удовлетворяютъ нѣкоторыя дифференціальныя уравненія, и почему другія какъ $\Gamma(x)$, напр., не могутъ быть интегралами таковыхъ?"

Словомъ въ будущемъ будетъ вѣроятно построена строгая система соотношеній между *ростомъ функціи и ея производными различныхъ порядковъ*, такъ что теорія интегрированія диффеpенціальныхъ урааненій будетъ значительно расширена.

Чтобы освѣтить нѣсколько общія соображенія, возьмемъ примѣръ; напр., есть или нѣтъ реальные корни у уравненія

$$f(x)=y=1+xSinx=0. \qquad (o).?$$

Возьмемъ нашъ методъ; (o) есть частный интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$x^2y''—2xy'+(2+x^2)y—(2+x^2)=0 \qquad (oo).$$

Подстановкой

$$y=xY \qquad (x)$$

мы приведемъ послѣднее къ

$$Y''+Y=\frac{2+x^2}{x^3}. \qquad (xx).$$

Для x стремящагося къ ∞, мы имѣемъ асимптотически

$$Y=A_1Sinx+A_2Cosx \qquad (ox),$$

и слѣд. нули *реальные* асимптотически стремятся къ нулямъ уравненія

$$tangx=-\frac{A_2}{A_1}.$$

Общій же интегралъ есть очевидно

$$Y=\frac{1}{x}+A_1Sinx+A_2Cosx,$$

и мы видимъ, что нули реальные (o) асимптотически стремятся ($A_2=0$, $A_1=+1$) къ $\pm k\pi$; тоже самое мы обнаружимъ и геометрически, вычерчивая кривыя $y=\frac{1}{x}$ и $y=-Sinx$ и опредѣляя ихъ точки пересѣченія. Нашъ примѣръ — тривіаленъ, но онъ иллюстрируетъ хорошо мысль.

А вотъ, напр., теорема *Kneser*'а (Math. Ann. 42), болѣе глубокая:

„*Дано уравненіе* $y''+yf(x)=0$.

Если $f(x)>0$ *для* x *достаточно большого и* $\lim_{x=\infty} f(x)>0$, *то всякій интегралъ его непрерывный вмѣстѣ съ своими двумя первыми производными есть осцилляторный, т. е. уничтожается для безчисленнаго числа значеній растущихъ* x."

Пользуясь этой теоремой, можно иногда предвидѣть многое. Вотъ маленькое подтвержденіе этой мысли. Возьмемъ уравненіе *типа Бесселевскаго*, именно:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Ему удовлетворяетъ, какъ мы при помощи строки Taylor'а въ этомъ убѣдимся, рядъ

$$y=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^2}+\ldots.$$

Мы видимъ, что у $y=0$ мы наблюдаемъ только перемѣны знаковъ, а потому можно думать, что $y=0$ обладаетъ только реальными нулями (см. наши сопоставленія $E_2(x)$ и $J_0(x)$ въ § 3).

Дѣйствительно, пользуясь теоремой *Kneser*'а мы подтвердимъ еще сильнѣй наше предположеніе.

Пусть

$$y=x^{-\frac{1}{2}}.\,Y,$$

тогда данное дифференціальное уравненіе становится равнымъ

$$У'' + \frac{1}{4x^2}(1+4x)\ \ У = 0,$$

и слѣд. здѣсь

$$f(x) = \frac{1}{4x^2}(1+4x) > 0 \ \text{ и } \lim_{x=+\infty} f(x) = 0,$$

т. е. $У$, а слѣд. и y—интегралъ *осцилляторный*—въ смыслѣ *Kneser*'а.

Мы не вдаемся въ детали даннаго вопроса и ограничиваемся сказаннымъ; къ тому же вопросъ поставленный здѣсь нами, еще нельзя считать разрѣшеннымъ сполна.

Этимъ мы закончимъ нашу I-ю главу и перейдемъ теперь къ изученію произведеній типа Weierstrass'а съ *точки зрѣнія ихъ роста.*

Глава II-я.

Изученіе законовъ роста функціи, опредѣленной условіемъ:

$$f(x)=e^{g(x)}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\ldots\ldots+\frac{x^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}},$$

гдѣ $p_n=\varphi(n)$ или $p_n=p=$const.

1. *Постановка проблемы и нѣкоторыя основныя понятія.* Со временъ Weierstrass'а стало извѣстно, что, если функція задана ея нулями, то за исключеніемъ экспоненціальнаго фактора $e^{g(x)}$ она—опредѣлена, и

$$f(x)=e^{g(x)}\prod_{1}^{\infty}E_n(x),$$

гдѣ

$$E_n(x)=\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\frac{x^2}{2a_n^2}+\ldots\ldots+\frac{p_n a_n^{p_n}}{x^{p_n}}},$$

причемъ p_n—вообще говоря, есть функція индекса n, и слѣд. мѣняется съ ростомъ n; иногда же оно—постоянно равно p. Остановимся пока на послѣднемъ случаѣ.

Какъ извѣстно, число $p=p_n=$const. опредѣлено подъ условіемъ

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^p \equiv \text{расходящійся рядъ},$$

но

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{p+1} \equiv \text{сходящійся рядъ.}$$

Въ теоріи роста функцій вводятъ новое понятіе *экспонента* (*показателя*) *сходимости нулей* (*l'ordre réel* у *Borel*'я), опредѣленное такъ: мы назовемъ число ϱ *показателемъ сходимости нулей* a_n, если рядъ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho-\varepsilon} \equiv \text{расходящійся рядъ и} \\ &\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho+\varepsilon} \equiv \text{сходящійся рядъ.} \end{aligned}\right\} \text{какъ бы } \varepsilon \text{ ни было мало.}$$

Число же p (постоянное), фигурирующее въ Вейерштрассовскомъ *примъ—факторѣ* $E_n(x)$, принято называть *жанромъ* (*genre*) цѣлой трансцендентной функціи.

Уже изъ самаго опредѣленія понятій „жанръ" функціи и „показатель сходимости ея нулей" вытекаетъ непосредственно, что

$$\varrho \leqslant p+1,$$

и является интереснымъ изучить соотношенія между ростомъ модуля функціи и ея порядкомъ, показателемъ сходимости ея нулей и ея жанромъ.

Сначала мы займемся только *каноническими* произведеніями Вейерштрасса типа

$$\prod_1^\infty E_n(x).$$

2. **Лемма.** *Если намъ дано*

$$\varphi(u) = (1-u)e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}, \quad |u| < p \qquad (1),$$

то ростъ $|\varphi(u)|$ *опредѣленъ неравенствомъ:*

$$|\varphi(u)| < e^{|u|^\sigma},\ p<\sigma<p+1 \qquad (2).$$

Эта лемма находится уже въ работахъ *Lindelöf*'а (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. 31) и *Pringsheim*'а (Math. Ann. B. 58). Мы ее докажемъ чуть-чуть иначе.

Пусть

$$\varphi(u)=1-a_{p+1}u^{p+1}-a_{p+2}u^{p+2}-\ldots- \qquad (2).$$

Если $u=1$, то $\varphi(u)=0$, и слѣд. для коэффиціентовъ a_n получаемъ соотношеніе вида:

$$1=a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots \qquad (3).$$

Постараемся точнѣй изучить коэффиціенты a_k. Изъ (1) находимъ

$$Log\varphi(u)=-\frac{u^{p+1}}{p+1}+\frac{u^{p+2}}{p+1}-\ldots\ldots,$$

такъ что

$$\varphi(u)=1-a_{p+1}u^{p+1}-a_{p+1}u^{p+2}-\ldots\equiv$$

$$\equiv e^{-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\frac{u^{p+2}}{p+2}-\ldots} \equiv$$

$$\equiv 1-\left[\frac{u^{p+1}}{p+1}+\frac{u^{p+2}}{p+2}+\ldots\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{u^{p+1}}{p+1}+\ldots\right]^2-\ldots$$

$$+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\left[\frac{u^{p+1}}{p+1}+\frac{u^{p+2}}{p+2}+\ldots\right]^n+\ldots$$

Изъ этого тождества мы видимъ непосредственно, что

$$a_{p+k}>0,\quad a_{p+k}<1,$$

и слѣд.

$$|\varphi(u)|<1+|a_{p+1}u^{p+1}|<1+|u|^{p+1},$$

а это неравенство, слѣдуя Lindelöf'у, мы усилимъ, ибо

$|u|<1$, если запишемъ

$$\left.\begin{array}{c} |\varphi(u)| < 1 + |u|^{\sigma} < e^{|u|^{\sigma}} \\ p < \sigma < p+1 \end{array}\right\} \quad (4).$$

Эта лемма сейчасъ же приводитъ насъ къ слѣдующей теоремѣ:

3. **Теорема.** *Ростъ каноническаго произведенія*

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_m}\right) e^{\frac{z}{a_m} + \cdots + \frac{z^p}{p a_m{}^p}} \quad (1)$$

опредѣленъ неравенствомъ

$$|f(z)| < e^{Ar^{\sigma}}, \; p < \sigma < p+1$$

$$A = \sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{\sigma},$$

если p—порядокъ сходимости нулей $f(z) = 0$".

Въ самомъ дѣлѣ пусть z таково, что

$$|a_{m-1}| < |z| < |a_m|,$$

тогда

$$\left|\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^p}{p a_k}}\right| < e^{\left|\frac{r}{a_k}\right|^{\sigma}}, \quad k \geq m,$$

въ силу леммы (2), такъ что

$$\left|\prod_{m}^{\infty} E_k(z)\right| < e^{r^{\sigma}\sum\limits_{m}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{\sigma}},$$

$$|f(z)| < e^{Ar^{\sigma}}, \quad A = \sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{\sigma}.$$

Постоянная A—конечна въ силу того, что p—показатель сходимости нулей $f(z)=0$. (См. § 1, гл. II).

Какъ слѣдствіе этой теоремы можно дать такую (сравни *Lindelöf*, Loc. cit.).

4. **Теорема.** *Если имѣемъ каноническое произведеніе*

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_m}\right)e^{\frac{z}{a_m}+\ldots\ldots+\frac{z^p}{pa^p}},$$

и если

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{\rho}=\textit{сход. рядъ},\ \rho>p,\ \text{но}\ \rho\leqslant p+1$$

то

$|f(z)|<e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, *$\varepsilon$=безк. малое съ ростомъ r.*"

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы (3) мы можемъ за σ взять ρ, а постоянная $A=r^{\varepsilon}$, причемъ ε убываетъ съ ростомъ r, т. е. теорема—вѣрна.

Теорему (4) можно еще такъ формулировать:

5. **Теорема.** *Каноническое произведеніе Вейерштрасса, показатель сходимости нулей котораго есть ρ (конечное число), порядка роста не выше ρ, т. е. оно—функція* **конечнаго** *порядка съ точки зрѣнія роста его модуля*".

Интересно доказать теперь теорему обратную только что данной, именно:

6. **Теорема.** *Если намъ дана цѣлая трансцендентная функція конечнаго порядка ρ, съ точки зрѣнія ея роста, то порядокъ сходимости ея нулей не выше ρ.*"

Пусть данная функція $f(x)$ такова, что $f(0)=1$.

На основаніи асимптотическаго закона (K (6) гл. I) непосредственно имѣемъ:

$$| a_n | \backsim n^{\frac{1}{\rho}},$$

слѣд.

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho+\varepsilon} \backsim \sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\eta}} \quad \eta < 0,$$

т. е. ρ можно принять за показатель сходимости нулей.

Комбинируя же теоремы 5 и 6, мы можемъ сказать:

7. **Теорема.** *Порядокъ роста модуля каноническаго произведенія Вейерштрасса ρ равенъ показателю сходимости его нулей.*

8. *Присоединеніе экспоненціальнаго фактора къ каноническому произведенію Вейерштрасса.*

До сихъ поръ мы занимались изученіемъ роста каноническаго произведенія. Посмотримъ, что будетъ съ ростомъ, если мы присоединимъ къ нему фактора $e^{q(z)}$, предполагая, что данное намъ каноническое произведеніе конечнаго порядка и что $q(z)$—полиномъ τ—ой степени.

Пусть данное каноническое произведеніе вида

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{z^p}{pa_n^p}}. \tag{1}$$

Мы уже доказали выше (§ 4, гл. II):

$$| f(z) | \backsim e^{r^\rho}, \quad p < \rho \leqq p+1.$$

Отсюда присоединеніе фактора $e^{q(z)}$ даетъ намъ:

$$\text{mod. max.} \left| e^{q(z)} . f(z) \right| < e^{r^{\tau+\varepsilon}} . e^{r^\rho},$$

т. е. можно утверждать:

„Отъ присоединенія экспоненціальнаго фактора къ каноническому произведенію Вейерштрасса дѣло обстоитъ при $\tau < \varrho$ такъ, какъ если бы показательнаго фактора вовсе не существовало, и наоборотъ при $\tau < \varrho$ дѣло обстоитъ такъ, какъ если бы вовсе не существовало каноническаго произведенія съ точки зрѣнія роста модуля полученнаго произведенія“.

Но мы видимъ, что дѣло необыкновенно усложняется, если мы обратимъ вниманіе на нули функціи

$$\Phi(z) = e^{q(z)} . f(z).$$

Больше даже: мы видимъ, что *асимптотическіе законы*, установленные нами, *должны* допускать исключенія. Въ сущности все это и наблюдается въ дѣйствительности, и потому является необходимымъ глубже обосновать наши законы (D, § 4, I), (F, § 5, I) и (K, § 6, I), а также изучить и самую возможность отступленій отъ нихъ.

Ради соображеній, сущность коихъ читателю выяснится позже, мы остановимся нѣсколько на изученіи произведеній Вейерштрасса *нулевого жанра.*

9. *Общая основная теорема о функціяхъ нулевого жанра, порядокъ нулей коихъ больше единицы.*

Въ виду того, что изученіе функцій нулевого жанра съ нулями, показатель сходимости коихъ меньше 1, а слѣд. порядокъ роста коихъ больше единицы (См. законъ (6, I (K)) и (§ 1, II)), даетъ возможность открыть довольно общіе законы; мы начнемъ изученіе это съ одной общей теоремы.

Пусть намъ дана такая функція

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\rho}}\right), \ \varrho > 1 \qquad (1)$$

Постараемся опредѣлить не только асимптотическую формулу для $| f(z) | = \text{mod. max} = \mathfrak{M}(f(r))$, но *асимптотическое выраженіе для самой функціи.*

Замѣтимъ, что проблема эта нами рѣшена независимо отъ *Borel*'я, дающаго такое же почти рѣшеніе ея, какъ и наше, въ своей книгѣ „Lecons sur le théorie de la croissance. Paris 1910", p. 107. Читатель увидитъ, что мы даемъ гораздо больше выводовъ отъ полученнаго нами результата сравнительно съ Borel'емъ. Нашъ методъ—почти схожъ съ таковымъ же у Borel'я. Рекомендуемъ читателю сравнить тотъ и другой.

У Бореля эта проблема—частный примѣръ; у насъ это —источникъ многихъ выводовъ, нелишенныхъ интереса.

Обратимся однако къ нашей проблемѣ; прежде всего обратимъ вниманіе читателя на *одинъ общій методъ* весьма естественный, помощью котораго можно *иногда* получить *асимптотическое выраженіе* для функціи (1). Методъ этотъ—очень натураленъ: беремъ

$$Log f(z) = \sum_{1}^{\infty} {}_{n} Log\left(1 + \frac{z}{n^{\rho}}\right) \tag{2}$$

и примѣняемъ ко (2) *извѣстную формулу суммированія Euler'a* (См. *Тихомандрицкій* „Теорія конечныхъ разностей", p. 176), тогда найдемъ:

$$Log f(x) = \sum_{1}^{\infty} {}_{n} Log\left(1 + \frac{x}{n^{\rho}}\right) =$$

$$= \int_{1}^{\infty} Log\left(1 + \frac{x}{\omega^{\rho}}\right) d\omega - \frac{1}{2}\Big|_{1}^{\infty} Log\left(1 + \frac{x}{\omega^{\rho}}\right) + \Big|_{1}^{\infty} \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{-\rho\omega^{-\rho-1}.x}{(1 + x\omega^{-\rho})} +$$

$$+ \varepsilon(x), \quad \lim_{|x| = \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Иными словами *асимптотически* имѣемъ:

$$Log f(x) = \frac{1}{2} Log(1 + x) + \frac{B_1}{2} \rho \frac{x}{1 + x} + \int_{1}^{\infty} Log\left(1 + \frac{x}{\omega^{\rho}}\right) d\omega. \tag{3}$$

Займемся пока только интеграломъ неопредѣленнымъ

$$\int Log\left(1+\frac{x}{\omega^\rho}\right)d\omega=\omega Log\left(1+\frac{x}{\omega^\rho}\right)+\rho\int\frac{\omega^{-\rho}\,xd\,\omega}{1+x\omega^{-\rho}}=$$

$$=\omega\,Log\left(1+x\omega^{-\rho}\right)+\rho x\int\frac{d\omega}{\omega^\rho+x}\,.$$

Далѣе

$$\lim_{\omega=\infty}\left[\,\omega Log(1+x\omega^{-\rho})\,\right]=\lim_{\omega=\infty}\left\{\frac{Log(1+x\omega^{-\rho})}{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right\}=$$

$$=\lim\left\{\frac{\frac{-\rho x\omega^{-\rho-1}}{1+x\omega^{-\rho}}}{-\frac{1}{\omega^2}}\right\}=\lim_{\omega=\infty}\left\{\frac{\rho x\omega^{-\rho-1}.\omega^2}{1+x\,\omega^{-\rho}}\right\}=\rho x\lim\left\{\frac{\omega}{\omega^\rho+x}\right\}=0,$$

а потому

$$Logf(x)=\frac{1}{2}Log(1+x)+\frac{B_1}{2}\rho\frac{x}{1+x}-Log(1+x)+\rho\int_1^\infty\frac{xd\omega}{x+\omega^\rho}=$$

$$=-\frac{1}{2}Log(1+x)+\frac{\rho x}{12(1+x)}+\rho x\int_1^\infty\frac{d\omega}{\omega^\rho+x}\,. \qquad (4)$$

Займемся интеграломъ

$$\int_1^\infty\frac{d\omega}{x+\omega^\rho}\,. \qquad (4')$$

Пусть $\omega^\rho=\tau$, тогда

$$\int_1^\infty\frac{d\omega}{\omega^\rho+x}=\frac{1}{\rho}\int_1^\infty\frac{\tau^{\frac{1}{\rho}-1}d\tau}{x+\tau}\,.$$

Пусть далѣе $\tau=xT$, тогда

$$\frac{1}{\varrho}\int_{1}^{\infty}\frac{\tau^{\frac{1}{\rho}-1}d\tau}{\tau+x}=\frac{1}{\varrho}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{\rho}-1}T^{\frac{1}{\rho}-1}x\,dT}{x(1+T)}$$

т. е.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^{\rho}+x}=\frac{x^{\frac{1}{\rho}-1}}{\varrho}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{T^{\frac{1}{\rho}-1}dT}{1+T}.$$

Теперь извѣстно, что

$$\int_{0}^{\infty}\frac{T^{\frac{1}{\rho}-1}dT}{1+T}=\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}},$$

а потому формула (4) становится при $|x|$ достаточно большомъ *асимптотически* равной

$$f(x)=\frac{K}{\sqrt{1+x}}e^{x^{\frac{1}{\rho}}\cdot\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}}+\frac{\varrho}{12}\frac{x}{1+x}+\varepsilon(x)}$$

или же иначе

$$f(x)=\frac{K}{\sqrt{x}}e^{\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}}x^{\frac{1}{\rho}}} \qquad (5),$$

гдѣ K — нѣкоторая постоянная величина, которую мы опредѣлимъ такъ: вѣдь формулой (5) асимптотически выражаются всѣ функціи указаннаго типа (1) независимо отъ нѣкотораго опредѣленнаго ϱ; поэтому возьмемъ за (1) такую функцію, у которой $\varrho=2$, именно

$$\frac{Sin\pi i\sqrt{x}}{\pi i\sqrt{x}}=\frac{e^{\pi\sqrt{x}}-e^{-\pi\sqrt{x}}}{2\pi\sqrt{x}}\,. \qquad (6)$$

Изъ сопоставленія и отождествленія формулы (6) съ асимптотической ея, образованной по формулѣ (5) при $\varrho=2$, мы непосредственно замѣчаемъ, что $K=(2\pi)^{-\frac{\varrho}{2}}$, такъ что вмѣсто (5) будемъ писать *всегда* и *вообще* *):

$$f(x)=(2\pi)^{-\frac{\varrho}{2}}\,.\,x^{-\frac{1}{2}}\,.\,e^{\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}}\,x^{\frac{1}{\varrho}}}\quad,\ \varrho>1 \qquad (7)$$

Формула (7) помимо ея интереса, какъ точной асимптотической формулы для произведеній типа (1), для насъ въ высшей степени интересна, и мы сдѣлаемъ сейчасъ массу любопытныхъ выводовъ. Прежде всего изъ формулы (7) мы получаемъ двѣ частныхъ тоже интересныхъ, именно формулу для модуля $|\,f(x)\,|$ и аргумента $f(x)$, т. е.

$$Log|fx)|=\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}}\,r^{\frac{1}{\varrho}}\,Cos\frac{\varphi}{\varrho}\,(1+\varepsilon(r)),\quad \lim_{r=\infty}\varepsilon(r)=0 \qquad (8)$$

или же

$$|\,f(x)\,|=e^{\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}}\,r^{\frac{1}{\varrho}}\,Cos\left(\frac{\varphi}{\varrho}\right)\,(1+\varepsilon(r))} \qquad (8'),$$

и также

*) Понятно, записывая знаменатель какъ $\sqrt{(2\pi)^{\varrho}x}$ *вообще*, мы нуждаемся еще въ провѣркѣ того, что факторъ $(2\pi)^{\frac{\varrho}{2}}$ въ знаменателѣ фигурируетъ дѣйствительно *всегда*; но мы не останавливаемся на этомъ. Мы заимствуемъ этотъ факторъ у Lindelof'a.

$$\Phi = \frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}} r^{\frac{1}{\rho}} . Sin\frac{\varphi}{\varrho} - \frac{\varphi}{2} \qquad (8'),$$

или же точная формула для $|f(x)|$ въ такой формѣ:

$$|f(x)| = (2\pi)^{-\frac{\rho}{2}} . r^{-\frac{1}{2}} . e^{\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\varrho}} . r^{\frac{1}{\rho}} Cos\frac{\varphi}{\varrho}} \qquad (8'').$$

Формула $(8'')$—особенно интересна и важна; она приведетъ насъ къ очень интересному выводу: именно пусть $\varrho > 2$, и слѣд. нули функцій (1) являются порядка роста меньшаго $\frac{1}{2}$ (См. законъ (K, 6, I)); если уголъ φ измѣняется отъ $-\pi$ до $+\pi$, т. е.

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

то уголъ $\frac{\varphi}{\varrho}$ въ формулѣ $(8'')$ опредѣленъ условіемъ

$$-\frac{\pi}{\varrho} \leqslant \frac{\varphi}{\varrho} \leqslant \frac{\pi}{\varrho},$$

и какъ по предположенію

$$\varrho > 2, \quad \text{то } \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{2},$$

такъ что $Cos\frac{\varphi}{\varrho}$ въ формулѣ $(8'')$ всегда >0, и слѣд. $|f(x)|$ *всегда возрастаетъ* за исключеніемъ точекъ смежныхъ съ нулями, т. е. мы имѣемъ такую интересную *общую* теорему:

10. Теорема. „*Модуль функціи*

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\rho}}\right), \quad \underline{\varrho > 2},$$

нули которой порядка роста **большаго 2** (Законъ K, 6, I или теор. 7, II) *на всей плоскости комплекснаго перемѣннаго* **всегда возрастаетъ** *съ ростомъ модуля* $|z|$.

Нетрудно видѣть, что теорему 10 можно сейчасъ же обобщить, именно:

11. **Теорема**: „*Модуль maximum функціи*

$$f(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right),$$

нули которой удовлетворяютъ условію

$$|a_n| = n^{\rho}, \quad \rho > 2$$

всегда возрастаетъ.

Эту теорему можно формулировать еще болѣе интересно, именно:

12. **Теорема.** „*Функція* (См. формулу (8''') въ § 1°), *нулевого порядка съ порядкомъ роста ниже* $\frac{1}{2}$, *не можетъ обладать* **ни однимъ лучемъ** *на плоскости комплекснаго перемѣннаго ея аргумента (независимаго перемѣннаго),* **вдоль котораго** *ея модуль все время убывалъ бы или оставался бы ниже опредѣленной величины* C“.

Свойство функцій только-что опредѣленнаго характера нулевого порядка на самомъ дѣлѣ—курьезно и вовсе не очевидно сразу. Мы дадимъ теоремѣ 12 еще другое доказательство методомъ похожимъ на методъ (*Phragmen*'а „Acta Math. 28 „Sur une extension d'un théoreme classique...“). Допустимъ, что функція $f(x)$ съ только что описанными качествами вопреки истинѣ удовлетворяетъ слѣдующему условію: пусть на плоскости комплекснаго перемѣннаго есть такой лучъ, вдоль коего *всегда*,

$$|f(x)| < C \equiv const. \tag{1}$$

вдоль же другихъ лучей согласно предположенію должно быть

$$| f(x) | < e^{|x|} . \qquad (2)$$

Докажемъ, что это возможно лишь при $f(x) \equiv const$. Дѣйств., пусть этотъ лучъ съ условіемъ (1)—ось реальныхъ значеній x. Возьмемъ интегралъ вдоль реальной оси

$$\int_0^\infty e^{-a} f(ax)da .$$

Интегралъ этотъ — цѣлая трансцендентная функція отъ x, причемъ очевидно

$$\left| \int_0^\infty e^{-a} f(ax)da \right| < \int_0^\infty e^{-a} \, | f(ax) | \, da ,$$

но въ силу условія (2) и предположеній отностительно $f(x)$

$$| f(ax) | \backsim e^{| ax^\sigma |}, \quad \underline{\sigma < \frac{1}{2}} ,$$

а потому

$$\left| \int_0^\infty e^{-a} f(ax)da \right| < \int_0^\infty e^{-a(1-a^{\sigma-1} | x |)} \, da < \int_0^\infty e^{-a} \, da \equiv 1 ,$$

и мы видимъ, что

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-a} f(ax) \, da$$

удовлетворяетъ условіямъ:

$$|\,\Phi(x)\,| < C \text{ вдоль оси реальныхъ } x$$

$$|\,\Phi(x)\,| < 1 \text{ вдоль другихъ лучей,}$$

слѣд.

$$\Phi(x) \equiv \text{const., а также и } f(x) \equiv \text{const.}$$

Такимъ образомъ теорему 12 можно считать доказанной.

Другую редакцію теоремы 12 можно задать въ слѣдующей формѣ:

13. **Теорема.** „*Функція*

$$\Phi(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a_n}\right), \; |\,a_n\,| = n^\rho \;, \;\; \rho > 2,$$

обладающая нулями порядка большаго 2, имѣетъ то свойство, что ея модуль **всюду возрастаетъ**, *и слѣд. неравенство*

$$|\,\varphi(z)\,| \geq C \equiv \text{const.}$$

имѣетъ мѣсто вдоль периферій круговъ, которыхъ мы найдемъ сколь угодно много на плоскости перемѣннаго z“.

Изъ формулы (8‴) § 9 мы выводимъ между прочимъ слѣдующую важную лемму:

14. **Лемма.** *Если намъ дана функція порядка роста $< \frac{1}{2}$, то существуетъ безчисленное можество круговъ, вдоль периферій коихъ мы имѣемъ (при ρ—порядокъ роста нулей > 2)*

$$|\,f(x)\,| > e^{r^{\frac{1}{\rho} - \eta}},$$

гдѣ η—соотвѣтственно подобранная безконечно малая величина, стремящаяся къ 0 съ ростомъ r.“

Эта теорема есть *теорема о minimum'ѣ* для функцій порядка роста ниже $\frac{1}{2}$.

Справедливость ея вытекаетъ непосредственно изъ формулы

$$f(z)=(2\pi)^{-\frac{\rho}{2}}.\, r^{-\frac{1}{2}}.\, e^{\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{\rho}} r^{\frac{1}{\rho}}.\, Cos\frac{\varphi}{\rho}}.$$

Эта теорема аналогичная *теоремѣ Hadamard'а о minimum'ѣ* модуля цѣлой функціи, но болѣе строгая, ибо по Hadamard'у

$$\text{mod.}\, |f(x)| > e^{-r^{\frac{1}{\rho}}},\ (\rho\text{—конечное число}),$$

приведетъ насъ къ выводу самой теоремы Hadamard'a. (Prorietés des fonctions entières, Journ. de Math. 1893, p. 208).

Путь, которымъ мы докажемъ эту теорему и обобщимъ, похожъ на *Lindelöf*'овскій (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1908, p. 231).

15. *Выводъ теоремы Hadamard'a и ея усовершенствованіе.*

Пусть дана функція $f(x)$ *конечнаго* порядка ρ. Возьмемъ цѣлое число k такое, чтобы

$$\frac{\rho}{k} < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Далѣе по предположенію относительно $f(x)$:

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2}$$

Беремъ теперь примитивный корень $\omega \neq 1$ такой, чтобы

$$\omega^k = 1,$$

и составляемъ новую функцію

$$\Phi(x) = f(x)\,.\,f(\omega x)\ldots\ldots f(\omega^{k-1}x). \tag{3}$$

Функція $\Phi(x)$ будетъ очевидно уже порядка $\left(\frac{\rho}{k}\right)^{-1}$ относительно своихъ нулей (т. е. роста ихъ); иными словами n-ый нуль $\Phi(x)=0$ относительно перемѣннаго x^k асимптотически есть $n^{\frac{k}{\rho}}$ (См. Законъ 6, I (K)), и слѣд. функція $\Phi(x)$ есть порядка $\frac{\rho}{k}$ относительно x^k, такъ что въ силу леммы 14 имѣемъ:

$$| \Phi(x) | = | f(x).f(\omega x) \ldots f(\omega^{k-1}x) | > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

т. е.

$$\text{mod.}\ | f(x) | > e^{r^{\rho-\varepsilon}} . | f(\omega x) \ldots f(\omega^{k-1}x) |^{-1},$$

или на основаніи (2):

$$| (f(x) | > e^{-\overline{k-2}\, r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (4)$$

и слѣд. à fortiori

$$| f(x) | > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad (5)$$

а это и есть *теорема о minimum'ѣ модуля Hadamard'а.* Неравенство же (4) — подобно Lindelöf'вскому, но менѣе сильное (См. *Lindelöf*, loc. cit.).

Т. о. окончательно мы имѣемъ слѣдующую теорему о minimum'ѣ модуля функціи:

(A). *Если мы имѣемъ функцію* **конечнаго** *порядка* ρ, *то существуютъ неравенства*

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < \text{mod.}\ | f(x) | < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \ \rho \leqq \frac{1}{2}$$

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < | f(x) | < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \ \rho > 1.$$

Теорема (A, 15) въ той формѣ, въ какой мы ее только что формулировали, является чрезвычайно важной и—съ перваго взгляда это не видно—затрогиваетъ очень интимныя свойства функцій, характерныя для нихъ. Обнаружимъ это! Но предварительно докажемъ *теорему Picard'а* для функцій *конечнаго* порядка.

16. **Теорема Picard'a** (для функцій *конечнаго* порядка).

„*Если намъ дана функція* $\varphi(x)$ **конечнаго** *порядка и цѣлаго* ϱ (*пусть она будетъ задана намъ рядомъ*) *и пусть у нея* **вовсе нѣтъ** *нулей или же они существуютъ въ* **конечномъ** *числѣ, тогда функція*

$$\varphi(x) + \xi(x) \; ,$$

гдѣ $\xi(x)$*—полиномъ,* **уже должна обладать нулями и въ безконечномъ числѣ**".

Пусть $\varphi(x)$ обладаетъ *конечнымъ* числомъ нулей, тогда

$$\varphi(x) = g_0(x) \,.\, e^{g(x)} \,. \tag{1}$$

Мы предполагаемъ пока ϱ *цѣлымъ*; $g_0(x)$—конечный полиномъ. Пусть тѣмъ же свойствомъ обладаетъ $\varphi(x) + \xi(x)$; тогда

$$\varphi(x) + \xi(x) = \gamma_0(x) \,.\, e^{\gamma(x)}. \tag{2}$$

Степени полиномовъ $\gamma(x)$ и $g(x)$ — одинаковы. Изъ (2) находимъ при помощи (1):

$$g_0(x) \,.\, e^{g(x)} + \xi(x) = \gamma_0(x) \,.\, e^{\gamma(x)}. \tag{2'}$$

Далѣе употребимъ методъ *Borel*'я (C. R. Ac. Sc. Paris, 122 p. 1045—1048), именно, дифференцируя уравненіе

$$\frac{g_0(x)}{\xi(x)} \, e^{g(x)} - \frac{\gamma_0(x)}{\xi(x)} \, e^{\gamma(x)} = -1 \,,$$

находимъ:

$$\left\{\frac{g'_0(x)\cdot\xi(x)-\xi'(x)\cdot g_0(x)}{\xi^2(x)}+\frac{g_0(x)\cdot g'(x)}{\xi(x)}\right\}e^{g(x)}-$$

$$-\left\{\frac{\gamma'_0(x)\cdot\xi(x)-\xi'(x)\cdot\gamma_0(x)}{\xi^2(x)}+\frac{\gamma_0(x)\cdot\gamma'(x)}{\xi(x)}\right\}e^{\gamma(x)}=0$$

или же

$$G_1(x)\cdot e^{g(x)}=G_2(x)\cdot e^{\gamma(x)}\,, \tag{3}$$

если

$$G_1(x)=g'_0(x)\cdot\xi(x)-\xi'(x)\cdot g_0(x)+g_0(x)\cdot g'(x)\cdot\xi(x)=$$

$$=\xi(x)\left\{g'_0(x)+g_0(x)\cdot g'(x)\right\}-\xi'(x)\cdot g_0(x),$$

$$G_2(x)=\xi(x)\left\{\gamma'_0(x)+\gamma_0(x)\cdot\gamma'(x)\right\}-\xi'(x)\cdot\gamma_0(x)\,,$$

и слѣд., какъ видно изъ (3), должно быть

$$g(x)\equiv\gamma(x),\quad G_1(x)\equiv G_2(x),$$

но тогда изъ (2')

$$\frac{g_0(x)-\gamma_0(x)}{\xi(x)}=-e^{-g(x)}\,,$$

что невозможно. Мы пришли къ противорѣчію, исходя изъ ложнаго предположенія.

Изъ этой теоремы мы выводимъ рядъ простыхъ слѣдствій, являющихся по существу только другой редакціей, другой формулировкой теоремы (16).

Все это—не ново, и читатель найдетъ и теорему 16, и слѣдствія, которыя мы сейчасъ приведемъ, напр., въ книгѣ *Vivanti-Gutzmer* „Eindeutige analytische Funktionen", у *Borel'я* „Léçons sur les fonctions entières".

Мы даемъ сейчасъ здѣсь только нѣсколько упрощенный ходъ разсужденій, и иначе освѣтимъ самую теорему Picard'a.

Слѣдствія теоремы 16—слѣдующія:

1° Если цѣлая функція $\varphi(x)$ не имѣетъ нулей, то

$$\varphi(x)+a=0, \quad a \equiv \text{const}.$$

ихъ будетъ имѣть и притомъ *безчисленное* множество. Между прочимъ по этой послѣдней теоремѣ слѣдуетъ слѣдующій курьезный фактъ: иногда въ рядѣ, представляющемъ цѣлую трансцендентную функцію, достаточно измѣнить *одинъ только членъ*, чтобы рядъ пересталъ имѣть нули, имѣя ихъ прежде, или наоборотъ — сталъ бы ихъ имѣть безконечно много, не имѣя прежде ни одного.

2°. Если a—значеніе *исключительное* въ смыслѣ *Picard*'а (Annales de l'Ecole Normale, 1880, 2 Série, T. 9), то

$$(\varphi(x)-a)-(b-a)=0$$

обладаетъ безчисленнымъ множествомъ нулей при *произвольномъ* b, *т. е. другого исключительнаго* b *болѣе уже не существуетъ.*

Это—обычная и чаще всего встрѣчающаяся формулировка знаменитой *теоремы Picard'а.*

3°. Если a—исключительное значеніе, то

$$(\varphi(x)-a)-(g(x)-a)=0$$

обладаетъ безконечнымъ числомъ нулей.

Въ теоремѣ 16 мы предполагали ρ—цѣлымъ числомъ; случай ρ дробнаго въ виду его интереса по связи съ теоремами (15, (A), гл. II) мы разсмотримъ особо: мы сдѣлаемъ рядъ интересныхъ замѣчаній по этому поводу.

Сейчасъ же мы дадимъ обобщеніе *теоремы Picard'a 16* и ея слѣдствій (Ср. *Borel.* Léçons sur les fonctions entières, p. 94), именно докажемъ такую теорему:

17. Теорема. (*Обобщенная*). *Пусть намъ дана цѣлая функція* **конечнаго** *порядка* $\varphi(x)$; *возьмемъ сумму ея и* $\xi(x)$, *причемъ ростъ* $\xi(x)$ **ниже** *роста* $\varphi(x)$; *кромѣ того пусть*

$\varphi(x) = e^{g(x)}$, гдѣ $g(x)$ — полиномъ степени p; тогда мы утверждаемъ, что

$$\Phi(x) = e^{g(x)} + \xi(x) \tag{1}$$

обладаетъ **безконечнымъ** *числомъ нулей; кромѣ того мы утверждаемъ, что рядъ*

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^p, \tag{2}$$

если a_n — n-ый нуль $\Phi(x) = 0$, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что, вообще говоря,

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p-\varepsilon} \equiv \text{расход. рядъ}, \quad \sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+\varepsilon} \equiv \text{сход. рядъ},$$

иными словами p — **показатель сходимости нулей,** *и лишь въ* **одномъ единственномъ случаѣ,** *иногда показатель сходимости нулей a_n* **ниже** *p*".

Эта теорема — интересна въ томъ отношеніи, что она сразу оттѣняетъ два характерныхъ свойства теоремы Picard'а въ отношеніи къ функціямъ *конечнаго* порядка: 1^0 ея внутреннюю связь съ *распредѣленіемъ* или *частотой нулей* функціи, а также 2^0 ея связь съ *числомъ нулей.* По поводу послѣдняго обстоятельства мы дадимъ нѣсколько общихъ замѣчаній: на это обстоятельство мало обращается вниманія.

Обратимся къ доказательству теоремы!

Допустимъ сначала, что функція $e^{g(x)} + \xi(x)$ не имѣетъ нулей или имѣетъ ихъ конечное число, тогда

$$\Phi(x) = e^{g(x)} + \xi(x) = e^{\gamma(x)} . \sigma(x), \tag{3}$$

гдѣ $\sigma(x) = \text{const.}$ или же полиномъ; пусть $\sigma(x)$ — полиномъ. Докажемъ, что у $\Phi(x) = 0$ — безконечно много корней. Дѣйств., изъ (3) имѣемъ:

$$e^{g(x)-\gamma(x)} = -\xi(x) \, . \, e^{-\gamma(x)} + \sigma(x), \tag{3'}$$

и слѣд. дифференцированіе даетъ

$$\Big(g'(x)-\gamma'(x)\Big)e^{g(x)-\gamma(x)} = -\xi'(x).e^{-\gamma(x)}+\gamma'(x).\xi(x).e^{-\gamma(x)}+\sigma'(x) \tag{4}$$

откуда при помощи (3')

$$\Big(g'(x)-\gamma'(x)\Big)\Big(\;\sigma(x)-\xi(x)\,.\,e^{-\gamma(x)}\Big) =$$

$$= e^{-\gamma(x)}\left\{\gamma'(x)\,.\,\xi(x)-\xi'(x)\right\} + \sigma'(x). \tag{5}$$

Выберемъ теперь на плоскости комплекснаго перемѣннаго такую область, гдѣ бы

$$|\, e^{\gamma(x)} \,| \quad \text{и} \quad |\, e^{g(x)} \,|$$

при $|\, x \,|$ стремящемся къ ∞, росли безгранично, тогда

$$\lim_{|x|=\infty} |\, e^{-\gamma(x)} \,| = 0, \quad \lim_{|x|=\infty} |\, e^{-g(x)} \,| = 0 \,,$$

и мы видимъ, что при $|\, x \,|$ достаточно большомъ

$$\Big\{ g'(x)-\gamma'(x)\Big\}\sigma(x) \backsim \sigma'(x)$$

или же

$$g'(x)-\gamma'(x) \backsim \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}, \quad |\, x \,| \text{ близко къ } \infty. \tag{6} *)$$

Но $\sigma(x)$—полиномъ, слѣд. $g'(x)$ и $\gamma'(x)$ или тожественны, или же по крайней мѣрѣ ихъ члены при x^p—одинаковы; но и въ томъ, и другомъ случаѣ равенство (3)—невозможно съ точки зрѣнія роста функцій.

Перейдемъ теперь ко второй части теоремы: пусть рядъ (2)—*сходящійся*, такъ что

---

*) Асимптотически при $|\, x \,|$ стремящемся къ ∞

$$g'(x) - \gamma'(x) \backsim 0,$$

$$e^{g(x)} + \varphi_1(x) = e^{\gamma_1(x)}.\sigma_1(x), \qquad (7)$$

гдѣ $\varphi_1(x)$ и $\sigma_1(x)$ — функціи порядка *ниже* p-го; $\gamma_1(x)$—полиномъ p-ой степени.

Допустимъ, что можно образовать еще одно уравненіе типа

$$e^{g(x)} + \varphi_2(x) = e^{\gamma_2(x)}.\sigma_2(x) \qquad (8),$$

въ которомъ также $\varphi_2(x)$ и $\sigma_2(x)$—функціи порядка *ниже* p-го; $\gamma_2(x)$—также полиномъ p-ой степени.

Изъ (7) и (8) находимъ:

$$\varphi_1(x)—\varphi_2(x) = e^{\gamma_1(x)}\sigma_1(x) - e^{\gamma_2(x)}.\ \sigma_2(x) \qquad (7')$$

или же

$$[\varphi_1(x)—\varphi_2(x)]\ e^{-\gamma_2(x)} = e^{\gamma_1(x)-\gamma_2(x)}.\ \sigma_1(x) — \sigma_2(x).$$

Это тожество—справедливо *всегда* и для *всякихъ* значеній x. Выберемъ такую область комплекснаго перемѣннаго, чтобы $| e^{-\gamma_2(x)} |$ при $| x |$ стремящемся къ ∞ стремилось къ нулю, тогда мы получимъ для этой области слѣдующее асимптотическое равенство:

$$e^{\gamma_1(x)-\gamma_2(x)}\sigma_1(x) \backsim \sigma_2(x), \qquad (9)$$

что возможно или лишь 1^0 при $\gamma_1(x) \equiv \gamma_2(x)$, но тогда $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, или же 2^0 по крайней мѣрѣ коэффиціенты $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ при нѣсколькихъ первыхъ степеняхъ ряда x^p, x^{p-1}, x^{p-2},.... должны быть одинаковы; но и въ томъ, и другомъ случаѣ существованіе какъ (7), такъ и (8)—противорѣчиво: напр., изъ (7) и (8) мы находимъ тогда

$$\frac{e^{g(x)} + \varphi_1(x)}{e^{g(x)} + \varphi_2(x)} = e^{\gamma_1(x)-\gamma_2(x)}\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)},$$

а при помощи (9) для *вышеупомянутой* нами области комплекснаго перемѣннаго x мы имѣемъ слѣдующее асимптотическое равенство

$$e^{g(x)} + \varphi_1(x) = e^{g(x)} + \varphi_2(x),$$

т. е.

$$\varphi_1(x) \backsim \varphi_2(x),$$

но тогда для *той же* области въ силу (7) и (8) должно быть

$$\gamma_1(x) \equiv \gamma_2(x),$$

и слѣд. *всегда*

$$\gamma_1(x) \equiv \gamma_2(x) \qquad (10),$$

и для вышеупомянутой области (x)

$$\sigma_1(x) \backsim \sigma_2(x).$$

Въ силу же (10) строгое равенство (7′), справедливое для всей плоскости комплекснаго перемѣннаго,—противорѣчиво съ точки зрѣнія роста функцій: функція $e^{\gamma_1(x)} \equiv e^{\gamma_2(x)}$— порядка p, а $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ *ниже* p—го порядка.

Т. о. равенство (7′)—возможно, если *всегда*

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$$

$$\sigma_1(x) \equiv \sigma_2(x),$$

и слѣд. теорема—доказана.

Теорема *Picard*'а—въ высшей степени интересна: мы видимъ, что она устанавливаетъ слѣдующій *общій принципъ въ теоріи функцій*, который вѣроятно въ недалекомъ будущемъ будетъ освѣщенъ, это—*принципъ перманентности нѣкоторыхъ свойствъ роста функціи*, комбинируемой при помощи четырехъ основныхъ алгебрическихъ операцій съ другими функціями болѣе низшаго роста, чѣмъ одна изъ нихъ, причемъ типическія свойства роста *результата комбинированія* функціи наиболѣе быстраго роста съ функціями менѣе быстраго роста обусловлены ростомъ и его характеромъ у функціи наиболѣе быстро растущей среди комбинируемыхъ.

Теорема *Picard'*а въ отношеніи этого *принципа перманентности свойствъ роста функціи* играетъ скорѣе отрицательную роль, ибо она даетъ отвѣтъ на вопросъ: насколько велики уклоненія отъ этого принципа и возможны-ли эти уклоненія?

Какія же, собственно говоря, мы знаемъ свойства, обусловленныя *ростомъ* данной функціи и теряемыя ею, лишь если мы будемъ комбинировать её съ функціими *болѣе сильнаго* роста при помощи 4-хъ основныхъ алгебрическихъ операцій? Очевидно это суть ростъ модуля самой функціи, ростъ ея нулей и ростъ коэффиціентовъ ряда, её выражающаго, теорема же Picard'а какъ разъ даетъ отвѣтъ на вопросъ, возможны-ли отступленія отъ *принципа сохраненія свойствъ роста* и сколь они часты.

Въ связи съ этими общими соображеніями о теоремѣ Picard'а мы сдѣлаемъ сейчасъ одно маленькое добавленіе къ послѣдней.

18. *Теорема Picard'*а и *число корней уравненія*

$$\Phi(z)-g_1(z)=\xi_1(z) \qquad (1)$$

Теорема Picard'а *обыкновенно* выражается такъ въ отношеніи къ числу корней уравненія:

„*Если дана функція $\Phi(z)$ + цѣлая трансцендентная конечнаго цѣлаго порядка, и нѣкоторая другая тоже цѣлая $g_1(z)$, но роста менѣе быстраго, то функція $\xi_1(z)$ единственная, обладающая* **конечнымъ** *числомъ корней или вовсе ихъ не имѣющая.*

Замѣтимъ, что теорема только что формулированная— *общѣе* теоремы 16, но мы принимаемъ её безъ доказательствъ: оно—подобно предыдущему.

Мы дадимъ сейчасъ теорему *нѣсколько обобщающую* только что упомянутую. Вотъ она:

(*A*). „*Пусть намъ дана цѣлая трансцендентная функція $\Phi(z)$* **какого-угодно** *порядка роста ея модуля и пусть*

$g_1(z)$—*другая менѣе быстраго роста, чѣмъ предыдущая* $\Phi(z)$; *пусть далѣе мы образуемъ функцію*

$$\xi_1(z)=\Phi(z)-g_1(z),$$

обладающую тѣмъ свойствомъ, что число ея нулей обусловлено ростомъ не функціи $\Phi(z)$, *а нѣкоторой другой ростомъ ниже, нежели* $\Phi(z)$; *мы утверждаемъ, что другой такой* $\xi_2(z)$, *т. е. другой* $g_2(z)$ *подобной* $g_1(z)$, *не существуетъ.*

Читатель пойметъ уже изъ редакціи теоремы (A), въ чемъ заключается обобщеніе вышеприведенной—теоремы и существующихъ въ этомъ родѣ.

При $r=|x|$ достаточно большомъ *асимптотически*, какъ это видно изъ формулы *Cauchy* для числа корней данной функціи внутри круга радіуса$=r$, число корней N данной функціи *не выше* log mod. max. $|\Phi(z)|$ и *должно колебаться около этого числа*; означимъ это число черезъ N_0.

Эмпирически, напр., мы въ этомъ убѣждаемся сейчасъ же на примѣрѣ хоть функціи e^x-a, число корней которой по модулю не превышающихъ r не выше r (См. напр., главу I); но, быть можетъ, отнимая отъ e^x-a, полиномъ $g(z)$ или какую-нибудь *constant*'у, мы не получимъ этого предѣла для числа корней равнаго r, ибо число это будетъ значительно меньше или же даже нуль (послѣднее случится, если $g(z)=-a$. Спрашивается, возможны-ли такія пониженія числа N вообще при существованіи какихъ-угодно полиномовъ $g_1(z)$ или же функціи ростомъ ниже роста $|\Phi(z)|$, или же число такихъ полиномовъ $g_1(z)$ или же вообще функцій $g_1(z)$ растущихъ менѣе быстро, чѣмъ $\Phi(z)$, ограничено?

Покажемъ, что, вообще говоря, при варіированіи $g_1(z)$ въ (1)

$$\frac{N}{N_0}\backsim 1\backsim\frac{N}{Log\,|\Phi(z)|}$$

или—что тоже *асимптотически* вѣрно—

$$N\backsim Log\,\mathfrak{M}(\Phi(r)), \qquad (1')$$

и лишь въ одномъ *единственномъ* случаѣ функціи $g_1(r)$ мы имѣемъ (для r очень большихъ, конечно)

$$(1'') \qquad N < Log\mathfrak{M}(\Phi(r) = N_0.$$

Число N изъ (1), вообще говоря, опредѣляется формулой

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} dLog\left[\Phi(z)\left\{1 - \frac{g_1(z)}{\Phi(z)}\right\}\right] \qquad (2),$$

и если

$$\lim_{|z|=\infty}\left|\frac{g_1(z)}{\Phi(z)}\right| = 0,$$

то вообще

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} dLog\Phi(z). \qquad (3)$$

гдѣ K_r—контуръ круга радіуса$\equiv r$, и корни слѣд. по абсолютной величинѣ меньше r.

Но можетъ быть, можетъ случиться, что число корней (1) меньше N_0; тогда можно доказать, что *такой случай исключеніе—единственный*, т. е., иными словами, такое уравненіе —возможно, если оно—возможно, только лишь при существованіи единственной функціи $g_1(z)$ порядка роста ниже таковаго у $\Phi(z)$, и въ этомъ мы видимъ *иное истолкованіе и обобщеніе теоремы Picard'*а.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное—пусть

$$\Phi(z) - g_2(z) = \xi_2(z) \qquad (4),$$

причемъ у $\xi_2(z) = 0$ число корней опредѣлено также не по формулѣ (1'), а по другой, дающей число N' значительно ниже N_0. Покажемъ, что это—невозможно, т. е. уравненіе (1), —*исключительное* въ обрисованномъ только что смыслѣ,— *единственно*. Фактъ этотъ—интересенъ, и мы думаемъ, что эта наша теорема ограниченія—маленькое дополненіе къ блестящей теоремѣ Picard'а, создавшей почти цѣлую новую область въ математикѣ.

Очевидно, въ силу только—что сдѣланныхъ предположеній относительно (1) и (4) ихъ можно каждое такъ представить:

$$\Phi(z)-g_1(z)=\varphi_1(z).\ \ \Psi_1(z) \qquad (5),$$

$$\Phi(z)-g_2(z)=\varphi_2(z).\ \ \Psi_2(z) \qquad (6),$$

причемъ $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$—функціи *по росту* равнозначныя $\Phi(z)$ каждая, а $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$—роста ниже, чѣмъ $\Phi(z)$; иногда можетъ случиться, конечно, что $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ суть *constant*'ы; но во всякомъ случаѣ факторы по росту эквивалентные росту $\Phi(z)$ мы отнесемъ къ функціямъ $\varphi_1(z)$ и соотвѣтственно къ $\varphi_2(z)$. если только правыя части (5) и (6)—разлагаемы на факторы.

Изъ (5) и (6) находитъ:

$$(6') \qquad g_2(z)-g_1(z)=\varphi_1(z).\ \ \Psi_1(z)-\varphi_2(z).\ \ \Psi_2(z),$$

причемъ въ силу сдѣланныхъ предположеній

$$\lim_{|z|=\infty}\left|\frac{\varphi_1(z)}{\Phi(z)}\right|=1,\quad \lim_{|z|=\infty}\left|\frac{\varphi_2(z)}{\Phi(z)}\right|=1,$$

т. е.

$$\lim_{|z|=\infty}\left|\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}\right|=1, \qquad (7)$$

а кромѣ того

$$\lim_{|z|=\infty}\left|\frac{\Psi_1(z)}{\varphi_1(z)}\right|=0\ =\ \lim_{|z|=\infty}\left|\frac{\Psi_2(z)}{\varphi_2(z)}\right|,$$

такъ что равенство

$$\frac{g_2(z)-g_1(z)}{\varphi_1(z)}=\Psi_1(z)-\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}.\ \ \Psi_2(z)$$

въ силу только—что сдѣланныхъ замѣчаній можетъ быть ***асимптотически*** такъ записано

$$\Psi_1(z)\backsim\Psi_2(z) \qquad (8)$$

для z достаточно большаго; но тогда (6') на основанiи равенствъ (7) и (8) или противорѣчиво, или же удовлетворено тожественно, т. е.

$$g_1(z) \equiv g_2(z), \quad \Psi_1(z) \cdot \varphi_1(z) \equiv \Psi_2(z) \cdot \varphi_2(z).$$

Словомъ предположенiе о существованiи еще уравненiя (6) при существованiи (5)—противорѣчиво.

Послѣ того, какъ мы выяснили самую теорему Picard'a и ея роль, мы свяжемъ ее съ теоремами (15 (A) гл. II), какъ мы говорили въ концѣ § 15.

19. *Попытка объяснить существованiе теоремы Picard'*a. Теорема Picard'a сама по себѣ, а также выводы и слѣдствiя, которые можно сдѣлать изъ нея, являются въ высшей степени неожиданными съ перваго взгляда, и становится чрезвычайно интереснымъ попытаться *объяснить ея происхожденiе*, что мы сейчасъ и хотимъ сдѣлать.

Замѣтимъ, что соображенiя, помощью коихъ мы это сдѣлаемъ, являются по существу чистыми соображенiями роста функцiи, причемъ, какъ мы полагаемъ, *основной причиной ея существованiя, а также и существованiя теоремъ ей подобныхъ*, является **неоднозначность роста функцiи** въ опредѣленныхъ частяхъ плоскости, вдоль опредѣленныхъ лучей плоскости комплекснаго перемѣннаго ея аргумента.

Понятiе *однозначности роста функцiи* вдоль луча—вектора, проходящаго черезъ начало координатъ, или вдоль периферiи круга опредѣленнаго радiуса, или же вдоль или внутри опредѣленнаго контура должно быть введено въ анализъ и изучено по нашему разумѣнiю. Прежде всего мы должны, конечно, отвѣтить на вопросъ: „Что такое однозначность роста функцiи"?

Мы видѣли на всемъ протяженiи нашей работы, что для изученiя роста данной функцiи въ опредѣленной области независимаго перемѣннаго функцiи нужно *всякiй разъ* создать особую функцiю—масштабъ, близко подходящую къ данной въ указанной области (См. 7, гл. I); мы скажемъ теперь, что ростъ функцiи—неоднозначенъ, если для выбранной нами области законъ роста—одинъ, для другой области—другой и т. д.; что—любопытно, ростъ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій часто неоднозначенъ, и *отъ степени, сложности и характера этой неоднозначности роста зависятъ всѣ свойства функціи.*

До сихъ поръ изученіе роста функціи производится на основаніи изученія природы различныхъ извѣстныхъ и иногда искусственно построенныхъ функцій; такимъ путемъ были добыты *нѣкоторые общіе законы роста* (въ родѣ, напр., законовъ § 7, гл. I, теоремы Picard'а и др.).

Въ будущемъ же несомнѣнно будутъ даны общіе законы для обнаруженія характерныхъ свойствъ функціи на основаніи знанія ея законовъ и особенностей роста ея. Отчасти эта проблема—уже задѣта, какъ видно изъ нашей работы, но мы позже затронемъ ее съ еще болѣе интересной точки зрѣнія.

Въ связи съ этой однозначностью роста функціи находится и теорема Picard'а. Покажемъ это! Возьмемъ, напр., функцію порядка роста (*функціональнаго порядка*, какъ мы скажемъ иногда, были можетъ) $\rho < \frac{1}{2}$. Мы уже показали выше (см. теорему 12, гл. II), что модуль такой функціи $f(z)$ связанъ неравенствомъ (см. теорему 15, А гл. II)

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < | f(z) | < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

и слѣд., если мы пишемъ уравненіе

$$f(z) - C = 0,$$

гдѣ C—нѣкоторое произвольно взятое постоянное, то C *никогда не можетъ* быть *исключительнымъ* значеніемъ въ смыслѣ Picard'а: вѣдь $| f(z) |$ на основаніи теоремы 12 *всегда возрастаетъ*, если мы измѣняемъ z вдоль линіи, не пересѣкающей ни одного нуля, и слѣд. теорема Picard'а объ исключительномъ значеніи для такихъ функціи $f(z)$ не имѣетъ мѣста, т. е.

(*B*) **Теорема:** „*Исключительныхъ значеній C въ смыслѣ Picard'а для функцій порядка роста ниже* $\frac{1}{2}$ *не сущест-*

вуетъ; иными словами такія функціи принимаютъ всякое значеніе.

Эта теорема, этотъ примѣръ нами взятый съ ясностью говоритъ, что однозначный всюду ростъ функціи, причемъ ростъ этотъ таковъ, что разница между *maximum*'омъ модуля функціи и ея *minimum*'омъ неощутимы, ибо ихъ отношеніе, напр., въ данномъ случаѣ близко къ 1, такъ какъ

$$e^{r^{\rho+\varepsilon}} : e^{r^{\rho-\varepsilon}} = e^{r^{\rho+\varepsilon}\left(1-\frac{1}{r^{2\varepsilon}}\right)},$$

повидимому исключаетъ возможность случая исключенія Picard'а. Словомъ, повидимому, справедливо:

(С) **Теорема:** „*Если функція конечной высоты—такова, что отношеніе ея модуля—maximum'а къ модулю—minimum'у ея—конечная величина, то случай исключенія Picard'а, т. е. существованіе значеній, которыхъ функція принимать не можетъ, невозможенъ*".

Наша теорема (*С*), весьма вѣроятная, можетъ быть иллюстрирована и подкрѣплена слѣдующими соображеніями. Возьмемъ, какъ это обычно дѣлаютъ, при обоснованіи теоремы Picard'а, сумму двухъ функцій

$$\Phi(z) = G(z) + g(z) \qquad (1),$$

причемъ $\Phi(z)$ и $g(z)$—функціи разныхъ порядковъ роста. Почему въ самомъ дѣлѣ существуютъ для $\Phi(z)$ теоремы Picard'a? Пусть $G(z)$ и $g(z)$—функціи *конечнаго* порядка большаго 1; мы дѣлаемъ это предположеніе простоты ради. Въ силу теоремы (15, А, гл. II) можно писать:

$$\left(M(r)\right)^{-1} < \left|G(z)\right| < M(r) \qquad (2)$$

$$\left(m(r)\right)^{-1} < \left|g(z)\right| < m(r) \qquad (3),$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} M(r) &\equiv \text{мод. } max.\ G(z) \\ m(r) &\equiv \text{мод. } max.\ g(z) \end{aligned}\right\}$$

Теперь можетъ случиться, что въ нѣкоторыхъ углахъ плоскости | $\Phi(z)$ | будетъ расти какъ $M(r)$, и вліяніе $m(r)$ исчезаетъ; но зато можетъ случиться, что въ другихъ углахъ будетъ преобладать $\left(m(r)\right)^{-1}$, такъ какъ

$$\left(M(r)\right)^{-1} < \left(m(r)\right)^{-1},$$

и слѣд. $\left|\Phi(z)\right|$ будетъ расти какъ $\left(m(r)\right)^{-1}$. Но разъ модуль функціи растетъ *неоднозначно*, то все, что—обусловлено этимъ ростомъ, будетъ расти также неоднозначно, и слѣд. вмѣсто ожидаемаго превалированія характерныхъ свойствъ $G(z)$ и законовъ роста мы наталкиваемся на отступленія отъ этихъ законовъ, и эти отступленія обусловлены до извѣстной степени ростомъ $g(z)$—функціи меньшаго роста.

Напр., число нулей $\Phi(z)=0$ въ кругѣ радіуса$\equiv r$ обусловлено ростомъ модуля $\Phi(z)$ въ интегралѣ

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_r} d\log\left\{G(z)+g(z)\right\},$$

а въ силу сказаннаго на периферіи круга радіуса r могутъ оказаться такія дуги, вдоль коихъ

$$\int dlog\Phi(z) = \int dlogG(z)$$

или же $$\int dlog\Phi(z) = \int dlog g(z),$$

и отсюда уже видно съ ясностью вторженіе вліянія функціи $g(z)$.

Тоже самое понятно нужно сказать о ростѣ нулей функціи $\Phi(z)$, объ ихъ частотѣ или распредѣленіи.

Между прочимъ изъ этихъ только-что нами произведенныхъ изслѣдованій обнаруживается *настоятельная необходимость* изученія функціи *правильнаго, однозначнаго роста* болѣе или менѣе, что мы предпримемъ нѣсколько позже. Интересно, напр., знать, чѣмъ разнятся функціи съ нулями и распредѣленіемъ ихъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго правильными отъ функціи, у коихъ и то, и другое—неправильно.

Мы попытаемся и на это дать нѣкоторыя поясненія; но сполна отвѣтить на это мы не умѣемъ. Вернемся сейчасъ на время снова къ теоремѣ (15, A). Замѣтимъ, что въ то время, какъ скажемъ въ неравенствѣ

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < |f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \tag{4}$$

верхнее неравенство справедливо *всегда*, *нижнее имѣетъ* мѣсто *лишь для безконечно многихъ* круговъ радіусовъ r, но *не всѣхъ*; пусть ρ—конечное число.

Выше мы уже показали, что ростъ модуля функціи при движеніи вдоль какой-либо линіи плоскости комплекснаго перемѣннаго x даетъ часто ясный отвѣтъ на вопросъ о существованіи или несуществованіи для данной функціи $f(x)$ случая исключенія Picard'a и вообще о возможности примѣнить ту или другую сторону Picard'a къ изучаемому случаю. Но тутъ весьма естественно бросается въ глаза слѣдующая характерная особенность: несомнѣнно въ неравенствѣ (4) верхнее неравенство всегда имѣетъ мѣсто, но нижнее не можетъ быть всегда удовлетворено при движеніи вдоль какой-нибудь линіи проведенной на плоскости комплекснаго перемѣннаго; теоретически по крайней мѣрѣ такой случай—мыслимъ, а это послѣднее обстоятельство можетъ быть обусловлено *частото-распредѣленія нулей* въ кругѣ нѣкотораго радіуса r и *близостью къ нулямъ* взятой нами линіи.

Вѣдь если, напр., для функціи $\sin(\pi z)$ мы возьмемъ за линію измѣненія (z) линію близкую къ оси реальной, слѣд. близкую къ нулямъ $\sin\pi z$, то вѣдь minimum модуля $\sin\pi z$ не можетъ быть заданъ иногда произвольно.

Или если, напр., круги безконечно малаго радіуса, описанные около нулей, будутъ заполнять всю площадь круга радіуса, положимъ, равнаго модулю ея n—го нуля, то *измѣненіе и ростъ функціи тоже не будетъ произвольнымъ*, и слѣд. частота распредѣленія и ростъ функціи въ ихъ взаимной зависимости могутъ иногда быть съ успѣхомъ изучены даже геометрически.

По поводу упомянутой только-что геометрической интерпретаціи сдѣлаемъ небольшой, но поучительный подсчетъ *).

Пусть въ кругѣ радіуса$=r_n$, гдѣ r_n—модуль n—го нуля (n нулей пусть заключены въ кругѣ радіуса$=r>r_n$), около каждаго нуля описаны безконечно—малые круги радіуса$=\eta$; ихъ площадь внутри большаго круга будетъ $\Sigma\leqslant n\pi\eta^2$ (знакъ $<$ будетъ фигурировать въ случаѣ, если круги выходятъ за периферію круга радіуса$=r_n$); площадь же взятаго нами круга $S=\pi r_n^2$.

Очевидно отношеніе $\frac{\Sigma}{S}\leqslant\frac{n\pi\eta^2}{\pi r_n^2}=\frac{n\eta^2}{r_n^2}$ будетъ зависить отъ роста нуля r_n. Пусть порядокъ сходимости нулей r_n есть ρ; тогда $r_n^{\rho+\varepsilon}>n$, т. е. $r_n \backsim n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}$, и слѣд.

$$\omega=\frac{\Sigma}{S}\leqslant\frac{n\eta^2}{n^{\frac{2}{\rho+\varepsilon}}}=\eta^2.\,n^{1-\frac{2}{\rho+\varepsilon}}=\left\{\eta.\,n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho+2}}\right\}^2.$$

*) Сравни *Maillet*. Annales de l'Ecole Normale, 1906, p. 283.

Отсюда видно, что иногда $\omega=0$, иногда $\omega=\infty$; первое случится всегда, если

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\varrho+\varepsilon}<\frac{1}{\varrho} \text{ или } \varrho<2.$$

Въ этомъ случаѣ, какъ показатель сходимости и функціональный порядокъ — равны одинъ другому, мы имѣемъ теоремы:

(D). **Теорема.** *„Если дана намъ функція конечнаго порядка меньшаго 2, т. е. слѣд. нули ея порядка сходимости тоже меньшаго 2, то круги, описанные около каждаго изъ нулей,* **не заполняютъ** *площади круга, описаннаго около начала радіусомъ равнымъ модулю n—го нуля (имѣются въ виду нули, лежащіе внутри круга радіуса$=r_n$)“.*

(E). **Теорема.** *Въ случаѣ функціи конечнаго порядка бо́льшаго 2 иногда можетъ случиться (нули ея порядка сходимости бо́льшаго 2), что круги описанные въ кругѣ радіуса$=r_n$ около каждаго изъ нулей безконечно малымъ радіусомъ заполнятъ своими площадями площадь круга радіуса$=r_n$.*

Теорема (*E*) нами выражена въ некатегорической формѣ, ибо ея обоснованіе требуетъ болѣе глубокихъ соображеній и изысканій, которыми мы въ данный моментъ не располагаемъ. Для ея строгаго обоснованія нужно точнѣй знать распредѣленіе нулей, нужно строго задать величину радіуса безконечно малыхъ круговъ и нужно задать также точно измѣненіе *maximum*'овъ и *minimum*'овъ изучаемой функціи. Такимъ путемъ вѣроятно удалось бы открыть характерный признакъ *періодичности* функцій, число періодовъ и т. п.; но такія изслѣдованія еще, повидимому, преждевременны; къ разрѣшенію только что упомянутыхъ проблемъ можно прійти не прежде, какъ изучивши роль и вліяніе па ростъ функціи *аргументовъ ея нулей*, но и эта задача—не изъ легкихъ.

Въ заключеніе этой главы упомянемъ еще о теоремѣ данной *Pringsheim*'омъ въ *Math. Ann.* (Band 58) относительно функцій *конечнаго* и *дробнаго* порядка, именно:

Теорема (F). *Для функцій конечнаго, но дробнаго порядка исключительныхъ значеній Picard'а не существуетъ.*

Эта теорема—обобщеніе нашей теоремы (B). Доказательства ея мы не приводимъ, ибо оно было бы буквальнымъ повтореніенъ доказательства *Pringsheim*'а (Loc-cit).

Надѣемся, что размышленія настоящаго параграфа достаточно освѣтили природу теоремъ подобныхъ *Picard*'овской.

Нѣсколько дальше мы вернемся къ этой проблемѣ еще разъ съ нѣсколько другой точки зрѣнія, а сейчасъ займемся немного проблемой опредѣленія *genre*'а цѣлой трансцендентной функціи.

20. *Проблема опредѣленія genre'а цѣлой трансцендентной функціи.*

Проблема о genre'ѣ цѣлой трансцендентной функціи $\Phi(x)$ является нелегкой, но интересной, и потому заслуга *Lageurre*'а, введшаго это понятіе впервые (Oeuvres, T. I, p. 167 и слѣд.),—велика. Дѣло въ томъ, что genre'ъ много сразу говоритъ о природѣ изучаемой функціи и ея ростѣ; такъ, напр., если мы имѣемъ функцію

$$\Phi(x)=e^{q(x)}.x^m.\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \qquad (1)$$

въ *нормальной ея формѣ*, т. е. степень полинома $q(x)$ не выше p—ой, и намъ сказано, что функція есть genre'а p, и слѣд.

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1} \equiv \text{рядъ сход.} \qquad (2),$$

то, какъ это было уже показано Lageurre'омъ

$$\lim_{|x|=\infty}\frac{\Phi'(x)}{x^{p+1}.\Phi(x)}=0 \qquad (3).$$

Простое вычисленіе убѣждаетъ насъ въ справедливости формулы (3).

Къ сожалѣнію, исходя только изъ (3), мы ничего не можемъ сказать опредѣленнаго относительно genre'a p функціи $\Phi(x)$, ибо мы никакъ не можемъ безъ какихъ-либо другихъ добавочныхъ условій опредѣлить порядокъ роста нулей функціи $\Phi(x)$, какъ не можемъ рѣшить и самаго вопроса о существованіи нулей, *предрѣшая* его въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ; но что $\Phi(x)$ можетъ быть представлена въ формѣ (1) при существованіи у $\Phi(x)$ нулей и наличности условія (3), или въ формѣ

$$\Phi(x) = e^{q(x)} \qquad (4),$$

гдѣ $q(x)$—полиномъ степени не выше p—ой въ случаѣ ихъ отсутствія, въ этомъ можно убѣдиться просто; но только мы не будемъ знать, есть-ли p дѣйствительно genre'ъ: самое большее, что можно знать, это то, что онъ—*не больше* $(p+1)$.

Результатъ этотъ мы получимъ, изучая интегралъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_R} \frac{\Phi'(z)}{z^{p+1}\Phi(z)} \cdot \frac{dz}{z-x},$$

распространенный по контуру круга безконечно большого радіуса R; этотъ интегралъ мы замѣнимъ суммой интеграловъ, взятыхъ взятыхъ въ обратномъ направленіи по 1^0 периферіямъ круговъ, описанныхъ около каждаго изъ нулей, находящагося внутри круга радіуса$\equiv R$, 2^0 по контуру, огибающему точку x, и 3^0 по контуру, заключающему точку нуль; полагая же затѣмъ $R=\infty$, мы получимъ уравненіе, изъ котораго послѣ интеграціи получится формула типа (1).

Но мы не будемъ этого продѣлывать и предоставляемъ это читателю.

Обратимся лучше къ *теоремѣ Poincaré* о genre'ѣ, данной имъ въ *Bulletin de la Société Math. de France* (1883. T. XI).

Мы эту теорему не будемъ доказывать, но дадимъ ей очень интересное примѣненіе.

21. **Теорема** *Poincaré о genre'ѣ и ея примѣненіе.*

1°. *„Если мы имѣемъ функцію genre'a p, то модуль функціи*

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}},$$

каково бы ни было $\alpha > o$, лишь бы r было достаточно большимъ.“

Иными словами это значитъ, что положительная, все время возрастающая функція $M(r)$ *ниже* по росту, нежели $e^{\alpha r^{p+1}}$; слѣд., если мы возьмемъ *майоранту* $f(x)$, то ея коэффиціенты убываютъ *болѣе быстро* соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ функціи $e^{\alpha r^{p+1}}$ (мы разсуждаемъ въ данномъ случаѣ *асимптотически*).

Пользуясь теперь нашимъ асимптотическимъ закономъ (F, 5, I) для функціи $e^{\alpha r^{p+1}}$, мы можемъ утверждать, что ростъ ея n—го коэффиціента β_n опредѣленъ закономъ

$$|\,\beta_n\,| \backsim \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

или же, какъ

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \backsim n!$$

для n—очень большаго

$$|\,\beta_n\,| \backsim \left[\frac{e}{n!}\right]^{\frac{1}{p+1}} \backsim \frac{1}{\sqrt[p+1]{n!}},$$

т. е.

$$|\,\beta_n\,| \,.\sqrt[p+1]{n!} \backsim 1.$$

Теперь $|\,\alpha_n\,|$ —коэффиціенты при n достаточно большомъ должны быть меньше $|\,\beta_n\,|$, а потому

$$\lim_{n=\infty}\left\{|\,\alpha_n\,| \,.\sqrt[p+1]{n!}\right\} = 0,$$

т. е. мы получимъ *вторую теорему Poincaré* пріемомъ въ высшей степени простымъ. (Сравни, напр. *Poincaré*, loc. cit. и *Borel*, Lecons sur les fonctions entières, p. 54).

Эта вторая теорема *Poincaré* даетъ представленіе о ростѣ коэффиціентовъ ряда функціи *genre'a p*, т. е.

2°. **Теорема.** *Если*

$$f(x) = \sum_{o}^{\infty} a_n x^n$$

функція genre'a p, то ростъ ея коэффиціентовъ опредѣленъ закономъ: предѣлъ произведенія

$$|\, a_n \,| \cdot \sqrt[p+1]{n!}$$

при ростѣ n стремится къ нулю."

Наше доказательство—проще, чѣмъ тоже самое у *Poincaré* или у *Borel*'я; его недостатокъ—асимптотичность разсужденій, хотя есть и положительная сторона: оно лишній разъ показываетъ, что въ теоремахъ асимптотическаго характера асимптотическій методъ разсужденій часто бываетъ достаточнымъ.

Изъ первой теоремы *Poincaré* мы сдѣлаемъ сейчасъ интересные выводы.

Изъ того факта, что функція $|\, F(x) \,|$ *genre'a p* ниже по росту $e^{\alpha r^{p+1}}$ слѣдуетъ, что *всегда* возможно найти *такой секторъ, соотвѣтственно подобранный*, на плоскости перемѣннаго комплекснаго z, что

$$\lim_{|z| = \infty} |\, F(z) . e^{x z^{p+1}} \,| = 0.$$

Сколько такихъ секторовъ соотвѣтственно подобранныхъ можетъ существовать при *заданномъ x*?

Это—вопросъ, на который повидимому, имѣя дѣло съ функціями genre'a *p* (конечнаго порядка), можно отвѣтить такъ: число секторовъ, въ которыхъ функція убываетъ и остается ниже опредѣленной *constant*'ы K, не можетъ быть *произвольнымъ* и напередъ заданнымъ для такой функціи.

Съ этой стороны *теорему* 1^0 *Poincaré* можно связать съ изслѣдованіями *Phragmen*'а (Acta Math. T. 28. Sur une extension...), которыя расширяють теорему Poincaré до извѣстной степени.

Сущность изслѣдованій *Phragmen*'а мы формулируемъ такъ:

3^0. **Теорема.** „*Секторы, внутри коихъ функція* **конечнаго** *порядка и genre'а p возрастаетъ или убываетъ, оставаясь по абсолютной величинѣ при убываніи ниже опредѣленной величины K*, **не могутъ быть заданы напередъ** *и* **произвольно.**"

Чтобы уяснить смыслъ нашей теоремы 3^0, докажемъ такую теорему, похожую на *Phragmen*'овскія (loc. cit.).

4^0. **Теорема.** „*Функція* **конечнаго** *порядка p не можетъ расти вдоль только* **единственнаго луча**, *оставаясь на всѣхъ другихъ лучахъ ниже опредѣленнаго числа K по своей абсолютной величинѣ и не приводясь къ constant'*ѣ."

Эта теорема служитъ хорошимъ дополненіемъ къ другой нашей теоремѣ (12, гл. II).

Возьмемъ за такой *исключительный* лучъ теоремы 4^0 ось реальныхъ значеній x; тогда изъ предположеній относительно $F(z)$ согласно теоремѣ 4^0 имѣемъ:

$$| F(z) | < C_1 e^{r^p} \text{ (для } \textit{реальной} \text{ оси)} \qquad (1)$$

$$| F(z) | < K \text{ (для всѣхъ другихъ лучей)} \qquad (2).$$

Возьмемъ число $k > p$ и составимъ интегралъ

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} . F\left(x\omega^{\frac{1}{k}}\right) d\omega \qquad (3).$$

Пусть ω—*реально* и пусть x тоже реально; тогда для реальныхъ x

$$| \Phi(x) | < \int_0^\infty e^{-\omega} \left| F\left(x\omega^{\frac{1}{k}}\right) \right| d\omega$$

или въ силу (1)

$$| \Phi(x) | < C_1 \int_0^\infty e^{-\omega + \omega^{\frac{p}{k}} | x |^p} d\omega = C_1 \int_0^\infty e^{-\omega[1-\omega^{\frac{p}{k}-1} \cdot | x |^p]} d\omega,$$

но $\frac{p}{k} < 1$, а потому

$$| \Phi(x) | < C_1 \int_0^\infty e^{-\omega} d\omega = C_1$$

(для реальной оси).

Для *другихъ* же лучей имѣемъ (x—*нереально*) въ силу (2)

$$| \Phi(x) | < K \int_0^\infty e^{-\omega} d\omega = K,$$

т. е. модуль цѣлой трансцендентной функціи $\Phi(x)$ остается *всюду* на плоскости комплекснаго перемѣннаго x ниже нѣкоторой постоянной; но тогда $F(z)$ *должна* тоже быть *constant*'ой.

Т. о. не можетъ быть у функціи *конечнаго* порядка луча, вдоль коего она бы росла, оставаясь вдоль всѣхъ другихъ ниже нѣкоторой постоянной, и слѣд., если такая цѣлая трансцендентная функція существуетъ, то она должна быть *безконечнаго* порядка.

Теорема *Phragmen*'а (Acta math. 28, p. 351) обобщаетъ, понятно, эту нашу маленькую теорему, и она говоритъ больше: функція *конечнаго* порядка не можетъ обладать не только *единственнымъ* лучемъ, вдоль коего она бы возрастала, оставаясь вдолъ другихъ ниже constant'ы K (*нашъ* результатъ), но даже и *единственнымъ секторомъ* указаннаго свойства (результатъ *Phragmen*'а).

Такъ, напр., функція *порядка*$=1$ e^x обладаетъ *двумя* секторами: между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ она растетъ, между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ она убываетъ.

Или, напр., e^{x^2} функція порядка 2 обладаетъ 4-мя секторами, внутри коихъ она попеременно то растетъ, то убываетъ:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{и} \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

Тоже самое, повидимому, должно наблюдаться, если ς *порядокъ≡цѣлое число*, а функція взятая нами для изученія—*нормальна*; но тоже самое нужно сказать и относительно ς *дробнаго.*

Въ связи съ подобнаго рода размышленіями находится и такая теорема *Lindelöf*'а:

5. **Теорема** *Lindelöf*'a. *Если извѣстно, что порядокъ данной цѣлой трансцендентной функціи не выше ϱ, и если ея модуль остается ниже нѣкотораго конечнаго числа K на „опредѣленныхъ радіусахъ", расположенныхъ такъ, что уголъ ихъ раствора меньше $\frac{\pi}{\varrho}$, то можно утверждать, что функція≡constant*'а". (Acta math. 30, p. 385).

Эта теорема является хорошимъ дополненіемъ ко всѣмъ только что обоснованнымъ теоремамъ.

Въ формулировкѣ теоремы 5^0 мы подчеркнули слово „опредѣленныхъ радіусахъ". Читатель пойметъ, что, вообще говоря, такіе радіусы *можно* подобрать, но при *извѣстномъ* ихъ расположеніи существованіе ихъ—немыслимо, и читатель эмпирически въ этомъ убѣдится на примѣрахъ функцій, напр., e^x или e^{x^2}. Такія типичныя функціи конечнаго порядка, какъ e^{x^p}, напр., имѣютъ на плоскости $2p$ секторовъ, внутри коихъ попеременно функція то возрастаетъ, то убываетъ, и это, повидимому, вообще должно быть характернымъ для функцій *конечнаго* порядка большого 1, и наоборотъ это явленіе должно отсутствовать для функцій конечнаго порядка меньшаго $\frac{1}{2}$, что мы и показали выше (см. наши изслѣдованія гл. II, § 10 и 11). Обосновать только что высказанныя предположенія строго и безукоризненно для функцій *любого* порядка какъ цѣлаго, такъ и дробнаго намъ не удалось; но нѣкоторыя размышленія по этому поводу мы все же приведемъ, хотя—оговоримся—они не кажутся намъ строгими.

Возьмемъ каноническое произведеніе вида

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}\frac{z^p}{a_n^p}} \qquad (1),$$

такъ что рядъ

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1} \equiv \text{сход. рядъ} \qquad (2).$$

Пусть z опредѣлено условіемъ

$$|a_n| < |z| < |a_{n+1}| \qquad (3),$$

тогда

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{n}E_k\left(\frac{z}{a_k}\right).\prod_{n+1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k}\right)=P_1^{(n)}.\overset{(\infty)}{P}_{n+1} \qquad (4),$$

и мы видимъ, что

$$\left|\prod_{n+1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k}\right)\right|=\left|e^{-\frac{z^{p+1}}{(p+1)}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}}-\frac{z^{p+2}}{p+2}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+2}}\cdots}\right|=$$

$$=|\overset{(\infty)}{P}_{n+1}|.$$

Пусть n взято у насъ очень большимъ, тогда

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}},\ \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+2}}\ \ldots.$$

въ силу (2)—очень малы, и каждая послѣдующая убываетъ несравненно быстрѣй предыдущей смежной съ ней. Въ силу этого, если положимъ (n—*фиксировано*)

$$-\sum_{n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{p+m} = \lambda_{p+m} \qquad (5),$$

то

$$|\overset{(\infty)}{P}_{n+1}| = \left|e^{\frac{z^{p+1}}{p+1}\cdot\lambda_{p+1}+\frac{z^{p+2}}{p+2}\cdot\lambda_{p+2}+\dots}\right|.$$

Пусть

$$z = re^{i\sigma},\ \lambda_{p+1} = C(p+1).\ e^{i\tau} \qquad (6),$$

тогда асимптотически

$$|\overset{(\infty)}{P}_{p+1}| \backsim e^{r^{p+1}.\ Cos((p+1)\sigma+\tau)} \qquad (7).$$

Далѣе $P_1^{(n)}$ есть произведеніе полинома степени n—ой на $e^{Q(z)}$, гдѣ $Q(z)$—полиномъ p—ой степени, а потому всегда возможно, что

$$|P_1^{(n)}| < e^{\alpha r^{\tau}},\ \ p < \tau < p+1. \qquad (8).$$

Такимъ образомъ въ произведеніи $|P_1^{(n)}.\ \overset{(\infty)}{P}_{n+1}|$ на основаніи (7) и (8) *превалирующимъ* членомъ является членъ (7).

Изъ (7) же мы непосредственно видимъ, что вся плоскость перемѣннаго независимаго раздѣляется на $2(p+1)$ секторовъ слѣдующимъ образомъ: въ углахъ вида

$$\frac{2k\pi-\tau}{(p+1)}-\frac{\pi}{2(p+1)} \leqslant \sigma < \frac{2k\pi-\tau}{p+1}+\frac{\pi}{2(p+1)}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p)$$

модуль $|\varphi(z)|$ все время растетъ, въ углахъ же

$$\frac{2k\pi-\tau}{p+1}+\frac{\pi}{2(p+1)} < \sigma < \frac{2k\pi-\tau}{p+1}+\frac{3\pi}{2(p+1)}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p)$$

модуль $|\varphi(z)|$ наоборотъ все время убываетъ.

Эти разсужденія подтверждаютъ наши вышеприведенныя соображенія, а кромѣ того даютъ возможность обосновать слѣдующее положеніе:

6. **Теорема.** *Функція $\varphi(z)$ типа (1) genre'а p и порядка сходимости $(p+1)$ растетъ такъ, что ей обратная $\frac{1}{\varphi(z)}$ по модулю—того же порядка громадности, что и $|\varphi(z)|$* ".

Надѣемся, что всѣмъ сказаннымъ о *теоремѣ Poincaré* и о *genre*'ѣ мы освѣтили достаточно ярко и то, и другое.

22. *Нѣкоторые общіе выводы и соображенія о ростѣ функцій, являющіеся слѣдствіемъ всего сказаннаго нами до сихъ поръ.*

Разсуждая выше о функціяхъ *конечнаго* порядка бóльшаго единицы, мы обнаружили возможность для ихъ модулей измѣняться регулярно, и вся плоскость комплекснаго перемѣннаго независимаго разбивается тамъ на секторы съ *строго опредѣленнымъ характеромъ* роста функцій.

Для функцій безконечнаго порядка такая регулярность исчезаетъ, и среди нихъ можно найти функціи самаго причудливаго роста, настолько подчасъ причудливаго, что свойства такихъ функцій кажутся невѣроятными или парадоксальными.

Выше, напр., мы изучали функцію $\Phi(z)$ порядка роста ниже $\frac{1}{2}$ и мы открыли, что такая функція обладаетъ способностью *всюду возрастать*, если мы движемся вдоль линіи z, не пересѣкающей нулей ея. Если мы возьмемъ теперь и построимъ функцію

$$\Psi(z)=e^{-\Phi(z)},$$

то получимъ тоже довольно любопытную функцію: 1^{0} она не имѣетъ на конечной части плоскости нулей (ея нуль есть $+\infty$); 2^{0} она—такова, что ея модуль

$$\left| e^{-\Phi(z)} \right|$$

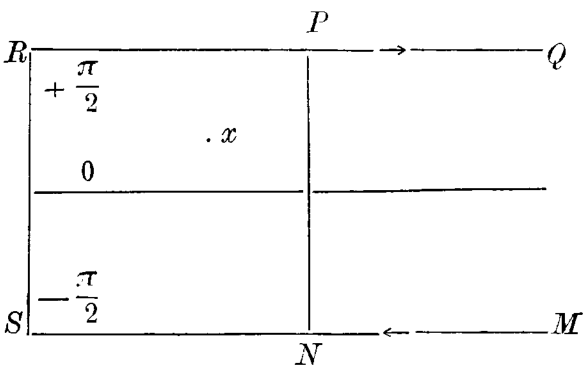
никогда не возрастаетъ, ибо возьмемъ какой угодно секторъ, выходящій изъ начала координата, и мы всегда увидимъ, что функція стремится къ нулю, если только на взятомъ нами лучѣ не встрѣчаются нулевыя точки функцій $\Phi(z)$, такъ какъ тогда $|\ \Psi(z)\ | = 1$, но, какъ нули не представляютъ собой точекъ *сплошь* заполняющихъ лучи, то между нулевыми точками мы тоже будемъ наблюдать колебанія, обусловленныя стремленіемъ роста.

Другой сортъ функцій тоже, съ точки зрѣнія роста ихъ, чрезвычайно необыкновенныхъ мы встрѣчаемъ у *Mittag-Leffler*'а. (Verhandlangen des III—ten Internationalen Mathematiker Kongresses zu Heidelberg, 1904. p. 260 и слѣд.).

Вотъ, напр., функція $\Omega(x)$, которую мы строимъ его методомъ, и свойства которой сейчасъ обрисуемъ.

Возьмемъ интегралъ вида

$$\Omega(x) = \int_{\Sigma_1} \frac{e^{-e^z} \,.\, dz}{z - x} \qquad (1)$$



причемъ интегралъ распространенъ вдоль контура *MNPQ*, и точка x лежитъ налѣво относительно контура *MNPQ*. Въ этомъ случаѣ $\Omega(x)$ есть цѣлая трансцендентная функція, если при условіи

$$|\ e^{-e^{x+iy}}\ | = |\ e^{-e^x\,(Cosy+iSiny)}\ | = e^{-e^x\,Cosy}$$

возьмемъ для y предѣлы

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < y < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (2);$$

и слѣд. за контуръ $\Sigma_1 = MNPQ$ выберемъ контуръ, образованный линіей ортогональной къ оси реальныхъ значеній, заключенной между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, и двумя безконечными линіями PQ и NM.

Если теперь мы заставимъ x стремиться къ безконечности въ пространствѣ *налѣво* относительно контура $MNPQ$, то

$$\left\{\begin{array}{l} \lim \mid \Omega(x) \mid = 0 \qquad (3) \\ \mid x \mid = \infty \text{ въ пространствѣ налѣво относительно контура } \Sigma_1. \end{array}\right.$$

Если же мы возьмемъ x *внутри* контура Σ_1 и заставимъ также $\mid x \mid$ расти до $+\infty$, то несомнѣнно тоже интегралъ отъ функціи нами взятой въ этомъ случаѣ также будетъ стремиться къ нулю.

Возьмемъ теперь контуры $\Sigma \equiv MSRQ$, и слѣд. x лежитъ *внутри его*, тогда, имѣя въ виду *направленіе* интеграціи, можно записать символически:

$$(MNPQ) \equiv (MSRQ) + (MPRS).$$

Замѣтимъ, что здѣсь въ этомъ равенствѣ идетъ рѣчь о путяхъ интеграціи и ихъ направленіяхъ.

Пусть

$$\sigma = (MPRS),$$

тогда согласно опредѣленію $\Omega(x)$:

$$\Omega(x) = \int\limits_{(\sigma)} \frac{e^{-e^z}\, dz}{z - x} + \int\limits_{\Sigma} \frac{e^{-e^z}\, dz}{z - x}$$

или

$$\Omega(x) = e^{-e^x}. + \int\limits_{\Sigma} \frac{e^{-e^z}.dz}{z - x} \qquad (4).$$

Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующему выводу:

Функція $\Omega(x)$ при x стремящемся къ безконечности въ положительномъ направленіи удовлетворяетъ условію

$$(*)\qquad \lim \mid \Omega(x) - e^{-e^{x}} \mid = 0;$$

при $\mid x \mid$ стремящемся къ ∞ въ отрицательномъ направленіи

$$\Omega(x) = \int\limits_{\Sigma_1} \frac{e^{-e^z}dz}{z-x},$$

при чемъ $\mid \Omega(x) \mid$ при ростѣ $\mid x \mid$ въ этомъ случаѣ также стремится къ нулю.

Отсюда мы выводимъ рядъ чрезвычайно интересныхъ слѣдствій относительно функціи $\Omega(x)$; напр. 1^0 вдоль оси реальныхъ значеній $\Omega(x)$ при x стремящемся къ $-\infty$ убываетъ; тоже самое нужно сказать относительно x—овъ положительныхъ о разности (*). 2^0 Въ виду существованія формулы (2) мы можемъ построить сколь-угодно много контуровъ подобныхъ нами взятому, и функція $\Omega(x)$ будетъ обладать тѣми же самыми свойствами, т. е. иными словами мы построили функцію съ очень любопытными свойствами, подобной въ нѣкоторомъ отношеніи нашей $\Psi(z)$, именно: $\Omega(x)$ *убываетъ почти всегда на плоскости вдоль какого-бы луча* $\varphi(0<\varphi<2\pi)$ x *не стремилось къ безконечности.*

Такимъ образомъ свойства функцій безконечнаго порядка, какъ мы видимъ, въ высшей степени—оригинальны и интересны: существуютъ функціи. модуль коихъ *вдоль всѣхъ радіусовъ—лучей* возрастаетъ и обратно; очевидно можно построить и другія еще болѣе причудливыя; обращаемъ вниманіе читателя, напр., на функцію *Malmquist'*а (Acta Math. 29, p. 203—210). Интересной проблемой теперь для математики была бы такая: *объяснить причину этого явленія.*

Послѣ того, какъ мы познакомились уже достаточно съ законами роста функцій, съ различными типами функцій и ихъ свойствами, является интереснымъ изучить функціи (ихъ ростъ и ихъ свойства) *вполнѣ правильно растущія.* Разумѣется, терминъ „правильно растущій"—нѣсколько неясенъ: вѣдь и функціи конечнаго цѣлаго порядка, безъ нулей особенно, являются въ сущности очень правильно растущими; поэтому мы обращаемъ вниманіе читателя на то, что подъ *вполнѣ правильно растущими* функціями мы будемъ понимать функціи, модуль $M(r)$ коихъ связанъ условіемъ

$$(a) \qquad e^{r^{\rho-\eta}} < M(r) < e^{r^{\rho+\eta}}, \ \eta = \text{безк. малое},$$

или функціи, нули коихъ связаны условіемъ

$$(b) \qquad n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < |\,a_n\,| < n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \ \varepsilon = \text{безк. малое},$$

и слѣд. мы ограничиваемся функціями *конечнаго* только порядка.

23. *Правильно растущія функціи конечнаго порядка.* Прежде всего замѣтимъ, что изслѣдованія наши въ главѣ I-й въ сущности относились уже къ функціямъ правильно растущимъ, ибо они покоились, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться, на принципѣ:

(A). *„Правильно растущія функціи обладаютъ правильно растущими рядами, ихъ выражающими."*

Правильно растущій рядъ здѣсь есть тотъ, коэффиціенты котораго растутъ по *одному и тому же закону*, и въ рядѣ или вовсе нѣтъ пустотъ, или онѣ есть, но недостающіе члены идутъ правильными интервалами.

Изъ нашихъ изслѣдованій предыдущихъ это вытекаетъ непосредственно: обращаемъ вниманіе читателя на параграфъ первый главы первой настоящей работы.

Но еще одно свойство такихъ функцій несомнѣнно характерно: такія функціи могутъ быть изучаемы, какъ предѣлы полиномовъ

$$g_1(z),\ g_2(z), \dots,\ g_n(z), \dots,$$

такъ что

$$\lim_{n=\infty} g_n(z) = f(z);$$

если $f(z)$—функція правильная, и слѣд. *многія свойства* $f(z)$ *заключены уже въ свойствахъ полиномовъ*; напоминаемъ читателю о принципѣ (b) въ § 1 главы I-й.

Пользуясь ими, (т. е. A и (b)) какъ мы это дѣлали уже выше, для ряда правильно растущаго

$$f(z)=1+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots \qquad (1),$$

мы сейчасъ же можемъ утверждать, что n—ый нуль $f(z)=0$ въ кругѣ радіуса$=r$ связанъ условіемъ:

$$|a_n| \backsim \left|\frac{1}{\alpha_n}\right|^n,$$

если α_n—n—ый нуль.

Отсюда, пользуясь законами (D, 4, I), (F, 5, I) и (K, 6, I), мы узнаемъ все, зная ростъ одной изъ величинъ: модуля функціи $f(z)$, модуль коэффиціента a_n или модуль n—го нуля α_n.

Но—повторяемъ—самое то обоснованіе законовъ D, F м K, напр., предполагаетъ уже *предпосылку* принципа (A).

Интересныя теоремы о правильныхъ функціяхъ можно вывести, основываясь на характерѣ роста *только* модуля функціи или *только* нулей въ силу законовъ (D, 4, I), (F, 5, I) и (K, 6, I); напр.

(B). *„Произведеніе двухъ правильно растущихъ функцій $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, порядки сходимости коихъ для нулей соотвѣтственно суть ϱ_1 и ϱ_2, есть функція $\varphi(z)$, порядокъ сходимости коей для нулей есть ϱ_1, если $\varrho_1>\varrho_2$.“*

Теорема почти не нуждается въ доказательствѣ: если α_i суть нули $\varphi_1(z)=0$, β_i—нули $\varphi_2(z)=0$, то изъ опредѣленія понятія „порядокъ сходимости“ непосредственно имѣемъ

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{\alpha_n}\right|^{\rho_1+\varepsilon} \equiv \text{сход. рядъ}, \quad \sum_1^\infty \left|\frac{1}{\beta_n}\right|^{\rho_1+\varepsilon} \equiv \text{сход. рядъ},$$

ибо $\varrho_1>\varrho_2$, и α_i и β_i суть нули $\varphi(z)=0$.

А вотъ другая теорема, тоже почти очевидная:

(C). **Теорема.** „*Если нули* $\varphi_1(z)$—*суть вполнѣ правильно растущіе* (**по одному и тому же закону**) *порядка роста* ρ_1, *а нули* $\varphi_2(z)=0$ *суть тоже вполнѣ правильно растущіе порядка роста* ρ_2, *то нули произведенія* $\varphi(z)=\varphi_1(z).\varphi_2(z)$ *суть уже неправильно растущіе.*"

Дѣйств., по опредѣленію

$$n^{\rho_1-\varepsilon} < |\alpha_n| < n^{\rho_1+\varepsilon},\ \alpha_n\text{—нули } \varphi_1(z)=0;$$
$$n^{\rho_2-\eta} < |\beta_n| < n^{\rho_2+\eta},\ \beta_n\text{—нули } \varphi_2(z)=0.$$

Пусть теперь γ_n—n—ый нуль (нули расположены въ возрастающемъ порядкѣ) функціи $\varphi(z)=0$, тогда изъ

$$\rho_1 > \rho_2$$

мы имѣемъ

$$|\gamma_n| \leqq |\alpha_n|,$$

и слѣд.

$$|\gamma_n| < n^{\rho_1+\varepsilon} \qquad (o).$$

Съ другой стороны, если мы расположимъ нули γ_n въ возрастающій рядъ относительно ихъ модулей, то $|\gamma_n| \geqq |\beta_n|$, и слѣд. во всякомъ случаѣ

$$n^{\rho_2-\eta} < |\gamma_n|,$$

такъ что

$$n^{\rho_2-\eta} < |\gamma_n| < n^{\rho_1-\varepsilon}$$

и мы видимъ, что здѣсь уже не наблюдается закономѣрности роста *вполнѣ правильно растущихъ* нулей, ибо вмѣсто предыдущаго неравенства можетъ существовать и такое:

$$n^{\rho_2-\eta} < |\gamma_n| < n^{\rho_2+\eta}$$

для какого-либо n.

Теперь въ силу закона (6, *K*, I) *асимптотически*:

$$|\varphi_1(z)| \backsim e^{r^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon}},\ |\varphi_2(z)| \backsim e^{r^{\frac{1}{\rho_2}+\varepsilon}},$$

и мы видимъ, что асимптотически

$$| \varphi(z) | \backsim e^{r^{\frac{1}{\rho_2}+\eta}}, \; (\eta = \text{безк. малое})$$

т. е. модуль произведенія функціи $\varphi(z)$ слѣдуетъ закону роста той функціи, у которой нули *болѣе густо* расположены. Но является вопросъ: въ чемъ же состоитъ вліяніе функціи $\varphi_1(z)$, если модуль $\varphi(z)$ обусловленъ функціей $\varphi_2(z)$? На это замѣтимъ, что нужно изучать помимо maximum'а $| \varphi(z) |$ его *minimum*'ъ еще, т. е. нужно смотрѣть еще на функціи

$$e^{-r^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon}} \text{ и } e^{-r^{\frac{1}{\rho_2}+\varepsilon}},$$

и слѣд. въ тѣхъ частяхъ плоскости, въ которыхъ превалируетъ модуль $e^{-r^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon}}$, мы замѣтимъ вліяніе функцій $\varphi_1(z)$, а слѣд. въ тѣхъ частяхъ плоскости нули будутъ расти по закону роста нулей $\varphi_1(z)=0$.

Отсюда между прочимъ мы видимъ, какъ сложно и трудно усчитать вліяніе той и другой функціи, и какъ законы асимптотическіе, выведенные нами выше, являются мало говорящими о природѣ функціи, являющейся результатомъ комбинацій нѣсколькихъ функцій *различнаго роста*; но проблемѣ упрощается значительно, если мы имѣемъ дѣло съ функціями *одного и того-же роста*; такъ, напр., мы безъ труда показали бы теорему:

(D) **Теорема.** *Произведеніе функцій $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, изъ коихъ каждая вполнѣ правильно растущая порядка ρ относительно роста ихъ нулей* (**безъ общихъ нулей**), *есть тоже вполнѣ правильно растущая порядка роста ρ относительно нулей.*"

Предоставляемъ это сдѣлать самому читателю.

Вотъ еще теорема тоже довольно очевидная:

(E). **Теорема.** „*Если $\varphi_1(z)$—функція съ нулями вполнѣ правильно растущими порядка роста ρ_1, а $\varphi_2(z)$—съ не-*

правильно растущими порядка $\varrho_2 > \varrho_1$, *то* $\varphi(z) = \varphi_1(z).\varphi_2(z)$ — *также неправильно растущая относительно нулей."*

Доказательство ея—просто; замѣтимъ только, что функцію порядка ϱ_2 относительно нулей *неправильно* растущую опредѣляютъ тѣмъ, что она не удовлетворяетъ условію

$$n^{\rho_2-\eta} < |\beta_n| < n^{\rho_2+\eta},$$

наоборотъ возможны отъ этого неравенства отступленія въ томъ смыслѣ, что можетъ быть

$$n^{\rho_2-\eta} > |\beta_n|$$

(для безконечно большого числа индексовъ n).

Въ этомъ случаѣ очевидно ($\varrho_2 > \varrho_1$)

$$|\gamma_n| \leqslant |\beta_n|,$$

а слѣд.

$$n^{\rho_2-\eta} > |\beta_n| \geqslant |\gamma_n|,$$

т. е. $\varphi(z)$—тоже неправильно растущая относительно нулей.

Въ общемъ все-же мы должны признать, что правильность роста нулей функціи не поддается легко усчитыванію.

Хорошимъ дополненіемъ къ этому параграфу являются наши параграфы 1 и 2 гл. I-й, а также 19-й главы II-й. Этимъ мы закончимъ нашу главу вторую; въ слѣдующей главѣ мы дадимъ нѣсколько спеціальныхъ примѣровъ, имѣющихъ цѣлью указать, какими методами нужно изучать иногда произведенія типа Вейерштрасса.

Глава III-я.

Нѣкоторые спеціальные примѣры изученія произведеній Вейерштрасса.

1. *Выводъ асимптотической формулы для произведенія*

$$\Pi_m = \Gamma(2).\Gamma(3)\ .\ .\ .\ .\ .\ \Gamma(m+1) \qquad (1)$$

при *m—достаточно большомъ.*

Въ одномъ изъ примѣровъ, который мы будемъ изучать, мы натолкнемся на интересную проблему: найти асимптотическую формулу для произведенія Π_m. Для рѣшенія вопроса будемъ исходить изъ формулы

$$Log\Gamma(x) = Log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)Logx - x + \frac{B_1}{1.2}x - \frac{B_3}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} +$$

$$+\ .\ ,\ .\ .\ .\ + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\ \frac{1}{x^{2k+1}} + J_k(x) \quad (2),$$

гдѣ

$$J_k(x) = \frac{(-1)^k}{x^{2k+1}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+\frac{t^2}{x^2}} Log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)dt \qquad (3)$$

(См. р. 89 и 97 „Calcul des résidus, *Lindelof*)“.

Также намъ понадобится формула суммированія *Euler'a*:

$$\sum_{1}^{x} f(n) = \int_{1}^{x} f(x)dx - \Big|_{1}^{x} \frac{1}{2} f(x) + \frac{B_1}{2} \Big|_{1}^{x} f'(x) - \frac{B_3}{4!} \Big|_{1}^{x} f'''(x) +$$

$$+ \, . \, . \, . \, . \, . + (-1)^{p+1} \frac{B_{2p-1}}{2p!} \Big|_{1}^{x} \overset{(2p-1)}{f}(x) +$$

$$+ (-1)^{p+1} \theta . \frac{B_{2p-1}}{2p!} \Big|_{1}^{x} \overset{(2p-1)}{f}(x). \qquad (4).$$

(См. *Тихомандрицкій* „Конечныя разности“, р. 176).

Рядъ

$$J(x) = \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4} \frac{1}{x^3} + \, . \, . \, . \, . \, . +$$

$$+ (-1)^{k-1} . \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{1}{x^{2k+1}} + \qquad (5),$$

продолженный до безконечности, конечно, расходится, а потому, продолжая его, *нужно остановиться* тогда, когда члены ряда начнутъ убывать.

Примѣняя формулу (1) къ нашей проблемѣ, мы получаемъ рядъ слѣдующихъ членовъ:

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
&Log\Gamma(m+1)=Log\sqrt{2\pi}+\left(\overline{m+1}-\frac{1}{2}\right)Log(m+1)-\\
&\qquad -(m+1)+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{m+1}-\frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{(m+1)^3}+\\
&\qquad +\frac{B_5}{5.6}\cdot\frac{1}{(m+1)^5}+\ .\ .\ .\ .\ .\\
&Log\Gamma(m)=Log\sqrt{2\pi}+\left(m-\frac{1}{2}\right)Logm-m+\\
&\qquad +\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{m}-\frac{B_3}{3.4}\cdot\frac{1}{m^3}+\ .\ .\ .\ .\ .\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&Log\Gamma(3)=Log\sqrt{2\pi}+\left(3-\frac{1}{2}\right)Log3-3+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\\
&\qquad -\frac{B_3}{3.4}\cdot\frac{1}{3^3}+\ .\ .\ .\ .\ .\\
&Log\Gamma(2)=Log\sqrt{2\pi}+\left(2-\frac{1}{2}\right)Log2-2+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}-\ldots\\
&Log\Gamma(1)=Log\sqrt{2\pi}-1+\frac{B_1}{1.2}+\ .\ .\ .\ .\ .
\end{aligned}
\right.
$$

Чтобы показать читателю, что дѣйствительно можно пользоваться расходящимися рядами въ нашемъ случаѣ, но *осмотрительно*, имѣя въ виду выше сдѣланное замѣчаніе, мы рекомендуемъ ему продѣлать подсчетъ, напр. хоть $Log\,\Gamma(2)$, который есть нуль. Если мы не будемъ гнаться за большой точностью и возьмемъ лишь первыхъ 6 членовъ ряда, то получимъ для

$$Log\Gamma(2)=Log_e\sqrt{2\pi}+\frac{3}{2}Log_e2-2+\frac{1}{24}-\frac{1}{30.3.4}\cdot\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{1}{42}\ \frac{1}{5.6.32}=0{,}00019,$$

т. е. ошибка—чрезвычайно мала.

Суммируя далѣе формулы (6), мы получаемъ

$$(7)\quad \begin{cases} Log\left\{\Gamma(2).\Gamma(3)\ \ldots\ldots\ldots\ \Gamma(m+1)\right\}= \\ =Log\left\{(2!)(3!)(4!)\ldots\ldots\ldots(m!)\right\}= \end{cases}$$

$$=(m+1)Log\sqrt{2\pi}+\sum_{1}^{m+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)Logk-$$

$$(8)\quad \begin{cases} -\frac{(m+1)(m+2)}{2}+\frac{B_1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{(m+1)}\right)- \\ -\frac{B_3}{3.4}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ \ldots\ +\frac{1}{(m+1)^3}\right)+ \\ +\frac{B_5}{5.6}\left(1+\ \ldots\ +\frac{1}{(m+1)^5}\right)+R_7 \end{cases}$$

Членъ R_7—несомнѣнно малъ, но мы не входимъ въ его точную оцѣнку.

Далѣе по формулѣ (4) имѣемъ:

$$\sum_{1}^{m+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)Logk=\int_{1}^{m+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)Logx-\frac{1}{2}\Big|_{1}^{m+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)Logx+$$

$$+\frac{B_1}{2}\Big|_{1}^{m+1}\left(Logx+1-\frac{1}{2x}\right)+\frac{B_3}{4!}\Big|_{1}^{m+1}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)-$$

$$-\frac{B_5\theta}{6!}\Big|_1^{m+1}\left(\frac{2.3}{x^4}+\frac{3.4}{x^5}\right),$$

и какъ

$$\int\left(x-\frac{1}{2}\right)Logxdx=\left(C+\frac{1}{2}x^2Logx-\frac{1}{2}xLogx-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2},\right.$$

то

$$\sum_1^{m+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)Logk=\frac{1}{2}\left(m^2+m\right)Log\left(m+1\right)-\frac{m^2-1}{4}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)Log(m+1)+\frac{1}{12}\left(Log(m+1)-\frac{1}{2(m+1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{30.4!}\left(\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^3}\right)-\frac{\theta}{42.6!}\left(\frac{2.3}{(m+1)^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{3.4}{(m+1)^5}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{2}{4!30}+\theta_1=$$

$$=\left(\frac{m^2}{2}-\frac{1}{6}\right)Log(m+1)-\frac{m^2-1}{4}+\varepsilon\,(m)-\frac{19}{6}+\theta_1,\ (8),$$

причемъ

$$\lim_{m=\infty}\varepsilon(m)=0,\ \theta_1<\frac{2}{1680}=\frac{1}{840},$$

какъ показываетъ вычисленіе члена

$$-\frac{B_5}{6!}\left(\frac{2.3}{x^4}+\frac{3.4}{x^5}\right).$$

Затѣмъ

$$\sum_1^{m+1}\frac{1}{k}-Log(m+1)<C\ \text{(Euler'овская постоянная)},$$

такъ что

$$\sum_{1}^{m+1}\frac{1}{k}-Log(m+1)=\theta_0 C,\quad \theta_0<1 \tag{9}$$

Аналогично при помощи той же формулы (4) находимъ:

$$\sum_{1}^{m+1}\frac{1}{k^3}=-\frac{1}{2}\ \frac{1}{(m+1)^4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+1)^3}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\left(-\frac{3}{(m+1)^4}+3\right)+\frac{3.4.5}{30.4!}\left(\frac{1}{(m+1)^6}-1\right)+$$

$$+\frac{(\theta_2+1)}{42.6!}\left(1-\frac{1}{(m+1)^8}\right)3.4.5.6.7=\varepsilon_3(m)+\frac{5}{4}+$$

$$+\frac{(\theta_2+1)}{12},\quad \theta_2<1$$

$$\sum_{1}^{m+1}\frac{1}{k^5}=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{(m+1)^4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+1)^5}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\left(-\frac{5}{(m+1)^6}+5\right)+\frac{1}{30.4!}\left(\frac{5.6.7}{(m+1)^8}-5.6.7\right)+$$

$$+\frac{(\theta_5+1)}{42.6!}\left(5.6.7.8.9-\frac{5.6.7.8.9}{(m+1)^{10}}\right),\ \theta_5<1,$$

т. е.

$$\sum_{1}^{m+1}\frac{1}{k^5}=\varepsilon_5(m)+\frac{21}{24}+\frac{\theta_5+1}{2},\quad \lim_{m=\infty}\varepsilon_5(m)=0.$$

Принимая во вниманіе добытые результаты, мы представляемъ формулу (7) въ такой формѣ:

$$Log\left\{\Gamma(1).\,\Gamma(2).\,\Gamma(3)\;.\;.\;.\;.\;.\;\Gamma(m+1)\right\}=$$

$$=(m+1)Log\sqrt{2\pi}-\frac{(m+1)\,(m+2)}{2}+$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}-\frac{1}{6}\right)Log(m+1)-\frac{m^2-1}{4}+\varepsilon(m)-\frac{19}{6}+\frac{(\theta+1)}{1680}+$$

$$+\frac{1}{12}\Big(Log(m+1)+\theta_0 C\Big)-\frac{1}{30.12}\left(\varepsilon_3(m)+\frac{5}{4}+\frac{\theta_2+1}{12}\right)+$$

$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{30}\left(\varepsilon_5(m)+\frac{21}{24}+\frac{\theta_5+1}{2}\right)=$$

$$=(m+1)Log\sqrt{2\pi}-\frac{(m+1)\,(3m+3)}{4}+$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}-\frac{1}{12}\right)Log(m+1)+K+E(m),$$

где $K=const.,\ \lim\limits_{m=\infty}.\,E(m)=0.$

Послѣднюю формулу мы запишемъ *асимптотически* такъ:

$$\Gamma(1).\Gamma(2)\;.\;.\;.\;.\;.\;\Gamma(m+1)=$$

$$=(2\pi)^{\frac{m+1}{2}}.\,(m+1)^{\frac{6m^2-1}{12}}.\;e^{-\frac{3}{4}(m+1)^2\,(1+\eta(m))}$$

$$\lim_{m=\infty}\eta(m)=0$$

Мы видимъ, что формулу (9) можно еще такъ записать:

$$\Gamma(1).\Gamma(2)\;.\;.\;.\;\Gamma(m+1)\backsim(2\pi)^{\frac{m}{2}}.\,m^{\frac{m^2}{2}}\;e^{-\frac{3}{4}m^2}\qquad(10).$$

Между прочимъ формулу (10) нельзя считать хорошей: она довольно точно даетъ результатъ искомаго произведенія, но изъ нея не удается получить формулу *Стирлинга* въ ея обычной формѣ, ибо

$$\Gamma(m+1) = \frac{\Gamma(1).\Gamma(2)\ .\ .\ .\ \Gamma(m+1)}{\Gamma(1)\ .\ .\ .\ \Gamma(m)} \backsim \sqrt{2\pi\ .\ m^m . e^{-\frac{3}{2}m}}$$

и слѣд.

$$\left(\frac{m!}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \backsim e^{-\frac{3}{2}},\text{ тогда какъ по Стирлингу}$$

$$\sqrt[m]{\frac{m!}{m}} \backsim \frac{1}{e}\ .$$

Объясняется это разногласіе вѣроятно методомъ, носящимъ у насъ асимптотическій характеръ. Но если мы будемъ, считать еще болѣе асимптотически, т. е. будемъ принимать во вниманіе лишь *наибольшіе члены* въ отдѣльныхъ членахъ нашихъ формулъ (7) и (8), то увидимъ, что

$$Log\left\{\Gamma(1).\Gamma(2)\ .\ .\ .\ \Gamma(m+1)\right\} = (m+1)Log\sqrt{2\pi} -$$

$$-\frac{(m+1)\,(m+2)}{2} + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{1}{6}\right)Log(m+1) \backsim$$

$$\backsim mLog\sqrt{2\pi} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2}Logm\ ,$$

откуда

$$\Gamma(1).\Gamma(2)\ .\ .\ .\ \Gamma(m+1) = \left(\sqrt{2\pi}\ \right)^m.\ m^{\frac{m^2}{2}}.\ e^{-\frac{m^2}{2}} \qquad (11).$$

Какъ *асимптотическія*, формулы (10) и (11)—равнозначны, и потому мы возьмемъ формулу (11) тѣмъ болѣе, что изъ нея мы получимъ уже *обычную формулу Стирлинга.*

2. *Изученіе функціи*

$$\Phi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n!}\right) \qquad (1).$$

Функцію $\Phi(z)$ мы взяли какъ примѣръ изученія съ цѣлью показать одинь довольно общій методъ изученія произведеній типа Вейерштрасса.

Удобнѣй изучать

$$Log\Phi(z)=\sum_{1}^{\infty}{}^{n}\, Log\left(1+\frac{z}{n!}\right) \qquad (2).$$

Пусть далѣе

$$m!<|z|<(m+1)! \qquad (3),$$

тогда очевидно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} Log\left(1+\dfrac{z}{n!}\right)=\dfrac{z}{n!}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{n!}\right)^{2}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z}{n!}\right)^{3}-\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad |z|<n! \end{array}\right\} \quad (4),$$

$$Log\left(1+\frac{z}{n!}\right)=Logz-Logn!+Log\left(1+\frac{n!}{z}\right),\ |z|>n! \quad (5),$$

такъ что

$$Log\Phi(z)=mLogz-Log\left\{1.(2!)\,(3!)\ \ldots\ .(m!)\right\}+$$

$$+\sum_{1}^{m}{}^{n}\, Log\left(1+\frac{n!}{z}\right)+\sum_{m+1}^{\infty}{}^{n}\, Log\left(1+\frac{z}{n!}\right)=$$

$$=mLogz-Log\left\{\Gamma(1).\Gamma(2)\ \ldots\ \Gamma(m+1)\right\}+$$

$$+\frac{1}{z}\sum_{1}^{m}k!-\frac{1}{2z^{2}}\sum_{1}^{m}(k!)^{2}+\frac{1}{3z^{3}}\sum_{1}^{m}(k!)^{3}-$$

$$- \ldots\ldots + z\sum_{m+1}^{\infty}{}^{k}\frac{1}{k!} - \frac{z^2}{2}\sum_{m+1}^{\infty}{}^{k}\left(\frac{1}{k!}\right)^2 + \frac{z^3}{3}\sum_{m+1}^{\infty}{}^{k}\left(\frac{1}{k!}\right)^3 -$$

На основаніи формулы (11) предыдущаго параграфа имѣемъ:

$$Log\Phi(z) = mLogz - \frac{m}{2}Log(2\pi) - \frac{m^2}{2}Logm + \frac{m^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{z}\sum_{1}^{m}(k!) - \frac{1}{2z^2}\sum_{1}^{m}(k!)^2 - \ldots\ldots + z\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k!} -$$

$$-\frac{z^2}{2}\sum_{m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)^2 + \ldots\ldots \qquad (6)$$

Выберемъ теперь z такъ, чтобы

$$\left|\frac{z}{m!}\right| = 1 \qquad (7)$$

Пусть на время $z > o$ (реально), тогда изъ асимптотическаго ур-ія

$$z \backsim m^m e^{-m} \, . \sqrt{2\pi}$$

находимъ, что

$$m = \frac{Log\left(\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right)}{LogLog\left(\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right)} \qquad (8).$$

Далѣе

$$\sum_{1}^{m}(k!) = m!\left\{1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\right\} = m!(1 + \psi_1(m))$$

$$\lim_{m=\infty} \psi_1(m) = 0$$

$$\sum_{1}^{m}(k!)^2 = (m!)^2\left\{1+\psi_2(m)\right\}, \quad \lim_{m=\infty}\psi_2(m)=0,$$

и т. д., такъ что

$$\frac{1}{z}\sum_{1}^{m}k! - \frac{1}{2z^2}\sum_{1}^{m}(k!)^2 + \ldots = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\right)+\xi(z)$$

$$\lim_{|z|=\infty}\xi(z)=0$$

въ силу условія (7); иначе говоря

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{1}{pz^p}\sum_{k=1}^{k=m}(k!)^p = Log 2+\xi(z) \\ \displaystyle\lim_{|z|=\infty}|\xi(z)|=0\end{array}\right\} \qquad (9).$$

Нетрудно видѣть также, что

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{\overline{m+1}!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\ldots\ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(m+1)m!}\left(1+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\ldots\ldots\right) = \frac{1}{m!m},$$

и слѣд.

$$\lim_{z=\infty}\left|z\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right| \leqq \frac{z}{m!m} = 0.$$

По аналогіи очевидно вообще

$$\lim_{|z|=\infty}\left|z^2\sum_{m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)^2\right| = 0$$

и т. д.

Окончательно слѣдовательно находимъ

$$LogΦ(z)=mLogz-mLog\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}m^2Logm+\frac{1}{2}m^2+\tau(m)=$$

$$=mLogz-\frac{1}{2}m^2Logm\Big(1+\sigma(m)\Big),\ \lim_{m=\infty}\sigma(m)=0,$$

а въ силу (8) мы находимъ, пренебрегая конечными факторами:

$$LogΦ(z)=\frac{(Logz)^2}{LogLogz}-\frac{1}{2}\frac{(Logz)^2}{(LogLogz)^2}\cdot LogLogz\Big(1+\tau(z)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(Logz)^2}{(LogLogz)}\Big(1+\tau_1(z)\Big),\ \lim_{z=\infty}\tau_1(z)=0,$$

и слѣд. для реальнаго $z>o$ имѣемъ

$$Φ(z)=z^{\frac{logz}{log(logz)^2}} \qquad (10).$$

На методъ, которымъ мы получили формулу (10), мы обращаемъ вниманіе читателя въ виду его практической полезности.

Формула (10) выведена въ предположеніи z реальнаго и большаго нуля, но она даетъ представленіе о ростѣ функціи $Φ(z)$ вообще до извѣстной степени: для z съ модулемъ очень большимъ она, быть можетъ, даже есть вѣрное асимптотическое выраженіе; но это изслѣдованіе, требующее деликатныхъ соображеній, мы оставляемъ въ сторонѣ.

Формула (10) при $z=r$ можетъ дать также нѣкоторое довольно близкое представленіе о числѣ корней $Φ(z)=0$ въ кругѣ радіуса$=r$.

3. Вліяніе аргументовъ нулей на ростъ модуля каноническаго произведенія Вейерштрасса.

Роль и вліяніе аргументовъ нулей на ростъ функціи, вообще говоря, трудно изучаемо, и въ данномъ параграфѣ мы лишь слегка задѣнемъ эту трудную проблему на примѣрѣ изученія каноническихъ произведеній Вейерштрасса. Возьмемъ сначала функцію нулевого genre'а

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \qquad (1).$$

Отсюда

$$\left|\varphi(z)\right| = \prod_{1}^{\infty}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| = \prod_{1}^{\infty}\frac{\varrho_{n,z}}{|a_n|} \qquad (2),$$

если $\varrho_{n,z}$ — разстояніе точки z отъ n—го нуля a_n.

Между прочимъ изъ (2) мы замѣчаемъ непосредственно, ища max. $|\varphi(z)|$ на кругѣ радіуса $=r=|z|$, что этотъ maximum зависитъ и обусловленъ maximum'омъ фактора $\varrho_{n,z}$; но отвѣтъ на послѣднюю проблему—ясенъ: $\varrho_{n,z}$ — maximum, когда z дальше удалено отъ n-го нуля, а при данномъ $|z|=r$, когда разность аргументовъ φ и φ_n есть π, если $z=re^{i\varphi}$ и $a_n=r_ne^{i\varphi_n}$. Поэтому можно утверждать справедливость слѣдующей теоремы:

(A_1) **Теорема**. *Если нули $\varphi(z)$—функціи genre'а нуль лежатъ всѣ внутри угла*

$$\psi_0<\varphi_n<\psi_1<\pi,\ n=1,2,3,\ .\ .\ .\ .\ ,\infty,$$

то maximum $|\varphi(z)|$ на периферіи круга радіуса $=r=|z|$ находится на дугѣ противоположной дугѣ $(\psi_1-\psi_0)$ периферіи круга.

Эта теорема, несмотря на свою простоту,—интересна.

Дадимъ обобщеніе только что данной теоремы!

Пусть теперь

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_n}\right)\ e^{\frac{z}{a_n}+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\frac{z^p}{pa_n^p}} \qquad (3),$$

и если порядокъ сходимости нулей есть ϱ, причемъ

$$p<\varrho<p+1 \qquad (4),$$

то при

$$| a_m | < | z | < | a_{m+1} | \qquad (5)$$

мудуль $\varphi(z)$ есть

$$\left|\varphi(z)\right| = \prod_1^m \frac{\varrho_{n,z}}{|a_n|} \left| e^{\frac{z}{a_n}+\dots+\frac{z^p}{pa_n^p}} \right| \left| \prod_{m+1}^{\infty} \right| e^{-\frac{z^{p+1}}{(p+1)a_n^{p+1}} - \dots} \Bigg| =$$

$$= \left[\prod_1^m \frac{\varrho_{n,z}}{|a_n|} \right] e^{\sum\limits_1^m \left\{ \frac{r}{r_n} Cos(\varphi-\varphi_n) + \dots \frac{r^p}{r_n^p} Cos p(\varphi-\varphi_n) \right\}} \times$$

$$\times e^{-\frac{r^{p+1}}{p+1} \sum\limits_{m+1}^{\infty} \frac{Cos(p+1)(\varphi-\varphi_n)}{r_n^{p+1}} - \dots\dots} \qquad (6).$$

Предположимъ, что всѣ нули $\varphi(z)=0$ лежатъ внутри угла

$$\omega_1 < \varphi_n < \omega_2 \qquad (7)$$

Возьмемъ теперь r столь большимъ, чтобы превалирующимъ въ (6) былъ членъ

$$-\frac{r^{p+1}}{p+1} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{Cos(p+1)\,(\varphi-\varphi_n)}{r_n^{p+1}}\ ,$$

что—возможно, если $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{r_n^{p+1}} \neq 0.$

Пусть далѣе z движется по периферіи круга радіуса r; *въ какой части этой периферіи круга лежитъ maximum* $| \varphi(z) |$?

Первый факторъ указываетъ, что его нужно искать на дугѣ противоположной дугѣ $(\omega_2-\omega_1)$ нашей периферіи; третій-же факторъ говоритъ, что его нужно искать на тѣхъ дугахъ периферіи, принадлежащихъ секторамъ, для коихъ

$$-\sum_{m+1}^{\infty}\frac{Cos(p+1)(\varphi-\varphi_n)}{r_n^{p+1}}>0 \text{ или}$$

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{Cos(p+1)(\varphi-\varphi_n)}{r_n^{p+1}}<0 \qquad (8).$$

На основаніи соображеній параграфа 21-го главы II-ой мы можемъ все-же утверждать, что превалирующій третій факторъ въ (6) раздѣлитъ всю плоскость на $2(p+1)$ секторовъ, внутри коихъ модуль $|\varphi(z)|$ то убываетъ, то возрастаетъ попеременно, а потому имѣемъ:

(A_2) **Теорема**. *Если намъ дана функція genre'а p, то ея модуль maximu'мъ $|\varphi(z)|$ находится въ тѣхъ частяхъ дуги противоположной дугѣ $(\omega_2-\omega_1)$ периферіи круга радіуса r, которыя на ней будутъ вырѣзаны секторами, внутри коихъ $|\varphi(z)|$ возрастаетъ, причемъ предполагается, что нули $\varphi(z)=0$ лежатъ внутри угла*

$$\omega_1<\varphi_n<\omega_2,\ n=1,2,\ldots\infty.$$

Изученіе, которое мы только—что произвели, приводитъ насъ къ постановкѣ слѣдующей довольно общей проблемы:

Нельзя-ли указать методы и пріемы для рѣшенія вопроса *о существованіи у функціи какого-либо порядка (конечнаго, безконечнаго, нулевого) опредѣленныхъ секторовъ или даже только лучей—векторовъ и распредѣленіи тѣхъ и другихъ* на плоскости комплекснаго перемѣннаго, причемъ упомянутые секторы и лучи должны обладать тѣмъ свойствомъ, что модуль цѣлой функціи въ указанныхъ областяхъ остается ниже нѣкотораго конечнаго числа, напр., единицы?

Проблема такъ поставленная представляетъ несомнѣнный интересъ, и кромѣ того мы сейчасъ же замѣчаемъ ея близкое родство съ изслѣдованіями *Mittag-Leffler'a* и *Phragmen'a*.

Относительно цѣлыхъ функцій и ихъ свойствъ въ родѣ упомянутыхъ мы уже дали нѣсколько соображенiй, замѣчанiй и теоремъ (См., напр., § 21, гл. II).

Скажемъ теперь еще нѣсколько словъ относительно подобной проблемы въ отношенiи каноническихъ произведенiй: послѣднiя иногда непосредственно даютъ отвѣтъ на поставленную проблему, какъ это уже мы видѣли на теоремахъ (A_1) и (A_2) настоящаго параграфа.

Напр., если бы мы искали ту область плоскости комплекснаго перемѣннаго, на которой $|\varphi(z)| < 1$, причемъ $\varphi(z)$ опредѣлена формулой (1), то, какъ видно изъ структуры фактора

$$\left|1-\frac{z}{a_n}\right| = 1+\frac{r}{a_n} - 2\,\frac{r}{a_n}\,Cos(\varphi-\varphi_u)$$

minimum'ъ его будетъ при $\varphi-\varphi_n=0$, а отсюда заключаемъ, что

(A_3) **Теорема.** *Модуль функцiи* $\varphi(z)$, *опредѣленной ур-iемъ* (1), *долженъ принимать минимальныя значенiя вблизи линiи, соединяющей нули функцiи* (1).

А вотъ еще теорема, которая кажется съ перваго взгляда нѣсколько парадоксальной. Пусть намъ дана функцiя genre'a 1 вида

$$f(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\,e^{\frac{z}{a_n}} \qquad (9),$$

и пусть всѣ ея нули расположены внутри угла, если $a_n=r_n e^{i\varphi_n}$

$$-\frac{\pi}{4}<\varphi_n<+\frac{\pi}{4} \qquad (10)$$

$$(n=1,2,\ldots\infty).$$

Опредѣлимъ, въ какомъ секторѣ плоскости $|f(z)|<1$. Если $z=re^{i\varphi}$, то

$$Log\left|f(z)\right| = \sum_1^{\infty n}\left\{Log\left|1-\frac{z}{a_n}\right| + \left|\frac{z}{a_n}\right|\,Cos(\varphi-\varphi_n)\right\} \qquad (10').$$

Теперь, если мы требуемъ, чтобы

$$|f(z)| < 1$$

на опредѣленномъ лучѣ, то для этой области нужно, чтобы

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dLog\,|f(z)|}{dr} \leqslant 0 \\ \text{при какомъ угодно } r\end{array}\right\} \qquad (11).$$

Изучимъ сначала лишь факторъ

$$Log\left|E_n\right| = Log\left|1-\frac{z}{a_n}\right| + \frac{r}{r_n}\,Cos(\varphi-\varphi_n),$$

т. е. вмѣсто (11) изучимъ прежде

$$\frac{dLog\,|E_n|}{dr} = \frac{r-r_nCos(\varphi-\varphi_n)}{r^2+r^2_n-2rr_nCos(\varphi-\varphi_n)} + \frac{1}{r_n}\,Cos(\varphi-\varphi_n).$$

Полагая

$$\delta^2_n = r^2+r^2_n-2rr_nCos(\varphi-\varphi_n),$$

мы послѣ пустыхъ передѣлокъ находимъ:

$$\delta^2_n\,\frac{dLog\,|E_n|}{dr} = r\left\{-r_nCos2(\varphi-\varphi_n)+rCos(\varphi-\varphi_n)\right\} \;(12).$$

Пусть

$$\varphi-\varphi_n=\tau \qquad (13),$$

тогда

$$\delta^2_n\,\frac{dLog\,|E_n|}{dr} = -r\left\{r_nCos2\tau - rCos\tau\right\} \qquad (14).$$

Чтобы знаки сдѣлать въ скобкахъ $\{\ \}$ одинаковыми, мы положимъ

$$\tau=\omega+\pi \qquad (15),$$

такъ что

$$\delta_n^2 \frac{dLog \mid E_n \mid}{dr} = -r \left\{ r_n Cos 2\omega + r Cos \omega \right\} \qquad (16).$$

Отсюда уже видно, что (11) будетъ удовлетворено, если

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} < 2\omega < \frac{\pi}{2},$$

т. е. если

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{4} \qquad (17).$$

Изъ (17) при помощи (15) и (13) выводимъ

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{5\pi}{4} \text{ или } \frac{\pi}{2} < \varphi - \varphi_n < \frac{5\pi}{4} \qquad (18).$$

Неравенства (18) говорятъ намъ, что, если при существованіи (10) φ связано условіемъ

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_n < \varphi < \frac{5\pi}{4} + \varphi_n \text{ или } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \qquad (19),$$

то условіе (11) будетъ удовлетворено, и мы находимъ слѣдующій результатъ:

(A_4) **Теорема**. *Функція genre'а одинъ вида* (9) *имѣетъ свой модуль* $|f(z)|$ *убывающимъ и* <1 *на какомъ-нибудь лучѣ въ углу противоположномъ углу нулей, который опредѣленъ условіемъ* (10).

Результатъ—нѣсколько парадоксальный, ибо казалось бы, что такой областью должна быть область близкая къ нулямъ, между тѣмъ область съ такими лучами отброшена въ противоположную сторону углу нулей. Парадоксъ объясняется вліяніемъ экспоненціальнаго фактора.

4. **Нѣкоторыя теоремы алгебры и каноническія произведенія Вейерштрасса.**

Извѣстная теорема *Rolle*'я въ алгебрѣ, утверждающая, что между *двумя реальными* корнями полинома всегда существуетъ одинъ или нечетное число корней его производной, можетъ быть перенесена также и на функціи трансцендентныя какого угодно genre'а; такъ, напр., извѣстно также, что у

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{z^p}{pa_n^p}}$$

съ a_i *реальными* производная $f'(z)=0$ между каждыми двумя a_k и a_{k+1} обладаетъ также реальными корнями и притомъ нечетнымъ числомъ.

Значеніе этой теоремы въ теоріи каноническихъ произведеній Вейерштрасса еще больше, чѣмъ въ теоріи полиномовъ, ибо она въ случаѣ существованія у $f(z)=0$ только реальныхъ корней непосредственно сейчасъ же говоритъ намъ, что *genre*'ъ $f(z)$ *есть тоже* p, въ чемъ убѣждаемся сейчасъ же изъ сходимости ряда

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1}$$

Даже больше: допустимъ, что

$$f(z)=P_1(z)P_2(z),$$

причемъ $P_1(z)$—полиномъ только комплексные корни имѣющій, а $P_2(z)$—произведеніе genre'а p съ *только* реальными корнями; тогда *Lageurre* доказалъ, что genre'ъ такой функціи есть тоже p. (Сравни *Borel*. Lécons sur les fonctions entières, p. 37).

Мы не будемъ вдаваться въ детальныя изслѣдованія роли теоремы *Rolle*'я и лишь только считали нужнымъ упомянуть о ней и ея *Tragweit*, какъ сказали бы нѣмцы, въ теоріи цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій.

Не менѣе интересной является другая теорема, можно сказать, забытая, но очень полезная для теоріи ур-ій какъ полиноміальныхъ, такъ и трансцендентныхъ. Впервые эта теорема была высказана *Gauss*'омъ (Werke, B. 3, p. 112), а на случай комплексныхъ перемѣнныхъ она была перенесена *Lucas* (С. R. 89, p. 224) и формулирована она была такъ:

„Tout contour fermé convexe environnant le groupe des points racines de l'équation proposée environne aussi le groupe des points racines de l'équation derivée.

Геометрическое ея доказательство было дано *Witting*'омъ (Zeitschr. für Math. und Phys. 30, 1885, p. 274).

Несомнѣнно ею можно пользоваться съ успѣхомъ въ случаѣ произведенiй вида

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

и примѣненiе ея даетъ массу легко доказуемыхъ теоремъ *для случая функцiй нулевого порядка*. Напр.

1° **Теорема.** „*Если функцiя нулевого порядка обладаетъ только реальными нулями, то нули ея производной и—даже больше—нули всѣхъ ея производныхъ суть тоже реальны*".

Или еще:

2° **Теорема.** *Если функцiя нулевого порядка обладаетъ нулями, лежащими* **лишь на одномъ лучѣ**, *то нули* **всѣхъ ея производныхъ** *лежатъ на томъ же лучѣ.*

Теорема 2°—уже менѣе очевидна; обѣ ихъ, конечно, можно доказать методомъ *reductio ad absurdum* аналитически. Или, напр., такая теорема уже сразу вовсе неочевидная:

3° **Теорема.** „*Если мы имѣемъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго z секторъ съ вершиной S, и если нули функцiи нулевого порядка расположены съ одной стороны на лучѣ SA въ перечислимомъ числѣ, а съ другой стороны также въ перечислимомъ числѣ на лучѣ SB, то нули ея производной расположены* **внутри сектора, но не на контурѣ.**

Послѣдняя теорема является уже далеко неочевидной. Ради иллюстрацiи ея аналитически мы дадимъ одинъ примѣръ, подтверждающiй ее. Пусть

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)\left(1-\frac{z}{n^2+n^2i}\right) \qquad (1),$$

такъ что нули у насъ расположены на двухъ лучахъ: на оси реальныхъ значенiй z и на биссектриссѣ положительнаго прямаго координатнаго угла; вершина O есть начало координатъ. По теоремѣ слѣдуетъ, что нули $\varphi'(x)=0$ должны лежать *внутри полигона нулей*, т. е. *внутри сектора* AOB, если AO — реальная ось, OB—биссектрисса, составляющая $\frac{\pi}{4}$ съ AO; убѣдимся въ этомъ аналитически! Изъ (1) получаемъ

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n^2}+\frac{1}{z-n^2-in^2}\right\} \qquad (2).$$

Пусть корень $\varphi'(z)=0$ есть $a=\alpha+\iota\beta$; тогда, раздѣляя и приравнивая порознь нулю реальную и мнимую части, мы получимъ:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\left[\frac{\alpha-n^2}{(\alpha-n^2)^2+\beta^2}+\frac{\alpha-n^2}{(\alpha-n^2)^2+(\beta-n^2)^2}\right]=0 \qquad (3)$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\left[\frac{\beta}{(\alpha-n^2)^2+\beta^2}+\frac{\beta-n^2}{(\alpha-n^2)^2+(\beta-n^2)^2}\right]=0 \qquad (4).$$

Теперь будемъ дѣлать относительно нулей $\varphi'(x)=0$ различныя предположенiя:

Гипотеза 1°: Нули $\varphi'(x)=0$ суть реальны; тогда $\beta=0$, и (4) приводится къ

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{n^2}{(\alpha-n^2)^2+n^4}=0,$$

что—невозможно; слѣд. *реальныхъ нулей нѣтъ* у $\varphi'(x)=0$.

Гипотеза 2°: нули $\varphi'(x)=0$ лежатъ на биссектриссѣ, и слѣд. $a=\alpha+i\alpha$; тогда (3) и (4) даютъ:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left[\frac{\alpha-n^2}{(\alpha-n^2)^2+\alpha^2}+\frac{1}{2(\alpha-n^2)}\right]\equiv 0$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left[\frac{\alpha}{(\alpha-n^2)^2+\alpha^2}+\frac{1}{2(\alpha-n^2)}\right]\equiv 0.$$

Вычитая же изъ нижняго уравненія верхнее, мы найдемъ:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{n^2}{(\alpha-n^2)^2+\alpha^2}\equiv 0,$$

что—невозможно, а потому на *лучѣ—биссектриссѣ* у $\varphi'(x)=0$ *также нѣтъ нулей*; слѣд. *вообще на контурѣ сектора* AOB *нулей не существуетъ* у $\varphi'(x)=0$.

Гипотеза 3^0: пусть $a=\alpha+i\beta$, причемъ $\alpha>0$, $\beta<0$. Въ этомъ случаѣ, полагая $\beta=-\sigma$, мы изъ (4) получаемъ:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left[\frac{\sigma}{(\alpha-n^2)^2+\sigma^2}+\frac{\sigma+n^2}{(\alpha-n^2)^2+(\sigma+n^2)^2}\right]\equiv 0,$$

что—также невозможно, и слѣд. *нулей* $\varphi'(x)=0$ *въ четвертомъ углу координатныхъ осей также нѣтъ.*

Гипотеза 4^0: пусть $a=\alpha+i\beta$; $\alpha<0$, $\beta<0$; но въ этомъ случаѣ лѣвыя части (3) и (4) даютъ

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left[\frac{\alpha-n^2}{(\alpha-n^2)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha-n^2}{(\alpha-n^2)^2+(\beta-n^2)^2}\right]<0,$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left[\frac{\beta}{(\alpha-n^2)^2+\alpha^2}+\frac{\beta-n^2}{(\alpha-n^2)^2+(\beta-n^2)^2}\right]<0,$$

и слѣд. у $\varphi'(x)=0$ *нѣтъ также нулей и въ третьемъ координатномъ углу осей координатъ.*

Гипотеза 5^0: пусть $a=\alpha+i\beta$; $\beta<0$, $\alpha=-\alpha_1<0$.
Въ данномъ случаѣ изъ (3) имѣемъ.

$$\sum_1^\infty n\left[\frac{\alpha_1+n^2}{(\alpha_1+n^2)^2+\alpha_1{}^2}+\frac{\alpha_1+n^2}{(\alpha_1+n^2)^2+(\beta'-n^2)^2}\right]<0,$$

и слѣд. у $\varphi'(x)=0$ *нѣтъ также нулей и во второмъ координатномъ углу.*

Гипотеза 6^0: остается предположить еще, что нули заключаются въ первомъ координатномъ углу *выше биссектриссы* OB; тогда $a=\alpha+i\beta$ и $\beta>\alpha>0$.

Вычитая же (3) изъ (4), имѣемъ:

$$\sum_1^\infty n\left[\frac{\alpha-\beta-n^2}{(\alpha-n^2)^2+\beta^2}+\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-n^2)^2+(\beta-n^2)^2}\right]<0,$$

ибо $\alpha<\beta$.

Такимъ образомъ *у функціи* $\varphi'(x)=0$, какъ говоритъ наша теорема 3", *нули лежатъ всѣ внутри сектора* AOB *и нѣтъ ни одного изъ нихъ на контурѣ сектора.*

5. Кстати о нуляхъ функціи нулевого порядка можно сдѣлать еще одно замѣчаніе. Пусть

$$\varphi(x)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \qquad (1),$$

тогда

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\sum_1^\infty n\,\frac{1}{z-a_n}=0$$

$$=\sum_1^\infty n\,\frac{rCos\theta-r_nCos\theta_n-i(rSin\theta-r_nSin\theta_n)}{\delta_n{}^2}=0,$$

гдѣ δ_n—разстояніе n-го нуля $a_n=r_ne^{i\theta_n}$ отъ точки $z=re^{i\theta}$.

Послѣднее уравненіе распадается на *два*:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{r_n Cos\theta_n}{\delta_n^{\,2}} &= rCos\theta \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{1}{\delta_n^{\,2}} \\ \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{r_n Sin\theta_n}{\delta_n^{\,2}} &= rSin\theta \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{1}{\delta_n^{\,2}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Уравненія (2)—интересны въ томъ отношеніи, что они допускаютъ *механическую* интерпретацію: въ самомъ дѣлѣ, примемъ нули $\varphi(x)=0$ за точки, въ которыхъ сосредоточены массы $\frac{1}{\delta_1^{\,2}}, \frac{1}{\delta_2^{\,2}}, \ldots, \frac{1}{\delta_n^{\,2}}, \ldots$—соотвѣтственно въ точкахъ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нашей плоскости; тогда *нуль производной* $\varphi'(x)=0$ *есть центръ тяжести нашего полигона нулей.* Пользуясь этимъ обстоятельствомъ, мы покажемъ *теорему Lucas'a—Гаусса* (Сравни тоже самое въ удивительномъ мемуарѣ *Ernest Césaro* „Remarques sur les fonctions holomorphes“ Giornale di Math. 1884, Vol. 22, p. 195, написанномъ имъ еще въ бытность его студентомъ въ Римѣ, т. е. совсѣмъ еще въ юношескомъ возростѣ).

Пусть S—какой нибудь нуль $\varphi'(x)=0$, причемъ $x=re^{i\theta}$.

Ведемъ какую-либо прямую чрезъ S; ея уравненіе пусть будетъ

$$y - rSin\theta = \tau(x - rCos\theta) \qquad (3)$$

$$(\tau = \textit{произвольно})$$

Опускаемъ изъ каждаго нуля a_n перпендикуляры на прямую (3); ихъ длины съ *соотвѣтственными* знаками будутъ

$$q_n = \frac{r_n Sin\theta_n - rSin\theta - \tau(r_n Cos\theta_n - rCos\theta)}{\sqrt{1+\tau^2}} .$$

Возьмемъ теперь сумму

$$\sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{q_n}{\delta_n^{\,2}} \qquad (4)$$

Замѣняя q_n здѣсь его предыдущимъ выраженіемъ, мы находимъ при помощи (2), что

$$\sum_1^r n \frac{q_n}{\delta_n^{\,2}} = 0 \qquad (5)$$

и слѣд. *прямая S должна быть такъ расположена, что нули $\varphi(x)=0$ расположены по обѣ ея стороны*, т. е. она должна проходить внутри полигона нулей, иначе q_n будетъ одного знака, и (5) никогда не можетъ быть удовлетворено.

6. Алгебра и теорія роста функцій. За послѣднее время въ математической литературѣ можно отмѣтить одну ярко выраженную общую тенденцію: именно стремленіе сдѣлать болѣе точными, чѣмъ это до сихъ поръ извѣстно, существеннѣйшіе и важнѣйшіе пункты алгебрическаго рѣшенія алгебрическихъ уравненій, напр., задать возможно точный maximum'ъ или minimum'ъ корней предложеннаго уравненія n—ой степени, или изучить предѣлы корней въ случаѣ уравненія съ пустотами въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \ldots + a_n x^{p_n} \\ 1 &\leqslant p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n \end{aligned}\right\}$$

Въ этомъ направленіи подобнаго рода вопросы уже были рѣшаемы въ русской математической литературѣ *П. Л. Чебышевымъ*; упомянемъ, напр., здѣсь его работу „Sur les questions de minima qui se rattachent à la réprésentation approximative des fonctions" (Oeuvres, T. I). Изъ современныхъ же математиковъ, занимавшихся подобными вопросами, можно указать *Landau* (Annales de l'Ecole Normale, 1907. *Sur quelques généralisations du théorème du M. Picard*) и *L. Fejer* „Kleinste Wurzel der algebraischen Gleichungen (Math. Ann. B. 65).

Въ указанныхъ работахъ читатель найдетъ много теоремъ *чисто алгебрическихъ*, полученныхъ однако путемъ *вовсе не* алгебрическимъ, а *общефункціональнымъ*, если можно такъ выразиться, причемъ въ изслѣдованіяхъ играетъ главную роль *теорема Picard'a въ обобщеніи Landau*, который задалъ величину радіуса круга для функціи цѣлой и трансцендентной, не принимающей внутри этого круга ни значеніе нуль, ни значеніе 1.

Курьезенъ тотъ фактъ, что теоремы типа Picard'а, несомнѣнно существующія для чисто алгебраическихъ уравненій, не поддаются открытію *чисто алгебраическимъ* путемъ. Не менѣе любопытнымъ является и то обстоятельство, что теорема *Гаусса—Lucas'a* оказалась удивительно плодотворной въ изысканіяхъ только что обрисованнаго типа, какъ показалъ *Fejer* (loc. cit.). Напомнимъ эту теорему еще разъ:

(A) **Теорема Гаусса**. *Пусть $\varphi(z)=0$—произвольное алгебрическое уравненіе и α_1 α_2 ...., α_n—неравные его корни соотвѣтственно кратности $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$. Представимъ себѣ въ точкахъ плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сосредоточенными массы, пропорціональныя соотвѣтственно числамъ $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, и взаимныя силы притяженія пусть пропорціональны массамъ и обратно—пропорціональны разстояніямъ какой-либо точки плоскости z' отъ точекъ α_i; тогда подъ вліяніемъ дѣйствующихъ силъ масса z' останется въ равновѣсіи при условіи*

$$\varphi'(z)=\frac{d\varphi}{dz}=0, \quad (z'\neq\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Другая формулировка этой же теоремы дана нами въ редакціи *Lucas*'а въ § 4 настоящей главы; тамъ же мы обнаружили и ея полезность, установивъ три теоремы при помощи ея; мы обнаружимъ ея полезность въ нѣсколько другомъ направленіи. Прежде всего покажемъ теорему:

(B) **Теорема**. *Радіуса круга, въ которомъ уравненіе*

$$a_0+a_1x \ldots +a_nx^n=0 \tag{1}$$

обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ корнемъ, причемъ корень можетъ оказаться иногда на периферіи круга, не превышаетъ величины

$$n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|. \quad (a_0 \neq O \neq a_1).$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = \frac{1}{y}$, тогда (1) превращается въ

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2).$$

Теперь по теоремѣ *Гаусса-Lucas* наибольшій корень (2) по модулю несомнѣнно больше *наибольшаго* корня производной (тоже по модулю)

$$na_n y^{n-1} + (n-1)a_1 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

Наибольшій же корень этого послѣдняго больше въ свою очередь наибольшаго корня уравненія

$$n(n-1)a_0 y^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 y^{n-3} + \ldots = 0$$

и т. д.

Словомъ наибольшій корень (2) больше корня уравненія

$$na_0 y + a_1 = 0$$

по своему модулю; иными словами, называя модуль наибольшаго корня уравненія (2) черезъ μ, мы можемъ писать

$$\mu \geq \frac{1}{n}\left|\frac{a_1}{a_0}\right|. \qquad (3)$$

Но если μ есть модуль—maxim'альный среди модулей корней (2), то $\lambda = \frac{1}{\mu}$ есть модуль минимальнаго корня (1), и слѣд. мы можемъ писать изъ (3)

$$\lambda \leq n\left|\frac{a_0}{a_1}\right| \qquad (4),$$

т. е. наша теорема—справедлива. Само собой разумѣется, что теорема наша имѣетъ мѣсто лишь для уравненія, въ которомъ *всѣ* коэффиціенты отличны отъ нуля; для уравненій же съ недостающими членами имѣетъ мѣсто *теорема Fejer'а* (Math. Ann. 65), обобщающая только что данную. Въ виду того, что доказательство также основано на *принципѣ Гаусса—Lucas'а*, мы дадимъ ее безъ доказательства:

(*C*) **Теорема Fejer'а**. *Уравненіе вида*

$$a_0+a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_nx^{p_n}=0$$

обладаетъ по крайней мѣрѣ на кругѣ или внутри круга радіуса

$$r=\left|x\right|\leqslant\left[\frac{p_2p_3\ldots p_n}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)\ldots(p_n-p_1)}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

однимъ корнемъ.

Слѣдствіе 1° изъ теоремы Fejer'а: Въ виду того, что

$$p_2\geqslant p_1+1,\ \frac{p_2}{p_2-p_1}\leqslant 1+\frac{p_1}{p_2-p_1}\leqslant 1+p_1.$$

Далѣе

$$\frac{p_3}{p_3-p_1}\leqslant\frac{p_1+2}{2},\ \ldots,\ \frac{p_k}{p_k+p_1}\leqslant\frac{p_1+k}{k-1},\ \ldots,$$

а потому въ теоремѣ (*C*) верхній предѣлъ для $|x|$ можно замѣнить черезъ

$$\left[\frac{(p_1+1)(p_1+2)\ldots(p_1+n-1)}{\overline{n-1}!}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

Слѣдствіе 2°: уравненіе вида

$$a_0+a_1x+a_2x^{p_1}+\ldots+a_nx^{p_n}=0$$

обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ корнемъ на периферіи круга или внутри круга радіуса

$$r \leqslant n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Отсюда мы видимъ, что главную роль *въ теоремахъ Fejer'а* играетъ *не степень* уравненія, а *число членовъ уравненія съ множителемъ* x; результатъ нашъ совпадаетъ съ результатомъ Fejer'а лишь въ случаѣ уравненія *полнаго*.

Примѣненія теоремы *Fejer'а* могутъ быть очень разнообразны; такъ, напр., мы доказываемъ справедливость такой теоремы, напоминающей нѣсколько теорему *Чебышева* въ этомъ же родѣ (См. Oeuvres, T. I p. 306):

(*D*) **Теорема.** *Всякій полиномъ нечетной степени вида*

$$x+a_3x^3+a_5x^5+\;.\;.\;.\;+a_{2n+1}x^{2n+1}$$

принимаетъ по крайней мѣрѣ разъ значеніе единицу въ кругѣ опредѣленнаго радіуса, именно $R \leqslant n$.

Или вотъ еще теорема *аналогичная* теоремѣ *Чебышева*:

(*E*) **Теорема** „*Всякій полиномъ вида*

$$x+a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\;.\;.\;.+a_nx^{p_n}$$

принимаетъ въ кругѣ радіуса $R \leqslant (n+1)$ *по крайней мѣрѣ одинъ разъ значеніе 1*".

Все, что до сихъ поръ мы сказали о примѣненіи *принципа Гаусса—Lucas'а*, является въ высшей степени интереснымъ, и мы сейчасъ же невольно обнаруживаемъ связь теоремы (*D*) или (*E*) съ *теоремой Picard'а* о значеніяхъ, которыхъ данная цѣлая трансцендентная функція принимать не можетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ дана цѣлая трансцендентная функція вида

$$\varphi(x)=a_0+a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\;.\;.\;.+a_nx^{p_n}+ \qquad (5),$$

у которой показатели p_1, p_2, . . . растутъ по какому либо закону.

Будемъ изучать рядъ (5) какъ предѣлъ полиномовъ послѣдовательно степеней $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ Для каждаго изъ такихъ полиномовъ найдемъ, пользуясь *теоремой Fejer'а*, послѣдовательно радіусы круговъ, внутри коихъ каждый изъ нихъ обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ корнемъ; тогда для полинома k—го по счету радіусъ будетъ опредѣленъ формулой (на основаніи теор. (C))

$$R_k < \left[\frac{1}{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)\left(1-\frac{p_1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{p_1}{p_n}\right)}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|\right]^{\frac{1}{p_1}} \qquad (6)$$

Беря все бóльшее число членовъ, т. е. увеличивая k, мы можемъ задаться вопросомъ опредѣленія $\lim\limits_{k=\infty} R_k$: пусть предѣлъ произведенія $\prod\limits_2^\infty\left(1-\frac{p_1}{p_n}\right)$ существуетъ, т. е. пусть

$$\prod_2^\infty\left(1-\frac{p_1}{p_n}\right)=g \text{ (конечное число)} \qquad (7),$$

тогда

$$\lim_{k=\infty} R_k < \left|\frac{a_0}{ga_1}\right|^{\frac{1}{p_1}} \qquad (8),$$

и слѣд. для ряда (5) всегда существуетъ кругъ, внутри котораго онъ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, и слѣд. для такого ряда *cas d'exception Picard*'а—невозможно. Соображенія эти формулируются въ слѣдующей теоремѣ:

(F) **Теорема Fejer'a**. *Если намъ данъ рядъ* (5), *и если показатели* p_i *растутъ такъ, что*

$$\sum_2^\infty{}_i \frac{1}{p_i} \equiv \text{сход. рядъ},$$

то въ кругѣ радіуса

$$R < \left|\frac{a_0}{a_1 g}\right|^{\frac{1}{p_1}}$$

функція всегда обладаетъ корнемъ, причемъ

$$g = \prod_2^\infty \left(1 - \frac{p_1}{p_n}\right).$$

Пользуясь этой *теоремой Fejer'*а, мы въ состояніи задать безчисленное множество цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, которыя *не могутъ быть представлены* какъ $e^{g(x)}$, гдѣ бы $g(x)$ была полиномомъ или цѣлой трансцендентной функцій.

Выводы, которые можно сдѣлать изъ изслѣдованій *Fejer'*а особенно, если мы ихъ комбинируемъ съ нашими собственными замѣчаніями въ § 8 главѣ I-ой, являются довольно любопытными, именно можно утверждать такое положеніе, въ справедливости котораго мы убѣждены:

(K) **Теорема:** *Если мы имѣемъ функцію вида*

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{\varphi(n)}}{\varphi(n)}$$

такую, что

$$\sum_2^\infty {}_n \frac{1}{\varphi(n)} \equiv \text{сходящійся рядъ},$$

а ростъ $\varphi(n)$ при возрастаніи n—таковъ, что для даннаго $|x| = r$ ростъ $|\Phi(x)|$ обусловленъ лишь ростомъ одного члена maximum'а, то функціи $\Phi(x)$ имѣетъ безконечно много корней (иногда даже реальныхъ).

Любопытнымъ оказывается тотъ фактъ, что на ростъ функціи и на вопросъ о нуляхъ оказываетъ такое громадное, почти исключительное иногда вліяніе законъ роста показателей ряда.

Между прочимъ сдѣлаемъ еще одно нелишенное интереса примѣчаніе къ теоремѣ (F). Формула Fejer'а для радіуса круга, внутри котораго $\varphi(x)$—цѣлая трансцендентная функція обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ нулемъ, имѣетъ такой видъ:

$$R < \left[\lim_{k=\infty} \prod_{2}^{k} \left(1 - \frac{p_1}{p_k}\right) \right]^{-\frac{1}{p_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{p_1}}$$

или же согласно предыдущимъ означеніямъ

$$R < \left|\frac{a_0}{g a_1}\right|^{\frac{1}{p_1}}.$$

Отсюда мы сейчасъ же дѣлаемъ интересный выводъ: *прибавленіе constant'ы C къ ряду существенно мѣняетъ радіусъ круга*, заключающаго нулевыя мѣста,—онъ можетъ то расти, то убывать отъ прибавленія C. Не менѣе интереснымъ является и роль показателя p_1 перваго члена съ x отличнаго отъ нуля: съ ростомъ p_1 радіусъ круга R приближается къ постоянному числу „единицѣ".

7. *Обыкновенные полиномы и теорія роста функцій.* Несомнѣнно, цѣлыя трансцендентныя уравненія были бы успѣшно рѣшаемы при опредѣленіи ихъ корней, если бы алгебра давала болѣе опредѣленныя свѣдѣнія относительно роста корней и ихъ распредѣленія на плоскости, чѣмъ къ сожалѣнію она не обладаетъ.

И несомнѣнно ради созданія общаго метода опредѣленія корней цѣлаго трансцендентнаго уравненія нужно углубить еще больше наши современные методы разрѣшенія обыкновенныхъ алгебрическихъ уравненій; особенно послѣднее заявленіе становится яснымъ, если мы вспомнимъ, какъ часто изученіе свойствъ цѣлой трансцендентной функціи облегчается изученіемъ полиномовъ, къ ней съ ростомъ степени постепенно приближающихся; обращаемъ вниманіе читателя на нашъ § 1-й гл. I-ой, 2-ой и др... Поэтому *проблема распредѣленія нулей у обыкновеннаго алгебрическаго уравненія* должна быть несомнѣнно глубже изучена; но какимъ путемъ можно итти при ея рѣшеніи?

Одинъ изъ путей мы можемъ указать; къ сожалѣнію онъ—очень сложенъ; именно, если предложено уравненіе

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (1),$$

то мы должны постараться построить для него кривую *Кассини* вида

$$u^2(x,y)+v^2(x,y)=a^2=\text{const.} \qquad (2),$$

которая съ ясностью говоритъ намъ, что *нули уравненія (1) расположены всегда внутри кривыхъ (2) постояннаго модуля функціи*; иными словами *нули* (1) *должны быть огибаемы кривыми постояннаго модуля* $|f(z)|$, и слѣд., если такихъ кривыхъ намъ удалось построить для различныхъ a^2 нѣсколько, то мы уже до извѣстной степени оріентированы относительно расположенія нулей. Особенно полезно строить такія кривыя для $a^2=\varepsilon^2$, гдѣ ε—безконечное-малое: въ этомъ случаѣ кривая постояннаго модуля функціи, которая для a очень большого можетъ быть сплошной, вырождается въ n — оваловъ, если степень $f(z)$ есть n, и это—очевидно въ силу непрерывности измѣненія кривой (2), такъ какъ при $a=0$ она вырождается просто въ n точекъ, а потому при a—близкомъ къ нулю кривая (2) должна представить n оваловъ; овалы эти будутъ расти, и при a очень большомъ кривая можетъ сдѣлаться сплошной.

Иллюстрируемъ эти соображенія почти тривіальнымъ примѣромъ уравненія

$$z^2-1=0,$$

которое для (2) даетъ

$$r^4-2r^2Cos2\omega=a^2-1 \qquad (3)$$

При $a=1$ мы имѣемъ обыкновенную лемнискату въ формѣ восьмерки, огибающую точки $+1$ и -1 и проходящую черезъ точку нуль.

При $a=2$ мы уже получаемъ лемнискату въ видѣ бисквита; точка нуль уже не лежитъ на кривой, и кривая—сплошная.

При $a=\frac{1}{2}$ мы уже не получимъ сплошной кривой: около каждаго изъ нулей мы получимъ по овальной кривой, изъ которыхъ каждая будетъ расположена внутри угла въ 30^0;

причемъ вершиной угла будетъ служить точка нуль, а его равнодѣлящей будетъ реальная ось.

На этомъ тривіальномъ примѣрѣ эмпирически убѣждаемся въ справедливости слѣдующей теоремы, принадлежащей, какъ говоритъ *Pompeiu* (въ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 19, p. 312) *H. Laurent*'у:

(A). **Теорема**. *Если мы заставимъ двигаться точку* z *отъ одного нуля функціи* $f(z)=0$ *къ другому, то на пути* z *непремѣнно встрѣтитъ кривыя постояннаго модуля функціи* $|f(z)|=a^2$.

Замѣтимъ, что въ случаѣ уравненія n-ой степени мы вмѣсто n раздѣльныхъ *замкнутыхъ* кривыхъ получимъ иногда *одну только* кривую или $m<n$ въ случаѣ, если окружность, описанная радіусомъ $\equiv$ модулю данной функціи $\equiv$ const., пройдетъ черезъ одну или нѣсколько критическихъ точекъ $f(z)$.

Изъ только-что произведенныхъ изслѣдованій вытекаетъ также непосредственно слѣдующій любопытный фактъ:

(B). **Теорема.** *Модуль функціи* $f(z)$, *полинома, растетъ такъ, что кривая* $|f(z)|=const.$ *состоитъ иногда изъ разныхъ вѣтвей, иногда изъ одной сплошной, иногда изъ* $m<n$.

Теорема (B)—понятна: уравненіе (1) можно представить какъ

$$A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots\ (z-\alpha_n)=0,$$

а потому вмѣсто (2) можно писать

$$|A|\,|z-\alpha_1|\ldots|z-\alpha_n|=C=a^2. \tag{4}$$

Увеличивая a до ∞, мы приближаемъ (4) къ его *асимптотическому* уравненію

$$|z^n|=C,$$

т. е. тогда мы дѣйствительно получаемъ *одну вѣтвь*. Куда же исчезли остальныя ($n-1$) вѣтвей? На нашемъ тривіальномъ примѣрѣ $z^2-1=0$ мы уже видѣли, что въ точкѣ $C=1$

у насъ двѣ различныхъ вѣтви кривой слились въ одну, и дальше при ростѣ C мы имѣли уже всегда одну вѣтвь.

Изъ этого факта мы въ правѣ заключить, что, вообще говоря, должны существовать такія точки, что онѣ являются критическими для кривой

$$|f(z)|=C$$

въ томъ смыслѣ, что тогда нѣсколько вѣтвей (2) сливаются въ одну; послѣднее обстоятельство случится, когда C является точкой развѣтвленія $f(z)$. При измѣненіи C $|f(z)|$ на плоскости описываетъ кривыя, но maximum'а или minimnm'а $f(z)$ достигнетъ въ $(n-1)$ точкахъ уравненія $f'(z)=0$. При переходѣ C черезъ каждую изъ особенныхъ точекъ вѣтви $|f(z)|$ сливаются по двѣ, по три или по $m<n$ въ одну; при C достаточно большомъ, когда всѣ критическія точки будутъ уже внутри круга радіуса C, мы получимъ уже единственную вѣтвь.

Другими кривыми, которыя повидимому могутъ быть полезными въ изученіи модуля функціи, какъ функціи, и распредѣленія нулей, являются *кривыя экстремальныхъ значеній модуля функціи.* Такія кривыя мы получимъ просто, замѣчая, что для

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

въ этомъ случаѣ каждый радіусъ векторъ $\sqrt{u^2+v^2}$ кривой есть въ тоже время и касательная къ кривой, и слѣд. необходимо соблюденіе условія

$$\frac{du}{u}=\frac{dv}{v} \qquad (5).$$

Это и есть дифференціальное уравненіе *кривой экстремальныхъ значеній модуля функціи.*

Между прочимъ изъ уравненія кривыхъ постояннаго модуля

$$u^2+v^2=a^2$$

имѣемъ

$$\frac{du}{v} = -\frac{dv}{u} \tag{6},$$

и можно думать, сопоставляя (5) и (6), что кривыя (5) и (6) — взаимноортогональны; и дѣйств., если мы найдемъ $\frac{dy}{dx}$ изъ (5) и (6), то при помощи условій *Riemann'a-Cauchy* для u и v мы убѣждаемся въ справедливости предположенія.

Къ сожалѣнію мы не съумѣли никакъ использовать кривыя экстремальныхъ значеній и ограничиваемся поэтому только упоминаніемъ о нихъ.

Проблема изученія роста $|f(z)| = M(r)$, т. е. изученіе *спеціально только* $M(r)$—задача, какъ видимъ, нелегкая.

Между прочимъ *Borel* даже полагаетъ, что не всякой непрерывной и монотонной функцій $\theta(r)$ принадлежитъ аналитическая функція $f(x)$ такая, что $\theta(r) = M(r)$.

Въ заключеніе этой главы мы дадимъ одну теорему, доказательство которой, мы думаемъ, проще нежели данное *Blumenthal*'емъ (Bulletin de la Société Math. de France, 1907, p. 214). Вотъ она:

(C) **Теорема.** „*Если модуль функціи остается постояннымъ вдоль периферіи круга радіуса* $\equiv r$, *каково бы ни было* $r \neq 0$, *то она есть не что иное, какъ* az^m.

Пусть въ самомъ дѣлѣ, искомая функція $f(z)$ есть:

$$f(z) = R(r, \omega) . e^{i\Theta(r, \omega)} \tag{1}.$$

Условія *Cauchy-Riemann*'a для нея будутъ таковы:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial r} = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial\omega}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\omega} = \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} \tag{2},$$

такъ что

$$d\Theta = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial\omega}dr + \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}d\omega \tag{3}.$$

Теперь на окружности радіуса $\equiv r$ мы имѣемъ $dR=0$, т. е. вдоль окружности

$$\frac{\partial R}{\partial \omega}=0, \text{ но тогда } \frac{\partial \Theta}{\partial r}=0$$

въ силу (2) *всегда*, и слѣд. Θ есть только функція ω, т. е.

$$\Theta = \varphi_2(\omega) \tag{4},$$

но тогда въ свою очередь тоже на основаніи (2)

$$R = \varphi_1(r) \tag{5}.$$

Въ силу (4) и (5) второе изъ уравненій (2) даетъ:

$$\frac{d\Theta}{d\omega} = \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} \text{ или } \frac{d\Theta}{d\omega} = r\frac{dLogR}{dr} \tag{6}.$$

Перемѣнныя ω и r между собой—независимы, а потому (6) возможно лишь при условіи

$$\frac{d\Theta}{d\omega} = r\frac{dLogR}{dr} = m \equiv \text{const.},$$

т. е. по интеграціи находимъ

$$\Theta = m\omega, \quad R = ar^m, \quad a \equiv \text{const.},$$

такъ что искомая

$$f(re^{i\omega}) = f(z) = Re^{i\Theta} = ar^m . e^{mi\omega} = az^m.$$

Мы привели эту теорему только лишь потому, что наше обоснованіе ея намъ кажется лучше, нежели у *Blumenthal*'я (loc. cit.).

Глава IV.

Теорія конформности и теорія роста функцій.

1. *Общія замѣчанія.* Теорія функцій въ наше время настолько обогатилась методами и теоріями, что нелишне бросить общій взглядъ на эти методы и ихъ систематизировать и объединить. Такъ, въ началѣ развитія анализа безконечно малыхъ господствовала точка зрѣнія *Euler*'а на функцію: функція была опредѣлена аналитически, уравненіемъ, функціональной символической зависимостью, и, изучая лишь этотъ символъ, эту форму, строили теорію функцій. Понятно счетъ, алгебрическія и аналитическія выкладки здѣсь преобладали: получали не больше того, что̀ давали формулы, и бо̀льшаго получить не могли иногда: словомъ изучали функцію, если можно такъ выразиться *микроскопически* — по частямъ, послѣдовательными, медленными шагами, отъ точкѣ къ точкѣ; тогда не было того, что отмѣтилъ позже *Dirichlet* „Gedanken an die Stelle der Rechnung zu stellen“.

Такъ развивался этотъ первичный анализъ до *Cauchy*, который вмѣстѣ съ *Gauss*'омъ, *Abel*'емъ и *Jacobi*, особенно *Riemann*'омъ обосновалъ эту часть анализа, округлилъ ее, обобщилъ, можно сказать: эти ученые дали возможность анализу явныхъ и неявныхъ функцій получить прочную почву, и кромѣ того они выдвинули новую вѣтвь анализа—изученіе функцій по дифференціальнымъ уравненіямъ ихъ опредѣляющимъ, а также дали этому новому направленію законченную форму, которая отображена въ работахъ *Briot-Bouquet*.

Но уже съ эпохи *Riemann*'а и *Dirichlet* появляется снова новое теченіе въ анализѣ: до *Riemann*'а главный методъ изученія функцій (второй послѣ Euler'овскаго)—степенной рядъ

$$a_0 + a_1 x + \dots \quad + a_n x^n + \dots$$

Но уже Riemann къ степенному ряду прибавилъ новое понятіе чисто геометрическаго *синтетическаго* характера— понятіе „Riemann'овской поверхности“, благодаря чему появилось третье новое теченіе въ исторіи чистаго анализа: конкретизированіе геометрически отвлеченной теоріи функцій, привнесеніе въ отвлеченную теоріи функцій *геометризма.* Это направленіе создало еше при *Gauss*'ѣ и благодаря Gauss'у новый методъ — четвертый въ исторіи анализа и теоріи функцій — *конформное отображеніе*, приведшее въ лицѣ *F. Klein*'а и *Poincaré* къ созданію *аутоморфныхъ* функцій.

Благодаря этому новому теченію теорія функцій, какъ таковая, т. е. какъ дисциплина отличная отъ другой большой части анализа — *анализа конечныхъ*, далеко отдалилась отъ этого послѣдняго.

Обладая способностью быть интерпретируемой геометрически и связавши себя благодаря этому съ чистой геометріей, механикой и математической физикой, теорія функцій получила необыкновенное развитіе: ея отвлеченныя теоріи развивались теперь двояко—изъ самой себя и при помощи другихъ дисциплинъ математической науки; я разумѣю въ данномъ случаѣ теорію потенціала, теорію всемірнаго тяготѣнія, теорію электричества и магнитизма и чистую геометрію—теорію поверхностей и analysis situs.

Казалось, такъ далеко ушла теперь теорія функцій отъ своего источника—теоріи числа, ариѳметики. И это правда! Своей только что обрисованной частью она дѣйствительно утеряла контактъ съ теоріей числа.

Но вотъ появляются работы *Du-Bois-Reymond*'а, *E. Borel*'я, *Hadamard*'а, *Weierstrass*'а, *Mittag-Leffler*'а и *Picard*'а, и теорія функцій снова нашла свой источникъ, снова связала себя удивительнымъ образомъ съ „числомъ“ благодаря новому понятію „croissance des fonctions“ (ростъ функціи). Толчокъ къ этой новой *теоріи роста функціи* былъ данъ работами *G. Cantor*'а.

Эта новая стадія изученія функціи есть *макроскопическая*, картинно выражаясь: теперь мы можемъ ужъ напередъ ставить принципы и сейчасъ же переводить ихъ на языкъ анализа; такова, напр., точка зрѣнія *Weierstrass*'а и *Mittag-Leffler*'а, ибо теперь мы напередъ задаемъ нули, полюсы, особенности, и затѣмъ уже ищемъ аналитическое выраженіе для подобнаго рода функцій. Также обстоитъ дѣло и съ *проблемой Rand*'а или съ теоріей гармоническихъ функцій.

Если же мы теперь припомнимъ все, что сказано нами о функціяхъ правильнаго роста или неправильнаго, о функціяхъ, ростъ коихъ вдоль опредѣленныхъ секторовъ или лучей-векторовъ—одинъ, а вдоль другихъ лучей или внутри другихъ секторовъ—другой, то мы поймемъ то новое, что принесла въ теорію функцій *теорія роста* функцій. (Обращаемъ вниманіе читателя на наши I, II и III-ю главы).

Къ мысли о связи теоріи конформности и теоріи роста функцій мы были приведены собственными размышленіями, ибо еще у *Schwarz*'а, обоснователя теоріи конформности, можно встрѣтить неравенства роста функцій, причемъ выводъ ихъ — естественъ и связенъ, далекій отъ искусственности. Напр., (въ Т. II, p. 190 *Schwarz*, Gesam. Werke) мы находимъ формулу

$$| u(r,\varphi)-u(o) | < \frac{4M}{\pi} arcSin \left(\frac{r}{R}\right),$$

гдѣ $u(r,\varphi)$—реальная часть функціи $F(z)$, $M \equiv$ mod. max. $f(\psi,R)$ причемъ $f(R,\psi)$—значенія u на кругѣ радіуса R.

Свои мысли о связи теоріи конформности и теоріи роста функцій мы подтвердили независимо отъ болѣе позднихъ изслѣдованій *Lindelöf*'а выводомъ нѣсколькихъ неравенствъ для аналитическихъ функцій.

2. Пусть намъ даны два концентрическихъ круга радіусовъ соотвѣтственно R и r, причемъ $R>r$, и центромъ ихъ пусть будетъ точка z_0; пусть дана аналитическая функція $f(z)$ такая, что

$$f(z_0)=\beta_0+i\gamma_0 \qquad (1),$$

Если же $z' = re^{i\varphi}$ есть какая-нибудь точка круга радіуса $\equiv r$, то извѣстно, что (r отсчитывается отъ z_0)

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2).\,U(R,\psi)}{R^2-2RrCos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi\,, \qquad (2)$$

причемъ здѣсь $U(R,\psi)$—значенія реальной части $f(z)$, принимаемыя ею на периферіи круга радіуса R (ψ—амплитуда).

Точно также извѣстно

$$u(o,o) = \beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\,.\,d\psi\,. \qquad (3)$$

Изъ (2) и (3) непосредственно опредѣляемъ

$$u(r,\varphi) - u(o,o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\left\{\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2RrCos(\psi-\varphi)} - 1\right\}d\psi$$

или же

$$u(r,\varphi) = \beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(R,\psi)\,.\,\frac{2RrCos(\varphi-\psi)-2r^2}{R^2+r^2-2RrCos(\varphi-\psi)}\,d\psi \quad (4).$$

Если теперь назовемъ черезъ A *maximum* $U(R,\psi)$ на периферіи круга радіуса $\equiv R$, то

$$u(r,\varphi) < \beta_0 + \frac{2A}{\pi}\cdot\frac{r}{R-r} \qquad (5),$$

ибо

$$\int_0^{2\pi} \frac{RCos(\varphi-\psi)-r}{R^2+r^2-2RrCos(\varphi-\psi)}\,d\psi < \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{R-r} = \frac{2\pi}{R-r}\,.$$

Къ неравенству (5) можно еще прибавить такое:

$$|\,u(r,\varphi)\,| < |\,\beta_0\,| + \frac{2\,|\,A\,|\,r}{R-r} \qquad (6),$$

и слѣд.

(A). **Теорема.** *Для всякой внутренней точки* $z_0 + re^{i\varphi}$ *круга радіуса* $\equiv R$ *описаннаго около точки* z_0, *имѣемъ*:

$$\left| R\left\{ f(z) \right\} \right| = \left| R\left\{ f(r^{i\varphi} + z_0) \right\} \right| < \left| \beta_0 \right| + 2 \left| A \right| \frac{r}{R-r}$$

$$\left| f(z) \right| < \left| \beta_0 \right| + \left| \gamma_0 \right| + 2 \left| A \right| \frac{r}{R-r}$$

$f(z)$—*голоморфна внутри круга радіуса* $\equiv R$".

Теорема наша менѣе совершенна, нежели такая (*E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen: p. 290, T. I):

(B). „*Пусть дана аналитическая функція* $F(s)$, *регулярная для* $|s - s_0| = r$, *и пусть* A — *maximum реальной части* $F(s)$ для $|s - s_0| = r$; *пусть далѣе*

$$F(s_0) = \beta_0 + i\gamma_0,$$

т. е.

$$R\{F(s_0)\} = \beta_0, \quad I\{F(s_0)\} = \gamma_0.$$

Пусть

$$o < \varrho < r.$$

Тогда для $|s - s_0| \leqslant \varrho$

$$\left| F(s) \right| < \left| \gamma_0 \right| + \left| \beta_0 \right| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A \frac{\varrho}{r-\varrho}$$

$$\left| R\left\{ F(s) \right\} \right| \leqslant \left| \beta_0 \right| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A \frac{\varrho}{r-\varrho}.$$ "

Эта теорема принадлежитъ *Caratheodory*; сопоставляя ее съ нашей, мы видимъ, что наша—менѣе совершенна; но въ случаѣ $A > o$ наша даетъ *лучшіе* результаты, ибо наши неравенства тогда *болѣе точныя.*

Теоремъ въ родѣ теоремы Caratheodory или нашей (A) можно дать вѣроятно очень много. Вотъ подтвержденіе этой мысли. Пусть намъ дана голоморфная функція $f(x)$ внутри круга радіуса R, и пусть *внутри* этого круга около какой-нибудь его точки x_0 описанъ радіусомъ $\equiv r$ новый кругъ K. Изучимъ интегралъ, распространенный по периферіи круга K, вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\, d\, Log\, \frac{x-x'}{x-x_0} \tag{7}$$

Точки x' и x_0 лежатъ *внутри* круга K, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\, dLog\, \frac{x-x'}{x-x_0} = \frac{1}{2\pi i}\int (X+iY)\, d\, Log\, \frac{x-x'}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \left\{(X+iY)\frac{dx}{x-x'} - (X+iY)\frac{dx}{x-x_0}\right\} = f(x') - f(x_0),$$

или, если

$$f(x_0) = \beta + i\gamma \tag{8},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i}\int (X+iY)\, d\, Log\, \frac{x-x'}{x-x_0} = f(x') - \beta - i\gamma. \tag{8'}$$

Возьмемъ теперь какую-нибудь точку x'' *внѣшнюю* кругу K, тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int (X+iY) dLog\, \frac{x-x''}{x-x_0} = -\beta - i\gamma,$$

или, замѣняя $+i$ на $-i$, находимъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int (X-iY) dLog\, \frac{x-x''}{x-x_0} = -\beta + i\gamma. \tag{9}$$

Точка r'' у насъ по предположенію лежитъ *внѣ* круга K; свяжемъ ее съ *внутренней* точкой x' условіемъ: она должна быть отраженіемъ точки x' при помощи круга K при соблюденіи условій

$$\frac{x-x''}{x-x_0} \equiv \text{const.} \tag{10}$$

для *всѣхъ* точекъ x периферіи круга K.

Тогда въ силу (10) равенство (9) превращается въ такое

$$\frac{1}{2\pi i}\int (X-iY)dLog\frac{x-x'}{x-x_0}=-\beta+i\gamma \qquad (11)$$

Комбинируя же (11) съ (8′), находимъ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int 2\,X\,dLog\frac{x-x'}{x-x_0}=-2\beta+f(x'),$$

т. е.

$$f(x')=\frac{1}{2\pi i}\int 2\,Xd\,Log\frac{x-x'}{x-x_0}+2\beta=$$

$$=\;2\beta+\frac{1}{\pi i}\int X\left\{\frac{1}{x-x'}-\frac{1}{x-x_0}\right\}=$$

$$=\;2\beta+\frac{1}{\pi i}\int X\,.\,\frac{(x'-x_0)dx}{(x-x')(x-x_0)}\;.$$

Пусть далѣе $x=x_0+re^{i\omega}$, тогда

$$f(x')=2\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X.\frac{(x'-x_0)d\omega}{x-x'}\;,$$

откуда

$$|\,f(x')\,|<2\,|\,\beta\,|+\frac{|\,A\,|}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\,x'-x_0\,|\,d\omega}{|\,x-x'\,|} \qquad (12),$$

если $|A|$—*maximum* модуля реальной части X на периферіи круга радіуса r.

Теперь по чертежу сразу убѣждаемся, что

$$|\,x'-x_0\,|<r,\quad |\,x-x'\,|=r-\varrho,\ \text{если}\ \ |\,x'-x_0\,|=\varrho,$$

а потому окончательно находимъ изъ (12):

$$|f(x')| < 2|\beta| + \frac{2|A|r}{r-\varrho} \qquad (13).$$

Такимъ образомъ въ формулѣ (13) мы снова нашли неравенство типа *Caratheodory*, и слѣд. можемъ считать установленной теорему:

(*C*). **Теорема.** „*Если внутри круга и на немъ функція $f(x)$ — голоморфна, и если мы взяли какую либо точку x', лежащую внутри вышеупомянутаго круга радіуса $=r$, описаннаго около точки x_0, причемъ $|x'-x_0|=\varrho$, то*

$$|f(x')| < 2|\beta| + \frac{2|A|r}{r-\varrho},$$

гдѣ $|A|$ модуль-maximum реальной части $f(x)$ на периферіи круга, а β—реальная часть $f(x_0)$.

3. *Опредѣленіе радіуса круга, въ которомъ моногенная функція—рядъ не уничтожается.*

Въ силу принципа (b) § 1 главы I-ой мы можемъ утверждать, что, если намъ предложена непрерывная и моногенная функція въ опредѣленномъ кругѣ голоморфности, который можетъ совпасть также съ цѣлой плоскостью, вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1),$$

то

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_0^n {}^k a_k x^k \qquad (2),$$

и слѣд. корни уравненія

$$\sum_0^n {}^k a_k x^k = 0 \qquad (3)$$

при n достаточно большомъ разнятся безконечно мало отъ n первыхъ корней $f(x)=0$: пусть всѣ корни (3) лежатъ внутри круга радіуса $\equiv r$, тогда *асимптотически* мы получаемъ для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$—корней (3) соотношеніе вида:

$$\left| \lambda_{min} \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n \right| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \qquad (4).$$

Корни λ_i лежатъ *внутри* круга радіуса $=r$, слѣд., какъ

$$| a_n | < \frac{\mathfrak{M}(r)}{r^n}$$ ($\mathfrak{M}(r)$—модуль-maximum на периферіи круга радіуса $=r$),

то

$$| \lambda_{min} \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n | > \frac{| a_0 | \, r^n}{\mathfrak{M}(r)} \quad \text{или}$$

$$| \lambda_{min} \cdot | \, \mathfrak{M}(r) \left| \frac{\lambda_2}{r} \right| \ldots \left| \frac{\lambda_n}{r} \right| > | a_0 | \, r,$$

откуда непосредственно находимъ:

$$| \lambda_{min} | > \frac{| a_0 | \cdot r}{\mathfrak{M}(r)},$$

ибо

$$\left| \frac{\lambda_2}{r} \right| < 1, \ldots, \left| \frac{\lambda_n}{r} \right| < 1.$$

Окончательно мы получили такую интересную теорему [1]):

I. **Теорема.** „*Если намъ дана нѣкоторая моногенная функція*

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^k \, a_k x^k,$$

то въ кругѣ радіуса

$$\varrho \leqq \frac{| a_0 | \cdot r}{\mathfrak{M}(r)}$$

$f(x)$ **не уничтожается;** $\mathfrak{M}(r)$ *есть maximum* $| f(x) |$ *на периферіи круга радіуса* $=r$, *причемъ кругъ радіуса* $=r$ *есть кругъ моногенности, въ которомъ* $f(x)=0$ *завѣдомо обладаетъ нулями.*"

---

[1]) Теорема эта, какъ мы убѣдились, была уже доказана сербскимъ математикомъ *Petrovic*'емъ. Рекомендуемъ читателю сравнить нашъ асимптотическій выводъ ея съ выводомъ Petrovic'a въ Bull. de Sciences Math. 1901.

Изъ этой теоремы помощью очевиднаго обобщенія можно считать справедливой такую теорему:

II. **Теорема.** „*Если* $f(x)$*—голоморфна внутри круга радіуса* $\equiv R$, *и если внутри круга для точки* x_0 *функція* $f(x_0) \neq 0$, *то она* **не уничтожается** *внутри круга радіуса* $R - |x_0|$, *описаннаго около точки* x_0, *причемъ радіусъ этого послѣдняго удовлетворяетъ условію*

$$|x-x_0| < \frac{|f(x_0)|}{\mathfrak{M}(|x-x_0|)}(R-|x_0|).\text{“}$$

Къ этимъ двумъ теоремамъ мы добавимъ еще нѣсколько интересныхъ теоремъ въ томъ же духѣ.

Возьмемъ снова функцію

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5).$$

Пусть она въ кругѣ радіуса $\equiv R$ не уничтожается; кругъ этотъ имѣетъ центромъ начало координатъ.

Представимъ $f(x)$ такъ:

$$f(x) = U(r,\ \varphi) \,.\, e^{iV(r,\ \varphi)} \qquad (6),$$

и слѣд.

$$U(r,\ \varphi) \neq 0 \qquad (6')$$

внутри круга радіуса $\equiv R$; пусть кромѣ того внутри того же круга $f(x)$—голоморфна, тогда по теоремѣ Poisson'a:

$$Log\, U(r,\ \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2) Log\, \overline{U}(\psi)}{R^2+r^2-2R Cos(\varphi-\psi)} d\psi\,,$$

гдѣ $\overline{U}(\psi)$ — значенія $U(r,\varphi)$ вдоль круга радіуса R, и мы допускаемъ слѣд., что $f(x)$—существуетъ также и на окружности радіуса R. Но тогда непосредственно находимъ:

$$Log\, U(r,\varphi) < \frac{R+r}{R-r} Log M,\quad M \geq \left| f\left(Re^{i\psi}\right)\right| = U(R,\ \psi),$$

откуда

$$U(r,\varphi) < M^{\frac{R+r}{R-r}},$$

т. е. мы установили теорему:

III. **Теорема.** *Если* $f(x)$*—голоморфна внутри круга радіуса* R *и* **не уничтожается** *въ немъ и на немъ, то*

$$\left|f(x)\right| < M^{\frac{R+r}{R-r}}$$

гдѣ M*—maximum* $|\, f(x) \,|$ *на периферіи круга радіуса* R."

Вотъ еще теорема:

IV. **Теорема.** *Пусть* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$; *тогда, если* $f(x)$*—голоморфна въ кругѣ радіуса* $=R$, *то*

$$R < \frac{\sqrt{M^2 - |\, a_0 \,|^2}}{|\, a_1 \,|},$$

гдѣ M*—модуль maximum* $f(x)$ *на кругѣ радіуса* R."

Докажемъ мы эту теорему чрезвычайно просто.

Пусть

$$x = \frac{a_0}{a_1}\, y,$$

тогда

$$\frac{f(x)}{a_0} = 1 + y + a_2 y^2 + \ldots$$

Теперь по извѣстной, но тоже забытой, *теоремѣ Parseval*'я

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\, f(z) \,|^2\, d\varphi = \sum_0^{\infty}{}_n \;|\, a_n \,|^2\, r^{2n}$$

находимъ непосредственно, если черезъ M назовемъ модуль-maximum $|\, f(x) \,|$ на кругѣ радіуса R, причемъ

$$R = \frac{a_0}{a_1}\, r$$

въ силу сдѣланной замѣны:

$$\left|\frac{M}{a_0}\right|^2 > 1+r^2 = 1+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|^2 R^2 ,$$

откуда дѣйствительно

$$R < \frac{\sqrt{M^2 - |a_0|^2}}{|a_1|} .$$

Имѣя теорему IV, мы въ состояніи усовершенствовать наши теоремы I и II.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $f(x)$ *голоморфна* внутри круга радіуса R. По теоремѣ I мы уже знаемъ, что въ кругѣ радіуса

$$\varrho < \frac{|a_0|}{M} R$$

$f(x)$ *не уничтожается*; но тогда въ силу нашей теоремы IV

$$\varrho < \frac{|a_0|}{M} \frac{\sqrt{M^2 - |a_0|^2}}{|a_1|} ,$$

такъ что, *обобщая* только что сказанное, мы можемъ считать установленной такую теорему:

V. Теорема. *Если* $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ —*голоморфна внутри круга опредѣленнаго радіуса*, **то она не можетъ уничтожиться** *внутри круга радіуса*

$$\varrho < \frac{|a_0|}{M} \frac{\sqrt{M^2 - |a_0|^2}}{|a_1|} ,$$

гдѣ $M \equiv$ *mod. max.* $f(x)$ *на кругѣ голоморфности вышеупомянутаго опредѣленнаго радіуса* R, *причемъ по теоремѣ IV*

$$R < \frac{\sqrt{M^2 - |a_0|^2}}{|a_1|} .$$

Когда теоремы I—V нами уже были выведены, намъ попалъ въ руки мемуаръ *E. Lindelöf'a* (Acta Societatis scientiarum Fennicae, T. 35. 1909) Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel.

Мы съ удовольствіемъ отмѣчаемъ здѣсь во 1° наше *принципіальное* согласіе и сходство въ манерѣ думать о связи конформности и теоріи роста функцій, 2° *совпаденіе почти буквальное* въ неравенствахъ, характеризующихъ функцію голоморфную въ опредѣленномъ кругѣ, хотя, какъ читатель это видитъ, методы вывода неравенствъ у *Lindelöf'a*, и у насъ — различны.

Проведемъ нѣсколько параллелей между нашими формулами и формулами Lindelöf'a.

Теорема II даетъ низшій предѣлъ для корня функціи моногенной какъ у насъ, такъ и у Lindelöf'a, одинаковый.

Теорема III даетъ нѣсколько иное выраженіе для верхняго предѣла модуля функціи *неуничтожающейся* внутри круга радіуса R и на его периферіи.

Теорема IV даетъ, повидимому, *болѣе точный* результатъ у насъ, чѣмъ у Lindelöf'a, ибо

$$\frac{\sqrt{M^2 - |a_0|^2}}{|a_1|} < \frac{M^2 - |a_0|^2}{M\,|a_1|}.$$

Неравенства, которыя мы дали здѣсь, по своему характеру напоминаютъ *неравенства Чебышева* и его изслѣдованія въ работахъ: „*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*", а также „*Sur les questions de minima qui se rattacheut à la réprésentantion approximative des fonctions* (*Oeuvres complètes, T. I*).

Построенія *Чебышева* основаны тоже, можно сказать, на принципѣ роста функціи, принципѣ, который у него является не чѣмъ инымъ, какъ *принципомъ опредѣленія функціи цѣлой или дробной, но раціональной, наименѣе уклоняющейся отъ нуля.*

Результаты, полученные *Чебышевымъ*, поистинѣ замѣчательны и необыкновенны глубоки. Особенно удивительны неравенства, выведенныя имъ для корней уравненія, для предѣловъ роста раціональной функціи цѣлой или дробной. Обращаемъ вниманіе читателя на теоремы, напр., 5, 6, 7 и 8 (p. 302—304, T. 1) и др.

Мы пытались ихъ обосновать съ точки зрѣнія современной, но этого намъ не удалось сдѣлать въ данный моментъ.

4. *Принципъ конформнаго отображенія и нѣкоторыя соображенія съ нимъ связанныя.*

Принципъ конформности и ростъ функціи, какъ мы видимъ, тѣсно связаны съ самыми интимными свойствами изучаемой нами функціи. Это обстоятельство лишній разъ говоритъ намъ, какъ глубока точка зрѣнія *Riemann'a* въ вопросѣ изученія функціи. Вѣдь въ сущности знаменитая *теорема Picard'a* (Annales de l'Ecole Normale, 1880, 2 Série, T. IX) доказана имъ также при помощи соображеній *Riemann*'овскаго характера.

Или, напр., *теорема Hurwitz'a*, опредѣляющая подобно *теоремѣ Landau*, радіусъ $\varrho = \varphi(a_0, a_1)$ круга, въ коемъ $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ не есть ни 0, ни 1, по существу тоже основывается на *отображеніи функціи конформно.*

Или, напр., *теорема Lindelöf'a* (Acta Fennica T. 35) о функціяхъ, не принимающихъ ни 0, ни 1 внутри опредѣленной области, въ сущности тоже покоятся на *принципѣ конформности.*

Глава V.

Соображенія по поводу трансцендентныхъ функцій, опредѣленныхъ неявно алгебраическимъ уравненіемъ.

1. *Общія замѣчанія.* Въ этой главѣ мы не думаемъ преподнести читателю исчерпывающій очеркъ теоріи неявныхъ алгебраическихъ уравненій съ коэффиціентами—цѣлыми трансцендентными функціями — это могло бы составить цѣлую спеціальную трудную работу.

Мы дадимъ здѣсь лишь нѣсколько общихъ замѣчаній, имѣющихъ отношеніе къ нашей работѣ.

Прежде всего мы замѣтимъ, что *общимъ принципомъ* изученія цѣлой трансцендентной, или мероморфной, или же *quasi*-цѣлой, или же *quasi*-мероморфной (термины введенные *Maillet*) является слѣдующій очевидный:

„*Свойства функцій* $u(z)$, опредѣленной уравненіемъ

$$u^n + A_1(z).u^{n-1} + \dots \quad + A_n(z) = 0 \qquad (1)$$

обусловлены уже свойствами коэффиціентовъ $A_k(z)$," и слѣд., какъ въ изученіи алгебрическихъ функцій, методъ общій по существу долженъ остаться въ данномъ случаѣ тѣмъ-же; коэффиціенты $A_k(z)$ пусть будутъ у насъ трансцендентными функціями.

Сдѣлаемъ нѣсколько примѣненій только-что выраженнаго нами принципа; но предварительно предпошлемъ слѣдующую тоже очевидную лемму:

Лемма, *Если намъ данъ рядъ функцій* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$, $\varphi_k(z)$, *и если порядокъ ихъ роста заключенъ, напр., между предѣлами* $\mu(r)^{1-\varepsilon}$ *и* $\mu(r)^{1+\varepsilon}$, *какъ бы мало* ε *ни было (т. е. ихъ ростъ опредѣленъ предѣломъ* $e^{\mu(r)}$ *и* $e^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}$), *то порядокъ любой раціональной функціи отъ упомянутыхъ выше функцій* $\varphi_n(x)$ *будетъ* **асимптотически** *заключенъ между тѣми же предѣлами.*

Доказательство нашей леммы за простотой пропускаемъ. Возьмемъ теперь алгебрическое съ трансцендентными коэффиціентами уравненіе (1) и спросимъ себя: что можно сказать о *ростѣ* функціи $u(z)$, опредѣленной (1), зная *ростъ* коэффиціентовъ $A_k(z)$.? На этотъ вопросъ мы отвѣтимъ теоремой:

I. **Теорема.** *Ростъ различныхъ* $u_i(z)$, *опредѣленныхъ (1), не можетъ быть выше наибольшаго роста для* $A_i(z)$.

Пустъ наибольшій ростъ среди $|A_k(z)|$ опредѣленъ функціей $e^{\mu(r)}$; если мы допустимъ, что

$$\lim_{r=\infty}\left|\frac{u_i(r)}{e^{\mu(r)}}\right| = \infty\,(i=1,\ 2, \ldots, n),$$

то уравненіе

$$u^n\left[1+u^{-1}A_1(z)+\ldots+\frac{A_n(z)}{u^n}\right]=0$$

не могло бы быть удовлетворено для достаточно большихъ $|z|=r$, и слѣд. теорема—доказана.

Теорема (I) говоритъ не что иное, какъ слѣдующее: *ростъ корней уравненій* (1) *опредѣленъ ростомъ его коэффиціентовъ*; но тогда очевидно и обратное заключеніе, а потому имѣемъ также:

II. **Теорема.** *Если ростъ корней (1) заданъ, то ростъ коэффиціентовъ (1) не выше роста корней.*

Къ этимъ двумъ теоремамъ мы дадимъ также и третью:

III. **Теорема.** *Ростъ коэффиціентовъ* $A_k(z)$ *въ* (1) *опредѣляетъ не только ростъ* $u(z)$, *но и ростъ* $u'(z)$.

Справедливость заявленія видна непосредственно изъ соотношенія:

$$u^{n-1}(z) \,.\, A'_1(z) + u^{u-2}(z) \,.\, A'_2(z) + \ldots \quad + A'_n(z) +$$

$$+ u'\Big(nu^{n-1} .\, A_1(z) + n - 1)u^{n-2} \,.\, A_2(z) + \ldots \quad + A_{n-1}(z)\Big) = 0.$$

2. **Къ теоремѣ M. Painlevé:**

„*Функція аналитическая съ n вѣтвями, допускающая единственную особенную точку существенную и изолированную, принимаетъ вблизи этой точки всѣ значенія за исключеніемъ, развѣ, самое большее* $2n$“.

Теорему эту мы взяли изъ *Thèse de M. Rémoundos* „Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes“ (1905), и мы хотимъ сдѣлать къ ней нѣсколько интересныхъ примѣчаній *общаго* характера.

Возьмемъ *неявную* функцію вида

$$\Phi(z_1 u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots \quad + A_n(z) = 0 \qquad (1),$$

и пусть въ ней всѣ $A_i(z)$ суть монодромныя цѣлыя трансцендентныя функціи.

Главный интересъ теоремы *Painlevè* мы видимъ въ томъ любопытномъ фактѣ, что *она ставитъ въ связь теорему Гаусса о существованіи корней съ теоремами типа Picard'a* (см. наши изслѣдованія: § 16, 17,... главы II-ой): оказывается, что полиномъ всегда позволяетъ опредѣлить z, каково бы ни было u, если $A_i(z)$ суть полиномы; но въ случаѣ $A_i(z)$ цѣлыхъ трансцендентныхъ могутъ существовать такія значенія u, для коихъ z въ (1) *корней не имѣетъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе, напр., вида

$$u^2 - 1 + e^z = 0\,,$$

тогда оно для $u = +1$ или $u = -1$ дѣйствительно корнями не обладаетъ.

Или, напр., уравненіе

$$u^n - 1 + e^z = 0$$

допускаетъ n такихъ *исключительныхъ* значеній:

$$u = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2, \ldots,\ \varepsilon^{n-1},\ \text{гдѣ}\ \varepsilon = \sqrt[n]{1} \neq 1;$$

для этихъ n значеній наше уравненіе также корней относительно z не имѣетъ.

Будемъ называть *исключительными Picard'овскими значеніями перваго рода* такія значенія u_i, для коихъ уравненіе (1) становится функціей относительно z *безъ корней.*

Интересно задаться вопросомъ: *сколько такихъ исключительныхъ Picard'овскихъ значеній 1-го рода можетъ существовать у функціи $\Phi(z, u)$, опредѣленной* (1)? Отвѣтить на это можно безъ труда такой теоремой:

I. **Теорема**. *У функціи $\Phi(z, u)$ опредѣленной (1), исключительныхъ Picard'овскихъ значеній 1-го ряда можетъ быть не больше n.*

Дѣйствительно, пусть ихъ существуетъ у насъ $(n+1)$, тогда мы имѣемъ систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} u_1{}^n + A_1(z).u_1{}^{n-1} + \ldots \qquad + A_n(z) = e^{g_1(z)} \\ u_2{}^n + A_1(z).u_2{}^{n-1} + \ldots \qquad + A_n(z) = e^{g_2(z)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n+1}^n + A_1(z).u_{n+1}^{n-1} + \ldots \qquad + A_n(z) = e^{g_{n+1}(z)} \end{array}\right\} \quad (2).$$

Въ виду того, что *всѣ* $u_i (i=1, 2, \ldots, n+1)$ между собой различны, мы можемъ всѣ $A_i(z)$ опредѣлить изъ первыхъ n, положимъ, уравненій и вставить ихъ значенія въ $(n+1)$-ое, тогда мы получимъ окончательное уравненіе вида:

$$\begin{vmatrix} e^{q_1(z)} - u_1^{\,n}, & u_1^{\,n-1}, & u_1^{\,n-2}, & \ldots, & 1 \\ e^{q_2(z)} - u_2^{\,n}, & u_2^{\,n-2}, & u_2^{\,n-2}, & \ldots, & 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ e^{g_n(z)} - u^n_{\,n}, & u_n^{\,n-1}, & u_n^{\,n-2}, & \ldots, & 1 \\ e^{g_{n+1}(z)} - u^n_{n+1}, & u^{n-1}_{n+1}, & \ldots & & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Этотъ детерминантъ мы запишемъ сокращенно такъ:

$$c_1 e^{q_1(z)} + c_2 e^{q_2(z)} + \ldots + c_n e^{g_n(z)} + c_{n+1} e^{g_{n+1}(z)} + c_{n+2} = 0. \quad (3)$$

Функціи $g_k(z)$ здѣсь у насъ таковы, что ихъ ростъ у всѣхъ *не выше* роста наибольшаго среди функцій $A_k(z)$.

Но такое равенство, какъ (3), не можетъ существовать, *не уничтожаясь тожественно* въ силу *теремы Borel'я*, гласящей (Acta Math. 20).

Теорема Borel'я: „*Пусть даны два ряда функцій*

$$g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_n(z)$$
$$h_1(z),\ h_2(z),\ \ldots,\ h_n(z)$$

такихъ, что модуль maximum для $|z| = r$ *функцій* $g_k(z)$ *растетъ* **менѣе быстро** *чѣмъ* $e^{\mu(r)}$, *въ то время какъ модуль* $h_i(r) - h_k(z)$ *растетъ* **болѣе быстро**, *чѣмъ* $\mu(r)^{1+\alpha}$ *для* $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$; $\alpha > 0$ и $\mu(r)$—*возрастающая функція отъ* r; *тогда при сдѣланныхъ предположеніяхъ тожество*

$$g_1(z) \,.\, e^{h_1(z)} + g_2(z) \,.\, e^{h_2(z)} + \ldots + g_n(z) . e^{h_n(z)} = 0$$

необходимо влечетъ

$$g_1(z) = 0,\ g_2(z) = 0,\ \ldots,\ g_n(z) = 0.“$$

Пользуясь этой теоремой, мы, напр., изучая структуру хоть члена c_{n+2}, должны признать, что какое-либо изъ $u_i = u_k$, и слѣд. *мы не можемъ допускать существованіе* $(n+1)$ различныхъ значеній u_i, т. е. наша теорема объ исключительныхъ Picard'овскихъ значеніяхъ 1-го рода—вѣрна.

Обращаемъ вниманіе читателя, на то, что не нужно смѣшивать исключительныя Picard'овскія значеній u функціи $\Phi(z,u)$ (перваго ряда) съ тѣми значеніями u, которыя удовлетворяютъ $\Phi(z,u)$ *тожественно*, съ тѣми u'_i, для коихъ

$$\Phi(z,\ u'_i) \equiv 0 .$$

Такихъ значеній тоже, конечно, не можетъ быть произвольно много, и maximum ихъ $\equiv (n-1)$, ибо, допуская ихъ число равнымъ n, мы имѣемъ изъ n уравненій

$$\begin{array}{ll} u'^{\,n}_1 + A_1(z) \, . \, u'^{\,n-1}_1 + \ldots & + A_n(z) \equiv 0 \\ u'^{\,n}_2 + A_1(z) \, . \, u'^{\,n-1}_2 + \ldots & + A_n(z) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u'^{\,n}_n + A_1(z) \, . \, u'^{\,n-1}_n + \ldots & + A_n(z) = 0 \end{array}$$

какъ слѣдствіе того, что всѣ u'_i—различны, всѣ $A_k(z)$ тожественными съ constant'ами вопреки предположенію. Эти $(n-1)$ значеніе не могутъ играть существенной роли, и ихъ можно игнорировать.

Въ нашей теоремѣ I мы выдѣлили какъ первую категорію исключительныхъ Picard'овскихъ значеній тѣ изъ u, для коихъ $\Phi(z,u)$ приводится къ функціямъ отъ z *безъ нулей*; будемъ относить къ *той же первой категоріи исключительныхъ Picard'овскихъ значеній и тѣ изъ u, для коихъ $\Phi(z,u)$ приводится къ функціи отъ z съ конечнымъ числомъ корней или съ числомъ корней меньшимъ*

$$Log\, \mathfrak{M}(r) ,$$

если $\mathfrak{M}(r)$—наиболѣе быстро растущій модуль среди $|u_i(z)|$ (см. наше обобщеніе теоремы Picard'a § 18, т. II). Очевидно такихъ исключительныхъ значеній тоже не можетъ быть выше n; доказательство основано на томъ же *принципѣ Borel*'я, и мы его оставляемъ въ сторонѣ, цитируя только теорему:

II. **Теорема.** *Если намъ дана функція* $\Phi(z, u)$, *опредѣленная* (1) *съ коэффиціентами* $A_k(z)$ — *цѣлыми трансцендентными функціями, то исключительныхъ Picard'овскихъ значеній первой категоріи для* u *не можетъ быть больше* n.

Къ исключительнымъ значеніямъ и Picard'овскимъ второй категоріи мы отнесемъ такія значенія u_i, которыя даютъ въ извѣстныхъ случаяхъ *распредѣленіе нулей функціи* $\Phi(z, u_i)$ **иное**, чѣмъ у каждой изъ $A_k(z)$, т. е. *показатель сходимости нулей у* $\Phi(z, u_i)$ *ниже показателя сходимости нулей у каждой изъ* $A_k(z)$ *или по крайней мѣрѣ ниже показателя сходимости одной изъ наиболѣе растущей функціи* $A_k(z)$ (См. наши изслѣдованія § 16, 17, 18 и др. главѣ II).

Мы не будемъ приводить доказательства, ибо оно — похоже на только что произведенныя,—слѣдующей очевидной теоремы, являющейся дополненіемъ къ теоремѣ I и II-ой настоящаго параграфа:

III. **Теорема.** „*Если мы имѣемъ функцію* $\Phi(z, u)$, *опредѣленную* (1), *и если мы имѣемъ* **такія исключительныя Picard'овскія значенія, отнесенныя нами ко второй категоріи,** u''_i, *для коихъ* $\Phi(z, u''_i)$ *дѣлается функціей съ распредѣленіемъ нулей* **отличнымъ** *отъ распредѣленій нулей у наиболѣе быстро растущей функціи* $A_k(z)$ (*т. е. показатель сходимости нулей ниже показателя сходимости нулей у maximal'ьной по росту среди* $|A_i(z)|$), *то такихъ исключительныхъ значеній второй категоріи не можетъ быть больше* n."

Рекомендуемъ читателю сравнить наши изслѣдованія близко подходящія къ изслѣдованіямъ *Rémoundos'a* Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1906).

Конечно изслѣдованія *Remoundos*'а—глубже и интереснѣй нашихъ.

Поднимемъ въ заключеніе этой главы еще одинъ вопросъ, который мы рѣшить не умѣемъ въ данный моментъ сполна, а потому обращаемъ на него вниманіе читателей.

Дѣло въ томъ, что, повидимому, между *исключительными значеніями Picard'а и особенными точками, какъ таковыми,* существуетъ нѣкоторая связь. и обнаружить ее — интересная проблема для математика. Иллюстрируемъ эти соображенія маленькимъ тривіальнымъ примѣромъ, напр., возьмемъ функцію

$$\Phi(z,u) = u - e^z,$$

тогда для нея $u=0$, есть *исключительное Picard'овское значеніе*; но обратно — изъ уравненія $z = Log\, u$ видно, что $u = 0$ *есть особенная точка* для z, какъ функціи u. Случайное это явленіе или нѣтъ? Мы не думаемъ, что это обстоятельство — случайно: вѣдь, если значеніе $u=0$ — невозможно въ уравненіи

$$u - e^z = 0 \quad (o)$$

то z, *какъ функція и должна* **безчисленное множество разъ обѣгать точку** $u=o$, **а** отсюда съ ясностью вытекаетъ, что *исключительное Picard'овское значеніе первой категоріи* $u=o$ для уравненія (o) *является точкой развѣтвленія съ безчисленнымъ числомъ вѣтвей для z какъ функціи u, т. е. дѣйствительно $u=o$ есть особенная точка для z.*

Это наше соображеніе, намъ кажется, — *основнымъ* для болѣе глубокихъ и детальныхъ изслѣдованій поставленнаго нами вопроса. Пожалуй можно даже считать слѣдующую теорему справедливой:

IV. **Теорема.** *Если мы имѣемъ линейную функцію*

$$u - \varphi(z) = o,$$

гдѣ $\varphi(z)$ — цѣлая трансцендентная функція, и если $u=u_o$ есть исключительное Picard'овское значеніе въ томъ смыслѣ, что $\varphi(z) - u_o$ **не имѣетъ** *корней, то для $z = \psi(u)$ значеніе u_o — есть точка развѣтвленія съ безконечнымъ числомъ вѣтвей (подобно логариѳмической).*"

Труднѣй изслѣдовать роль другихъ исключительныхъ значеній Picard'а въ отношеніи особенныхъ точекъ, и въ данный моментъ мы не скажемъ ничего больше по этому вопросу.

Мы обратимся сейчасъ къ другому вопросу тоже интересному, именно: если намъ дана функція $\Phi(z,u)$, опредѣдѣленная (1), и если u_i есть исключительное Picard'овское значенiе, а u_k — обыкновенное, то чѣмъ въ сущности одно отличается отъ другого? Какая разница между функцiями $\Phi(z,u_k)$ и $\Phi(z,u_i)$?

Намъ думается, что мы нашли отвѣтъ на этотъ вопросъ. Пусть же

$$\Phi(z,u) = u^n + A_1(z) \, . \, u^{n-1} + \ldots + A_n(z) \qquad (3).$$

Пусть ради простоты функцiи $A_k(z)$—*конечнаго* порядка роста и пусть ϱ—maxim'альный порядокъ.

Представимъ (3) такъ:

$$\Phi(z,u) = \Phi(o,o) + z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_o + u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)_o + \frac{1}{2}\left[\, z^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)_o + \right.$$

$$\left. + 2zu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial z}\right)_o + u^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right)_o\right] + \ldots$$

или, располагая послѣднее выраженiе по степенямъ z, находимъ:

$$\Phi(z,\ u) = \alpha_o(u) + z\alpha_1(u) + \ldots \quad + z^n \, . \, \alpha_n(u) + \ldots \qquad (4).$$

Теперь, вообще говоря, $\Phi(z, u)$ для обыкновеннаго значенiя u есть функцiя относительно z порядка ϱ; но можно ли найти такiя значенiя u_o, при которыхъ $\Phi(z, u)$ была бы порядка роста ниже ϱ-го? На этотъ вопросъ можно отвѣтить такъ: задача—возможна, если для нѣкотораго значенiя u_o коэффицiентъ $\alpha_n(u_o)$ будетъ удовлетворять неравенствамъ или *асимптотическимъ* равенствамъ, характеризующимъ функцiю порядка роста ниже ϱ-го.

Отсюда мы дѣлаемъ такой интересный выводъ:

V. **Теорема.** „*Если намъ дана функцiя $\Phi(z, u)$ опредѣленная (3) съ коэффицiентами $A_k(z)$ порядка роста не выше ϱ-го, и если мы имѣемъ пару значенiй u_o и u_1 такихъ, что*

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\alpha_n(u_0)}{\alpha_n(u_1)}\right|^{\frac{1}{n}}=0 \text{ или } \infty, \text{ но не конечное число,}$$

то значенія u_0 *и* u_1 **не могутъ быть одновременно исключительными значеніями Picard'a".**

Въ самомъ дѣлѣ, если u_1 — обыкновенное значеніе, то въ силу закона (5 (F), I);

$$\sqrt[n]{|\alpha_n(u_1)|} \backsim \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}}.$$

Если u_0 далѣе—таково, что

$$\sqrt[n]{|\alpha_n(u_0)|} \backsim \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho_0}}}, \quad \rho_0 \neq \rho,$$

то при $\rho_0<\rho$

$$\lim_{n=} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_n(u_0)}{\alpha_n(u_1)}\right|} \backsim \lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}}=0,$$

и мы видимъ съ ясностью справедливость теоремы V-ой.

Изъ этой теоремы мы выводимъ нашу теорему (C) § 19 главы II-ой.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ цѣлую трансцендентную функцію $f(z)$, тогда

$$f(z)=f(re^{iu})=A(r,u)+iB(r,u),$$

гдѣ $A(r,u)$ и $B(r,u)$ суть цѣлыя трансцендентныя функціи r и u, такъ что можно представить $|f(z)|$ въ видѣ:

$$|f(z)|=g_0+\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \alpha_n(u).r^n.$$

Теперь по теоремѣ V, если

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{\alpha_n(u_0)}{\alpha_n(u_1)}\right|^{\frac{1}{n}} \neq k \text{ (конечному числу)},$$

то на периферіи круга радіуса r одинъ изъ аргументовъ u_o и u_1 — *исключительный*, а потому возможенъ для $f(z)$ *cas d'exception Picard'a*, ибо тогда отношеніе между модулями $|f(z)|$:

$$M(r,u_o) \text{ и } M(r,u_i)$$

не есть конечное число для одной и той же периферіи круга радіуса$\equiv r$.

3. *Замѣчанія по поводу роста функціи вблизи особенной точки.* Послѣ всѣхъ сдѣланныхъ нами замѣчаній и изслѣдованій мы скажемъ еще нѣсколько словъ о взаимоотношеніи роста функціи и ея особенныхъ тбчекъ.

Прежде всего обращаемъ вниманіе на слѣдующій *общій принципъ* теоріи функцій:

„*Природа функціи опредѣляется и обуславливается числомъ особєнныхъ точекъ и ростомъ функціи вблизи нихъ.*"

На изученіи, напр., цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій, обладающихъ одной единственной особенной точкой, именно безконечно-удаленной, мы убѣдились уже въ справедливости принципа.

Самый простой и самый естественный способъ изучить ростъ функціи вблизи какой-либо *особенной точки* $z=a$ состоитъ въ томъ, что мы должны предложенную намъ функцію $\Phi(z)$ преобразовать при помощи замѣны

$$z-a=\frac{1}{z}$$

и изучать ростъ $\Phi\left(\frac{1}{z}+a\right)$ вблизи $z=\infty$, стараясь найти ея *асимптотическое выраженіе* вблизи точки $z=\infty$, какъ это мы дѣлали раньше; тогда функціи $\Phi(z)$ вблизи $z=a$ будетъ охарактеризована достаточно детально: мы будемъ знать ея ростъ, ростъ ея нулей въ области смежной съ $z=a$, если они существуютъ, и ростъ коэффиціентовъ ея ряда въ области смежной съ $z=a$.

Если мы продѣлаемъ тоже самое съ другими *особенными точками* нашей функціи, то мы будемъ прекрасно оріентированы относительно природы функціи и ея роста при измѣненіи z по всей плоскости.

Роль особенныхъ точекъ въ вопросахъ изученія природы функціи—явленіе въ высшей степени любопытное и съ перваго взгляда—парадоксальное. И что особенно—любопытно: выставленный нами общій принципъ часто вполнѣ обрисовываетъ *сполна* природу функціи, если намъ извѣстны особенныя точки дифференціальнаго уравненія ее опредѣляющаго, если только его интегралъ не обладаетъ *подвижными* особенными точками, обусловленными измѣненіями произвольныхъ постоянныхъ.

Какъ слѣдствіе вышеупомянутаго *общаго принципа* является, повидимому справедливое, такое довольно общаго характера положеніе:

(А). **Теорема**. „*Функція, обладающая разной природы особенными точками съ точки зрѣнія роста функціи вблизи нихъ, не можетъ расти по одному и тому же закону въ различныхъ частяхъ плоскости.*"

Функціи обладающія нѣсколькими *особенными точками* (еще лучше сказать „*существенно особенными*")—интересны для изученія, но мы сейчасъ ими заниматься не будемъ. Ихъ интересъ заключается въ томъ, что, изучая ихъ, мы придемъ къ поразительнымъ обобщеніямъ. Напр., *теорема Гаусса* о существованіи корней и о разложеніи уравненія n—ой степени на n факторовъ линейныхъ здѣсь обобщается въ теорему о разложеніи функціи $\Phi(z)$ на факторы такого рода:

$$\Phi(z)=\varphi(z).\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right).\varphi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right)..\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

гдѣ $\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$—суть цѣлыя трансцендентныя функціи относительно $\dfrac{1}{z-\alpha_i}$, и слѣд. α_i—*существенно особенная* точка; $\varphi(z)$—цѣлая трансцендентная функція отъ z или иногда полиномъ; также $\varphi_i\left(\dfrac{1}{z-\alpha_i}\right)$ могутъ быть иногда полиномами относительно $\dfrac{1}{z-\alpha_i}$.

Далѣе теорема о разложеніи раціональной дроби на сумму частныхъ дробей здѣсь обобщается въ теорему о разложеніи функціи $\Phi(z)$ на сумму функцій

$$\varphi(z)+\varphi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)+\varphi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)+\ \ldots$$

гдѣ $\varphi(z)$ — цѣлая трансцендентная функція z (иногда полиномъ), а $\varphi_i\left(\dfrac{1}{z-\alpha_i}\right)$—цѣлая трансцендентная функція относительно $\dfrac{1}{z-\alpha_i}$ (иногда тоже полиномъ). Чрезвычайно интересно изучить законы, коими управляются такія *общія* разложенія, равно какъ и самую возможность такихъ разложеній; но это—уже предметъ особой самостоятельной работы, выходящей за предѣлы настоящей работы.

4. **Историческая замѣтка по поводу работы Liouville'я:** „*Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients.*" *Journal de Liouville T. II*).

Въ настоящее время, когда теорія роста функцій вылилась уже въ опредѣленную вѣтвь математики съ своими задачами и принципами, полезно оглянуться назадъ и найти въ сравнительно далекомъ прошломъ зачатки современныхъ теорій, но только подъ другимъ угломъ зрѣнія. Идеи родственныя современнымъ теоріямъ роста функцій можно найти, какъ мы случайно открыли, у *Liouville*'я.

Liouville ставилъ задачу очень широко и пытался обосновать строго теорію и законы взаимоотношеній между собой функцій различной природы, а также онъ хотѣлъ рѣшить и другой кардинальный вопросъ въ общей теоріи функцій, именно вопросъ *о возможности выразить одну изъ функцій, принадлежащую къ какому либо одному опредѣленному классу, черезъ другую* или *другія, принадлежащія другому классу*, и притомъ прежде всего онъ искалъ *алгебраическихъ* соотношеній.

За алгебрическими соотношеніями въ чистомъ смыслѣ этого слова принято всегда видѣть *конечность* числа операцій, произведенныхъ надъ входящими въ соотношеніе зависимыхъ или независимыхъ элементовъ; но соотношеніе переходитъ въ *трансцендентное*, если число алгебрическихъ операцій становится безконечнымъ. Простѣйшими трансцендентными функціями будутъ $Logx$ и e^x, и при помощи ихъ мы въ состояніи построить другія болѣе сложныя въ безчисленномъ числѣ.

Liouville прежде всего далъ классификацію трансцендентныхъ функцій и дѣлалъ это онъ такъ: сначала идутъ простѣйшія изъ алгебрическихъ функцій—*раціональныя*; пусть онѣ будутъ *нулевого порядка*; далѣе пойдутъ ирраціональности алгебрическія, какъ-то, напр., $\sqrt[3]{\varphi(x)}$, гдѣ $\varphi(x)$—раціональная; ирраціональности вида

$$\sqrt[5]{\varphi(x)},\ \varphi(x)^{3/2},\ \ldots$$

мы назовемъ по *Liouville*'ю ирраціональностями *перваго порядка*; а вотъ ирраціональности *второго порядка*

$$\sqrt{x+\sqrt[13]{x^2+1}+\sqrt[6]{x}+12x^5} \text{ и др.}$$

Понятно можно говорить объ алгебрическихъ ирраціональныхъ *мономахъ* и *полиномахъ*.

Характерный признакъ ирраціональности n—го порядка тотъ, что число ирраціональныхъ операцій *сведенное къ minimum*'у, въ ней есть строго n, и не можетъ уже быть понижено, такъ что, напр.,

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^{17}}}$$

мономъ перваго порядка, а не второго.

Тотъ же принципъ классифицируетъ и трансцендентныя функціи; напр.,

$$LogLog(x^2+1)+6Logx+\sqrt{x}+\frac{e^x-1}{Logx}$$

есть трансцендентная функція 2-го рода; здѣсь порядокъ зависитъ уже отъ *числа трансцендентныхъ* операцій, причемъ разницей между операціей трансцендентной и алгебрической здѣсь является *безконечное* число операцій въ одномъ случаѣ и *конечное число* ихъ во второмъ.

Такимъ образомъ существеннымъ пунктомъ при классификаціи алгебрическихъ ирраціональностей или трансцендентныхъ функцій у *Liouville*'я является число ирраціональныхъ алгебрическихъ операцій въ одномъ случаѣ и число трансцендентныхъ операцій въ другомъ, причемъ это послѣднее относится безъ различія какъ къ операціямъ Log'ированія, такъ и экспонированія, т. е., напр. функціи

$$e^{e^{\sqrt{x}}}+Log(x+1) \quad \text{или} \quad LogLogx+e^{\sqrt{x-1}}$$

каждая является трансцендентной функціей второго рода.

Съ современной точки зрѣнія такая классификація—неполная и мало удовлетворительная, ибо она предполагаетъ какъ функціи, принадлежащія къ одному и тому же классу, такія, которыя съ нашей точки зрѣнія—съ точки зрѣнія роста функцій—принадлежатъ къ разнымъ классамъ, и причина этого явленія—объяснима: у *Liouville*'я точка зрѣнія, если можно такъ выразиться, — *операціонная*, у насъ болѣе точная—точка зрѣнія роста; Liouville'ь, желая охарактеризовать функцію, считаетъ число операцій, мы же подобно *Borel*'ю въ его книгѣ *Léçons sur la théorie de la croissance* обращаемъ вниманіе на ростъ функцій.

Насколько вторая классификація выразительнѣй первой, показываетъ слѣдующій примѣръ: функція

$$\Phi(x) = Log(1 + e^x + Log x)$$

есть порядка 2 по *Liouville*'ю, и по нашему при помощи *трансфинита Кантора* (см. *Borel*, loc. cit.)

$$\omega^{-1}.\omega = 1,$$

ибо *асимптотически*

$$\Phi(x) \backsim x(1 + \varepsilon(x)), \quad \lim_{x=\infty}. \varepsilon(x) = 0.$$

Мы говоримъ здѣсь: вторая классификація—выразительнѣй, ибо классификація съ точки зрѣнія роста функціи есть въ тоже время яркая классификація функцій и въ отношеніи ихъ свойствъ.

Но, быть можетъ, полезно удержать все-же, такъ сказать, и *операціонную точку зрѣнія* въ вопросахъ изученія функцій, ибо, теоретически разсуждая, этотъ принципъ операціонный можетъ оказаться полезнымъ. Съ принципомъ Liouville'я, формулированнымъ такъ:

Принципъ Liouville'я: *„Если намъ дана трансцендентная функція U n—го порядка, зависящая отъ мономовъ, вообще говоря, n—го порядка $\theta, \eta, \ldots, \omega$ и перемѣннаго x причемъ $\theta, \eta, \ldots \omega$ въ свою очередь суть функціи x, то*

$$U = f(x, \theta, \eta, \ldots, \omega),$$

и другой функціи $\varphi(x, \theta, \eta, \ldots \omega)$ эквивалентной f существовать не можетъ, если число мономовъ $\theta, \eta, \ldots, \omega$ сведено къ minimum'у: функція φ должна быть **тожествомъ** *относительно $\theta, \eta, \ldots \omega$“*

можно поставить въ связь *теорему Borel*'я (гл. V, 2), ибо одна хорошо дополняетъ другую: одна съ точки зрѣнія операціонной выражаетъ свойства функціи, составленной изъ нѣсколькихъ другихъ функцій, другая—съ точки зрѣнія роста.

Глава VI-я.

Трансцендентныя числа и ростъ функцій.

1. Занимаясь, въ бытность мою еще студентомъ алгебрическими и трансцендентными числами. (Мое студенческое сочиненіе на медаль было: *„Обзоръ изслѣдованій объ алгебрическихъ и трансцендентныхъ числахъ* (1899 г.), я познакомился съ теоремами *Hermite*'а и *Lindemann*'а по поводу этихъ чиселъ. Позже, занимаясь ростомъ функцій, я написалъ сочиненіе „О ростѣ функцій", которое началъ, было, даже печатать (1904 г.), но по случайнымъ обстоятельствамъ бросилъ и печатать, и заниматься развитіемъ моихъ мыслей.

Сообщаю эти на первый взглядъ неинтересныя свѣдѣнія потому, что мысль *Rémoundos*'а [1]) (греческаго современнаго ученаго) о связи теоріи роста функцій, точнѣе *теоремы Borel*'я (V, 2) и *теоремы Lindemann*'а никогда не была намъ чуждой.

Разница только въ слѣдующемъ: *Rémoundos* видѣлъ и обнаружилъ эту связь, замѣтивъ сходство и *по формѣ*, и *по послѣдствіямъ* между теоремой *Lindemann*'а и *теоремой Borel*'я (loc. cit.).

Дѣйств.,

Теорема Lindemann'а: „*Если* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *суть числа алгебрическія, равно какъ и* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, *то равенство*

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_p e^{\alpha_p} = 0$$

возможно лишь въ томъ случаѣ, когда всѣ $A_i \equiv 0$"

---

[1]) См. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1906; p. 367 и др.

и *теорема Borel*'я (loc. cit.) невольно наводятъ на эту связь, а это—точка зрѣнія и исходный пунктъ разсужденій *Rémoundos*'а.

Мы же лично думали о таковой связи трансцендентныхъ чиселъ и теорій функцій нѣсколько иначе, и свои соображенія мы сообщили даже профессору въ Геттингенѣ *D. Hilbert*'у (1906-мъ году лѣтомъ), но маститый ученый въ виду, быть можетъ, расплывчатости нашихъ соображеній, не далъ намъ опредѣленныхъ указаній.

Мы въ своихъ размышленіяхъ находились больше подъ вліяніемъ идей *Liouville*'я по этому предмету, и мы полагали, что *степень быстроты роста числа*, выраженнаго при помощи того или иного безконечнаго алгориѳма (непрерывной дробью или рядомъ), опредѣляетъ природу числа. Это—наша точка зрѣнія. Позже мы убѣдились въ томъ, какъ мы были справедливы въ нашихъ соображеніяхъ, ибо мы встрѣтили буквально *туже точку зрѣнія* у современнаго французскаго математика *E. Maillet*. (См. его книгу „Introduction à la théorie des nombres transcendants“).

Къ нашему глубокому сожалѣнію благодаря разнымъ случайностямъ мы не только не занялись разработкой нашихъ идей, но даже забыли ихъ, и лишь вотъ недавно мы снова на нихъ натолкнулись, познакомившись съ удивительной книгой *E. Maillet*, а также съ мемуаромъ *Rémoundos*'а [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, связь, указанная *Rémoundos*'омъ — поразительна, и, если мы еще добавимъ сюда также методъ изученія чиселъ трансцендентныхъ *Liouville*'емъ, то мы видимъ, что современнымъ математикамъ дѣйствительно открывается новая и поразительно интересная область изслѣдованія.

Никогда, можно сказать, ариѳметика не соприкасалась такъ тѣсно съ анализомъ безконечно малыхъ, теорій функцій, дифференціальныхъ уравненій, и математики, начавшіе, было, терять вѣру въ возможность осуществленія „единства“ въ математической наукѣ, могутъ надѣяться, что мысль о

---

[1]) Въ то время, когда настоящая работа была сдана въ печать, намъ попался въ руки интересный мемуаръ E. Stridsberg'a въ Acta Math. T. 33. (1910). «Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes», и мы съ удовольствіемъ отмѣчаемъ общее сходство во взглядахъ

единствъ идей въ анализѣ какъ конечномъ, такъ и безконечномъ,—осуществима. По поводу связи ариѳметики и анализа намъ невольно приходятъ на память слѣдующія слова *H. Poincaré* (*Science et méthode*, p. 36):

„*C'est ainsi qu'on parle de nombres transcendants, et qu'on se rend compte ainsi que la classification future de ces nombres a déjà pour image la classification des fonctions transcendantes, et cependant on ne voit pas encore très bien comment on pourra passer d'une classification à l'autre; mais si on l'avait vu, cela serait déjà fait, et ce ne serait plus l'oeuvre de l'avenir.*"

Сходство между теоремами *Hermite-Lindemann*'а и Borel'евской—все-же неполное: читатель, непосредственно сличая эти двѣ теоремы, видитъ, что *теорема Borel*'я обнимаетъ собой безчисленное множество функцій, растущихъ различно въ зависимости отъ функціи $\mu(r)$, фигурирующей въ выраженіяхъ

$$e^{\mu(r)} \text{ и } e^{\mu(r)(1+\alpha)},\ 0<\alpha,$$

играющихъ здѣсь главную роль; между тѣмъ *теорема Lindemann*'а приводитъ въ связь лишь числа алгебраическія и трансцендентныя. Вставая же на точку зрѣнія *Maillet*, можно создать въ будущемъ особую классификацію трансцендентныхъ чиселъ, и тогда—возможно—теорема *Hermite-Lindemann*'а будетъ лишь частнымъ случаемъ другой болѣе общей теоремы, еще не существующей.

Полагая въ основу *быстроту роста* числа, выраженнаго при помощи какого-либо безконечнаго алгориѳма, возможно, что мы найдемъ *какое-нибудь соотношеніе между трансцендентными числами разныхъ порядковъ.* Какіе пути приведутъ къ рѣшенію этой интересной проблемы, мы не знаемъ, но мы думаемъ, что вѣроятно можно прійти къ рѣшенію путемъ *Liouville*'я, которыми уже шелъ въ своей книгѣ *Ed. Maillet*; это—одинъ путь, а другой путь—изученіе дифференціальныхъ уравненій съ точки *зрѣнія роста функцій*; такимъ путемъ былъ доказанъ цѣлый рядъ теоремъ по поводу *fonctions hypertranscendantes* въ книгѣ *Maillet* (loc. cit. p. 246 и слѣдующія). [1]).

[1]) См. также выше упомянутый мемуаръ г. Stridsberg'а.

Этотъ второй путь — еще совсѣмъ новый, и въ этомъ направленіи современный математикъ найдетъ для себя неисчислимое число интереснѣйшихъ задачъ и вопросовъ.

Послѣ сдѣланныхъ нами замѣчаній, надѣемся, справедливость фразы *H. Poincaré*, приведенной нами выше, становится больше, чѣмъ понятной. Родство между проблемой о трансцендентныхъ числахъ и проблемой роста функцій мы можемъ обнаружить еще и иначе, вставая на точку зрѣнія ученія *Mengenlehre*, точнѣй, если мы взглянемъ на ту и другую область — область трансцендентныхъ чиселъ и область роста функцій (*ensemble de croissances des fonctions*) съ точки зрѣнія ихъ *мощности* (*puissance*, *Mächtigkeit*), ибо повидимому *степень ихъ неперечислимости*—одна и таже: на это наводятъ изслѣдованія *Du-Bois-Reymond*'а о ростѣ функцій съ одной стороны, а также соображенія объ ирраціональныхъ и трансцендентныхъ числахъ съ другой. (См. *Du-Bois-Reymond*. Math. Ann. B. 8 und 11). Мы не вдаемся въ изслѣдованіе этого вопроса, ибо это насъ далеко бы завело.

Въ заключеніе мы обращаемъ вниманіе читателя еще разъ на мемуаръ *Rémoundos*'а: въ немъ читатель найдетъ интересныя обобщенія теоремъ *Hermite-Lindemann*'а; замѣтимъ еще разъ также, что, если число заданное намъ для изслѣдованія, предложено въ видѣ ряда и непрерывной дроби, то *ростъ этихъ послѣднихъ и степень быстроты роста ихъ несомнѣнно должны играть роль при опредѣленіи природы числа*—это—наша точка зрѣнія.

Вставая на эту точку зрѣнія, мы должны, рѣшить массу вопросовъ: когда, напр., сумма двухъ чиселъ α и β разныхъ по природѣ является одинаковой по природѣ съ числами α или β? Какія условія этого? Какимъ условіямъ рядъ $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ долженъ удовлетворять, чтобы выразить, напр., при $x=a$ раціональному (или алгебрическому) числу число алгебрическое или трансцендентное? и т. п.; но мы должны здѣсь остановиться, ибо эти вопросы—еще неясны намъ, и мы не умѣемъ отвѣтить на нихъ.

Глава VII-я.

Теорія роста функцій и аналитическое продолженіе.

Настоящую заключительную главу нашей работы мы хотимъ посвятить вопросу объ аналитическомъ продолженіи функціи, такъ какъ благодаря работамъ *Borel'я* (Lécons sur les séries divergentes) и *Le Roy* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 1900), вопросъ объ аналитическомъ продолженіи и теорію роста функцій можно очень просто и непосредственно поставить въ связь.

Займемся сначала *рядами sommables* (*суммируемые*) Бореля. Пусть намъ дана функція

$$f(z)=a_0+a_1z+\ \ldots\ +a_nz^n+\ \ldots \qquad (1),$$

и пусть радіусъ сходимости ряда (1) есть *нуль* всегда. Повидимому такой рядъ, опредѣленный тѣмъ условіемъ, что

$$\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\infty \qquad (2)$$

совершенно безполезенъ, благодаря такому закону росту коэффиціентовъ, который выраженъ у насъ формулой (2). Но послѣ работъ Borel'я такой взглядъ—ошибоченъ: если рядъ (1) *формально* существуетъ, то этого уже *достаточно*, чтобы *построить* при помощи его функцію, имъ *опредѣляемую*, хотя рядъ (1) формально расходящійся.

Таковой является современная точка зрѣнія на рядъ *Taylor'а*; рядъ Taylor'а является всегда носителемъ скрытыхъ свойствъ функціи, и нужно только умѣть создать методъ, дающій возможность „вскрыть“ эти „скрытыя свойства“ ряда—функціи; выражаясь картинно, нужно умѣть подъискать соотвѣтствующій реактивъ, чтобы вскрыть эти свойства.

Нетрудно понять, что работы *Mittag-Leffler*'а, работы *Borel*'я и *Le Roy*—всѣ онѣ даютъ какъ разъ такіе методы по отношенію къ ряду *Taylor*'а.

Такіе методы, утверждаемъ мы, расширяютъ понятіе суммы ряда въ томъ же смыслѣ, какъ интегралы, взятые отъ функцій; рядъ расходящійся въ этомъ смыслѣ можетъ уже не быть *однозначной* функціи и иногда можетъ допускать даже *періоды*. Обратимся однако къ нашей проблемѣ; замѣтимъ, что рядъ (1) можно записать, не измѣняя его

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n n!}{n!} z^n,$$

и какъ

$$n! = \int_0^\infty e^{-a}.a^n da,$$

то

$$f(z) = \sum_0^\infty \int_0^\infty e^{-a} \frac{a_n (az)^n}{n!} da \qquad (2').$$

Предположимъ, что рядъ

$$\Phi(az) = \sum_0^\infty \frac{a_n (az)^n}{n!} \qquad (3)$$

(это и есть рядъ *взаимный* ряду (1) въ смыслѣ Бореля),— сходящійся, и предположимъ также, что порядокъ роста его $\rho \leqslant 1$, тогда

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a} \Phi(az) da \qquad (4),$$

и мы видимъ, почему $\varrho \leqslant 1$, ибо для существованія (4) нужно, чтобы интегралъ

$$\int_0^\infty \left| e^{-a}\Phi(az) \right| da \qquad (5)$$

$$(a \equiv \text{реально})$$

былъ *конечнымъ*, а это случится, если $\Phi(az)$—цѣлая трансцендентная функція порядка роста *не выше* перваго. Мы не будемъ затрагивать вопросовъ, поднятыхъ и трактуемыхъ Борелемъ въ его книгѣ (loc. cit.) по поводу функціи (4), и сдѣлаемъ лучше нѣсколько примѣчаній новыхъ.

Допустимъ, что намъ удалось представить $\Phi(x)$ такъ:

$$\Phi(x) = e^{\gamma x^\varrho}.\Phi_1(x), \quad \varrho < 1 \qquad (6),$$

причемъ порядокъ роста $|\Phi_1(x)|$ *еще ниже* ϱ, тогда формула (4) запишется такъ:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a(1-\gamma z^\varrho \,.\, a^{\varrho-1})}.\Phi_1(az)da \qquad (7).$$

Формула (7) — интересна, ибо она даетъ возможность знать многія свойства функціи (7). Такъ, мы видимъ, что, пока $\varrho < 1$, функція $f(z)$—законна для *всей* плоскости; въ случаѣ, если $\varrho = 1$, формула (7) превращается въ формулу

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a(1-\gamma z)}.\Phi_1(az)da \qquad (8),$$

и мы непосредственно замѣчаемъ, что въ этомъ случаѣ точка $z = \frac{1}{\gamma}$, гдѣ $\gamma = \sigma e^{i\alpha}$,—*особенная* для интеграла и слѣд. для $f(z)$. Если мы положимъ $z = re^{i\varphi}$, то (8) законна, пока реальная часть

$$\mathrm{R}\left\{1 - \gamma z\right\} > 0$$

или

$$1 - r\sigma Cos(\varphi + \alpha) > 0 \qquad (9).$$

Если положимъ

$$\left.\begin{aligned} z &= r(Cos\varphi + iSin\varphi) = X + iY \\ \gamma &= \sigma(Cos\alpha + iSin\alpha) = x_0 + iy_0 \end{aligned}\right\},$$

то (9) становится

$$1 > Xx_0 - Yy_0 \qquad (10), \quad \text{и} \quad 1 = Xx_0 - Yy_0 \qquad (11)$$

есть—*прямая, проходящая черезъ точку* $z_0 = \frac{1}{x_0 + iy_0}$ и *перпендикулярная къ лучу, соединяющему точку нулей съ точкой* $\frac{1}{\gamma}$.

Можетъ-ли быть $f(z)$ продолжена вдоль луча, соединяющаго точки 0 и $\frac{1}{\gamma}$, за точку $\frac{1}{\gamma}$? Въ этомъ случаѣ $\varphi = -\alpha$, и (9) превращается въ

$$1 - r\sigma > 0 \quad \text{или} \quad r < \frac{1}{\sigma},$$

т. е. за точку $\frac{1}{\gamma}$ функція $f(z)$ *продолжена быть не можетъ.*

Такимъ образомъ мы получили слѣдующую теорему, нѣсколько обобщающую теорему Borel'я:

(А). **Теорема.** „*Если намъ предложенъ рядъ (1) съ* **нулевымъ** *кругомъ сходимости и если рядъ* **взаимный** *съ (1)* $\Phi(az)$ *можетъ быть представленъ какъ*

$$\Phi(az) = e^{\gamma(az)^\varrho} . \Phi_1(az), \quad (\varrho < 1),$$

причемъ порядокъ роста $\Phi_1(az)$ **ниже** ϱ, *то рядъ*

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a(1 - \gamma z^\varrho a^{\varrho - 1})} . \Phi_1(az) da$$

$$(a\text{—}\textit{реально})$$

при $\varrho<1$ *имѣетъ мѣсто на* **всей** *плоскости; если же* $\varrho=1$, *то точка* γ^{-1} *есть* **критическая** *точка для* $f(z)$, *и* $f(z)$ *тогда законна лишь въ той полуплоскости, которую мы получимъ со стороны начала, проводя прямую черезъ точку* $\frac{1}{\gamma}$ *перпендикулярно къ лучу, соединяющему точки нуль и* $\frac{1}{\gamma}$; *функція* $f(z)$ *вдоль луча* $\left(0, \frac{1}{\gamma}\right)$ *за точку* $\frac{1}{\gamma}$ **непродолжаема.**"

Любопытнымъ въ нашей теоремѣ является то обстоятельство, что *особенная* точка $z_0=\frac{1}{\gamma}$ такъ странно появляется на сцену: мы сдѣлали предположеніе о ростѣ функціи $\Phi(x)$ въ формѣ (6), и точка $z_0=\frac{1}{\gamma}$ оказывается *особенной* при $\varrho=1$.

Вотъ примѣненіе этой теоремы: пусть данъ рядъ

$$\psi(z)=1+z+z^2+\ .\ .\ .$$

Ему взаимный есть $\Phi(az)=e^{az}$, т. е. $\gamma=1$, а потому точка $z=1$—*особенная* для ряда $\psi(z)$, что и есть въ дѣйствительности.

Интересно было бы теперь получить другую теорему, дополнительную къ только что данной (А), которая позволяла бы еще опредѣлить и *природу особенной точки*, т. е. позволила бы напередъ знать, что такое точка $\frac{1}{\gamma}$—полюсъ или существенно особенная точка?

Кромѣ метода Borel'я можно пользоваться съ успѣхомъ часто и методомъ *Le Roy* (loc. cit.).

Но мы не будемъ вдаваться въ эти изслѣдованія: это сильно удлиннило бы нашу работу. Въ будущемъ мы вернемся, быть можетъ, еще разъ къ затронутой въ этой главѣ темѣ съ болѣе спеціальными и исчерпывающими задачу изслѣдованіями.

Кончая работу, не можемъ все-же не сдѣлать одного замѣчанія, не лишеннаго, быть можетъ, интереса, по поводу *полинома суммируемости Borel'я* (см. *Borel Lécons sur les séries divergentes*, p. 120 и др.). Borel, суммируя ряды расходящіеся своимъ методомъ, чаще всего производилъ интеграцію подъ знакомъ интеграла типа, скажемъ, (7) или (8) при *a реальномъ.*

Замѣтимъ отъ себя, что иногда очень полезно замѣнять интеграцію вдоль луча реальнаго интеграціей вдоль любого луча—вектора (вдоль его положительной части): *это даетъ возможность мѣнять площадь полинома сходимости*, и слѣд. *полиномъ Бореля — не единственный* — ихъ можно получить много и разнообразныхъ.

На примѣрѣ, положимъ, ряда

$$f(z)=1+z+z^2+\ \ldots$$

мы находимъ, что при $a=re^{i\omega}$ (ω—постоянное)

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-a(1-z)}da$$

имѣетъ смыслъ лишь при условіи

$$\mathrm{R}\left\{a(z-1)\right\}<0,$$

т. е. если

$$z=\varrho e^{i\alpha}=X+iY,\ a=re^{i\omega}$$

то

$$(X-1)Cos\omega-YSin\omega<0,$$

а слѣд. прямая пограничная

$$(X-1)Cos\omega-YSin\omega-0$$

по прежнему $\perp$—на къ лучу (ω), но она уже даетъ *иной полигонъ суммируемости* по сравненію съ прежнимъ въ случаѣ a реальнаго.

Наконецъ еще одно послѣднее замѣчаніе: изъ сказаннаго ясно, что не всѣ ряды, конечно, можно суммировать при помощи экспоненціальной функціи, дающей *взаимную* функцію предложенной уже въ видѣ сходящагося ряда, и зависитъ это отъ степени быстроты роста коэффиціентовъ расходящагося ряда.

Отсюда вытекаетъ проблема тоже не лишенная интереса для математика: изучить болѣе точно ростъ расходящихся рядовъ (ростъ коэффиціентовъ въ рядѣ) и сообразно тому или иному закону роста подобрать соотвѣтствующій алгориѳмъ суммированія, ибо несомнѣнно вѣдь, что, напр., *Борелевское* суммированіе—вовсе не общее; но эта проблема—еще только начата, и рѣшеніе ея принадлежитъ будущему.

Литература вопроса.

Читатель, интересующійся исторіей изучаемаго нами вопроса и литературой по данному вопросу, а также по вопросамъ родственнымъ нашей работѣ, можетъ почерпнуть свѣдѣнія очень детальныя въ работѣ *G. Vivanti* (Atti della Società Italiana per il progresso delle scienze (2. Roma, 1909), обработанной самимъ же авторомъ на нѣмецкомъ языкѣ въ видѣ статьи „*Ueber den gegenwärtigen Stand der Theorie der ganzen transcendenten Funktionen*“, помѣщенной въ *Archiv der Mathematik und Physik* (Band 15, Heft 4, 1910).

Въ виду того, что мемуары и книги, нами непосредственно использованные, уже были нами цитированы въ соотвѣтствующихъ частяхъ нашей работы, мы не помѣщаемъ Literaturverzeichniss и отсылаемъ читателя къ упомянутой выше работѣ проф. *Vivanti*. Къ упомянутымъ тамъ источникамъ мы добавимъ съ своей стороны только еще слѣдующіе [1]):

215) *E. Borel*: Lécons sur la théorie de la croissance. Paris. 1910.

216) *O. Blumenthal*: Principes de la théorie des fonctions entières. Paris. 1910.

217) *A. Denjoy*: Sur les produits canoniques d'ordre infini (Thèse). 1909.

---

[1]) Мы продолжаемъ нумерацію проф. *Vivanti*.

218) *E. Stridsberg;* Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. (Acta Math. T. 33, 1910).

219) *Н. Парфентьевъ.* Изслѣдованія по теоріи роста функцій. Казань. 1910.