W. PAULI

RELATIVISTIC FIELD THEORIES OF ELEMENTARY PARTICLES

Reviews of Modern Physics
vol. 13, No 3, p.p. 203—232,
July 1941

ЧАСТЬ I

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

*

§ 1. ЕДИНИЦЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

*

Любая теория принимает как основные гипотезы требования теории относительности и квантовой теории, поэтому естественно выбрать в качестве единиц $\hbar$ — постоянную Планка, деленную на 2π, и c — скорость света в пустоте. Это означает, что размерности всех величин приводятся к размерности длины в какой-либо степени с помощью умножения на соответствующие степени $\hbar$ и c. Например, величина E будет в дальнейшем означать энергию, разделенную на $\hbar c$, т. е. величину с размерностью $см^{-1}$; g будет означать импульс, выраженный в единицах $\hbar$, и будет также иметь размерность $см^{-1}$. Момент количества движения P в единицах $\hbar$ является безразмерным. Электромагнитный потенциал φ_i и напряженности электромагнитного поля $f_{ik} = -f_{ki}$ имеют в единицах $(\hbar c)^{1/2}$ соответственно размерности $см^{-1}$ и $см^{-2}$. Волновое число, соответствующее массе покоя частицы, мы будем в дальнейшем обозначать $\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$.

В соответствии с принятыми условиями, в качестве временной координаты следует пользоваться длиной светового пути $x_0 = ct$. Однако наряду с этим мы будем употреблять и мнимую временную координату $x_4 = ix_0 = ict$. Таким образом, тензоры с индексами, обозначаемыми малыми курсивными буквами i, k, ... и пробегающими значения от 1 до 4, содержат мнимую временную компоненту. В связи с этим целесообразно пользоваться специальным правилом преобразования к комплексно-сопряженным величинам. Для величин с нулевым индексом звездочка будет означать комплексно-сопряженную величину в обычном смысле (например, s_0^* комплексно сопряжено с плотностью заряда s_0; s_i — вектор тока). В общем случае под $U_{ik}^*\ldots$ мы будем понимать величину, комплексно-сопряженную $U_{ik}\ldots$, умноженную на $(-1)^n$, где n — число четверок среди чисел $i, k\ldots$ (например, $s_4 = is_0$, $s_4^* = is_0^*$).

Спиноры Дирака u_ρ, где $\rho = 1, \ldots, 4$, будут всегда употребляться с греческими индексами, пробегающими значения от 1 до 4; при этом u_ρ^* означает величину, комплексно-сопряженную с u_ρ в обычном смысле.

Волновые функции (векторы или тензоры) мы будем обозначать прописной буквой U с компонентами U_i, U_{ik}, ... Симметричный характер тензора указывается иногда отдельно. Электромагнитные и гравитационные поля занимают особое положение, так как они являются классическими, и масса покоя связанных с ними частиц равна нулю. Поэтому мы будем пользоваться для них обычными обозначениями φ_i, $f_{ik} = -f_{ki}$ и соответственно $g_{ik} = g_{ki}$.

Тензор энергии-импульса определен так, что $-T_{44}$ и $-iT_{k4}$, где $k = 1, 2, 3$, совпадают соответственно с плотностью энергии W и плотностью импульса G, измеренными в наших единицах.

§ 2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА; ГРАДИЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ВЕКТОР ТОКА

(а) Случай отсутствия внешних полей

Будем сначала рассматривать все величины как обычные c-числа. Начнем с рассмотрения функции Лагранжа L, зависящей от любых функций $q^{(r)}$ от $x_i (i = 1, \ldots, 4)$ и их первых производных

$$q_k^{(r)} = \frac{\partial q^{(r)}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

но не зависящей явно от координат x_i. О действии (собственных) преобразований Лоренца на $q^{(r)}$ не нужно делать никаких специальных предположений; достаточно, чтобы действительная функция L была инвариантной по отношению к этим преобразованиям. Как известно, вариационный принцип

$$\delta \int L\,(q_k^{(r)},\ q^{(r)})\, d^4x = 0, \tag{2}$$

где вариация на концах предполагается равной нулю, определяет уравнения поля:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(r)}} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)}} = 0. \tag{3}$$

Тензор энергии-импульса можно получить из функции Лагранжа:

$$T_{ik}=\sum_{r}\frac{\partial L}{\partial q_{k}^{(r)}}q_{i}^{(r)}-L\delta_{ik},\tag{4}$$

причем в силу (3) удовлетворяется уравнение непрерывности:

$$\sum_{k}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_{k}}=0.\tag{5}$$

T_{ik}, определенные уравнением (4), будем называть **каноническим** тензором энергии-импульса. Вообще говоря, он не симметричен, а плотность энергии не является положительно определенной. В связи с этим необходимо помнить, что при заданных значениях интегралов энергии и импульса локализация энергии и импульса в пространстве определяется единственным образом лишь в гравитационной теории, в которой гравитационное поле придает тензору энергии-импульса непосредственный физический смысл.

При отсутствии взаимодействия условие положительности общей энергии является необходимым. Однако мы увидим, что во многих случаях оно выполнимо лишь в теории q-чисел. Для этой теории мы предположим, что порядок множителей в выражениях для физических величин находится в нашем распоряжении.

Наряду с каноническим тензором энергии-импульса T_{ik} имеется тензор момента количества движения $M_{ij,k}=-M_{ji,k}$, который с помощью соотношения

$$P_{ij}=-P_{ji}=\int M_{ij,4}d^{4}x\tag{6}$$

для $i, j=1, 2, 3$ определяет общий момент количества движения и который также удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\sum_{k}\frac{\partial M_{ij,k}}{\partial x_{k}}=0.\tag{7}$$

Проще всего получить этот тензор, используя инвариантность функции Лагранжа при преобразованиях Лоренца (включая трехмерные вращения) следующим образом. С помощью бесконечно малого преобразования Лоренца

$$\delta x_{i}=\sum_{j}\delta w_{ij}x_{j},$$

$$\text{где } \delta w_{ij}=-\delta w_{ji},\tag{8}$$

величины $q^{(r)}$ преобразуются в заданной пространственно-временной точке согласно соотношению

$$\delta q^{(r)} = \sum_{i<j} \sum_s S_{ij}^{(r,s)} q^s \delta w_{ij}. \tag{9}$$

Его можно переписать в виде:

$$\delta q = \sum_{i<j} S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q \delta w_{ij}. \tag{9a}$$

Следует заметить, что вариация

$$\delta q = q'(x+\delta x) - q(x)$$

отличается от

$$\delta^*(q) = q'(x) - q(x) = \delta q - \sum_i q_i \delta x_i =$$
$$= \sum_{i<j} \delta w_{ij}(x_i q_j - x_j q_i + S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q). \tag{10}$$

Легко увидеть, что

$$\delta^* q_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \delta^* q. \tag{10a}$$

Это соотношение не имеет места для δq_k.

Теперь легко представить вариацию от $\int L dx$ в виде:

$$\delta \int L dx = \int \delta^* L dx + \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(L \delta x_k)\right] dx, \tag{11}$$

где мы опять положили

$$\delta L = L'(x') - L(x); \quad \delta^* L = L'(x) - L(x).$$

Если $\delta^* L$ может быть получено с помощью бесконечно малого преобразования Лоренца, то вариация интеграла должна обращаться в нуль ввиду лоренц-инвариантности L. Из (3) и (10a) мы находим, что[1])

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_q \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta^* q + L \delta x_k\right] = 0.$$

---

[1]) См. В. Паули, Теория относительности, ГТТИ (1947).

С помощью уравнений (11) и (4) можно из равенства

$$\sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta^* q + L \delta x_k = \sum_{i<j} M_{ij,k} \delta w_{ij}$$

получить выражение для тензора момента количества движения:

$$M_{ij,k} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q. \tag{12}$$

Этим завершается доказательство уравнения непрерывности (7), которое можно с помощью уравнения (5) представить в виде:

$$-T_{ij} + T_{ij} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q = 0. \tag{7a}$$

Если, следовательно, определить антисимметричный по j и k тензор

$$f_{i,\,jk} = -f_{i,\,kj} \tag{13a}$$

с помощью соотношения

$$-f_{i,\,jk} + f_{j,\,ik} = \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q, \tag{13b}$$

то, согласно (7a) и (13b), величина

$$\theta_{ij} = T_{ij} + \sum_k \frac{\partial f_{i,\,jk}}{\partial x_k} \tag{14}$$

симметрична по i и j

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} \tag{14a}$$

и удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{14b}$$

Из (13a, b) однозначно получается, что

$$f_{i,\,jk} = \sum_q \frac{1}{2}\left[-S_{ij,\,\mathrm{op}}\, q \frac{\partial L}{\partial q_k} - S_{ki,\,\mathrm{op}}\, q \frac{\partial L}{\partial q_j} + S_{jk,\,\mathrm{op}}\, q \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]. \tag{13c}$$

Следует подчеркнуть, что тензор θ_{ij} симметричен лишь в силу уравнений поля (3). Кроме того, согласно (12) и (13b):

$$x_i\theta_{jk}-x_j\theta_{ik}=M_{ij,k}+\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}(x_if_{j,kl}-x_jf_{i,kl}). \qquad (14c)$$

Равенство интегралов энергии и импульса по пространственно-подобному объему, вычисленных по T_{i4} и θ_{i4}, следует из (14):

$$\int\theta_{i4}dV=\int T_{i4}dV. \qquad (15a)$$

Таким же образом из (14c) получается равенство для тензора момента количества движения:

$$P_{ij}=\int M_{ij,4}dV=\int(x_i\theta_{j4}-x_j\theta_{i4})\,dV. \qquad (15b)$$

Общее определение (14) симметричного тензора энергии-импульса было дано Белинфанте[1]) и Розенфельдом[2]). Так как локализация энергии играет роль, главным образом, в гравитационной теории, то важно, что тензор энергии-импульса, определяемый в гравитационной теории[3]), переходит в вышеприведенный тензор для частного случая специальной теории относительности. Но следует заметить, что плотность энергии, получаемая из θ_{ik}, а именно: $-\theta_{44}$, является положительно определенной лишь в специальных случаях.

Для подготовки к введению внешнего электромагнитного поля полезно разделить характеристики поля q на комплексные величины $U(x)$, комплексно-сопряженные им величины $U^*(x)$, которые рассматриваются как независимые от $U(x)$, и действительные величины $V(x)$. Каждая сумма по q разбивается на суммы по U, U^* и V, так что, например, тензор энергии-импульса принимает вид

$$T_{ik}=\sum_r\left(U_i^{*(r)}\frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}}+\frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}}U_i^{(r)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial L}{\partial V_k^{(r)}}V_i^{(r)}\right)-L\delta_{ik}. \qquad (16)$$

---

[1]) F. J. Belinfante, Physica, 6, 887 (1939). Связь с гравитационной теорией см. Physica, 7, 305 (1940).

[2]) L. Rosenfeld, Mémoires de l'Académie Roy. Belgique, 6, 30 (1940). [Идея вывода симметричного тензора энергии-импульса и применение ее к гравитационному полю изложена также в книге Л. Ландау и Е. Лифшица, Теория поля, § 90, 1941. (*Прим. ред.*)].

[3]) D. Hilbert, Gött. Nach. Math. Phys. (1915), стр. 395. Обобщение для спиноров см. H. Weyl, Zeits. f. Physik, 56, 330 (1929).

Введем, как допустимое даже при отсутствии внешних полей, преобразование $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$ — постоянное в пространстве и во времени изменение фазы:

$$U^{(r)} \longrightarrow U^{(r)} e^{i\alpha}, \quad U^{*(r)} \longrightarrow U^{*(r)} e^{-i\alpha}. \tag{17}$$

Мы постулируем, что функция Лагранжа L будет инвариантна по отношению к такому изменению фазы при любом постоянном значении α. Тогда дифференцирование L по фазе дает соотношение:

$$\sum_r \left[U^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} + \sum_k U_k^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}}\right] = \\ = \sum_r \left[U^{(r)} \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} + \sum_k U_k^{(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}}\right]. \tag{18}$$

В силу этого можно определить вектор s_k:

$$s_k = \varepsilon i \sum_r \left[\frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} U^{(r)} - U^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}}\right], \tag{19}$$

где ε — постоянная. Легко убедиться, что s_k удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\sum_k \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \tag{20}$$

Мы интерпретируем s_k как электромагнитный ток. Однозначно его можно, конечно, определить только, если даны внешние электромагнитные поля. Действительные поля, не допускающие преобразования фазы вида (17), описывают частицы, которые, вообще говоря, не могут быть источниками электромагнитных волн и поэтому не имеют ни электростатических, ни магнитостатических свойств. Но само по себе электромагнитное поле, которое в корпускулярной картине ассоциируется с фотонами, описывается действительными полями.

Для простоты мы считали, что все комплексные поля, содержащиеся в L, принадлежат частицам с одним и тем же зарядом. Если бы мы хотели, чтобы этими полями были связаны частицы различного заряда, то нужно было бы потребовать инвариантности L по отношению к преобразованиям типа (17) для нескольких $U^{(r)}$ с разными значениями α_r фазы α для каждого из полей. При этом α_r должны быть пропорциональны зарядам.

(b) Случай присутствия внешних электромагнитных полей

Мы специально предполагаем, что все уравнения поля содержатся в соотношениях (3), являющихся следствием вариационного принципа, или следуют из них так, что не нужно добавлять никаких дополнительных условий. При этом предположении можно ввести внешнее электромагнитное поле путем замены операции $\frac{\partial}{\partial x_k}$, примененной к $U^{(r)}$ в уравнении Лагранжа и в волновых уравнениях, оператором

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - i\varepsilon\varphi_k, \tag{21}$$

а примененной к $U^{*(r)}$ — оператором, комплексно-сопряженным D_k:

$$D_k^* = \frac{\partial}{\partial x_k} + i\varepsilon\varphi_k. \tag{21a}$$

Если оператор $\frac{\partial}{\partial x_k}$ действует на действительные поля $V^{(r)}$, то такую замену производить не нужно; поэтому в дальнейшем мы не будем рассматривать такие поля. Здесь φ_k — электромагнитный потенциал (с размерностью, указанной в § 1), а ε — заряд частицы в единицах $(\hbar c)^{1/2}$. Напряженность поля дается выражением:

$$f_{lk} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l} - \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k}. \tag{22}$$

Наличие поля сказывается в некоммутативности операторов D_k:

$$\begin{aligned} D_l D_k - D_k D_l &= -i\varepsilon f_{lk}, \\ D_l^* D_k^* - D_k^* D_l^* &= i\varepsilon f_{lk}. \end{aligned} \tag{22a}$$

Таким образом, новая функция Лагранжа получается посредством изменения определений $U_k^{(r)}$ и $U_k^{*(r)}$ в неизмененной функции

$$L(U_k^{(r)},\ U^{(r)},\ U_k^{*(r)},\ U^{*(r)}).$$

С новой функцией мы получаем:

$$U_k^{(r)} = D_k U^{(r)}; \quad U_k^{*(r)} = D_k^* U^{*(r)}. \tag{1a}$$

Уравнения, получаемые из вариационного принципа (2), для фиксированных φ_k принимают вид:

$$\begin{aligned} D_k^* \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} - \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} = 0, \\ D_k \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} - \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} = 0. \end{aligned} \tag{3a}$$

В производных по $U^{(r)}$ мы всегда считаем постоянными $U_k^{(r)}$ $\left(\text{а не } \frac{\partial U^{(r)}}{\partial x_k}\right)$. Но если помимо этих уравнений существуют некоторые дополнительные условия, то новые дополнительные условия, получаемые подстановками (21) и (21a), могут оказаться несовместными с другими уравнениями без дополнительных членов.

Построенная таким образом теория инвариантна по отношению к градиентному преобразованию[1]):

$$U^{(r)} \longrightarrow U^{(r)} e^{i\alpha}; \quad U^{*(r)} \longrightarrow U^{*(r)} e^{-i\alpha} \tag{23a}$$

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi_k - \frac{1}{\varepsilon} i \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}, \tag{23b}$$

причем теперь α может быть любой функцией положения. Это всегда верно, если функция Лагранжа в отсутствии внешнего поля инвариантна по отношению к преобразованию (17) с постоянной фазой. Действительно, из (1a) следует, что соотношения

$$U_k^{(r)} \longrightarrow U_k^{(r)} e^{i\alpha}; \quad U_k^{*(r)} \longrightarrow U_k^{*(r)} e^{-i\alpha} \tag{23c}$$

верны также и для преобразований (23a, b). Кроме того, из градиентной инвариантности следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} e^{-i\alpha}; \\ \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} e^{-i\alpha}; \end{aligned} \tag{24}$$

---

[1]) Термин „градиентное преобразование" (предложенный В. А. Фоком) соответствует немецкому Eichtransformation и английскому gauge transformation. (*Прим. ред.*)

$$\frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} e^{i\alpha};$$
$$\frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} e^{i\alpha}. \qquad (24a)$$

Именно поэтому выражения для операторов D^* в первом и D во втором из уравнений (3а) совместны.

В частности, мы хотели бы отметить различие между полями вида $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$, испытывающими в группе градиентных преобразований преобразование типа (23а), которое мы будем называть градиентным преобразованием первого рода, и такими полями, как электромагнитное поле, потенциалы которых испытывают градиентное преобразование второго рода (23b). Это различие проявляется в том, что только выражения, билинейные по U и U^*, связаны с физически измеримыми величинами, даже если соответствующее поле квантуется согласно статистике Бозе. С другой стороны, действительные поля V и напряженности электромагнитного поля (квантующегося согласно статистике Бозе) являются измеримыми величинами. Отсюда следует, что в принципе непосредственным измерением могут быть получены лишь те величины, которые инвариантны при градиентном преобразовании. [Значение точного равенства нулю массы покоя фотона для преобразований второго типа рассмотрено во второй части, §§ 2 (c) и 2 (e)].

Для расчетов, связанных с вектором тока и тензором энергии, полезно следующее замечание. Пусть f^* — произвольная функция от $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$, $U_k^{(r)}$, $U_k^{*(r)}$, которая умножается при градиентном преобразовании первого рода на $e^{-i\alpha}$, а g — другая функция этих величин, которая умножается на $e^{i\alpha}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f^* g) = (D_k^* f^*)\, g + f^* (D_k g),$$

так как члены с φ_k сокращаются. Аналогично для производной по x_k от инвариантной при градиентном преобразовании функции Лагранжа мы получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_r \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} D_k U^{(r)} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial U_i^{(r)}} D_k D_i U^{(r)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} D_k^* U^{*(r)} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial U_i^{*(r)}} D_k^* D_i^* U^{*(r)}\right].$$

Члены, содержащие φ, сокращаются в силу равенства (18), остающегося справедливым при изменении $U_k^{(r)}$ и $U_k^{*(r)}$ согласно равенству (1a).

Определим, как и раньше, вектор тока s_k и тензор энергии T_{ik} выражениями (19) и (4). Согласно (3a), уравнение непрерывности (20) для тока остается в силе. Из тензора энергии-импульса мы получаем, используя (3a) и выражение для $\frac{\partial L}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_r \left\{ [(D_k D_i - D_i D_k) U^{(r)}] \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} + \right.$$
$$\left. + [(D_k^* D_i^* - D_i^* D_k^*) U^{*(r)}] \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} \right\}.$$

Следовательно, из (20) и (19) вытекает, что

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik} s_k. \qquad (25)$$

Необходимо, чтобы это уравнение имело место для тензора энергии исходного поля U там, где есть внешнее электромагнитное поле, так как оно выражает наличие силы Лоренца. Оно оправдывает нашу трактовку s_k как четырехмерного вектора тока.

Мы еще не рассмотрели создания электромагнитного поля полем U. Приведенные рассуждения наводят на мысль, что это можно получить с помощью уравнения Максвелла $s_i = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k}$, так как тогда выполняется уравнение непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} + S_{ik}) = 0,$$

где T_{ik} — тензор энергии поля U, а $S_{ik} = f_{ir} f_{kr} - \frac{1}{4} f_{rs} f_{rs} \delta_{ik}$ — тензор энергии электромагнитного поля. Однако применение корпускулярной картины или вторичного квантования поля U при такой формулировке правила введения электромагнитного поля приводит к известным трудностям бесконечной собственной энергии. Эти трудности еще не преодолены.

Рассмотрим теперь возможность включения в функцию Лагранжа дополнительных членов, зависящих явно от напряженностей поля f_{ik} и подчиняющихся принципу градиентной инвариантности. Первоначальное определение тока и уравнение непрерывности для тока сохраняют силу, но вместо (25) мы получаем [1])

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik}s_k - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial f_{rs}}\frac{\partial f_{rs}}{\partial x_i}.$$

Это приводит к необходимости дополнительных членов в T_{ik} и s_k, так как для новых величин T'_{ik} и s'_k должно выполняться соотношение

$$\sum_k \frac{\partial T'_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik}s'_k. \tag{25a}$$

Выражение для s_k легче всего найти из уравнения, получающегося при вариации φ_k:

$$\delta\int Ld^4x = -\int s'_k \delta\varphi_k d^4x.$$

Отсюда

$$s'_k = s_k - \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial L}{\partial f_{kl}}. \tag{26}$$

Дополнительный член удовлетворяет уравнению непрерывности, так что равенство

$$\sum_k \frac{\partial s'_k}{\partial x_k} = 0 \tag{20a}$$

также выполняется. Уравнение (25а) выполняется, если положить

$$T'_{ik} = T_{ik} - f_{ir}\frac{\partial L}{\partial f_{rk}}. \tag{27}$$

Это можно проверить, используя уравнения Максвелла

$$\frac{\partial f_{ks}}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{lk}}{\partial x_s} + \frac{\partial f_{sl}}{\partial x_k} = 0,$$

вытекающие из (22).

Использование таких дополнительных членов для описания частиц, имеющих магнитный момент, будет разобрано во второй части, §§ 2(d) и 3(a).

---

[1]) Множитель $1/2$ в дополнительном члене появляется потому, что суммирование по r и s производится независимо. При этом условии для вариации напряженностей поля получается выражение $\delta L = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial f_{rs}}\cdot\delta f_{rs}$.

ЧАСТЬ II

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПОЛЕЙ

*

§ 1. ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ЧАСТИЦ БЕЗ СПИНА

*

(а) Волновое уравнение, вектор тока и тензор энергии-импульса

Простейшим примером релятивистски-инвариантного волнового уравнения является скалярное уравнение

$$\Box U - \varkappa^2 U = 0, \tag{1}$$

где $\Box$ — оператор,

$$\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{2}$$

$\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$, m — масса покоя, $\hbar$ — квант действия, деленный на 2π. Мы не требуем, чтобы U было действительно.

Волновое уравнение (1) можно получить из вариационного принципа

$$\delta \int L d^4 x = 0$$

(d^4x — четырехмерный элемент объема), если в качестве функции Лагранжа взять

$$L = \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \varkappa^2 U^* U. \tag{3}$$

Отсюда для вектора тока мы получаем, согласно уравнению (19), ч. I,

$$s_k = \varepsilon_i \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_k} U - \frac{\partial U}{\partial x_k} U^* \right)^{1)}, \tag{4}$$

где ε — заряд частицы в единицах $(\hbar c)^{1/2}$. Этот вектор тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \tag{5}$$

---

1) Такой порядок сомножителей удобен в теории q-чисел, так как при этом нет нулевого заряда.

Тензор энергии-импульса T_{ik} определяется в этом случае равенством

$$T_{ik}=\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}+\frac{\partial U^*}{\partial x_k}\frac{\partial U}{\partial x_i}-L\delta_{ik}. \tag{6}$$

Он также удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{7}$$

Тензор T_{ik} симметричен; кроме того, плотность энергии $-T_{44}$ является положительно определенной, что весьма существенно

$$W=-T_{44}=-\frac{\partial U^*}{\partial x_4}\frac{\partial U}{\partial x_4}+\operatorname{grad}U^*\cdot\operatorname{grad}U+\varkappa^2U^*U=$$

$$=\frac{\partial U^*}{\partial x_0}\frac{\partial U}{\partial x_0}+\operatorname{grad}U^*\cdot\operatorname{grad}U+\varkappa^2U^*U. \tag{8}$$

Часто бывает полезно преобразовать волновое уравнение второго порядка в следующую систему волновых уравнений первого порядка:

$$U_k=\frac{\partial U}{\partial x_k},\quad \frac{\partial U_k}{\partial x_k}=\varkappa^2U. \tag{9}$$

Эта форма уравнений более походит на систему уравнений в векторной теории, которую мы разберем далее. Кроме того, эти уравнения можно вывести из вариационного принципа, если взять функцию Лагранжа в виде

$$L=\frac{\partial U^*}{\partial x_i}U_i+U_i^*\frac{\partial U}{\partial x_i}-U_i^*U_i+\varkappa^2U^*U, \tag{10}$$

причем U_k, U и комплексно-сопряженные им величины должны варьироваться независимо.

Соответствующую теорию можно построить для псевдоскалярного поля. В ней скаляр U заменяется псевдоскаляром U_{klmn}, антисимметричным по всем индексам, а вектор U_k — псевдовектором U_{klm}, также антисимметричным по всем индексам. Тогда уравнения, аналогичные (9), будут иметь вид:

$$U_{lmn}=\sum_k \frac{\partial U_{klmn}}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial U_{lmn}}{\partial x_k}-\frac{\partial U_{mnk}}{\partial x_l}+\frac{\partial U_{nkl}}{\partial x_m}-\frac{\partial U_{klm}}{\partial x_n}=\varkappa^2U_{klmn}. \tag{11}$$

(b) Собственные состояния в пространстве импульсов. Решения, сопряженные по знаку заряда [1])

Как известно, самое общее решение уравнения (1) можно представить в виде суммы плоских волн. Если ввести в рассмотрение большой куб, длина ребра которого L, так что решения периодичны в кубической решетке длины L, то компоненты волновых чисел должны быть кратны $\frac{2\pi}{L}$.

Из волнового уравнения (1) следует, что волновые векторы (k_0, $\mathbf{k}$) [2]) удовлетворяют известному соотношению

$$k_0^2 = k^2 + \varkappa^2. \tag{12}$$

Под k_0 будем всегда понимать положительный корень:

$$k_0 = +\sqrt{k^2 + \varkappa^2}. \tag{12a}$$

Мы можем написать:

$$U^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} \times \{U_+^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)] + U_-(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)]\}, \tag{13}$$

$$U(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} \times \{U_+(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] + U_-^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)]\}. \tag{13a}$$

Обозначения выбраны таким образом, что амплитуды разложения Фурье со звездочками умножаются на $\exp(ik_0 x_0)$, а не имеющие звездочек — на $\exp(-ik_0 x_0)$. Величина $(2k_0)^{-1/2}$ берется всегда положительной.

Из (5) и (7) для полной энергии, полного импульса и полного заряда получаются выражения:

$$E = -\int T_{44} dV = \sum_k k_0 [U_+^*(k) U_+(k) + U_-(k) U_-^*(k)], \tag{14}$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} [U_+^*(k) U_+(k) + U_-(k) U_-^*(k)], \tag{15}$$

$$e = \frac{1}{i} \int s_4 dV = \varepsilon \sum_k [U_+^*(k) U_+(k) - U_-^*(k) U_-(k)]. \tag{16}$$

---

[1]) Charge conjugate solutions. (*Прим. перев.*)

[2]) В случаях, когда не может возникнуть недоразумения, векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{x}$ будут набраны курсивом.

Уравнение (16) показывает, что собственные колебания с отрицательной частотой у U^* (и положительной частотой у U) принадлежат состояниям с отрицательным зарядом. Это находится в согласии с тем фактом, что знак вектора тока меняется, если U и U^* в (4) меняются местами, а тензор энергии-импульса остается при этом неизменным. Следовательно, можно сказать, что решение волнового уравнения U^*, комплексно-сопряженное данному решению $U(x, x_0)$, является решением, сопряженным по знаку заряда. Это согласуется также с рассмотрением задачи на основе общего принципа, изложенного в первой части для случая присутствия внешних электромагнитных полей. Согласно этому принципу, волновое уравнение (1) должно быть заменено уравнением

$$\sum_i D_i^2 U - \varkappa^2 U = 0. \qquad (17)$$

Это уравнение остается справедливым при замене U и e на U^* и $-e$, так как D_k переходит в D_k^* [1]).

В § 3 (с) будет показано, что при полуцелом спине соотношение между комплексно-сопряженными решениями и решениями для противоположных зарядов несколько сложнее.

Изложенная здесь теория относится к частицам без спина, так как для заданного $\mathbf{k}$ и при заданном знаке k_0 существует лишь одно собственное состояние.

(с) Квантование

Мы не хотим основывать последующие рассуждения на каноническом формализме, потому что при этом вводится ненужное резкое различие между временем и пространством, что удобно лишь при отсутствии дополнительных условий, содержащих канонические переменные в данный момент. Здесь мы воспользуемся обобщением метода квантования, впервые примененным Иорданом и Паули в случае электромагнитного поля [2]). Кроме того, мы потребуем выполнения соотношения

$$\frac{dF}{dx_0} = i\,[H, F] \qquad (18)$$

[1]) О теории образования пар, основанной на этой теории, см. Pauli and Weisskopf, Helv. Phys. Acta, 7, 809 (1934).

[2]) Логическое развитие этого метода, включающее взаимодействие частиц, дано многовременным формализмом Дирака. См. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ (1937), 2-е издание.

для любой физической величины F, не зависящей явно от времени. Здесь H — оператор Гамильтона, выражающий полную энергию, деленную на $\hbar c$.

Величины $U_+(k)$, $U^*_+(k)$, $U_-(k)$, $U^*_-(k)$, определенные равенствами (13) и (13a), содержат время в явном виде. Но величины

$$u_\pm(k) = U_\pm(k)\exp(-ik_0x_0),$$
$$u^*_\pm(k) = U^*_\pm(k)\exp(+ik_0x_0) \tag{19}$$

не содержат явно времени, так как они могут быть выражены через U, U^*, $\frac{\partial U}{\partial x_0}$, $\frac{\partial U^*}{\partial x_0}$ без явного введения x_0 [1]). Так как в случае отсутствия сил $U_\pm(k)$ постоянны, то из (18) получаются соотношения

$$i[H, u_\pm(k)] = -ik_0u_\pm(k),$$
$$i[H, u^*_\pm(k)] = ik_0u^*_\pm(k)$$

и (20)

$$[H, U_\pm(k)] = -k_0U_\pm(k),$$
$$[H, U^*_\pm(k)] = k_0U^*_\pm(k).$$

Разберем сначала квантование согласно статистике Бозе. Значения всех скобок вида

$$[U(k), U(k')],\quad [U^*(k), U^*(k')],\quad [U(k), U^*(k')],$$

где U и U^* могут быть взяты с индексами $+$ или $-$ в любых сочетаниях, однозначно определяются из (14) и (20) при дополнительном предположении, что эти скобки сами являются числами. Действительно, из (14) и (20) следует, что только последняя из написанных скобок отлична от нуля и то лишь при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и одинаковых индексах ($+$ или $-$) у обеих величин. Из (20) следует, что

$$[U_+(k),\quad U^*_+(k)] = [U_-(k),\quad U^*_-(k)] = 1. \tag{21}$$

[1]) Величины $U_\pm(k)$, $U^*_\pm(k)$ также весьма существенны при наличии взаимодействия поля U с другими полями. Если при этом функция Гамильтона дается выражением $H_0 + \Omega$, где H_0 — гамильтониан для случая отсутствия сил, а Ω — энергия взаимодействия, то уравнение (18) просто сводится к следующим:

$$\frac{dU_\pm(k)}{dx_0} = i[\Omega, U_\pm(k)],\quad \frac{dU^*_\pm(k)}{dx_0} = i[\Omega, U^*_\pm(k)].$$

Из этих соотношений мы обычным образом находим, что собственные значения величин

$$N_+(k) = U^*_+(k)\,U_+(k),$$
$$N_-(k) = U^*_-(k)\,U_-(k) \tag{22}$$

являются положительными целыми числами (включая нуль). Именно это делает допустимым обычный переход к корпускулярной картине. Из (14), (15) и (16) следует (как можно показать обычными методами), что $N_+(k)$ и $N_-(k)$ принадлежат соответственно зарядам $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ и что оба принадлежат импульсу $+\mathbf{k}$. Как видно из (14), для каждого значения $\mathbf{k}$ имеется нулевая энергия вакуума k_0; таким образом, нулевая энергия, приходящаяся на собственное состояние в вакууме, равна половине кванта $(\frac{1}{2}k_0)$, как и в случае электромагнитного поля.

Переходя к скобкам для самих функций поля $U(x, x_0)$, мы находим из (13) и (21), что

$$i\,[U(x, x_0), U(x', x_0')] = i\,[U^*(x, x_0), U^*(x', x_0')] = 0 \tag{23}$$

и

$$i\,[U(x, x_0),\ U^*(x', x_0')] = i\,[U^*(x, x_0),\ U(x', x_0')] = \\ = D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{24}$$

Функция D в (24) определяется равенством

$$D(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{kx}}\,\frac{\sin k_0x_0}{k_0}, \tag{25}$$

а

$$k_0 = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}.$$

Вид функции D однозначно определяется требованием, чтобы она удовлетворяла волновому уравнению

$$\Box D - \varkappa^2 D = 0 \tag{26}$$

и соотношениям

$$D(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial D}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = \delta(\mathbf{x}). \tag{27}$$

Для $\varkappa = 0$

$$D(x, x_0) = \frac{1}{4\pi r}\,[\delta(r - r_0) - \delta(r + r_0)]. \tag{28}$$

В общем случае при $\varkappa \neq 0$ это выражение попрежнему имеет особенность на световом конусе, но теперь уже D не равно нулю внутри конуса. Действительно [1]),

$$D(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F(r, x_0), \tag{29}$$

$$F(r, x_0) = \begin{cases} J_0(\varkappa\sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{для } x_0 > r \\ 0 & \text{для } r > x_0 > -r \\ -J_0(\varkappa\sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{для } -r > x_0. \end{cases} \tag{30}$$

Изменение на световом конусе значения F на множитель ± 1 соответствует δ-образному характеру особенности функции D. Для дальнейшего особенно важно, что D равно нулю вне светового конуса (т. е. для $r > x_0 > -r$).

Из (23) и (24) можно получить известные перестановочные соотношения, продифференцировав их по $\mathbf{x}$ и подставив $x_0 = x_0'$:

$$i\left[U(x, x_0),\ U^*(x', x_0)\right] = 0,$$

$$i\left[\frac{\partial U(x, x_0)}{\partial x_0},\ U^*(x', x_0)\right] = i\left[\frac{\partial U^*(x, x_0)}{\partial x_0},\ U(x', x_0)\right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Обратимся теперь к рассмотрению квантования в случае, когда имеет место принцип Паули. Исходя из функции Гамильтона (8) или (14), мы должны, прежде всего, потребовать, чтобы соотношения (20) попрежнему выполнялись, причем скобки имеют свой прежний смысл. С другой стороны, выражения

$$[U(k),\ U(k')]_+,\ [U^*(k),\ U^*(k')]_+,\ [U(k),\ U^*(k')]_+$$

являются c-числами. (Здесь скобка определена равенством $[A, B]_+ = AB + BA$.) Из (20) следует, как и раньше, что первые две скобки всегда равны нулю, а последняя отлична от нуля лишь при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и одинаковых индексах $+$ или $-$ у величин, входящих в скобки. Далее,

$$U_+^*(k)\,U_+(k) + U_+(k)\,U_+^*(k) = 1,$$
$$U_-^*(k)\,U_-(k) + U_-(k)\,U_-^*(k) = -1.$$

Последнее равенство противоречит предположению, что U^* является эрмитово-сопряженным с U, так как при этом левая

[1]) См. P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 100 (1934).

часть равенства должна быть существенно положительной. Однако это предположение необходимо для того, чтобы физические величины, как, например, плотность заряда s_0, имели действительные собственные значения.

Можно также показать, что в теории скалярного поля не может быть проведено квантование согласно принципу Паули без использования специального гамильтониана и равенства (18). Наряду с функцией D имеется другая функция D_1, являющаяся инвариантной и удовлетворяющая волновому уравнению (1), а именно функция

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{i\mathbf{kx}} \cos(k_0 x_0). \tag{31}$$

При $\varkappa = 0$

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r^2 - x_0^2}. \tag{32}$$

В общем случае можно положить

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, x_0), \tag{33}$$

где

$$F_1(r, x_0) = \begin{cases} N_0(\varkappa\sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{для } x_0 > r \text{ или } -r < x_0 \\ -i H_0^{(1)}(i\varkappa\sqrt{r^2 - x_0^2}) & \text{для } r > x_0 > -r. \end{cases} \tag{34}$$

N_0 — функция Неймана, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода. Особенность D_1 на световом конусе определяется равенством (28), также и в общем случае $\varkappa \neq 0$.

Так как скалярное поле должно удовлетворять волновому уравнению (1) и быть релятивистски-инвариантным, то единственно возможными являются соотношения:

$$\begin{aligned}[U(x, x_0), U^*(x', x_0')]_{\pm} = cD(x - x', x_0 - x_0') + \\ + c_1 D_1(x - x', x_0 - x_0'),\end{aligned} \tag{35}$$

где c и c_1 — постоянные. Поэтому мы постулируем для дальнейшего, что любые две физические величины, относительные координаты которых лежат вне светового конуса, коммутируют. Вследствие этого левая часть равенства (35) для таких точек должна обращаться в нуль, если взять знак плюс. Иначе мы получили бы некоммутативность в обычном смысле для величин, билинейных по U и U^* и инвариантных при градиентном преобразовании, как, например, плотность заряда [1]).

Наш постулат оправдан тем фактом, что измерения в пространственно-временных точках, связанных пространственно-подобным интервалом, никогда не могут влиять друг на друга, так как сигналы не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Во всяком случае, те теории, которые, вместо D или наряду с D, используют при квантовании функцию D_1, приводят к следствиям, весьма отличающимся от известных сейчас.

Таким образом, если наш постулат о коммутативности выполнен, то постоянная c_1 в (35) должна обращаться в нуль, так что

$$[U(x, x_0),\ U^*(x', x_0')] = \text{const}\, D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{36}$$

Но если взять скобку с положительным знаком, то левая часть равенства будет существенно положительна при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $x_0 = x_0'$, а правая обратится в нуль для $x_0 = x_0'$. Таким образом, мы пришли к противоречию, аналогичному полученному выше [2]).

В итоге мы показали, что в релятивистской теории частиц без спина, основанной на общих постулатах, квантование может происходить лишь согласно статистике Бозе — Эйнштейна.

(d) Действительное поле

В этом случае всегда $U = U^*$, вектор тока тождественно равен нулю и соответствующие частицы не могут породить электромагнитного поля. Для функции Лагранжа и тензора энергии-импульса напишем выражения:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2 V^2, \tag{37}$$

---

[1]) См. W. Pauli, Inst. H. Poincaré Ann. **6**, 137 (1936). Обобщение этого рассмотрения для целого спина см. W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940). (См. перевод последней статьи в дополнении.—*Прим. ред.*)

[2]) Это легко обнаружить также пространственным разложением функций U и U^* в ряд Фурье. Если $u(k) = U_+(k) + U_-(k)$ и $u^*(k) = \overset{*}{U}_+(k) + \overset{*}{U}_-(k)$ [см. (19)] — соответствующие амплитуды, то из (24) следует при $x_0 = x_0'$ в случае применимости принципа Паули, что $[u(k), u^*(k)]_+ = 0$ для всех собственных состояний. Отсюда следует что $U_+(k) = U_-(k) = 0$.

$$T_{ik}=\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}-L\delta_{ik}. \tag{38}$$

Между коэфициентами разложения Фурье (13) имеются дополнительные соотношения

$$V_-(k)=V_+(k),\ \ V^*_-(k)=V^*_+(k).$$

Это позволяет записать (13) в более простой форме:

$$V(x,\ x_0)=(V)^{-1/2}\sum_k(2k_0)^{-1/2}\left\{V(k)\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\right]+\right.$$
$$\left.+V^*(k)\exp\left[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\right]\right\}. \tag{39}$$

Энергия и импульс принимают вид

$$E=\sum_k\frac{1}{2}k_0\left[V^*(k)\,V(k)+V(k)\,V^*(k)\right], \tag{40}$$

$$\mathbf{G}=\sum_k\frac{1}{2}\mathbf{k}\left[V^*(k)\,V(k)+V(k)\,V^*(k)\right]. \tag{41}$$

Перестановочные соотношения (13) остаются в силе:

$$\left[V(k),\ \ V^*(k)\right]=1, \tag{42}$$

а скобки $[V(k),\ \ V(k')]$, $[V^*(k),\ \ V^*(k')]$ и (при $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$) $[V(k),\ V^*(k')]$ обращаются в нуль. Из уравнения (40) видно, что нулевая энергия вакуума опять равна половине кванта, $\frac{1}{2}k_0$, на каждое собственное состояние. Вместо (24) мы получаем:

$$i\left[V(x,\ x_0),\ V(x',\ x_0')\right]=D(x-x',\ x_0-x_0'). \tag{43}$$

При квантовании согласно принципу Паули имеются две альтернативы: либо энергия становится постоянным c-числом, что невозможно, либо в левой части равенства (43) появляется функция D_1, что противоречит нашим прежним постулатам.

Следует отметить, что первоначальная форма теории с комплексной функцией U очевидно эквивалентна теории с двумя действительными полями $V=V^*$ и $W=W^*$, соответствующими действительной и мнимой частям U. В связи с этим целесообразно ввести множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$ так, чтобы в перестановочных соотношениях не появлялось никаких численных множителей. Поэтому положим:

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}(V+iW), \quad U^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(V-iW). \tag{44}$$

Тогда из (24) следует, что

$$i[V(x,\ x_0),\ V(x',\ x'_0)]=i[W(x,\ x_0),\ W(x',\ x'_0)]= \\ =D(x-x',\ x_0-x'_0),\ i[V(x,\ x_0),\ W(x',\ x'_0)]=0. \tag{45}$$

Тензор энергии-импульса (7) принимает вид:

$$T_{ik}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_k}\right]-L\delta_{ik}, \\ L=\frac{1}{2}\sum\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\varkappa^2(V^2+W^2), \tag{46}$$

а вектор тока

$$s_k=\varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial x_k}V-\frac{\partial V}{\partial x_k}W\right]. \tag{47}$$

Если согласно (39) V и W разложить по собственным состояниям и воспользоваться перестановочными соотношениями вида (42), то энергия E и импульс $\mathfrak{G}$ представятся в виде суммы двух выражений вида (40) и (41), одно из которых зависит от V, а второе от W. С другой стороны, для заряда получится выражение

$$e=\varepsilon i\sum_k[W(k)\,V^*(k)-V(k)\,W^*(k)]. \tag{48}$$

Отсюда можно получить „сокращенную“ теорию с одним действительным полем V, если опустить W и положить вектор тока равным нулю.

§ 2. ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1

(а) Теория c-чисел для случая отсутствия внешних полей

Этот вопрос стоит сейчас в центре внимания, с тех пор как Юкава, в целях объяснения зависимости силы взаимодействия протона и нейтрона от спина, предположил, что мезон имеет спин 1[1]). Теория этого случая была предложена Прока.

[1]) Трудности, встретившиеся на пути построения ядерных сил, заставили, однако, отказаться от простой схемы Юкава. См. Венцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ (1947), а также Pauli, Meson theory of nuclear forces (1946). Готовится русский перевод. (*Прим. ред.*)

Простейшая возможность обобщения теории, изложенной в § 1, заключается, повидимому, во введении векторного поля U_k, удовлетворяющего волновому уравнению:

$$\square U_k - \varkappa^2 U_k = 0, \tag{49}$$

компоненты которого рассматриваются как независимые скаляры. Но легко видеть, что при такой формулировке компонента $U_4 = iU_0$ приводит к отрицательным членам в энергии, если знаки выбраны так, что пространственно-подобным компонентам вектора U_k соответствуют положительные члены в энергии. Эту трудность можно избежать, потребовав выполнения наряду с (49) дополнительного условия

$$\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0. \tag{50}$$

Смысл этого условия становится особенно ясным в системе координат, в которой частица покоится, а волновое поле зависит периодически от времени, но не от пространственных координат. В этой системе равенство (50) требует обращения U_4 в нуль. Отсюда ясно, что тогда вследствие (50) энергия обязательно положительна. Из лоренц-инвариантности теории следует, что и в общем случае энергия (объемный интеграл плотности энергии) положительна. Как мы увидим далее, можно показать, что в этом случае плотность энергии в любой пространственной точке также положительно определенна.

Антисимметричный тензор $U_{ik} = -U_{ki}$, связанный с U_k так, как напряженности поля связаны с потенциалом в электродинамике, можно получить из U_k с помощью операции rot:

$$U_{ik} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \tag{51}$$

Из (51) следует, согласно (49) и (50), равенство

$$\sum_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k} + \varkappa^2 U_i = 0. \tag{52}$$

Это соотношение существенно, так как оно показывает, что U_i однозначно определяется при заданных U_{ik}, так же как U_{ik} определяются заданием U_i согласно (51). Следовательно, при массе покоя, отличной от нуля, добавление к U_i градиента недопустимо. Поэтому при $\varkappa \neq 0$ не существует градиентного преобразования второго рода для U_i. Стоит отметить, что (49) и (50) вытекают из (51) и (52). Если продифференцировать (52) по x_i и просуммировать по i, то первый член обращается в нуль из-за антисимметричности U_{ik}, и получается (50). Подставляя затем (51) в (52), получаем уравнение (47). Наконец, из (51) вытекают соотношения

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial U_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial U_{kl}}{\partial x_i}=0. \tag{53}$$

Рассмотрение (51) и (52) как основных уравнений теории, а остальных уравнений как производных имеет известные преимущества, так как (51) и (52) можно вывести из вариационного принципа

$$\delta\int L d^4x=0,$$

если положить

$$L=-\frac{1}{2}U_{ik}U^*_{ik}+\frac{1}{2}U^*_{ik}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}-\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^*_k}{\partial x_i}-\frac{\partial U^*_i}{\partial x_k}\right)U_{ik}+\varkappa^2 U^*_i U_i. \tag{54}$$

(Здесь использовано обычное обозначение суммирования „немыми“ индексами.) При варьировании величины U_i, $U_{ik}=-U_{ki}$ и сопряженные им должны варьироваться независимо.

Для канонического тензора энергии, определяемого согласно (4), ч. I, получается выражение

$$T_{ik}=U^*_{kr}\frac{\partial U_r}{\partial x_i}+\frac{\partial U^*_r}{\partial x_i}U_{kr}-L\delta_{ik}. \tag{55}$$

Его можно преобразовать в симметричный тензор. Согласно общим формулам первой части (14) и (13 с), из (51) и (52) вытекает, что

$$T_{ik}=\theta_{ik}+\frac{\partial}{\partial x_r}\left(U^*_{kr}U_i+U^*_i U_{kr}\right), \tag{56}$$

где

$$\theta_{ik}=\theta_{ki}=U^*_{ir}U_{kr}+U^*_{kr}U_{ir}+\varkappa^2\left(U^*_i U_k+U^*_k U_i\right)-$$
$$-\delta_{ik}\left(\frac{1}{2}U^*_{rs}U_{rs}+\varkappa^2 U^*_r U_r\right). \tag{57}$$

Из (48) следует, с одной стороны, что

$$\frac{\partial\theta_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \tag{58}$$

так что из равенства второй дивергенции нулю получаем обращение в нуль и первой; с другой стороны, из (48) следует

$$\int \theta_{i4} dV = \int T_{i4} dV, \tag{59}$$

откуда ясно, что безразлично, как вычислять полную энергию и полный импульс — с помощью канонического тензора или симметричного тензора.

Вводя величины U_0, U_{0k},

$$U_4 = iU_0, \quad U_{4k} = iU_{0k}, U_4^* = iU_0^*, \quad U_{4k}^* = iU_{0k}^* \; (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{60}$$

мы получаем из (52) для плотности энергии $-\theta_{44}$ выражение [1])

$$W = -\theta_{44} = \sum U_{0k}^* U_{0k} + \sum_{i \leq k}^{3} U_{ik}^* U_{ik} + \varkappa^2 \left(U_0^* U_0 + \sum_{k=1}^{3} U_k^* U_k\right). \tag{61}$$

Следовательно, плотность энергии является положительно определенной, как и в скалярной теории.

Вектор тока, определенный согласно (19), ч. I, имеет вид

$$s_l = i(U_{lr}^* U_r - U_r^* U_{lr}). \tag{62}$$

Однако мы увидим, что это выражение не является единственным, так как дополнительные члены в L, пропорциональные f_{ik}, могут изменить его даже в отсутствии внешних полей.

Соответствующую теорию для псевдовекторного поля мы наметим, не вдаваясь в детали. Вектор U_l заменяется тензором U_{lmn}, антисимметричным по всем индексам (псевдовектором), а U_{ik} — антисимметричным тензором такого же типа, как и U_{ik}. Уравнения (50) и (53) заменяются уравнениями

$$\frac{\partial U_{lmn}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_{mnk}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{nkl}}{\partial x_m} - \frac{\partial U_{klm}}{\partial x_n} = 0, \tag{63}$$

$$U_{ik} = \frac{\partial U_{ikr}}{\partial x_r}, \tag{64}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x_k} - \varkappa^2 U_{lik} = 0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} = 0. \tag{66}$$

---

[1]) В связи с этим важно иметь в виду смысл U_{4k}^* $(k = 1, 2, 3)$ и U^*, определенный в первой части. U_0^* и U_{0k}^* означают настоящие комплексно-сопряженные значения U_0 и U_{0k}.

(b) Собственные состояния в пространстве импульсов

Выпишем сначала амплитуды трех пространственных компонент (без нормировки):

$$\mathbf{U}^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \{\mathbf{U}^*_+(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] + \\ + \mathbf{U}_-(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)]\}, \tag{67}$$

$$\mathbf{U}(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \{\mathbf{U}_+(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] + \\ + \mathbf{U}^*_-(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)]\},$$

где k_0 дается выражением (12). Тогда из дополнительных условий (50) следуют для четвертых компонент U^*_k и U_k равенства:

$$U^*_0(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{k_0} \mathbf{k}\cdot\mathbf{U}^*_+(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_0} \mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_-(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] \right\}, \tag{68}$$

$$U_0(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{k_0} \mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_+(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_0} \mathbf{k}\cdot\mathbf{U}^*_-(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] \right\}.$$

Если определить пространственный вектор $\mathbf{V}_0$ с компонентами U_{0k} $(k = 1,2,3)$ и второй вектор $\mathbf{V}$ с компонентами U_{23}, U_{31}, U_{21}, то из (46) следует:

$$\mathbf{V}^*_0(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \left[-k_0\mathbf{U}^*_+(k) + \right.\right. \\ \left. + \frac{\mathbf{k}}{k_0}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}^*_+(k))\right] \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] + \\ \left. + \left[k_0\mathbf{U}_-(k) - \frac{\mathbf{k}}{k_0}(\mathbf{k}\mathbf{U}_-(k))\right] \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] \right\}, \tag{69}$$

$$V_0(x,\ x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \left[k_0 U_+(k) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+(k)) \right] \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\right] + \tag{69a}$$

$$\left. + \left[- k_0 \mathbf{U}_-^*(k) + \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_-^*(k)) \right] \exp\left[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\right] \right\},$$

$$\mathbf{V}^*(x,\ x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ - [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_+^*(k)] \times \right. \tag{70}$$

$$\left. \times \exp\left[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\right] + [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_-(k)] \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\right] \right\},$$

$$\mathbf{V}(x,\ x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_+(k)] \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\right] - \right.$$

$$\left. - [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_-^*(k)] \exp\left[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\right] \right\}. \tag{70a}$$

Если для сокращения положить

$$N_+(k) = k_0 (\mathbf{U}_+^*(k)\, \mathbf{U}_+(k)) - \frac{1}{k_0} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_+^*(k))\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_+(k)), \tag{71}$$

$$N_-(k) = k_0 (\mathbf{U}_-^*(k)\, \mathbf{U}_-(k)) - \frac{1}{k_0} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_-^*(k))\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_-(k)), \tag{72}$$

то для энергии, импульса и заряда из (52), (53) и (54) следуют выражения:

$$E = \sum_k k_0 [N_+(k) + N_-(k)], \tag{73}$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} [N_+(k) + N_-(k)], \tag{74}$$

$$e = \varepsilon \sum_k [N_+(k) - N_-(k)]. \tag{75}$$

Выражения $N_+(k)$ и $N_-(k)$ являются билинейными формами трех компонент $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$. Их можно привести к диагональной форме и нормировать, разбив $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ на компоненту, параллельную k (продольное колебание), и две компоненты, перпендикулярные k (поперечные колебания). Пусть e_1 и e_2 — два комплексных ортогональных единичных вектора, перпендикулярных k:

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s) = \delta_{rs},\ (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_r^* \cdot \mathbf{k}) = 0\ \ (r,\ s = 1,\ 2).$$

Если положить

$$U_{\pm}(k)=(k_0)^{-1/2}\sum_{r=1,2}\mathbf{e}_r U_{r,\pm}(k)+\frac{(k_0)^{1/2}}{k}\frac{\mathbf{k}}{|k|}U_{3,\pm}(k),$$

$$U^*_{\pm}(k)=(k_0)^{-1/2}\sum_{r=1,2}\mathbf{e}^*_r U^*_{r,\pm}(k)+\frac{(k_0)^{1/2}}{k}\frac{\mathbf{k}}{|k|}U^*_{3,\pm}(k), \qquad (76)$$

то $N_+(k)$ и $N_-(k)$ принимают нормальный вид:

$$N_+(k)=\sum_{r=1}^{3}U^*_{r,+}(k)\,U_{r,+}(k),$$

$$N_-(k)=\sum_{r=1}^{3}U^*_{r,-}(k)\,U_{r,-}(k). \qquad (77)$$

Это есть просто преобразование к главным осям.

(с) Квантование

Прежде чем формулировать перестановочные соотношения, отметим разницу между специальным случаем $\varkappa=0$ (электродинамика) и интересующим нас случаем. В электродинамике обычно компоненты вектора U_l квантуются как независимые скаляры согласно непосредственному обобщению равенства (24):

$$i\,[U_l(x,\ x_0),\ U^*_k(x',\ x'_0)]=i\,[U^*_l(x,\ x_0),\ U_k(x',\ x'_0)]=$$
$$=\delta_{lk}D(x-x',\ x_0-x'_0).$$

Но тогда соотношение (50) должно быть введено в качестве дополнительного условия в виде

$$\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)\Psi=0.$$

Оператор $\dfrac{\partial U_k}{\partial x_k}$ в левой части этого соотношения не должен обязательно коммутировать со всеми другими величинами, но дает нуль в применении к функции Шредингера Ψ. Однако необходимо, чтобы он коммутировал с комплексно-сопряженным ему оператором в различных пространственно-временных точках. В нашем случае простые вычисления дают

$$i\left[\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)_{x,\,x_0},\ \left(\frac{\partial U^*_k}{\partial x_k}\right)_{x',\,x'_0}\right]=-\Box D(x-x',\ x_0-x'_0).$$

Но $\Box D = \varkappa^2 D$ и при $\varkappa \neq 0$ правая часть не равна нулю. Следовательно, мы пришли к выводу, что при массе покоя, отличной от нуля, перестановочные соотношения для U_i не могут быть такими же, как для независимых скаляров.

Простейший метод вторичного квантования в случае $\varkappa \neq 0$ (который мы будем рассматривать в дальнейшем) заключается в такой формулировке перестановочных соотношений, при которой не только волновое уравнение (49), но и дополнительное уравнение (50) тождественно удовлетворяются как уравнения в q-числах. Эта формулировка имеет следующий вид:

$$i[U_i(x, x_0), U_k^*(x', x_0')] = i[U_i^*(x', x_0'), U_k(x', x_0')] = \\ = \left(\delta_{ik} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\right) D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{78}$$

Отсюда следует, что $\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}, U_k^*(x', x_0')\right] = 0$,

так как $(\Box - \varkappa^2) D = 0$.

Невыписанные скобки $[U_i(x, x_0), U_k(x', x_0')]$ и $[U_i^*(x, x_0), U_k^*(x', x_0')]$ должны обращаться в нуль. Кроме того, из (78) следует:

$$[U_{ik}(x, x_0), U_r^*(x', x_0')] = i[U_{ik}^*(x, x_0), U_r(x', x_0')] = \\ = \left(\delta_{kr}\frac{\partial}{\partial x_i} - \delta_{ir}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) D(x - x', x_0 - x_0'), \tag{79}$$

$$i[U_{ik}(x, x_0), U_{rs}^*(x', x_0')] = i[U_{ik}^*(x, x_0), U_{rs}(x', x_0')] = \\ = \left[\delta_{kr}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s} - \delta_{ir}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s} - \delta_{ks}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_r} + \right. \\ \left. + \delta_{is}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_r}\right] D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{80}$$

Заметим, что (78) приводит к отличным от нуля выражениям для $[U_4(x), U^*(x')]$ и $[U_4(x), \partial U_4^*(x')/\partial x_4]$ при $x_0 = x_0'$ в отличие от результатов, полученных при „канонических" перестановочных соотношениях.

Штюкельберг[1]) дал другой вариант приведенной формулировки. Он вводит два вспомогательных поля — вектор A_i и скаляр B, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \varkappa B\right)\Psi = 0.$$

[1]) E. C. G. Stuckelberg, Helv. Phys. Acta, 11, 225, 299 (1938).

Если в перестановочных соотношениях рассматривать A_i и B как независимые скаляры, то

$$i[A_i(x, x_0),\ A_k^*(x', x_0')] = \delta_{ik} D(x - x', x_0 - x_0'),$$

$$i[B(x, x_0),\ B^*(x', x_0')] = D(x - x', x_0 - x_0').$$

Отсюда

$$i\left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \varkappa B\right)_{x, x_0}, \left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x_i} + \varkappa B^*\right)_{x', x_0'}\right] = 0.$$

Таким образом, дополнительное условие не противоречиво. Кроме того, в силу этого соотношения общая энергия положительна, если только функция Лагранжа состоит из суммы членов, зависящих от независимых компонент поля A_i, B. Тогда U_i, удовлетворяющее уравнению

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)\Psi = 0,$$

дается выражением

$$U_i = A_i + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial B}{\partial x_i}.$$

Это опять приводит к перестановочным соотношениям (78) для U_i. Для A и B существуют градиентные преобразования второго рода

$$A_i' = A_i + \frac{\partial f}{\partial x_i};\ B' = B - \varkappa f, \text{ причем } \square f - \varkappa^2 f = 0.$$

U_i являются инвариантами этой группы преобразований.

Как показывает Штюкельберг, преимущество этого метода заключается в том, что взаимодействие мезонов, описываемых такими полями, с протонами и нейтронами может быть рассмотрено с помощью формализма, совершенно аналогичного формализму Дирака[1]), примененному для рассмотрения взаимодействия между светом и электронами.

---

[1]) См. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ (1937), 2-е издание. В случае мезонов дополнительное условие на A_i и B остается однородным, даже при взаимодействии с тяжелыми частицами (этого нет в аналогичном случае для света), но появляются, с другой стороны, дополнительные члены в U_0, возникающие вследствие различия дифференцирования по времени мезона и по общему времени.

Однако мы не будем в дальнейшем вводить вспомогательные поля, а дополнительное условие (50) будем рассматривать просто как тождество.

Единственный остающийся еще в (78) произвол связан с возможностью введения численного множителя в правой части. Это связано посредством равенства (18) с соответствующей нормировкой численного множителя оператора Гамильтона. Покажем, что нормировка (78) находится в согласии с использованием (55) в качестве тензора энергии-импульса. Для этой цели наиболее удобно разложить поля по собственным состояниям. При вычислении выражения для энергии следует учесть порядок множителей. Как видно из равенства (14), множители в членах, возникающие от $U(k)$ и $U^*(k)$, появляются в порядке, обратном тому, в котором они стоят в равенстве (72). Как будет показано ниже с помощью сравнения с (20), равенство (18) требует, чтобы перестановочные соотношения для $U_r(k)$ и $U_r^*(k)$ имели вид:

$$[U_{r,+}(k), U^*_{s,+}(k)] = [U_{r,-}(k), U^*_{s,-}(k)] = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, 3) \tag{81}$$

и чтобы остальные скобки для этих величин обращались в нуль. Но отсюда следует, что $U(k)$ и $U^*(k)$ [см. (67)] удовлетворяют соотношениям

$$[U_{i,+}(k), U^*_{k,+}(k)] = [U_{i,-}(k), U^*_{k,-}(k)] = \frac{1}{k_0}\left(\delta_{ik} + \frac{1}{\varkappa^2} k_i k_k\right). \tag{82}$$

Вводя этот результат в (67) и (68), мы получаем согласие с (78) при D, определяемом равенством (25).

Следовательно, величины $N_+(k)$ и $N_-(k)$, *определенные равенствами* (82), *дают число частиц с зарядами* $+1$ *и* -1 *соответственно и с импульсом* $\mathbf{k}$. Порядок множителей в выражении для энергии приводит, как и в § 1 (6), к нулевой энергии в половину кванта на каждое собственное состояние.

Как и в скалярной теории, квантование согласно принципу Паули невозможно, так как функция $\left[1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)\right]$ обращается в нуль при $x_0 = x_0'$ вместе с D.

Различие между продольными и поперечными колебаниями пропадает в системе, в которой частица покоится, т. е. для случая $k = 0$. Введение нормальных колебаний согласно (76) излишне, так как вторая часть в (82) обращается в нуль. Кроме того, из (68) следует, что $U_0 = 0$, как уже было упомянуто. Следовательно, при заданном знаке частоты в покоящейся системе имеются три характеристических решения, преобразуемых друг в друга пространственным вращением координатных систем. Этим доказывается утверждение, что рассматриваемая теория в случае квантования описывает исключительно частицы со спином 1.

(d) Теория *c*-чисел для случая наличия внешнего электромагнитного поля

Общее правило § 2 (*b*) ч. I для обобщения уравнений поля на случай наличия внешнего поля может быть непосредственно применено, если исходить из вариационного принципа. С помощью операторов

$$D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}-i\varepsilon\varphi_k;\quad D_k^*=\frac{\partial}{\partial x_k}+i\varepsilon\varphi_k$$

обобщенную функцию Лагранжа можно записать в виде

$$L=-\frac{1}{2}U_{ik}^*U_{ik}+\frac{1}{2}U_{ik}^*(D_iU_k-D_kU_i)+\\+\frac{1}{2}U_{ik}(D_i^*U_k^*-D_k^*U_i^*)+\varkappa^2U_i^*U_i. \tag{83}$$

Из вариационного принципа, вместо (51) и (52), получаются уравнения:

$$U_{ik}=D_iU_k-D_kU_i, \tag{84}$$

$$D_kU_{ik}+\varkappa^2U_i=0. \tag{85}$$

Используя равенство

$$D_iD_k-D_kD_i=-i\varepsilon f_{ik},$$

мы получаем, применяя оператор D_i к (85) и суммируя по i, уравнение

$$\varkappa^2D_iU_i-\frac{1}{2}i\varepsilon f_{ik}U_{ik}=0. \tag{86}$$

Далее, вместо (53), мы приходим к уравнению

$$D_lU_{ik}+D_iU_{kl}+D_kU_{li}=-i\varepsilon(f_{li}U_k+f_{ik}U_l+f_{kl}U_i). \tag{87}$$

Наконец, подстановка (84) в (85) с учетом (86) дает:

$$\sum_k D_k^2U_i-\varkappa^2U_i-i\varepsilon f_{ik}U_k-\\-\frac{i}{2}\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}\frac{\partial f_{rs}}{\partial x_i}U_{rs}-\frac{i}{2}\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}f_{rs}D_iU_{rs}=0. \tag{88}$$

Следует отметить, что уравнения (84) и (85), которые можно непосредственно вывести из вариационного принципа, отличаются от (86), (87) и (88) тем, что не содержат членов, в которых явно встречается f_{ik}.

Выражение (62) для вектора тока остается в этой теории без изменения, за исключением того, что меняется смысл U_{ik}.

Согласно § 2 (b) ч. I, для тензора энергии получается вместо (55) выражение

$$T_{ik} = U^*_{kr}(D_i U_r) + (D^*_i U^*_r)\, U_{kr} - L\delta_{ik}, \tag{89}$$

которое можно преобразовать в симметричный тензор энергии θ_{ik}, вида (57), и, следовательно, это выражение остается в силе.

Рассмотрение нерелятивистского предельного случая показывает [1]), что частица, описываемая полем, обладает магнитным моментом, находящимся в таком же отношении к механическому моменту, как и в случае классического вращающегося заряда, т. е. $\frac{e\hbar}{2m_0c}$. Однако этот вывод не однозначен. В функцию Лагранжа можно ввести новые члены вида

$$L' - L = \varepsilon K \frac{1}{2} f_{ik} i\, (U^*_i U_k - U^*_k U_i), \tag{90}$$

где K — безразмерный множитель. Это не изменяет (84), но (85) должно быть заменено на равенство

$$D_k U_{ik} + \chi^2 U_i + K i \varepsilon f_{ik} U_k = 0, \tag{91}$$

а вектор тока, согласно (26), ч. I, принимает вид:

$$s'_k = s_k - i\varepsilon K \frac{\partial}{\partial x_l}(U^*_l U_k - U^*_k U_l). \tag{92}$$

Для малых скоростей частицы при этом изменении в первоначальном выражении для магнитного момента появляется множитель $(1 + K)$, следовательно, моменту может быть придано любое значение.

---

[1]) A. Proca, J. de phys. et rad. [7], 9, 61 (1938).

(е) Замечания о действительных полях. Специальный случай нулевой массы покоя

Переход к действительным полям производится по схеме § 1 (d): полагаем $U_k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(V_k+iW_k)$, где V_k и W_k действительны. Теория с единственным действительным вектором в координатном пространстве получается отождествлением U_k и U_k^*, а в пространстве импульсов — отождествлением $\mathbf{U}_+(k)$ и $\mathbf{U}_-(k)$. Вместо $N_+(k)$ и $N_-(k)$ в выражении для энергии и импульса получается лишь одно число:

$$N(k)=k_0(\mathbf{U}^*(k)\cdot\mathbf{U}(k))-\frac{1}{k_0}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}^*(k)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}(k)).$$

Вектор тока и заряд обращаются в нуль. Эта возможность была недавно использована для описания нейтральных мезонов [1]).

Важным и в некотором смысле особенным является случай нулевой массы покоя, $\varkappa=0$. Как известно, этот случай включает квантовую электродинамику. Функция Лагранжа и тензор энергии зависят только от U. Уравнения, получающиеся из принципа наименьшего действия

$$U_{ik}=\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)-\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right), \tag{93}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i}=0, \tag{94}$$

вместе с величинами U_{ik} остаются инвариантными при добавлении к U_k произвольного градиента или, иными словами, при градиентном преобразовании второго рода:

$$U_k\to U_k+\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \tag{95}$$

Это преобразование, повидимому, приводит к фундаментальному качественному различию случаев $\varkappa=0$ и $\varkappa\neq 0$. Поэтому предположение о том, что фотоны имеют очень малую, но конечную массу покоя, является, повидимому, физически неудовлетворительным. Так как градиентное преобразование первого рода не может быть применено к фотонному полю при $\varkappa=0$, то градиентное преобразование второго рода, с фазовым век-

[1]) N. Kemmer, Proc. Camb. Phil. Soc., **34**, 354 (1938). Part III.

тором, произвольно зависящим от пространства и времени, $\exp[ia(x, x_0)]$, становится невозможным для электронного и протонного полей.

Упомянем здесь о возможности комплексного поля при $\varkappa=0$; при этом вектор тока s_k определяется равенством (62). Вектор тока не будет инвариантным при подстановке (95), но общий проинтегрированный по объему заряд будет инвариантен. В этом легко убедиться из уравнения (92). Но мы не знаем случаев с $\varkappa=0$ и целым спином, требующих для своего описания комплексного поля (или двух действительных полей). Поэтому мы будем считать поле (U_i, U_{ik}) действительным и отождествлять его с фотонным полем (φ_i, f_{ik}).

В теории c-чисел особенность случая $\varkappa=0$ проявляется в том, что в этом случае уравнение (50) и волновое уравнение второго порядка (48) для U_i уже не являются следствиями уравнений (51) и (52). В теории q-чисел перестановочные соотношения (78) становятся особенными. Имеются два метода формулировки теории для $\varkappa=0$. Первый состоит в том, что для величин, не являющихся инвариантными при подстановке (95), не вводится никаких перестановочных соотношений, а для напряженностей поля сохраняются перестановочные соотношения (80) с неограниченной применимостью группы градиентных преобразований. Другой метод, развитый Ферми[1]), имеет некоторые преимущества при вычислении взаимодействия света и заряженных частиц. В этой теории вводятся в качестве соотношения q-чисел уже упомянутое выше дополнительное ограничение

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}\right) \Psi=0 \tag{96}$$

для рассматриваемого состояния и волновое уравнение

$$\Box \varphi_k=0 \tag{97}$$

для векторного потенциала.

Последние уравнения ограничивают группу градиентных преобразований теми f, которые удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box f=0.$$

---

[1]) E. Fermi, Rev. Mod. Phys. 4, 125 (1932); П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ (1937), 2-е издание.

Однако это ограничение позволяет потребовать для φ_i выполнения следующего простого перестановочного соотношения:

$$i\left[\varphi_i(x, x_0),\ \varphi_k(x', x'_0)\right] = \delta_{ik} D(x - x', x_0 - x'_0). \qquad (98)$$

Следует заметить, что в анализе собственных колебаний надо теперь положить $k_0 = |k|$ и

$$N(k) = |k|(U(k))^2 - \frac{1}{|k|}(\mathbf{k}\cdot \mathbf{U}(k))^2 = |k|(U_\perp(k))^2,$$

где

$$U_\perp(k) = \mathbf{U}(k) - \frac{\mathbf{k}}{|k|}(\mathbf{k}\cdot \mathbf{U}(k))$$

есть компонента $\mathbf{U}$, перпендикулярная $\mathbf{k}$. В выражении для энергии появляются лишь два поперечных колебания с $r = 1{,}2$, и для данного k имеются лишь два физически различных состояния.

Как упомянуто в первой части, спин фотона проявляется в том, что нижнее собственное значение квадрата полного момента количества движения $j(j+1)$ состояния одного фотона дается значением $j = 1$, а не $j = 0$ [1]).

§ 3. ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНОВ ДИРАКА $\left(\text{СПИН } \frac{1}{2}\right)$

(а) Теория *c*-чисел

В волновое уравнение Дирака для электрона

$$\gamma_k\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \varkappa u = 0 \qquad (99)$$

входят известные четырехрядные матрицы γ_k $(k = 1, \ldots, 4)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i) = \delta_{ik}. \qquad (100)$$

Как известно, функция u, определяемая (73), удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box u - \varkappa^2 u = 0. \qquad (101)$$

Введем дополнительно сопряженные функции $u^\dagger$, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\right)\gamma_k - \varkappa u^\dagger = 0. \qquad (102)$$

---

[1]) В. Паули, Общие принципы волновой механики, ГТТИ (1947), ч. II, § 2.

Функция u имеет 4 компоненты u_ρ ($\rho=1, \ldots, 4$). Мы будем сокращенно обозначать $\sum_\sigma \gamma_{k,\rho\sigma} u_\sigma$ и $\sum_\rho u^\dagger_\rho \gamma_{k,\rho\sigma}$ соответственно как $(\gamma_k u)_\rho$ и $(u^\dagger \gamma_k)_\sigma$. Лоренц-инвариантность системы уравнений (99) при данных γ_k приводит к требованию, чтобы для ортогональной подстановки

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

существовало преобразование подобия со свойством:

$$\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda = \sum_k a_{ik}\gamma_k. \tag{103}$$

u_ρ и $u^\dagger_\rho$ преобразуются согласно равенствам:

$$u' = \Lambda u, \tag{104}$$

$$u^{\dagger\prime} = \pm u^\dagger \Lambda^{-1}. \tag{105}$$

Мы не будем доказывать существования Λ для преобразований Лоренца[1]). Отметим только, что (103) определяет матрицу лишь с точностью до постоянного множителя. Ограничим этот множитель четырьмя корнями из единицы ± 1, $\pm i$, введя дополнительное требование

$$\operatorname{Det}\Lambda = 1. \tag{106}$$

Для непрерывной лоренцовой группы в (105) следует взять знак $+$, как можно показать из соображений непрерывности и из (103) и (106). Для отражений пространственных координат или времени множитель ± 1 или $\pm i$ и знак в (105) остаются неопределенными. Как будет видно из дальнейшего, выгодно взять Λ в следующем виде:

$$\Lambda = i\gamma_4 \qquad \text{для } x' = -x,\ x'_4 = x_4, \tag{107}$$

$$\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad \text{для } x' = x,\ x'_4 = -x_4, \tag{108}$$

$$\Lambda = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad \text{для } x' = -x,\ x'_4 = -x_4. \tag{109}$$

Этот вид Λ, предложенный Рака[2]), согласуется с (103). Волновое уравнение в форме (99) удобно для исследования лоренц-

---

[1]) Доказательство см. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ (1937), 2-е издание, W. Pauli, Inst. H. Poincaré Ann. **6**, 109 (1936).

[2]) G. Racah, Nuovo Cimento, **14**, 322 (1937).

инвариантности. Но свойства уравнения становятся яснее, если его представить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \boldsymbol{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + i\varkappa\beta u = 0, \tag{110}$$

где $\alpha_k = i\gamma_4\gamma_k$ для $k = 1, 2, 3$ и $\beta = \gamma_4$. (111)

Из (100) видно, что γ_k, а следовательно, и α и β можно считать эрмитовыми матрицами; в дальнейшем мы это будем всюду предполагать. Следовательно, уравнение, комплексно-сопряженное (110), имеет вид:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_0} + \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\alpha} - i\varkappa u^*\beta = 0. \tag{112}$$

Сравнение с (102) показывает, что можно положить[1])

$$u^\dagger = u^*\gamma_4. \tag{113}$$

Из соотношений $u^{\dagger\prime} = u^{*\prime}\gamma_4$ и (104) следует, что

$$u^{\dagger\prime} = u^\dagger\ (\gamma_4\Lambda^\dagger\ \gamma_4),$$

где под $\Lambda^\dagger$ мы понимаем матрицу эрмитовски-сопряженную Λ. Сравнивая это с (105) и (107—109), можно уточнить знак в (105):

$$u^{\dagger\prime} = +\,u^\dagger\ \Lambda^{-1} \tag{114}$$

для заданного направления времени,

$$u^{\dagger\prime} = -\,u^\dagger\ \Lambda^{-1} \tag{115}$$

для измененного направления времени,
если (104) и (113) сохраняют знак $+$.

Волновые уравнения (99) и (110) можно вывести из функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\left(u^\dagger\ \gamma_k\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\gamma_k u\right) + \varkappa u^\dagger\, u =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u^*}{\partial x_0}u\right) + \left(u^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\alpha}u\right)\right] + \varkappa u^*\beta u. \tag{116}$$

Кстати заметим, что, когда волновые уравнения удовлетворяются, L обращается в нуль. Из уравнения (19), ч. I, для вектора тока получается выражение:

$$s_k = \varepsilon i u^\dagger\ \gamma_k u \tag{117}$$

или

$$s_0 = \varepsilon u^* u, \quad \mathbf{s} = \varepsilon u^\dagger\ \boldsymbol{\alpha} u. \tag{118}$$

---

[1]) Обычно в (113) вводят справа множитель i. Но мы предпочитаем не делать этого, чтобы i появлялось в векторе тока.

Для канонического тензора энергии, учитывая, что $L=0$, получим:

$$T_{ik}=\frac{1}{2}\left(u^{\dagger}\gamma_k\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u^{\dagger}}{\partial x_i}\gamma_k u\right). \qquad (119)$$

Этот тензор несимметричен, но с помощью хорошо известного преобразования [1]), содержащегося как частный случай в равенствах (13с) и (14), ч. I, мы получим:

$$\theta_{ik}=\frac{1}{2}(T_{ik}+T_{ki}).$$

Этот тензор удовлетворяет уравнению непрерывности и дает тот же результат для полного импульса, что и канонический тензор.

Из (119) и (113) для плотности энергии и импульса следуют выражения:

$$W=-T_{44}=\frac{1}{2i}\left(-u^*\frac{\partial u}{\partial x_0}+\frac{\partial u^*}{\partial x_0}u\right), \qquad (120)$$

$$\mathbf{G}=\frac{1}{2i}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}-\frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}}u\right). \qquad (121)$$

Существенно отметить, что плотность заряда является положительно определенной, тогда как энергия может иметь два разных знака.

Вследствие подстановки (107—109) вектор тока ведет себя по отношению к пространственным отражениям как обычный вектор. Но при перемене знака временной координаты знак s_4 не изменяется, тогда как знаки пространственных компонент s_k меняются. Следовательно, при перемене знака у всех координат величины s_k остаются без изменения. С другой стороны, тензор энергии меняет знак при перемене знака всех координат, как видно, например, из (105).

Рассмотрим теперь u_ρ, являющиеся плоскими волнами с определенным вектором распространения ($\mathbf{k}$, k_0). Из (101) снова следует, что $k_0^2=k^2+\varkappa^2$. Для данного $\mathbf{k}$ и данного знака k_0 имеются, очевидно, два решения волновых уравнений (99) или (110), которые в покоящейся системе $\mathbf{k}=0$ могут быть преобразованы друг в друга посредством пространственных вращений. Таким образом, частицы, связанные с этими волнами, имеют спин $\frac{1}{2}$.

---

[1]) В. Паули, Общие принципы волновой механики, ГТТИ (1947), ч. II, § 2.

Исследуем теперь подробнее связь решений

$$u_\rho = a_\rho^r(k)\exp\left(i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0\right]\right) \quad \text{для } r=1,\ 2 \tag{122}$$

и

$$u_\rho = b_\rho^r(k)\exp\left(i\left[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0\right]\right) \quad \text{для } r=1,\ 2, \tag{123}$$

где под k_0 мы понимаем, как и в §§ 1 и 2, положительную величину

$$k_0 = +\left(k^2 + \varkappa^2\right)^{1/2}.$$

При соответствующей нормировке a_ρ^r

$$\sum_\rho a_\rho^{*r} a_\rho^s = \delta_{rs}; \quad \sum_\rho b_\rho^{*r} b_\rho^s = \delta_{rs}. \tag{124}$$

С помощью метода операторов аннигиляции и используя волновое уравнение, мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\sum_{r=1,2} a_\rho^r a_\sigma^{*r} &= \frac{1}{2k_0}\left(k_0 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) + \varkappa\beta\right);\\ \sum_{r=1,2} b_\rho^r b_\sigma^{*r} &= \frac{1}{2k_0}\left(k_0 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) - \varkappa\beta\right).\end{aligned} \tag{125}$$

Кроме того, между решениями с положительными и отрицательными частотами существует лоренц-инвариантное соответствие. Для доказательства заметим, что u_- удовлетворяет тому же волновому уравнению, что и u_+, где

$$u_-^* = Cu_+, \quad u_+ = C^{-1}u_-^*, \tag{126}$$

если

$$\beta^* = -C\beta C^{-1}, \quad \alpha^* = C\alpha C^{-1}. \tag{127}$$

Матрицы α^*, β^*, комплексно-сопряженные α, β, определяются соотношениями

$$(\alpha^*)_{\rho\sigma} = (\alpha_{\rho\sigma})^* = \alpha_{\sigma\rho}, \quad (\beta^*)_{\rho\sigma} = (\beta_{\rho\sigma})^* = \beta_{\sigma\rho}.$$

Матрица C действительно существует, так как $-\beta^*$, α^* удовлетворяют тем же соотношениям (100), что и β, α и γ_k. Из (126) ясно, что C^*C коммутирует со всеми γ_k и, следовательно, является постоянной. Заметим без доказательства, что матрица C симметрична, когда γ_k — эрмитовы матрицы [1])

$$C_{\sigma\rho} = C_{\rho\sigma}. \tag{128}$$

Отсюда следует, что постоянная C^*C положительна. Поэтому можно подходящим выбором множителя у C добиться, чтобы

$$C^*C = 1. \tag{129}$$

Имеется специальное представление γ_k, для которого α и $i\beta$ действительны. В этом случае C является единичной матрицей.

Инвариантность соответствия, даваемого формулой (126), по отношению к лоренц-преобразованию имеет место, если в силу (104) мы можем от (126) перейти к соответствующему соотношению для штрихованных функций, т. е. если

$$\Lambda^*C = C\Lambda \quad \text{или} \quad \Lambda^* = C\Lambda C^{-1}. \tag{130}$$

Доказательство справедливости этого соотношения для непрерывных лоренцовых преобразований дано в статье, указанной в сноске на стр. 29. Как видно из (107—109), Λ определено для всех отражений, так что (130) остается справедливым. Следовательно, соответствия (126) остаются инвариантными при всех отражениях.

Можно, очевидно, произвести специализацию a_ρ^r, полагая

$$b_\rho^{*r}(k) = \sum_\sigma C_{\rho\sigma} a_\sigma^r(k); \quad a_\rho^{*r}(k) = \sum C_{\rho\sigma} b_\sigma^r(k). \tag{131}$$

Следуя Крамерсу [2]), мы можем говорить о двух решениях, связанных соотношениями (126), как о решениях для противоположных зарядов. Эта терминология оправдывается рассмотрением действия внешнего электромагнитного поля. Его можно провести согласно § 2 (d) первой части, произведя подстановку $\frac{\partial}{\partial x_k} \longrightarrow D_k$ в волновое уравнение (99) или (100). Если u_+ удовлетворяет волновому уравнению с зарядом $+e$, то u_- удовлетворяет уравнению с зарядом $-e$. Но оказывается, что вектор тока (117)

---

[1]) Inst. H. Poincaré, Ann. 6, 109 (1936), стр. 121 и 130.

[2]) H. A. Kramers, Proc. Amst. Sci, 40, 814 (1937). Понятие решений для противоположных зарядов может быть обобщено для более высоких произвольных значений спина. Но мы не можем здесь останавливаться на этом вопросе.

сохраняет свой знак в состояниях с противоположным зарядом. Однако мы увидим, что этот недостаток устраняется в теории q-чисел.

В связи с этим, по аналогии с § 2 (d), интересно добавить в функции Лагранжа члены вида

$$L' - L = l\,\frac{1}{2}\,u^{\dagger}\gamma_i\gamma_k u f_{ik}, \tag{90a}$$

где f_{ik} напряженности внешнего поля в естественной системе единиц (§ 1, ч. I), а l имеет размерность длины. Как известно, если не вводить дополнительных членов, то для магнитного момента получается значение $\frac{l}{2k}$. Тогда во внешнем поле мы получаем видоизмененное волновое уравнение

$$\gamma_k D_k u + \varkappa u + \frac{1}{2}\,i l f_{ik}\gamma_i\gamma_k u = 0. \tag{132}$$

Для малой скорости частиц мы приходим к дополнительному члену в магнитном моменте вида $-l\,(\hbar c)^{1/2}$. Из уравнения (27), ч. I, мы видим, что дополнительный член в волновом уравнении приводит к новому члену в выражении для тока. Новое выражение для тока принимает вид:

$$s'_k = \varepsilon i u^{\dagger}\gamma_k u + l\,\frac{\partial}{\partial x_l}\,(u^{\dagger} i\gamma_k\gamma_l u). \tag{133}$$

Стоит отметить, что для электрона магнитный момент как раз равен $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{k}\right)$, так что дополнительный член не нужен. Но для протона или нейтрона положение иное. Для последнего магнитный момент должен быть получен только из нового члена, ибо здесь $\varepsilon = 0$, так что подстановка D_k вместо $\frac{\partial}{\partial x_k}$ не нужна. Важно также, что при переходе к решению для противоположного заряда вместе со знаком ε должен меняться знак l. Таким образом, эти решения являются противоположными и по магнитному моменту частицы (см. § 2, ч. I). Следует заметить, что дополнительный член вводит в теорию новую константу с размерностью длины. Дискуссию результатов введения дополнительных членов в функцию Лагранжа и соответствующих членов в выражение для тока для случая спина, равного 1, см. в § 2 (d).

(b) Квантование согласно принципу запрета

Мы видели, что для спина $^1/_2$ в теории c-чисел энергия не является положительно определенной; имеется одинаковое число положительных и отрицательных собственных значений энергии. Положение не изменится, если ввести квантование по Бозе-Эйнштейну. Но Дирак указал, что эти трудности с отрицательными уравнениями энергии могут быть устранены путем изменения определения вакуума, если ввести квантование согласно принципу запрета. Вакуум определяется как состояние с наименьшей энергией среди тех состояний, для которых число частиц в каждом состоянии удовлетворяет принципу Паули. Это ограничивает число частиц, находящихся в каждом невырожденном состоянии, значениями 0 и 1. Таким образом, вакуум определяется как такое общее состояние, при котором все уровни отрицательной энергии заняты. Тогда незаполненный отрицательный уровень, так называемая „дырка", ведет себя по отношению к определенному так вакууму как частица с положительной энергией и зарядом, обратным первоначальному.

Эта формулировка теории „дырок" Дирака не вполне симметрична по отношению к двум частицам противоположного заряда. В дальнейшем мы будем следовать формализму, предложенному Гейзенбергом[1]), выражающему то же физическое содержание в более симметричной форме.

С этой целью начнем с определения перестановочных соотношений для волновых функций. При применении принципа Паули следует рассматривать, согласно Иордану и Вигнеру, скобку

$$[u_\rho(x, x_0),\ u^*_\sigma(x', x'_0)]_+ \equiv u_\rho(x, x_0)_\rho\, u^*_\sigma(x', x'_0) + \\ + u^*_\sigma(x', x'_0)\, u_\rho(x, x_0).$$

Надо заметить, что правая часть этого выражения должна удовлетворять не только волновому уравнению второго порядка (101), но и волновому уравнению первого порядка (99) или (110). Это имеет место, если

$$[u_\rho(x, x_0), u^*_\sigma(x', x'_0)]_+ = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} I - \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - i\varkappa\beta\right)_{\rho\sigma} D(x - x', x_0 - x'_0), \qquad (134)$$

[1]) W. Heisenberg, Zeits. f. Physik, **90**, 209; **92**, 692 (1934).

где D — функция, относящаяся к волновому уравнению второго порядка с массой покоя $\varkappa$, определенной равенствами (29), (30). С помощью волновой функции $u^{\dagger}$ и матриц γ_k можно, используя (111) и (113), переписать (134) в виде:

$$i[u_\rho(x, x_0), u^{\dagger}_\sigma(x', x'_0)]_+ = \\ = \left(-\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \varkappa I\right)_{\rho\sigma} D(x - x', x_0 - x'_0). \qquad (135)$$

Волновое уравнение первого порядка выполняется в силу того, что оператор $\frac{\partial}{\partial x_0} I + \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + i\varkappa\beta$ в применении к (134) или оператор $\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \varkappa I$ в применении к (135) приводят к оператору $-\Box + \varkappa^2$, дающему в применении к функции D нуль. Релятивистская инвариантность установленного выражения видна из (135), но анализ соотношения легче производить с помощью (134).

Совместимость выражения (134) со знаком плюс в скобках с основными соотношениями основана существенным образом на том, что в правую часть входят первые производные функции D (в общем случае возможны производные нечетного порядка). Вследствие этого правая часть становится четной функцией от $x - x'$, $x_0 - x'_0$, и для $x = x'$ и $x_0 = x'_0$ алгебраическое требование положительности левой части выполняется. Действительно, для $x_0 = x'_0$, согласно (27),

$$[u_\rho(x, x_0), u^*_\sigma(x', x'_0)]_+ = \delta_{\rho\sigma}\delta(x - x'). \qquad (136)$$

Введем теперь разложение $u_\rho(x)$ по собственным колебаниям

$$u_\rho(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{u^r_+(k)\, a^r_\rho(k) \exp(i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0]) + \\ + u^{*r}_-(k)\, b^r_\rho(k) \exp(i[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0])\},$$

$$u^*_\rho(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{u^{*r}_+(k)\, a^{*r}_\rho(k) \exp(i[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0]) + \\ + u^r_-(k)\, b^{*r}_\rho(k) \exp(i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0])\},$$

где $u^r_+(k)$ и $u^r_-(k)$ и комплексно-сопряженные им выражения являются q-числами, а c-числа $a^r_\rho(k)$ и $b^r_\rho(k)$ определены и нормированы соотношениями (122), (123) и (124). Из (124) и определения функции D (25) следует эквивалентность (136) и соотношения для скобок

$$[u^r_+(k),\ u^{*s}_+(k)]_+ = [u^r_-(k),\ u^{*s}_-(k)]_+ = \delta_{rs}. \qquad (137)$$

Остальные скобки со знаком плюс обращаются в нуль.

Развивая далее идеи теории „дырок" Дирака, введем следующее правило Гейзенберга о порядке множителей, которым мы будем пользоваться при переходе от теории c-чисел к теории q-чисел. Пусть F — любой эрмитов оператор теории c-чисел. Тогда

$$u^*_\rho F_{\rho\sigma} u_\sigma = u^* F u$$

следует заменить на

$$\frac{1}{2}(u^*_\rho F_{\rho\sigma} u_\sigma - u_\sigma F_{\rho\sigma} u^*_\rho) = \frac{1}{2}(u^* F u - u F^* u^*). \qquad (138)$$

Последнее выражение правильно, в смысле операторного исчисления, также и тогда, когда F содержит эрмитов дифференциальный оператор. В этом случае все сводится к тому, что к оператору следует добавить члены, в которых дифференциальный оператор действует на первый член и которые при интегрировании по объему дают то же самое, что и члены, входящие в выражение (138). Применение этого правила к выражениям (118), (120), (121) для энергии, импульса и заряда дает:

$$E = \sum_k k_0 \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u^{*r}_+ u^r_+ - u^r_+ u^{*r}_+) + \frac{1}{2}(-u^r_- u^{*r}_- + u^{*r}_- u^r_-)\right],$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u^{*r}_+ u^r_+ - u^r_+ u^{*r}_+) + \frac{1}{2}(-u^r_- u^{*r}_- + u^{*r}_- u^r_-)\right],$$

$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u^{*r}_+ u^r_+ - u^r_+ u^{*r}_+) + \frac{1}{2}(u^r_- u^{*r}_- - u^{*r}_- u^r_-)\right],$$

если ввести

$$\begin{aligned} N^+_r(k) &= u^{*r}_+(k)\, u^r_+(k), \\ N^-_r(k) &= u^{*r}_-(k)\, u^r_-(k), \end{aligned} \qquad (139)$$

то, согласно (137)

$$E = \sum_k k_0 \sum_{r=1,2} [N^+_r(k) + N^-_r(k) - 1],$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} \sum_{r=1,2} [N^+_r(k) + N^-_r(k) - 1],$$

$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} [N^+_r(k) - N^-_r(k)].$$

Далее легко заметить, что, в силу правила Гейзенберга, соотношения (18) с обычными скобками выполняются для всех величин, не содержащих времени явно.

В связи с определением (139), нужно отметить, что при квантовании со скобками со знаком плюс в (137) как для $u_r^* u_r$, так и для $u_r u_r^*$ получаются собственные значения 0 и 1, так что оба выражения могут определять число частиц. Выбор (139) произведен таким образом, что энергия минимальна при обращении всех N в нуль; это соответствует случаю вакуума. Мы получаем, следовательно, нулевую энергию вакуума, равную половине кванта на собственное колебание [1]).

(с) Разложение по функциям для противоположных зарядов. Случай незаряженной частицы со спином $\frac{1}{2}$ [2])

Произведем сначала разложение нашего спинорного поля, в точности соответствующее разложению (44) скалярного поля U на его действительную и мнимую части. Получим

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + iw), \quad u^* = \frac{1}{\sqrt{2}} C(v - iw), \tag{140}$$

где по аналогии с (126) v и w удовлетворяют лоренц-инвариантным соотношениям вещественности

$$v^* = Cv, \quad w^* = Cw \tag{141}$$

и тем же волновым уравнениям, что и u. Формулы, обратные (140), имеют вид:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u + C^* u^*), \\ w &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{i} (u - C^* u^*). \end{aligned} \tag{142}$$

---

1) Понятие плотности энергии в этой теории, повидимому, более проблематично, чем понятие о проинтегрированной по объему полной энергии. Плотность энергии в теории „дырок“ уже не является положительно определенной, в отличие от теорий, рассмотренных в §§ 1 и 2. Это показано и в теории c-чисел; если даже ограничиться волновыми пакетами, составляющие волн которых имеют в фазе $i\,[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0]$ частоту одного и того же знака, плотность энергии не может быть сделана положительно определенной.

2) Эта теория развита впервые Майорана [E. Majorana, Il Nuovo Cimento 14, 171 (1937)], использовавшим упомянутое выше специальное представление матриц Дирака с действительным α и $C = I$. Общий случай см. Рака (сноска на стр. 46) и Крамерс (сноска на стр. 50).

Скобки с плюсом для v и w обращаются в нуль, а

$$[v_\rho(x, x_0),\ v_\sigma(x', x'_0)]_+ = [w_\rho(x, x_0),\ w_\sigma(x', x'_0)]_+ = \\ = C^*_{\sigma\tau}[u_\rho(x, x_0), u^*_\tau(x', x'_0)]_+ . \qquad (143)$$

Правую часть можно заменить согласно (134). [В силу свойств (128, 129) величины C правая часть действительно симметрична по отношению к замене x, x_0 на x', x'_0 и ρ на σ.] В частности, для $x_0 = x'_0$

$$[v_\rho(x, x_0),\ v_\sigma(x', x'_0)]_+ = [w_\rho(x, x_0),\ w_\sigma(x', x'_0]_+ = \\ = C^*_{\sigma\rho}\delta(x - x'). \qquad (144)$$

Согласно правилу Гейзенберга, $u^*_\rho F_{\rho\sigma} u_\sigma$ с эрмитовым F в теории c-чисел заменяется на

$$\frac{1}{4} v(CF - F^*C)v + \frac{1}{4} w(CF - F^*C)w + \frac{i}{4} v(CF + F^*C)w - \\ - \frac{i}{4} w(F^*C + CF)v. \qquad (145)$$

Применяя это выражение к вектору тока, т. е. полагая F равным I (единичной матрице) и α соответственно, мы найдем, что благодаря (128) члены с (v, v) и (w, w) обращаются в нуль. Таким образом

$$s_0 = \frac{1}{2}(vCw - wCv), \quad \mathbf{s} = \frac{i}{2}(vC\alpha w - w\alpha Cv).$$

Для плотности энергии и импульса F равно соответственно $-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_0}$ и $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$. В этих случаях обращаются в нуль смешанные члены, откуда

$$W = \frac{1}{i}\frac{1}{4}\left[\left(vC\frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}Cv\right) + \left(wC\frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0}Cw\right)\right], \qquad (146)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{i}\frac{1}{4}\left[\left(vC\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}Cv\right) + \left(wC\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}Cw\right)\right]. \qquad (147)$$

Переход к состоянию с противоположным зарядом осуществляется заменой

$$v \to v, \quad w \to -w. \qquad (148)$$

При этом преобразовании вектор тока меняет знак, в то время как энергия и импульс остаются прежними. В теории c-чисел имело бы место как раз обратное, так как там вектор тока содержал бы члены (v, v) и (w, w), а энергии и импульс — члены (v, w).

Разложение по собственным состояниям легко осуществить, если потребовать выполнения (131) для a^{*r}_ρ, b^{*r}_ρ и разложить величины $u^r_-(k)$ и $u^r_+(k)$ согласно равенствам

$$\left.\begin{aligned} u^r_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^r + iw^r); & u^r_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^r - iw^r) \\ u^{*r}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^{*r} - iw^{*r}); & u^{*r}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^{*r} + iw^{*r}) \end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

$$\left.\begin{aligned} [v^r, v^{*s}]_+ &= [w^r, w^{*s}]_+ = \delta_{rs} \\ [v^r, w^{*s}]_+ &= [w^r, v^{*s}]_+ = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (150)$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_\rho(x) &= (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{ v^r(k)\, a^r_\rho(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] + \\ &\quad + v^{*r}(k)\, b^r_\rho(k) \exp(-i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0]) \}, \\ w_\rho(x) &= (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{ w^r(k)\, a^r_\rho(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] + \\ &\quad + w^{*r}(k)\, b^r_\rho(k) \exp(-i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0]) \}. \end{aligned} \qquad (151)$$

Энергия, импульс и заряд принимают вид:

$$E = \sum_k \sum_{r=1,2} k_0 (v^{*r}v^r + w^{*r}w^r - 1), \qquad (152)$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \sum_{r=1,2} \mathbf{k} (v^{*r}v^r + w^{*}w^r - 1), \qquad (153)$$

$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} i (v^r w^{*r} - w^r v^{*r}). \qquad (154)$$

„Упрощенную“ форму Майорана, получаемую отождествлением состояний с противоположным зарядом, можно получить, зачеркнув $w(x)$ и скобки, содержащие $w(x)$, и оставив, следовательно, лишь первую половину соотношений (141), (144). Таким образом,

$$W = \frac{1}{4i}\left(vC\frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}Cv\right),$$

$$E = \sum_k \sum_{r=1,2} k_0 \left(v^{*r}(k)\, v^r(k) - \frac{1}{2}\right).$$

Вектор тока и магнитный момент тождественно обращаются в нуль, т. е. частица вообще не может быть источником электромагнитного поля. Эта возможность существует, очевидно, лишь в теории q-чисел с квантованием согласно принципу запрета. Пока еще неизвестно, описывается ли нейтрино, играющее роль в теории β-распада, „упрощенной" или „неупрощенной" теорией.

При спине $\frac{1}{2}$, случай $\varkappa=0$ не допускает градиентных преобразований второго рода, как и при спине 0. Для спина 1 и выше и $\varkappa=0$ эти преобразования допустимы.

§ 4. СЛУЧАЙ СИНТЕЗА ТЕОРИЙ ДЛЯ СПИНА 1 И СПИНА 0

Напишем уравнения (1) для волнового поля бесспиновой частицы в форме, аналогичной (99):

$$\beta_k\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\varkappa u=0. \tag{155}$$

В этих уравнениях β_k — пятирядные матрицы: четыре ряда действуют на вектор U_k, пятый — на скаляр U. Компоненты поля $(\varkappa)^{-1/2}U_k, (\varkappa)^{1/2}U$ мы будем обозначать U_ρ ($\rho=1, 2, \ldots, 5$), а вместо $\sum\beta_{k,\rho\sigma}u_\sigma$ будем сокращенно писать $\beta_k u$. Множители $(\varkappa)^{-1/2}$ перед U_k и $(\varkappa)^{1/2}$ перед U введены для того, чтобы сделать уравнения более симметричными. В этих обозначениях u^*u имеет размерность, обратную объему, как и в теории Дирака.

Уравнения (52), (53) для поля в случае спина 1 можно также написать в виде (155). При этом β_k должны быть десятирядными матрицами, четыре строки которых действуют на вектор U_k, а шесть — на антисимметричный тензор U_{ik}. Компоненты поля $(\varkappa)^{1/2}U_k$, $(\varkappa)^{-1/2}U_{ik}$ обозначаются u_ρ ($\rho=1, 2, \ldots, 10$).

Дэффин[1]) отметил интересный факт, что как пятирядные, так и десятирядные матрицы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\beta_i\beta_k\beta_l+\beta_l\beta_k\beta_i=\delta_{ik}\beta_l+\delta_{kl}\beta_i. \tag{156}$$

[1]) R. J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).

Основанная на этих соотношениях алгебра может быть изучена независимо от специального представления гиперкомплексных чисел β, так же как и в случае алгебры, основанной на матрицах γ_i Дирака.

Четыре матрицы β_k, единичная матрица I и все степени и произведения β_k дают 126 линейно-независимых величин. [Число независимых степеней и произведений ограничено соотношением (156).] Пятирядные и десятирядные представления этой алгебры уже были определены выше. Кроме них имеется тривиальное одномерное представление, в котором $\beta_k = 0$, а $I = 1$. Эти представления неприводимы, в алгебраическом смысле; других неприводимых представлений нет [1]).

Следовательно, если опустить тривиальное одномерное представление (к которому мы, однако, вернемся впоследствии в связи со специальным вопросом), то уравнение (156) не содержит ничего, кроме данных в §§ 1 и 2 формулировок теорий для частиц со спином 0 и 1. Однако мы исследуем, согласно Кеммеру [2]), несколько подробнее этот формализм, так как, повидимому, его можно расширить, чтобы включить высшие значения спина.

Беря часть (156), антисимметричную по k и l, и полагая

$$s_{kl} = -s_{lk} = \beta_k\beta_l - \beta_l\beta_k, \tag{157}$$

получим:

$$\beta_i s_{kl} - s_{kl}\beta_i = \delta_{ik}\beta_l - \delta_{il}\beta_k. \tag{158}$$

С помощью этого соотношения можно показать, что уравнения (155) лоренц-инвариантны. Если ортогональное преобразование

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k$$

для заданных β_k соответствует преобразованию

$$u' = \Lambda u,$$

то Λ должно удовлетворять соотношению

$$\Lambda^{-1}\beta_i\Lambda = \sum_k a_{ik}\beta_k,$$

---

[1]) Система гиперкомплексных чисел β_i, I и степени и произведения β_i известна в алгебре как полупростая. Согласно общей теореме о размерности представлений и порядке системы $126 = 1^2 + 5^2 + 10^2$.

[2]) H. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A. **173**, 91 (1939); F. Booth, A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. **175**, 483 (1940); A. H. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. **36**, 363 (1940).

аналогичному (103). Для бесконечно малых преобразований

$$x'_k = x_k + \sum_l \varepsilon_{kl} x_l, \quad \Lambda = I + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \varepsilon_{kl} s_{kl}$$

(ε_{kl} — численные коэфициенты, $s_{kl} = -s_{lk}$ — матрицы) мы получим соотношения (158)[1]). Мы видим, что определенные выше величины s_{kl} обусловливают поведение u_ρ при бесконечно малых преобразованиях.

Для вычисления β_k важно отметить, что эти матрицы не имеют обратных. Из (156) следует в частном случае

$$\beta_i \beta_k \beta_i = 0 \text{ для } i \neq k. \tag{159}$$

С другой стороны,

$$\beta_k^3 = \beta_k. \tag{160}$$

Матрицы

$$\eta_k = 2\beta_k^2 - 1 \tag{161}$$

обладают простыми свойствами:

$$\eta_k^2 = I, \quad \eta_i \eta_k = \eta_k \eta_i, \tag{162}$$

$$\beta_i \eta_k = -\eta_k \beta_i \text{ для } i \neq k, \quad \beta_i \eta_i = \eta_i \beta_i. \tag{163}$$

Если предположить, что β_k, а следовательно, и η_k эрмитовы (по аналогии с матрицами Дирака) — а это предположение совместимо с (156), — то можно с помощью η_4 [в теории Дирака для этой цели служит γ_4 (113)] определить функции $u^\dagger$

$$u^\dagger = u^* \eta_4, \tag{164}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k} \beta_k - \varkappa u^\dagger = 0 \tag{165}$$

и преобразующиеся при непрерывных лоренц-преобразованиях по закону

$$u^{\dagger\prime} = u^\dagger \Lambda^{-1},$$

так что $(u^\dagger u)$ является инвариантом относительно этих преобразований. Для пространственных отражений [см. (107)] $x' = -x'$, $x'_4 = x_4$

1) В связи с этим см., например, В. Паули, Общие принципы волновой механики, ГТТИ (1947), ч. II, § 2, форм. (A').

имеются две возможности: $u' = \eta_4 u$ или $u' = -\eta_4 u$. Последняя относится к теориям, упомянутым в §§ 1—2 [уравнения (11), (49)].

С помощью $u^\dagger$ легко построить функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\left(u^\dagger \beta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\beta_k u\right) + \varkappa u^\dagger u, \tag{166}$$

вектор тока

$$s_k = i u^\dagger \beta_k u \tag{167}$$

и канонический тензор энергии

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(u^\dagger \beta_k \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i}\beta_k u\right), \tag{168}$$

причем s_k и T_{ik} удовлетворяют уравнению непрерывности.

Для перехода от (155) к волновому уравнению необходимо проделать некоторые вычисления. Умножив (155) на $\beta_l \beta_i \frac{\partial}{\partial x_l}$, получим

$$\frac{1}{2}(\beta_l\beta_i\beta_k + \beta_k\beta_i\beta_l)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \varkappa\beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l} = 0,$$

или, по (156),

$$\beta_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} + \varkappa\beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l} = 0.$$

Используя опять (155), мы придем к равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l}. \tag{169}$$

Дифференцирование по x_i и суммирование по i дают

$$\Box u - \varkappa^2 u = 0. \tag{170}$$

С другой стороны, из (155) и (169) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + s_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varkappa\beta_i u = 0. \tag{171}$$

Мы хотим здесь обратить внимание на возможность другой формулировки теории, которая получается, если исходить из (171), а не из (155). Умножая на $1 - \beta_i^2$, мы получим (169) и далее

$$\beta_i\left[\beta_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varkappa u\right] = 0. \tag{172}$$

Это более слабое соотношение, чем (155), так как матрицы β_l не имеют обратных матриц. Кстати, для однородного представления, в котором $\beta_l = 0$, $I = 1$, из (172) и (169) получается решение $u = \mathrm{const}$.

Возвращаясь к первоначальной теории, в которой по (170) постоянные решения исключены, заметим, что с помощью некоторых преобразований (см. § 2, ч. I) можно, следуя Кеммеру, получить симметричный тензор энергии

$$\theta_{lk} = \varkappa \left[u^{\dagger} \, (\beta_l \beta_k + \beta_k \beta_l) \, u - \delta_{lk} u^{\dagger} \, u\right], \tag{173}$$

также удовлетворяющий уравнению непрерывности. Согласно (161), (164) соответствующая плотность энергии положительно определенна:

$$W = -\theta_{44} = \varkappa u^* u.$$

Перестановочные соотношения имеют вид:

$$i \left[u_{\rho} (x, x_0), \, u^{\dagger}_{\sigma} (x', x'_0)\right] = \left[\beta_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2\varkappa} (\beta_k \beta_l + \beta_l \beta_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\right]_{\rho\sigma} \times$$
$$\times \left[D (x - x', \, x_0 - x'_0)\right]. \tag{174}$$

Легко убедиться, что это согласуется с волновым уравнением (155).

Как заметил Дэффин, можно получить специальное приводимое представление с помощью соотношения

$$\beta_k = \frac{1}{2} (\gamma_k I' + \gamma'_k I). \tag{175}$$

Здесь γ_k и γ'_k — матрицы Дирака, действующие на различные группы из четырех индексов. I — единичная матрица первой системы индексов, I' — второй системы. Следовательно, β_k имеют 16 строк и 16 столбцов, а соответствующие волновые функции имеют 16 компонент [1]).

[1]) Употребление специального представления (175) в волновых уравнениях (155) приводит к уравнениям „Теории протонов" де-Бройля. Употребление этого представления с (171) вместо (155) приводит к другой формулировке теории де-Бройля, допускающей постоянные решения — так называемые „s o l u t i o n s d'a n n i h i l a t i o n" де-Бройля. Однако, согласно интерпретации настоящей статьи, теория де-Бройля вообще не описывает фотонов, а является скорее объединенным описанием двух частиц с отличной от нуля массой покоя и спином, равным 0 и 1.

В связи с этим сошлемся на приведенные в § 2 (е) аргументы относительно градиентных преобразований второго рода, противоречащие допущению отличной от нуля массы покоя фотонов.

Естественно, однако, свести 16-рядное представление к его неприводимым составным частям. Этими составными частями как раз являются пятирядное, десятирядное и однорядное представления [1)].

Этому приведению соответствует разложение величин $u_{\rho\rho'}$, имеющих 16 компонент. Если для пространственно-образного отражения ввести правило Рака, то симметричная часть $u_{\rho\rho'}$ (для которой $u_{\rho\rho'} = u_{\rho'\rho}$), принадлежащая десятирядному представлению, состоит из антисимметричного тензора и обычного вектора, а антисимметричная часть делится на скаляр, связанный с однорядным представлением, и на псевдовектор и псевдоскаляр для пятирядного представления [2)].

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

В заключение настоящей статьи приведем несколько простых приложений теорий взаимодействия частиц со спином 0, 1 и $^1/_2$ с электромагнитным полем, которые были разобраны в

[1)] Это разложение было подробно произведено Жэньо, J. Géhéniau, L'électron et photon, Paris (1938). Кроме того, оно возникает, конечно, когда рассматриваются две взаимодействующие частицы со спином $\frac{1}{2}$. Например, для дейтона, состоящего из протона и нейтрона (различием их масс покоя можно пренебречь), пятирядное представление связано с сингулярным состоянием, 10-рядное — с триплетным. [Сравните также более старую работу H. Kemmer, Helv. Phys. Acta **10**, 47 (1937), в которой рассматривается относительное движение нейтрона и протона на основе различных предположений о характере взаимодействия между ними.] В общем случае различные представления относятся к состояниям с различной энергией (вырождение снимается взаимодействием). Однорядное представление относится к комбинации протона с положительной массой покоя и нейтрона с отрицательной массой покоя, что не имеет непосредственного значения в теории c-чисел.

[2)] В связи с этим см. формулу (31) в цитированной статье автора в Inst. H. Poincaré Ann. **6**, 109 (1936), особенно стр. 129. Как отметил Рака, поведение величин, определенных в приведенной работе, меняется на обратное, если применить его правило отражений. Таким образом, величины, обозначенные Ω_1, s_k, Ω_2, принадлежащие антисимметричной части $u_{\rho'\rho}$, становятся соответственно псевдоскаляром, псевдовектором и обычным скаляром, а величина $S_{\lambda\mu\nu}$, принадлежащая симметричной части $u_{\rho\rho'}$, становится обычным вектором.

См. в особенности работу F. J. Belinfante, Nature **143**, 201 (1939); Physica, **6**, 870 (1939). Белинфанте предлагает описание мезонного поля с помощью симметричного „ундора“ $u_{\rho'\rho} = u_{\rho\rho'}$.

§§ 2(d) и 3(a) второй части. В случаях ненулевого спина будем называть магнитный момент, равный $\frac{e\hbar}{2Mc}$ (M — масса покоя частицы), нормальным магнитным моментом. Допущение для магнитного момента более общего значения $\gamma\frac{e\hbar}{2Mc}$ требует введения в функцию Лагранжа или Гамильтона дополнительных членов, пропорциональных $\gamma - 1$. Для спина 1 эти члены выражены уравнением (90), где $\gamma = 1 + k$, а для спина $\frac{1}{2}$ — уравнением (90a) (стр. 51), где $\gamma = 1 - \frac{2Mc}{\hbar}\frac{(\hbar c)^{1/2}}{el}$. Мы рассмотрим приложения к столкновению без излучения двух заряженных частиц, к Комптон-эффекту, тормозному излучению и образованию пар. Ввиду того что эффективные сечения для этих процессов можно использовать, чтобы понять природу проникающей компоненты космических лучей, мы будем для удобства называть „мезотроном“ частицу с зарядом e и различными значениями спина и магнитного момента.

(a) Столкновение мезотронов с электронами без излучения

В табл. 1 даны эффективные сечения для рассеяния мезотронов в кулоновом поле с неподвижным центром, а в табл. 2 — для электромагнитного взаимодействия мезотрона с электроном в системе координат, в которой электрон первоначально покоится. Эффективные сечения вычислены по известному методу Мёллера, посредством введения матричных элементов взаимодействия электрона с электромагнитным полем, создаваемым мезотроном, согласно различным теориям. В обоих этих процессах и в процессе тормозного излучения, рассмотренном в (c), нас особенно интересует тот случай, когда начальная энергия E_0 мезотрона велика по сравнению с Mc^2. Данные табл. 2 и формул III и V табл. 1 верны лишь в этом случае, так как дают только главные члены разложения по $\eta = \frac{E_0}{Mc^2}$. В обеих таблицах формулы III и V на один порядок в η выше формул I и II, а формула V — еще на порядок выше. Как в этих, так и в разбираемых далее процессах эффективные сечения при заданном значении спина (кроме 0) являются наименьшими, когда магнитный момент принимает свое нормальное значение $\frac{e\hbar}{2Mc}$ [1].

Таблица 1

Рассеяние мезотронов кулоновым полем

E_0 — начальная энергия мезотрона, M — масса мезотрона, θ — угол рассеяния, $\eta = \frac{E_0}{Mc^2}$.

Тип мезотрона	спин (в $\hbar$ единицах)	магнитный момент (в единицах $e\hbar/2Mc$)	Эффективное сечение для рассеяния
I	0	0	$\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2}\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$
II	$^1/_2$	1	$\frac{1}{4}\left(\frac{e}{Mc^2}\right)^2\left[\frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2}-\frac{1}{(\eta^2-1)}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$
III	$^1/_2$	$\gamma \neq 1$	$\frac{(\gamma-1)^2}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^2\theta/2}$
IV	1	1	$\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left[\frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2}+\frac{1}{6}\sin\theta\right]\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$
V	1	$\gamma \neq 1$	$\frac{(\gamma-1)^2}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\eta^2 d\Omega$

III и V верны лишь при $\eta \gg 1$; I, III, V — Corben and Schwinger, Phys. Rev. 58, 953 (1940); II—C. Møller, Zeits. f. Physik 70, 786 (1931); Ann. d. Physik (5), 14, 531, (1932); IV — Laporte, Phys. Rev. 54, 905 (1938); Massey and Corben, Proc. Camb. Phil. Soc. 35, 463 (1939).

---

[1]) Отметим что в задаче о собственных значениях для мезотрона в статическом кулоновом поле для случаев III, IV, V (в отличие от I и II) не существует полной системы ортогональных функций, так как в волновых уравнениях второго порядка появляется в этом случае при $r=0$ слишком сильная особенность. См. И. Тамм, ДАН, 29, 551 (1940); I. Tamm, Phys. Rev. 58, 952 (1940); H. C. Corben and J. Schwinger, Phys. Rev. 58, 953 (1940).

Таблица 2

Эффективные сечения для упругого рассеяния быстрых мезотронов на электронах в системе координат, в которой электрон первоначально покоится

Члены порядка $\frac{M}{m}\frac{Mc^2}{\varepsilon E_0}$ и выше опущены. M — масса мезотрона, m — масса электрона, E_0 — начальная энергия мезотрона ($E_0 \gg Mc^2$), εE_0 — энергия, переданная электрону.

Тип мезотрона			Эффективное сечение для соударения
	спин (в $\hbar$ единицах)	магнитный момент (в единицах $e\hbar/2Mc$)	
I	0	0	$2\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{M}{m}\frac{Mc^2}{E_0}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3}(1-\varepsilon)$
II	$^1/_2$	1	$2\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{M}{m}\frac{Mc^2}{E_0}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\left(1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$
III	$^1/_2$	$\gamma\neq 1$	$\pi(\gamma-1)^2\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}(1-\varepsilon)$
IV	1	1	$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\left(1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$
V	1	$\gamma\neq 1$	$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)\frac{M}{m}\frac{E_0}{Mc^2}d\varepsilon(1-\varepsilon)$

I — Corben and Schwinger, Phys. Rev. 58, 953 (1940); II — Møller, Ann. d. Physik (5) 14, 531 (1932); Bhabha, Proc. Roy. Soc. A. 164, 257 (1938); IV — Massey and Corben, Proc. Camb. Phil. Soc. 35, 463 (1939); Oppenheimer, Snyder and Serber, Phys. Rev. 57, 75 (1940).

(b) Рассеяние светового кванта (комптон-эффект)

При расчете эффективного сечения для этого эффекта и для рассматриваемого ниже процесса излучения светового кванта необязательно пользоваться квантованием электромагнитного поля. Как известно[1]), конечный результат можно вывести из обычной волновой механики с помощью некоторых формальных постулатов, согласно общей связи с классической теорией.

Результаты теории возмущений, приведенные в табл. 3, справедливы при всех энергиях. Полные эффективные сечения

[1]) Взаимосвязь обоих методов подробно рассмотрена В. Паули, Общие принципы волновой механики, § 15, ГТТИ (1947).

рассеяния, приведенные в табл. 3А, верны лишь, когда энергия падающего кванта k_0 велика по сравнению с Mc^2, так как даны лишь главные члены разложения по k_0/Mc^2. Относительно дифференциального эффективного сечения для рассеяния следует помнить, что сохранение энергии и импульса приводит к соотношению

$$k = k_0 \frac{1}{1 + \frac{k_0}{Mc^2}(1 - \cos\theta)}.$$

Так же как и в таблицах эффективных сечений для соударений без излучения, формулы III и IV более высокого порядка, чем формулы I и II.

Таблица 3

Эффективные сечения для комптоновского рассеяния

k_0 — начальная энергия кванта; k — конечная энергия кванта; рассеивающая частица массы M первоначально покоится; θ — угол рассеяния.

	Тип рассеивающей частицы		Эффективные сечения для рассеяния на угол θ для всех энергий (кроме случая III)
	спин	магнитный момент	
I	0	0	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\cos^2\theta$
II	$^1/_2$	1	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-\sin^2\theta\right)$
III	$^1/_2$	$\gamma \neq 1$	$d\Omega(\gamma-1)^4\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{1}{4}\frac{k}{k_0}\left(\frac{k}{Mc^2}\right)^2+\ldots$
IV	1	1	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\Big[1+\cos^2\theta+ + \frac{1}{48(Mc^2)^2}\{kk_0(28-64\cos\theta+12\cos^2\theta)+ +(k^2+k_0^2)(29-16\cos\theta+\cos^2\theta)\}\Big]$

См. примечание к табл. 3А.

Таблица 3А

Эффективные сечения для комптоновского рассеяния

(Обозначения те же, что и в табл. 3)

	Тип рассеивающей частицы: спин	Тип рассеивающей частицы: магнитный момент	Полное эффективное сечение рассеяния
I A	0	0	$\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{Mc^2}{k_0}$
II A	$^1/_2$	1	$\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{Mc^2}{k_0}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{2k_0}{Mc^2}\right)$
III A	$^1/_2$	$\gamma\neq 1$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2(\gamma-1)^4\frac{k_0}{Mc^2}+\dots$
IV A	1	1	$\frac{5\pi}{18}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{k_0}{Mc^2}$

I, IA, IV — Booth and Wilson, Proc. Roy. Soc. A. 175, 483 (1940); II, IIA — Klein and Nishina, Zeits. f. Physik 52, 853 (1929); Nishina, Zeits. f. Physik 52, 869 (1929); Tamm, Zeits. f. Physik 62, 545 (1930); III, IIIA, IVA — Corben (неопубликовано); III — Batdorf and Thomas, Phys. Rev. 59, 621 (1941); IVA—Смородинский, ЖЭТФ 10, 840 (1940). [В оригинале коэфициент в строке IVA дан ошибочно. *(Прим. ред.)*]

(с) Излучение светового кванта мезотроном в поле ядра (тормозное излучение) и образование пар

При приложении этих процессов к космическим лучам нельзя рассматривать ядро как точечный заряд. Скорее следует считать, что заряд ядра Ze распределен по сфере радиуса d. Этот радиус полагают согласно статистической ядерной модели равным $d=\frac{5}{6}\frac{Z^{1/3}\hbar}{Mc}$.

В табл. 4 приведены результаты различных теорий для случая $E_0\gg Mc^2$. Опять в случаях III и IV поперечное сечение более высокого порядка, чем в случаях I и II. Вероятности переходов для комптон-эффекта и процесса излучения кванта не являются независимыми друг от друга, так как последнюю можно также вычислить методом виртуальных квантов. (Хотя в случае IV этот метод следует проверить прямым методом[1]).

[1]) Weizsacker, Zeits. f. Physic 88, 612 (1934). Ср. Смородинский, ЖЭТФ, 12, 181 (1942), § 2, где показано, как следует применять этот метод в случае спина 1. *(Прим. ред.)*

Таблица 4

Эффективные сечения для тормозного излучения

E_0 — начальная энергия мезотрона ($E_0 \gg Mc^2$); M — масса мезотрона; εE_0 — энергия испускаемого γ-излучения; Z — атомный номер вещества, в котором движется мезотрон; $A = \dfrac{12(1-\varepsilon)}{5Mc^2 Z^{1/3}\varepsilon} E_0$.

	Тип мезотрона: спин	Тип мезотрона: магнитный момент	Эффективное сечение
I	0	0	$\left(\frac{e^2}{Mc_2}\right)^2 \alpha Z^2\, d\varepsilon\, \frac{16}{3}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\ln A - \frac{1}{2}\right)$
II	$^1/_2$	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2\, d\varepsilon\, \frac{16}{3}\left(\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\ln A - \frac{1}{2}\right)$
III	$^1/_2$	$\gamma \neq 1$	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 (\gamma-1)^4\, d\varepsilon \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0}{Mc^2 Z^{1/3}} + \frac{\varepsilon}{2}\ln^2 A - \frac{3\varepsilon}{2}\ln A + \ldots\right]$
IV	1	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2\, d\varepsilon \left[\frac{E_0}{Mc^2 Z^{1/3}} \cdot \frac{\pi}{60}(2-2\varepsilon+7\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon}{12}\left(17 + \frac{7\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)}\right)\ln^2 A + \left(\frac{16(1-\varepsilon)}{3\varepsilon} + \frac{13\varepsilon}{12} - \frac{5\varepsilon^3}{24(1-\varepsilon)}\right)\ln A + \ldots\right]$

I, IV — Christy and Kusaka, Phys. Rev. 59, 414 (1941); II — Гейтлер, Квантовая теория излучения, ГТТИ (1940) (во всех случаях формулы соответственно изменены с учетом конечных размеров ядра); III — Batdorf and Thomas, Phys. Rev. 59, 621 (1941). Автор обязан м-ру Томасу за сообщение ему этих результатов.

Метод виртуальных квантов состоит в том, что рассматривается система координат, в которой мезотрон покоится, и берется разложение Фурье поля быстро движущегося ядра. Тогда рассеяние светового кванта в поле, для которого эффективное сечение можно найти по формулам для комптон-эффекта, соответствует излучению кванта в системе координат, в которой покоится ядро.

С излучением светового кванта весьма тесно связан процесс образования пар. Действительно, согласно теории „дырок“,

Таблица 4А

Эффективные сечения для образования пар

E_0 — начальная энергия γ-излучения; εE_0 — энергия созданного положительного мезотрона; M — масса мезотрона; Z — атомный номер вещества; $B = \frac{12\varepsilon(1-\varepsilon)}{5Mc^2Z^{1/3}}E_0$.

	Тип мезотрона		Эффективное сечение
	спин	магнитный момент	
I	0	0	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\ln B - \frac{1}{2}\right)$
II	$^1/_2$	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\left[\frac{3}{4} - \varepsilon(1-\varepsilon)\right]\left(\ln B - \frac{1}{2}\right)$
III	$^1/_2$	$\gamma \neq 1$	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 (\gamma-1)^4 d\varepsilon \left[\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)E_0}{Mc^2Z^{1/3}} + \ldots\right] + \ldots$
IV	1	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \left[\frac{E_0}{Mc^2Z^{1/3}}\frac{\pi}{40}(7-2\varepsilon+\varepsilon^2) + \ldots\right]$

См. примечание к табл. 4.

этот процесс того же рода, что и излучение кванта, и отличается лишь тем, что при образовании пары световой квант существует в начальном состоянии, а затем поглощается и что электрон в начальном состоянии имеет отрицательную энергию. Порядок величины эффективных сечений для образования пар (табл. 4 А) тот же, что и для соответствующих процессов тормозного излучения.

Если даже основы различных рассмотренных теорий верны, справедливость полученных результатов ограничивается тем, что эффективные сечения, вычисленные методом теории возмущений, являются лишь первыми приближениями. Это особенно существенно для спина $\frac{1}{2}$ с аномальным моментом и спина 1, при котором поперечные сечения растут с ростом энергии. Применимость первого приближения теории возмущений в этих случаях исследовалась Оппенгеймером[1]) и Ландау[2]). У первого автора критерием является условие малости энергии взаимодействия мезотрона и кванта по сравнению с невозмущенной энергией каждого из них в системе координат, в которой импульсы мезотрона и кванта равны и противоположно направлены; у второго автора — условие малости вероятностей перехода для всех процессов, возможных при том же начальном состоянии (например, излучение нескольких пар световых квантов), по сравнению с вероятностью рассматриваемого процесса[3]). Для тормозного излучения образования пар и комптон-эффекта оба эти критерия дают одно и то же условие: $E_0 < \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$ или $h\nu < \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$. Но для спина 0 и спина $\frac{1}{2}$ с нормальным магнитным моментом эти условия выполнены для всех энергий, если $Ze^2/\hbar c \ll 1$ [4]).

Хотя очевидно, что эти критерии являются необходимыми условиями применимости первого приближения теории возмущений, было бы желательно подробное исследование достаточности этих условий (особенно для спина 0). В таком исследовании потребуется рассматривать высшие приближения теории возмущений. Поскольку это приводит к появлению бесконечностей, которые следует исключить, произведя соответствующим образом обрывание, то эта задача не является чисто математической и затрагивает физическую проблему области применимости основ настоящей теории.

---

[1]) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **59**, 462 (1941). См. также J. R. Oppenheimer, H. Snyder and R. Serber, случай IV табл. 2.

[2]) Л. Ландау, ЖЭТФ, **10**, 418 (1940); ср. также Л. Ландау и Я. Смородинский, ЖЭТФ, **11**, 55 (1941).

[3]) Ландау требует, чтобы число рассеянных частиц с заданным значением момента количества движения l, вычисленное по формуле теории возмущений, было меньше, чем их число в падающем потоке. *(Прим. ред.)*

[4]) Для применимости значения поперечного сечения для рассеяния без излучения мезотронов со спином 1 и нормальным магнитным моментом на первоначально покоившемся электроне (табл. 2, случай IV) Оппенгеймер, Снайдер и Сербер дают критерий $E_0 < \frac{M}{m} \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$ [Phys. Rev. **57**, 75 (1940)].

ДОПОЛНЕНИЕ [1]

СВЯЗЬ СПИНА И СТАТИСТИКИ [2]

*

Неприводимые тензоры. Определение спинов

Мы используем лишь несколько общих свойств величин, преобразующихся согласно неприводимым представлениям лоренцовой группы [3]). Собственно лоренцова группа есть непрерывная линейная группа, преобразования которой оставляют инвариантной форму

$$\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \mathbf{x}^2 - x_0^2,$$

имеют детерминант, равный $+1$, и не меняют направления времени. Тензор или спинор, который преобразуется неприводимым образом этой группой преобразований, можно охарактеризовать двумя целыми положительными числами (p, q). Соответствующие „квантовые числа моментов количества движения“ (j, k) определяются при этом соотношениями $p = 2j + 1$, $q = 2k + 1$, где j и k — целые или полуцелые числа [4]).

Величина $U(j, k)$, характеризуемая (j, k), имеет $pq = (2j+1)(2k+1)$ независимых компонент. Следовательно,

---

[1]) Phys. Rev. 58, 116 (1940). Начало статьи, представляющее точное повторение первого параграфа настоящей монографии, опущено в переводе. Изложение свойств функций D и D_1 (стр. 80) заменено ссылкой на соответствующее место текста. (*Прим. ред.*)

[2]) Соотношение между настоящим рассмотрением связи спина со статистикой и несколько менее общим рассмотрением Белинфанте, основанным на концепции инвариантности заряда, разъяснено в статье Паули и Белинфанте [Physica, 7, 177 (1940)].

[3]) См. Ван дер Варден, Метод теории групп в квантовой механике, Киев — Харьков (1938).

[4]) В спинорном исчислении это спинор с $2j$ пунктирными и $2k$ непунктирными индексами.

величине $(0, 0)$ соответствует скаляр, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — вектор, $(1, 0)$ — самодуальный антисимметричный тензор, $(1, 1)$ — симметричный тензор со следом, равным нулю, и т. д. Спинор Дирака u_ρ сводится к двум неприводимым величинам $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, каждая из которых состоит из двух компонент. Если $U(j, k)$ преобразуется согласно представлению

$$U'_r = \sum_{s=1}^{(2j+1)(2k+1)} \Lambda_{rs} U_s,$$

то $U^*(k, j)$ преобразуется согласно комплексно-сопряженному представлению Λ^*. Таким образом для $k=j$, $\Lambda^* = \Lambda$. Это верно только при надлежащем выборе компонент $U(j, k)$ и $U(k, j)$. В общем случае мы обозначаем через U^* величину, преобразование которой эквивалентно Λ^*, если преобразование U эквивалентно Λ.

Самой важной операцией является приведение произведения двух величин

$$U_1(j_1, k_1) \cdot U_2(j_2, k_2),$$

которое по известному правилу составления моментов разлагается на несколько $U(j, k)$, где j и k пробегают независимо друг от друга значения:

$$j = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|,$$
$$k = k_1 + k_2, \quad k_1 + k_2 - 1, \ldots, |k_1 - k_2|.$$

Если ограничить преобразования только подгруппой пространственных вращений, то различие между числами j и k исчезает, и $U(j, k)$ ведет себя по отношению к этой группе как произведение двух неприводимых величин $U(j)\,U(k)$, которое в свою очередь приводится к нескольким неприводимым величинам $U(l)$, каждая из которых имеет $2l+1$ компонент, причем

$$l = j + k, \ j + k - 1, \ldots, |j - k|.$$

При пространственном вращении величины $U(l)$ с целыми l преобразуются согласно однозначному представлению, а с полуцелым l — согласно двузначным представлениям. Поэтому неприведенные величины $U(j, k)$ с целым (полуцелым) $j+k$ являются однозначными (двузначными).

На первый взгляд кажется, что значение спина частиц, принадлежащих данному полю, определяется через $l=j+k$. Однако такое определение не соответствовало бы физическим фактам, так как тогда не существовало бы связи между значением спина и числом независимых плоских волн, возможных при отсутствии взаимодействия при данных значениях компонент k_l в фазовом множителе $\exp i(\mathbf{kx})$.

Чтобы надлежащим образом определить спин [1]), рассмотрим сначала случай, когда масса покоя всех частиц отлична от нуля. Произведем в этом случае преобразование к системе, в которой частица покоится, т. е. все пространственные компоненты k_l равны нулю и волновая функция зависит только от времени. Приведем в этой системе компоненты поля (которые, согласно уравнениям поля, не обязательно должны обращаться в нуль) к частям, неприводимым по отношению к пространственным вращениям. Каждой такой части с $r=2s+1$ компонентами принадлежит r различных собственных функций, которые при пространственных вращениях преобразуются друг в друга и относятся к частице со спином s. Если уравнения поля описывают частицы, обладающие лишь одним значением спина, то в покоящейся системе существует лишь одна неприводимая группа компонент. Из лоренц-инвариантности следует, что для произвольной системы отсчета собственные функции r или $\sum r$ принадлежат заданным произвольным k_l. В общей системе координат число величин $U(j, k)$, входящих в теорию, определить труднее, так как эти величины должны вместе с вектором k_l удовлетворять нескольким условиям.

В случае нулевой массы покоя имеет место особое вырождение, так как в этом случае, как показал Фирц, допустимо градиентное преобразование второго рода [2]). Но если поле описывает лишь один род частиц с нулевой массой покоя и определенным значением спина, то при заданных значениях k_l имеются лишь два состояния, не преобразуемых друг в друга с помощью градиентного преобразования. С физической точки зрения в этом случае можно не давать определения спина, так

[1]) См. M. Fierz, Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1939) и L. de Broglie, C.R. Paris, 208, 1697 (1939); 209, 265 (1939).

[2]) См. стр. 16 этой книги.

как полный момент количества движения поля не может быть разделен с помощью измерений на орбитальный и спиновый моменты. Однако для определения спина можно использовать следующее свойство. Если в теории q-чисел рассмотреть состояния, в которых имеется лишь одна частица, то оказываются возможными не все собственные значения $j(j+1)$ квадрата момента. А именно, j начинается с определенного минимального значения s, принимая значения s, $s+1$, ... [1]). Это имеет место только при $\varkappa=0$. Для фотонов $s=1$; для отдельного фотона значение $j=0$ невозможно[2]). Для гравитационных квантов $s=2$ и j не может принимать значений $j=0$ и $j=1$.

В произвольной системе координат и при произвольных массах покоя величины U, которые все преобразуются согласно двузначным (однозначным) представлениям с полуцелым (целым) $j+k$, описывают лишь частицы с полуцелым (целым) спином. Специальное исследование необходимо лишь в том случае, если нужно решить, описывает ли теория частицы с единственным или с несколькими значениями спина.

Доказательство неопределенного характера заряда при целом спине и энергии — при полуцелом спине

Рассмотрим сначала теорию, в которой используются лишь U с целыми $j+k$, т. е. которая описывает только частицы с целым спином. При этом не предполагается, что описываются частицы лишь с одним единственным спином, однако все частицы должны иметь целый спин. Разделим величины U на два класса: 1) „класс $+1$“ с целыми j и k, 2) „класс -1“ с полуцелыми j и k.

Такое обозначение классов оправдывается тем, что по указанным правилам сведения произведения к неприводимым составляющим при лоренцовой группе произведение двух величин класса $+1$ или класса -1 содержит лишь величины класса $+1$, а произведение величин разных классов содержит лишь величины класса -1. Существенно, что комплексно-сопряженная величина U^* с переставленными j и k принадлежит к тому же классу, что и U. Как легко увидеть из правила умножения, тензоры с четным (нечетным) числом индексов приводятся только

[1]) Общее доказательство этого дал М. Фирц, Helv. Phys. Acta, **13**, 45 (1940).

[2]) См., например, В. Паули, Основные принципы волновой механики, ГТТИ (1947).

к величинам класса $+1$ (-1). Волновой вектор k_l мы относим к классу -1, так как при умножении на другие величины он ведет себя как величина класса -1.

Рассмотрим теперь однородное линейное уравнение для величин U (не обязательно первого порядка). Для плоской волны мы можем заменить $-i\,\partial/\partial x_l$ на k_l. В силу инвариантности по отношению к собственной лоренцовой группе, уравнение должно иметь форму

$$\sum kU^+ = \sum U^-, \quad \sum kU^- = \sum U^+. \tag{Д.1}$$

Такая форма означает, что может иметься столько же различных членов одинакового типа, сколько имеется величин U^+ и U^-. Кроме того, под U^+ мы понимаем здесь как U^+, так и $(U^+)^*$, а для некоторых U может выполняться соотношение $U = U^*$. Наконец, мы опустили четное число множителей k. Они могут входить в любом числе в члены суммы в правой или левой части этих равенств. Эти уравнения, очевидно, инвариантны по отношению к подстановке

$$\begin{gathered} k_l \to -k_l, \quad U^+ \to U^+, \quad [(U^+)^* \to (U^+)^*]; \\ U^- \to -U^-, \quad [(U^-)^* \to -(U^-)^*]. \end{gathered} \tag{Д.2}$$

Рассмотрим теперь тензоры T четного ранга (скаляры, антисимметричные или симметричные тензоры второго ранга и т. д.), являющиеся квадратичными или билинейными формами от U. Они состоят лишь из величин с четными j и k и, следовательно, имеют форму

$$T \sim \sum U^+U^+ + \sum U^-U^- + \sum U^+kU^-, \tag{Д.3}$$

где опять опущены возможные множители k (четное число) и не различаются U и U^*. Подстановка (Д.2) оставляет эту форму неизменной: $T \to T$.

Иначе обстоит дело с тензорами нечетного ранга S (векторы и т. д.), состоящими из величин с полуцелыми j и k. Они имеют вид

$$S \sim \sum U^+kU^+ + \sum U^-kU^- + \sum U^- \tag{Д.4}$$

и, следовательно, меняют при подстановке (Д.2) знак: $S \to -S$. В частности, это имеет место для вектора тока s_l. Преобразованию $k_l \to -k_l$ для произвольных волновых пакетов соответствует преобразование $x_l \to -x_l$; замечателен тот факт, что из одной лишь инвариантности (Д.1) по отношению к собственной лоренцовой группе следует свойство инвариантности при изменении знака всех координат. В частности, отсюда следует неопределенный характер плотности тока и полного заряда при четном спине, так как каждому решению уравнений поля соответствует другое решение с противоположным знаком компонент s_k. Поэтому для четного спина нельзя ввести определенную плотность частиц, преобразующуюся как четвертая компонента вектора.

Перейдем теперь к рассмотрению несколько более сложного случая полуцелых спинов. Разделим величины U с полуцелыми $j+k$ следующим образом: 3) „класс $+\varepsilon$" с целым j и полуцелым k, 4) „класс $-\varepsilon$" с полуцелым j и целым k.

Перемножение классов 1) ... 4) подчиняется правилу $\varepsilon^2=1$ и коммутативному закону. Это правило не изменится, если ε заменить на $-\varepsilon$.

Правила перемножения величин различных классов можно свести в следующую таблицу:

	$+1$	-1	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$
$+1$	$+1$	-1	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$
-1	-1	$+1$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+1$	-1
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	-1	$+1$

Существенно, что здесь комплексно-сопряженные величины с переставленными j и k не принадлежат к одному и тому же классу, так что

$U^{+\varepsilon}$, $(U^{-\varepsilon})^*$ принадлежат к классу $+\varepsilon$,

$U^{-\varepsilon}$, $(U^{+\varepsilon})^*$ принадлежат к классу $-\varepsilon$.

Поэтому мы будем явно выписывать комплексно-сопряженные величины. [Можно было бы даже подобрать $U^{+\varepsilon}$ так, чтобы все величины класса $-\varepsilon$ имели вид $(U^{+\varepsilon})^*$].

Вместо (Д.1) мы получаем следующую типичную форму уравнений:

$$\begin{aligned} \sum kU^{+\varepsilon}+\sum k(U^{-\varepsilon})^* &= \sum U^{-\varepsilon}+\sum(U^{+\varepsilon})^* \\ \sum kU^{-\varepsilon}+\sum k(U^{+\varepsilon})^* &= \sum U^{+\varepsilon}+\sum(U^{-\varepsilon})^*, \end{aligned} \tag{Д.5}$$

так как множитель k или $i\,\partial/\partial x$ всегда переводит выражение из одного из классов $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ в другой. Как и раньше, мы опустили четное число множителей k.

Рассмотрим теперь вместо (Д.2) подстановку

$$k_l \to -k_l;\quad U^{+s} \to iU^{+s};\quad (U^{-s})^* \to i(U^{-s})^*$$
$$(U^{+s})^* \to -i(U^{+s})^*;\quad U^{-s} \to -iU^{-s}. \tag{Д.6}$$

Она удовлетворяет алгебраическому требованию перехода к комплексно-сопряженным величинам и требованию, чтобы величины одного класса, как, например, U^{+s}, $(U^{-s})^*$, преобразовывались одинаково. Кроме того, она не противоречит возможным условиям вещественности типа $U^{+s}=(U^{-s})^*$ или $U^{-s}=(U^{+s})^*$. При подстановке (Д.6) уравнения (Д.5) остаются инвариантными.

Рассмотрим опять тензоры четного ранга (скаляры, тензоры второго ранга и т. д.), являющиеся квадратичными или билинейными формами от U и U^*. Из соображений, аналогичных приведенным выше, они должны иметь вид:

$$T \sim \sum U^{+s}U^{+s} + \sum U^{-s}U^{-s} + \sum U^{+s}kU^{-s} +$$
$$+ \sum U^{+s}(U^{-s})^* + \sum U^{-s}(U^{+s})^* + \sum (U^{-s})^* kU^{-s} +$$
$$+ \sum (U^{+s})^* kU^{+s} + \sum (U^{-s})^* k(U^{+s})^* + \sum (U^{-s})^*(U^{-s})^* +$$
$$+ \sum (U^{+s})^*(U^{+s})^*. \tag{Д.7}$$

Тензоры нечетного ранга (векторы и т. д.) должны иметь вид:

$$S \sim \sum U^{+s}kU^{+s} + \sum U^{-s}kU^{-s} + \sum U^{+s}U^{-s} +$$
$$+ \sum U^{+s}k(U^{-s})^* + \sum U^{-s}k(U^{+s})^* + \sum U^{-s}(U^{-s})^* +$$
$$+ \sum U^{+s}(U^{+s})^* + \sum (U^{-s})^* k(U^{-s})^* + \sum (U^{+s})^* k(U^{+s})^* +$$
$$+ \sum (U^{-s})^*(U^{+s})^*. \tag{Д.8}$$

Подстановка (Д.6) приводит к результатам, противоположным результатам подстановки (Д.2): тензоры четного ранга меняют знак, а нечетного — не меняют:

$$T \to -T,\quad S \to +S. \tag{Д.9}$$

Следовательно, при полуцелом спине нельзя ввести положительно определенную плотность энергии или положительно определенную полную энергию. Последнее следует из того, что при подстановке (Д.6) плотность энергии в каждой пространственно-временной точке меняет знак, а следовательно, меняет знак и полная энергия.

Следует подчеркнуть, что не только не обязательно считать, что мы имеем дело с волновыми уравнениями первого порядка [1]), но что остается также открытым вопрос о том, инвариантна ли теория также по отношению к пространственным отражениям ($\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, $x_0' = x_0$). Поэтому эта схема включает и двукомпонентные волновые уравнения Дирака (с нулевой массой покоя).

Из этих рассмотрений не следует, что при целых спинах всегда существует определенная плотность энергии, а при полуцелых — определенная плотность заряда. Фирц [2]) действительно показал, что при спине > 1 плотности не удовлетворяют этому требованию. Однако (в теории c-чисел) при полуцелых спинах существует определенный полный заряд, а при целых — определенная полная энергия. Спин $\frac{1}{2}$ отличается тем, что для него можно ввести определенную плотность заряда, а спины 0 и 1 — тем, что можно ввести определенную плотность энергии. Тем не менее, современная теория допускает любые значения спиновых квантовых чисел элементарных частиц, так же как и любые значения массы покоя, электрического заряда и магнитного момента частиц.

Квантование полей в отсутствие взаимодействия. Связь спина и статистики

Невозможность удовлетворительного с физической точки зрения определения плотности энергии при полуцелом спине в теории c-чисел указывает на невозможность удовлетворительной интерпретации теории в пределах задачи одного тела [3]). Действительно, все релятивистски инвариантные теории приводят к частицам, которые могут во внешнем поле излучаться и поглощаться в виде пар противоположного заряда (в случае электрически заряженных частиц) или в виде отдельных частиц (в случае нейтральных частиц). Поэтому поля должны подвергаться вторичному квантованию. Здесь мы не будем применять для них канонический формализм, при котором время и пространство резко разделены и который удобен лишь при отсутствии допол-

---

[1]) Но мы исключаем операции типа $(k^2+\varkappa^2)^{1/2}$, действующие на конечных расстояниях в координатном пространстве.

[2]) M. Fierz, Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1939).

[3]) Поэтому автор считает неубедительным первоначальный аргумент Дирака, согласно которому уравнение поля должно быть первого порядка.

нительных условий на канонические переменные [1]). Вместо этого мы здесь применим обобщение метода, примененного впервые Йорданом и Паули к электромагнитному полю. Этот метод особенно удобен при отсутствии взаимодействия, когда все поля $U^{(r)}$ удовлетворяют волновому уравнению второго порядка:

$$\square U^{(r)} - \varkappa^2 U^{(r)} = 0,$$

где

$$\square \equiv \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2},$$

а $\varkappa$ — масса покоя частиц (в единицах $\hbar/c$). Для вторичного квантования играет важную роль функция D, определенная на стр. 26, формула (25). Функция D_1, определяемая формулой (31), исключается благодаря тому, что мы, как и раньше, специально постулируем, что все физические величины на конечном расстоянии вне светового конуса (для $|x_0' - x_0''| < |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|$) коммутируют [2]). Отсюда следует, что скобки для всех величин, удовлетворяющих волновому уравнению (Д. 9), можно выразить через D-функцию и конечное число ее производных, не используя функции D_1. То же самое верно и для скобок со знаком $+$, так как в противном случае градиентно-инвариантные величины, как, например, плотность заряда, были бы не коммутативны в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом [3]).

Наш постулат оправдывается тем, что измерения в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, никогда не могут влиять друг на друга, так как никакие сигналы не могут распространяться со скоростями, превышающими скорость света. Теории, в которых при квантовании использовалась бы функция D_1, фундаментально отличались бы по своим выводам от известных теорий.

---

[1]) Из-за наличия таких условий канонический формализм неприменим для спина > 1; поэтому дискуссия де-Вета [Phys. Rev. **57**, 646 (1940)] о связи спина и статистики, основанная на этом формализме, не является достаточно полной.

[2]) Для канонического формализма этот постулат выполнен явным образом. Однако этот постулат является значительно более общим, чем канонический формализм.

[3]) См. W. Pauli, Ann. de l'Inst. H. Poincaré **6**, 137 (1936), особенно § 3.

Мы сможем сделать дальнейшие заключения о числе производных D-функции, которые могут встречаться в скобках, если учтем инвариантность при преобразованиях собственной группы Лоренца и используем результаты предыдущего раздела о разделении тензоров на классы. Допустим, что величины $U^{(r)}$ расположены таким образом, что каждая компонента поля состоит лишь из величин одного класса. Рассмотрим, в частности, скобки, составленные из компоненты поля $U^{(r)}$ и сопряженной ей величины

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')].$$

Здесь мы будем различать два случая — полуцелый и целый спин. В первом случае это выражение, согласно (Д. 8), преобразуется при лоренц-преобразованиях как тензор нечетного ранга, а во втором — как тензор четного ранга. Поэтому при полуцелом спине

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] = \tag{Д. 10a}$$

$=$ нечетному числу производных функции $D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'',\ x_0' - x_0'')$, аналогично при целом спине

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] = \tag{Д. 10b}$$

$=$ четному числу производных функции $D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', x_0' - x_0'')$.

Это следует понимать так, что в правой части равенства может стоять сложная сумма выражений указанного типа. Рассмотрим теперь выражение

$$X \equiv [U^{(r)}(\mathbf{x}',\ x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] + \\ + [U^{(r)}(\mathbf{x}'', x_0''),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}',\ x_0')], \tag{Д. 11}$$

симметричное по отношению к обеим точкам. Так как D является четной функцией пространственных координат и нечетной функцией времени, в чем легко убедиться из уравнений (25) или (30), то из симметрии X следует, что X равно произведению четного числа пространственно-подобных производных от $D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'',\ x_0' - x_0'')$ на нечетное число временно-подобных. Это полностью согласуется с (Д. 10 a) для полуцелого спина, но противоречит (Д. 10 b) для целого спина, если только X не обращается в нуль. Поэтому для целого спина

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] + \\ + [U^{(r)}(\mathbf{x}'', x_0''),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}', x_0')] = 0. \tag{Д. 12}$$

До сих пор мы не проводили различия между двумя случаями — статистикой Бозе и принципом запрета. В первом случае мы имеем обычные скобки со знаком —, во втором, согласно Иордану и Вигнеру, — скобки:

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

со знаком +. Если в (20) подставить скобки со знаком +, то мы придем к алгебраическому противоречию, так как левая часть существенно положительна при $x' = x''$ и может обратиться в нуль только, если $U^{(r)}$ и $U^{*(r)}$ равны нулю[1]).

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: при целом спине квантование, согласно принципу запрета, невозможно. Для этого вывода существенно, что применение функции D_1 вместо D запрещено из общих соображений.

С другой стороны, формально возможно квантование по статистике Бозе-Эйнштейна при полуцелом спине, но при этом энергия системы, согласно предыдущему разделу, не была бы положительна. Из физических соображений ее следует считать положительной, поэтому необходимо применять принцип запрета в сочетании с теорией „дырок" Дирака.

Доказательство того, что возможна теория с положительной полной энергией для целых (полуцелых) спинов с квантованием по статистике Бозе (соответственно-согласно принципу запрета), приводится в уже упоминавшейся работе Фирца. В другой ра-

---

[1] К этому противоречию можно притти также, разлагая $U^{(r)}$ на собственные колебания:

$$U^{*(r)}(\mathbf{x}, x_0) = V^{-1/2} \Sigma_k \left\{ U_+^*(k) \exp[i\{-(\mathbf{kx}) + k_0 x_0\}] + \right.$$
$$\left. + U_-(k) \exp[i\{(\mathbf{kx}) - k_0 x_0\}] \right\},$$
$$U^{(r)}(\mathbf{x}, x_0) = V^{-1/2} \Sigma_k \left\{ U_+(k) \exp[i\{(\mathbf{kx}) - k_0 x_0\}] + \right.$$
$$\left. + U_-^*(k) \exp[i\{-(\mathbf{kx}) + k_0 x_0\}] \right\}.$$

Тогда из (21) вытекает, в частности, соотношение

$$[U_+^*(k),\ U_+(k)] + [U_-(k), U_-^*(k)] = 0,$$

которое для скобок со знаком + может выполняться лишь при $U_\pm(k)$ и $U_\pm^*(k)$, равных нулю.

боте Фирца и Паули[1]) рассмотрен случай электромагнитного поля, а также связь специального случая спина, равного 2, и гравитационной теории Эйнштейна.

В заключение мы хотели бы отметить, что установление связи спина со статистикой, по нашему мнению, является одним из наиболее существенных приложений специальной теории относительности.

---

[1]) M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc., A. **173**, 211 (1939).

СОДЕРЖАНИЕ

Художник Г. Мануйлов

*

Редактор К. Гуров

Технический редактор А. Киселева

Корректор Р. Шейхет

*

Сдано в производство 19/III 1947 г. Подписано к печати 20/V 1947 г. А00408. 5,25 печ. л., 5,1 учетно-издат. л. Формат 60×92¹/₁₆. Зак. № 7207. Издат. № 2/11. Цена 7 р. 50 к.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.