

Д. И. Пеннер, В. А. Угаров

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*Допущено Министерством просвещения СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
физико-математических факультетов  
педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1980

ББК 22.313

П 25

Пеннер Д. И., Угаров В. А.

П 25 Электродинамика и специальная теория относительности:  
Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.:  
Просвещение, 1980. — 271 с., ил.

В пособии содержится теоретический материал, а также необходимое количество тренировочных задач и упражнений. Большое внимание уделяется установлению связей между теоретическим курсом электродинамики и соответствующими разделами школьного курса физики.

П  $\frac{60602-210}{103(03)-80}$  44—80 4309021100

ББК 22.313  
537

Курс электродинамики — первая часть курса теоретической физики, изучаемого студентами. Это обстоятельство учтено авторами в том плане, что первые главы данной книги изложены несколько подробнее последующих.

Изучение основ электродинамики предполагает прочные знания курсов общей физики и методов математической физики. Используемый в книге математический аппарат не выходит за рамки курсов анализа и методов математической физики.

Если возникают затруднения в понимании каких-либо математических формул или приемов вычисления, то рекомендуется пользоваться справочниками по математике, быстрая ориентация в которых необходима каждому физическому.

В целях усиления профессионально-педагогической направленности курса авторы отводят определенное место экспериментальным основам теории электромагнетизма, не страшась при этом некоторого (конечно, небольшого, но неизбежного) перекрытия учебного материала с общим курсом физики.

Теоретический курс электродинамики подводит читателей к важным обобщениям, позволяющим с помощью математического аппарата глубоко и всесторонне проанализировать явления электромагнетизма. Знание теоретических основ электродинамики помогает понять характер и объем упрощений, по необходимости допускаемых в соответствующих разделах школьных учебников физики. В частности, в некоторых темах предлагаемого курса на конкретных примерах показано, какие упрощения приходится вводить в школьном курсе физики при изложении этих тем. В ссылок на школьный курс физики имеются в виду учебное пособие для IX класса (Б. Б. Буховцев, Ю. Л. Климонтович, Г. Я. Мякишев) и учебник для X класса (Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев).

В связи с ограниченным объемом книги авторы не рассматривают принципы построения систем электрических и магнитных единиц, полагая, что ознакомление с ними студентов будет отнесено на семинарские занятия. В книге последовательно используется Международная система единиц (СИ), но основные уравнения приводятся также в системе СГС (гауссовой).

По материалам большинства глав предлагаются упражнения, выполнение которых является обязательным. В конце книги

приведены их решения (рекомендуется, конечно, прибегать к их помощи лишь после серьезной попытки самостоятельно решить эти задачи).

В книге широко использованы приемы изложения основ электродинамики, разработанные в известных руководствах Р. Беккера, И. Е. Тамма, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица и других авторов. Ряд интересных приемов заимствован из руководств И. К. Овчинникова (Теория поля. М., Недра, 1971), Г. О. Бугаенко и М. Е. Фонкича (Электродинамика и СТО, на укр. яз. Киев, Радянська школа, 1966). От внимательного читателя не ускользнут попытки авторов найти свои методические решения ряда вопросов.

Рукопись книги была уже закончена, когда смерть внезапно унесла из жизни В. А. Угарова в полном расцвете творческих сил. Им в данной книге написаны § 42—44, 48—51, 62—75. Обе части книги обсуждались и редактировались авторами совместно.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить научного редактора Ю. Н. Дрожжина за ценные советы при подготовке рукописи этой книги.

Все пожелания и критические замечания читателей будут приняты с благодарностью.

*проф. Д. И. Пеннер*



# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## ВВЕДЕНИЕ

В современной научной терминологии понятие макроскопической электродинамики в целом совпадает с классической теорией электромагнитного поля, основы которой заложил Д. К. Максвелл (1831—1879) в своем фундаментальном труде «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873). Г. Герц (1857—1894) своими известными опытами (1887—1889) экспериментально подтвердил ее, получив предсказанные Максвеллом электромагнитные волны; он же придал уравнениям Максвелла их современную форму. В теории Максвелла в изящной сжатой форме обобщены основные экспериментальные и теоретические достижения учения об электромагнетизме.

Завершением классической электродинамики явилось открытие материальной природы электромагнитного поля; основная заслуга этого открытия (1905) принадлежит А. Эйнштейну (1879—1955). Некоторая, главным образом терминологическая, непоследовательность Эйнштейна в трактовке физической природы электромагнитного поля была затем устранена академиком С. И. Вавиловым (1891—1951).

В классическом понимании поле — область пространства, характеризующаяся распределением некоторой физической величины (например, температуры, упругих сил, скорости) в веществе, локализованном в данной области пространства. В отличие от таких «математических» полей, имеющих вещественные носители, электромагнитное поле не нуждается в каком-либо носителе. Оно представляет собой самостоятельный вид материи (один из видов материальных физических полей). Это поле как особый вид материи характеризуется, с одной стороны, непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и, с другой — обнаруживает дискретность структуры (фотоны); оно обладает способностью распространяться в вакууме со скоростью, близкой к  $3 \cdot 10^{10}$  см/с, и оказывает на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются два его проявления — электрическое и магнитное. Условность такого расчленения, связанная с выбором системы отсчета, выяснена теорией относительности. Электрическое поле определяется как одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного по-

ля, оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемая по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.

Магнитное поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная движущимися электрическими зарядами и изменением электрического поля, оказывающая силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемая по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости.

Другим видом материи, отличным от физических полей, является вещество, характеризующееся дискретной (атомистической) пространственной структурой.

Современные представления об электромагнитном поле возникли в результате длительной эволюции научных знаний о природе электрических, магнитных и световых явлений.

Своеобразным «предшественником» электромагнитного поля явился механический мировой эфир Гюйгенса — Френеля. Это гипотетическое вещество, всепроникающее и невесомое, на протяжении долгого времени считалось носителем световых явлений. Фарадей ввел в физику электрическое и магнитное поля, рассматривая их как состояния особой среды — электромагнитного эфира. Возникла двойственность эфира (светоносного и электромагнитного), которая затем, во второй половине XIX в., была устранена Максвеллом, создавшим единую теорию электрических, магнитных и оптических явлений, основанную на представлении об электромагнитном поле. Носителем электромагнитного поля Максвелл и его непосредственные последователи считали единый электромагнитный эфир; оптика и электромагнетизм объединялись под общим названием «физика эфира».

На пороге XX в. в понимании природы электромагнитного поля произошла резкая перемена. С электромагнитным эфиром (носителем электромагнитного поля) связывались многие механистические представления, строились механические модели электрических взаимодействий и др. Вместе с тем считалось, что эфир пребывает в состоянии абсолютного покоя и может служить системой отсчета. Поэтому, установив, например, скорость движения Земли относительно эфира, исследователь тем самым определил бы ее абсолютную скорость. Как известно, все опыты такого типа потерпели полную неудачу. Ее причину объяснила специальная теория относительности, отрицающая существование среды, относительно которой мыслимо определение абсолютной скорости движения тел.

Эйнштейн совершенно отказался от применения термина «эфир» для обозначения среды-носителя электромагнитных явлений. Этим носителем является само электромагнитное поле, оно материально и обладает всеми свойствами материи — массой, импульсом, энергией, которая способна превращаться в другие виды энергии в строго эквивалентных количествах.

Следует отметить, что установившаяся в ходе исторического развития терминология теории поля не всегда правильно выражает материальную природу электромагнитного поля. Такие обычные и трудно заменяемые выражения, как «заряд создает поле», «заряд порождает поле» и т. п., явно неудачны и должны пониматься лишь в смысле наличия определенной взаимосвязи между характеристиками заряда и его поля.

Теория электромагнитного поля полностью сохранила свое значение и в наше время; область ее практических приложений продолжает расширяться. Она является теоретическим фундаментом электро- и радиотехники, электроники, ей принадлежит ведущее место в ряде «гибридных» дисциплин (электродинамика, биофизика, астрофизика и др.). Знание ее основ обязательно для каждого физика. Физика XX в. (теория относительности и квантовая механика) отнюдь не «отменила» классическую теорию поля, а лишь видоизменила физический смысл ряда понятий и установила границы ее применимости.

Обобщаемые в теории электромагнитного поля экспериментально найденные закономерности в курсах общей физики записываются обычно в так называемой интегральной форме. При этом рассматриваются электромагнитные явления, протекающие в объемах пространства, на поверхностях или на отрезках макроскопического масштаба (например, токи в проводниках привычных для нас сечений). «Интегральная форма» не связана с обязательным применением интегралов. К таким закономерностям относятся закон Ома, закон электромагнитной индукции и др., которые можно представить алгебраическими формулами.

Примечательной особенностью максвелловской теории является выражение закономерностей электродинамики в дифференциальной форме, когда явления и характеризующие их величины рассматриваются в бесконечно малых элементах объемов, поверхностей, отрезков, или, как принято говорить, в точке. Можно без преувеличения утверждать, что именно отнесение физических величин к точке и рассмотрение электромагнитных явлений, протекающих в рядом лежащих точках, обеспечили грандиозные успехи теории Максвелла и работ его последователей.

Дифференциальная форма уравнений электродинамики позволила Максвеллу окончательно устранить из физики идеалистические представления о «дальнодействии», согласно которым электрические силы и взаимодействия передаются якобы мгновенно, без участия промежуточной среды. Максвелл открыл законы взаимосвязи между электрическим и магнитным полями, из которых непреложно вытекает факт постепенного распространения электромагнитного процесса в пространстве от точки к точке с конечной скоростью (близкодействие). Дифференциальная форма уравнений электродинамики не обязательно предполагает их выражение в виде дифференциальных уравнений.

## §1. МИКРО- И МАКРОЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Классическая (максвеллова) теория поля как в ее интегральной, так и в дифференциальной форме носит макроскопический характер; иначе говоря, она является феноменологической теорией. Это означает, что в ней не учитывается атомно-молекулярная структура вещества, полностью или частично заполняющего пространство, в котором имеется поле. Наличие вещества учитывается путем введения ряда коэффициентов (диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей, удельной проводимости  $\gamma$  и др.), которые полагают для каждого однородного вещества постоянными величинами, не зависящими от особенностей поля (его напряженности и частоты). В этой формальной теории вакуум отличается от вещества лишь другими значениями указанных выше коэффициентов. Не учитывается и атомистическая структура зарядов (их дискретность).

В феноменологическом характере теории заключена ее ограниченность. Учет строения вещества привел к возникновению *классической электронной теории или классической микроскопической электродинамики*, основателем которой стал Г. Лоренц (1853—1928).

Другим примером феноменологического и структурного подходов к объекту исследования могут служить термодинамика и молекулярно-кинетическая теория, изучающие одни и те же физические объекты: первая—вне связи с микроструктурой вещества, вторая—с учетом этой структуры.

Электронная теория Лоренца называется классической, поскольку для нее характерно основное положение всей классической физики, сводящееся к утверждению, что на всех уровнях организации материи, в мега-, макро- и микромире (например, в мире звезд и внутри атома), действуют строго одинаковые закономерности. Иными словами, полагается, что между макро- и микромиром существуют чисто количественные, масштабные, но отнюдь не качественные различия.

Из этой основной установки сразу же вытекает фундаментальное положение, на котором построено все здание электронной теории: уравнения Максвелла, сформулированные в макроскопической электродинамике, со всей строгостью применимы и в микромире, например в бесконечно малых объемах внутри атомов. Отметим попутно, что это положение отвергается квантовой физикой. Тем не менее классическая электронная теория не утратила своего значения до сих пор.

При исследовании микромира бросается в глаза колоссальная пространственная неоднородность вещества, его микрочарядов и обусловленных ими микроскопических полей. Действительно, плотность ядерного вещества имеет порядок  $10^{14}$  г/см<sup>3</sup>, а рядом с ядром плотность вещества равна нулю. Напряженность электрического поля ядра атома водорода на расстояниях  $r \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$  см

от ядра («первая боровская орбита»)  $E \approx 2 \cdot 10^7$  ед. напряженности СГС, а вне атома результирующая напряженность поля атома практически равна нулю. Из дискретности электрических зарядов вытекает огромная микронеоднородность плотности заряда какого-либо заряженного тела.

Между тем в макроскопической физике повсюду пользуются понятиями однородного поля, постоянной плотности заряда и вещества и др. Это обусловлено усреднением истинных микрофизических величин. Последние величины в макроскопической физике и технике (например, в радио- или электротехнике) не рассматриваются, тем более что они не поддаются прямому определению обычными (классическими) измерительными приборами. Вводя в электрическое поле шарик с пробным зарядом, мы определяем ту равнодействующую силу, с которой на заряд шарика действует огромное количество микрочарядов. В результате этого или аналогичных опытов мы определяем усредненную силу и усредненную напряженность электрического поля. Подобными усредненными величинами оперирует вся макроскопическая физика, включая и макроскопическую электродинамику.

Лоренц предложил исключительно удачный и плодотворный метод усреднения истинных микроскопических значений физических величин и получения их макроскопических значений, которые используются в «обычной» физике и технике.

Лоренц ввел понятия физически бесконечно малых объемов, поверхностей, отрезков, отличающиеся от определений аналогичных величин в математике. Так, по Лоренцу физически бесконечно малый объем (ф. б. м. объем):

1) должен быть очень большим по сравнению с микроскопическими неоднородностями вещества, обусловленными его атомно-молекулярным строением. Поскольку линейные размеры атомов имеют порядок  $10^{-8}$  см, линейные размеры  $l$  ф.б.м. объема должны удовлетворять неравенству:  $l \gg 10^{-8}$  см;

2) должен быть весьма малым по сравнению с макроскопическими неоднородностями вещества (например, по сравнению с объемом таких дефектов металлических изделий, какими являются раковины, микроскопические трещины, чужеродные включения, поверхностные пленки и т. п.). Можно, например, потребовать, чтобы ф.б.м. объем был значительно меньше  $10^{-3}$  см<sup>3</sup>. Определения ф.б.м. поверхностей и отрезков формулируются аналогично.

Макроскопическим значением физической величины по Лоренцу следует считать ее значение, которое получают при усреднении истинных микроскопических значений данной величины по физически бесконечно малому объему (соответственно по ф.б.м. поверхности и ф.б.м. отрезку). Пусть  $\psi_{\text{микро}}$  — истинное микроскопическое значение некоторой величины  $\psi$  в математически бесконечно малом объеме (в «точке»), отнесенное к единице объема. Образует произведение  $\psi_{\text{микро}} dV$ . Интегрируя по

ф.б.м. объему  $\Delta V$  и деля результат интегрирования на этот объем, получаем макроскопическое значение этой величины:

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \psi_{\text{микро}} dV = \overline{\psi_{\text{микро}}} = \psi_{\text{макро}}.$$

При такой методике усреднения макроскопические значения физических величин в двух смежных ф.б.м. объемах, как правило, либо мало, либо вовсе не отличаются друг от друга.

Все величины макроскопической физики, в том числе и макроскопической электродинамики, определяемые в «точке», на самом деле относятся к ф.б.м. объемам, поверхностям, отрезкам. Следовательно, макроскопическое электромагнитное поле определяется значениями векторов напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  в ф.б.м. объеме; микроскопическое поле определяется значениями этих векторов в математически бесконечно малом объеме.

Таким образом, термину «точка» в макро- и в микроэлектродинамике приписывается различный смысл.

В последующем изложении (§ 54) будут введены уравнения Лоренца для микроскопического электромагнитного поля. Естественно, что константы вещества  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  в эти уравнения не входят, они выражаются в микроэлектродинамике через реальные атомно-молекулярные параметры (заряд и массу электрона, концентрацию электронов и др.).

В электронной теории взамен феноменологического метода исследования используется структурный подход, при котором макроскопические закономерности получают модельное обоснование путем анализа атомно-молекулярных взаимодействий, осуществляемых через микроскопические электромагнитные поля. Структурный подход — характерная особенность физики XX в.; объяснить явление означает вскрыть его микрофизический механизм.

Электронная теория оказала неоценимую помощь при уточнении физического смысла ряда величин, введенных раньше в феноменологической теории. В силу этого в современных руководствах по электродинамике и в научной литературе осуществлен своеобразный синтез макро- и микроэлектродинамики. Строя изложение в основном в духе классической электродинамики, авторы «вкрапливают» в ход рассуждений микроструктурное (атомно-молекулярное) рассмотрение явлений и закономерностей. Этот прием используется и в данной книге.

Успехи электродинамики, достигнутые к концу XIX в., все более и более убеждали физиков в порочности механицизма и ознаменовали переход к электромагнитной картине мира. Развитием электромагнитной картины мира был подготовлен переворот в основных положениях физики, которым и явилось создание А. Эйнштейном теории относительности.

# **1. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

## **§ 2. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ**

Электрические и магнитные явления представляют собой две стороны одного неделимого электромагнитного процесса. Между тем в электростатике мы, казалось бы, имеем дело с обособленными, чисто электрическими явлениями; в действительности им также сопутствуют магнитные поля, проявления которых при макрофизическом методе исследования от нас ускользают.

Все микрозаряды тела вне зависимости от каких-либо внешних воздействий находятся в состоянии непрерывного движения, поэтому подлинно неподвижных зарядов тела ни в одной системе отсчета не существует. «Неподвижные» заряды электростатики служат наглядным примером макрофизического усреднения: они считаются неподвижными благодаря усреднению скоростей зарядов движущихся электронов и ионов тела в условиях, когда средняя скорость этих зарядов оказывается равной нулю.

С движением каждого микрозаряда связано магнитное поле, но в силу микрофизического характера этого поля мы не в состоянии его обнаружить классическими экспериментальными методами, которыми можно фиксировать только результирующее (макроскопическое) поле упорядоченного движения зарядов. Поскольку в электростатических задачах результирующая скорость совокупности микрозарядов тела равна нулю, следовательно, и результирующее магнитное поле отсутствует. С помощью методов атомной физики магнитное поле микрозарядов было не только обнаружено, но и подробно исследовано.

Электрические поля, исследуемые в данном разделе, также являются результирующими (макроскопическими), получающимися при усреднении электрических полей микрозарядов. Существенно, что в тех случаях, когда говорят об отсутствии поля в тех или иных точках (например, внутри проводника), то имеют в виду именно отсутствие макроскопического поля, но отнюдь не отсутствие поля микрозарядов (микроскопического поля).

Основным эмпирическим законом, на который опирается электростатика, является закон взаимодействия точечных зарядов (закон Кулона). Заряженное тело считается точечным, если его линейные размеры малы по сравнению с расстояниями до исследуемых точек поля. Поскольку исследуются взаимодействия тел, обусловленных их электрическими зарядами, то вместо „заряженное тело“ часто говорят „заряд“.

Согласно закону Кулона сила взаимодействия  $\vec{f}$  точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  прямо пропорциональна их произведению и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$\vec{f} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.1)$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, которая предполагается однородной и заполняющей все поле зарядов,  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц.

Относительная диэлектрическая проницаемость является безразмерной величиной и показывает, во сколько раз уменьшается силовое взаимодействие между зарядами при заполнении всего поля однородной средой с  $\epsilon > 1$  по сравнению с их взаимодействием в вакууме (где  $\epsilon = 1$ ).

В системе СГС  $k = 1$ , в СИ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ . Величина  $\epsilon_0$  называется электрической постоянной и является размерной величиной, не зависящей от свойств среды:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$ .

С учетом указанных значений коэффициентов пропорциональности закон Кулона приобретает вид

в системе СГС

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}^2} \vec{r}_{12} = -\vec{f}_{21}, \quad (2.2)$$

в СИ

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{r}_{12} = -\vec{f}_{21}. \quad (2.3)$$

Причем в последней формуле  $q_1$  и  $q_2$  выражены в кулонах ( $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9$  ед. заряда СГС),  $f$  — в ньютонах,  $r$  — в метрах;  $\vec{f}_{12}$  означает силу, с которой заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ . В сокращенных записях знаки зарядов и индексы 12 (или, соответственно 21) обычно опускаются.

Радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  часто рассматривают как разность векторов  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_1$ , проведенных из начала координат в точки с зарядами  $q_2$  и  $q_1$ :

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|.$$

Соответственно, формулы (2.2) и (2.3) могут быть записаны в другом эквивалентном виде:

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$



Основной величиной, характеризующей электрическое поле в данной точке, является напряженность поля  $\vec{E}$  (часто ее называют электрическим вектором, а иногда говорят о поле, подразумеваемая напряженность). Для исследования поля используется положительный пробный заряд, который должен быть точечным и достаточно малым по величине, чтобы не вносить существенных искажений в исследуемое поле.

Пусть на пробный заряд  $q$ , помещенный в исследуемую точку (точку наблюдения), поле действует с силой  $\vec{f}$ . Тогда напряженность поля  $\vec{E}$  определяется отношением

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}. \quad (2.4)$$

Итак, напряженность поля в данной точке равна отношению силы, с которой поле действует на пробный заряд, помещенный в эту точку, к величине пробного заряда. Можно также определить напряженность поля как вектор, численно равный силе, с которой поле действует на внесенный в точку наблюдения единичный пробный заряд, и совпадающий по направлению с этой силой. Важно запомнить, что любая точка поля характеризуется своей напряженностью, не зависящей от величины пробного заряда. Единица напряженности СИ:

$$1 \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ ед. напряженности СГС.}$$

Очень часто требуется вычислить силу  $\vec{f}$ , с которой поле действует на заряд  $q$  в точке с известной напряженностью  $\vec{E}$ . Из (2.4) имеем:

$$\vec{f} = q\vec{E}. \quad (2.5)$$

### § 3. ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ, ОБЪЕМНЫХ, ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Во многих практических приложениях возникает необходимость определения напряженности поля при заданном распределении зарядов. Существует ряд приемов решения такой задачи, известной под названием прямой задачи электростатики. С одним из этих приемов мы знакомимся ниже, начиная с простейшего примера вычисления поля точечного заряда.

Требуется исследовать поле точечного заряда  $Q$ , расположенного в точке  $M$  с координатами  $x_0, y_0, z_0$  в электрически однородной среде ( $\epsilon = \text{const}$ ). Ищем напряженность поля в точке наблюдения  $A$  с координатами  $x, y, z$  (рис. 1). Из точки «источка», где находится заряд  $Q$ , проводим радиус-вектор в точку наблюдения. На пробный заряд  $q$ , помещенный в точку  $A$ , поле дей-

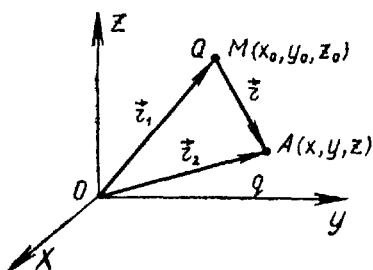


Рис. 1

ствует с силой  $\vec{f}$ , определяемой по закону Кулона:

$$\vec{f} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (3.1)$$

Из (2.4) и (3.1) имеем в СИ:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (3.2)$$

Определение вектора напряженности (как экспериментальным, так и расчетным путем) обычно

сводится к нахождению его проекций\* в избранной системе отсчета:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{Qr_x}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} = \frac{Q(x-x_0)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}, \\ E_y &= \frac{Qr_y}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} = \frac{Q(y-y_0)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}, \\ E_z &= \frac{Qr_z}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} = \frac{Q(z-z_0)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

исходя из которых затем находят модуль  $|\vec{E}|$  и направляющие косинусы:

$$\left. \begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}, \\ \cos(\vec{E}, \vec{x}) &= \frac{E_x}{E} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Если поле обусловлено несколькими точечными зарядами, то результирующая напряженность поля в точке наблюдения находится как векторная сумма напряженностей полей, обусловленных отдельными зарядами; в общем случае  $n$  точечных зарядов

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) выражает принцип суперпозиции электрических полей, справедливый при любом характере распределения зарядов (если при этом уравнения поля линейны). Справедливость принципа суперпозиции электрических полей не является очевидной, иными словами, этот принцип не вытекает из других, более общих законов, и в его правильности убеждает физический эксперимент.

Из соотношения (3.2) или (3.3) видно, что напряженность поля точечных зарядов всюду (за исключением точек истока)

\* В курсах электродинамики вместо термина «проекция вектора» часто применяют термин «составляющая вектора» (имея в виду проекцию).

конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль. По мере приближения точки наблюдения к точечному заряду напряженность поля неограниченно возрастает и в точке расположения заряда обращается в бесконечность. Обращение физической величины в бесконечность обусловлено нарушением требования, сформулированного при введении абстракции «точечный заряд»: рассматривать поле в точках, удаленных от заряженного тела (или частицы) на расстояние  $r$ , удовлетворяющего условию  $r \gg l$  (где  $l$  — линейный размер заряженного тела или частицы).

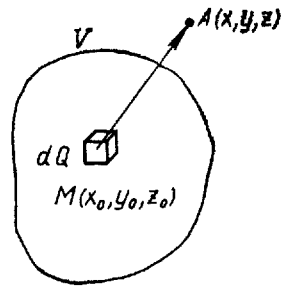


Рис. 2

В ряде случаев (грозовая туча, плазма, атомные ядра) заряды распределены в конечных объемах. Представим себе заряд  $Q$  (рис. 2), непрерывно распределенный в объеме  $V$ , и вычислим поле этого заряда в произвольной точке наблюдения  $A$ , лежащей вне указанного объема (при  $\epsilon = \text{const}$ ). Выделим в этом объеме элемент  $dV$  столь малый, чтобы находящийся в нем заряд  $dQ$  мог бы считаться точечным; пусть  $x_0, y_0, z_0$  — координаты этого точечного заряда. Проводим радиус-вектор  $\vec{r}$  в точку наблюдения  $A(x, y, z)$  и считаем, что точечный заряд  $dQ$  создает в точке  $A$  поле элементарной напряженности  $d\vec{E}$ , которая в соответствии с (3.2) может быть записана в виде

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (3.6)$$

Вводим объемную плотность заряда  $\rho$ :  $\rho = \frac{dQ}{dV}$ ,  $dQ = \rho dV$ , после чего (3.6) перепишем так:

$$d\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} dV. \quad (3.7)$$

Напряженность результирующего поля, обусловленного всеми зарядами объема  $V$  в точке  $A$ , согласно принципу суперпозиции полей выражается объемным интегралом

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho \vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV, \quad (3.8)$$

где интегрирование проводится по всему объему заряженного тела (здесь, как и в дальнейшем, интегрирование по объему  $V$  и по поверхности  $S$  выражается символами соответственно  $\int_V$  и  $\int_S$ ). В общем случае  $\rho$  может быть переменной величиной, т. е.

является функцией координат. Вынесение  $\epsilon$  за знак интеграла выражает условие однородности среды ( $\epsilon = \text{const}$ ).

Определение  $\vec{E}$  сводится к нахождению трех скалярных интегралов:

$$E_x = \int_V \frac{\rho(x-x_0)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} dV \quad \text{и т. д.} \quad (3.9)$$

Примем без доказательства, что напряженность поля в однородной среде при объемном распределении заряда всюду (и внутри заряженного тела) конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль.

Обращаем внимание на макроскопический характер введенной величины объемной плотности заряда. Реальное распределение зарядов в любом веществе характеризуется огромной неоднородностью: внутри атомных ядер плотность зарядов велика, рядом с ядрами, где нет зарядов, она равна нулю. Как показывают опыт и теория, можно почти во всех случаях (исключая задачи атомной и ядерной физики) не учитывать дискретного распределения в пространстве электрических зарядов и пользоваться представлением о непрерывном распределении электрических зарядов в заряженных телах. Объемная плотность  $\rho$  и представляет собой плотность этих «размазанных» по объему зарядов.

В ряде случаев допустима другая абстракция — поверхностный заряд. Примером может служить заряженный проводник, в котором, как известно, заряды распределены в чрезвычайно тонком поверхностном слое. Рассуждения при выводе формулы напряженности поля поверхностных зарядов вполне аналогичны приведенным выше: выделяется достаточно малый элемент поверхности  $dS$ , вводится поверхностная плотность зарядов  $\sigma = \frac{dQ}{dS}$  и т. д. Результирующая напряженность определяется поверхностным интегралом

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma \vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} dS. \quad (3.10)$$

Напряженность поля при поверхностном распределении зарядов во всех точках, не расположенных на заряженной поверхности, конечна, непрерывна и в бесконечности обращается в нуль. Поведение вектора напряженности в точках, лежащих на заряженной поверхности, будет рассмотрено в § 17.

Линейное распределение зарядов — очередная абстракция, примером которой может служить заряженный тонкий провод длиной  $l$ .

Рассуждая, как в предыдущих случаях, и вводя линейную

плотность заряда  $k = \frac{dQ}{dl}$ , получаем:

$$\vec{E} = \int \frac{k\vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} dl. \quad (3.11)$$

В школьном курсе физики (с учетом уровня математических знаний учащихся), помимо поля точечного заряда, рассматриваются поле поверхностно заряженного шара и поле бесконечной плоскости. В первом случае (в неявной форме) используется радиально-сферическая симметрия поля точечного заряда и шара для доказательства совпадения формул напряженности; во втором случае из симметрии поля относительно плоскости выводится однородность поля, а формула напряженности поля дается без вывода. На основе этой формулы затем совершается переход к полю плоского конденсатора.

### Упражнения

1. Вычислите напряженность поля электрического диполя, т. е. двух точечных зарядов, одинаковых по величине, но противоположных по знаку, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга ( $\epsilon = \text{const}$ ). а) в точке  $A_1$ , лежащей на продолжении оси диполя, на расстоянии  $r_1$  от его центра ( $r_1 > \frac{l}{2}$ ); б) в точке  $A_2$ , лежащей на перпендикуляре к оси диполя, восстановленном из центра диполя, на расстоянии  $r_2$  от него (рис. 3).

При анализе решения задач ответьте на вопросы:

Каким видом симметрии характеризуется поле диполя?

Каково значение напряженности при  $r_1 = x = \pm \infty$ , при  $x = \pm \frac{l}{2}$ ?

Каково значение напряженности при  $r_2 = y = \pm \infty$ , при  $y = r_2 = 0$ ?

2. Найдите напряженность поля однородно заряженной проволоки длиной  $l$ , имеющей форму дуги окружности радиуса  $r$  в центре окружности при  $\epsilon = \text{const}$ . Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 4. Исследуйте решения задачи при  $2\alpha_0 = \pi$  (полуокружность), при  $2\alpha_0 = 2\pi$  (окружность).

3. Найдите напряженность поля однородно заряженного диска радиуса  $a$  в точке, лежащей на оси диска

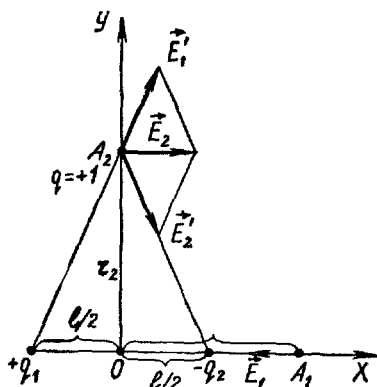


Рис. 3

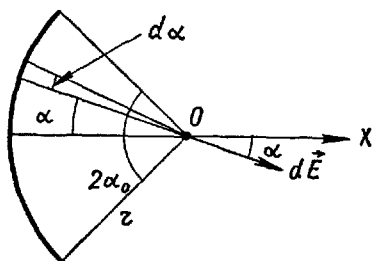


Рис. 4

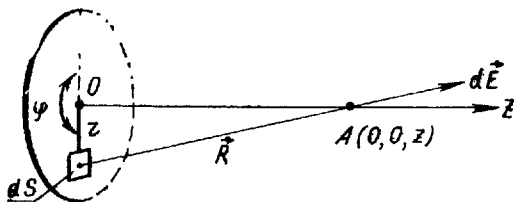


Рис. 5

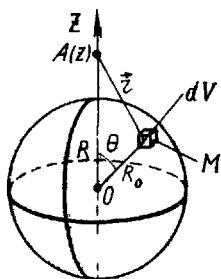


Рис 6

( $\epsilon = \text{const}$ ). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 5.

Ответьте на вопросы: Каким видом симметрии обладает поле?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны положительных значений  $z$ ?

Каково значение поля в центре диска, когда мы приближаемся к диску со стороны отрицательных значений  $z$ ?

Что характеризует напряженность поля при переходе через диск?

4. Найдите напряженность поля пространственно-однородно заряженного шара радиуса  $a$  при  $\epsilon = \text{const}$  во внешнем пространстве ( $r \geq a$ ). Некоторые указания на метод решения даны на рисунке 6. В силу сферической симметрии поля достаточно вычислить напряженность поля в точках, лежащих на одном радиусе, например на оси  $Z$ :  $E = E_z$ . Следует пользоваться сферическими координатами.

Сопоставьте полученное выражение с формулой для напряженности поля точечного заряда.

#### § 4. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ПОЛЯ. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{E}$

Векторное поле можно графически изобразить при помощи линий данного вектора. Это относится и к силовым линиям электрического поля. Силовой линией электрического поля называется такая линия, в каждой точке которой вектор  $\vec{E}$  является касательной к ней. Условились приписывать силовым линиям направление, задаваемое в каждой точке направлением вектора  $\vec{E}$ ; силовые линии начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах. Линии могут «приходить» из бесконечности, а также «уходить» в бесконечность. Как далее будет показано, в случае электростатического поля силовые линии никогда не бывают замкнутыми. Силовые линии результирующего поля нигде не пересекаются (в противном случае в точке их пересечения напряженность поля имела бы несколько значений, что лишено смысла).

В элементарных курсах физики и электротехники при помощи силовых линий изображают не только направление, но и числен-

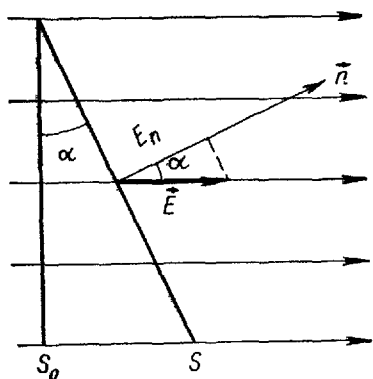


Рис. 7

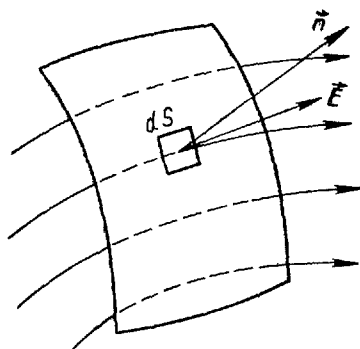


Рис. 8

ное значение напряженности поля. Для этого условились проводить через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям, столько линий, чтобы число их было пропорционально (или равно) значению напряженности поля в центре площадки.

Напомним вкратце понятие потока вектора на примере электростатического поля. В однородном поле ( $\vec{E} = \text{const}$ ) поток  $N$ , пронизывающий установленную перпендикулярно вектору  $\vec{E}$  площадку  $S_0$ , равен (рис. 7):  $N = ES_0$ . Поток  $N$  через другую площадку  $S$ , наклоненную относительно  $S_0$  на угол  $\alpha < (\vec{E}, \vec{n})$ , где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ , равен:

$$N = ES_0 = ES \cos(\vec{E}, \vec{n}).$$

Вводя выражение  $E \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E_n$  для проекции вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$ , можно поток для данного частного случая записать так:

$$N = E_n S. \quad (4.1)$$

В основе этой формулы лежит условие постоянства напряженности поля  $\vec{E}$  на всей площадке  $S$ .

В курсе физики средней школы поток вектора напряженности  $\vec{E}$  не вводится; при изложении явлений электромагнетизма вводится поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , причем авторы ограничиваются выражением для потока вектора вида (4.1). Его ограниченная применимость очевидна: выражение (4.1) пригодно только в случае однородного поля и плоской площадки, а также в случае сферической поверхности и, соответственно, сферической симметрии поля (при совпадении их центров).

Выразим поток вектора  $\vec{E}$  через любую поверхность. Пусть  $S$  представляет собой произвольную поверхность в поле вектора  $\vec{E}$  (рис. 8). Выберем на поверхности элемент  $dS$  столь малый, чтобы его можно было считать плоским и принять напряженность во всех его точках постоянной. Тогда для элементарного потока  $dN$  через элемент поверхности  $dS$  применима формула (4.1)

$$dN = E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E_n dS. \quad (4.2)$$

Полный поток вектора  $\vec{E}$ , пронизывающий поверхность  $S$ , находится интегрированием по всей поверхности:

$$N = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}; \quad (4.3)$$

в последний интеграл введена векторная площадь элемента поверхности  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ .

### § 5. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ

На примере задач, предложенных в упражнениях к § 1—3, можно убедиться в том, что непосредственное использование закона Кулона и принципа суперпозиции полей даже в случае простой конфигурации заряженных тел приводит к громоздким вычислениям. В случаях симметричного распределения зарядов задача вычисления полей может быть существенно упрощена за счет применения электростатической теоремы Остроградского—Гаусса.

Пусть под малым телесным углом  $d\omega$  (рис. 9) из его вершины  $O$  видны элемент сферической поверхности  $dS_0$  и элемент несферической поверхности  $dS$  (будем их считать прямоугольными). Из-за малости  $dS_0$  и  $dS$  считаем их плоскими и обозначим угол между ними через  $\alpha$ . Проводим из точки  $O$  радиус-вектор  $\vec{r}$  через середину площадки  $dS$ , а в точке пересечения проводим внешнюю нормаль  $\vec{n}$ ; очевидно,  $\angle \alpha = \angle(\vec{r}, \vec{n})$ . Поскольку  $dS_0 =$

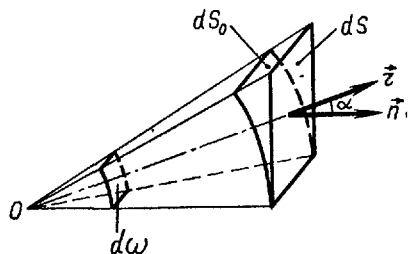


Рис. 9.

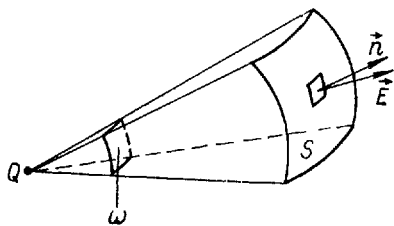


Рис. 10



$= dS \cos \alpha = dS \cos(\vec{r}, \vec{n})$ , имеем:

$$d\omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{dS \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}. \quad (5.1)$$

Рассмотрим поток вектора  $\vec{E}$  от точечного заряда  $Q$  через произвольную незамкнутую поверхность  $S$  (рис. 10), видимую из точки истока под телесным углом  $\omega$ . Подставляя в формулу (4.2) выражение для напряженности поля точечного заряда в скалярной форме (3.2), получим:

$$dN = \frac{Q dS \cos(\vec{E}, \vec{n})}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

что в силу соотношения (5.1) и очевидному совпадению направлений  $\vec{E}$  и  $\vec{r}$  приводит к зависимости элементарного потока от заряда  $Q$  и телесного угла  $d\omega$ :

$$dN = \frac{Q d\omega}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \quad (5.2)$$

Интегрирование по всей поверхности дает полный поток:

$$N = \int \frac{Q d\omega}{4\pi\epsilon\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \omega, \quad (5.3)$$

где  $\omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность  $S$  из точки, в которой находится «исток».

Если поверхность  $S$  целиком охватывает заряд  $Q$ , то телесный угол, под которым «видна» эта замкнутая поверхность, оказывается равным  $4\pi$ ; для потока через замкнутую поверхность имеем:

$$N = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} d\omega = \frac{4\pi Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (5.4)$$

Этот вывод может быть истолкован так: из заряда выходит  $\frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}$  силовых линий (если заряд положителен) или к нему сходится столько же линий (если он отрицателен). Поток выходящих линий считается положительным, поток сходящихся линий — отрицательным. Если замкнутая поверхность охватывает несколько точечных зарядов, то поток через нее равен:

$$N = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \Sigma Q, \quad (5.5)$$

где  $\Sigma Q$  — алгебраическая сумма зарядов. Выражение (5.5) справедливо при любом (точечном, объемном или другом) распределении зарядов и представляет собой электростатическую теорему Остроградского — Гаусса в интегральной форме. В случае объем-

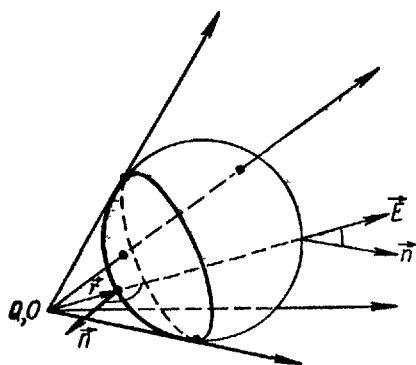


Рис. 11.

ного распределения зарядов формула (5.5) записывается так:

$$N = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (5.6)$$

где  $V$  — объем, охватываемый замкнутой поверхностью  $S$ .

Теорема формулируется так: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен произведению множителя  $\frac{1}{\epsilon\epsilon_0}$  на алгебраическую сумму зарядов, охватываемых данной поверхностью.

Легко убедиться в том, что поток электрического вектора сквозь замкнутую поверхность, не охватывающую зарядов, равен нулю. Пусть в какой-нибудь внешней точке  $O$  (рис. 11) находится точечный заряд  $Q$ . Замкнутая поверхность видна из этой точки под телесным углом

$$\omega = \oint_S \frac{dS \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} = 0,$$

что объясняется разными знаками косинуса углов между  $\vec{n}$  и  $\vec{r}$  (или  $\vec{E}$ ) на стороне поверхности  $S$ , обращенной к точке  $O$  (и на противоположной стороне). Это означает, что силовые линии столько же раз входят в рассматриваемый объем, сколько выходят из него.

Выразим теорему Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме. Пусть  $\Delta V$  малый объем, охватываемый поверхностью  $\Delta S$  и содержащий заряд  $\Delta Q = \bar{\rho} \Delta V$ , где  $\bar{\rho}$  — средняя плотность заряда внутри  $\Delta V$ . Запишем теорему Остроградского—Гаусса для этого объема:

$$\Delta N = \oint_{\Delta S} E_n dS = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \bar{\rho} \Delta V. \quad (5.7)$$

Разделим это выражение почленно на  $\Delta V$ :

$$\frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{\oint_{\Delta S} E_n dS}{\Delta V} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \bar{\rho}$$

и перейдем к пределу, стягивая  $\Delta S$  в точку:

$$\frac{dN}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} E_n dS}{\Delta V} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \rho, \quad (5.8)$$

где  $\rho$  — «истинная» макроскопическая плотность заряда в рассматриваемом физически бесконечно малом объеме (в «точке»). Но, по определению, выражение  $\frac{dN}{dV}$  является дивергенцией (расходимостью) электрического вектора, которая представляет собой поток электрического вектора из единицы объема.

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \quad (5.9)$$

(так записывается теорема Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме). В точках, где зарядов нет, это выражение приобретает вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Таким образом, силовые линии расходятся только из точек (или сходятся к точкам), где есть заряды.

С изложенной теоремой связана формула, которую называют также второй теоремой Остроградского—Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S E_n dS. \quad (5.10)$$

(Здесь  $S$  означает замкнутую поверхность, охватывающую объем  $V$ .) Эта формула позволяет преобразовывать объемный интеграл в интеграл по замкнутой поверхности (и наоборот), в связи с чем поток через замкнутую поверхность можно вычислять как интегрированием по объему, так и интегрированием по поверхности, охватывающей этот объем.

## § 6. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{D}$

Выше рассматривалось поле в неограниченном однородном диэлектрике. В качестве частного случая такого диэлектрика можно формально рассматривать вакуум, который характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1$ . Если все поле заполнено однородным диэлектриком ( $\epsilon = \text{const}$ ), то в знаменателе формул для вычисления напряженности и силовых взаимодействий появляется  $\epsilon > 1$ , т. е. поле и силовые взаимодействия ослабевают в  $\epsilon$  раз по сравнению с их значением в вакууме. В реальных условиях поле заполнено различными по форме и размерам диэлектриками. Учет искажения, которое они вносят в поле, представляет собой весьма сложную задачу.

В теории рассматриваются идеальные диэлектрики, заряды которых неразрывно связаны с молекулами (отсюда их название — «связанные» заряды); иначе говоря, исключаются из рассмотрения поля таких напряженностей, которые могли бы оторвать электроны от молекул. Принимается, что в молекуле связанные заряды

могут несколько смещаться. Проводимость идеальных диэлектриков считается равной нулю.

При электризации (например, трением) диэлектрикам можно сообщить ограниченно «свободные» поверхностные заряды. В отличие от свободных зарядов на поверхности проводника, которые можно снять заземлением одной из точек поверхности, заряды, нанесенные на поверхность диэлектрика, можно отвести в землю только прикосновением ко всем точкам заряженной поверхности. У реальных диэлектриков имеется наряду с этим ограниченная проводимость. Внесение объемных свободных зарядов в твердый или жидкий диэлектрик макроскопических размеров практически неосуществимо, поэтому случаи однородных объемных зарядов, рассмотренные выше в ряде упражнений, наблюдаются лишь в газообразном и плазменном состояниях.

Под действием электрического поля происходит поляризация диэлектриков. В курсах общей физики рассматриваются два механизма поляризации: электронный и ориентационный. Первый механизм предполагает наличие неполярных молекул, в каждой из которых положительные и отрицательные заряды в отсутствие внешнего поля расположены симметрично относительно центра зарядов молекулы. Под действием внешнего поля происходит перераспределение зарядов внутри молекул — молекулы поляризуются (разноименные заряды в них смещаются в противоположных направлениях) и в первом приближении могут быть рассмотрены как электрические диполи («мягкие» диполи). Момент  $\vec{p}$  молекулы-диполя равен произведению заряда одного знака  $q$  на расстояние  $l$  между центрами положительных и отрицательных зарядов. Вектор  $\vec{l}$  направлен от центра отрицательных к центру положительных зарядов:

$$\vec{p} = ql. \quad (6.1)$$

Момент «мягкого» молекулярного диполя (называемого также индуцированным дипольным моментом) пропорционален напряженности поля:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (6.2)$$

где  $\beta$  — поляризуемость молекулы; она характеризует степень податливости молекулы воздействию поля.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризации  $\vec{P}$ , который определяется как геометрическая сумма моментов молекулярных диполей в единице объема:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad (6.3)$$

где  $N$  — число молекулярных диполей в единице объема.

В однородном поле можно полагать все молекулы однородного вещества одинаково поляризованными, поэтому

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\epsilon_0\beta\vec{E} = \alpha\epsilon_0\vec{E}, \quad (6.4)$$

т. е. вектор поляризации прямо пропорционален напряженности поля. Коэффициент  $\alpha = N\beta$  называется диэлектрической восприимчивостью вещества.

Примерами диэлектриков с неполярными молекулами могут служить: газы —  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ; жидкости — толуол, гексан, бензол; некоторые атомные и молекулярные кристаллы — нафталин, сера и др.

Второй (ориентационный) механизм поляризации характерен для диэлектриков, в молекулах которых заряды противоположного знака уже в отсутствии поля смещены друг относительно друга, т. е. молекулы имеют полярное строение и являются электрическими диполями («жесткими» диполями). Если внешнее поле отсутствует, то моменты молекулярных диполей ориентированы хаотично и вектор поляризации  $\vec{P}$  равен нулю. Под воздействием внешнего электрического поля молекулярные диполи устанавливаются параллельно полю и  $\vec{P} \neq 0$ . Формула (6.3) справедлива, конечно, и в этом случае. В электронной теории доказывается (§ 57), что и при этом механизме поляризации вектор  $\vec{P}$  пропорционален  $\vec{E}$ , т. е.  $\vec{P} = \alpha\epsilon_0\vec{E}$ .

Примеры диэлектриков с полярными молекулами: газы —  $H_2S$ ,  $SO_2$ ,  $NH_3$ ; жидкости — вода, нитробензол, эфиры, органические кислоты; дипольные кристаллы —  $HCl$ ,  $HBr$  и др. Наличие того или другого механизма поляризации обнаруживается по характеру температурной зависимости вектора поляризации: при электронном механизме такая зависимость практически отсутствует, при ориентационном механизме повышение температуры дезориентирует диполи и уменьшает поляризацию вещества.

Еще две группы диэлектриков — так называемые сегнетоэлектрики и анизотропные диэлектрики, поляризуемость которых неодинакова по различным направлениям, здесь не рассматриваются.

Из изложенного следует, что при отсутствии свободных зарядов диэлектрик представляет собой электрически нейтральную систему зарядов. Поляризация диэлектрика происходит под воздействием первичного поля, обусловленного распределением свободных зарядов (вне диэлектрика). Диэлектрик, оставаясь в целом нейтральным, создает дополнительное поле, обусловленное перераспределением в нем связанных зарядов. Внешнее поле и поле поляризованного диэлектрика образуют результирующее поле; оно и определяет окончательную поляризацию диэлектрика. Существование связанных зарядов в диэлектрике приводит к корен-

ному отличию электрического поля в диэлектрике от поля в вакууме.

В макроскопической теории связанные заряды полагаются непрерывно распределенными по объему диэлектрика с объемной плотностью  $\rho_{\text{связ}}$ ; вместе с тем на поверхности поляризованного диэлектрика появляются связанные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{связ}}$ . Наряду со свободными зарядами и связанные заряды диэлектриков вносят свой вклад в электрическое поле зарядов. Напряженность поля свободных зарядов  $\vec{E}$  связана с объемной плотностью зарядов  $\rho$  соотношением

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0},$$

где проницаемость  $\epsilon$  учитывает влияние диэлектрической среды на величину поля. Вводя в соотношение (5.9) значение плотности связанных зарядов, можно использовать эту же формулу для непосредственного учета влияния диэлектрической среды. Если суммарная объемная плотность зарядов равна  $\rho + \rho_{\text{связ}}$ , то

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_{\text{связ}}), \quad (6.5)$$

т. е. электрическое поле обусловлено как свободными, так и связанными зарядами. Соответственно изменяется и интегральная запись формул; например, выражение (3.11) для вычисления напряженности при объемном распределении зарядов записывается в виде

$$\vec{E} = \int_V \frac{(\rho + \rho_{\text{связ}}) \vec{r}}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^3} dV. \quad (6.6)$$

Решение задач электростатики по вычислению напряженности поля в диэлектрической среде значительно облегчается, если ввести в рассмотрение вспомогательную величину — вектор электрической индукции  $\vec{D}$ , который также является характеристикой поля в каждой точке, но отличается от электрического вектора тем, что источниками вектора индукции являются только свободные электрические заряды. Дифференциальное уравнение Остроградского—Гаусса для вектора  $\vec{D}$  входит в систему уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (6.7)$$

которое для точек, где нет свободных зарядов, принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0.$$

Поле вектора  $\vec{D}$  графически изображается при помощи линий этого вектора — линий индукции, которые начинаются на поло-

жительных и кончаются на отрицательных свободных зарядах. Широко применяются понятия потока индукции  $N_D = \int_S D_n dS$  и теорема Остроградского—Гаусса в интегральной форме:

$$N_D = \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV = \Sigma Q, \quad (6.8)$$

где  $\Sigma Q$ —алгебраическая сумма свободных зарядов в объеме  $V$ , охватываемом поверхностью  $S$ .

Связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  вытекает из сопоставления уравнений Остроградского—Гаусса для этих векторов (5.9) и (6.7):  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$ ,  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ .

В однородном диэлектрике ( $\epsilon = \text{const}$ ) первую запись можно представить так:  $\operatorname{div} \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \rho$ , откуда получаем искомую связь:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (6.9)$$

В СИ электрическая постоянная  $\epsilon_0$  измеряется в  $\frac{\Phi}{\text{м}}$ , электрическая индукция  $\frac{\Phi}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ , т. е. эта единица совпадает с единицей поверхностной плотности заряда. Примером применения понятия вектора индукции при исследовании электростатических полей может служить вычисление поля в слоистом диэлектрике плоского конденсатора (см. упр. 8). На рисунке 12 изображен слоистый диэлектрик, для которого полагаем  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon_3 = 1$ . Вектор индукции поля плоского конденсатора:  $D = \sigma$ , причем это выражение справедливо во всех слоях. Отсюда получаем для соответствующих напряженностей:  $E_1 = \frac{D}{2\epsilon_0}$ ,  $E_2 = \frac{D}{4\epsilon_0}$ ,  $E_3 = \frac{D}{\epsilon_0}$ . (Строгое обоснование непрерывности линий электрической индукции на границе двух диэлектриков будет дано в § 17.)

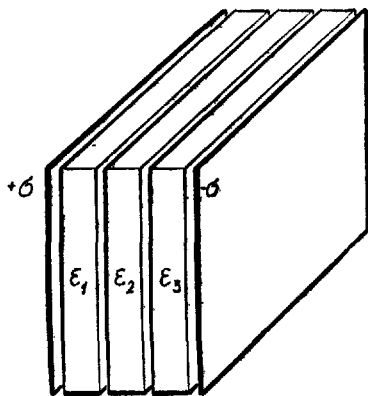


Рис. 12

## Упражнения

**5.** Найдите напряженность поля поверхностно заряженного проводящего шара радиуса  $a$  вне шара и внутри его при  $\sigma = \text{const}$  и  $\epsilon = \text{const}$ , пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса в интегральной форме (рис. 13).

При исследовании решения сопоставьте формулу напряженности точечного заряда с формулами напряженности объемно заряженного шара (упр. 4) и поверхностно заряженного шара во внешнем пространстве.

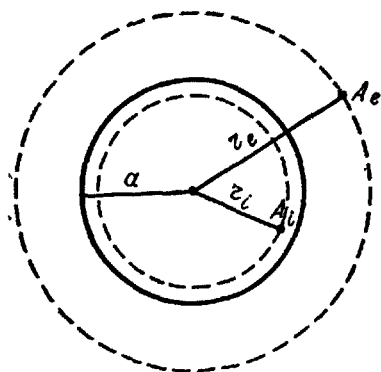


Рис. 13

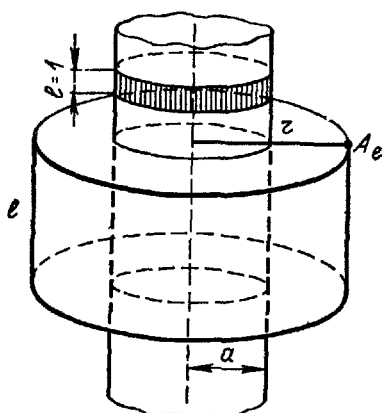


Рис. 14

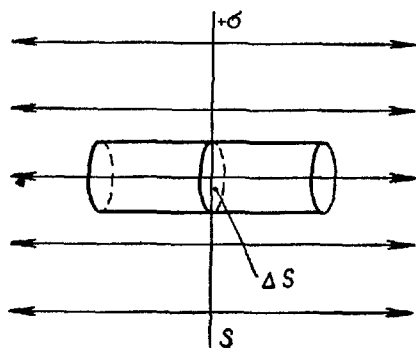


Рис. 15

Постройте график  $E = f(r)$  для поля поверхностно заряженного шара.

Определите величину напряженности в точке поля у поверхности шара.

Установите величину скачка напряженности при переходе через границу диэлектрик — проводник.

6. Найдите напряженность поля бесконечно длинного прямого кругового проводящего цилиндра радиуса  $a$  при  $\sigma = \text{const}$  и  $\epsilon = \text{const}$  (рис. 14).

При исследовании решения ответьте на вопросы:

Какой смысл имеет условие, что цилиндр бесконечно длинный?

При каких условиях решение, полученное для поля бесконечно длинного цилиндра в наружном пространстве, применимо и для поля цилиндров конечной длины?

На рисунке 14 изображен пояс единичной высоты, заряд которого  $k = 2\pi a \sigma$ . Выразите поле в наружной точке через  $k$ .

Если мысленно сжать цилиндр, он превращается в заряженную линию. Какова формула напряженности однородно заряженной линии?

Определите поле на поверхности цилиндра и сопоставьте полученное выражение с соответствующим выражением для поля на поверхности шара.

Постройте график  $E = f(r)$ .

Какой вид симметрии наблюдается у поля?

7. Найдите напряженность поля заряженной бесконечной плоскости (рис. 15) при  $\sigma = \text{const}$  и  $\epsilon = \text{const}$ .

Какой смысл имеет условие, что плоскость бесконечна?

При каких условиях решение, полученное для поля бесконечной



плоскости, применимо и для поля плоскости конечных размеров?

Установите скачок напряженности при переходе через плоскость.

8. Найдите напряженность поля двух разноименно заряженных пластин (поле плоского конденсатора, рис. 16).

При каком условии полученное решение применимо к полю плоского конденсатора конечных размеров?

Вспомните конфигурацию линий поля у краев.

9. Найдите напряженность поля бесконечной объемно заряженной пластинки толщиной  $h$  при  $\rho = \text{const}$  и  $\epsilon = \text{const}$  (рис. 17), пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме.

Рекомендуется построить график  $E = f(x)$ .

У к а з а н и е. При решении дифференциальных уравнений для  $E_e$  и  $E_i$  появляются постоянные интегрирования, для определения которых нужно использовать свойства напряженности в однородной среде при объемном распределении зарядов (§ 3): напряженность всюду конечна, непрерывна и в бесконечности равна нулю.

10. Найдите напряженность поля однородно заряженного сферического слоя с радиусами  $a$  и  $b$ , пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса в дифференциальной форме (рис. 18).

У к а з а н и е. Напряженность поля надо вычислить в точках внешнего пространства, внутри слоя и в полости.

11. Найдите напряженность поля объемно заряженного шара радиуса  $a$ , пользуясь выражением для дивергенции  $\vec{D}$  (при  $\rho = \text{const}$ ), записанным в сферических координатах. Принять, что относительные диэлектрические проницаемости шара и неограниченной окружающей среды соответственно равны  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ .

При анализе решения найдите отношение  $\frac{E_2}{E_1}$  на поверхности шара.

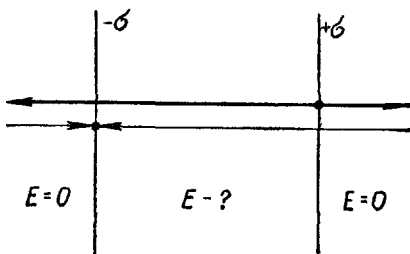


Рис. 16

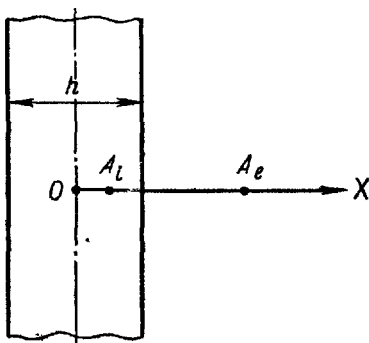


Рис. 17

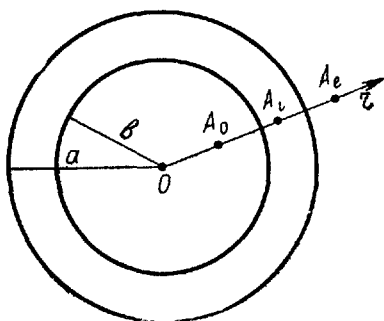


Рис. 18

Изобразите графически ход напряженности  $E=f(r)$  при условии  $\epsilon_1=2\epsilon_2$ .

12. Найдите напряженность поля объемно заряженного бесконечно длинного цилиндра радиуса  $a$ , используя уравнение  $\text{div } \vec{D}=\rho$  (при  $\rho=\text{const}$ ). Принять относительные проницаемости цилиндра и окружающей среды равными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ .

## § 7. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрическое поле обладает энергией, за счет которой оно может производить работу перемещения заряженных частиц и тел. Вычислим работу поля точечного заряда  $Q$  по элементарному перемещению  $d\vec{l}$  заряда  $q$  (рис. 19):

$$dA = \vec{f} d\vec{l} = q\vec{E} d\vec{l}, \quad (7.1)$$

где  $\vec{f}=q\vec{E}$ —сила, действующая на заряд  $q$ , а  $\vec{E}$ —напряженность поля в точке, совпадающей с концом радиус-вектора  $\vec{r}$ , соединяющего заряды  $Q$  и  $q$  (3.2).

С учетом (3.2)

$$dA = q\vec{E} d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr. \quad (7.2)$$

Здесь мы использовали равенство  $r dl \cos(\vec{r}, d\vec{l}) = r dr$ , где  $dr$ —элемент силовой линии.

Работу поля по перемещению заряда  $q$  (при  $\epsilon=\text{const}$ ) на конечном участке пути между точками 1 и 2, отстоящими от заряда на расстояния  $r_1$  и  $r_2$ , получаем интегрированием:

$$A = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad (7.3)$$

Из соотношения (7.3) видно, что работа электростатического поля точечного заряда не зависит от формы пути заряда, а определяется положением начальной и конечной точек пути. Легко показать, что этот вывод распространяется и на работу электростатического поля системы точечных, объемных или поверхностных зарядов. Силовые поля, характеризующиеся таким свойством, называют потенциальными или безвихревыми.

Очевидно, линейный интеграл  $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \equiv \int_1^2 E_t dl$  выражает работу,

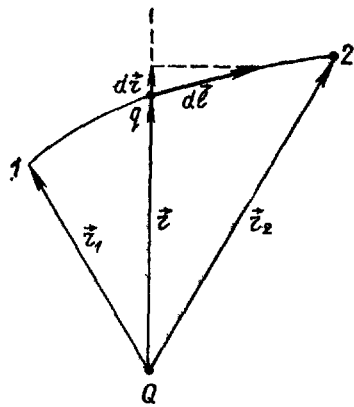


Рис. 19

которую совершает (или может выполнить) электростатическое поле при перемещении единичного заряда  $q=1$  из точки 1 в точку 2. Естественно, что линейный интеграл  $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$  также не зависит от формы пути ин-

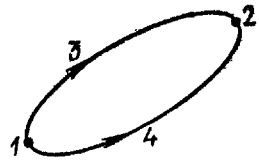


Рис. 20

тегрирования. Соответственно, в электростатическом поле соблюдается равенство интегралов (рис. 20)

$$\int_{132} \vec{E} d\vec{l} = \int_{142} \vec{E} d\vec{l}.$$

Составим криволинейный интеграл по замкнутому пути 13241, изменив направление перемещения на отрезке 142, указанное на рисунке 20, на противоположное:

$$\int_{132} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{142} \vec{E} d\vec{l} = \int_{241} \vec{E} d\vec{l},$$

откуда

$$\int_{132} \vec{E} d\vec{l} + \int_{241} \vec{E} d\vec{l} = \int_{13241} \vec{E} d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (7.4)$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру, называемый циркуляцией вектора  $\vec{E}$  и имеющий физический смысл работы перемещения единичного заряда по замкнутому пути, в электростатическом поле равен нулю. Поля, подобные электростатическому, в которых циркуляция вектора поля по любому контуру равна нулю, называются потенциальными или безвихревыми. Оба данных в этом параграфе определения потенциальности поля эквивалентны, они являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности поля.

Из равенства (7.4) сразу же вытекает, что в электростатическом поле нет замкнутых силовых линий: наличие замкнутых силовых линий означает, что  $\oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$  (это противоречит потенциальному характеру электростатического поля).

Другим примером потенциального поля является гравитационное поле.

Можно условие потенциальности поля записать иначе, используя известную из векторного анализа теорему Стокса, согласно которой циркуляция вектора по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна потоку ротора этого вектора через произвольную поверхность  $S$ , ограничиваемую этим контуром:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot}_n \vec{E} dS, \quad (7.5)$$

где направление нормали к контуру определяется направлением обхода по контуру (правилом правого винта). Потенциальность

поля означает равенство нулю каждого из интегралов (7.5) для любого контура, проведенного в поле, что возможно лишь при условии:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (7.6)$$

Равенство (7.6) также является необходимым и достаточным условием потенциальности поля.

## § 8. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Работа электростатического поля может быть также определена через изменение энергетической величины, характеризующей поле в каждой его точке,— скалярного электрического потенциала.

Пусть в поле положительного заряда  $Q$  помещен пробный (по условию тоже положительный) заряд  $q$ . Если у пробного заряда нет каких-либо механических связей, т. е. если он свободен, то под действием электростатических сил отталкивания он будет удаляться от заряда  $Q$  в сторону уменьшающихся значений напряженности до тех пор, пока поле не станет равным нулю; принято говорить, что заряд выталкивается в бесконечность. Поле при этом совершает работу  $A_\infty$ , которая идет на увеличение кинетической энергии пробного заряда. Во всех практически важных случаях указанная работа имеет конечное значение и пропорциональна величине пробного заряда.

По определению, потенциалом  $\varphi$  поля в точке, из которой началось перемещение пробного заряда, называется отношение

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}. \quad (8.1)$$

Если заряд  $Q$  отрицателен, то, очевидно, работа сил поля при удалении пробного заряда, а следовательно, и потенциал имеют отрицательные знаки.

Таким образом, потенциал поля в данной точке численно равен работе, совершаемой полем при выталкивании единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность. Равноценно и другое определение: потенциал поля в данной точке численно равен работе внешних сил против поля при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в эту точку. Очевидно, что работа внешних сил при перемещении заряда из бесконечности в данную точку поля переходит в его потенциальную энергию, т. е. —  $A_\infty = W$ . Следовательно,

$$\varphi = \frac{W}{q}. \quad (8.2)$$

Отсюда вытекает, что потенциал поля в данной точке численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Если в точке с потенциалом  $\varphi$  находится заряд  $q$ , то он обладает потенциальной энергией  $W = q\varphi$ . Пусть потенциальная энергия заряда в данной точке поля равна  $W_1 = q\varphi_1$ , в другой  $W_2 = q\varphi_2$ , тогда при перемещении заряда из первой точки во вторую поле совершает работу  $A$ , равную произведению заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути:

$$A = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (8.3)$$

Поскольку конечный результат предпочтительно выражать в виде разности значений функции в конечной и начальной точках, выражению (8.3) обычно придают вид

$$A = -(W_2 - W_1) = -q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Выбор начального уровня потенциальной энергии (в нашем изложении — бесконечности), конечно, произволен, поэтому потенциал всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной. В практических приложениях всегда имеют дело с разностью потенциалов двух точек поля (напряжением), которая определяется однозначно. Из определения потенциала вытекает, что положительные заряды под действием поля перемещаются в сторону убывания потенциала, отрицательные — в сторону возрастания потенциала.

Единицей потенциала в СИ служит вольт (обозначается В);

$$1 \text{ В} = \frac{1}{300} \text{ ед. потенциала СГС.}$$

Отметим важное свойство потенциала, связанное с его энергетическим смыслом: потенциал повсюду, в том числе и на границе двух сред, остается непрерывным, т. е. не испытывает скачка. Исключением является так называемый «двойной слой», который в данном руководстве не рассматривается.

Из выражения (8.3) вытекает часто применяемое равенство

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{A}{q} = - \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \equiv \int_1^2 E_t dl. \quad (8.4)$$

В однородном поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = El.$$

Эта формула находит широкое применение в школьном курсе физики.

## § 9. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ТОЧЕЧНЫХ, ОБЪЕМНЫХ, ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Формула, определяющая потенциал поля точечного заряда на расстоянии  $r$  от заряда, получается из формулы работы поля

по перемещению заряда  $q$  из точки  $r_1$  в точку  $r_2$  (см. 7.3). Полагая  $r_1=r$  и  $r_2=\infty$ , получим:

$$A_\infty = \int_r^\infty f dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

На основании определения (8.1) находим искомый потенциал

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (9.1)$$

Потенциал поля точечных зарядов в точках, не занятых этими зарядами, конечен, непрерывен и в бесконечности обращается в нуль. В точках истока потенциал обращается в бесконечность

Принцип суперпозиции полей распространяется и на потенциалы: если поле обусловлено несколькими точечными зарядами, то потенциал результирующего поля находится как алгебраическая сумма потенциалов полей отдельных зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (9.2)$$

Принцип суперпозиции справедлив для потенциалов полей и при других распределениях зарядов.

Вывод формулы для вычисления потенциала объемных зарядов аналогичен выводу формулы напряженности поля таких зарядов: внутри объемно заряженного тела выделяют элемент объема  $dV$  столь малый, чтобы он и его заряд  $dQ = \rho dV$  могли бы считаться точечными. Соответственно элементарный потенциал  $d\varphi$  в точке наблюдения определяется как

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Результирующий потенциал в точке наблюдения находится интегрированием по всему объему заряженного тела  $V$ :

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (9.3)$$

При объемном распределении зарядов в конечном объеме потенциал поля повсюду (в том числе и внутри заряженных тел) конечен, непрерывен и в бесконечности равен нулю.

В случае поверхностного распределения зарядов аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad (9.4)$$

а при линейном распределении зарядов

$$\varphi = \int_l \frac{k dl}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (9.5)$$

## § 10. ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА И ЕГО СВЯЗЬ С НАПРЯЖЕННОСТЬЮ ПОЛЯ

Градиент потенциала представляет собой вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины. Напомним его свойства.

Работа электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из произвольной точки пространства  $A_1(x, y, z)$  в бесконечно близкую точку  $A_2(x + dx; y + dy; z + dz)$  численно равна разности потенциалов этих точек:

$$\varphi(A_1) - \varphi(A_2) = -[\varphi(A_2) - \varphi(A_1)] = \vec{E} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $A_1$  в точку  $A_2$ . Таким образом,

$$\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi, \quad (10.1)$$

где  $d\varphi$  — полный дифференциал функции  $\varphi(x, y, z)$ , что вытекает из сформулированных выше свойств разности потенциалов. Знак «—» означает, что поле перемещает положительный заряд в сторону убывания потенциала. Переписываем уравнение (10.1):

$$\vec{E} d\vec{l} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz\right) = -\text{grad } \varphi d\vec{l}, \quad (10.2)$$

где  $\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ . Отсюда

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (10.3)$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

и

$$|\vec{E}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Оба вектора ( $\vec{E}$  и  $\text{grad } \varphi$ ) в каждой точке электростатического поля численно равны и противоположны по направлению. Оба вектора являются касательными к силовым линиям и выражаются в одинаковых единицах.

Связь между градиентом потенциала и напряженностью поля имеет первостепенное значение в теории поля. Из сопоставления формул для напряженности и потенциала видно, что вычисление потенциала выполняется проще, поэтому в теории и в ее практических приложениях весьма часто напряженность поля находят следующим образом. Сначала находят потенциал. Если же известен потенциал поля как функция декартовых координат, то составляющие напряженности по осям  $x, y, z$  можно вычислить как взятые с обратным знаком частные производные

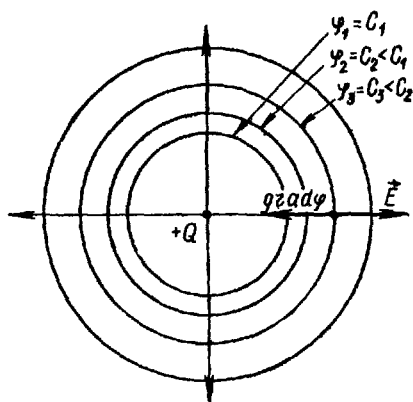


Рис. 21

потенциала по декартовым координатам. Это справедливо при любом распределении зарядов.

Естественно, что связь градиента с напряженностью может быть использована и для вычисления потенциала, если известна напряженность.

Описание поля при помощи потенциала обладает еще одним преимуществом: разность потенциалов двух точек поля легче измерить на опыте, чем напряженность поля. Для непосредственного измерения напряженности электрического поля не

имеется удобных методов; между тем для измерения разности потенциалов существуют многочисленные методы и разнообразные приборы. В силу этого экспериментальные методы определения напряженности сводятся, как правило, к предварительному измерению разности потенциалов.

Обращаем внимание на то важное обстоятельство, что связь между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  соответствует общему виду связи между силой и потенциальной энергией.

Из определения градиента и выражения (10.3) вытекает, что силовые линии поля перпендикулярны поверхностям  $\varphi = \text{const}$ , которые называют эквипотенциальными поверхностями. В поле точечного заряда и однородно заряженного шара эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентрических сфер (рис. 21).

Встречающиеся в школьном курсе формулы  $E \Delta l = -\Delta\varphi$ ,  $E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$  справедливы, очевидно, либо при переходе к пределу (бесконечно малому перемещению  $\vec{\Delta l}$ ), либо в случае однородных полей и перемещению вдоль силовой линии.

## Упражнения

13. Найдите потенциал поля однородно заряженного шара в точке, внешней по отношению к нему (исходите из известной формулы для напряженности поля заряженного шара).

Сопоставьте полученную формулу с формулой для потенциала поля точечного заряда.

14. Найдите потенциал электрического поля бесконечно длинного однородно заряженного цилиндра радиуса  $a$  во внешней точке при постоян-



стве  $k$  (заряда единицы длины). Исходите из полученной в упражнении 6 формулы для напряженности поля заряженного цилиндра:  $E = \frac{k}{2\pi\epsilon_0 r}$ .

При исследовании решения обратите внимание на то обстоятельство, что потенциал бесконечности не равен нулю. Поэтому надо принять за начальный уровень какую-либо эквипотенциальную поверхность, например поверхность цилиндра.

Какие слагаемые, появляющиеся в решении, являются постоянными?

На каком основании оперируют формулой  $\varphi = \frac{k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$  в качестве формулы для вычисления потенциала поля цилиндра (логарифмический потенциал)?

Применимо ли это выражение для определения потенциала однородно заряженной линии?

15. Проверьте, пользуясь условием потенциальности  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , является ли поле потенциальным, если составляющие его напряженности по осям сферической системы координат выражаются следующим образом:

$$E_r = \frac{\rho \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad (\rho = \text{const}, \epsilon = \text{const})$$

У к а з а н и е. Надо проверить равенство нулю каждой составляющей ротора.

## § 11. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

В § 6 уже было введено понятие электрического диполя — системы двух точечных зарядов, одинаковых по величине, но противоположных по знаку, расположенных на малом расстоянии друг от друга. По аналогии в теории магнитных явлений рассматривается магнитный диполь. Важность рассматриваемой модели обусловлена тем, что молекулы во многих случаях можно рассматривать как диполи.

Основной характеристикой диполя является дипольный момент  $\vec{p}$ , который численно равен произведению заряда  $q$  на расстояние  $l$ , между зарядами и направлен по вектору  $\vec{l}$  (имеющему направление от отрицательного заряда к положительному):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (11.1)$$

Значением электрического момента определяются как собственное поле диполя, так и силы, действующие на диполь во внешнем поле. На заряды диполя  $+q$  и  $-q$  (рис. 22, а) в однородном электрическом поле действуют равные и противоположно направленные силы  $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = |q\vec{E}|$ , образующие пару сил. Вращающий момент  $\vec{K}$  этой пары равен:

$$K = fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin(\vec{p}, \vec{E}).$$

В векторной форме

$$\vec{K} = [\vec{p}\vec{E}]. \quad (11.2)$$

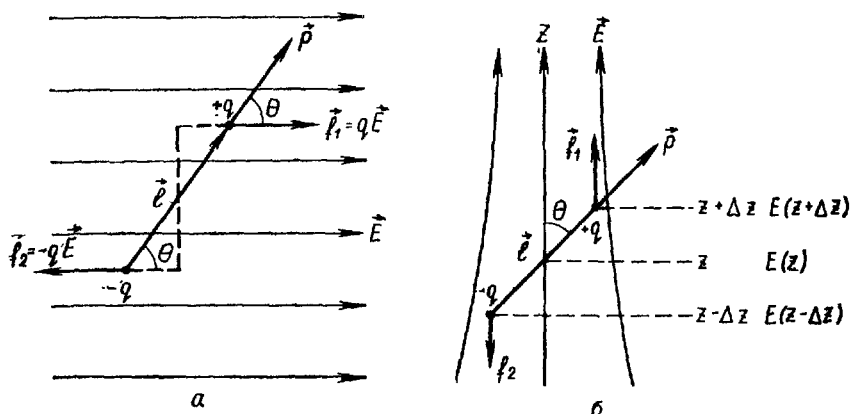


Рис. 22

В неоднородном электрическом поле на диполь наряду с вращающим моментом действует еще равнодействующая двух неодинаковых по величине сил поля, приложенных к концам (полюсам) диполя. Неоднородность поля можно характеризовать производной от модуля напряженности по координате. Пусть (рис. 22, б) поле усиливается наиболее быстро в направлении оси  $Z$ ;  $\frac{\partial E}{\partial z}$  означает приращение модуля напряженности в направлении  $Z$  на единицу длины (градиент модуля напряженности).

Введем обозначения для  $z$ -х координат центра и полюсов диполя:  $z$ ,  $z + \Delta z$ ,  $z - \Delta z$ ; напряженность внешнего поля в этих точках обозначим  $E(z)$ ;  $E(z + \Delta z)$ ;  $E(z - \Delta z)$ . Если диполь короткий ( $l$  мало), то напряженность внешнего поля в точках, где расположены заряды, можно записать так:

$$E(z + \Delta z) = E(z) + \frac{\partial E}{\partial z} \Delta z,$$

$$E(z - \Delta z) = E(z) - \frac{\partial E}{\partial z} \Delta z.$$

Искомая равнодействующая сил определяется выражением

$$f = f_1 - f_2 = qE(z + \Delta z) - qE(z - \Delta z) = q \frac{\partial E}{\partial z} 2 \Delta z.$$

С учетом очевидного равенства  $2 \Delta z = l \cos \theta$  равнодействующая сила может быть записана в виде

$$f = ql \frac{\partial E}{\partial z} \cos \theta = p \frac{\partial E}{\partial z} \cos \theta. \quad (11.3)$$

Направление этой силы зависит от знака  $\cos \theta$ , а следовательно, от величины угла  $\theta$ : при  $\theta < \frac{\pi}{2}$  равнодействующая сила направ-

лена по полю, и диполь вытягивается в направлении возрастания поля; при  $\theta > \frac{\pi}{2}$  диполь выталкивается в область меньших значений  $\vec{E}$ . Последнее явление обычно не наблюдается, так как вследствие одновременного действия вращающего момента диполь ориентируется вдоль вектора напряженности ( $\theta = 0, \cos \theta = 1$ ).

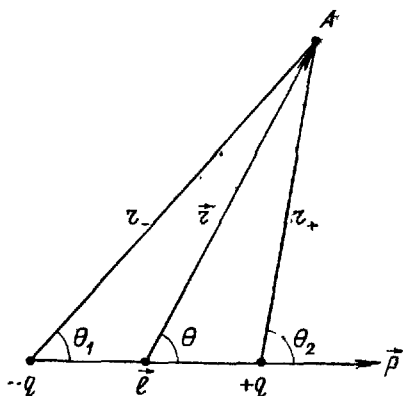


Рис. 23

Найдем напряженность поля, создаваемого диполем, пользуясь при этом способом, указанным в § 10. Предварительно

вычислим потенциал исследуемого поля и вслед за тем по известному потенциалу определим напряженность. Рисунок 23 поясняет вводимые обозначения: здесь  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $r$  — расстояния до точки наблюдения от зарядов и от середины диполя. Потенциал результирующего поля в точке  $A$  можно рассматривать как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых в этой точке зарядами  $+q$  и  $-q$  в отдельности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right). \quad (11.4)$$

Ограничимся частным случаем, когда  $r \gg l$  (при исследовании поля молекулярных диполей это условие обычно выполняется); в этом случае можно положить:  $r_+ \cdot r_- \approx r^2$ ,  $r_- - r_+ = l \cos \theta$ , пренебрегая различием в величине углов  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta$ .

Подставив эти выражения в (11.4), находим потенциал поля диполя:

$$\varphi = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11.5)$$

Умножая числитель и знаменатель на  $r$ , можно представить это выражение в векторной форме:

$$\varphi = \frac{p r \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Наконец, учитывая равенство  $\text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) = -\text{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r^3}$ , перепишем последнее выражение:

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_a \frac{1}{r}. \quad (11.6)$$

Убедимся в правильности примененного векторного равенства.

Дифференцированием можно проверить, что численное значение градиента по координатам точки истока  $q$  равно:

$$\left| \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) \right| = \frac{1}{r^2},$$

т. е.  $\left| \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) \right| = \sqrt{\left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2}.$

Выполним дифференцирование:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right) = \frac{x-x_0}{r^3}.$$

Складывая квадраты частных производных  $\left[ \frac{x-x_0}{r^3} \right]^2$ ,  $\left[ \frac{y-y_0}{r^3} \right]^2$ ,  $\left[ \frac{z-z_0}{r^3} \right]^2$ , получим искомое выражение.

Вектор  $\text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right)$  по направлению совпадает с вектором  $\vec{r}$ ; дифференцирование по координатам точки истока означает, что конец вектора (точка наблюдения) неподвижен, а точка истока перемещается. Очевидно, что скалярная величина  $\frac{1}{r}$  наиболее быстро возрастает в том случае, если  $r$  наиболее быстро убывает. Это имеет место при перемещении вдоль  $\vec{r}$ . Следовательно,

$$\text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) = \left| \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) \right| \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (11.7)$$

Аналогично находим градиент по координатам точки наблюдения:  $\text{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$

Дифференцирование по координатам точки наблюдения означает, что начало вектора градиента (точка истока) неподвижно, а точка наблюдения перемещается. Скалярная величина  $\frac{1}{r}$  в данном случае наиболее быстро возрастает, если перемещение происходит в направлении, противоположном  $\vec{r}$  (и  $r$  убывает).

Мы получили выражение для потенциала (11.5) как функцию координат  $r, \theta$ . По сути дела, мы неявно ввели сферические координаты, поместив начало координат в середину диполя и направив полярную ось вдоль  $\vec{p}$  (рис. 23). От азимутального угла потенциал поля  $\varphi$  не зависит, так как поле диполя обладает осевой симметрией; осью симметрии является ось диполя.

Определим составляющие напряженности:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}; \\ E_\theta &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}; \\ E_\psi &= -\frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Здесь  $\psi$  — азимутальная координата;  $h_1, h_2, h_3$  — коэффициенты Ламэ в сферической системе координат. Отсюда находим модуль напряженности:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2 + E_\psi^2} = \sqrt{\frac{4\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0 r^3)^2}} = \quad (11.9)$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Вектор напряженности образует с направлением  $\vec{r}$  угол  $\beta$ , для которого из соотношения (11.8) имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

Иногда рассматриваются два частных случая (так называемые гауссовы положения): поле в точках, лежащих на продолжении оси диполя, и в точках, лежащих на перпендикуляре, восстановленном из середины диполя, т. е. в точках экваториальной плоскости. В первом случае (при  $\theta = 0, \pi$ )  $E_1 = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ ; во втором случае (при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ )  $E_2 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .

## § 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ТЕЛА

Используем результаты предыдущих параграфов (понятие потенциала, поле диполя), чтобы исследовать явление поляризации диэлектриков, исходя из атомно-молекулярных процессов, лежащих в основе поляризации. Как уже указывалось в § 6, поляризация диэлектриков происходит под действием первичного поля, потенциал которого (в фиксированной точке наблюдения) обозначим через  $\varphi_0$ . Поляризованное тело, оставаясь в целом нейтральным, создает дополнительное электрическое поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом  $\varphi'$ . Это поле, накладываясь на первичное поле, приводит к тому, что в диэлектрике и в окружающем его пространстве возникает результирующее поле, обладающее в точке наблюдения потенциалом  $\varphi$ ; окончательная поляризация тела обусловлена именно этим результирующим полем.

Потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad (12.1)$$

соответственно

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (12.2)$$

Поскольку поляризованный диэлектрик можно рассматривать как совокупность молекулярных диполей, то потенциал его поля может быть определен как алгебраическая сумма потенциалов  $\Sigma_{\text{дип}}$ , создаваемых в точке наблюдения отдельными диполями.

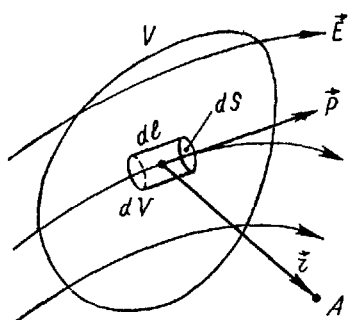


Рис. 24

Согласно (11.5) и (11.6) потенциал поля молекулярного диполя равен:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{дип}} &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \\ &= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right).\end{aligned}$$

В этих записях опущена диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , так как этот коэффициент представляет собой результат феноменологического (макроскопического) учета поляризации среды. Здесь поляризацию мы

учитываем через потенциал  $\varphi' = \Sigma \varphi_{\text{дип}}$ , в силу чего уравнение (12.1) записывается так:

$$\varphi = \varphi_0 + \Sigma \varphi_{\text{дип}}. \quad (12.3)$$

Найдем общее выражение для потенциала поля поляризованного тела объемом  $V$  в точке наблюдения  $A$  (рис. 24). Выделим внутри тела элементарный объем  $dV$ ; в целях наглядности берем его в виде прямого цилиндра, основание которого перпендикулярно напряженности  $\vec{E}$ , а следовательно, и вектору поляризации  $\vec{P}$ . Выделенный нами объем можно рассматривать как элементарный диполь с моментом  $\vec{P} dV$ . Он создает в точке наблюдения поле с потенциалом  $d\varphi'$ , который согласно (11.5) и (11.6) может быть определен по формуле

$$d\varphi' = \frac{\vec{P} dV}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{P dV \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.4)$$

Потенциал поля всего поляризованного тела находится интегрированием по всему объему тела:

$$\varphi' = \int \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) dV. \quad (12.5)$$

С учетом этого выражение (12.1) можно переписать:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) dV. \quad (12.6)$$

Преобразуем подынтегральное выражение  $\vec{P} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right)$  в соответствии с формулой векторного анализа:

$$\text{div}(\psi \vec{a}) = \psi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \text{grad} \psi,$$

откуда

$$\vec{a} \text{grad} \psi = \text{div}(\psi \vec{a}) - \psi \text{div} \vec{a}.$$

Соответственно

$$\vec{P} \operatorname{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{r} \vec{P} \right) - \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P},$$

и, следовательно, выражение (12.5) можно представить в виде

$$\varphi' = \int_V \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) dV = \int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} \right) dV - \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (12.7)$$

Преобразуем в этом выражении интеграл  $\int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} \right) dV$ , используя формулу Остроградского—Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} \right) dV = \oint_S \frac{P_n}{4\pi\epsilon_0 r} dS, \quad (12.8)$$

где  $P_n$ —нормальная составляющая вектора поляризации на поверхности поляризованного тела,  $S$ —его поверхность. Поэтому выражение (12.7) приобретает следующий вид:

$$\varphi' = \oint_S \frac{P_n}{4\pi\epsilon_0 r} dS - \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (12.9)$$

Нахождение потенциала поля поляризованного тела сведено к двум операциям интегрирования: по замкнутой поверхности и по объему. Сопоставляя выражение (12.9) с формулами для потенциала поля поверхностных и объемных зарядов (9.4) и (9.3), мы приходим к выводу, что в выражении (12.9) нормальная составляющая  $P_n$  вектора поляризации имеет физический смысл поверхностной плотности  $\sigma_{\text{связ}}$  связанных зарядов, а  $-(\operatorname{div} \vec{P})$ —смысл объемной плотности  $\rho_{\text{связ}}$  этих зарядов. Итак,

$$P_n = \sigma_{\text{связ}}, \quad (12.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}. \quad (12.11)$$

Мы доказали одну из основных теорем электростатики: поле поляризованного диэлектрика определяется распределением его поверхностных и объемных связанных зарядов.

Теперь выражению (12.3) можно придать вид

$$\varphi' = \oint_S \frac{\sigma_{\text{связ}}}{4\pi\epsilon_0 r} dS + \int_V \frac{\rho_{\text{связ}}}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (12.12)$$

В отличие от связанных зарядов все рассмотренные ранее заряды являлись свободными зарядами. Если первичное поле обусловлено ими, то

$$\varphi_0 = \oint_S \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 r} dS + \int_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (12.13)$$

Потенциал результирующего поля может быть найден по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \int_V \frac{\rho + \rho_{\text{связ}}}{4\pi\epsilon_0 r} dV + \oint_S \frac{\sigma + \sigma_{\text{связ}}}{4\pi\epsilon_0 r} dS. \quad (12.14)$$

Согласно старой терминологии связанные заряды называли фиктивными зарядами. Объясняется это тем, что поляризованный диэлектрик в целом нейтрален ( $\Sigma Q = 0$ ); только при наличии свободных зарядов общий заряд тела отличен от нуля. По этой причине заряды поляризованного тела считали нереальными, надуманными, введенными исключительно ради получения удобной расчетной формулы (12.4). Ниже будет показано, что это мнение неверно. Связанные заряды реальны, и мы должны в дальнейшем обосновать их формальное введение в (12.10) и (12.11).

### § 13. ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ОБЪЕМНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ $\vec{E}$ , $\vec{D}$ , $\vec{P}$

Для обоснования соотношения (12.10) вернемся к однородному полю плоского конденсатора (упр. 8). На его пластинах сосредоточены свободные заряды с поверхностной плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 25). Под воздействием поля этих зарядов диэлектрик, вводимый в пространство между пластинами, поляризуется. Предполагается, что диэлектрик однороден, имеет объем  $V$ , толщину  $l$  и его боковые грани  $S$  параллельны пластинам и равны им по площади; между этими гранями и пластинами может существовать зазор. Обозначим через  $\varphi_0$  и  $\vec{E}_0$  соответственно потенциал и напряженность в какой-либо точке первичного поля, т. е. того поля, которое существовало между пластинами в вакууме (до введения диэлектрика). При поляризации диэлектрика на его гранях появляются связанные заряды: у пластины с отрицательным зарядом — суммарный положительный заряд молекулярных диполей; у пластины с положительным зарядом — отрицательный заряд тех молекулярных диполей, которые оказались около данной пластины.

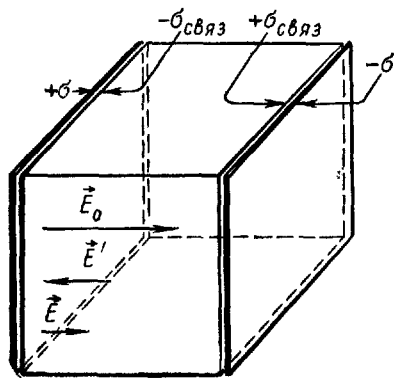


Рис. 25

Таким образом на гранях диэлектрика возникают связанные заряды с поверхностной плотностью  $+\sigma_{\text{связ}}$  и  $-\sigma_{\text{связ}}$ . Связанные заряды создают в диэлектрике добавочное поле  $\varphi'$ ,  $\vec{E}'$ , линии которого направлены



противоположно линиям первичного поля. Для результирующего поля имеем:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi'; \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

В нашем случае

$$E = E_0 - E'.$$

Исходя из определения вектора  $\vec{P}$  как дипольного момента единицы объема поляризованного тела, мы можем считать произведение  $\vec{P}V$  электрическим моментом диэлектрика. С другой стороны, этот момент может быть выражен как произведение заряда одной грани диэлектрика  $\sigma_{\text{связ}}S$  на его толщину  $l$ , т. е.

$$PV = \sigma_{\text{связ}}Sl. \quad (13.1)$$

Поскольку  $V = Sl$ , имеем:

$$P = \sigma_{\text{связ}}. \quad (13.2)$$

В данном случае  $P = P_n$ , поэтому  $P_n = \sigma_{\text{связ}}$ .

Рассмотрим более общий случай. Пусть в однородном поле находится усеченный образец из того же диэлектрика (рис. 26). Площади обеих граней  $S$  и  $S'$  связаны соотношением

$$S = S' \cos(\vec{P}, \hat{n}).$$

Общий связанный заряд на обеих гранях численно одинаков

$$\sigma_{\text{связ}}S = \sigma'_{\text{связ}}S',$$

отсюда

$$\frac{\sigma'_{\text{связ}}}{\sigma_{\text{связ}}} = \frac{S}{S'} = \cos(\vec{P}, \hat{n}),$$

$$\sigma'_{\text{связ}} = \sigma_{\text{связ}} \cos(\vec{P}, \hat{n}).$$

Но согласно (13.2)  $\sigma_{\text{связ}} = P$ , поэтому в общем случае

$$\sigma'_{\text{связ}} = P \cos(\vec{P}, \hat{n}) = P_n. \quad (13.3)$$

Мы здесь предполагали, что диэлектрик граничит с вакуумом. В общем случае границы двух диэлектриков (1 и 2, рис. 27) с различной поляризуемостью результирующая плотность связанных зарядов на границе раздела равна раз-

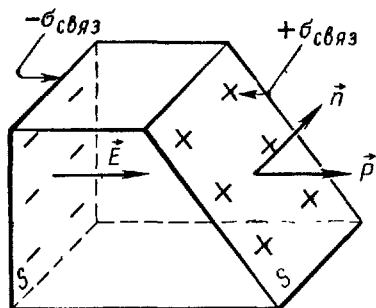


Рис. 26

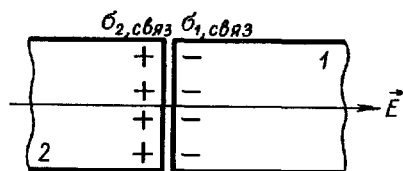


Рис. 27

ности плотностей зарядов на каждой из соприкасающихся поверхностей:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{связ}} &= \sigma_{1, \text{связ}} - \sigma_{2, \text{связ}}, \\ \sigma_{\text{связ}} &= P_{1n} - P_{2n},\end{aligned}$$

что отвечает равенству  $\sigma_{\text{связ}} = P_n^-$ .

Для обоснования соотношения  $\rho_{\text{связ}} = -\text{div } \vec{P}$  используем прием усреднения величины истинного микроскопического поля. Естественно, что любое поляризованное тело при отсутствии свободных зарядов электрически нейтрально и что существование связанных зарядов может проявляться только в том, что в физически бесконечно малых объемах внутри поляризованного диэлектрика при определенном условии число некомпенсированных микрочарядов одного знака (положительных или отрицательных «концов» — полюсов молекулярных диполей) больше, чем другого знака. Далее будет показано, что это условие состоит в неоднородности электрических свойств диэлектрика (в зависимости восприимчивости  $\alpha$  от координат).

При рассмотрении истинных микрочарядов в математически бесконечно малых объемах свободные и связанные заряды неразличимы; различие между ними возникает при усреднении по ф.б.м. объему, в силу чего под  $\rho_{\text{макро}}$  следует понимать среднее значение истинной плотности зарядов:

$$\rho_{\text{макро}} = \bar{\rho}_{\text{микро}} = \rho + \rho_{\text{связ}}, \quad (13.4)$$

где  $\rho$  — плотность свободных зарядов, которую мы в дальнейшем будем считать равной нулю (рассматриваются диэлектрики).

Задача существенно облегчается, если ввести модельные представления. Рассмотрим внутри диэлектрика ф. б. м. объем в виде элементарно малого параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными декартовым осям координат (рис. 28); его объем  $dV = dx dy dz$ .

Пусть составляющие вектора поляризации имеют в вершине параллелепипеда  $C(x, y, z)$  значения  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ . Из наличия положительной составляющей  $P_x$  вытекает, что в поляризованном состоянии диэлектрика задняя грань, обозначенная цифрой 2, «пересекает» (в геометрическом смысле слова) молекулярные диполи таким образом, что вне параллелепипеда остаются отрицательные концы, а в параллелепипед «входят» положительные концы диполей.

Поясним это утверждение рисунком 29. Рассматриваемая вторая грань площадью  $dS = dy dz$  пересекает все те диполи, центры которых расположены в примыкающем к грани слое толщиной  $l \cos(\vec{l}, \vec{n})$ , где  $l$  — средняя длина диполя, ориентированного параллельно вектору поляризации  $\vec{P}$ ,  $\vec{n}$  — нормаль к площадке  $dS$  (при этом рассматривается абсолютная величина

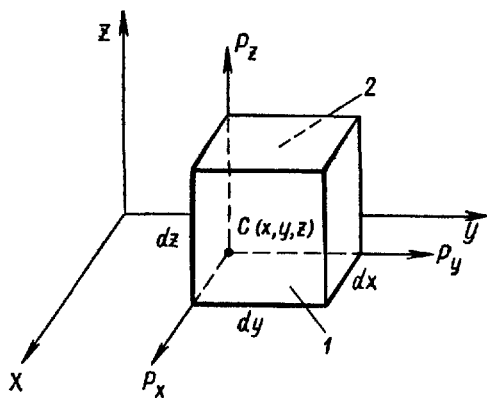


Рис. 28

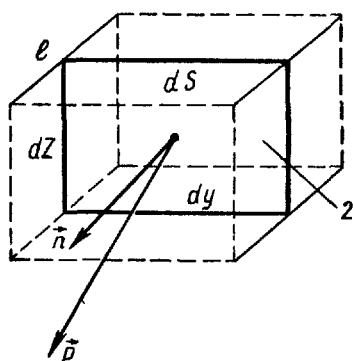


Рис. 29

косинуса). Объем этого слоя равен  $dS l \cos(\vec{l}, \vec{n})$ . Обозначая концентрацию диполей (их число в единице объема) через  $N$ , получим, что число диполей, рассекаемых площадкой  $dS$ , равно:  $Nl dS \cos(\vec{l}, \vec{n})$ .

Обратимся к определению вектора поляризации (§ 7):

$$\vec{P} = \Sigma \vec{p} = N \vec{p} = Nql \vec{l},$$

где  $q$  — заряд диполя одного знака; отсюда

$$l = \frac{P}{Nq}.$$

Соответственно, общий положительный заряд рассеченных диполей равен:

$$dQ_2 = Nql dS \cos(\vec{l}, \vec{n}) = P \cos(\vec{P}, \vec{n}) dS = P_n dS = P_x dy dz. \quad (13.5)$$

Такова величина положительного заряда, попавшего через вторую грань в параллелепипед. Величину  $P_n dS$  можно трактовать и как поверхностный положительный заряд, появившийся на внутренней стороне грани 2 [ср. (12.10)].

Нормальная составляющая вектора поляризации на передней грани 1 равна:  $P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$ ; прилегающие к ней диполи эта грань пересекает таким образом, что внутри параллелепипеда расположены их отрицательные заряды. Положительные заряды диполей, оказавшиеся с наружной стороны грани, дают суммарный заряд:

$$dQ_1 = \left( P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dx. \quad (13.6)$$

В итоге смещения зарядов через грани 1 и 2 под действием внешнего поля происходит увеличение положительного за-

ряда в параллелепипеде, равное разности выражений (13.5) и (13.6):

$$P_x dy dz - \left( P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial P_x}{\partial x} dx dy dz = - \frac{\partial P_x}{\partial x} dV.$$

Аналогично получаем выражение для приращения положительного заряда при смещении зарядов через другие две пары граней; полный положительный связанный заряд  $\rho_{\text{связ}} dV$ , входящий в параллелепипед при поляризации, определяется выражением

$$- \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dV = \rho_{\text{связ}} dV,$$

откуда непосредственно вытекает:

$$\operatorname{div} \vec{P} = - \rho_{\text{связ}}.$$

Последнее выражение позволяет определить условие, при котором появляются связанные заряды. Преобразуем  $\operatorname{div} \vec{P}$ :

$$\operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \alpha \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \operatorname{grad} \alpha.$$

Стало быть,  $\operatorname{div} \vec{P}$  и  $\rho_{\text{связ}}$  могут быть отличны от нуля лишь тогда, когда либо диэлектрик неоднороден ( $\operatorname{grad} \alpha \neq 0$ ), либо  $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$ . Последнее неравенство (при  $\alpha = \text{const}$ ) означает наличие свободных зарядов (исключенных нами из рассмотрения). Итак, объемные связанные заряды «появляются» лишь в неоднородных диэлектриках.

Как было показано в § 6, явление поляризации можно учесть в дифференциальном уравнении для напряженности электрического поля  $\vec{E}$  двумя способами: либо формальным введением в формулу дивергенции относительной проницаемости  $\epsilon$  и учетом одних только свободных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0},$$

либо введением объемной плотности связанных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{связ}}}{\epsilon_0}.$$

Подставляя в последнее выражение формулы для дивергенций векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$ , мы приходим к важному уравнению связи между векторами поля:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div} \vec{P}, \quad (13.7)$$

или, перейдя от равенства дивергенций к равенству векторов:

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P},$$

или

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (13.8)$$

Учитывая, что  $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ , можно (13.8) переписать:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E}.$$

Сопоставление этого выражения с формулой  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  позволяет получить связь между относительной проницаемостью диэлектрика и его восприимчивостью:

$$\epsilon = 1 + \alpha. \quad (13.9)$$

#### § 14. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В макроскопической электродинамике рассматриваются две идеализированные модели: проводники и диэлектрики.

Проводники характеризуются наличием в них «свободных» зарядов, которые под действием электрического поля неограниченно перемещаются внутри этих тел. В твердых и жидких металлах свободными зарядами являются электроны проводимости. В феноменологической теории процессы, наблюдающиеся в проводнике под действием поля, могут быть объяснены одинаково удовлетворительно при допущении подвижности зарядов как обоих знаков, так и одного знака.

Под действием поля в проводнике происходит перераспределение зарядов («наведение» зарядов, электрическая индукция), которое поясняет рисунок 30. Поле перемещенных зарядов, изображенное штриховыми линиями, накладывается на первичное поле. Внутри проводника первичное поле компенсируется до нуля, так как перемещение зарядов продолжается до тех пор, пока результирующее поле не станет равным нулю. Отсюда вытекает, что электростатическое (макроскопическое) поле внутри проводников существовать не может (это не относится к иным электрическим полям, как будет показано ниже).

При индукции в результате перераспределения зарядов происходит искажение поля также и вне проводника. Силовые линии результирующего электростатического поля располагаются по нормали к поверхности проводника: если бы вектор напряженности был ориентирован наклонно к поверхности проводника, то под действием тангенциальной составляющей этого вектора про-

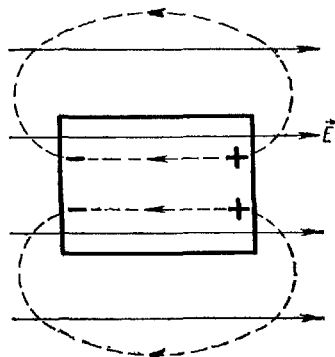


Рис. 30

исходило бы перемещение зарядов. Равновесие зарядов, рассматриваемое в электростатике, возможно только в том случае, если у поверхности проводника напряженность поля  $E = E_n$ , т. е. равняется своей нормальной составляющей. Вычисленная в упражнениях 5 и 6 напряженность поля в точках, непосредственно прилегающих к поверхности проводников, представляет собой

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Равновесие зарядов, локализованных на поверхности проводника, возможно лишь при условии, что результирующее поле имеет во всех точках этой поверхности одинаковый потенциал; иначе говоря, поверхность проводника в электростатическом поле представляет собой эквипотенциальную поверхность  $\varphi = \text{const}$ . Поскольку в проводнике  $E = 0$ , то для произвольных двух его точек  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int \vec{E} d\vec{l} = 0$ , т. е. все точки проводника (как на поверхности, так и внутри проводника) имеют одинаковый потенциал, который и называется потенциалом проводника.

Перераспределение зарядов при индукции следует рассматривать как кратковременный ток. Индуцированные заряды, так же как и заряды, сообщенные проводнику извне, могут быть отведены к земле (они «свободны»).

## § 15. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Введение понятия потенциала существенно облегчает исследование энергетической стороны взаимодействий зарядов между собой и с полем.

Пусть  $q_1$  и  $q_2$  — два точечных одноименных заряда, расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга в неограниченной однородной диэлектрической среде (рис. 31). Через  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  обозначаем потенциалы поля в точках  $M_1$  и  $M_2$ , в которых расположены эти заряды; при этом надо учесть, что  $\varphi_{12}$  — потенциал поля, обусловленного зарядом  $q_2$  в точке  $M_1$ , где находится заряд  $q_1$ ; соответственно  $\varphi_{21}$  — потенциал в точке  $M_2$ , обусловленный зарядом  $q_1$ .

При перемещении заряда  $q_2$  из бесконечности в точку  $M_2$  внешние силы совершают работу

$$-A_\infty = q_2 \varphi_{21} = \frac{q_2 q_1}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r} = W$$

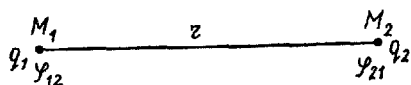


Рис. 31

(заряд  $q_1$  при этом фиксирован). Эта работа определяет потенциальную энергию заряда  $q_2$  в точке  $M_2$ . Величину  $+A_\infty$  можно рассматривать как работу

поля заряда  $q_1$  по выталкиванию заряда  $q_2$  на бесконечность за счет потенциальной энергии  $W$  заряда  $q_2$  в поле заряда  $q_1$ .

Таким же образом можно найти потенциальную энергию заряда  $q_1$  в точке  $M_1$ :

$$-A_\infty = q_1 \varphi_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r} = W.$$

Здесь следует, конечно, говорить об энергии взаимодействия обоих зарядов, и поэтому выражение для  $W$  обычно записывают в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}). \quad (15.1)$$

В случае разноименных зарядов, т. е. при наличии сил притяжения, энергия взаимодействия имеет отрицательный знак.

Энергию взаимодействия системы из трех точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3$  можно определить, записав для каждой пары этих зарядов выражение типа (15.1):

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}), \\ W_2 &= \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{13} + q_3 \varphi_{31}), \\ W_3 &= \frac{1}{2} (q_2 \varphi_{23} + q_3 \varphi_{32}). \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

При сложении этих выражений получим:

$$W = \frac{1}{2} [q_1 (\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_2 (\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3 (\varphi_{31} + \varphi_{32})], \quad (15.3)$$

где в каждой круглой скобке указан потенциал, создаваемый в данной точке двумя другими зарядами. Введя обозначение  $\varphi_1 = \varphi_{12} + \varphi_{13}$  и т. д., имеем для трех зарядов ( $k=3$ ):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 q_k \varphi_k,$$

а в случае  $n$  зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k. \quad (15.4)$$

В общем случае произвольного распределения зарядов разлагают общий заряд на совокупность элементарных объемных зарядов  $\rho dV$  и поверхностных зарядов  $\sigma dS$  и применяют к ним формулу (15.4), переходя от суммирования к интегрированию:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (15.5)$$

где  $\varphi$  — потенциал поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема  $dV$  или на элементе поверхности  $dS$ .

## § 16. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Выражение (15.4) позволяет определить энергию системы точечных зарядов во внешнем электрическом поле, обусловленном неизвестным нам распределением зарядов. Принимая потенциал на бесконечном расстоянии от места нахождения точечных зарядов за начальный уровень отсчета потенциала (и потенциальной энергии) зарядов во внешнем поле, можно выразить эту энергию через работу поля по перемещению зарядов из соответствующих точек в бесконечность. Следовательно, энергия зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  во внешнем поле с потенциалом  $\varphi(x, y, z)$  равна:

$$W = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i, z_i) \cdot q_i, \quad (16.1)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты точки, в которой находится заряд  $q_i$ .

Выражения (15.5) и (16.1), формально истолкованные, могут создать представление, что электрическая энергия есть энергия взаимодействия на расстоянии без участия промежуточной среды (дальнодействие). Такое представление исключает возможность локализации энергии в промежуточной среде и противоречит физической реальности. Можно найти другие выражения для энергии взаимодействия электрических зарядов, в которые явно входит объем пространства, занимаемый полем. Для этого решим вспомогательную задачу: найдем энергию уединенного заряженного проводника, имеющего потенциал  $\varphi_0$  в однородной среде.

Электрическая энергия проводника равна работе против электрических сил отталкивания, затраченной при последовательном сообщении ему малых зарядов  $dq$ . Если заряды переносят из бесконечности (или Земли), где по условию  $\varphi_\infty = 0$ , то перенос каждого элементарного заряда  $dq$  на тело сопряжен с работой

$$-dA = \varphi dq,$$

где  $\varphi$  — потенциал тела в соответствующий момент. Полная работа внешних сил при зарядке тела равна:

$$-A = \int \varphi dq.$$

Перепишем это выражение с учетом связи между потенциалом  $\varphi$ , зарядом  $q$  и емкостью  $C$  проводника:  $q = C\varphi$ ;  $dq = C d\varphi$ , откуда

$$-A = \int_0^{\varphi_0} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi_0^2}{2} = \frac{q\varphi_0}{2} = \frac{q^2}{2C} = W. \quad (16.2)$$

Рассматривая аналогичным образом процесс зарядки плоского конденсатора как перенос элементарных зарядов с одной



его обкладки на другую, мы получаем для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} (Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}, \quad (16.3)$$

или, с учетом выражений для емкости плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{l}$  и  $C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$  и связи разности потенциалов с напряженностью в однородном поле  $\varphi_1 - \varphi_2 = El$ , имеем:

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S E^2 l^2}{2l} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sl.$$

Но  $Sl = V$  — пространство, занимаемое полем (без учета искажений у краев). Таким образом

$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V. \quad (16.4)$$

Появление объема в выражении для энергии взаимодействия электрических зарядов имеет глубокий физический смысл: электрическая энергия локализована в пространстве, занимаемом электрическим полем. Это положение доказано всеми опытами с переменными полями. В силу этого можно ввести понятие объемной плотности энергии  $\omega$ , определяемой соотношением

$$\omega = \frac{dW}{dV}. \quad (16.5)$$

В случае плоского конденсатора поле однородно, а следовательно,  $\omega = \text{const}$ , в силу чего  $\omega = \frac{W}{V}$ .

Исходя из соотношения (16.4), для плотности энергии имеем:

$$\omega = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}. \quad (16.6)$$

Эта формула выражает плотность электрической энергии и в случае неоднородного поля, отсюда для энергии поля в объеме  $V$  получаем следующее важное выражение:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV. \quad (16.7)$$

В общем случае, учитывая первый интеграл (15.5) и выражение  $\rho = \text{div } \vec{D}$ , имеем:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div } \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV - \\ &- \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \text{grad } \varphi dV = \frac{1}{2} \oint_S \varphi D_n dS + \frac{1}{2} \int_V \vec{D}\vec{E} dV. \end{aligned}$$

Для полного поля, т. е. области пространства, на границах которой векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  обращаются в нуль, поверхностный интеграл исчезает и мы непосредственно приходим к выражению (16.7).

### § 17. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Резюмируем основные положения об электростатическом поле в классической электродинамике.

Электростатическое поле (поле вектора  $\vec{E}$ ) обусловлено источниками, которыми являются электрические заряды (свободные и связанные). Источниками вектора  $\vec{D}$  являются только свободные заряды. Электростатическое поле потенциально, т. е. циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна нулю, что иначе выражается через равенство нулю  $\text{rot } \vec{E}$ .

Эти фундаментальные положения выражаются математически следующей системой уравнений электростатического поля (уравнений Максвелла) в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \text{div } \vec{D} &= \rho, \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

где  $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов. В интегральной форме система принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= 0, \\ \int_V \text{div } \vec{D} dV &= \oint_S D_n dS = Q. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

При выражении электрических величин в единицах системы СГС запись уравнений, содержащих  $D$ ,  $e$  и  $\epsilon_0$ , принимает несколько иной вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \int_V \text{div } \vec{D} dV &= \oint_S D_n dS = 4\pi Q. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

В систему основных уравнений поля включается и уравнение связи между  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  (материальное уравнение), учитывающее свойства среды, в которой существует поле:

$$\begin{aligned} \text{в СИ —} & \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \\ \text{в СГС —} & \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}. \end{aligned}$$

Используем систему основных уравнений электростатического поля для вывода граничных условий для векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Как уже указывалось выше, потенциал поля при объемном и поверхностном распределении зарядов остается непрерывным. Непрерывна и первая производная потенциала по координатам (исключение — двойной слой — в данной книге не рассматривается).

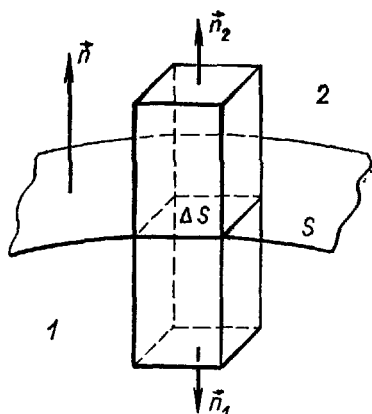


Рис 32

При решении дифференциальных уравнений для  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  появляются постоянные интегрирования, поэтому для однозначного определения векторов поля надо

знать их свойства на границах раздела сред, т. е. граничные условия; с их помощью можно найти постоянные интегрирования и однозначно определить векторы поля.

**а) Поведение вектора индукции при переходе через заряженную поверхность.** Рассмотрим в электростатическом поле заряженную поверхность, разделяющую два изотропных диэлектрика с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 32). Обозначим через  $\vec{n}$  нормаль к поверхности, направленную во вторую среду, фиксируем на поверхности элементарную площадку  $\Delta S$  с поверхностным свободным зарядом  $\sigma \Delta S$  и построим на ней прямую призму. Через  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  обозначим нормали к нижнему и верхнему основаниям призмы. Согласно уравнению Максвелла для дивергенции  $\vec{D}$  (17.2) поток индукции через эту призму определяется выражением

$$\int_S D_n dS = D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2, \vec{n}_2}) \Delta S + D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1, \vec{n}_1}) \Delta S + N'_D = \sigma \Delta S, \quad (17.4)$$

где  $N'_D$  — поток индукции через боковые грани, а первые два слагаемых — потоки через верхнее и нижнее основания. Учитывая выбранные направления нормалей, проекции  $\vec{D}$  на нормаль  $\vec{n}$  можно записать в виде

$$D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2, \vec{n}_2}) = D_{2n}; \quad D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1, \vec{n}_1}) = -D_{1n}.$$

Если приблизить основания призмы к заряженной поверхности на бесконечно малое расстояние, то поток  $N'_D$  через боковые грани станет бесконечно малым и им можно пренебречь. В этом случае

$$(D_{2n} - D_{1n}) \Delta S = \sigma \Delta S,$$

откуда вытекает важное граничное условие для вектора  $\vec{D}$ :

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (17.5)$$

При переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая вектора индукции изменяется скачком на величину  $\sigma$ .

**б) Поведение вектора индукции при переходе через незаряженную поверхность.** Рассмотрим поверхность раздела двух диэлектриков, на которой нет свободных зарядов ( $\sigma = 0$ ). Для данного случая из выражения (17.5) вытекает новое граничное условие:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0; \quad D_{2n} = D_{1n}. \quad (17.6)$$

На границе двух диэлектриков (при  $\sigma = 0$ ) нормальная составляющая вектора индукции непрерывна (не испытывает скачка).

**в) Поведение вектора напряженности электростатического поля на границе двух сред.** Нормальная составляющая электрического вектора  $\vec{E}$  испытывает скачок не только при переходе через поверхность со свободными зарядами, но и при переходе через поверхность со связанными зарядами, т. е. на границе раздела двух диэлектриков с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ; на существование связанных зарядов указывает различие проницаемостей  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  этих сред. В изотропных диэлектрических средах, рассмотрим которых мы ограничиваемся, связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  и их проекциями имеет один и тот же вид:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad D_n = \epsilon \epsilon_0 E_n; \quad D_t = \epsilon \epsilon_0 E_t$$

( $D_t$ ,  $E_t$  — тангенциальные составляющие).

Из условия (17.6) следует, что на границе двух диэлектриков  $\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n}$ , откуда

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (17.7)$$

Рассмотрим поведение тангенциальной составляющей электрического вектора на поверхности раздела двух сред. Пусть два диэлектрика с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  разделены поверхностью  $S$  (рис. 33). Проведем касательную плоскость к границе раздела двух диэлектриков в той точке, в которой хотят определить граничные условия. Разложим вектор  $\vec{E}$  на две составляющие — нормальную, параллельную нормали к касательной поверхности, и касательную (тангенциальную)  $E_t$ , лежащую в касательной плоскости. Используем уравнение Максвелла для циркуляции вектора напряженности по малому контуру  $ABCD$  ( $L$ ) и через  $\vec{l}$  обо-

значим единичный вектор, параллельный  $E_t$  во второй среде:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = E_{2t}a - E_{1t}a + A' = 0,$$

где  $A'$  — работа перемещения единичного заряда на двух отрезках  $h$ . Стягиваем контур обхода к касательной поверхности, неограниченно уменьшая  $h$ ; тогда в пределе работа на участках  $h$  обращается в нуль, откуда  $E_{2t} - E_{1t} = 0$ , т. е.

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (17.8)$$

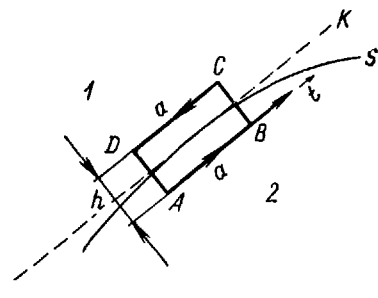


Рис 33

Этот вывод справедлив для границ раздела любых двух сред (границы проводника и диэлектрика, границы двух диэлектриков, границы двух проводников), если только на границе нет двойного слоя. Таким образом, на границе двух сред тангенциальная составляющая напряженности непрерывна (не испытывает скачка).

Отсюда непосредственно вытекает, как уже было установлено в § 14, что вектор  $\vec{E}$  ориентирован нормально к поверхности проводника. Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , следовательно,  $E_t = 0$ ; в силу непрерывности тангенциальная составляющая равна нулю и в точках диэлектрика, прилегающих к поверхности проводника снаружи, поэтому в этих точках  $E = E_n$ .

Из выражения (17.6) вытекает, что в точках диэлектрика у поверхности проводника

$$D_{2n} = \sigma, \quad (17.9)$$

поскольку внутри проводника  $D_{1n} = 0$ . Учитывая связь между  $D$  и  $E$ , имеем для точек диэлектрика, прилегающих к проводнику:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (17.10)$$

К этому выводу мы пришли уже ранее при решении упражнений.

Следует уяснить себе условность найденных выше скачков: резкие границы рассматриваемых сред являются, конечно, идеализацией. На самом деле плотности зарядов при переходе через поверхность двух сред меняются непрерывно. Трудную задачу исследования поля в переходных областях такого рода удобно заменить рассмотрением скачкообразного изменения.

**г) Преломление силовых линий на границе двух диэлектриков.** На границе двух диэлектриков 1 и 2 с поверхностью раздела  $S$  (рис. 34) в общем случае  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ; для определенности допустим  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (например,  $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$ ). Разложим  $\vec{E}_1$  в первой среде на нор-

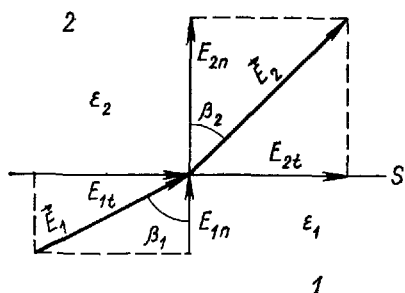


Рис. 34

мальную и тангенциальную составляющие (при этом в целях наглядности допущен необычный перенос вектора  $\vec{E}_1$ ). Тангенциальная составляющая векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  на границе непрерывна:  $E_{1t} = E_{2t}$ . Нормальная составляющая испытывает скачок, как это вытекает из (17.7). В нашем примере  $E_{2n} = 2E_{1n}$ . Из простых геометрических соображений имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\frac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Последнее соотношение известно под названием закона преломления силовых линий.

Система уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

дополненная граничными условиями на поверхности раздела двух диэлектриков

$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, \\ E_{2t} &= E_{1t}, \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

граничными условиями на поверхности раздела проводника и диэлектрика

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \sigma, \\ E_t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и, наконец, формулами связи

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

составляет полную систему уравнений электростатики изотропных диэлектриков и однородных проводников. Полнота системы уравнений поля означает:

1) если заданы плотности пространственного и поверхностного распределения свободных зарядов  $[\rho(x, y, z)$  и  $\sigma(x, y, z)]$  и проницаемость  $\epsilon(x, y, z)$  во всех точках пространства, то записанные выше уравнения однозначно определяют электростатическое поле, т. е. значения  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  в каждой точке пространства;

2) наоборот, если во всем пространстве заданы функции  $\epsilon(x, y, z)$  и  $\vec{E}(x, y, z)$  (либо  $\varphi$ , либо  $\vec{D}$ ), то система уравнений

электростатики однозначно определяет распределение свободных зарядов  $\rho(x, y, z)$  и  $\sigma(x, y, z)$ .

Эти положения справедливы при условии, что исключаются из рассмотрения двойные слои (при переходе через которые потенциал испытывает скачок) и что заряды распределены в конечных объемах и на конечных поверхностях.

Скачкообразное изменение напряженности поля на границе проводника и диэлектрика модельно объясняется появлением на поверхности диэлектрика поверхностных связанных зарядов, т. е. некомпенсированных зарядов молекулярных диполей. Ранее (в § 15) это было рассмотрено на примере поля плоского конденсатора с однородным диэлектриком (см. рис. 25). Здесь с правой стороны поверхностные связанные заряды представляют собой суммарный положительный заряд концов молекулярных диполей, оказавшихся у правой грани; слева — отрицательный заряд тех молекулярных диполей, которые оказались у левой грани. Соответственно, на этих гранях поверхностная плотность связанных зарядов  $+\sigma_{\text{связ}}$  и  $-\sigma_{\text{связ}}$ . В каждой точке диэлектрика результирующее поле  $\vec{E}$  является результатом суперпозиции первичного поля  $\vec{E}_0$ , обусловленного свободными зарядами обкладок, распределенными с плотностью  $\sigma$ , и поля  $\vec{E}'$  связанных поверхностных зарядов, имеющих поверхностную плотность  $\sigma_{\text{связ}}$ . Результирующее поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

В нашем случае

$$E = E_0 - E'. \quad (17.13)$$

Объемных связанных зарядов в диэлектрике нет, они появляются только при поляризации неоднородных диэлектриков.

Из соотношения (17.10) вытекает простая связь между поверхностной плотностью свободных зарядов  $\sigma$ , расположенных на обкладках, и их полем в вакууме ( $\epsilon = 1$ ):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

(Индекс  $n$  опускается, так как вектор  $\vec{E}_0$  нормален к поверхности.) Естественно предположить такую же связь между поверхностной плотностью связанных зарядов  $\sigma_{\text{связ}}$  и обусловленным ими полем  $\vec{E}'$ :

$$E' = \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\epsilon_0}.$$

При этом уравнение (17.13) переписывается следующим образом:

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma - \sigma_{\text{связ}}}{\epsilon_0}. \quad (17.14)$$

С другой стороны, состояние поляризации поддерживается результирующим полем  $\vec{E}$ , поэтому должна существовать прямая пропорциональность между  $\sigma_{\text{связ}}$  и  $E$ :

$$\sigma_{\text{связ}} = \alpha \epsilon_0 E, \quad (17.15)$$

где  $\alpha$  — восприимчивость диэлектрика.

Подстановка уравнения (17.15) в (17.14) дает:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \alpha E, \quad (17.16)$$

откуда

$$E_0 = E + E' = E + \alpha E = (1 + \alpha) E.$$

Сумма  $(1 + \alpha)$  получила, как известно, название относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ :

$$1 + \alpha = \epsilon.$$

Обе величины — восприимчивость  $\alpha$  и проницаемость  $\epsilon$  — являются основными электрическими характеристиками диэлектрика.

Из уравнения (17.16) вытекает, что  $\epsilon = \frac{E_0}{E}$ , т. е.  $\epsilon$  показывает, во сколько раз убывает напряженность поля при заполнении всего пространства, занимаемого полем, однородным диэлектриком. Если диэлектрик заполняет лишь часть поля, ничего определенного об изменении поля сказать нельзя.

В поле конденсатора без диэлектрика из граничных условий (17.9) и (17.10) вытекает:

$$D_0 = \sigma = \epsilon_0 E.$$

При наличии диэлектрика связь между  $\vec{D}$  и вектором результирующего поля  $\vec{E}$  в силу (17.16) имеет вид:

$$\vec{D} = (1 + \alpha) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

На примере однородного поля плоского конденсатора мы вновь пришли к основным соотношениям для электростатического поля в диэлектрике, которые были получены в § 6 и 13.

## § 18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА (УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА)

Часто задачи электростатики решить проще, если исходить из дифференциального уравнения для потенциала.

Из основных уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \rho, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

при условии однородности диэлектрика  $\epsilon = \text{const}$  вытекает:

$$\operatorname{div} (\epsilon \epsilon_0 \operatorname{grad} \varphi) = \epsilon \epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho. \quad (18.1)$$



Оператор  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  носит название лапласиана и обозначается символом либо  $\Delta$ , либо  $\nabla^2$ ; поэтому (18.1) можно переписать в виде

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (18.2)$$

Эта формула известна под названием уравнения Пуассона; уравнение выполняется в точках, в которых имеются свободные заряды. Для точек, где свободных зарядов нет, оно переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (18.3)$$

Уравнение Пуассона имеет фундаментальное значение для решения основной задачи электростатики — вычисления величин, характеризующих поле заданной системы зарядов на проводниках. Возможны два варианта этой задачи.

1) Заданы значения потенциалов проводников и требуется вычислить напряженность поля в пространстве между проводниками и распределение зарядов на них. Если все поле находится в однородной среде, то задача сводится к нахождению аналитического вида функции  $\varphi$ , которая: а) удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$  в объеме, ограниченном поверхностями проводников; б) на бесконечности равна нулю; в) принимает заданные значения  $\varphi_i$  на поверхности проводников.

2) Заданы значения зарядов на проводниках и требуется вычислить потенциалы проводников, плотность зарядов на их поверхностях и напряженность поля в однородной среде между проводниками. Задача сводится к нахождению функции  $\varphi$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа в точках среды между проводниками, равна нулю на бесконечности, принимает на поверхности проводников некоторые постоянные значения  $\varphi_i$  (не заданные) и удовлетворяет на поверхности проводников интегральному соотношению

$$-\epsilon \epsilon_0 \oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q_i, \quad (18.4)$$

где  $q_i$  — заряд  $i$ -го проводника,  $n$  — внешняя нормаль. Равенство (18.4) представляет собой преобразованную запись теоремы Остроградского — Гаусса в интегральной форме (с учетом равенства  $E_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ).

Важное значение при решении задач имеет теорема единственности решений уравнений электродинамики. В приложении к электростатике эта теорема утверждает, что при достаточной полноте данных решаемой задачи, дополненных определенными граничными условиями, ей соответствует единственное решение. Короче: если найдено каким-либо образом решение основной задачи электростатики, то оно единственное.

Докажем эту теорему для сформулированного выше первого типа задач, применяя прием доказательства от противного. Допустим существование двух решений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и рассмотрим их разность  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Используем первую формулу Грина:

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Полагая  $\psi = \varphi$  и учитывая, что  $\Delta \varphi = 0$ , имеем:

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (18.5)$$

Естественно, что левый интеграл надо брать по всему объему пространства между проводниками, правый — по поверхности всех проводников. На поверхности  $S$  каждого проводника  $\varphi = 0$ , поскольку функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют на этой поверхности по условию одинаковые значения; отсюда получим:

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dV = 0.$$

Здесь подынтегральная функция произвольна и поэтому  $\text{grad } \varphi = 0$  во всех точках поля, что означает  $\varphi = \text{const}$ .

Поскольку на поверхности проводников  $\varphi = 0$ , то и во всех точках пространства  $\varphi \equiv 0$ , т. е.  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ .

Выше уже указывалось на сложность реальных задач по вычислению напряженности полей при наличии системы проводников и неоднородных диэлектриков разной формы и размеров.

Из курсов физики читатели часто выносят представление, будто влияние диэлектрика на величину поля можно всегда учесть введением коэффициента  $\epsilon$ , показывающего, во сколько раз напряженность поля убывает по сравнению с напряженностью поля тех же зарядов в вакууме. Это справедливо, однако, только в том случае, если все поле заполнено однородным диэлектриком ( $\epsilon = \text{const}$ ).

В реальных условиях надо учитывать поляризацию обычно неоднородных диэлектриков и распределения индуцированных зарядов на проводниках. На первичное поле с потенциалом  $\varphi_0$ , вызывающее поляризацию и появление индуцированных зарядов, накладывается дополнительное поле  $\varphi'$  связанных и индуцированных зарядов. Таким образом возникает результирующее поле с потенциалом  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ , которым поддерживается окончательная поляризация диэлектриков и распределение индуцированных зарядов на проводниках.

При заполнении части первичного поля однородным диэлектриком, а тем более при наличии в поле неоднородных диэлектриков напряженность результирующего поля в отдельных точках может стать как больше, так и меньше напряженности первичного поля в этих точках. В качестве примера, иллюстрирующего

это положение, рассмотрим классическую задачу о диэлектрическом шаре радиуса  $a$ , имеющего проницаемость  $\epsilon_1$  и помещенного в неограниченный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon_2$  при однородном первичном поле  $E_0$ . На рисунке 35 силовые линии вторичного поля поляризованного шара изображены штриховыми линиями (при условии  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ), при этом на правой границе раздела возникает результирующий положительный связанный заряд с поверхностной плотностью

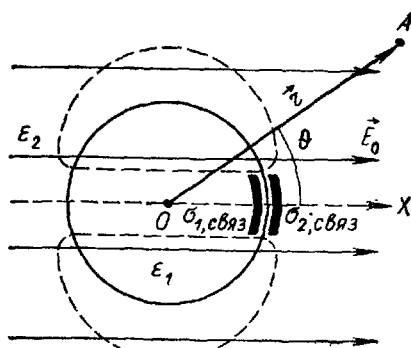


Рис. 35

$$(+\sigma_{1, \text{связ}} - \sigma_{2, \text{связ}}) > 0.$$

Сформулируем граничные условия, которым должно удовлетворять решение задачи. На поверхности шара (при  $r = a$ ) для результирующих потенциалов и их производных имеем:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (a)$$

$$\epsilon_1 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (b)$$

(индексы 1 и 2 относятся к смежным точкам внутри и вне шара). Первое из равенств обеспечивает непрерывность тангенциальных составляющих результирующей напряженности на поверхности шара (17.8), а второе выражает непрерывность нормальных составляющих вектора индукции (17.6). Помимо этого значение потенциала в любой точке результирующего поля должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (в)$$

Из теоремы единственности решений вытекает, что решение, удовлетворяющее этим граничным условиям, будет единственным.

Направим ось  $x$  параллельно вектору  $\vec{E}_0$  через центр шара  $O$  и примем плоскость, содержащую точку  $O$  и расположенную перпендикулярно линиям поля, за эквипотенциальную поверхность  $\varphi = 0$ .

Учитывая осевую симметрию поля, решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_1 x, \\ \varphi_2 &= -E_0 x + E_0 \frac{k}{r^2} \frac{x}{r} = -E_0 x + E_0 \frac{k}{r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Тем самым высказывается предположение, что внутри шара результирующее поле однородно и  $E_1 = E_x$ . Во внешнем пространстве на первичное поле, имеющее потенциал  $(-E_0 x)$ , накладывается поле поляризованного шара, потенциал которого на боль-

них расстояниях имеет вид потенциала поля диполя с моментом  $4\pi\epsilon_0 E_0 k$ , расположенного в центре шара (ср. § 11).

Легко проверить, что выражения (18.6) удовлетворяют уравнению Лапласа. Соответствующим выбором значений постоянных  $E_1$  и  $k$  следует удовлетворить условиям (а) и (б) на границе шара. Произведя замену  $x = r \cos \theta$ , можно записать:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -E_1 r \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 \left( r - \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta.\end{aligned}$$

Наложение граничных условий (при  $r = a$ ) приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}E_1 &= E_0 \left( 1 - \frac{k}{a^3} \right), \\ \epsilon_1 E_1 &= \epsilon_2 E_0 \left( 1 + \frac{2k}{a^3} \right).\end{aligned}$$

Исключая  $k$ , получим:

$$E_1 = E_0 \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} = E_0 \left( 1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \right); \quad k = a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}. \quad (18.7)$$

При  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  результирующая напряженность поля внутри шара меньше напряженности первичного поля, а при  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  имеет место обратное явление. Если шар помещен в вакуум ( $\epsilon_2 = 1$ ), то напряженность поля внутри шара оказывается в  $\frac{2 + \epsilon_1}{3}$  раза меньше  $E_0$ . Поле поляризованного шара во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент  $4\pi\epsilon_0 E_0 a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}$ .

Переход к случаю проводящего шара радиуса  $a$  в однородном поле  $E_0$  легко осуществить, приняв для шара  $\epsilon_1 = \infty$ . Следовательно, поле  $E_1$  внутри шара отсутствует, а поле во внешнем пространстве вычисляется как поле диполя, имеющего момент  $4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$  и помещенного в центре шара.

## § 19. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Найдем поле произвольной системы объемных зарядов в точках, расположенных на большом расстоянии от зарядов, исходя из формулы для потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (19.1)$$

где  $V$  — область пространства, в которой находится система зарядов. Наибольший линейный размер этой области обозначим через  $d$ .

Начало координат  $O$  (рис. 36) выберем где-либо в пределах объема  $V$ , радиус-вектор, направленный в точку наблюдения  $A$ , обозначим через  $\vec{R}_0(x_1, x_2, x_3)$ , а радиус-вектор точки истока  $M$  с элементарным зарядом  $\rho dV$  через  $\vec{r}'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Нас по условию будут интересовать только участки поля, для которых

$$R_0 \gg d. \quad (19.2)$$

Разложим функцию  $\frac{1}{r}$ , входящую в формулу (19.1), в ряд Тейлора по степеням  $\xi_i$  вблизи начала координат  $O$ :

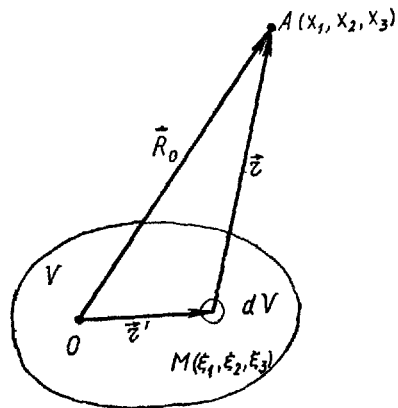


Рис. 36

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \frac{1}{R_0} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \xi_i \xi_k \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} + \dots \end{aligned} \quad (19.3)$$

При подстановке этого разложения в (19.1) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left\{ \frac{\int \rho dV}{R_0} + \sum \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \cdot \int \xi_i \rho dV + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \int \xi_i \xi_k \rho dV + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Последнее выражение можно переписать иначе:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n, \quad (19.5)$$

где последнее слагаемое  $\varphi_n$  прямо пропорционально  $\frac{1}{R_0^n}$ .

Первое слагаемое  $\varphi_1$  выражает потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат и равного алгебраической сумме всех зарядов системы.

Второе слагаемое

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \int \xi_i \rho dV \quad (19.6)$$

допускает простую интерпретацию. Вычислим выражение в квадратных скобках:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} = - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} \Big|_{r=R_0} = \frac{x_i}{R_0^3}, \quad (19.7)$$

где  $\frac{\partial r}{\partial \xi_i}$  находят дифференцированием по  $\xi_i$ :

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2.$$

В свою очередь, интеграл  $\int \xi_i \rho dV$  можно рассматривать как соответствующую составляющую  $P_i$  вектора

$$\vec{P} = \int \vec{r}' \rho dV. \quad (19.8)$$

Из соотношений (19.7) и (19.8) имеем:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{R_0^3} P_i = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}. \quad (19.9)$$

Сопоставляя это выражение с (11.5), убеждаемся, что  $\varphi_2$  представляет собой потенциал поля электрического диполя с моментом  $\vec{P}$ , помещенного в начале координат. Соответственно потенциал  $\varphi_2$  называют дипольным потенциалом системы, а вектор  $\vec{P}$  — дипольным моментом системы.

Третий член разложения (19.4) имеет вид

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R_0} \cdot \int \xi_i \xi_k \rho dV \right\}. \quad (19.10)$$

Эту часть потенциала называют квадрупольным моментом системы. Квадруполем называют систему четырех зарядов  $(+q, -q, +q, -q)$ , расположенных в вершинах параллелограмма (рис. 37).

Таким образом, потенциал произвольной системы зарядов на большом расстоянии может быть представлен в виде суммы потенциалов точечного заряда, диполя, квадруполя и т. д. Этот метод широко применяется в теории и известен под названием разложения по мультиполям.

## § 20. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ СО СТОРОНЫ ПОЛЯ

На элементарные заряды, как свободные, так и связанные, со стороны электрического поля действуют механические силы, называемые иногда пондеромоторными силами.

При электростатическом равновесии зарядов эти силы приложены в конечном счете к заряженным или поляризованным телам. В связи с тем что взаимно отталкивающиеся элементарные заряды не могут покинуть уединенный проводник, к поверхности проводника приложены силы, стремя-

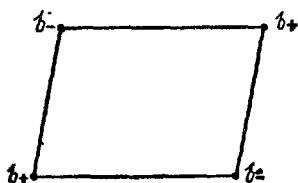


Рис. 37.

щиеся его растянуть. Подобные силы приложены и к поверхности неупругого проводника, находящегося в электростатическом поле, заполненном однородным диэлектриком. На элемент поверхности проводника  $dS$  действует сила

$$df = \sigma(E - E')dS, \quad (20.1)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов элемента  $dS$ ,  $E$  — напряженность результирующего поля с внешней стороны проводника около элемента  $dS$ , обусловленного всеми зарядами,  $E'$  — напряженность поля, обусловленного зарядом элемента  $dS$  в прилегающих к нему точках (рис. 38).

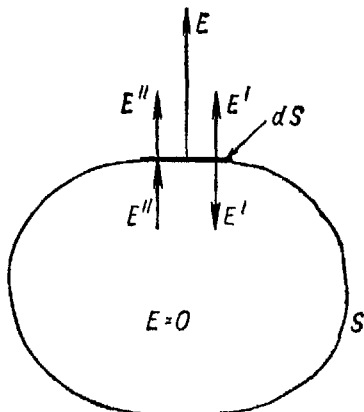


Рис 38

В формуле (20.1) фигурирует разность напряженностей  $E - E'$ , поскольку заряд  $\sigma dS$  сам на себя не действует. Обозначим через  $E''$  напряженность поля в точках элемента поверхности  $dS$ , обусловленного всеми зарядами, кроме заряда  $\sigma dS$ . В двух смежных точках, лежащих по разные стороны элемента  $dS$ , поле  $E''$  этих зарядов одинаково. Запишем два равенства:

$$\left. \begin{aligned} E' + E'' &= E, \\ E' - E'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.2)$$

Физический смысл первого равенства прост: напряженность результирующего поля около элемента  $dS$  складывается из напряженностей двух полей — поля элементарного заряда  $\sigma dS$  и поля всех остальных зарядов. Второе равенство означает, что внутри проводника поля нет. Из соотношения (20.2) вытекает:

$$E' = E'' = \frac{1}{2} E,$$

откуда элементарная сила:

$$df = \frac{\sigma E}{2} dS.$$

Поскольку плотность свободных зарядов  $\sigma = \epsilon \epsilon_0 E_n$ , а  $E_n = E$ , имеем:

$$df = \epsilon \epsilon_0 \frac{E^2}{2} dS. \quad (20.3)$$

При условии однородности поля на единицу поверхности проводника действует сила, численно равная

$$p = \frac{df}{dS} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (20.4)$$

которую называют поверхностной плотностью сил. Она направлена по нормали к поверхности и по модулю равна плотности энергии поля  $\frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ . Общую силу  $\vec{F}$ , действующую на проводник, находят интегрированием по всей поверхности проводника:

$$\vec{F} = \epsilon\epsilon_0 \oint_S \vec{n} \frac{E^2}{2} dS, \quad (20.5)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали. В случае одного уединенного заряженного проводника  $\vec{F} = 0$ .

Иногда задачу вычисления сил поля решают проще через выражение для энергии  $W$  системы проводников как функции координат. Пусть при бесконечно малом перемещении одного проводника изменяется только одна координата, которую обозначим  $q$ , а заряды всех проводников при этом не изменяются. Если исключено участие других видов энергии в изменении энергии системы, то работа  $\delta A$  сил поля при элементарном перемещении  $dq$  производится целиком за счет убыли энергии поля  $\delta W$ :

$$\delta A = -\delta W_e, \quad (20.6)$$

где индекс  $e$  означает неизменность зарядов при изменении энергии. Поскольку  $\delta W_e = \frac{\partial W_e}{\partial q} dq$ , то

$$\delta A = -\frac{\partial W_e}{\partial q} dq. \quad (20.7)$$

Используем формулу механики

$$\delta A = Q_q dq, \quad (20.8)$$

где  $Q_q$  — обобщенная сила, соответствующая координате  $q$ . Отсюда

$$Q_q = -\frac{\partial W_e}{\partial q}. \quad (20.9)$$

Если  $q$  является координатой в прямоугольной системе координат, то формула (20.9) выражает проекцию силы на направление  $q$ ; если  $dq$  означает элементарный угол поворота проводника вокруг некоторой оси, то (20.9) определяет момент сил поля относительно этой оси (см. упр. 17).

Рассмотрим вкратце задачу вычисления сил, действующих на диэлектрик в электростатическом поле. Обозначаем через  $\vec{f} dV$  силу, действующую на элемент объема  $dV$  диэлектрика;  $\vec{f}$  — объемная плотность сил. Опуская вычисления, запишем их окончательный результат:



$$\vec{f} = \rho \vec{E} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{\epsilon_0}{2} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right), \quad (20.10)$$

где  $\tau$  — плотность диэлектрика. Первый член  $\vec{f}_1 = \rho \vec{E}$  выражает плотность силы, действующей на свободные электрические заряды. Другая часть

$$\vec{f}_2 = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{\epsilon_0}{2} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right)$$

отлична от нуля только в диэлектриках. Член  $\left( -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \text{grad } \epsilon \right)$  появляется только в неоднородных диэлектриках; на границе диэлектрика с вакуумом он выражает плотность силы, направленной по нормали к поверхности диэлектрика и втягивающей диэлектрик в вакуум. Широко известные и рассматриваемые во всех школьных учебниках опыты электростатики (притяжение заряженными телами бумажек, бузиновых шариков и др.) объясняются именно этой силой. Притяжение поляризованного поля диэлектрика к заряженному телу можно также объяснить его втягиванием в область больших напряженностей поля (поскольку у диэлектрика появляется индуцированный дипольный момент). На школьном уровне притяжение бумажки к эбонитовой палочке объясняется различием по знаку и модулю сил взаимодействия зарядов палочки со связанными зарядами, появляющимися при поляризации на противоположных сторонах бумажки. Член  $\frac{\epsilon_0}{2} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right)$  характеризует распределение сил в объеме диэлектрика; он ответствен за явление электрострикции.

## Упражнения

16. Найдите потенциал поля объемно заряженного шара радиуса  $a$  при  $\rho = \text{const}$ ,  $\epsilon = \text{const}$  внутри и вне шара, исходя из дифференциального уравнения для потенциала (уравнения Пуассона — Лапласа).

У к а з а н и е. Следует воспользоваться сферической системой координат. При определении четырех постоянных интегрирования следует использовать свойства потенциала и его первой производной  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -E$  при объемном распределении зарядов.

17. Сопоставьте величины электрических энергий уединенных шаров радиуса  $a$  при  $\epsilon = 1$  в случае равномерного распределения заряда  $Q$ : 1) по поверхности, 2) по объему, исходя из уравнения (15.5) и решения упражнения 16.

18. Найдите энергию диполя ( $\vec{p} = \text{const}$ ) во внешнем однородном поле.

При исследовании решения рассмотрите устойчивость обоих положений равновесия диполя, опираясь на принцип минимума потенциальной энергии.

19. Найдите действующий на диполь вращающий момент, исходя из выражения для энергии диполя во внешнем однородном поле.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой (20.9).

## II. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### § 21. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Как указывалось выше, электростатическое поле вызывает в проводниках перемещение свободных зарядов (ток) до тех пор, пока поле перераспределившихся зарядов не скомпенсирует первичное поле; при этом сами заряды займут в проводниках определенное положение. Отсюда вытекает, что для поддержания непрерывного течения зарядов в проводнике в нем должно постоянно существовать электрическое поле\*. Такое электрическое поле уже не является электростатическим; постоянное во времени электрическое поле, вызывающее в проводнике постоянный электрический ток (т. е. ток, одинаковый в любом поперечном сечении неразветвленной цепи), принято называть стационарным полем. Наличие в проводнике стационарного электрического поля равносильно существованию постоянной разности потенциалов на концах проводника, поэтому обычно говорят, что для существования постоянного тока в проводнике нужно создать и поддерживать на его концах постоянную разность потенциалов (постоянное напряжение).

Рассмотрим процесс установления электрического тока в цепи. Пусть цепь разомкнута с помощью двухполюсного рубильника (рис. 39, а). В верхней



Рис. 39.

части линии оба провода заряжены и между ними существует разность потенциалов (имеется статическое поле). При включении рубильника электрическое поле распространяется вдоль линии со скоростью, близкой к скорости света (рис. 39, б).

Вследствие большой скорости распространения поля заряды (при небольшой протяженности линии) приводятся полем в упорядоченное движение

\* Это требование не относится к случаю тока в замкнутой сверхпроводящей цепи.

почти одновременно во всей линии. При этом конкретные носители тока в металлах (электроны проводимости) имеют очень небольшую скорость упорядоченного движения—порядка миллиметра в секунду; полезно сопоставить эту величину со средней скоростью хаотического (теплого) движения электронов проводимости в металлах, равной при комнатной температуре около 1000 км/с. После кратковременного переходного режима (длительность которого зависит от сопротивления и индуктивности линии) в проводах цепи и в окружающем их пространстве устанавливается постоянное во времени поле—стационарное (иногда его называют кулоновским стационарным полем).

Как уже указывалось, электрическое поле в цепи должно непрерывно поддерживаться извне, иначе говоря, для совершения работы непрерывного перемещения зарядов необходим постоянный источник энергии неэлектростатического происхождения (механический, тепловой, химический и т. д.). В этом источнике должно происходить непрерывное превращение какого-либо вида энергии в электрическую. Такой процесс протекает в источниках электродвижущей силы; этими источниками создается поле, называемое в силу своей неэлектростатической природы сторонним полем. Роль этого стороннего поля заключается в том, чтобы непрерывно поддерживать стационарный режим в цепи. При этом режиме на поверхности проводников, составляющих цепь, сосредоточены заряды, плотность которых, несмотря на их движение, в каждой данной точке проводника со временем не изменяется.

Внутри проводников и вне их локализовано стационарное поле, движущее заряды как вдоль поверхности, так и по всему сечению проводника. На рисунке 40 наглядно показаны распределение поверхностных зарядов и конфигурация силовых линий в поле тока. Цепь изображена в виде толстого кольца, в зазор которого включен источник электродвижущей силы, поддерживающей между зажимами  $A$  и  $B$  разность потенциалов. Внутри проводника силовые линии имеют форму окружностей, concentрических с проводником. В окружающем пространстве силовые линии расположены под углом к проводнику.

Таким образом, вектор  $\vec{E}$  имеет на поверхности проводника нормальную и касательную составляющие. Нормальная составляющая при обходе цепи (см. рис. 40) по часовой стрелке по мере удаления от источника убывает, в средней части проходит через нуль, а справа меняет

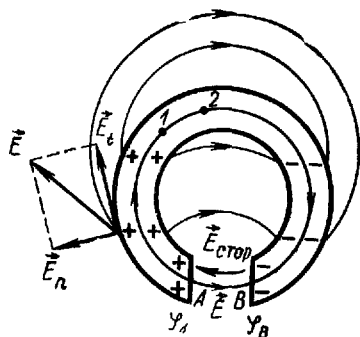


Рис. 40

свое направление (входит в проводник). Соответственно левая часть проводника заряжена положительно, правая — отрицательно.

Источник электродвижущей силы, а следовательно, и стороннее поле, действует только на участке  $BA$ ; благодаря ему положительные заряды перемещаются от более низкого потенциала  $\varphi_B$  к более высокому  $\varphi_A$  против стационарного поля, направленного здесь от  $A$  к  $B$ .

Между любыми двумя точками проводника, не лежащими в одном и том же поперечном сечении (например, между точками  $1$  и  $2$  на рис. 40), существует разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (напряжение  $U$ ), которая математически определяется криволинейным интегралом

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = - \int_2^1 E_t dt = \int_1^2 E_t dt.$$

Учитывая это соотношение, записываем закон Ома для участка цепи в интегральной форме:

$$U = \int_1^2 E_t dt = IR, \quad (21.1)$$

где  $I$  — сила тока в цепи,  $R$  — активное (омическое) сопротивление участка цепи между точками  $1$  и  $2$ .

Выражение (21.1) справедливо для участка цепи, в котором действует только стационарное поле и нет источников электродвижущей силы. Между тем, часто приходится иметь дело с участками цепи с включенными источниками сторонних ЭДС. Пусть, например, в участок цепи включен под зарядку аккумулятор. Закон Ома для этого участка цепи записывается так:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_{\text{стор}}}{R}, \quad (21.2)$$

где  $\mathcal{E}_{\text{стор}}$  — электродвижущая сила включенного аккумулятора. В общем случае знак перед  $\mathcal{E}_{\text{стор}}$  может быть и положительным, поэтому

$$I = \frac{U \pm \mathcal{E}_{\text{стор}}}{R}. \quad (21.3)$$

С электродвижущей силой  $\mathcal{E}_{\text{стор}}$  связано стороннее поле с напряженностью  $\vec{E}_{\text{стор}}$ , причем

$$\mathcal{E}_{\text{стор}} = \int_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \int_l E_{t, \text{стор}} dl, \quad (21.4)$$

где  $l$  — участок цепи, в котором действует ЭДС. С учетом выражений (21.4) и (21.1) можно переписать закон Ома для участка цепи со сторонней ЭДС (21.3) следующим образом:

$$IR = \int_l (E_t dl + E_{t, \text{стор}} dl). \quad (21.5)$$

Рассмотрим циркуляцию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_{\text{стор}}$  по замкнутому контуру цепи (содержащей источник и внешнюю цепь). Стационарное поле образовано зарядами и является потенциальным полем, поэтому циркуляция электрического вектора стационарного поля равна нулю. В самом деле, при определении циркуляции вектора  $\vec{E}$  вдоль цепи (см. рис. 40) мы обходим внешнюю цепь на пути  $AB$  по полю, а затем участок  $BA$  против поля кулоновских сил. Для всей цепи, с учётом ее полного сопротивления  $R+r$  (где  $r$  — сопротивление источника сторонней ЭДС), закон Ома записывается в виде

$$I(R+r) = \oint_L (E_t dl + E_{t, \text{стор}} dl) = \oint_L E_{t, \text{стор}} dl = \mathcal{E}_{\text{стор}}. \quad (21.6)$$

Отсюда вытекает определение ЭДС как циркуляции вектора  $\vec{E}_{\text{стор}}$  по замкнутой цепи или как полного падения напряжения на сопротивлении  $R$  внешней цепи и на сопротивлении  $r$  источника:

$$\mathcal{E} = IR + Ir. \quad (21.7)$$

Здесь  $IR = U$  представляет собой напряжение на зажимах источника,  $Ir$  — потеря напряжения внутри источника. Как известно,  $U$  зависит от нагрузки, т. е. от величины тока. При уменьшении внешнего сопротивления (т. е. при росте нагрузки) возрастает потеря напряжения внутри источника  $Ir$ , и, поскольку ЭДС исправно действующего источника практически неизменна, соответственно убывает  $U = IR$ .

## § 22. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Как в практических приложениях, так и в теории весьма важное значение имеет понятие плотности тока (ток, протекающий через единицу поперечного сечения проводника). Пусть  $S_0$  — поперечное сечение однородного проводника (рис. 41), тогда при постоянном токе плотность тока определяется как частное:

$$j = \frac{I}{S_0}. \quad (22.1)$$

В общем случае неравномерного распределения тока по площади  $S_0$  надо от частного (22.1) перейти к производной:

$$j = \frac{dI}{dS_0}. \quad (22.2)$$

Выражения (22.1) и (22.2) определяют численное значение плотности тока; плотность тока  $\vec{j}$  — вектор, направление которого совпадает с направле-

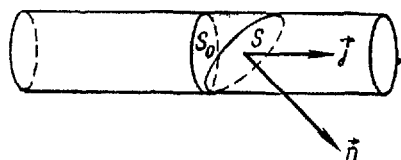


Рис. 41

нием скорости положительных зарядов; если  $\vec{n}_0$  — единичный вектор, направленный по току и, следовательно, перпендикулярный к  $S_0$ , то

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_0} \vec{n}_0. \quad (22.3)$$

Представим себе в том же проводнике произвольное сечение  $S$  (см. рис. 41) с нормалью  $\vec{n}$ . Очевидно, что  $S_0 = S \cos(\vec{j}, \vec{n})$ , а при переходе к элементам поверхности:  $dS_0 = dS \cos(\vec{j}, \vec{n})$ , поэтому выражение (22.2) можно преобразовать:

$$dI = j dS_0 = j dS \cos(\vec{j}, \vec{n}) = j_n dS. \quad (22.4)$$

Значение тока (силу тока), проходящего через произвольную поверхность, находим интегрированием по всей поверхности:

$$I = \int_S j_n dS. \quad (22.5)$$

Поле вектора плотности тока изображают линиями, называемыми для краткости линиями тока. В каждой точке этой линии вектор  $\vec{j}$  направлен по касательной.

Понятие плотности тока позволяет придать закону Ома новую форму. Выделим в поле тока (рис. 42) элементарный прямой цилиндр длиной  $\Delta l$ , основания которого  $\Delta S_0$  перпендикулярны  $\vec{j}$ . Если его рассматривать как участок проводника с сопротивлением  $\Delta R$ , то для него закон Ома запишется в виде

$$\Delta I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta R}.$$

Считаем поле на малом участке  $\Delta l$  однородным. Используя известную формулу, определяющую сопротивление проводника,  $\Delta R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S_0}$ , получим из предыдущих формул выражение для тока через цилиндр:

$$\Delta I = \frac{E \Delta l}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta S_0}} = j \Delta S_0.$$

После сокращений имеем:

$$j = \frac{E}{\rho} = \gamma E, \quad (22.6)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление,  $\gamma$  — удельная электропроводность вещества проводника.

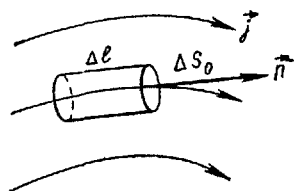


Рис. 42

В изотропных средах вектор плотности тока и вектор напряженности по направлению совпадают, поэтому можно перейти к векторной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (22.7)$$

Это соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме. Оно не содержит дифференциалов, а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника. В общем случае в рассматриваемой точке проводника может действовать и стороннее поле  $\vec{E}_{\text{стор}}$ , и тогда закон Ома в дифференциальной форме приобретает вид

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (22.8)$$

### § 23. ДРУГИЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Часто приходится применять другие законы постоянного тока в дифференциальной форме. Найдем дифференциальную форму закона Джоуля — Ленца:

$$Q_m = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (23.1)$$

где  $Q_m$  — количество теплоты, выделенное током  $I$  в проводнике с сопротивлением  $R$  за 1 с; все величины здесь выражены в единицах одной и той же системы (СИ или СГС), в силу чего отсутствует множитель 0,24.

Обозначим через  $q_m$  количество теплоты, выделенное током в единице объема за единицу времени. Очевидно,

$$q_m = \frac{Q_m}{V},$$

где  $V$  — объем проводника, или в общем случае:

$$\left. \begin{aligned} q_m &= \frac{dQ_m}{dV}, \\ Q_m &= \int_V q_m dV. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Вычислим количество теплоты  $\Delta Q_m$ , выделившееся в элементарном цилиндре объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S_0$ . В соответствии с выражением (23.1) имеем:

$$\Delta Q_m = j \Delta S_0 E \Delta l,$$

откуда

$$q_m = \frac{\Delta Q_m}{\Delta V} = \frac{j \Delta S_0 E \Delta l}{\Delta S_0 \Delta l} = jE. \quad (23.3)$$

Мы получили закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме, который можно также записать, используя закон Ома (22.7):

$$q_m = jE = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho} = \rho j^2 = \frac{j^2}{\gamma}. \quad (23.4)$$

Для правильного перехода от интегральной формы (23.1) к дифференциальной полезно помнить, что аналогом  $I$  является  $j$ , аналогом  $U \rightarrow E$ , аналогом  $R \rightarrow \rho$ . Следует отметить, что закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме относится к количеству теплоты, выделяемому в единице объема. Обычный для дифференциальных соотношений переход к характеристике явления в «точке» лишен смысла (джоулева теплота «в точке» равна нулю).

Перейдем к первому правилу Кирхгофа: в каждой точке разветвления (узла) алгебраическая сумма токов равна нулю ( $\Sigma I = 0$ ). Вспомним, что это правило выведено из закона сохранения электрических зарядов и, далее, из того факта, что в цепях постоянного тока нигде не происходит накопления зарядов.

Фиксируем в поле тока замкнутую поверхность. В ограничиваемый ею объем за данный промежуток времени втекает такое же количество электричества, сколько из него вытекает за то же время; иначе говоря, алгебраическая сумма токов через замкнутую поверхность при стационарном токе равна нулю. Учитывая уравнение (22.5), можно придать первому правилу Кирхгофа следующий вид:

$$\oint_S j_n dS = 0, \quad (23.5)$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности  $S$ .

Преобразуем этот интеграл по формуле Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \quad (23.6)$$

где  $V$ —объем проводника, охватываемый замкнутой поверхностью  $S$ . Поскольку равенство (23.6) имеет место при произвольных объемах, из него следует:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (23.7)$$

Соотношение (23.7) выражает первое правило Кирхгофа в дифференциальной форме; обычно его называют уравнением непрерывности стационарного тока. Из него вытекает, что линии тока при стационарном токе не имеют источников, т. е. они замкнуты сами на себя.

Выражение (23.7) справедливо, как указывалось, только для стационарных токов. В случаях включения, выключения и вообще изменения тока, а также ко всем видам переменного тока оно уже неприменимо, так как в указанных случаях происходит либо накопление, либо растекание зарядов. Все провода линий передачи и электрических устройств (потребителей) обладают некоторой емкостью, которая при включении тока заряжается, при выключении разряжается. При переменном токе процессы зарядки и разрядки чередуются периодически.



Ток разрядки какой-либо емкости в соответствии с законом сохранения заряда равен убыли заряда за единицу времени:

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \quad (23.8)$$

Охватим мысленно эту емкость (или ее часть) замкнутой поверхностью  $S$  и перейдем к общему случаю объемного распределения заряда  $Q = \int_V \rho dV$ . При разрядке через поверхность  $S$  вытекает наружу объемный ток  $I = \oint_S j_n dS$ . Таким образом

$$\oint_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (23.9)$$

Преобразуя левую часть по теореме Остроградского—Гаусса и приравнявая подынтегральные выражения, после внесения символа производной под знак интеграла получим выражение

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (23.10)$$

которое представляет собой дифференциальную запись уравнения непрерывности тока. Оно выражает закон сохранения заряда и показывает, что ток из единицы объема равен убыли заряда этого объема за единицу времени. При изменении знаков слева и справа из уравнения (23.10) следует, что ток, втекающий в единицу объема, равен приращению заряда этого объема за единицу времени.

### Упражнения

20. Пространство между обкладками шарового конденсатора (радиусами  $r_1$  и  $r_2$ ) заполнено проводящей средой с удельной электрической проводимостью  $\gamma$ . Найдите ток, проходящий через конденсатор, при условии постоянства разности потенциалов на обкладках ( $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ ), и омическое сопротивление шарового слоя.

21. Вычислите сопротивление заземления при наличии сферического заземлителя с радиусом  $r$  (рис. 43), зарытого под землю (электропроводность почвы  $\gamma = \frac{1}{\rho}$ ).

Указание. Исходите из решения упражнения 20. При исследовании решения найдите омическое сопротивление полусферического заземлителя, погруженного вровень с поверхностью почвы.

22. Покажите, что сопротивление заземлителя линий связи практически не зависит от расстояния между станциями (рассмотрите два сферических заземлителя радиуса  $a$ , погруженных в неограниченную среду с электропроводностью  $\gamma$ ).

Указание. Считайте, что расстояние  $r$  между электродами-шарами весьма велико по сравнению с радиусом шара. При этом условии можно

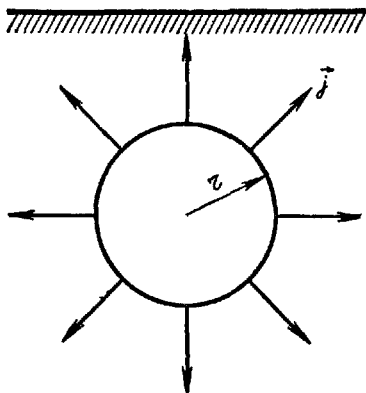


Рис. 43

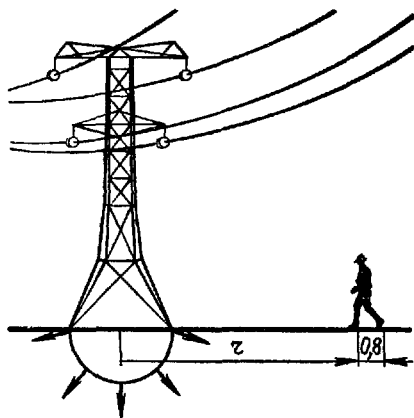


Рис. 44

пренебречь индукционным взаимодействием и считать, что заряды распределены по поверхности шаров равномерно.

23. Вычислите величину шагового напряжения  $U_{\text{ш}}$ , под которым оказывается человек, приближающийся к полусферическому заземлителю (рис. 44). Шаговое напряжение представляет собой разность потенциалов между двумя точками на поверхности почвы, расположенными на расстоянии  $0,8$  м друг от друга (шаг) и лежащими на одном и том же радиусе, проведенном из центра заземлителя.

24. Выведите закон преломления линий тока на границе раздела двух проводников, имеющих различную электропроводность  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

У к а з а н и с. Для определенности считайте  $\gamma_1 = 2\gamma_2$ . Исходите из закона Ома:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . В изотропной среде такой же вид имеют и соотношения между нормальными и тангенциальными составляющими  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ . Необходимо учесть непрерывность касательных составляющих  $\vec{E}_t$ , и нормальной составляющей  $\vec{j}_n$  (что вытекает из уравнения непрерывности стационарного тока). Рекомендуется сделать чертёж,

### III. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

#### § 24. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ. ЗАКОНЫ АМПЕРА И БИО — САВАРА — ЛАПЛАСА

Одним из основных достижений физики XIX в. является установление следующего факта. Подобно тому как с каждым электрическим зарядом, покоящимся в данной системе отсчета, связано электрическое поле, так со всяким движущимся (относительно избранной системы отсчета) зарядом связано помимо электрического поля еще и магнитное, которое, в свою очередь, оказывает силовое воздействие только на движущиеся заряды. Покоящиеся заряды не создают в окружающем пространстве магнитного поля и не испытывают в магнитном поле с его стороны силового воздействия.

Магнитное поле движущихся зарядов (токов) было открыто Эрстедом (1820), когда он обнаружил действие тока на расположенную поблизости магнитную стрелку. Связь между силой тока и напряженностью его магнитного поля устанавливает закон Био—Савара—Лапласа, известный из курса общей физики, где он сформулирован для случая линейных токов. Линейные токи определяются как токи в таких проводниках, у которых линейные размеры сечений (например, диаметры) малы по сравнению с расстояниями от этих сечений до точек наблюдения.

Хорошо известна роль пробного электрического заряда в построении теории электростатического поля. Аналогичную роль играет пробный элемент тока  $idl$ , помещенный для исследования магнитного поля в данную «точку» наблюдения. Здесь буквой  $i$  обозначается пробный линейный ток,  $dl$ —элемент проводника, направленный по току (т. е. по направлению движения положительных зарядов). Связь между силой, с которой магнитное поле действует на пробный элемент тока, внесенный в данную точку, и напряженностью поля в той же точке устанавливает закон Ампера (1775—1836)\*.

Два закона—Ампера и Био—Савара—Лапласа, полученные экспериментально,—образуют основу теории магнитного поля постоянных токов (стационарного магнитного поля).

Из опыта известно, что сила  $d\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует в вакууме на пробный элемент тока, прямо пропор-

\* В курсе физики средней школы вводится другое пробное тело—малая рамка с током; ее взаимодействие с постоянным магнитным полем рассматривается в § 29.

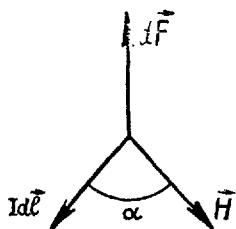


Рис. 45

циональна величине  $idl \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлением  $idl$  и направлением напряженности поля  $\vec{H}$ . Сила  $d\vec{F}$  перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{H}$ . Отношение  $\frac{dF}{idl \sin \alpha}$  однозначно характеризует поле в данной точке, поэтому напряженность поля была определена как величина, пропорциональная этому отношению:

$$H = \frac{1}{\mu_0} \frac{dF}{idl \sin \alpha}, \quad (24.1)$$

где  $\mu_0$  — коэффициент пропорциональности, рассматриваемый ниже.

Направление вектора  $\vec{H}$  определяется условием, что он с векторами  $d\vec{l}$  и  $d\vec{F}$  образует правовинтовую тройку векторов (рис. 45). Это правило известно из курса физики средней школы как правило левой руки. Из выражения (24.1) следует:

$$d\vec{F} = \mu_0 [idl\vec{H}] = \mu_0 i [d\vec{l}\vec{H}]. \quad (24.2)$$

Данная запись выражает закон Ампера: сила, с которой магнитное поле в данной точке действует на пробный элемент тока, прямо пропорциональна векторному произведению элемента тока  $idl$  на напряженность поля  $\vec{H}$  в этой точке.

Как видно из (24.2), закон Ампера может быть использован для вычисления механического воздействия магнитного поля на элемент тока лишь при условии задания напряженности поля  $\vec{H}(x, y, z)$ . Ее можно вычислить по распределению токов в пространстве и координатам точки наблюдения, воспользовавшись законом Био—Савара—Лапласа в дифференциальной форме

$$d\vec{H} = k \frac{[idl\vec{r}]^*}{r^3}, \quad (24.3)$$

где  $d\vec{H}$  — элемент напряженности магнитного поля, обусловленного линейным элементом тока  $idl$  в произвольной точке наблюдения,  $\vec{r}$  — радиус-вектор с началом в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$  местонахождения элемента тока и концом в точке наблюдения  $A(x, y, z)$ ,  $k$  — коэффициент пропорциональности (рис. 46). Из формулы

\* В этом параграфе применяют два буквенных обозначения для линейных токов ( $i$  и  $I$ ): одно — в записи закона Ампера, другое — в записи закона Био—Савара—Лапласа. В дальнейшем изложении это различие не делается.

(24.3) вытекает, что три вектора  $Id\vec{l}$ ,  $\vec{r}$  и  $d\vec{H}$  образуют правую винтовую систему.

Рассматривая совместно законы Ампера и Био—Савара—Лапласа, можно исключить из них  $\vec{H}$  и, измерив  $F$ ,  $i$ ,  $I$ ,  $l$ ,  $r$ , получить одно уравнение связи коэффициентов пропорциональности  $\mu_0$  и  $k$ , причем один из них можно, очевидно, выбрать произвольно. Естественно, что этот выбор надо сделать так, чтобы основные формулы теории магнитного поля принимали простую форму. Одной из основ Международной системы единиц (СИ) является допущение, что коэффициент пропорциональности  $k$  — безразмерная величина, равная  $\frac{1}{4\pi}$ . Тогда закон Био—Савара—Лапласа в СИ принимает вид

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}r]}{r^3}. \quad (24.4)$$

В скалярной форме закон записывается так:

$$dH = \frac{Idl \sin(\widehat{dl, r})}{4\pi r^2}, \quad (24.5)$$

где  $I$  выражено в амперах,  $r$  и  $l$  — в метрах,  $H$  — в амперах на метр (А/м).

Из упомянутой выше связи между  $k$  и  $\mu_0$  следует, что  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  (генри на метр).

В законе Ампера (24.2)  $dF$  выражено в ньютонах,  $i$  — в амперах,  $dl$  — в метрах,  $H$  — в амперах на метр.

В гауссовой системе единиц (СГС) коэффициент пропорциональности  $k = \frac{1}{c}$ , где  $c$  — электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме ( $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ ). Соответственно закон Био—Савара—Лапласа в системе СГС имеет вид:

$$d\vec{H} = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{l}r]}{r^3}, \quad (24.6)$$

где  $H$  выражается в эрстедах (Э),  $I$  — в единицах СГС тока,  $r$  и  $l$  — в сантиметрах. Формулы (24.5) и (24.6) позволяют установить соотношение между единицами напряженности

$$1 \frac{\text{А}}{\text{м}} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Э},$$

грубо приближенно  $1 \text{ Э} \approx 80 \text{ А/м}$ .

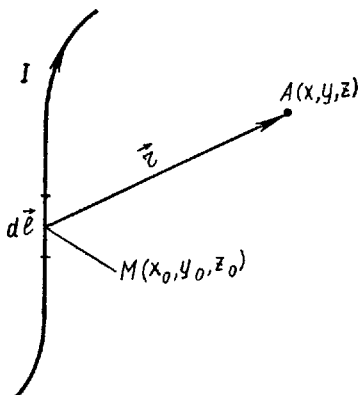


Рис 46

При записи закона Ампера в системе СГС вместо коэффициента пропорциональности  $\mu_0$  появляется другой —  $\frac{1}{c}$  ( $c=3 \cdot 10^{10}$  см/с). Соответственно

$$d\vec{F} = \frac{i}{c} [d\vec{l}\vec{H}], \quad (24.7)$$

где  $F$  выражена в динах,  $i$  — в единицах СГС тока,  $H$  — в эрстедах,  $l$  — в сантиметрах.

Чтобы найти напряженность  $\vec{H}$  результирующего магнитного поля, обусловленного током в проводнике конечной длины  $l$  в произвольной точке (см. рис. 46), надо воспользоваться принципом суперпозиции и произвести интегрирование выражения (24.4) по всей длине проводника:

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l}r}{r^3}. \quad (24.8)$$

При конкретных расчетах по (24.8) надо в общем случае найти три скалярных интеграла:

$$H_x = \frac{i}{4\pi} \int_l \frac{[dy_0(z-z_0) - dz_0(y-y_0)]}{r^3} \text{ и т. д.,}$$

используя определитель при нахождении составляющих векторного произведения по декартовым осям

$$[d\vec{l}r] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \end{vmatrix}$$

$$[d\vec{l}r]_x = dy_0(z-z_0) - dz_0(y-y_0) \text{ и т. д.}$$

При переходе от элементарной «амперовой» силы, с которой поле действует на элемент линейного тока  $Id\vec{l}$ , к силе, действующей на проводник конечной длины с током  $I$ , надо проинтегрировать выражение (24.7) по всей длине проводника  $l$ :

$$\vec{F} = \mu_0 I \int_l [d\vec{l}\vec{H}]. \quad (24.9)$$

Особо простой вид принимает это выражение для случая прямолинейных токов в однородном магнитном поле ( $\vec{H} = \text{const}$ ):

$$F = \mu_0 I H l \sin(\vec{l}, \vec{H}). \quad (24.10)$$

Вычисление напряженностей магнитных полей и амперовых сил, действующих на токи в этих полях, имеет огромное значение при конструировании практически всех устройств и при-

боров электротехники, радиотехники, электроники, атомной физики и т. д.

Выше указывалось, что закон Ампера, представленный в формах (24.2) и (24.9), справедлив только для случая, когда магнитное поле находится в вакууме. При полном или частичном заполнении поля теми или иными магнетиками формулы (24.2) и (24.9) изменяются в связи с намагничиванием среды.

Отметим важную особенность закона Био—Савара—Лапласа: по сравнению с полем в вакууме напряженность поля не изменится, если все поле тока заполнить каким угодно однородным магнетиком. Это положение находит математическое выражение в том, что в закон Био—Савара—Лапласа не входит магнитная проницаемость  $\mu$ . В связи с этим следует еще раз напомнить, что в данной главе рассматриваются магнитные поля постоянных токов.

Метод графического изображения магнитных полей при помощи силовых линий (линий вектора  $\vec{H}$ ) не нуждается в особом обсуждении.

## § 25. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ

Введенное выше понятие линейных токов представляет собой идеализацию; все реальные токи являются объемными токами.

Преобразуем элемент линейного тока в элемент объемного тока. Выберем в поле объемного тока элементарный прямой цилиндр длиной  $d\vec{l}$  с основанием  $dS$ , перпендикулярным току  $d\vec{l}$ , текущему по этому цилиндру (рис. 47). Ввиду малости сечения  $dS$  можно считать  $d\vec{l}$  элементом линейного тока. Исходя из равенства  $d\vec{l} = j dS$ , получим:

$$d\vec{l} d\vec{l} = j dS d\vec{l} = \vec{j} dV, \quad (25.1)$$

где знак вектора перенесен с  $d\vec{l}$  на  $\vec{j}$ . Выражение  $\vec{j} dV$  представляет собой элемент объемного тока.

Используя эту замену, перепишем выражение (24.4) применительно к элементу напряженности магнитного поля, обусловленного элементом объемного тока:

$$d\vec{H} = \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{4\pi r^3} dV. \quad (25.2)$$

Для вычисления напряженности магнитного поля, обусловленного током, текущем в объеме  $V$ , необходимо интегрировать по всему этому объему:

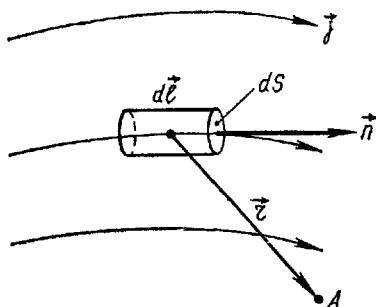


Рис. 47

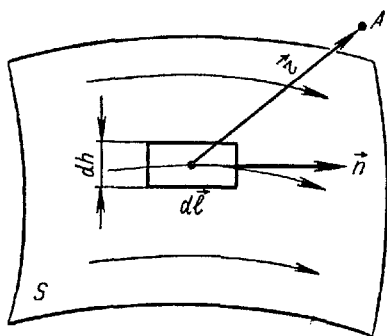


Рис. 48

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{jr}]}{r^3} dV. \quad (25.3)$$

Иногда приходится рассматривать поверхностный ток и соответственно поверхностную плотность тока. Пусть ток течет по поверхности  $S$  (рис. 48). По определению поверхностная плотность тока  $\vec{i}$  представляет собой вектор, совпадающий по направлению с вектором скорости положительных зарядов и численно равный току,

протекающему через отрезок единичной длины, перпендикулярный направлению движения зарядов:

$$\vec{i} = \frac{dI}{dh} \vec{n}, \quad (25.4)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $dh$ .

Преобразуем элемент линейного тока в элемент поверхностного тока:

$$dI dl \vec{n} = \frac{dI dl dh}{dh} \vec{n} = \vec{i} dS \quad (25.5)$$

(знак вектора перенесен с  $dl$  на  $\vec{i}$ ).

Используя эту замену, перепишем выражение (24.4) для поля элемента поверхностного тока:

$$d\vec{H} = \frac{[\vec{i}r]}{4\pi r^3} dS, \quad (25.6)$$

откуда для результирующего поля получаем:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{[\vec{i}r]}{r^3} dS. \quad (25.7)$$

В эти разновидности формул закона Био—Савара—Лапласа также не входит магнитная проницаемость  $\mu$ , т. е. они применимы для вычисления магнитных полей как в вакууме, так и в однородном магнетике, заполняющем все поле. Такая зависимость между токами и напряженностью их магнитного поля напоминает зависимость между электрическими зарядами и вектором электрической индукции (например,  $\text{div } \vec{D} = \rho$ ). Речь идет о некоторой (конечно, формальной) общности свойств векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$ , которая будет уточнена ниже.



В школьном курсе физики вектор напряженности магнитного поля не вводится (не рассматривается и закон Био—Савара—Лапласа).

### Упражнения

25. Найдите напряженность поля прямолинейного постоянного тока конечной длины  $BC = 2l$  (рис. 49).

**У к а з а н и я.** В данном случае все элементы  $d\vec{H}$ , обусловленные отдельными элементами тока  $Id\vec{l}$  в точке наблюдения  $A$ , направлены одинаково (на рис. 49 за плоскость чертежа). Поэтому можно исходить из формулы (24.5) в скалярной записи. Вводимые обозначения ясны из рисунка. Следует произвести замену переменных, выражая их через  $R$  и  $\varphi = \angle(d\vec{l}, \vec{r})$ , а точку  $O$  принять за начало координат.

При анализе решения выполните переход к бесконечно длинному прямолинейному проводнику ( $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ ).

Используйте полученные выражения, записанные в СИ и СГС, как определяющие формулы и дайте определение единиц напряженности.

При каких условиях можно использовать формулу напряженности поля бесконечно длинного прямолинейного тока для вычисления полей прямолинейных токов конечной длины?

26. Найдите напряженность магнитного поля на оси кольцевого тока радиуса  $a$  (рис. 50).

**У к а з а н и е.** Исходите из осевой симметрии поля. На рисунке 50 изображены два элемента тока  $-Id\vec{l}_1$  и  $Id\vec{l}_2$ , расположенные симметрично; геометрическая сумма их напряженностей направлена вдоль оси. На такие пары элементов надо разбить весь кольцевой ток.

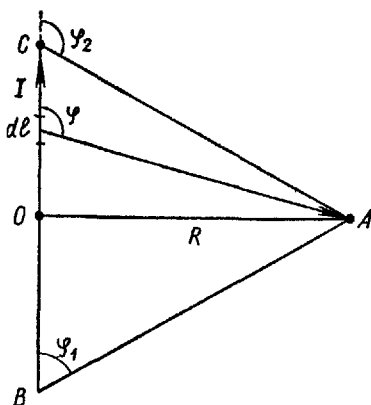


Рис. 49

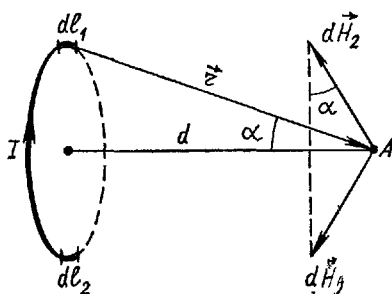


Рис. 50

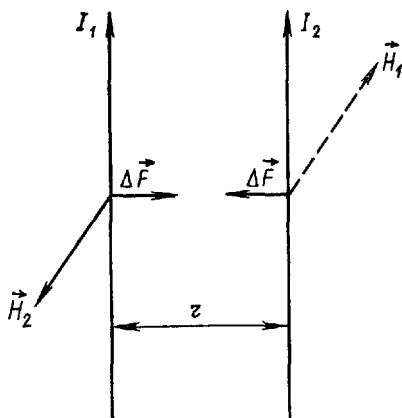


Рис. 51

При исследовании решения перейдите к случаю поля в центре кольцевого тока ( $d=0$ ).

Сопоставьте полученное выражение для напряженности при больших  $d$  с формулой напряженности поля электрического диполя в точках, расположенных на продолжении оси диполя (упр. 1).

27. Найдите силу взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных и одинаково направленных линейных токов  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 51), находящихся в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга (в расчете на 1 м длины).

Указание. Используйте полученное в упражнении 25 выражение для поля бесконечно длинного прямолинейного тока и формулу (24.10) для амперовой силы, учитывая, что напряженность поля  $H_1$  тока  $I_1$  во всех точках проводника с током  $I_2$  одинакова и что  $\angle(\vec{l}_2, \vec{H}_1) = \frac{\pi}{2}$ .

При исследовании решения произведите подстановки  $I_1=I_2=1\text{А}$ ,  $r=1\text{ м}$ ,  $l_2=1\text{ м}$  и сопоставьте результат с определением ампера. Тем самым можно убедиться в правильности указанных выше численных значений коэффициентов пропорциональности в законах Ампера и Био—Савара—Лапласа:  $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\text{ Гн/м}$ ,  $k=\frac{1}{4\pi}$ .

## § 26. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА.

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ (1 УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА)

Метод вычисления напряженности магнитного поля тока на основе закона Био—Савара—Лапласа не является единственным. Ниже будут рассмотрены и другие методы решения этой задачи, позволяющие выявить важные особенности магнитного поля токов.

Пусть  $I$ —ток в длинном прямом проводнике (рис. 52). Рассмотрим циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по силовой линии  $L$ —окружности радиусом  $R$ . Проекция  $H_t$  на касательную к силовой линии в какой-либо точке равна, очевидно, численному значению напряженности, определяемой (см. упр. 25) при достаточно длинном проводнике выражением  $\frac{I}{2\pi R}$ . Поэтому

циркуляция  $\vec{H}$  равна:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} \equiv \oint_L H_t dl = \frac{I}{2\pi R} \oint_L dl = I. \quad (26.1)$$

Отсюда вытекает, что циркуляция  $\vec{H}$  не зависит от радиуса силовой линии. Можно показать, что она не зависит ни от формы контура обхода, ни от формы проводника с током. Если использовать из классической магнетостатики определение напряжен-

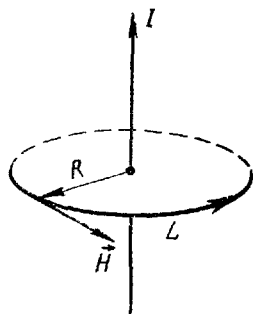


Рис 52

ности магнитного поля как величины, численно равной силе, с которой поле действует на единичный магнитный полюс, то циркуляцию  $\vec{H}$  можно трактовать как работу перемещения единичного полюса по замкнутому пути (здесь просматривается некоторое сходство с циркуляцией вектора  $\vec{E}$ ).

По аналогии с электрической цепью, где циркуляция электрического вектора представляет собой работу перемещения единичного заряда вдоль замкнутой цепи и называется электродвижущей силой, принято называть циркуляцию магнитного вектора  $\vec{H}$  магнитодвижущей силой  $\mathcal{E}_m$ . Поэтому формулу (26.1) можно переписать:

$$\mathcal{E}_m = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (26.2)$$

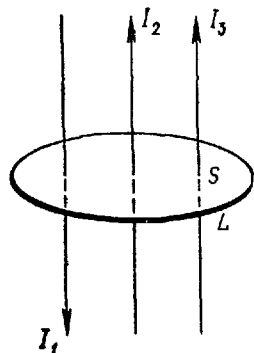


Рис 53

Пусть через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$  (рис. 53), проходит несколько токов  $I_1, I_2, \dots$ . В силу указанных выше свойств циркуляции вектора  $\vec{H}$  выражение (26.2) может быть обобщено:

$$\mathcal{E}_m = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \Sigma I, \quad (26.3)$$

где  $\Sigma I$  — алгебраическая сумма токов, пронизывающих поверхность  $S$ . Последнее выражение часто называют законом полного тока. Для частного случая, когда через данную поверхность протекают  $n$  токов, одинаковых по величине и направлению, имеем:

$$\mathcal{E}_m = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = In. \quad (26.4)$$

В выражениях (26.1—4) имеются в виду линейные токи; очевидно, в общем случае закон полного тока можно обобщить и на случай объемного тока, проведя замену  $\Sigma I = \int_S j_n dS$ :

$$\oint_L H_t dl = \int_S j_n dS. \quad (26.5)$$

Отсюда вытекает принципиальное различие между электростатическим полем и стационарным магнитным полем: в первом случае циркуляция электрического вектора равна нулю, здесь же циркуляция может быть отлична от нуля (в случае, если контур обхода охватывает токи любого вида). Закон полного тока ши-

роко используется для вычисления напряженности магнитного поля токов.

Преобразуем левую часть выражения (26.5) в соответствии с теоремой Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot}_n \vec{H} dS = \int_S j_n dS. \quad (26.6)$$

Выражение (26.6) имеет место при любых размерах и любой ориентации контуров в пространстве, иначе говоря, всегда имеет место равенство нормальных составляющих

$$\operatorname{rot}_n \vec{H} = j_n,$$

откуда вытекает равенство самих векторов:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (26.7)$$

дифференциальное уравнение магнитного поля постоянных токов. Его другое название — I уравнение Максвелла\* для магнитного поля постоянных токов.

Уравнения (26.5) и (26.7) выражают фундаментальное свойство магнитного поля токов, его вихревой характер. Векторные поля в общем случае определяются источниками и вихрями. В то время как электростатическое поле (поле вектора  $\vec{E}$ ) обусловлено источниками, стационарное магнитное поле обусловлено токами, магнитное поле токов определяется вихрями. Как видно из выражения (26.7), вектор объемной плотности тока равен ротору (вихрю) вектора  $\vec{H}$ . Модельно можно представить себе  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$  как вектор, который вызывает вокруг себя завихрение магнитного поля в виде элементарно малых замкнутых силовых линий. Как известно, поле какого-либо вектора считают вихревым, если в нем существуют две такие бесконечно близкие точки, в которых векторы поля имеют прямо противоположные направления. Приближаясь с противоположных сторон к вектору  $\vec{j}$ , мы в пределе переходим к точкам, в которых кривизна линий вектора  $\vec{H}$  становится бесконечно большой. Следовательно, здесь можно найти такие две бесконечно близкие точки (справа или слева от точки с вектором  $\vec{j}$ ), в которых напряженность имеет противоположные направления. Линии магнитного поля тока представляют собой замкнутые линии, они не имеют ни начала, ни конца, иначе говоря, у них нет источников. Математически это выражают уравнением

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (26.8)$$

\* Применяемая здесь и далее «нумерация» уравнений Максвелла получила широкое распространение, главным образом в учебной литературе, однако она не является общепринятой.

строгое обоснование которого будет дано ниже. Существенно, что уравнение (26.8) справедливо только в том случае, если поле токов заполнено однородным магнетиком.

Таким образом, для стационарного магнитного поля токов в однородной среде справедлива система уравнений:

в дифференциальной форме                      в интегральной форме

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, & \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S j_n dS, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, & \int_V \operatorname{div} \vec{H} dV &= \int_S H_n dS = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26,9)$$

Отметим одну важную особенность: в дифференциальном уравнении (26.7) рассматриваются ток и его поле в одном и том же физически (бесконечно малом объеме, в одной точке пространства.

## § 27. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Вычисление напряженности электростатического поля, как было показано выше, существенно облегчается введением потенциала  $\varphi$  и использованием его связи с напряженностью  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Аналогичная зависимость скалярного магнитного потенциала  $\varphi_m$  от напряженности  $\operatorname{grad} \varphi_m = -\vec{H}$  беспредметна, поскольку такая зависимость предполагает наличие потенциальных полей, а следовательно, источников поля (магнитных зарядов).

Для вычисления напряженности магнитного поля токов вводят векторный потенциал. С этой целью преобразуем подынтегральное выражение одной из формул закона Био—Савара—Лапласа, например (25.3). Учитывая равенство  $\operatorname{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$  (§ 11), преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} = - \left[ \vec{j} \operatorname{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) \right] = \left[ \operatorname{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) \vec{j} \right].$$

Индекс  $a$  означает, что точку истока мы считаем неподвижной, а точку наблюдения — подвижной. Используя известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot} (q \vec{a}) = [\operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{a}] + \varphi \operatorname{rot} \vec{a}$$

и полагая  $\varphi = \frac{1}{r}$ ,  $\vec{a} = \vec{j}$ , получим:

$$\text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \left[ \text{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{j} \right] + \frac{1}{r} \text{rot}_a \vec{j}.$$

Поскольку значение вектора  $\vec{j}$  в элементе  $dV$  не зависит от перемещения точки наблюдения, то  $\text{rot}_a \vec{j} = 0$ , в чем легко убедиться при записи составляющих ротора. Действительно, используя обычные обозначения для координат точек истока и наблюдения, имеем для составляющих ротора по оси  $x$ :

$$(\text{rot}_a \vec{j})_x = \frac{\partial j_z(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} - \frac{\partial j_y(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0 \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \left[ \text{grad}_a \left( \frac{1}{r} \right) \vec{j} \right] = \left[ \frac{\vec{j} \vec{r}}{r^3} \right]. \quad (27.1)$$

Учитывая это равенство, преобразуем выражение (25.3) к виду

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) dV. \quad (27.2)$$

Поскольку дифференцирование при вычислении ротора производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводника с током, можно изменить последовательность операций:

$$\vec{H} = \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV \right). \quad (27.3)$$

Если ввести обозначение

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV, \quad (27.4)$$

то уравнение (27.3) принимает вид

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}. \quad (27.5)$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс при символе ротора опускается, поскольку  $A$  всегда является функцией координат точки наблюдения.

Таким образом, напряженность поля может быть представлена в виде ротора некоторого вектора  $\vec{A}$ , называемого векторным потенциалом или вектор-потенциалом магнитного поля. В отличие от скалярного потенциала  $\varphi$ , который вводится на основе энергетических соотношений, векторный потенциал вводится формально-математическим определением (27.4).

Аналогично (27.4) пишут выражения для векторных потенциалов при поверхностном и линейном распределениях токов:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}}{r} dS, \quad (27.6)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\vec{l}}{r}. \quad (27.7)$$

Каждому из интегралов (27.4, 6, 7) соответствуют три скалярных составляющих вида

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_x}{r} dV.$$

Сопоставление выражений для векторного потенциала (27.4, 6, 7) с выражениями для напряженностей (25.3, 7) показывает, что первые выражения проще вторых. Поэтому вычисление напряженности поля токов предпочитают выполнять следующим образом: сначала вычисляют векторный потенциал, от которого потом переходят к напряженности, используя (27.5). Последняя операция легковыполнима (дифференцирование!).

О направлении векторного потенциала можно судить по записи его элемента:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV}{r},$$

т. е. вектор-потенциал параллелен току. Примем без доказательства, что вектор-потенциал при условии конечности объема тел, обтекаемых током, всюду конечен, непрерывен и в бесконечности обращается в нуль (и при различных значениях относительной проницаемости  $\mu$ ). Из векторного исчисления известно, что  $\text{div rot } \vec{a} = 0$ , где  $\vec{a}$  — произвольный вектор; следовательно,

$$\text{div rot } \vec{A} = \text{div} (\mu_0 \vec{H}) = 0,$$

т. е.

$$\text{div } \vec{H} = 0.$$

Таким образом, мы вернулись к выражению (27.3), физический смысл которого уже был выяснен.

Напоминаем, что все приведенные выше формулы записаны для поля в вакууме ( $\mu = 1$ ).

## § 28. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА — ЛАПЛАСА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОТСУТСТВИИ МАГНЕТИКОВ

Иногда задачи по нахождению векторного потенциала решаются проще, если исходить из дифференциального уравнения Пуассона — Лапласа. Выведем его, используя определение векторного

потенциала (27.5) и дифференциальное уравнение поля постоянных токов (26.7). После подстановки этих уравнений имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (28.1)$$

Используем формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad (28.2)$$

где  $\Delta \vec{A} = \vec{i} \Delta A_x + \vec{j} \Delta A_y + \vec{k} \Delta A_z$ .

Без каких-либо ограничений можно допустить, что в поле постоянных токов (см. § 43)

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (28.3)$$

откуда

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Исходя из выражений (28.2—3), переписываем уравнение (28.1):

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (28.4)$$

Мы получили дифференциальное уравнение для векторного потенциала; в данной форме оно выполняется в точках с токами и называется уравнением Пуассона. В точках без тока оно приобретает вид

$$\Delta \vec{A} = 0$$

(уравнение Лапласа). Запоминание записанной выше системы уравнений стационарного магнитного поля облегчается сопоставлением с соответствующей системой уравнений электростатического поля, так как в их построении отчетливо просматривается некоторая аналогия:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV, \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV, \quad (28.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV, \quad (28.6)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (28.7)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (28.8)$$

Уравнения электростатического поля (28.5)—(28.7) записаны для случая однородной среды; в случае вакуума относительная проницаемость выпадает из знаменателя. Уравнение магнитного поля (28.5) записано для однородной среды, уравнения (28.6) и (28.7)—для вакуума.





потенциал параллелен току, то  $A = A_z$ . Используйте аналогию в выражениях для скалярного и векторного потенциала (§ 9 и 27):  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{kdl}{r}$ ,  $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dz}{r}$ , где  $k$  — линейная плотность зарядов. Для потенциала электрического поля бесконечно длинной заряженной прямой линии была выведена формула (см. упр. 14):  $\varphi = \frac{k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$ . Аналогично запишите  $A_z$  и затем по  $A_z$  найдите  $H$ .

При исследовании решения обратите внимание на возможность простого графического отображения вектора-потенциала в случае линейных токов:  $A_z = C \ln \frac{1}{r}$ , где  $C$  — коэффициент пропорциональности.

## § 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ОДНОРОДНЫХ МАГНЕТИКАХ. ВЕКТОР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{B}$

В предыдущих параграфах рассматривалось магнитное поле токов в отсутствии магнетиков, т. е. в вакууме ( $\mu = 1$ ). Для подавляющего большинства веществ значение относительной магнитной проницаемости  $\mu$  очень мало отличается от единицы, поэтому полученные выше закономерности в первом приближении справедливы и для магнитного поля тока в таких веществах. Когда же в поле тока вносятся ферромагнетики, то их влиянием уже пренебречь нельзя.

В данной главе рассматривается только магнитное поле постоянных токов, которые, как известно, всегда являются замкнутыми. Это означает, что рассмотренные выше магнитные поля обусловлены токами в макроскопических контурах, т. е. макроскопическими токами, иначе, токами проводимости.

Вспомним известные из курса общей физики основные положения о магнитном поле замкнутого линейного тока\*: его магнитные свойства характеризуются магнитным моментом  $\vec{p}_m$ :

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (29.1)$$

где  $I$  — линейный ток плоского контура,  $S$  — площадь, охватываемая контуром,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали из центра этой площади; направление  $\vec{n}$  связано с направлением тока правилом буравчика (рис. 57).

Ампер впервые высказал гениальное предположение, что элементарными носителями магнитных свойств вещества являются

---

\* Их вывод повторяется в конце этого параграфа в связи с изложением основ магнетизма в школьном курсе физики.

внутримолекулярные токи. С современной точки зрения элементарными носителями магнитных свойств вещества являются орбитальный и спиновый (или собственный) магнитные моменты внутриатомного электрона  $\vec{p}_{ml}$  и  $\vec{p}_{ms}$ . Результирующий магнитный момент атома

$$\vec{p}_{ma} = \Sigma (\vec{p}_{ml} + \vec{p}_{ms}) \quad (29.2)$$

является геометрической суммой магнитных моментов всех электронов атома (если не учитывать намного меньшего магнитного момента ядра). Сопоставляемый результирующему магнитному моменту атома (или молекулы) ток и является амперовым молекулярным током. В школьных руководствах по физике эти молекулярные токи всегда изображаются в виде «колец», плоскости которых ориентируются перпендикулярно полю.

Магнитное поле, обусловленное магнитным моментом на расстояниях  $r$ , намного превышающих линейные размеры контура, может быть вычислено так же, как поле электрического диполя (§ 11).

От магнитного момента замкнутого тока (как макро-, так и микроскопического) зависит и момент силы, действующий на магнитный момент во внешнем магнитном поле; соответствующее выражение для момента силы

$$\vec{K} = [\vec{p}_m \mu_0 \vec{H}] \quad (29.3)$$

аналогично выражению для момента сил, действующих на электрический дипольный момент во внешнем электрическом поле (§ 11). По аналогии с электростатикой можно также записать энергию магнитного момента во внешнем однородном поле (ср. упр. 18).

Пусть в поле тока, например протекающего через соленоид, внесен магнетик. Под действием поля происходит его намагничивание, механизм которого состоит в ориентации микроскопических магнитных моментов в направлении поля. Магнитное состояние вещества принято характеризовать вектором намагниченности — геометрической суммой магнитных моментов атомов (или молекул), находящихся в единице объема:

$$\vec{J} = \Sigma \vec{p}_{ma}, \quad (29.4)$$

где  $\vec{J}$  — магнитный аналог вектора поляризации  $\vec{P}$ .

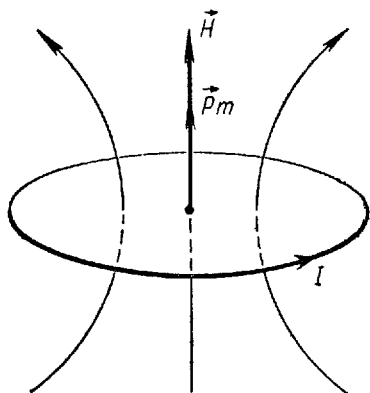


Рис. 57

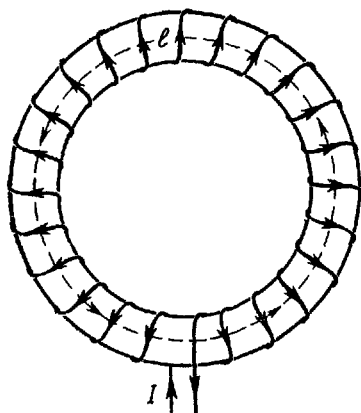


Рис. 58

Как уже отмечалось выше, напряженность поля токов  $\vec{H}$  не изменится, если все поле заполнить каким угодно однородным магнетиком. Это важное положение получило свое математическое выражение в том, что в формулу закона Био—Савара—Лапласа не входит относительная магнитная проницаемость  $\mu$ . Это следует из условия, что поле вектора  $\vec{H}$  обусловлено только макроскопическими токами (токами проводимости); при этом сохраняется оговорка о том, что магнитное поле локализовано в вакууме или в однородном магнетике.

Случай однородного магнетика, заполняющего все поле тока проводимости, легко осуществляется при помощи тора, на котором имеется плотная обмотка с током (рис. 58); в этом случае формула напряженности поля соленоида (см. упр. 28)  $H = \frac{In}{l}$  (где  $l$ —средняя длина тора) является точной. Поле тороида практически однородно и локализовано в конечном объеме тора (если не считать небольших магнитных потоков, выходящих из тора в окружающее пространство). Это поле обусловлено, как уже указывалось, макроскопическими токами в проводах обмотки. На поле  $\vec{H}_0$  этих токов (первичное поле) при наличии сердечника накладывается добавочное (вторичное) поле  $\vec{H}'$  упорядоченных молекулярных токов. Геометрическая сумма  $\vec{H}_0$  и  $\vec{H}'$  в гауссовой системе единиц была определена как вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{H}_0 + \vec{H}'. \quad (29.5)$$

Таким образом, в гауссовой системе единиц векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  имеют одинаковую размерность, а связывающая векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}_0$  относительная магнитная проницаемость  $\mu$  является безразмерной величиной:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}_0 \quad (29.6)$$

Единица магнитной индукции—гаусс; в точке, где  $H_0 = 1$  Э, индукция равна  $\mu$  Гс.

В СИ связь между векторами  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}_0$  и  $\vec{H}'$  иная:

$$\vec{H}_0 + \vec{H}' = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (29.7)$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}_0, \quad (29.8)$$

в вакууме

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0$$

(в дальнейшем индекс у  $H_0$  будет опущен, так как под величиной  $H$  подразумевается поле макроскопических токов). Здесь, как уже указывалось раньше,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (генри на метр),  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость (безразмерная величина, одинаковая в обеих системах),  $B$  измеряется в теслах (Тл),  $H$  — в амперах на метр (А/м), 1 Тл =  $10^4$  Гс. В точке, где  $H = 1$  А/м, индукция  $B$  равна  $\mu\mu_0$  Тл.

Итак, поле вектора  $\vec{H}$  обусловлено токами проводимости, характеризующимися объемной плотностью  $\vec{j}$  и поверхностной плотностью  $\vec{i}$ , поле вектора  $\vec{H}'$  — токами связанных зарядов в атомах и молекулах («молекулярными токами»), которые характеризуются объемной плотностью  $\vec{j}_{\text{мол}}$  и поверхностной плотностью  $\vec{i}_{\text{мол}}$ , а поле вектора  $\vec{B}$  — и теми и другими. Соответственно вводятся векторные потенциалы:  $\vec{A}_0$  — вектор-потенциал поля в отсутствие магнетиков, т. е. поля, обусловленного токами свободных зарядов (токами проводимости);  $\vec{A}'$  — вектор-потенциал поля, обусловленного упорядоченными молекулярными токами;  $\vec{A}$  — вектор-потенциал поля, обусловленного и теми и другими токами, причем

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}'. \quad (29.9)$$

В формулах § 27 имелось в виду поле в вакууме, вектор-потенциал которого сейчас обозначен через  $\vec{A}_0$ ; для него было записано [см. (27.4) и (27.6)]:

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{i}}{r} dS, \quad (29.10)$$

где  $\vec{j}$  и  $\vec{i}$  — объемная и поверхностная плотности токов проводимости. Аналогично записываются выражения для  $\vec{A}'$ , обусловленного молекулярными токами плотностью  $\vec{j}_{\text{мол}}$  и  $\vec{i}_{\text{мол}}$ :

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_{\text{мол}}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{i}_{\text{мол}}}{r} dS, \quad (29.11)$$

и для векторного потенциала  $\vec{A}$  результирующего поля:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{j} + \vec{j}_{\text{мол}})}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{(\vec{i} + \vec{i}_{\text{мол}})}{r} dS. \quad (29.12)$$

Учитывая новое обозначение вектор-потенциала поля токов проводимости ( $\vec{A}_0$ ), перепишем выражение (27.5) в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}_0,$$

соответственно

$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}'.$$

Используя уравнение (29.8), получим:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}') = \text{rot } \vec{A}_0 + \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A}, \quad (29.13)$$

где вклад молекулярных токов учитывается через  $\vec{H}'$  (а не через  $\mu$ ).

Исходя из дифференциального уравнения поля токов, мы получили дифференциальные уравнения для потенциала (28.4), положив  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Соответственно

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \text{rot } \vec{A}_0 = -\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A}_0 = \vec{j}; \quad \Delta A_0 = -\mu_0 \vec{j}; \\ \text{rot } \vec{H}' &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \text{rot } \vec{A}' = -\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A}' = \vec{j}_{\text{мол}}; \quad \Delta \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}_{\text{мол}}. \end{aligned}$$

Используя выражения (29.8) и (29.13), имеем:

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{мол}}) = \mu \mu_0 \vec{j}, \quad (29.14)$$

т. е.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \mu_0 \vec{j}. \quad (29.15)$$

Выше уже указывалось на некоторое сходство векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ ; поле вектора  $\vec{D}$  обусловлено свободными зарядами, поле вектора  $\vec{H}$  — движением свободных зарядов. Сейчас выясняется аналогия между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ : поле вектора  $\vec{E}$  обусловлено как свободными, так и связанными зарядами; поле вектора  $\vec{B}$  — движением как свободных, так и связанных зарядов. В выборе названий векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  таким образом налицо некоторое несоответствие, обусловленное историческим развитием учения о магнетизме. Следовало бы назвать вектор  $\vec{B}$  как более полный, общий вектор — напряженностью, а вектор  $\vec{H}$  — индукцией.

Уравнение (29.14) принадлежит к основным уравнениям ста-

ционарных магнитных полей в магнетиках: поле вектора  $\vec{B}$  определяется вихрями, которые локализованы в объемах, где протекают токи  $\vec{j}$  и  $\vec{j}_{\text{мол}}$ . Примечательно, что поле вектора  $\vec{B}$  определяется только вихрями, оно не имеет источников (ими должны были быть «магнитные заряды», которые в природе не обнаружены). Эта особенность вектора  $\vec{B}$  математически отражена в равенстве нулю дивергенции  $\vec{B}$ :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (29.16)$$

Перейдем к интегральной форме уравнений (29.14) и (29.16):

$$\int_S \operatorname{rot}_n \vec{B} dS = \oint_L B_t dt = \mu_0 \int_S (j_n + j_{n, \text{мол}}) dS, \quad (29.17)$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \oint_S B_n dS = 0. \quad (29.18)$$

В уравнении (29.18) фигурирует важная величина — поток магнитной индукции через замкнутую поверхность. Линии индукции, не имея источников, замкнуты сами на себя\*. Поток индукции через поверхность  $S$

$$\int_S B_n dS \equiv \int_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi \quad (29.19)$$

в электротехнических приложениях выражается в веберах (Вб):  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

В гауссовой системе единиц поток магнитной индукции измеряется в максвеллах (Мкс):  $1 \text{ Мкс} = 1 \text{ Гс} \cdot 1 \text{ см}^2$ .

Используя соотношение  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ , находим связь между единицами магнитного потока в СИ и СГС:

$$1 \text{ Вб} = 10^4 \text{ Гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ Мкс}.$$

Отметим в заключение, что силы, с которыми магнитное поле действует на провод с током в однородной магнитной среде, определяются вектором  $\vec{B}$ . В силу этого закон Ампера в магнетике записывается для линейных токов (24.2) в виде:

$$d\vec{F} = \mu\mu_0 I [d\vec{l} \vec{H}] = I [d\vec{l} \vec{B}],$$

а для объемных токов:

$$d\vec{F} = \mu\mu_0 [\vec{j} \vec{H}] dV = [\vec{j} \vec{B}] dV. \quad (29.20)$$

---

\* Вместе с тем линии индукции могут идти из бесконечности и уходить в бесконечность; возможен и третий, весьма сложный случай, когда линии индукции не замкнуты, но не имеют ни начала, ни конца и не идут из бесконечности в бесконечность, В данной книге этот случай не рассматривается

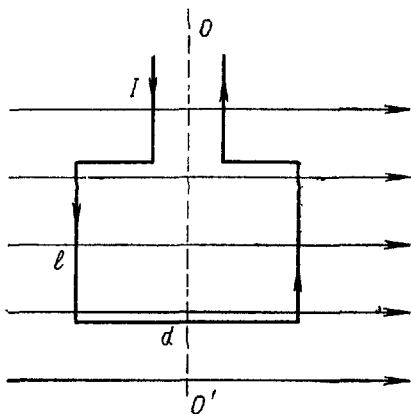


Рис 59

В курсе физики средней школы, как уже указывалось в § 24, при исследовании магнитного поля в качестве пробного тела используют элементарно малую прямоугольную рамку, обтекаемую постоянным током. Из характеристик магнитного поля вводится только вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Предпочтение, отдаваемое рамке, вполне оправдано: рамка является моделью якоря (ротора) как в генераторе, так и в электродвигателе.

Выведем выражение для максимального вращающего момента, действующего на рамку с током  $I$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Момент действующих на рамку сил стремится повернуть ее так, чтобы рамка расположилась перпендикулярно направлению вектора  $\vec{B}$ , поэтому момент будет максимальным, когда поток через рамку равен нулю (рис. 59). Обозначения сторон рамки указаны на рисунке. Амперова сила, действующая на каждую из двух сторон рамки длиной  $l$  в положении, изображенном на рисунке, численно равна:  $F = IlB$ . Отсюда для вращающего момента (максимального) получаем:

$$K_{\max} = Fd = IlBd = BIS,$$

где  $S$  — площадь рамки.

В курсе физики средней школы эта формула используется для определения индукции  $B$  и ее единицы — тесла (Тл):

$$B = \frac{K_{\max}}{IS}. \quad (29.21)$$

Название произведения  $IS = p_m$  — магнитного момента рамки — в школьном курсе не вводится. Формула (29.21) является, конечно, частным случаем введенного выше выражения (29.3).

### § 30. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНЕТИКАХ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Резюмируем основные положения о стационарном магнитном поле в магнетиках. Поле вектора  $\vec{H}$  определяется вихрями, которыми являются токи проводимости. Поле вектора  $\vec{B}$  не имеет



источников. Уравнения Максвелла для стационарных магнитных полей таковы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

уравнение связи

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

Их интегральная форма:

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot}_n \vec{H} dS &= \oint_L H_t dt = \int_S j_n dS, \\ \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV &= \oint_S B_n dS = 0. \end{aligned}$$

В гауссовой системе запись этих формул частично изменяется:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}. \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

При решении дифференциальных уравнений в выражениях для векторов магнитного поля  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  появляются постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями. Вывод этих условий имеет много общего с выводом граничных условий для векторов электрического поля (§ 17).

**а) Поведение вектора магнитной индукции на границе двух сред.** По аналогии с § 17 выберем на поверхности раздела двух произвольных магнетиков элементарную площадку  $\Delta S$  и построим на ней прямую призму (см. рис. 32). Поток  $\Phi$  вектора магнитной индукции через эту призму состоит из потока через оба основания и потока  $\Phi'$  через боковые грани. Аналогично выражению (17.4) имеем:

$$\Phi = \oint_S B_n dS = (B_{2n} - B_{1n}) \Delta S + \Phi' = 0.$$

При неограниченном стягивании призмы к границе раздела  $\Phi' \rightarrow 0$ , откуда  $B_{2n} - B_{1n} = 0$ , т. е.

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (30.3)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора магнитной индукции на границе двух сред остается непрерывной.

**б) Поведение вектора напряженности магнитного поля на границе двух сред.** Поведение нормальной составляющей вектора  $\vec{H}$  на границе двух сред вытекает из уравнения (30.3). При подстановке в эту формулу  $B_n = \mu\mu_0 H_n$ , получаем:

$$\mu_1 \mu_0 H_{1n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n},$$

откуда

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (30.4)$$

т. е. нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  на границе двух сред испытывает скачок, величина которого зависит от соотношения магнитных проницаемостей этих сред.

Рассмотрим поведение тангенциальной составляющей напряженности на границе двух сред. Для этого найдем циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по малому контуру (см. рис. 33), пересекающему границу раздела. Аналогично соотношению (17.9) имеем, учитывая (30.1),

$$\oint_L H_t dl = H_{2t} a - H_{1t} a + A' = \int_S j_n dS,$$

где  $A'$  — доля, вносимая двумя отрезками  $h$ ; интеграл  $\int j_n dS$  определяет, очевидно, суммарный ток проводимости, протекающий сквозь малую поверхность  $S = ah$ , охватываемую контуром обхода. Стягиваем контур так, чтобы  $h \rightarrow 0$ , тогда  $A' \rightarrow 0$ , а потому

$$\oint_L H_t dl \cong (H_{2t} - H_{1t}) a = \int_S j_n dS,$$

откуда

$$H_{2t} - H_{1t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} \int_S j_n dS \right\}. \quad (30.5)$$

Выражение в правой части определяет поверхностный ток, протекающий через отрезок единичной длины, расположенный перпендикулярно току, т. е. составляющую поверхностной плотности тока  $i_n$ , перпендикулярную вектору касательной  $\vec{i}$ ,

$$i_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} \int_S j_n dS \right\},$$

в силу чего выражение (30.5) можно переписать следующим образом:

$$H_{2t} - H_{1t} = i_n. \quad (30.6)$$

Итак, при наличии поверхностных токов тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  испытывает скачок на величину  $i_n$ .

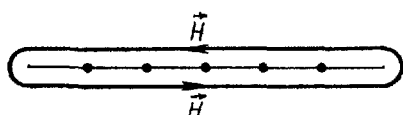


Рис. 60

Скачкообразное изменение  $\vec{H}_t$  при переходе через поверхность с током поясняет рисунок 60. Пусть в тонкой полоске ток течет «на нас» (что отмечено точками). При переходе через

полоску направление магнитного вектора изменяется на противоположное, происходит скачок. При отсутствии поверхностных токов имеем:

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad (30.7)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора напряженности на поверхности раздела двух сред остается непрерывной, если там нет поверхностных токов.

Из сформулированных граничных условий можно вывести закон преломления магнитных силовых линий.

#### IV. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

##### § 31. УСЛОВИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

Обращаем внимание на то обстоятельство, что во все приведенные выше уравнения для векторов и потенциалов поля не входит время. Независимость  $\varphi$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{H}$  от времени является выражением стационарности поля. Физически это означает, что значения потенциалов и напряженностей поля (а также связанные с ним величины, например силы, потоки векторов и т. д.) в каждый данный момент зависят от распределения зарядов и токов  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{i}$ , существующего в этот же момент времени. Такие стационарные поля обусловлены неподвижными зарядами и постоянными (стационарными) токами.

Для переменных токов, когда в обтекаемых ими проводниках плотности зарядов и токов непрерывно изменяются, необходимо установить, как изменяется порождаемое токами поле—синхронно с током, с опережением или отставанием во времени от изменения тока. Пусть за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  в точке  $M$  проводника происходит изменение плотности тока на величину  $d\vec{j}$  (рис. 61). С этим изменением тока связано, конечно, и изменение окружающего поля. Произойдет ли изменение поля, обусловленное изменением тока  $d\vec{j}$ , на конечном расстоянии  $r$ , в точке наблюдения  $A$ , в тот же промежуток времени или оно произойдет в какой-то другой интервал времени—более ранний или более поздний?

Опережения во времени быть, конечно, не может, так как изменение поля, как следствие, не может произойти раньше своей причины (изменения тока). В первой половине XIX в. почти всеобщее признание получила точка зрения, согласно которой изменение поля происходит одновременно с изменением тока, а это равносильно предположению о мгновенной «передаче» изменения из точки  $M$  в точку  $A$  без участия промежуточной среды (бесконечно большой скорости передачи); отсюда название

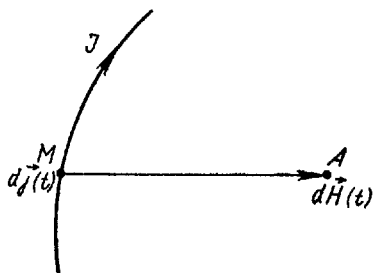


Рис. 61

такой «передачи» действия на расстоянии — дальное действие (*actio in distans*).

Иные взгляды отстаивали сторонники теории близкого действия, т. е. передачи изменений с конечной скоростью. Огромную роль при обосновании этой теории сыграло введение Максвеллом локальных величин и процессов, относящихся к бесконечно малым объемам, к точкам. Согласно Фарадею и Максвеллу, выразившему идеи Фарадея в математической форме, изменение тока в точке *M* вызывает изменение поля в прилегающих точках пространства. Это изменение, в свою очередь, вызывает изменение поля в соседних с ним точках, и, таким образом, начальное изменение в виде некоторого волнового электромагнитного процесса передается от точки к точке, пока не дойдет до точки наблюдения *A*. Воздействие процесса в одной точке на процесс в соседней, т. е. передача сигнала, происходит с конечной скоростью *v*, поэтому изменение поля в точке *A* произойдет позже, чем его причина — изменение тока в точке *M*; время запаздывания  $\Delta t = \frac{r}{v}$ .

В пользу дального действия, казалось бы, говорило то обстоятельство, что запаздывание процессов долгое время не удавалось наблюдать. Запаздывание было доказано экспериментально лишь в конце XIX в. Г. Герцем (1857—1894), воспользовавшимся для этой цели быстропеременными токами (токами высокой частоты). Таким образом, в длительной борьбе двух точек зрения одержала верх теория близкого действия.

Из сказанного следует, что в переменном поле значения потенциалов и векторов поля в данный момент времени *t* определяются тем распределением величин  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{i}$ , которое существовало в некоторый предшествующий момент времени  $t - \Delta t = t - \frac{r}{v}$ .

Однако существуют переменные поля, к которым в первом приближении приложимы законы стационарных полей; соответствующие им переменные токи можно рассматривать как стационарные. Такие токи и их поля называются квазистационарными.

Сформулируем условия, при которых переменные токи и их поля можно считать квазистационарными (их обоснование будет дано в § 48).

1. Переменные токи должны в каждый момент времени обладать одинаковой величиной во всех участках неразветвленной цепи, иначе говоря, колебания тока во всех точках линии должны совпадать по фазе; это условие означает, что длина линии должна быть малой по сравнению с длиной  $\lambda$  электромагнитной волны, распространяющейся при переменном токе со скоростью света вдоль линии. Очевидно, при частоте  $f = 50$  Гц

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ м} = 6000 \text{ км.}$$

Для линий небольшой протяженности, например для линий, расположенных в пределах города или района, это условие при стандартной частоте промышленного тока ( $f = 50$  Гц) хорошо выполняется. В сверхдальней линии Куйбышев—Москва (длина порядка 1000 км) между током в начале и в конце линии возникает сдвиг фаз на  $60^\circ$ , который компенсируют специальными методами; естественно, что при таком сдвиге фаз ток уже нельзя было бы считать квазистационарным.

2. Рассматриваемое поле не должно охватывать больших участков пространства, иначе говоря, точка наблюдения должна отстоять от проводов с током на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . При этом условии можно пренебречь тем запаздыванием, с которым изменения поля следуют за изменениями тока, и условно считать, что те и другие протекают одновременно (синхронно).

## § 32. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ (II УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА)

Открытая Фарадеем (1791—1863) в 1831 г. электромагнитная индукция принадлежит к числу самых фундаментальных физических явлений; ее практические приложения, в первую очередь в области генерации токов, необозримо, и не без основания считают год ее открытия датой рождения электротехники.

Фарадей обнаружил, что при всяком изменении потока магнитной индукции сквозь контур в нем индуцируется электродвижущая сила, которая вызывает ток (индукционный ток). Пусть  $L$ —проволочный контур (рис. 62), охватывающий поверхность  $S$ , которую пронизывает переменный поток  $\Phi$ , мгновенное значение которого равно:

$$\Phi = \int_S B_n dS.$$

Как известно, ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  пропорциональна скорости изменения потока (числу линий индукции, «пересекаемых» проводником за единицу времени):

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (32.1)$$

Знак минус в этом законе выражает правило Ленца: индукционный ток имеет такое направление, при котором он своим магнитным полем противодействует той причине, которая его вызывает. Если,

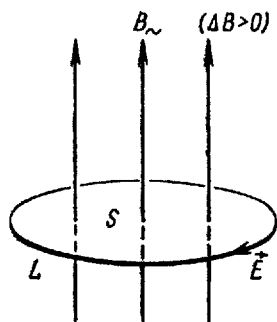


Рис. 62

например, поток сквозь контур возрастает, то индукционный ток своим полем противодействует этому возрастанию; отсюда легко можно определить направление индукционного тока.

Максвелл предложил замечательное истолкование закона электромагнитной индукции. Возникновение тока в проволочном контуре, по Максвеллу, не следует считать основной чертой явления. Поскольку любой ток обусловлен электрическим полем, следовательно, и индукционный ток в контуре вызван электрическим полем, порожденным переменным потоком магнитной индукции независимо от того, имелся ли в месте возникновения поля проволочный контур или нет. Проволочный контур служит в явлении лишь для обнаружения и практического использования электрического поля.

Итак, по Максвеллу, всякий переменный поток магнитной индукции порождает электрическое поле, линии которого замкнуты и охватывают магнитный поток. Напомним, что в статических и стационарных электрических полях силовые линии всегда имеют источники (т. е. эти поля являются потенциальными); предположение о существовании замкнутых, т. е. вихревых электрических полей, явилось очень смелой гипотезой.

Рассмотрим циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру, охватывающему переменный поток  $\Phi$ ; она очевидно, равна той электродвижущей силе, которая появится в контуре  $L$ :

$$\mathcal{E} = \oint_L E_t dl = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (32.2)$$

При замене здесь  $\Phi$  его выражением, приведенным выше, мы приходим ко II уравнению Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L E_t dl = - \frac{d}{dt} \int B_n dS. \quad (32.3)$$

Преобразуем левую часть выражения (32.3) согласно теореме Стокса:

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E} dS = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (32.4)$$

Переход к частной производной в правой части выражает то обстоятельство, что речь идет об изменении вектора  $\vec{B}$  в определенной точке пространства. Перестановка порядка действий в правой части допустима, так как дифференцирование выполняется по времени, интегрирование — по поверхности. Выражение (32.4) справедливо для произвольной поверхности  $S$ , что возможно при равенстве подынтегральных выражений:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (32.5)$$

Уравнение (32.5) представляет собой II уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Здесь снова используется идея Максвелла о переходе к бесконечно малому объему, к точке. Если в какой-либо точке происходит изменение магнитного вектора, то это приводит к появлению вихревого электрического поля, т. е. переменный вектор магнитной индукции охватывается замкнутыми силовыми линиями электрического поля. Итак, по Максвеллу, поле электрическое может быть определено ротором вектора  $\vec{E}$  через производную  $\vec{B}$  по времени. Поскольку ротор  $\vec{E}$  определяется совокупностью частных производных вектора  $\vec{E}$  по координатам, физический смысл II уравнения Максвелла можно изложить так: изменение вектора  $\vec{B}$  во времени вызывает изменение вектора  $\vec{E}$  в пространстве. Таким образом, II уравнение выражает установленную еще Фарадеем фундаментальную связь между магнитным и электрическим полями: изменение магнитного поля приводит к возникновению электрического поля.

### § 33. I УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

В § 26 было получено дифференциальное уравнение для магнитного поля постоянных токов:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}.$$

Максвелл дополнил это уравнение новым видом тока, не связанным с движением зарядов вдоль цепи. Пусть в цепь переменного тока включен конденсатор  $C$  (рис. 63). Как принято говорить в физике и электротехнике, конденсатор не является разрывом в цепи переменного тока; однако ток проводимости на пластинах конденсатора, несомненно, обрывается (предполагается наличие идеального диэлектрика, исключающего токи утечки).

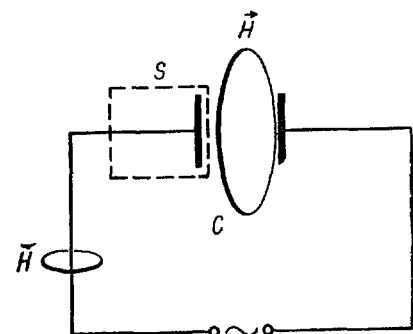


Рис. 63

В промежутке между пластинами, как предположил Максвелл, возникает новый вид тока, который замыкает цепь тока проводимости; Максвелл назвал его током смещения. Данное название связано с некоторыми устаревшими представлениями о природе этого тока. С современной точки зрения в пространстве между пла-



стинами имеется переменное электрическое поле и обусловленная им переменная поляризация диэлектрика; они и представляют собой ток смещения. Применяемый в данном случае термин «ток» Максвелл обосновал тем, что при переменном электрическом поле вокруг области переменной поляризации существует магнитное поле подобно тому, как магнитное поле сопутствует всякому току проводимости (наличие магнитного поля вокруг тока смещения у Максвелла являлось гипотезой, которая впоследствии полностью подтвердилась).

Величину тока смещения Максвелл определил таким образом, чтобы для суммы токов смещения и проводимости оказалось справедливым первое правило Кирхгофа, которое для одного тока проводимости в цепи переменного тока не соблюдается в связи с тем, что здесь имеет место накопление и растекание зарядов. Проще всего это выявляется на примере цепи с конденсатором (см. рис. 63). В первый полупериод ток проводимости только втекает в пластину конденсатора, совершенно не вытекая; при этом на пластине накапливаются заряды. В следующий полупериод происходит обратное: ток проводимости только вытекает из пластины, ее заряд растекается.

Если мы охватим часть пространства, обтекаемого переменными токами, замкнутой поверхностью  $S$  (например, левую пластину конденсатора на рис. 63), то здесь, как указывалось, для тока проводимости  $I$  уже непригодно первое правило Кирхгофа.

Если в переменных полях ток проводимости может вытекать из объема  $V$  через его поверхность  $S$ , то в соответствии с законом сохранения электрических зарядов это сопряжено с убылью того свободного заряда, который находился в этом объеме, т. е.

$$\Sigma I = \oint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (33.1)$$

Этот случай уже рассматривался в § 23 и привел нас к общему виду закона сохранения заряда (уравнению непрерывности):

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Введем понятие полного тока как суммы токов проводимости и смещения. При рассмотрении переменного тока в цепи с конденсатором мы полагали, что ток проводимости и ток смещения локализованы в различных участках пространства (первый — в проводах, второй — в промежутке между пластинами конденсатора). В общем случае эти токи могут протекать в одних и тех же участках пространства, поэтому вводят в рассмотрение плотность полного тока  $\vec{j}_{\text{полн}}$  как геометрическую сумму плотностей тока проводимости  $\vec{j}$  и тока смещения  $\vec{j}_{\text{смещ}}$ :

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}}. \quad (33.2)$$

Как указывалось, для полного тока должно удовлетворяться первое правило Кирхгофа:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{полн}} = \operatorname{div} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}}) = 0, \quad (33.3)$$

т. е. линии полного тока должны быть непрерывными. Отсюда сразу же имеем:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ}} = -\operatorname{div} \vec{j}.$$

Это равенство означает, что в каждый момент времени ток проводимости, втекающий в единицу объема, равен току смещения, вытекающему из этого объема (и наоборот).

С учетом уравнения непрерывности для плотности тока смещения выполняется равенство

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (33.4)$$

Установим связь между током смещения и вектором индукции  $\vec{D}$ , характеризующим состояние среды, в которой наблюдается ток смещения. Как известно,  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ , откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Вводя последнее выражение в уравнение (33.4), получим:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ}} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

От равенства дивергенций переходим к равенству векторов, стоящих под знаком дивергенции \*

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \epsilon_0 \vec{E}), \quad (33.5)$$

т. е. плотность тока смещения пропорциональна скорости изменения вектора индукции  $\vec{D}$ .

Выясним теперь физическую природу тока смещения, исходя из уравнения (33.5). В § 13 было введено соотношение между векторами индукции  $\vec{D}$ , напряженности  $\vec{E}$  и поляризации  $\vec{P}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (33.5) имеем:

---

\* В это равенство может входить еще некоторое постоянное слагаемое, которым можно пренебречь.

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (33.6)$$

Таким образом, ток смещения состоит из двух частей. Первое слагаемое  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  называется «чистым» током смещения и представляет собой переменное электрическое поле. Очевидно, что в случае вакуума второе слагаемое равно нулю, так как в вакууме нет поляризованного вещества и  $\vec{P} = 0$ . Тогда ток смещения сводится к переменному электрическому полю и не связан с перемещением зарядов.

Второе слагаемое  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  называется поляризационным током и связано с изменением поляризации в переменном электрическом поле. При поляризационном токе происходит движение связанных зарядов: если в диэлектрике имеет место электронный механизм поляризации, то положительные и отрицательные заряды внутри молекул за каждую половину периода колебания поля меняются местами; если же налицо ориентационный механизм, то происходит переориентация диполей.

В металлах ток смещения всегда исчезающе мал, поэтому и не учитывается; в реальных диэлектриках и полупроводниках токи смещения могут быть сравнимы с токами проводимости и даже превосходить их по величине (см. упр. 31).

Как уже указывалось, ток смещения в магнитном отношении эквивалентен току проводимости; в соответствии с этим Максвелл обобщил дифференциальное уравнение поля постоянных токов, считая, что завихрение вектора  $\vec{H}$  в общем случае обусловлено как токами проводимости, так и токами смещения:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}},$$

откуда при подстановке (33.5) получаем I уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (33.7)$$

Таким образом, магнитное поле создается не только движущимися зарядами, но и изменяющимся электрическим полем.

Выразим I уравнение Максвелла в интегральной форме; для этого умножим нормальные составляющие векторов в выражении (33.7) на  $dS$  и перейдем к интегралам

$$\int_S \text{rot}_n \vec{H} dS = \int_S j_n dS + \frac{d}{dt} \int_S D_n dS;$$

наконец, преобразуя левую часть согласно теореме Стокса.

$$\oint_L H_t dt = \int_S j_n dS + \frac{d}{dt} \int_S D_n dS, \quad (33.8)$$

получаем I уравнение Максвелла в интегральной форме.

Следует подчеркнуть, что ток смещения отнюдь не эквивалентен току проводимости в других проявлениях тока (кроме магнитного). Например, при чистом токе смещения не выделяется джоулева теплота; при ориентационном механизме поляризации ток смещения в диэлектрике приводит к выделению теплоты, чего не наблюдается при токе смещения в диэлектрике с электронным механизмом поляризации.

### § 34. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ТОКА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вычислим работу магнитного поля при произвольном перемещении замкнутого линейного контура с током  $I$ , полагаемого далее постоянным. Пусть каждый элемент  $d\vec{l}$  контура  $L$  испытывает произвольное бесконечно малое перемещение  $\vec{q}$  (рис. 64), причем допускается и деформация контура. По закону Ампера на элемент тока  $I d\vec{l}$  во внешнем магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  действует сила  $d\vec{F}$ , которая при перемещении  $\vec{q}$  совершает работу:

$$\vec{q} d\vec{F} = I \vec{q} [d\vec{l} \vec{B}] = IB [\vec{q} d\vec{l}].$$

Проведем простые преобразования:  $[\vec{q} d\vec{l}] = \vec{n} dS$ , где  $dS$  — элемент площади, описанный элементом контура  $d\vec{l}$  при перемещении  $\vec{q}$ ,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к элементу  $dS$ , сопряженный с направлением тока по правилу правого винта.

Тогда

$$\vec{q} d\vec{F} = IB \vec{n} dS = IB_n dS.$$

Общая работа \*  $\delta \mathcal{A}$  перемещения всех элементов контура выразится интегралом

$$\delta \mathcal{A} = \int \vec{q} d\vec{F} = I \int_{\Delta S} B_n dS,$$

где  $\Delta S$  — поверхность, описанная контуром тока  $L$  при пе-

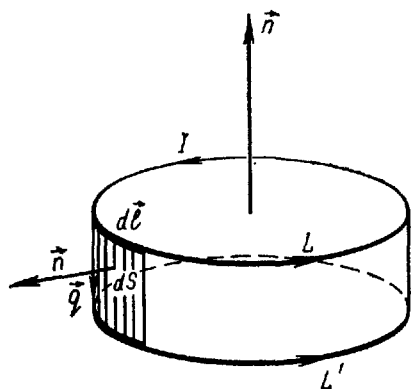


Рис. 64

\* В этом параграфе работа обозначается рукописной буквой  $\mathcal{A}$  в отличие от вектор-потенциала  $A$ .

перемещении его точек в положение  $L'$ . Полезно представить последнее выражение в виде разности:

$$\delta \mathcal{A} = I \int_{S+\Delta S} B_n dS - I \int_S B_n dS = I (\Phi' - \Phi) = I \Delta \Phi,$$

где  $S$  — поверхность, опирающаяся на контур  $L$ , соответственно  $S + \Delta S$  — поверхность, опирающаяся на контур  $L'$ ,  $\Phi$  и  $\Phi'$  — потоки индукции через эти поверхности  $S$  и  $S + \Delta S$ :

$$\Phi = \int_S B_n dS, \quad \Phi' = \int_{S+\Delta S} B_n dS.$$

Величина потока зависит только от расположения контура  $L$ , но не от формы поверхности  $S$ . Это следует из положения, вытекающего из определения  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  и теоремы Стокса:

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS = \oint_L \vec{A} d\vec{l} = \oint_L A_t dl. \quad (34.1)$$

Таким образом, магнитный поток через поверхность  $S$  можно вычислить как циркуляцию векторного потенциала  $\vec{A}$  по контуру  $L$ , ограничивающему эту поверхность. Этот метод вычисления, предложенный Максвеллом, очень удобен при решении многих конкретных задач на электромагнитную индукцию.

Итак,

$$\delta \mathcal{A} = I \Delta \Phi, \quad (34.2)$$

т. е. работа магнитного поля при произвольном перемещении контура с током равна произведению тока на изменение магнитного потока через этот контур. При перемещениях контура, не приводящих к изменению магнитного потока, работа магнитного поля равна нулю.

Вводя обозначение

$$U = I\Phi, \quad (34.3)$$

можно равенство (34.2) привести к виду

$$\delta \mathcal{A} = -(\delta U)_I, \quad (34.4)$$

где индекс  $I$  при  $\delta U$  означает постоянство тока. Таким образом, работа сил магнитного поля равна убыли функции  $U$ , которая играет роль потенциальной или силовой функции тока в магнитном поле. Если эта функция выражена в обобщенных координатах, то сила  $Q_i$ , действующая на контур с током по направлению одной из этих координат  $q_i$ , будет равна:

$$Q_i = - \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_I. \quad (34.5)$$

Сопоставляя полученные выражения с формулами для механических сил электростатического поля, можно, казалось бы,

отождествить функцию  $U$  с потенциальной энергией магнитного поля. Такое заключение является, однако, несостоятельным, поскольку перемещение проводника в магнитном поле сопровождается также работой ЭДС индукции, возникающей под действием магнитного поля в движущемся проводнике. Тем не менее в руководствах по электродинамике и электротехнике часто называют функцию  $U$  энергией, хотя это справедливо лишь в том смысле, что силы магнитного поля связаны с  $U$  той же зависимостью, с какой силы электростатического (и вообще, консервативного) поля связаны с потенциальной энергией этого поля.

Выводя контур из поля и суммируя  $\delta\mathcal{A}$ , записанную в виде (34.2)—(34.4), получаем максимальную работу поля, которую называют также магнитной энергией тока:

$$W = -U. \quad (34.6)$$

Появляющаяся здесь постоянная интегрирования не учитывается.

Итак, для линейных токов можно потенциальную функцию и магнитную энергию тока выразить через векторный потенциал

$$W = -U = I \oint_L \vec{A} d\vec{l}. \quad (34.7)$$

Рассмотрим случай объемных токов; согласно  $I d\vec{l} = \vec{j} dV$

$$W = -U = \int_V \vec{A} \vec{j} dV. \quad (34.8)$$

Уравнения (34.7)—(34.8) обычно истолковываются в том смысле, что элемент тока  $I d\vec{l}$  (или  $\vec{j} dV$ ) обладает во внешнем магнитном поле магнитной энергией  $I \vec{A} d\vec{l}$  (или  $\vec{A} \vec{j} dV$ ). Если  $q_1$  является угловой координатой и ее изменение связано с поворотом контура с током вокруг некоторой оси, то формула (34.5) определяет вращающий момент сил магнитного поля относительно этой оси (см. упр. 32).

### § 35. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОВ. КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Пусть имеются два неподвижных линейных контура, называемых условно первым и вторым (рис. 65). Введем обозначения  $\vec{B}_1, \vec{A}_1$  для векторов поля первого контура с током  $I_1$ ; соответственно через  $\vec{B}_2, \vec{A}_2$  обозначим векторы поля тока  $I_2$  второго контура. Часть магнитного потока, создаваемого линейным током  $I_1$  первого контура, проходит сквозь второй контур (говорят, что эти контуры индуктивно связаны); обозначим его через  $\Phi_{12}$ . Его значение сложным образом зависит от формы и размеров обоих контуров, их взаимного расположения, магнитных свойств

среды и от тока  $I_1$ . Поток  $\Phi_{12}$  и ток  $I_1$  связаны прямой пропорциональностью:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \quad (35.1)$$

где  $L_{12}$  — коэффициент взаимной индукции, зависящий от геометрии контуров и магнитных свойств промежуточной среды. В соответствии с формулой (34.1) можно это переписать так:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 = \oint_{l_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2,$$

где интегрирование производят вдоль второго контура длиной  $l_2$ .

Используя выражение (27.7) и предполагая наличие среды с проницаемостью  $\mu$ , запишем выражение для вектор-потенциала в точках второго контура:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r},$$

отсюда вытекает новое выражение для потока  $\Phi_{12}$ :

$$\Phi_{12} = \oint_{l_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{I_1 d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} \quad (35.2)$$

( $r$  — расстояние между элементами  $dl_1$  и  $dl_2$ ). Если ток постоянен, то  $I_1$  можно вынести за знак интеграла и при сопоставлении с (35.1) получить выражение для коэффициента взаимной индукции:

$$L_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}. \quad (35.3)$$

Аналогично часть потока, создаваемого током  $I_2$ , проходит сквозь первый контур:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_2.$$

Проведя те же рассуждения, мы убеждаемся, что

$$L_{12} = L_{21}. \quad (35.4)$$

Допустим теперь, что ток  $I_1$  изменяется. Вслед за ним изменяется поток  $\Phi_{12}$ , благодаря чему во втором контуре возникает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \frac{d}{dt} (L_{12} I_1). \quad (35.5)$$

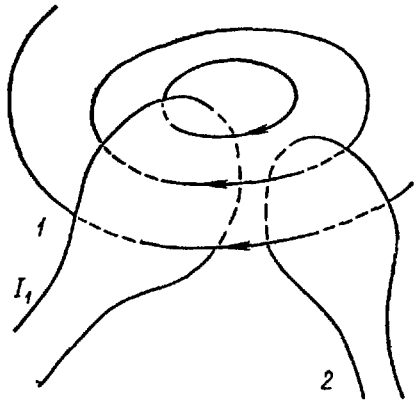


Рис. 65

Если оба контура неподвижны, не деформируются и магнитные свойства среды неизменны, то  $L_{12} = \text{const}$ , и мы получим:

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (35.6)$$

Если же изменяется ток во втором контуре, то возбуждается ЭДС индукции в первом контуре.

На явлении взаимной индукции основано действие трансформатора. Железный магнитопровод трансформатора служит для увеличения индуктивной связи; благодаря ему через обе его обмотки проходит практически один и тот же магнитный поток.

Согласно уравнениям (34.3) и (35.1) магнитная энергия тока  $I_2$  в поле тока  $I_1$  равна:

$$W_{12} = -U_{12} = I_2 \Phi_{12} = L_{12} I_1 I_2. \quad (35.7)$$

Таким же образом выражается и магнитная энергия тока  $I_1$  в поле тока  $I_2$ :

$$W_{21} = -U_{21} = I_1 \Phi_{21} = L_{21} I_2 I_1.$$

Если токи  $I_1$  и  $I_2$  нельзя считать линейными, то необходимо ввести в рассмотрение объемные плотности токов  $\vec{j}_1$  (в элементе объема  $dV_1$  первого контура) и  $\vec{j}_2$  (в элементе объема  $dV_2$  второго контура). Согласно выражению (34.8)

$$W_{12} = -U_{12} = \int_{V_2} \vec{A}_1 \vec{j}_2 dV_2, \quad W_{21} = -U_{21} = \int_{V_1} \vec{A}_2 \vec{j}_1 dV_1. \quad (35.8)$$

Внося в эти уравнения выражения для векторных потенциалов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  поля токов  $\vec{j}_1$  и  $\vec{j}_2$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{j}_1 dV_1}{r}, \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_2 dV_2}{r},$$

получим:

$$W_{12} = -U_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r} = -U_{21} = W_{21}. \quad (35.9)$$

## § 36. КОЭФФИЦИЕНТ САМОИНДУКЦИИ.

### ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОКОВ.

#### ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВ

При самоиндукции изменение тока и параметров контура приводит к изменению потока индукции сквозь свой же контур, вследствие чего в нем возбуждается ЭДС индукции. Обычно процесс начинается с изменения тока (при неизменных параметрах контура).



Пусть по замкнутому проводнику конечного сечения течет объемный ток  $I$  (рис. 66). Разбиваем его на отдельные нити тока  $dI_1, dI_2, \dots$ , длина которых  $l_1, l_2, \dots$ . Общий поток  $\Phi_{11}$  складывается из элементарных потоков от одной нити тока сквозь контуры других нитей. Очевидно,  $I = \sum dI$ , и общий поток  $\Phi_{11}$ , связанный с током  $I$ , пропорционален суммарному току:

$$\Phi_{11} = L_{11}I, \quad (36.1)$$

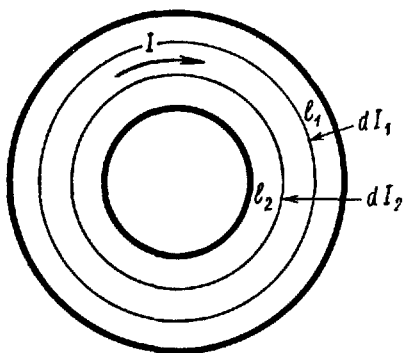


Рис. 66

где  $L_{11}$  — коэффициент самоиндукции (индуктивность) проводника, зависящий от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды.

Обозначая через  $\delta U$  потенциальную функцию нити тока  $dI$ , в соответствии с формулой (34.3) получим:

$$\delta U = -\Phi_{11} dI, \quad (36.2)$$

и, суммируя по всем нитям, приходим к выражению

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{1}{2} \sum \Phi_{11} dI = \frac{1}{2} I \Phi_{11} = \frac{1}{2} L_{11} I^2. \quad (36.3)$$

Перед знаком суммы появляется множитель  $\frac{1}{2}$  в связи с тем, что взаимодействие каждой пары нитей тока учитывается в сумме дважды.

При более общем подходе разбивают объемный ток  $I$  на пары элементов  $\vec{j}_1 dV_1$  и  $\vec{j}_2 dV_2$ , благодаря чему потенциальная функция тока может быть выражена через векторный потенциал объемных токов (34.8):

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_1 \vec{j}_1 dV_1, \quad (36.4)$$

где индекс «1» введен для определенности (появление множителя  $\frac{1}{2}$  объяснено выше). Подставим сюда выражение для векторного потенциала  $\vec{A}_1$ :

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_2 dV}{r},$$

где  $\vec{A}_1$  учитывает воздействие на элемент  $\vec{j}_1 dV_1$  всех «остальных» элементов тока  $\vec{j}_2 dV_2$ . Тогда уравнение для магнитной энергии тока  $I$  приобретает вид

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r}, \quad (36.5)$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем  $V$  с током  $I$ , т. е. должна быть взята сумма подинтегральных выражений для всех возможных попарных комбинаций элементов объема  $V$ ;  $r$  — расстояние между элементами  $dV_1$  и  $dV_2$ .

В соответствии с формулой (36.3) имеем:

$$W_{11} = -U_{11} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r} = \frac{1}{2} L_{11} I^2, \quad (36.6)$$

откуда вытекает выражение для индуктивности проводника:

$$L_{11} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r}. \quad (36.7)$$

Вычисление индуктивности связано обычно с большими трудностями, поэтому она в большинстве случаев определяется опытным путем.

Найдем индуктивность тороидального соленоида длиной  $l$ , для которого (см. упр. 28) формула для напряженности магнитного поля  $H = \frac{In}{l}$  выполняется с большой точностью. Если поле заполнено веществом с проницаемостью  $\mu$ , то для индукции  $B$  и ее потока  $\Phi$  имеем:

$$B = \mu\mu_0 \frac{In}{l}, \quad \Phi = \mu\mu_0 \frac{In}{l} S,$$

где  $S$  — поперечное сечение тороида.

В случае соленоида (с  $n$  витками) в формулу (36.1) входит не поток, а новая величина — потокосцепление  $n\Phi$ \*:

$$n\Phi = L_{11} I. \quad (36.8)$$

Отсюда для индуктивности тороидального соленоида получаем:

$$L = \mu\mu_0 \frac{n^2 S}{l}.$$

При изменении потока  $\Phi_{11}$  сквозь собственный контур в контуре возбуждается ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d}{dt} (L_{11} I) = -\left( L_{11} \frac{dI}{dt} + I \frac{dL_{11}}{dt} \right); \quad (36.9)$$

если  $L_{11} = \text{const}$ , то

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{11} \frac{dI}{dt}.$$

\* Потокосцепление  $n\Phi$  — общее число «пересечений» витками линий индукции при полном исчезновении потока (например, при выключении тока).

Индуктивность в СИ измеряется в генри (1 Гн = 1 Вб/1 А), в системе СГС — в см; 1 Гн = 10<sup>9</sup> см.

Полная потенциальная функция  $U$  двух токов равна сумме энергий их взаимодействия  $U_{12}$  ( $=U_{21}$ ) и собственных потенциальных энергий  $U_{11}$  и  $U_{22}$ :

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right);$$

или, учитывая, что  $L_{12} = L_{21}$ :

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\mu\mu_0}{8\pi} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2) = \\ &= -\frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum L_{ik} I_i I_k. \end{aligned} \quad (36.10)$$

Это выражение применимо и к системе произвольного числа токов, если распространить в нем суммирование на все возможные пары индексов  $i$  и  $k$ .

Полную потенциальную функцию системы токов можно выразить через плотность токов и векторный потенциал поля токов. Используя выражение [ср. (34.8) и (35.8)]

$$U_{12} = \frac{1}{2} (U_{12} + U_{21}) = -\frac{1}{2} \int_V \vec{A}_1 \vec{j}_2 dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_2 \vec{j}_1 dV$$

и введя векторный потенциал результирующего поля обоих токов, получим

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV,$$

т. е.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV. \quad (36.11)$$

Последняя формула справедлива для любой системы токов. Выражая  $\vec{j}$  через  $\text{rot } \vec{H}$ , получим:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \text{rot } \vec{H} dV. \quad (36.12)$$

Используем, далее, формулу векторного анализа

$$\vec{A} \text{rot } \vec{H} = \vec{H} \text{rot } \vec{A} + \text{div} [\vec{H} \vec{A}]$$

и определение  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ :

$$\vec{A} \text{rot } \vec{H} = \vec{H} \vec{B} + \text{div} [\vec{H} \vec{A}].$$

Внося это выражение под знак интеграла (36.12) и применив теорему Остроградского—Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\vec{H} \vec{A}] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV + \frac{1}{2} \oint_S [\vec{H} \vec{A}]_n dS. \end{aligned} \quad (36.13)$$

При распространении интегрирования на весь объем поля токов надо учесть, что интеграл по граничной поверхности этого объема обращается в нуль. В самом деле, на больших расстояниях поверхность  $S$  растет как  $r^2$ , а произведение  $\vec{H} \vec{A}$  убывает намного быстрее (как  $\frac{1}{r^3}$ ). В силу этого выражение для  $W$  приобретает вид

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV. \quad (36.14)$$

Последняя формула должна быть истолкована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределяется по его объему с плотностью

$$\omega_m = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (36.15)$$

Необходимо учесть ограниченную применимость многих формул § 34—36 в том случае, если в поле имеются ферромагнетики (это относится прежде всего к случаю изменяющихся полей, так как тогда в ферромагнетиках нарушается условие постоянства магнитной проницаемости).

## Упражнения

31. Сравните величину токов проводимости и смещения в среде с электропроводностью  $\gamma$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  при частотах 50 и 1000 Гц.

Указание. Ток смещения в среде обусловлен переменным электрическим полем; исходите из случая синусоидально изменяющегося поля  $E = E_0 \sin \omega t$ , откуда мгновенное значение плотности тока проводимости  $j$ , обусловленное этим полем в данной среде (закон Ома):

$$j = \gamma E_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Плотность тока смещения  $j_{\text{смещ}}$  находится на основе формулы (33.5):

$$j_{\text{смещ}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 E_0 \cos \omega t = \epsilon \epsilon_0 \omega E_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (2)$$

Как видно из выражений (1) и (2),  $j$  и  $j_{\text{смещ}}$  сдвинуты по фазе на четверть периода, поэтому сравнение их значений для одного и того же

момента времени в данном случае лишено смысла. Поэтому сравниваем их амплитудные значения  $j_0 = \gamma E_0$  и  $j_0$ , смещ.  $= \epsilon \epsilon_0 \omega E_0$ .

Проведите сравнение для граниа с  $\gamma \approx 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ;  $\epsilon = 9$ .

32. Найдите вращающий момент сил, действующих на рамку площадью  $S$ , обтекаемую током  $I$ , в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , если рамка может вращаться вокруг оси  $OO'$ , перпендикулярной полю (см. рис. 59).

У к а з а н и е Исходите из выражения для потенциальной функции тока (35.3):

$$U = -I\Phi = -IBS \cos \theta.$$

При анализе задачи исследуйте оба положения равновесия рамки ( $\theta = 0, \pi$ ).

33. Определите взаимную индуктивность  $L_{12}$  двух параллельных отрезков длиной  $l$ , расположенных на расстоянии  $h$  друг от друга и совпадающих с двумя сторонами прямоугольника (рис. 67), считая  $\mu = 1$ .

У к а з а н и е. Токи в этих отрезках не могут быть замкнутыми, поэтому в реальной задаче должен рассматриваться прямоугольник, образуемый двумя отрезками  $l$  и перпендикулярными к ним отрезками  $x_1, x_2 = h$ . Однако в интеграле (35.3) для замкнутого прямоугольника

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

все члены, относящиеся к взаимно перпендикулярным парам элементов  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$  (т. е. на отрезках  $l$  и на перпендикулярных к ним отрезках  $x_1, x_2 = h$ ), равны нулю.

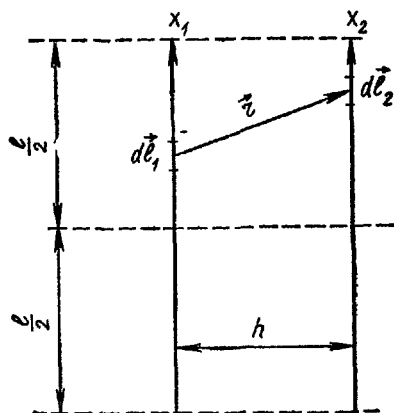


Рис. 67

## V. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 37. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предыдущих параграфах были рассмотрены два уравнения Максвелла. Их фундаментальное значение определяется прежде всего тем, что они раскрывают глубокую взаимосвязь между электрическим и магнитным полями: изменение одного из них возбуждает другое. Таким образом было обосновано представление о едином электромагнитном поле. Установленные в результате обобщения многих закономерностей, эти уравнения явились отправной точкой большого числа дальнейших исследований и открытий, охвативших более широкий круг проблем, чем это предполагал сам Максвелл.

Роль уравнений Максвелла в теории и практических приложениях электромагнетизма сравнима с тем значением, которое имеют в механике законы Ньютона. Долгое время область применения уравнений Максвелла не выходила за пределы теоретической физики. В настоящее время эти уравнения стали рабочим аппаратом физиков и инженеров в ряде прикладных разделов, например в коротковолновой радиотехнике, электронике и др.

Два основных уравнения Максвелла совместно с некоторыми другими соотношениями составляют полную систему уравнений электромагнитного поля. Система называется полной потому, что электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени однозначно определяется этой системой, если только для некоторого начального момента времени заданы значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  во всех точках пространства.

Систему уравнений пишут в такой последовательности:

I уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

II уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

уравнения для дивергенций векторов индукции:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

уравнение непрерывности (закон сохранения электрического заряда):

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Нужно заметить, что с учетом закона сохранения заряда третье и четвертое уравнения являются следствиями двух первых. Несмотря на это, их принято включать в систему уравнений электромагнитного поля.

К основным уравнениям поля необходимо причислить еще так называемые материальные уравнения, связывающие между собой основные векторы электромагнитного поля:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Первое и второе уравнения Максвелла несимметричны; в первое уравнение входит ток проводимости  $\vec{j}$ , для которого нет аналога во втором уравнении, поскольку неизвестен «магнитный ток». Если, однако, перейти к полю в идеальном диэлектрике ( $\gamma = 0$ ), то эти уравнения становятся симметричными:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \right| \quad (37.1)$$

Наконец, если в диэлектрике  $\epsilon = \operatorname{const}$  и  $\mu = \operatorname{const}$ , то уравнения (37.1) можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right| \quad (37.2)$$

Для очень важного случая электромагнитного поля в вакууме (а в первом приближении и для поля в неионизованном воздухе) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right| \quad (37.3)$$

В этой записи уравнений особо отчетливо выступает связь между электрическим и магнитным полями: изменение во времени одного из них создает вихревое поле другого вектора.

Переходим к записи уравнений поля в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Отметим особо, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  связаны между собой только в случае переменных полей. Если ограничиться случаем стационарных полей, т. е. считать векторы не зависящими от времени ( $\vec{B} = \text{const}$ ,  $\vec{D} = \text{const}$ ), то из уравнений поля выпадают  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и система дифференциальных уравнений поля распадается на две независимые системы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \text{— система уравнений стационарного магнитного поля;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0, \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \text{— система уравнений электростатического поля.}$$

Независимостью этих двух систем обусловлена возможность раздельного изучения электростатических и стационарных магнитных полей.

В гауссовой системе запись уравнений поля усложняется. Приводим эти уравнения в дифференциальной форме:

I уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

II уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

уравнения для дивергенций векторов индукции:

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho;$$



уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t};$$

материальные уравнения:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

### § 38. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

#### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ВЕКТОР УМОВА — ПОЙНТИНГА

При экспериментальном исследовании мы обнаруживаем электромагнитное поле по его силовым действиям, при которых энергия поля превращается в какие-либо другие формы энергии. Полная энергия электромагнитного поля является суммой электрической и магнитной энергий и согласно формулам (16.7) и (36.15) выражается формулой

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon_0 E^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \mu \mu_0 H^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV. \end{aligned} \quad (38.1)$$

Для плотности полной энергии электромагнитного поля имеем:

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon \epsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} (\vec{D} \vec{E} + \vec{B} \vec{H}). \quad (38.2)$$

Электромагнитное поле может переносить электромагнитную энергию (поток энергии). Вычислим поток электромагнитной энергии в однородной среде, исходя из уравнений Максвелла § 37. Для этого умножим обе стороны I уравнения скалярно на  $\vec{E}$ , а обе стороны II уравнения — на  $\vec{H}$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} \end{aligned} \right\}$$

Запишем результаты умножения:

$$\begin{aligned} \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mu_0 H^2), \\ \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \epsilon_0 E^2) + \vec{j} \vec{E}. \end{aligned} \quad (38.3)$$

Преобразуем последнее слагаемое в соответствии с законом Ома:

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}),$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}_{\text{стор}}$$

и

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \epsilon_0 E^2) + \frac{j^2}{\gamma} - \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (38.4)$$

Используем формулу векторного анализа

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$$

и соответственно вычтем из уравнения (38.3) выражение (38.4):

$$\begin{aligned} \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mu_0 H^2) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \epsilon_0 E^2) - \frac{j^2}{\gamma} + \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}}. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение:

$$\vec{j} \vec{E}_{\text{стор}} = \frac{j^2}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) + \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}]. \quad (38.5)$$

Выражение (38.5) представляет собой наиболее общую запись закона сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме. Рассмотрим физический смысл отдельных величин, входящих в уравнение (38.5). Произведение  $\vec{j} \vec{E}_{\text{стор}}$  представляет собой работу сторонних ЭДС в единице объема за единицу времени, т. е. мощность; частное  $\frac{j^2}{\gamma}$  — джоулеву теплоту, выделенную в единице объема за единицу времени; частная производная  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right)$  — приращение электромагнитной энергии единицы объема за единицу времени, а  $\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}]$  — поток энергии, вытекающей из единицы объема за единицу времени. Следовательно, выражение (38.5) читается так: в единице объема за единицу времени работа сторонних ЭДС идет на покрытие джоулевых потерь, на увеличение электромагнитной энергии и на покрытие убыли энергии, вытекающей наружу. Вектор  $[\vec{E} \vec{H}]$  представляет собой поток энергии через единичную площадку, расположенную перпендикулярно потоку. При  $\vec{E} = \text{const}$  и  $\vec{H} = \text{const}$  поток постоянен и вектор  $[\vec{E} \vec{H}]$  выражает поток энергии за единицу времени, при переменных  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  он выражает мгновенное значение потока.

Введем обозначение:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}], \quad (38.6)$$

где  $\mathbf{S}$  называют вектором Умова—Пойнтинга; его физический смысл разъяснен выше.

Умножим все члены равенства (38.5) на элемент объема и проинтегрируем по всему объему поля  $V$ :

$$\int_V \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}} dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) dV + \int_V \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV. \quad (38.7)$$

Наконец, после преобразования последнего интеграла согласно формуле Остроградского—Гаусса получим:

$$\int_V \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}} dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) dV + \oint_{\sigma} [\vec{E} \vec{H}]_n d\sigma \quad (38.8)$$

(обозначим поверхность буквой  $\sigma$ , так как буквой  $S$  обозначен вектор Умова—Пойнтинга). Здесь интеграл в левой части означает работу  $P$  сторонних ЭДС в объеме  $V$ , первый интеграл справа—количество теплоты  $Q_m$ , выделяющееся в этом объеме, затем идет приращение электромагнитной энергии  $\frac{\partial W}{\partial t}$  в этом объеме и, наконец, поток электромагнитной энергии через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $V$ . При постоянстве всех величин, входящих в данное выражение, работа, теплота и т. д. относятся к единице времени; в общем случае следует говорить о мгновенных значениях соответствующих мощностей.

Выражение (38.8) представляет собой закон сохранения энергии в интегральной форме. С учетом введенных обозначений этой формуле можно придать следующий вид:

$$P = Q_m + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_{\sigma} S_n d\sigma. \quad (38.9)$$

Итак, ежесекундный поток энергии  $\Sigma$  через замкнутую поверхность выражается интегралами

$$\Sigma = \oint_{\sigma} S_n d\sigma = \oint_{\sigma} [\vec{E} \vec{H}]_n d\sigma \quad (38.10)$$

(теорема Умова—Пойнтинга).

Поток электромагнитной энергии за единицу времени через незамкнутую поверхность выражается аналогично.

Из выражения (38.6) вытекает, что вектор Умова—Пойнтинга перпендикулярен векторам поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , т. е. электромагнитная энергия течет в направлении, перпендикулярном этим векторам.

Рассмотрим теперь поток энергии в цепи постоянного тока (рис. 68). Работа сторонних сил совершается в источнике, из которого энергия вытекает наружу; затем энергия перемещается вдоль проводника и извне постепенно втекает в проводник, переходя здесь в джоулеву теплоту. Это подтверждает направление

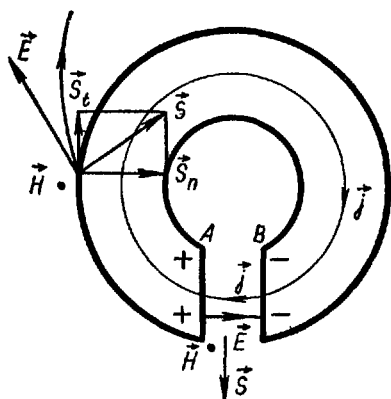


Рис. 68

вектора Умова — Пойнтинга, показанное на рисунке 68. На участке  $AB$  (внутри источника) ток идет от  $B$  к  $A$ , а поле  $\vec{E}$  направлено от  $A$  к  $B$ . Следовательно, вектор Умова — Пойнтинга направлен из источника наружу. У произвольной точки  $C$ , лежащей на поверхности проводника, электрический вектор направлен по касательной к силовой линии; магнитный вектор обозначен точкой, т. е. направлен «на нас»; следовательно, вектор Умова — Пойнтинга направлен внутрь проводника. Разлагаем его на две составляющие:

нормальную  $S_n$  и тангенциальную  $S_t$ . Наличие обеих составляющих выражает тот факт, что энергия здесь частично втекает в проводник, частично перемещается дальше вдоль проводника в направлении тока.

Нарисованная здесь общая энергетическая картина существенно отличается от распространенных представлений о механизме передачи электромагнитной энергии вдоль токонесящих проводов. Теория Максвелла, на которой основывается наша картина, приводит к фундаментальному различию между ролью проводников и непроводников в процессе передачи энергии. Неверно считать заряды, являющиеся носителями тока, также и носителями электромагнитной энергии тока. Носителем энергии является поле тока, локализованное как в проводнике, так и в окружающем его пространстве; в проводнике происходит лишь поглощение энергии, т. е. ее превращение в другие виды энергии.

### § 39. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В § 18 рассматривалась теорема единственности решения основной задачи электростатики. Рассмотрим теперь более общую теорему единственности решения уравнений электродинамики.

Эта теорема устанавливает степень полноты системы уравнений поля, поскольку при неполноте системы возникает опасность неоднозначности решения задач электродинамики; вместе с тем теорема позволяет считать полученное тем или иным способом решение задачи единственным. Теорема единственности базируется на анализе смешанной задачи Коши, когда заданы начальные условия для некоторого момента времени и граничные значения для всего рассматриваемого интервала времени.

Задачу можно сформулировать так: требуется найти напря-

женности полей  $\vec{E}(x, y, z)$  и  $\vec{H}(x, y, z)$  в конечном объеме  $V$  для промежутка времени от 0 до  $T$ , если при  $t=0$  эти напряженности в данном объеме заданы, а на границе заданы тангенциальные составляющие либо  $E_t(x, y, z)$ , либо  $H_t(x, y, z)$  для интервала  $0 \leq t \leq T$ . Для доказательства однозначности решения при указанных условиях исходим из интегральной формы закона сохранения энергии при отсутствии сторонних ЭДС (38.8):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_{\sigma} [\vec{E}\vec{H}]_n d\sigma - \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV, \quad (39.1)$$

где  $W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2) dV$  является существенно положительной величиной. Доказательство проведем от противного. Предположим, что имеются два решения задачи  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , а затем покажем, что двух решений быть не может.

Исходя из линейности уравнений поля, можно утверждать, что разности этих решений  $\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$  также являются решениями, но с иными начальными условиями  $\vec{E}' = 0, \vec{H}' = 0$  при  $t=0$  и с граничными условиями  $E'_t = 0$ , либо  $H'_t = 0$  для  $0 \leq t \leq T$ .

При подстановке этих условий в уравнение (39.1) в поверхностном интеграле появляется величина

$$[\vec{E}'\vec{H}']_n = \vec{n} [\vec{E}'\vec{H}'],$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор к поверхности, охватывающий объем  $V$ . Поскольку циклическая перестановка векторов не изменяет величины смешанного векторного произведения, имеем:

$$\vec{n} [\vec{E}'\vec{H}'] = \vec{E}' [\vec{H}'\vec{n}] = \vec{H}' [\vec{n}\vec{E}']. \quad (39.2)$$

Второе выражение пропорционально  $E'_t$ , а третье пропорционально  $H'_t$ , откуда на основании граничных условий следует, что  $[\vec{E}'\vec{H}'] = 0$ . Из выражения (39.1) вытекает, что

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = - \int_V \frac{j'^2}{\gamma} dV = 0. \quad (39.3)$$

Вместе с тем поскольку полная энергия  $W'$  не может быть отрицательной, а согласно начальным условиям при  $t=0$  она равна нулю, то случай  $\frac{\partial W'}{\partial t} < 0$  невозможен. Другой случай:  $\frac{\partial W'}{\partial t} > 0$  — исключается условием (39.3). Остается только возможность для произвольного  $t \geq 0$ :

$$W' = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon\epsilon_0 E'^2 + \mu\mu_0 H'^2) dV = 0.$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения во всех точках это возможно лишь при условии  $\vec{E}' = \vec{H}' = 0$

Таким образом, теорема об однозначности решения задачи Коши для исходных уравнений доказана.

Теорема однозначности не требует полного знания значений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на границе, достаточно задания тангенциальной составляющей одного из векторов —  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ .

#### § 40. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

Понятие импульса (количества движения) долгое время применялось только к механическим движениям тел и частиц вещества. Затем выяснилось, что импульс присущ и другим формам движения материи. Это позволило сформулировать универсальный закон сохранения импульса, который совместно с законами сохранения энергии, заряда и ряда других величин образует фундамент научного материалистического миропонимания.

Перейдем к рассмотрению импульса электромагнитного поля. Пусть поле действует на объемные заряды, распределенные в пространстве с плотностью  $\rho$ , и токи с объемной плотностью  $\vec{j}$ . На заряды и токи единичного объема действует сила [ср. (29.20)]

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}]. \quad (40.1)$$

Полная сила  $\vec{F}$ , действующая на заряды и токи в объеме  $V$ , выделенном в электромагнитном поле, выразится интегралом

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \int_V (\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}]) dV. \quad (40.2)$$

По известной теореме механики сила  $\vec{F}$  определяет изменение со временем импульса  $G_{\text{мех}}$  всего вещества, заключенного в объеме  $V$  (учитывая при этом только силы электромагнитного происхождения):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{G}_{\text{мех}}. \quad (40.3)$$

Преобразуем уравнение (40.1), подставив вместо  $\rho$  и  $\vec{j}$  их выражения из уравнений Максвелла (§ 37):

$$\rho = \text{div } \vec{D}, \quad \vec{j} = \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В результате получим:

$$\vec{f} = \vec{E} \text{ div } \vec{D} + [\text{rot } \vec{H} \cdot \vec{B}] - \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{B} \right]. \quad (40.4)$$

Принимая во внимание, что  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , добавим к правой части уравнения (40.4) равное нулю выражение  $\vec{H} \operatorname{div} \vec{B}$  и преобразуем последний член  $\left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{B} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}] - \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{D} \right]$ . Тогда

$$\vec{f} = \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{B}] + [\operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{D}] - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}]. \quad (40.5)$$

Составляющая силы  $\vec{f}$  по оси  $x$  равна:

$$f_x = E_x \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H}_x \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{B}]_x + [\operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{D}]_x - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}]_x;$$

ее можно привести к виду

$$f_x = \operatorname{div} \vec{\mathfrak{F}} - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}]_x, \quad (40.6)$$

где компоненты  $\vec{\mathfrak{F}}$  выражаются так:

$$\mathfrak{F}_x = D_x E_x + H_x B_x - \frac{1}{2} (\vec{D} \vec{E} + \vec{H} \vec{B})_x,$$

$$\mathfrak{F}_y = D_x E_y + H_x B_y,$$

$$\mathfrak{F}_z = D_x E_z + H_x B_z.$$

Введем в выражение (40.6) равенство  $[\vec{D} \vec{B}] = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}]$  и перейдем к составляющей общей силы по оси  $x$ :

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathfrak{F}} dV - \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] dV. \quad (40.7)$$

Составляющие по другим осям координат записываются аналогично. Заменим в выражении (40.7) силу  $F$  ее выражением (40.3):

$$\frac{d}{dt} \left( G_{\text{мех}, x} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}]_x dV \right) = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathfrak{F}} dV \quad (40.8)$$

и преобразуем последний интеграл по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\mathfrak{F}} dV = \oint_S \mathfrak{F}_n dS = F_{\text{пов}, x}.$$

Он, очевидно, представляет собой  $x$ -ю составляющую силы, действующей на поверхность, охватывающую объем  $V$ . Для других составляющих  $\vec{F}$  формулы аналогичны. Переходя от составляющих к векторам, можно записать:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{G}_{\text{мех}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] dV \right) = \vec{F}_{\text{пов}}. \quad (40.9)$$

Если на поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ , векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  равны нулю, то  $\vec{F}_{\text{пов}} = 0$ . Это условие выполняется, если

поверхность интегрирования  $S$  бесконечно удалена, а все заряды и токи локализованы в ограниченном объеме, образующем замкнутую систему. Тогда

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{G}_{\text{мех}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E}\vec{H}] dV \right) = 0,$$

следовательно,

$$\vec{G}_{\text{мех}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E}\vec{H}] dV = \text{const.} \quad (40.10)$$

Таким образом, при взаимодействии зарядов и токов в определенном объеме с электромагнитным полем сохраняется не импульс вещества  $\vec{G}_{\text{мех}}$ , а его сумма с вектором  $\epsilon_0 \mu_0 \int_V [\vec{E}\vec{H}] dV$ , который имеет размерность импульса. Этот интеграл выражает импульс электромагнитного поля в объеме  $V$ , а вектор  $\epsilon_0 \mu_0 [\vec{E}\vec{H}] = \vec{g}_{\text{эм}}$  — его объемную плотность, соответственно

$$\int_V \vec{g}_{\text{эм}} dV = \vec{G}_{\text{эм}}. \quad (40.11)$$

Очевидно, в электромагнитном поле сохраняется сумма импульсов вещества и поля:

$$\vec{G}_{\text{мех}} + \vec{G}_{\text{эм}} = \text{const.} \quad (40.12)$$

Следовательно, закон сохранения импульса выполняется строго только в том случае, когда наряду с механическим импульсом  $\vec{G}_{\text{мех}}$  вещества будет учтен и импульс  $\vec{G}_{\text{эм}}$  электромагнитного поля.

Из закона сохранения импульса вытекает, что электромагнитное поле при отражении или поглощении его телом оказывает на него давление (световое давление). Если бы тело было свободным, то под действием светового давления оно приобрело бы ускорение в направлении движения поля, т. е. увеличился бы его импульс. Приращение импульса одного тела связано с убылью импульса других частей системы. В нашем случае убывает импульс электромагнитного поля.

Давление, оказываемое электромагнитной волной на поглощающее тело, равно импульсу, передаваемому волной телу в единицу времени и на единицу поверхности. При падении волны по нормали к поверхности и ее полном поглощении поверхностью давление равно:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} g_{\text{эм}} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E H = \epsilon_0 E^2 = w^*, \quad (40.13)$$

\* В электромагнитной волне, как будет показано ниже, соблюдается равенство  $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$  (в вакууме).



где  $\omega = \frac{1}{2}(ED + HB)$  — плотность электромагнитной энергии волны. Следовательно, давление электромагнитной волны в этом случае численно равно плотности энергии волны.

В случае полного отражения от поверхности тела импульс волны меняется на противоположный и поверхности тела передается импульс в два раза больший, чем при полном поглощении. Соответственно, и давление в этом случае будет в два раза больше ( $p = 2\omega$ ).

Выше рассматривался вектор Умова — Пойнтинга, с которым связан импульс электромагнитного поля. Можно создать разнообразные устройства, в полости которых осуществляется циркуляция электромагнитной энергии по замкнутым путям. В таких случаях проявляется новый параметр электромагнитного поля — момент импульса (момент количества движения) относительно оси вращения.

Если такое устройство и циркулирующее в нем электромагнитное поле образуют замкнутую систему, то благодаря взаимодействию поля с зарядами и токами в стенках полости изменение момента импульса поля  $\vec{L}_{эм}$  сопряжено с изменением момента импульса устройства  $\vec{L}_{мех}$  и в согласии с законом сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{мех} = - \frac{d}{dt} \vec{L}_{эм},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{мех} + \vec{L}_{эм}) = 0.$$

Процессы обмена моментом импульса между электромагнитным полем (светом) и веществом имеют важное значение в атомной физике.

#### § 41. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ. УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Переменное электромагнитное поле в общем случае не удовлетворяет условиям квазистационарности (§ 31). В силу этого в выражения для векторов поля входят скорость распространения и время, иными словами, величина векторов поля в какой-либо момент времени определяется не тем распределением  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{i}$ , которое наблюдается в этот момент времени, а распределением их в некоторый предыдущий момент времени. Изменение векторов поля не следует синхронно за изменениями источников поля, а запаздывает относительно их; в периодической функции  $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$  частное  $\frac{r}{v}$  как раз и выражает запаздывание векторов

поля, равное времени распространения электромагнитного процесса со скоростью  $v$  на расстоянии  $r$  от источника до точки наблюдения.

При исследовании стационарных и квазистационарных полей большую пользу приносит введение потенциалов: скалярного электрического потенциала  $\varphi$  и векторного потенциала магнитного поля  $\vec{A}$ . Как мы видели, вычисление этих величин по заданному распределению зарядов и токов выполняется проще, чем непосредственное вычисление напряженностей. Переход от потенциалов к векторам поля осуществляется простым дифференцированием.

Несколько видоизменив определение потенциалов, можно пользоваться ими в общем случае переменного электромагнитного поля. Для упрощения выкладок предполагаем, что во всей среде соблюдается условие постоянства проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Определение векторного потенциала  $\vec{A}$  сохраняется:

$$\mu\mu_0\vec{H} = \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (41.1)$$

Вводим векторный потенциал во II уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{A}) = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

откуда следует, что

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (41.2)$$

Таким образом, вектор, стоящий в скобках, не имеет вихрей; он, однако, может иметь источники. Полагаем  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$ , откуда

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (41.3)$$

Последнее выражение означает, что в общем случае электрическое поле состоит из вихревой и потенциальной частей.

Преобразуем теперь I уравнение Максвелла, используя выражения (41.1 и 41.3):

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot rot } \vec{A} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) + \vec{j}.$$

Используя формулу векторного анализа  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$ , получаем:

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mu\mu_0 \vec{j};$$

наконец, группируем:

$$\text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} = -\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu\mu_0 \vec{j}. \quad (41.4)$$

Между векторным и скалярным потенциалами переменного поля можно установить некоторое дополнительное условие связи. Лоренц предложил такое условие в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (41.5)$$

Условие Лоренца (41.5) в случае стационарных полей приводит к следствию, уже использованному ранее (28.3). Из условия Лоренца и из выражения (41.4) выводим дифференциальное уравнение для векторного потенциала электромагнитного поля:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \vec{j}. \quad (41.6)$$

Получим теперь дифференциальное уравнение для скалярного потенциала  $\varphi$ , исходя из выражения для дивергенции вектора электрической индукции  $\vec{D}$ :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho.$$

Согласно уравнению (41.3) введем сюда значение  $\vec{E}$ :

$$\operatorname{div} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

откуда

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Выразим далее  $\operatorname{div} \vec{A}$  в соответствии с условием Лоренца (41.5) и введем символическое обозначение лапласиана  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ . После простых преобразований приходим к дифференциальному уравнению для скалярного потенциала электромагнитного поля:

$$\Delta \varphi - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (41.7)$$

Рассмотрим два важных равенства.

1) Из сопоставления численных значений постоянных  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м и скорости света следует, что произведение  $\varepsilon_0 \mu_0$  равно обратному значению квадрата скорости света  $c^2$  в вакууме:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (41.8)$$

Из размерности единиц измерения  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  (Ф/м и Гн/м) вытекает, что  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  имеет размерность скорости.

2) Запишем отношение скорости света  $c$  в вакууме к квадратному корню из произведения относительных проницаемостей среды  $\varepsilon$  и  $\mu$ :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (41.9)$$

Поскольку  $\epsilon$  и  $\mu$  — безразмерные величины, записанное отношение имеет размерность скорости. Как выяснится несколько позже, скорость  $v$  представляет собой скорость распространения электромагнитных процессов в среде, характеризуемой значениями относительных проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$ . Равенства (41.8) и (41.9) позволяют записать громоздкий множитель  $\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0$  в уравнениях (41.6) и (41.7) как  $\frac{1}{v^2}$ . Тем самым эти уравнения приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &\equiv \square\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &\equiv \square\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j}. \end{aligned} \right\} \quad (41.10)$$

Уравнения типа (41.10) хорошо изучены и носят название уравнений Даламбера; символ  $\square$  обозначает оператор Даламбера. В случае идеального диэлектрика ( $\gamma=0$ ,  $\rho=0$ ) они переходят в волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \\ \Delta\vec{A} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

В случае стационарных полей ( $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ ,  $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ ) уравнения Даламбера вырождаются в уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \\ \Delta\vec{A} &= -\mu\mu_0\vec{j}. \end{aligned}$$

Решениями уравнений Пуассона в однородном безграничном пространстве являются интегральные выражения для потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \\ \vec{A} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (41.11)$$

В математическом анализе доказывается, что решениями уравнений Даламбера (41.10) в однородном безграничном пространстве являются интегралы

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z', t')}{r} dV, \quad (41.12)$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(x', y', z', t')}{r} dV, \quad (41.13)$$

где

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \text{ и } t' = t \pm \frac{r}{v}.$$

Если в выражении для  $t'$  выбрать знак «—», мы получим запаздывающие потенциалы, а если «+», то опережающие. Через  $r$  обозначено расстояние от точки источника  $(x', y', z')$  до точки наблюдения  $(x, y, z)$ ,  $v$ —скорость распространения электромагнитных возмущений. Стоящие под интегралом выражения  $\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)$  и  $\vec{j}\left(t - \frac{r}{v}\right)$  следует понимать не как произведения, а как функции аргумента  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ . Например, при часто встречающихся гармонических колебаниях они будут иметь вид

$$\rho_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{v}\right) \text{ и } \vec{j}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Введение этих функций вместо постоянных значений  $\rho$  и  $\vec{j}$  обусловлено запаздыванием потенциалов в точке наблюдения относительно мгновенных значений  $\rho$  и  $\vec{j}$  в источнике.

В выражениях для потенциалов стационарных полей (41.11) и переменных полей (41.12 и 41.13) существует, однако, некоторое сходство. При определении скалярного потенциала в данной точке наблюдения в момент времени  $t$  нужно разбить все пространство на элементарные объемы  $dV$  и определить заряды  $dQ$ , находившиеся в этих объемах в предшествующие моменты времени  $t - \frac{r}{v}$ :

$$dQ = \rho \left(t - \frac{r}{v}\right) dV.$$

Разделив затем  $dQ$  на  $4\pi\epsilon_0 r$  и сложив все полученные выражения, находим скалярный потенциал. Аналогично находят составляющие векторного потенциала.

Таким образом, потенциалы переменного поля определяются аналогично потенциалам стационарного поля с тем, однако, важным дополнением, что в каждый момент времени  $t$  потенциалы поля, возбуждаемого на расстоянии  $r$  от элемента  $dV$  зарядами и токами этого элемента, определяются не одновременными с  $t$ , а предшествующими значениями этих зарядов и токов. Можно условно считать, что потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  распространяются из  $dV$

по всем направлениям со скоростью  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , убывая при этом обратно пропорционально расстоянию  $r$ .

Из сказанного ясно, почему потенциалы  $\phi$  и  $\vec{A}$  переменного электромагнитного поля называются запаздывающими потенциалами. Изложенные здесь соображения уточняются в главе VII.

### Упражнения

34. Покажите, что джоулева теплота, выделяемая током в участке проводника, равна количеству электромагнитной энергии, втекающей в этот участок проводника (рис. 69)

У к а з а н и е. В целях упрощения берем проводник в виде прямого цилиндра с радиусом  $a$ . Напряженность магнитного поля на поверхности цилиндрического проводника (упр. 29) равна

$$H = \frac{I}{2\pi a} = \frac{\pi j a^2}{2\pi a} = \frac{j a}{2}.$$

У поверхности проводника тангенциальная составляющая  $E_t$  равна напряженности поля внутри проводника, поэтому по закону Ома  $E_t = E = \frac{j}{\gamma}$ .

Поскольку  $E_t$  и  $H$  взаимно перпендикулярны, можно в выражении для вектора Умова—Пойтинга перейти к скалярным значениям.

35. Покажите, что при изменении во времени магнитного поля с осевой симметрией [ $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = H(r, t)$ ] возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности с центрами на оси магнитного поля. Как известно, на основе этого явления действует бетатрон. Примите, что  $\epsilon = \mu = 1$  (вакуум)

У к а з а н и е. Исходите из II уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

где  $\vec{H}$  направлено по оси  $z$ , и запишите это уравнение в цилиндрической системе координат.

При анализе решения ответьте на вопрос: каким образом в бетатроне добиваются стационарности вихревого электрического поля на протяжении небольшого промежутка времени?

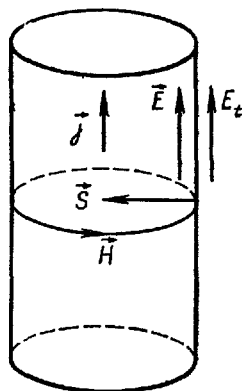


Рис. 69

## VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 42. ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уже в 1863 г. Максвелл на основе полученных им уравнений электромагнетизма предсказал существование электромагнитных волн. Покажем, что в однородной изотропной непроводящей среде ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = 0$ ) векторы поля удовлетворяют волновому уравнению, причем скорость распространения волн  $v$  равна  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ . Выпишем снова систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (42.1)$$

В однородной изотропной среде  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ , а из условия  $\gamma = 0$  (поскольку  $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ ) следует, что  $\vec{j} = 0$ . Из закона сохранения заряда  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  вытекает, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , т. е. что  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Но независящее от времени распределение плотности заряда может породить только постоянное поле, и если нас интересуют лишь переменные поля, то можно считать, что  $\rho = 0$ . Это позволяет записать систему уравнений Максвелла в виде

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (42.2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (42.3)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (42.4)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (42.5)$$

Дифференцируя уравнение (42.1) по времени и заменяя в полученном уравнении  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  из уравнения (42.2), имеем:

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot rot } \vec{E} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (42.6)$$

Пользуясь формулой векторного анализа  $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$  и принимая во внимание уравнение (42.3), получим:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (42.7)$$

где применено обозначение из уравнения (41.9). Аналогичным образом, исключая  $\vec{E}$  из уравнений (42.1) и (42.2), находим, что вектор  $\vec{H}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (42.8)$$

Уравнения (42.7) и (42.8)—это волновые уравнения соответственно для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Мы подробно займемся решением этих уравнений позже, а пока сделаем лишь несколько замечаний.

Из того, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют волновому уравнению, вытекает, что электромагнитное поле, которое характеризуют эти векторы, может распространяться в виде волны. Скорость распространения электромагнитной волны, как это видно из уравнения (42.6), определяется исключительно свойствами среды. Из уравнений (42.7) и (42.8) следует, что электромагнитные волны могут распространяться в среде. Но волны возникают лишь тогда, когда их возбуждают. Из того, что векторы поля удовлетворяют волновому уравнению, вовсе не вытекает какой-либо практический способ возбуждения электромагнитных волн. Получить экспериментально электромагнитные волны Г. Герцу удалось в 1888 г., т. е. лишь двадцать лет спустя после предсказания Максвелла.

Электромагнитные волны возбуждаются зарядами и токами. Но, возникнув, электромагнитная волна существует и тогда, когда породивших ее токов и зарядов уже нет. Этим переменное поле отличается от статического, которое не может существовать без порождающих его зарядов.

Рассмотрим теперь решения волнового уравнения. Начнем с самого простого случая—пространственно одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \quad (42.9)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$s(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad (42.10)$$

где  $f_1$  и  $f_2$ —произвольные функции, а аргументы этих функций представляют собой специальные комбинации переменных  $x$ ,  $t$  и постоянной  $v$ . Смысл этих решений прост. Если в момент  $t=0$



графически изобразить функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , то в последующие моменты времени эти функции смещаются вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$  как целое:  $f_1$  — вправо, а  $f_2$  — влево.

Мы ограничимся в дальнейшем так называемыми гармоническими монохроматическими волнами, т. е. синусоидальными волнами с одной циклической частотой  $\omega = 2\pi\nu$ .

Гармоническая зависимость любой величины  $s$  от времени может быть представлена в общем виде так:

$$s(x, t) = s_0(x) e^{i\omega t},$$

где  $s_0$  — значение рассматриваемой величины в точке с координатой  $x$  в начальный момент времени  $t=0$ . Решение волнового уравнения (42.8), удовлетворяющее условию (42.10) и дающее гармоническую зависимость  $s$  от  $t$ , имеет вид

$$s(x, t) = s_0 e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)}. \quad (42.11)$$

Фаза волны, т. е. ее состояние в данной точке пространства в данный момент времени, определяется выражением  $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ . В данный момент времени поверхность равной фазы — волновой фронт — описывается уравнением  $x = \text{const}$ . Это плоскость, нормальная к оси  $x$  и перпендикулярная направлению распространения волны. Поверхность равной фазы (волновой фронт) распространяется вправо с фазовой скоростью  $v$ . Поскольку волновой фронт является плоскостью, мы получили плоскую волну.

Нам понадобится еще выражение для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, характеризуемое постоянным единичным вектором  $\vec{m}$ . Поскольку уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{m}$ , имеет вид  $\vec{m} \vec{r} = \text{const}$ , плоскую волну можно записать в виде

$$s(\vec{r}, t) = s_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{m} \vec{r}}{v}\right)} = s_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v} \vec{m} \vec{r}\right)}. \quad (42.12)$$

Введем волновой вектор  $\vec{k}$ , определив его как

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{m}, \quad (42.13)$$

где  $\vec{m}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Тогда плоская волна может быть представлена в виде

$$s(\vec{r}, t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \quad (42.14)$$

Убедимся, что уравнение (42.14) является решением пространственно-трехмерного волнового уравнения. Удобно ввести оператор Даламбера  $\square$ :

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (42.15)$$

где через  $\Delta$  обозначен оператор Лапласа. Тогда волновое уравнение для скалярной величины  $s$  можно записать так:

$$\square s = 0. \quad (42.16)$$

Применяя к выражению (42.14) оператор  $\square$ , получим:

$$\square s(r, t) = \left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) s_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) s, \quad (42.17)$$

откуда в силу уравнения (42.13) приходим к выражению (42.16).

Нам понадобится еще решение волнового уравнения, зависящее только от расстояния до некоторой точки. В сферических координатах это будет решение  $s = s(r, t)$ . Общее решение волнового уравнения в этом случае имеет вид

$$s(r, t) = A \frac{\varphi_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + B \frac{\varphi_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (42.18)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные функции определенной комбинации переменных  $t$ ,  $r$  и скорости  $v$ .

Волновой фронт, т. е. поверхность, в точках которой фаза колебаний одинакова, в решении (42.18) уже является сферой, поэтому функция  $s(r, t)$  описывает сферические волны. Распространяются сферические волны по радиус-вектору от точки их возбуждения (центра). Существенно, что, в отличие от плоской волны, амплитуда сферической волны не постоянна, а обратно пропорциональна расстоянию. Функция  $\varphi_1$  определяет расходящуюся (от центра) волну, а  $\varphi_2$  — сходящуюся. Уравнение гармонической сферической волны можно, очевидно, записать так:

$$s(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \frac{B}{r} e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (42.19)$$

Вектор  $\vec{k}$  называют волновым вектором потому, что он имеет непосредственное отношение к длине волны. Длиной волны, как известно, называется расстояние (отсчитанное в направлении распространения волны) между двумя ближайшими точками волны, обладающими одинаковой фазой (в данный момент времени). Рассмотрим плоскую волну (42.14) и допустим, что фазы в точках  $r$  и  $r + \lambda$  одинаковы. Тогда в любой момент времени должно соблюдаться равенство

$$e^{-ikr} = e^{-ik(r+\lambda)}.$$

Это может быть лишь в том случае, если  $|k|\lambda = 2\pi$ , т. е.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

### § 43. СВОЙСТВА ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Для простоты будем рассматривать монохроматические плоские волны, но результаты, которые мы получим, справедливы для любых плоских волн. Мы видели, что в однородной изотропной непроводящей среде векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в соответствии с волновыми уравнениями (42.7) и (42.8) при условии (42.13), т. е.  $k = \frac{\omega}{v}$ . Если представить пространственно-временное изменение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в виде плоских волн

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \quad (43.1)$$

то эти выражения, безусловно, удовлетворяют уравнениям (42.7) и (42.8). Однако, чтобы они удовлетворяли уравнениям Максвелла, на них следует наложить еще дополнительные условия. Подставляя выражение (43.1) соответственно в (42.4) и (42.5), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}) = -i \vec{k} \vec{E}, \\ 0 &= \operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} (\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}) = -i \vec{k} \vec{H} \end{aligned}$$

(по поводу этих равенств см. «Дополнения», 1). Равенство нулю означает, что  $\vec{E} \perp \vec{k}$  и  $\vec{H} \perp \vec{k}$ . Кроме того, нетрудно установить, что  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны. Чтобы убедиться в этом, подставим выражения (43.1) в левые части уравнений (42.2) и (42.3) и получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{rot} (\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}) = -i [\vec{k} \vec{H}], \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \operatorname{rot} (\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}) = -i [\vec{k} \vec{E}], \end{aligned}$$

(по поводу этих равенств см. «Дополнения», 1). Тогда уравнения (42.2) и (42.3) примут вид

$$-i [\vec{k} \vec{H}] = i \epsilon \epsilon_0 \omega \vec{E}, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\frac{1}{\omega \epsilon \epsilon_0} [\vec{k} \vec{H}], \quad (43.2)$$

$$-i [\vec{k} \vec{E}] = -i \mu \mu_0 \omega \vec{H}, \quad \text{или} \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu \mu_0} [\vec{k} \vec{E}]. \quad (43.3)$$

Достаточно умножить выражение (43.2) на  $\vec{H}$  или выражение (43.3) на  $\vec{E}$ , чтобы получить:

$$\vec{E} \vec{H} = 0. \quad (43.4)$$

Из полученных формул следует, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$  взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов в том порядке, в котором они написаны. Взаимное расположение этих

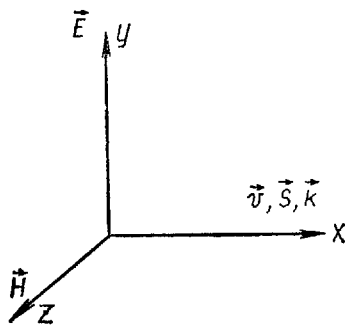


Рис. 70

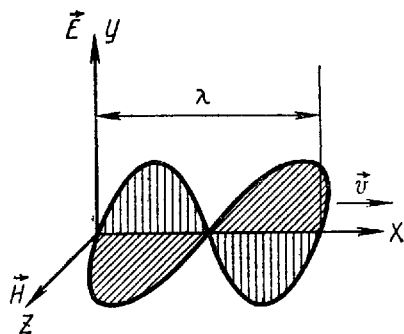


Рис. 71

векторов приведено на рисунке 70. На рисунке 71 представлен график плоской электромагнитной волны.

Вектор  $\vec{k}$  определяет направление распространения волны. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению  $\vec{k}$ . Таким образом, электромагнитная волна в указанных условиях является поперечно-поляризованной (направление колебаний перпендикулярно направлению распространения). В плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны для направления вектора  $\vec{E}$  (и перпендикулярного к нему вектора  $\vec{H}$ ) никаких ограничений нет. В силу линейности уравнений Максвелла, или, что то же самое, в силу суперпозиции полей, решением является любая сумма полей, у которых векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в указанной плоскости.

Напомним, что если в электромагнитной волне вектор  $\vec{E}$  имеет единственное направление (и, следовательно, единственное направление имеет вектор  $\vec{H}$ ), то волна называется линейно-поляризованной. Ниже будут приведены доказательства того, что свет представляет собой электромагнитные волны, частоты которых лежат в определенном интервале. Если в световой волне вектор  $\vec{E}$  (и  $\vec{H}$ ) имеет всевозможные направления, то такой свет принято называть естественным. Следовательно, свет как плоская электромагнитная волна может быть в однородной среде как естественным, так и линейно-поляризованным.

Вычислим вектор Умова-Пойнтинга плоской электромагнитной волны:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] = \frac{1}{\omega\mu_0} [\vec{E} [\vec{k} \vec{E}]] = \frac{1}{\omega\mu_0} \vec{k} E^2. \quad (43.5)$$

Введем единичный вектор  $\vec{m}$  в направлении распространения волны ( $\vec{m} = \vec{k}/k$ ). Поскольку  $v = \omega/k$ ,  $k = \omega/v = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$ , то

$$\vec{S} = \frac{k}{\omega\mu\epsilon_0} E^2 \vec{m} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \vec{m}. \quad (43.6)$$

Найдем соотношение между абсолютными значениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоской волне. Из уравнений (43.2) и (43.3) имеем:

$$\vec{E} = -\frac{k}{\omega\epsilon\epsilon_0} [\vec{m} \vec{H}], \quad \vec{H} = \frac{k}{\omega\mu\mu_0} [\vec{m} \vec{E}]. \quad (43.7)$$

Имея в виду, что  $k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon\mu}}{c}$ , получим:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} [\vec{m} \vec{H}], \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} [\vec{m} \vec{E}]. \quad (43.8)$$

Учитывая, что векторы  $\vec{m}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны, находим соотношение между абсолютными значениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (43.9)$$

Из общего определения плотности электромагнитной энергии

$$\omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \quad (43.10)$$

с учетом уравнения (43.9) для плоской волны получим:

$$\omega = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (43.11)$$

Запишем теперь окончательное выражение для вектора Умова — Пойнтинга в плоской волне:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}} \epsilon\epsilon_0 E^2 \vec{m} = v\omega \vec{m}. \quad (43.12)$$

Полученное равенство имеет простой смысл. Через единичную площадку, поставленную перпендикулярно распространению волны, в единицу времени проходит энергия, заключенная в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой  $v$ . Эта энергия равна  $1 \cdot v \cdot \omega$ , т. е. значению вектора Умова — Пойнтинга (43.12).

В связи с фундаментальным значением вопросов, рассмотренных в § 42—43, необходимы некоторые методические обобщения.

В курсе средней школы учащиеся должны усвоить, что световые волны являются электромагнитными волнами определенной частоты. Перечислим факты, демонстрирующие единую природу световых и электромагнитных волн:

1. Явления дифракции и интерференции света, известные уже до появления теории Максвелла, указывали на волновую при-

роду света. Как мы видели в § 42, электромагнитное поле в определенных условиях также имеет волновой характер.

2. Скорость света в вакууме  $c$  многократно измерялась, а уточнения ее продолжают до настоящего времени ( $c$ —важнейшая физическая константа). С другой стороны, для скорости электромагнитных волн в вакууме мы получаем из теории Максвелла теоретическое значение  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Совпадение экспери-

ментального и теоретического значений скорости ( $c$  с высокой степенью точности)—прямое указание на единство природы света и электромагнитных волн.

3. Из геометрической оптики известно, что если скорость в вакууме равна  $c$ , а в среде— $v$ , то относительный показатель преломления среды  $n$  равен:  $\frac{c}{v}$ . Для электромагнитных волн из теории Максвелла следует, что  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , т. е. что  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ . Со-

поставляя экспериментальные значения  $n$  (например, из закона преломления света) и значение  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  для не слишком высоких частот, получаем близкие значения.

4. Световая волна поперечная. Это было открыто уже в начале XIX в. Мы видели, что плоские электромагнитные волны поперечные. Свет может быть линейно поляризованным или естественным. То же самое относится и к электромагнитной волне.

5. Все основные законы геометрической оптики могут быть получены на основании уравнений Максвелла для электромагнитных волн (см. § 46).

#### § 44. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ И РЕАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Выражения для векторов поля в случае монохроматических волн  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  представляют собой идеализацию распространения переменных физических полей. Для понимания характера этой идеализации воспользуемся некоторыми результатами так называемого гармонического анализа (фурье-анализа), основанного на теории интеграла Фурье.

Если функция  $f(x)$  или  $f(t)$  задана в бесконечном интервале ( $-\infty < x < \infty$  или  $-\infty < t < \infty$ ), ее можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (44.1)$$

где коэффициенты  $g(k)$  или  $g(\omega)$ , играющие роль спектральной плотности разложения функций  $f(x)$  и соответственно  $f(t)$ , определяются интегрированием:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (44.2)$$

Поскольку интеграл представляет собой предел некоторой суммы, то согласно выражению (44.1) заданная функция  $f(x)$  или  $f(t)$  может быть выражена в виде непрерывной суммы гармонических функций  $e^{ikx}$  или  $e^{i\omega t}$  с коэффициентами  $g(x)$  или  $g(\omega)$ . Если бы функции  $f(x)$  или  $f(t)$  были заданы на конечном интервале изменения переменных, то их разложение по гармоническим переменным было бы настоящей суммой, а набор частот представлял бы совокупность дискретных значений. В этом случае, как говорят, спектр частот был бы дискретным. В нашем случае функций, заданных в бесконечном интервале, спектр частот, определяемый спектральными функциями  $g(k)$  и  $g(\omega)$ , сплошной.

Рассмотрим важный пример—спектральное разложение конечного (во времени) гармонического колебания. Пусть  $f(t)$  отлична от нуля лишь в интервале  $-\tau_0 \leq t \leq \tau_0$ :

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}, & |t| \leq \tau_0, \\ 0, & |t| > \tau_0. \end{cases}$$

Функция  $f(t)$  задана на бесконечном интервале, поэтому мы используем интеграл Фурье.

Поскольку период колебания  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , число волн, содержащихся в ограниченной последовательности волн, равно:

$$n = \frac{2\tau_0}{T_0} = \frac{\tau_0 \omega}{\pi}.$$

Найдем спектральную плотность  $g(\omega)$ :

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-\tau_0}^{\tau_0} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0}{(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned} \quad (44.3)$$

Функция  $g(\omega)$  очень интересна. Прежде всего она отлична от нуля для всех частот  $\omega$ . Эта функция в этом интервале не монохроматическая волна с одной частотой, а волна, содержащая колебания многих частот. Как выглядит спектр частот конечной синусоиды, видно из выражения (44.3). При  $\omega \rightarrow \omega_0$  функция  $g(\omega)$ , как легко обнаружить, имеет максимальное значение  $g(\omega_0) = \frac{2\tau_0}{\sqrt{2\pi}}$ . При  $\omega \rightarrow \pm \infty$  функция  $g(\omega)$  обращается в нуль.

Найдем ширину спектрального интервала  $\Delta\omega$ , на котором функ-

ция  $g(\omega)$  превышает половину своего максимального значения. Границы этого интервала находят из условия  $g(\omega) = \frac{g(\omega_0)}{2}$ :

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0}{\omega_0 - \omega} = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi}}. \quad (44.4)$$

Из равенства (44.4) следует, что  $\sin(\omega_0 - \omega)\tau_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau_0$ , т. е.  $\sin\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ , где  $\varphi = (\omega_0 - \omega)\tau_0$ ; это выполняется для  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  (по абсолютному значению).

Поскольку искомый интервал  $\Delta\omega$  равен  $2(\omega_0 - \omega)$ , мы получим, что всегда  $\Delta\omega \cdot \tau_0 > \pi$ ,  $\Delta\omega > \pi/\tau_0$ .

Таким образом, чтобы получить  $\Delta\omega \sim 0$ , нужно взять  $\tau_0$  очень большим, т. е. бесконечную во времени синусоиду. С другой стороны, ясно, что достаточно длинная синусоида — это почти монохроматическая волна. Если требуется передать некоторую информацию, то нужно нарушить гармоническое изменение той или иной величины (например, синусоида «включается» или «выключается»). Таким образом, практически мы имеем дело всегда с немонохроматическими величинами. Если в волне все частоты близки друг к другу, т. е. «группируются» около некоторой частоты  $\omega_0$ , то говорят о группе волн. Как мы видели из выражения (44.3), достаточно длинный отрезок синусоиды как раз и представляет собой «группу волн».

Мы рассмотрели функцию  $f(t)$ , перейдем теперь к пространственной функции  $f(x)$ . Ее разложение (44.1) мы осуществим уже не по частотам  $\omega$ , а по волновым векторам  $\vec{k}$ . Рассмотрим «группу волн» в том смысле, что все волновые векторы  $\vec{k}$  близки к какому-то волновому вектору  $\vec{k}_0$ ; это значит, что  $g(k)$  отлично от нуля в интервале  $k_0 - \delta \leq k \leq k_0 + \delta$ . Возьмем некоторую функцию  $f(x, t)$  в момент времени  $t = 0$ , считая, что она представляет собой группу волн в указанном смысле. Тогда, представив эту функцию в виде интеграла Фурье, получим:

$$f(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk = \int_{k_0 - \delta}^{k_0 + \delta} g(k) e^{ikx} dk = \quad (44.5)$$

$$= \int_{\delta}^{+\delta} g(k_0 + z) e^{i(k_0 + z)x} dz = e^{ik_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_0 + z) e^{izx} dz = A(x) e^{ik_0 x}.$$

Прежде чем использовать полученный результат, поясним последние преобразования. В третьем звене равенств (44.5) учтено, что  $g(k)$  отлично от нуля в интервале  $k_0 - \delta, k_0 + \delta$ . В четвертом сделана замена переменных  $k = k_0 + z$ ,  $dk = dz$ . В последнем звене равенств (44.5) введено обозначение:

$$A(x) = \int_{-\delta}^{+\delta} g(k_0 + z) e^{izx} dz. \quad (44.6)$$



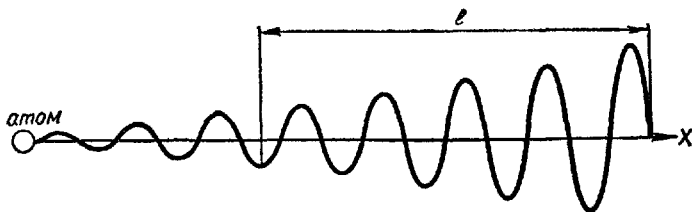


Рис. 72

Нетрудно выяснить характер изменения функции  $A(x)$ . Так как  $z = k - k_0$ , то  $z_{\max} = |k - k_0|_{\max} = \delta$ . Но по условию «группы» величина  $\delta$  мала. Значит, в выражение (44.6) входят только гармонические функции с малым  $z$ , т. е. медленно меняющиеся в пространстве. Из этого вытекает, что  $A(x)$  — медленно изменяющаяся в пространстве функция.

Мы пришли к очень важной интерпретации соотношения (44.5). Группа волн — это гармоническая во всем пространстве функция  $e^{ik_0x}$ , но с медленно меняющейся (в пространстве) амплитудой  $A(x)$ . Полученные нами результаты имеют непосредственное отношение к оптическим вопросам.

В классической электродинамике и волновой оптике моделью источника световых волн является упруго связанный электрон (модель атома Томсона). Такой электрон после возбуждения совершает затухающие колебания и соответственно излучает импульс, или, как принято говорить, пуг волн. На рисунке 72 изображена система (цуг) волн, распространяющихся от атома вдоль оси  $x$ .

В оптике большое значение имеет среднее время жизни возбужденного атома  $\tau$ , представляющее собой промежуток времени, начиная от момента возбуждения, в течение которого энергия электрона, полученная при возбуждении, убывает вследствие излучения в  $e$  раз (т. е. до 37% своего начального значения). Опыт и теория приводят к хорошо согласующемуся выводу о величине  $\tau \approx 10^{-8}$  с.

За длину цуга  $l$  принимают общую длину системы волн, которая испускается за время  $\tau$ ; при этом, очевидно, пренебрегают «хвостом» цуга, где колебания имеют небольшую амплитуду. Длину цуга можно найти как отрезок, который проходит волна за время  $\tau$ :  $l = c\tau \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3$  м. Обычно за длину светового цуга принимают отрезок от 3 до 5 м. Число длин волн  $n$ , укладываемых на этой длине, при  $\lambda = 0,6$  мкм (видимый свет) равно:  $n = l/\lambda = 5 \cdot 10^6$ . Таким образом, в пределах цуга укладываются миллионы длин волн; налицо, следовательно, довольно медленное затухание. Отметим попутно, что вибратор Герца, как и любой другой генератор затухающих колебаний, также излучает волны отдельными цугами, однако цуг здесь существенно

длиннее (поскольку волны длиннее), но декремент затухания больший.

Выделенный диафрагмой узкий пучок света, называемый обычно световым лучом, является результатом излучения огромного числа независимых атомов, иначе говоря, он является совокупностью огромного количества не связанных между собой цугов, следующих друг за другом или взаимно накладывающихся. Колебания электронов в этих атомах происходят, конечно, в самых разнообразных направлениях и с различными фазами. Полагая, что в каждом цуге колебания электрического вектора волны по направлению совпадают с колебаниями электронов в излучающем атоме, мы приходим к выводу о непрерывном изменении плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$  (светового вектора) в луче, что сразу же приводит к наглядному представлению о естественном (неполяризованном) луче света.

Итак, реальные световые волны, испускаемые отдельными атомами, имеют ограниченную длину цуга и убывающие амплитуды.

В последнее время получили широкое распространение оптические квантовые генераторы (лазеры), излучение которых представляет собой также совокупность огромного количества цугов, но связанных друг с другом: все характеристики этих цугов (частота, направление распространения, поляризация) совпадают. Вследствие узкой направленности лазерного луча (т. е.  $k \approx k_0$  в импульсе) амплитуда почти не изменяется в пространстве.

Все эти особенности позволяют считать излучение лазера близким к монохроматическому.

## § 45. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

Скорость распространения волн  $v$  входит в выражение для фазы волнового колебания в рассматриваемой точке  $x$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Это уравнение, как указывалось, описывает строго монохроматическую волну. Для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v$  (например, на определенном «гребне» волны), фаза постоянна:  $\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}$ . Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом,  $v$  — скорость распространения определенной фазы колебания, поэтому она называется фазовой скоростью.

Реальная световая волна, как указывалось, не является монохроматической. Она может быть представлена как суперпозиция

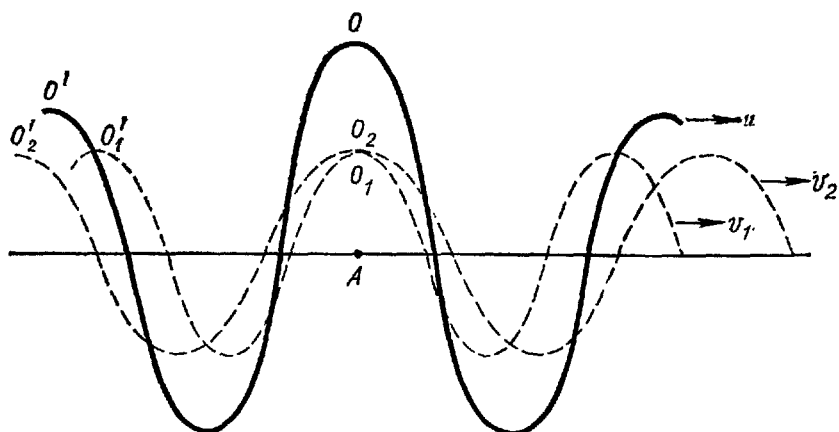


Рис. 73

ряда монохроматических волн, длины которых в случае почти монохроматической световой волны мало отличаются друг от друга. Скорость распространения каждой из монохроматических волн является фазовой скоростью. При отсутствии дисперсии (зависимости скорости от частоты), что имеет место, например, в вакууме, у всех этих волн фазовая скорость одинакова. В диспергирующих средах фазовые скорости отдельных монохроматических составляющих волны неодинаковы.

Вопрос о скорости переноса энергии такой совокупностью (группой) монохроматических волн можно выяснить при рассмотрении группы из двух монохроматических волн разной (но весьма близкой) длины, распространяющихся в диспергирующей среде с разными, но близкими фазовыми скоростями. На рисунке 73 волна  $\lambda_1$  предполагается немного короче волны  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ), а следовательно, при нормальной дисперсии  $v_1 < v_2$ . Жирной линией изображена результирующая волна (группа) в некоторый момент времени. Область около точки  $A$ , в которой фазы обеих составляющих волн совпадают, называют центром энергии, скорость его перемещения и является групповой скоростью. По мере перемещения составляющих волн вправо образуемый их амплитудами  $O_1$  и  $O_2$  максимум  $O$  будет расплываться, но зато слева от них амплитуды  $O'_1$  и  $O'_2$  образуют новый максимум, так как  $O'_2$  нагоняет  $O'_1$ . Таким образом, центр энергии, распространяясь вместе с группой вправо, отстает от каждой из составляющих волн. Наблюдая со стороны за этой группой волн, мы заметим, что передние максимумы группы (перед центром энергии) становятся все меньше и меньше. Вместо них образуются новые максимумы, в связи с чем вся группа в целом и ее центр энергии перемещаются медленнее, чем отдельные составляющие волны.

Определим скорость распространения центра энергии—групповую скорость  $u$ . Пусть в некоторый момент времени в центре

энергии фазы составляющих волн совпадают, т. е. здесь фаза не зависит от частоты  $\omega$  (или длины волны  $\lambda$ , или, наконец, волнового числа  $k$ ), а следовательно, производная от фазы по  $\omega$  ( $\lambda$  или  $k$ ) равна нулю. Запишем это условие, используя выражение для фазы:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t - kx, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k} &= \frac{d\omega}{dk} t - x = 0. \end{aligned} \quad (45.1)$$

Выразим отсюда  $x$ :

$$x = \frac{d\omega}{dk} t = ut. \quad (45.2)$$

Из формулы (45.2) ясно, что производная  $\frac{d\omega}{dk}$  представляет собой групповую скорость  $u$ , т. е. скорость перемещения центра энергии:

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (45.3)$$

Ее часто определяют через другие параметры волны. Выразим фазу через длину волны, используя формулу  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = 2\pi \left( \frac{v}{\lambda} t - \frac{x}{\lambda} \right); \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 2\pi \left\{ t \frac{d\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{d\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} \right\} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$x = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{d\lambda} = ut.$$

Выполнив дифференцирование, приходим к так называемой формуле Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (45.4)$$

Тождественность формул (45.3) и (45.4) можно легко проверить. Производная  $\frac{dv}{d\lambda}$  характеризует дисперсию в данной среде. Из выражения (45.4) вытекает, что при отсутствии дисперсии (т. е. при  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ ) фазовая скорость равна групповой. Это полностью справедливо для вакуума. В воздухе и очень многих веществах (например, в воде) дисперсия мала, поэтому фазовая и групповая скорости в таких средах различаются очень мало. В некоторых веществах дисперсия  $\frac{dv}{d\lambda}$  велика, поэтому между значения-

ми  $v$  и  $u$  наблюдаются существенные расхождения. Майкельсон опытным путем определил показатель преломления сероуглерода  $n_1 = 1,75$ , между тем как по теории ожидалось  $n_2 = 1,64$ . Анализ показал, что Майкельсон имел дело с групповой скоростью, а в теории исходили из фазовой скорости:

$$u = \frac{c}{n_1}, \quad v = \frac{c}{n_2}, \quad v > u,$$

откуда

$$n_1 > n_2.$$

В экспериментальных методах определения скорости света фактически всегда измеряют групповую скорость. С помощью формулы Рэля можно сразу перейти к значению фазовой скорости.

Специальная теория относительности ограничивает скорость передачи сигнала скоростью света  $c$ , т. е. ограничивает значение групповой скорости. Величина фазовой скорости может превышать  $c$  (если показатель преломления  $n$  оказывается, как, например, в плазме, меньше единицы), но, поскольку сигнал передается не с фазовой, а с групповой скоростью, которая всегда меньше  $c$ , противоречия с теорией относительности не возникает.

#### § 46. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

На границе двух прозрачных сред падающий луч преобразуется в отраженный и преломленный лучи, направления которых находятся по законам отражения и преломления. Чтобы описание явления было полным, необходимо еще определить интенсивность и характер поляризации обоих лучей. Несостоятельность механических теорий света домаквелловского периода, строившихся на гипотезе об упругом эфире, особенно наглядно выявилась в безуспешных попытках этих теорий дать ответ на поставленный вопрос. Френель решил этот вопрос в начале XIX в. с помощью формул, носящих теперь его имя. Он рассматривал свет как волны упругости в эфире, но столкнулся при этом с необходимостью ввести ряд противоречивых предположений о свойствах эфира. Напротив, электромагнитная теория света при объяснении явлений, наблюдаемых при отражении и преломлении, не требует каких-либо специальных допущений, выходящих за ее рамки.

Понятия световых колебаний и плоскости поляризации были введены в оптике задолго до установления электромагнитной теории света. Поскольку почти все виды воздействия света на вещество обусловлены электрическим вектором, было решено понимать под световыми колебаниями колебания электрического вектора  $\vec{E}$ . В линейно поляризованной волне электрический вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости, перпендикулярной к плоскости

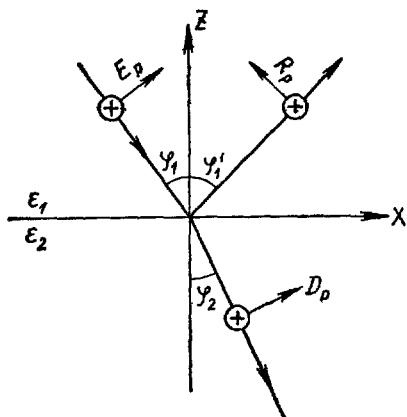


Рис. 74

поляризации, магнитный же вектор  $\vec{H}$  колеблется в плоскости поляризации.

В отличие от всегда поляризованных радиоволн, испускаемых радиостанциями, естественный свет в общем случае является неполяризованным, т. е. плоскость колебаний вектора  $\vec{E}$  в луче все время изменяется. Однако для любого момента времени можно разложить электрический вектор на две взаимно перпендикулярные составляющие, из которых одна колеблется в плоскости падения луча

на границу сред, а другая — перпендикулярно ей. Поэтому можно рассмотреть два случая: 1) свет поляризован в плоскости падения (причем согласно сказанному электрический вектор колеблется перпендикулярно этой плоскости); 2) свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения (при этом электрический вектор колеблется в плоскости падения).

Введем следующие обозначения (рис. 74). Амплитуду электрического вектора падающей волны обозначим через  $E$ , отраженной —  $R$ , проходящей —  $D$ . Индексом  $p$  обозначим составляющие, лежащие в плоскости падения, индексом  $s$  — перпендикулярные к плоскости падения. На нашем рисунке за положительное направление  $p$ -составляющих примем направления, показанные стрелками, за положительное направление  $s$ -составляющих — показанное значком  $\oplus$  («от нас»). Составляющие  $E_s$ ,  $R_s$ ,  $D_s$  совпадают по фазе, если они имеют одинаковые знаки. То же относится к  $E_p$  и  $D_p$ . Однако  $E_p$  и  $R_p$  совпадают по фазе лишь в том случае, если знаки их различны, и, наоборот, они противоположны по фазе, если знаки их одинаковы. Для углов падения, отражения и преломления введены соответственно обозначения  $\phi_1$ ,  $\phi_1'$  и  $\phi_2$ . Обе прозрачные среды, на границе которых происходит преломление и отражение света, считаются идеальными диэлектриками, т. е. их диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  имеют постоянные значения, свободные заряды  $\rho$  и  $\sigma$  в них отсутствуют, а магнитная проницаемость равна единице. Скорость света в средах соответственно равна  $v_1$  и  $v_2$ , причем в каждой среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (n \text{ — показатель преломления}).$$

В дальнейшем мы используем соотношение между численными значениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоской волне (43.9), полагая

$\mu = 1$ , а также граничные условия для векторов поля (§ 17 и 29): непрерывность тангенциальных составляющих  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , непрерывность нормальных составляющих векторов индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ . При этом следует учесть, что поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн. Граничные условия совместно с формулой (43.9) оказываются достаточными для того, чтобы однозначно определить соотношения между углами и амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн.

Ниже запишем граничные условия в общем виде и в применении к нашему случаю ( $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  повсюду сокращаются):

В общем виде	Для $p$ -составляющих	Для $s$ -составляющих
$E_{1t} = E_{2t}$	$E_p \cos \varphi_1 - R_p \cos \varphi'_1 =$ $= D_p \cos \varphi_2$	$E_s + R_s = D_s$
$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$	$\epsilon_1 (E_p \sin \varphi_1 + R_p \sin \varphi'_1) =$ $= \epsilon_2 D_p \sin \varphi_2$	—
$H_{1t} = H_{2t}$	$\sqrt{\epsilon_1} (E_p + R_p) = \sqrt{\epsilon_2} D_p$	$\sqrt{\epsilon_1} (E_s \cos \varphi_1 -$ $- R_s \cos \varphi'_1) =$ $= \sqrt{\epsilon_2} D_s \cos \varphi_2$
$H_{1n} = H_{2n}$	—	$\sqrt{\epsilon_1} (E_s \sin \varphi_1 +$ $+ R_s \sin \varphi'_1) =$ $= \sqrt{\epsilon_2} D_s \sin \varphi_2.$

(46.1)

Напряженности  $E$  и  $H$  являются функциями координат и времени в соответствии с выражением для плоской волны

$$E = E_0 \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right).$$

Произведя замену  $r = x \sin \varphi + z \cos \varphi$ , получаем для фаз  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  падающей, отраженной и проходящей волн:

$$\tau_1 = \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{v_1} \right),$$

$$\tau_2 = \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi'_1 + z \cos \varphi'_1}{v_1} \right),$$

$$\tau_3 = \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2}{v_2} \right).$$

Равенства (46.1) могут иметь место для мгновенных значений векторов только в том случае, если фазы волн на границе сред одинаковы (или противоположны, что сводится к перемене знака перед амплитудой); в силу этого  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ . Поскольку гранич-

ные условия справедливы при любых  $x$  в произвольный момент времени  $t$ , то (при  $z=0$ ) получим:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_1'}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2},$$

т. е.  $\varphi_1 = \varphi_1'$  (закон отражения) и

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (46.2)$$

(закон преломления). Из формул (46.1) и (46.2) можно легко вывести формулы Френеля.

Для примера находим соотношение между  $s$ -составляющими амплитуд отраженного и падающего лучей  $R_s$  и  $E_s$ :

$$E_s + R_s = D_s,$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_s \cos \varphi_1 - R_s \cos \varphi_1') = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos \varphi_2.$$

Последнее уравнение в силу выражения (46.2) можно преобразовать так:

$$\frac{v_2}{v_1} \cos \varphi_1 (E_s - R_s) = \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} (E_s - R_s) = D_s \cos \varphi_2.$$

Исключаем  $D_s$ :

$$\frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2} (E_s - R_s) = E_s + R_s.$$

Выполнив вычисление, получаем одну из формул Френеля:

$$R_s = -E_s \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (46.3)$$

Аналогично получаем остальные три формулы Френеля:

$$D_s = E_s \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (46.4)$$

$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (46.5)$$

$$D_p = E_p \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (46.6)$$

Из формул Френеля можно установить фазовые соотношения при отражении и преломлении. Из формул (46.4) и (46.6) следует, что при любом значении углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  знаки составляющих  $D$  и  $E$  совпадают, а это означает, что преломленная волна во всех случаях сохраняет фазу падающей.

Обращаясь к фазовым соотношениям при отражении (46.3) и (46.5), мы видим, что необходимо различать два случая: 1)  $\varphi_1 > \varphi_2$ ; 2)  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Первый случай имеет место при  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Из анализа указанных формул вытекает, что  $E_s$  и  $R_s$  имеют теперь противоположные знаки, поэтому их фазы противоположны;



знаки  $E_p$  и  $R_p$  в этом случае совпадают. Данное явление часто упоминается в оптике как потеря полуволны при отражении. Во втором случае, когда  $\varphi_1 < \varphi_2$  (т. е.  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ), фазы падающей и отраженной волн совпадают.

Выведенные выше формулы Френеля позволяют получить формулы для соотношения потоков энергии в падающем, отраженном и преломленном лучах (эти формулы мы выводить не будем).

Гипотеза Максвелла об электромагнитной природе света основывалась на том, что скорость света равна той скорости, с которой распространяются электромагнитные возмущения. После обнаружения Герцем электромагнитных волн метрового диапазона общая природа этих волн и света была доказана экспериментально «Герцевы волны» обладают способностью отражаться, преломляться, поляризоваться; они интерферируют и дифрагируют подобно свету.

Электромагнитная теория света прочно обоснована как с экспериментальной, так и с теоретической стороны. В свою очередь, она стимулировала исследование явлений излучения и поглощения света как элементарных электрических процессов в микроосцилляторах, роль которых играют атомы и молекулы. Электромагнитная теория позволила объяснить большой круг оптических явлений и обосновать ряд соотношений и законов, введенных чисто эмпирическим путем.

#### § 47. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в неограниченной однородной проводящей среде:

$\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$  ( $\gamma \neq 0$ ). Уравнения Максвелла в этом случае запишем следующим образом:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \gamma \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (47.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (47.2)$$

(В первом уравнении выражаем  $\vec{j}$  по закону Ома и полагаем  $\vec{E}_{\text{стор}} = 0$ .)

Проводя те же рассуждения, как и в случае однородной диэлектрической среды (§ 42), приходим к заключению, что и внутри однородного проводника могут распространяться только поперечные электромагнитные волны. Пусть векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитной волны в проводящей среде колеблются с частотой  $\omega$ , т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y, z) e^{i\omega t}.$$

Подставляем эти выражения в уравнения (47.1) и (47.2):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (\gamma + i\epsilon\epsilon_0\omega) \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -i\mu\mu_0\omega \vec{H}. \quad (47.3)$$

Для идеального диэлектрика ( $\gamma = 0$ ) запись первого уравнения будет иной:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\epsilon\epsilon_0\omega \vec{E}. \quad (47.4)$$

Небольшим преобразованием можно привести первое уравнение (47.3) к виду, сходному с уравнением (47.4). Перепишем первое уравнение (47.3):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\omega \left( \epsilon\epsilon_0 + \frac{\gamma}{i\omega} \right) \vec{E}$$

и введем обозначение:

$$\epsilon_\omega\epsilon_0 = \epsilon\epsilon_0 + \frac{\gamma}{i\omega} = \epsilon\epsilon_0 - i\frac{\gamma}{\omega}, \quad (47.5)$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= i\omega\epsilon_\omega\epsilon_0 \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega\mu\mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (47.6)$$

Полученная система (47.6) сходна с системой уравнений для идеального диэлектрика, однако здесь вместо проницаемости  $\epsilon\epsilon_0$  (вещественного числа) появляется комплексная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_\omega\epsilon_0$ : ее мнимая часть зависит от электропроводности и частоты.

Последующие вычисления по форме совпадают с вычислениями, приведенными при рассмотрении плоских волн в диэлектриках, следует лишь повсюду вместо  $\epsilon$  подставить  $\epsilon_\omega$ . Так, действительное волновое число  $k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$  заменяется комплексной величиной  $k_\omega$ , квадрат которой равен:

$$k_\omega^2 = \omega^2\epsilon_\omega\epsilon_0\mu\mu_0 = \omega^2\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 - i\omega\gamma\mu\mu_0. \quad (47.7)$$

Представим  $k_\omega$  в виде комплексного числа:

$$k_\omega = k - is, \quad (47.8)$$

в силу чего можно равенство (47.7) переписать так:

$$\omega^2\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 - i\omega\gamma\mu\mu_0 = k^2 - 2iks - s^2.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\begin{aligned} k^2 - s^2 &= \omega^2\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0, \\ 2ks &= \omega\gamma\mu\mu_0. \end{aligned} \quad (47.9)$$

По аналогии с выражениями для плоской волны в диэлектрике

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

запишем для плоской волны в проводящей среде, используя уравнение (47.8):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_\omega x)} = \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_\omega x)} = \vec{H}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned} \right\} \quad (47.10)$$

Таким образом, комплексность волнового числа  $k_\omega$  означает наличие поглощения: амплитуда волны экспоненциально убывает по мере ее распространения. При  $\gamma = 0$  мнимая часть обращается в нуль (затухания нет).

На длине  $x = \delta = \frac{1}{s}$  амплитуда волны затухает в  $e$  раз. Величину  $\delta$  называют глубиной проникновения волны в проводящую среду. Ее можно найти, решая уравнения (47.8) и (47.9) относительно  $k$  и  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon \epsilon_0 \omega}\right)^2} + 1 \right\}, \\ s^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon \epsilon_0 \omega}\right)^2} - 1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (47.11)$$

В металлах значение электропроводности  $\gamma \approx 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ , относительная диэлектрическая проницаемость металлов неизвестна, но она не может составлять больше нескольких единиц; для видимого света ( $\omega \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ )

$$\frac{\gamma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \approx \frac{10^7}{10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{15}} \approx 200 \gg 1.$$

При меньших частотах (например, в диапазоне радиоволн) это неравенство усиливается. Следовательно, в формулах (47.11) можно всегда пренебречь единицей по сравнению с  $\frac{\gamma}{\epsilon \epsilon_0 \omega}$ . Таким образом, с достаточной степенью точности  $k^2 = s^2 = \frac{\omega \gamma \mu \mu_0}{2}$ .

Следовательно, глубина проникновения  $\delta$  равна:

$$\delta = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu \mu_0}}. \quad (47.12)$$

Рассмотрим в качестве примера медь, для которой  $\gamma \approx 5 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  и  $\mu = 1$ ; глубина проникновения видимого света ( $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $\omega \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ) равна:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2}{5 \cdot 10^{16} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-6}}} \approx 10^{-8} \text{ м}.$$

Таким образом, глубина проникновения существенно меньше длины волны и никакой пространственной периодичности поля волны в металлах нет. Строго говоря, из-за быстрого затухания не имеет смысла говорить о распространении электромагнитных волн в проводящей среде. Этот вывод остается справедливым и

для больших длин волн, так как с ростом  $\lambda$  глубина проникновения увеличивается как корень квадратный из длины волны (т. е. медленнее, чем  $\lambda$ ).

Быстрое затухание электромагнитных волн в проводящей среде объясняется превращением электромагнитной энергии в джоулеву теплоту. Механизм этого преобразования таков: электрическое поле волны вызывает токи проводимости, энергия которых выделяется в среде в виде теплоты.

Частный случай рассмотренного выше явления — неоднородное распределение переменного тока по сечению проводника — называют скин-эффектом.

Плотность постоянного тока в однородном проводнике одинакова по всему сечению проводника. В случае переменного тока плотность тока оказывается неодинаковой в разных точках сечения; она наибольшая у поверхности и наименьшая на оси проводника. При высоких частотах основная часть тока сосредоточена в тонком поверхностном слое, отчего явление и получило название поверхностного, или скин-эффекта (от английского skin — кожа, поверхностный слой). Скин-эффект влечет за собой изменение эффективного сопротивления и индуктивности проводника.

Таким образом, проблема скин-эффекта сводится к уже решенной задаче: по мере проникновения в проводник амплитуда вектора  $\vec{E}$  волнового поля убывает по экспоненциальному закону:  $\vec{E}_{0x} = \vec{E}_0 e^{-sx}$ , где  $\vec{E}_0$  — значение вектора напряженности поля на поверхности проводника,  $\vec{E}_{0x}$  — значение на глубине  $x$ .

Соответственно с глубиной проникновения по экспоненциальному закону убывает и амплитудное значение плотности тока:  $\vec{j}_{0x} = \vec{j}_0 e^{-sx}$ , где  $\vec{j}_0$  — амплитудное значение плотности тока на поверхности проводника,  $\vec{j}_{0x}$  — значение на глубине  $x$ . Глубина проникновения при скин-эффекте выражается формулой (47.12) при условии, что проводник занимает полупространство  $x > 0$ . При цилиндрической форме проводника математические вычисления усложняются. Особенно сложным является исследование скин-эффекта в железных проводах в связи с непостоянством  $\mu$  и гистерезисом.

В заключение отметим еще одну особенность электромагнитной волны в проводящей среде: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , оставаясь перпендикулярными друг другу, обладают различными фазами. Действительно, заменив в соотношении (43.9)  $\epsilon$  на  $\epsilon_\omega$ , получаем:

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_\omega \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E.$$

Поскольку множитель перед  $E$  комплексен, то фаза вектора  $\vec{H}$  отлична от фазы  $\vec{E}$ .

## Упражнения

36. Солнечные лучи при перпендикулярном падении ежеминутно приносят на  $1 \text{ см}^2$  земной поверхности энергию  $S \approx 2 \text{ кал}/(\text{см}^2 \text{ мин}) \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2$  (Солнечная постоянная). Вычислите средние квадратичные значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в солнечных лучах.

Указание. Солнечная постоянная имеет тот же физический смысл, что и модуль вектора Умова—Пойнтинга  $\vec{S}$  при его усреднении за 1 с, если под  $E$  и  $H$  понимать их эффективные значения; для воздуха примите  $\epsilon = \mu = 1$ , откуда  $S = EH = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$ .

37. Чтобы убедиться в целесообразности выбора электрического вектора волны в качестве светового вектора, сравните силы  $f_E$  и  $f_H$ , действующие на электрон со стороны электрического и магнитного полей световой волны обычной (на поверхности Земли) частоты и интенсивности. Примите  $\nu = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ , значения амплитуд  $E_0 = 750 \text{ В/м}$  и  $H_0 = 2 \text{ А/м}$ . (Обоснованием этих данных служит предыдущее упражнение.)

Указание. Силу  $f_E$  следует определить как произведение заряда электрона на среднее поле  $\frac{2E_0}{\pi}$  (за половину периода).

Магнитное поле, как известно, действует только на движущиеся заряды; в нашем случае оно действует на электрон, «разогнанный» электрическим полем. Скорость электрона, приобретаемая им за половину периода, приближенно оцените как скорость равноускоренного движения под действием среднего электрического поля:  $v_{\text{ср}} = a_{\text{ср}} \frac{T}{2} = \frac{f_E}{m} \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{2eE_0}{2\pi m\nu}$ . Сила  $f_H$ , действующая на движущийся электрон со стороны среднего магнитного поля  $\frac{2H_0}{\pi}$ , выражается формулой Лоренца  $f_H = \frac{2ev_{\text{ср}}\mu_0 H_0}{\pi}$ .

38. Экспериментально определено, что значения показателя преломления сероуглерода при разных длинах волн  $\lambda$  равны:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5270 \text{ \AA}, & n_1 &= 1,642, \\ \lambda_2 &= 5890 \text{ \AA}, & n_2 &= 1,629, \\ \lambda_3 &= 6560 \text{ \AA}, & n_3 &= 1,620. \end{aligned}$$

Найдите отношение фазовой и групповой скоростей  $\frac{v}{u}$  электромагнитных волн в сероуглероде.

Указание. Сначала определите фазовые скорости данных волн, затем найдите среднюю величину дисперсии  $\frac{\Delta v}{\Delta \lambda}$  в заданном интервале длин волн. Групповую скорость определяют по формуле Рэлея (45.4).

## VII. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### § 48. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ. УСЛОВИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ ПОЛЯ

В § 41 рассматривались общие выражения (уравнения Даламбера) для потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$  переменного электромагнитного поля (41.10):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \\ \Delta A_x - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0 j_x, \\ \Delta A_y - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0 j_y, \\ \Delta A_z - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0 j_z.\end{aligned}$$

Выясним характерные особенности решения эти уравнений. Нужно считать, что правые части уравнений (41.10) являются известными функциями координат и времени. Если правая часть этих уравнений обращается в нуль, то получаем волновые уравнения (решение волнового уравнения см. в § 42). Связь между переменными зарядами и токами и их электромагнитным полем описывается решениями неоднородных уравнений.

Рассмотрим одно из частных решений уравнений Даламбера. Так как все четыре уравнения (41.10) относятся к одному и тому же типу, достаточно рассмотреть частное решение первого уравнения:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \rho(r', t),$$

где  $v^2 = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$ . Функция  $\rho(r', t)$  задана в некоторой конечной области пространства. В отличие от рассмотренной в § 19 задачи нахождения поля системы статических зарядов в данном случае объемная плотность является переменной во времени. Частное решение этого уравнения с использованием обозначений, введенных в § 19 и на рисунке 36, имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(R_0, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \frac{\rho(r', t')}{r} dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t') d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}},\end{aligned}\quad (48.1)$$

где  $t' = t - \frac{r}{v}$  — эффект запаздывания,  $dV'$  — элемент объема, зависящий от времени.

Решение уравнения (48.1), определяющее скалярный потенциал  $\varphi$  в точке  $R_0$  в момент  $t$ , представляет собой суперпозицию потенциалов точечных зарядов  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r', t')}{r} dV'$  (как и при решении уравнения Пуассона с той лишь разницей, что теперь появилась зависимость потенциалов от времени). Зависимость потенциалов от времени  $t' = t - \frac{r}{v}$  показывает, что потенциал (а следовательно, и векторы поля) в точке наблюдения  $R_0$  в момент времени  $t$  определяются величиной заряда в точке  $r'$ , имевшегося там в более ранний момент времени  $t' = t - \frac{r}{v}$ . Отношение  $\frac{r}{v}$  представляет собой время, за которое от точки местонахождения заряда до точки наблюдения доходит «сигнал», распространяющийся со скоростью  $v$ .

Отметим, что в решение уравнения (48.1) на равных основаниях с запаздывающими потенциалами  $\varphi\left(t' = t - \frac{r}{v}\right)$  могут входить и опережающие потенциалы  $\varphi\left(t' = t + \frac{r}{v}\right)$ , которыми мы не пользовались. Опережающие потенциалы связывают значение потенциала в рассматриваемой точке в момент  $t$  с пространственным распределением зарядов и токов в последующие моменты времени  $t + \frac{r}{v}$ . Общее решение уравнения Даламбера может быть представлено как сумма частного решения (в виде запаздывающих или опережающих потенциалов) и общего решения соответствующего однородного уравнения  $\square \varphi = 0$ . Лишь задание определенных начальных и граничных условий дает возможность найти единственное решение, отвечающее поставленной задаче.

Запишем теперь выражение для векторного потенциала в точке  $R_0$  в момент времени  $t$ :

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} dV', \quad (48.2)$$

где обозначения аналогичны обозначениям в формуле (48.1).

Из выражения (48.2) можно вывести основное условие квазистационарности, которое ранее (§ 31) было введено без строгого обоснования. Так как магнитное поле непосредственно определяется через векторный потенциал ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ), то из запаздывания потенциала при распространении электромагнитной волны вытекает и запаздывание вектора поля  $\vec{B}$ . Каждый элемент

тока  $\vec{j} dV'$  определяет элемент векторного потенциала:

$$d\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} dV'.$$

Чтобы можно было во все моменты времени  $t' = t - \frac{r}{v}$  пренебречь запаздыванием  $\frac{r}{v}$ , необходимо, чтобы характерный для токов период изменения  $T$  намного превосходил наибольшее время запаздывания поля в системе. Это наибольшее время, очевидно, равно характеристическому размеру системы  $l$ , деленному на  $v$ . Таким образом, условие квазистационарности приобретает вид

$$\frac{l}{v} \ll T, \text{ или } l \ll vT.$$

В случае периодического процесса, при котором скорость распространения поля равна  $v$ , произведение  $vT$  определяет длину волны  $\lambda$ . Соответственно условие квазистационарности записывается так:

$$l \ll \lambda. \quad (48.3)$$

#### § 49. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

В § 42 было показано, что в однородной изотропной среде в отсутствии зарядов и токов векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют волновому уравнению, причем скорость распространения волн  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$ . Там же при исследовании свойств плоских электромагнитных волн мы выяснили, что вектор Умова—Пойнтинга в плоской волне может быть выражен через один вектор поля, например  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  (43.5).

Рассмотрим теперь излучение локализованной в ограниченном объеме системы зарядов и токов, распределение которых зависит от координат и времени. Характер излучения такой системы исследуем при помощи вектора Умова—Пойнтинга.

Воспользуемся частным решением для электродинамических потенциалов (42.19); это решение представляет собой суперпозицию сферических волн. Но сферическая волна по мере удаления от своего источника, принимаемого за начало отсчета, по виду волнового фронта все больше приближается к плоской волне. Напомним, что ограниченная плоскость представляет собой участок сферы бесконечно большого радиуса. Однако плоская волна характеризуется не только тем, что ее волновой фронт—плоскость. Существенно, что амплитуда плоской волны постоянна. Амплитуда же сферической волны обратно пропорциональна  $r$ .



Решение сферически симметричного волнового уравнения, если ограничиться только запаздывающим потенциалом, имеет вид:

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right). \quad (49.1)$$

Для монохроматической волны это выражение записывается так:

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}, \quad (49.2)$$

где  $A$  — амплитудное значение потенциала при  $r=1$  и  $t=0$ .

Из последнего выражения видно, что амплитуда пропорциональна  $\frac{1}{r}$ . Естественно, что всегда можно выделить достаточно малый участок сферы, который можно принять за плоскость. Вопрос состоит в том, при каких условиях допустимо считать амплитуду сферической волны постоянной. Для выяснения этого вопроса найдем производную:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \left[ -\frac{i\omega}{rv} - \frac{1}{r^2} \right] e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}.$$

Зависимость амплитуды от  $r$  определяется вторым членом в квадратных скобках. Им можно пренебречь по сравнению с первым членом в квадратных скобках при условии  $\frac{1}{r} \frac{\omega}{v} \gg \frac{1}{r^2}$ , т. е.

$$r \gg \frac{v}{\omega} \sim \lambda. \quad (49.3)$$

Это условие определяет некоторое характеристическое «расстояние» от рассматриваемой системы зарядов и токов. Таким образом, мы пришли к выводу: если рассматриваются потенциалы (или векторы поля) достаточно далеко от системы зарядов и токов, так что соблюдено условие  $r \gg \lambda$ , то при выборе достаточно малого телесного угла можно считать сферическую волну, ограниченную этим телесным углом, плоской. Этот вывод поможет нам при предстоящих вычислениях, так как необходимые формулы для плоских волн уже получены в предыдущей главе.

Область пространства, удовлетворяющая неравенству (49.3), называют волновой зоной.

Поскольку для расчета вектора Умова — Пойнтинга в плоской волне достаточно задать магнитное поле, то мы можем ограничиться вычислением векторного потенциала  $\vec{A}$ . Здесь мы с небольшими видоизменениями повторим выкладки, проведенные ранее при вычислении потенциала системы статических зарядов (§ 19).

Исходим из приведенной выше формулы (41.13) для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} dV',$$

где  $t' = t - \frac{r}{v}$ .

Вводя обозначения  $\vec{r} = \vec{R}_0 - \vec{r}'$ ,  $\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$  и полагая  $\frac{r'}{R_0} \ll 1$ , получим в первом приближении:

$$r = R_0 - \vec{n}\vec{r}'.$$

Тогда подынтегральное выражение в (41.13) приобретает вид

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R_0 - \vec{n}\vec{r}'}{v})}{R_0 - \vec{n}\vec{r}'}$$

В знаменателе этого выражения в качестве нулевого приближения можно допустить  $R_0 - \vec{n}\vec{r}' \approx R_0$ . Член  $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{v}$  определяет относительное запаздывание волны, распространяющейся от точки  $\vec{r}'$  в точку наблюдения  $\vec{R}_0$ . По порядку величины этот член равен  $\frac{l}{v}$ , где  $l$  — характеристический линейный размер системы. В предыдущем параграфе мы занимались вопросом: когда можно пренебречь запаздыванием в пределах рассматриваемой системы? Ответ на вопрос дает условие квазистационарности. Если оно соблюдено, то можно допустить, что  $t' = t - \frac{R_0}{v} \equiv \tau$ .

Таким образом, окончательно имеем:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV', \quad (49.4)$$

где  $\tau = t - \frac{R_0}{v}$ .

Интеграл (49.4), которым определяется векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{R}_0, t)$ , можно преобразовать к более удобному виду. Для этого запишем закон сохранения заряда для любой точки  $r'$  и любого момента времени  $\tau$ :

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau)}{\partial t} + \text{div}' \vec{j}(\vec{r}', \tau) = 0, \quad (49.5)$$

где штрих у оператора дивергенции означает, что дифференцирование ведется по переменным координатам  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Умножая оба члена в левой части выражения (49.5) на  $r' dV'$  и интегрируя по всему объему, занятому зарядами и токами, имеем:

$$\int_V \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV' + \int_V \vec{r}' \text{div}' \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV' = 0. \quad (49.6)$$

Первый член в левой части (49.6) представляет собой производную по времени от дипольного момента системы, т. е.  $\dot{\vec{P}}(\tau)$

[ср. § 19, ф-ла (19.8)]. Второй член слева равен  $\int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV'$ , что можно легко проверить выполнением операции дифференцирования. Таким образом мы получаем важную формулу:

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV' = \dot{\vec{P}}(\tau), \quad (49.7)$$

которая позволяет переписать выражение (49.4) в удобной форме:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \dot{\vec{P}}(\tau) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} \dot{\vec{P}}(\tau). \quad (49.8)$$

В формуле (49.8) в последнем члене равенства вместо  $R_0$  написано  $R$ , где  $R$  — расстояние от произвольной точки внутри объема  $V$ . Дело в том, что для нейтральной системы зарядов величина ее дипольного момента не зависит от выбора начала отсчета.

#### § 50. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ПРЕДЕЛАХ МАЛОГО ТЕЛЕСНОГО УГЛА ВОЛНОВОЙ ЗОНЫ

Перейдем к рассмотрению векторного потенциала в волновой зоне. В плоской волне интересующий нас вектор Умова — Пойнтинга определяется через напряженность магнитного поля следующим образом [см. формулы (43.5) — (43.9)]:

$$\vec{S} = v(\mu\mu_0 H^2) \vec{m}, \quad (50.1)$$

поэтому для решения задачи достаточно найти значение индукции  $\vec{B}$  по формуле

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Используем выражение (49.8) и полагаем величину  $\frac{1}{R}$ , входящую в амплитуду, постоянной величиной; это означает, что мы ограничиваемся малым перемещением в направлении распространения волны. Находим:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} \text{rot } \dot{\vec{P}}\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} \left[ \text{grad} \left(t - \frac{R}{v}\right) \ddot{\vec{P}} \right] = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R v} [\vec{m} \ddot{\vec{P}}], \quad (50.2)$$

где  $\vec{m} = \frac{\vec{R}}{R}$ . В третьем звене наших равенств мы провели дифференцирование функции от функции\*. Из выражения (50.2) вытекает:

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi r v} [\vec{m} \ddot{\vec{P}}]. \quad (50.3)$$

\* См. «Дополнения», 2.

В последней формуле мы перешли к привычному обозначению расстояния от точки наблюдения до начала координат через  $r$ , поскольку никакие другие расстояния в эту формулу не входят.

Если подставить формулу (50.3) в выражение (50.1), то (с учетом равенства  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$ ) получим выражение для вектора Умова—Пойнтинга в применении к небольшому участку сферической волны в волновой зоне:

$$\vec{S} = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} [\vec{m}\ddot{P}]^2 \frac{1}{r^2} \vec{m}. \quad (50.4)$$

Вычислим теперь поток энергии  $d\Sigma$  через тот участок сферической поверхности  $d\sigma$  в волновой зоне, в пределах которого мы считаем волну плоской. Этому участку соответствует телесный угол  $d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2}$ . В случае сферы  $\vec{m} = \frac{\vec{r}}{r}$  и поэтому элементарный поток вычисляется так:

$$d\Sigma = S d\sigma = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} [\vec{m}\ddot{P}]^2 \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} [\vec{m}\ddot{P}]^2 d\Omega. \quad (50.5)$$

Выражение (50.5) тем точнее, чем меньше величина выбранного телесного угла. Из этого выражения видно, что поток энергии, излучаемый системой зарядов и токов в заданном телесном угле, всюду один и тот же (не зависит от  $r$ ). Полученные результаты будут более наглядными, если рассмотреть конкретную систему излучающих зарядов и токов.

## § 51. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР И ЕГО ИЗЛУЧЕНИЕ

Обсудим прежде всего физический смысл утверждения: «система излучает электромагнитную энергию». Возникновение электромагнитной волны в той или иной области пространства явно недостаточно для того, чтобы говорить об излучении. Допустим, что в рассматриваемой области появился электрический заряд (лучше говорить о возникновении диполя, поскольку в силу закона сохранения заряда заряд одного знака «просто так» появиться не может). Из области, где появился диполь, распространяется электромагнитное поле со скоростью  $\vec{v}$  в соответствии с уравнениями Максвелла. Однако это поле неразрывно связано с зарядами. Если заряды прекращают свое существование (например, момент диполя обращается в нуль), то «исчезают» (с некоторым запозданием) как поле зарядов, так и запасенная в нем энергия—она поглощается зарядами при их нейтрализации.

Под излучением следует понимать такой процесс, при котором электромагнитные волны навсегда уносят энергию из системы. Убедиться в том, что энергия покидает систему, можно следующим образом. Вычислим поток энергии через некоторую

сферу, охватывающую нашу систему с зарядами. Если обнаруживается, что поток энергии при отсутствии поглощения средой не зависит от радиуса сферы, то это означает, что энергия удаляется от системы все дальше и дальше, т. е. покидает ее окончательно и бесповоротно. В таком случае уже можно говорить об излучении системой энергии.

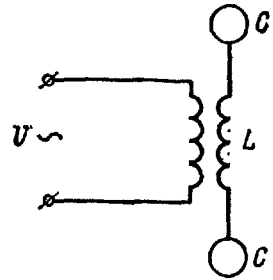


Рис. 75

Естественно, что поток излучаемой энергии определяется при помощи вектора Умова — Пойнтинга. Воспользуемся им для вычисления энергии излучения одной из простейших излучающих систем — диполя с гармонически изменяющимся моментом  $\vec{P}$ , так называемого гармонического осциллятора.

Как известно, первый генератор электромагнитных волн был построен Герцем и получил название вибратора (а также осциллятора или переменного диполя) Герца. Вследствие ряда особенностей его возбуждения в нем происходят быстро затухающие электрические колебания, в связи с чем излучаемые им электромагнитные волны имеют вид следующих друг за другом импульсов (цугов) (см. § 44).

Средства современной радиотехники позволяют реализовать гармонический осциллятор, в котором поддерживаются незатухающие колебания. Простейший осциллятор состоит из двух металлических шаров значительной емкости  $C$ , соединенных проводником — катушкой с большой индуктивностью  $L$  (рис. 75). Катушка индуктивно связана с цепью переменного тока высокой частоты (питаемой, например, от лампового генератора  $U$ ). В такой системе индуцируется переменный дипольный момент с гармонической зависимостью от времени:

$$\vec{P}(t) = \vec{p}(t) = q(t) \vec{l} = q_0 \vec{l} \cos \omega t = \vec{p}_0 \cos \omega t, \quad (51.1)$$

где  $\vec{P}$  — дипольный момент системы, который в нашем случае равен моменту диполя  $\vec{p}$ ,  $q$  — заряд диполя, имеющего длину  $l$ ,  $\vec{p}_0$  — максимальный (амплитудный) момент диполя,  $\omega$  — циклическая частота электрических колебаний диполя.

Для вычисления потока излучаемой электромагнитной энергии по формуле (50.5) воспользуемся сферической системой координат, направив полярную ось  $z$  по направлению  $\vec{p}_0$ . Поскольку  $\vec{m}$  — единичный вектор, направленный в точку наблюдения, то  $\angle(\vec{m}, \vec{P}) = \angle \theta$ , откуда

$$[m\vec{P}]^2 = \vec{P}^2 \sin^2 \theta, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

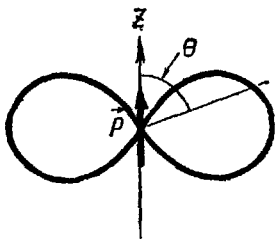


Рис. 76

и (50.5) переписывается так:

$$d\Sigma = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} \dot{P}^2 \sin^2 \theta d\Omega = \\ = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} \dot{P}^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi. \quad (51.2)$$

Выражение (51.2) определяет интенсивность излучения (количество излучаемой энергии в единицу времени) в телесный угол  $d\Omega$ . Из формулы видно, что энергия, излучаемая в заданный телесный угол  $d\Omega$ , зависит от его ориентации относительно полярной оси  $z$ , т. е. от угла  $\theta$ , который составляет ось угла  $d\Omega$  с направлением дипольного момента. Эта зависимость выражается множителем  $\sin^2 \theta$ . Она определяет диаграмму направленности излучения осциллятора, изображенную на рисунке 76, для направлений, лежащих в одной (произвольной) меридиональной плоскости. По радиусам, вдоль которых направлен вектор Умова — Пойнтинга  $\vec{S}$ , откладывается мощность излучения в одинаковые по величине телесные углы  $d\Omega$ , т. е., по существу, по радиусам отложены в определенном масштабе значения  $\sin^2 \theta$ . Максимум излучения осциллятора приходится на экваториальную плоскость  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , в направлении дипольного момента излучения нет:  $\theta = 0$ .

Полную мощность излучения получим, интегрируя выражение (51.2) по всем телесным углам:

$$\Sigma = \oint d\Sigma = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}}{16\pi^2} \dot{P}^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}}{6\pi} \dot{P}^2, \quad (51.3)$$

где учтено, что интеграл от  $\sin^3 \theta$  в интервале от 0 до  $\pi$  равен  $\frac{4}{3}$ .

Для периодических процессов обычно определяют среднюю за период мощность излучения. Поскольку  $\dot{P}^2 = p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ , а среднее за период от  $\cos^2 \omega t$  равно  $\frac{1}{2}$ , то средняя мощность излучения осциллятора равна:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma dt = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}}{12\pi} p_0^2 \omega^4. \quad (51.4)$$

Иногда вводят в эту формулу длину электромагнитной волны, исходя из известного соотношения  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ :

$$\bar{\Sigma} = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0} p_0^2 (2\pi c)^4}{12\pi \lambda^4} = \frac{4\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0} \pi^3 c^4 p_0^2}{3\lambda^4}. \quad (51.5)$$

Для средней мощности излучения в вакууме формулу (51.5) переписывают так:

$$\bar{\Sigma} = \frac{4c\pi^3 p_0^2}{3\varepsilon_0 \lambda^4} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \quad (51.6)$$

(где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ).

Наиболее важным результатом этих выкладок является установление самого факта излучения, а также постоянства полной интенсивности излучения в неограниченной непоглощающей среде для сферы любого радиуса в волновой зоне.

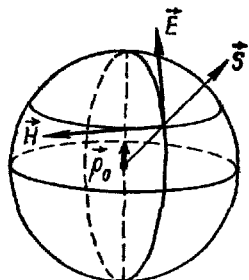


Рис. 77

Выше в упрощенной форме дано решение замечательной «задачи Герца»: вычисление мощности излучения гармонического осциллятора в неограниченной диэлектрической среде. Правда, в задачу Герца входит также нахождение векторов поля излучаемой волны. Из численного значения и направления вектора Умова—Пойнтинга можно установить их значения в сферической системе координат с началом в центре диполя. Электрический вектор в волновой зоне имеет только составляющую по координатной линии  $\theta$ , иными словами, электрические силовые линии совпадают с меридианами (рис. 77). Магнитный вектор имеет только составляющую по координатной линии  $\varphi$ , т. е. магнитные силовые линии совпадают с параллелями. Без вывода приводим эти значения:

$$\left. \begin{aligned} E_r = E_\varphi = H_r = H_\theta = 0, \\ E = E_\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \sin\theta \frac{p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \\ H = H_\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \sin\theta \frac{p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (51.7)$$

Как видно из (51.7), напряженности поля убывают в волне пропорционально первой степени расстояния. Напомним, что электрическое поле статического диполя убывает пропорционально третьей степени расстояния, а магнитное поле стационарного тока, текущего в конечном отрезке провода, убывает пропорционально квадрату расстояния.

Медленное убывание векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  волнового поля по сравнению с векторами стационарных полей обусловлено тем, что в первом случае происходит излучение энергии. В более слабой зависимости векторов волнового поля от  $r$  заключается принципиальное обоснование возможности передачи электромагнитных сигналов на большие расстояния.

Для макроскопических систем, к которым относятся формулы (51.4)—(51.6), мы получили полезные выводы: интенсивность

излучения пропорциональна квадрату дипольного момента, который, как видно из формулы (51.1), пропорционален длине диполя. Это обстоятельство качественно объясняет применение длинных антенн у передающих радиосистем. Излучение пропорционально  $\omega^4$  или обратно пропорционально  $\lambda^4$ ; отсюда вытекает, что для надежной радиосвязи нужно пользоваться сравнительно короткими волнами.

Однако на коротких волнах (особенно в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах) рассмотренным методом не удастся генерировать излучение большой мощности, что вытекает из тех же формул: вследствие малой длины диполя в этих диапазонах невозможно довести значение момента  $p_0$  до большой величины.

Первые шаги по практическому использованию электромагнитных волн для целей передачи сигналов на расстояние без проводов связаны с именем А. С. Попова (1859—1905)—изобретателя радио.



## VIII. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ ЛОРЕНЦА

### § 52. ОГРАНИЧЕННОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

При всей грандиозности воздвигнутого Максвеллом и его последователями здания классической теории поля в этой теории отчетливо проявляется недостаток феноменологической трактовки взаимодействия поля с веществом. Как уже ранее указывалось (§ 1), атомистическая структура вещества в макроскопической теории не учитывается. Индивидуальные свойства веществ учитываются введением величин  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ , которые, несомненно, представляют собой усредненные значения микрофизических характеристик веществ, в природу которых макроскопическая теория не вникает. В теории предполагается, что для каждого однородного вещества указанные величины — константы, не зависящие от особенностей поля (его величины и частоты).

Ограниченность такого предположения может быть показана на ряде примеров. Рассмотрим один из них. Как известно, Максвелл вывел для показателя преломления света соотношение  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , которое для подавляющего большинства веществ (при  $\mu = 1$ ) приобретает более простой вид:  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Данное соотношение действительно подтвердилось для широкого круга веществ. Однако в ряде случаев наблюдаются резкие расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями показателя преломления. Так, например, для воды  $\epsilon = 81$ , откуда ее показатель преломления должен быть  $n = 9$ . Между тем показатель преломления воды  $n = 1,33$ !

Поясним причину этого расхождения. При прохождении через диэлектрик электромагнитная волна вызывает переменную поляризацию. Полагая, что поляризация пропорциональна полю ( $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ ), теория не учитывает реальных свойств микроскопических носителей поляризации, свойств молекул. Если молекулы диэлектрика представляют собой жесткие диполи, которые под действием поля устанавливаются по направлению поля (ориентационный механизм), то в быстро переменных полях молекулы в связи с наличием определенного момента инерции не успевают следовать за быстрыми изменениями поля. Поэтому диэлектрик при данном мгновенном значении напряженности переменного поля поляризован гораздо слабее, чем в постоянном поле той же напряженности. В результате значения диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , а следовательно, и показателя преломления  $n$  в

диэлектриках с ориентационным механизмом поляризации (вода, спирты и др.) быстро падают с ростом частоты колебаний поля.

В диэлектриках с электронным механизмом поляризации молекулы обладают собственной частотой колебаний. Очевидно, что амплитуда колебаний зарядов в молекуле должна существенно зависеть от соотношения частот собственных колебаний и колебаний поля падающей волны. Вблизи резонанса эта амплитуда, естественно, резко возрастает.

Таким образом, здесь выявляется, что степень поляризации, а следовательно, и значения  $\epsilon$  и  $n$  зависят не только от амплитуды электрического вектора волны, но и от частоты его колебаний  $\nu$ . Поскольку макроскопическая теория не учитывает связи между показателем преломления  $n$  и частотой  $\nu$ , она бессильна объяснить явление дисперсии.

При низких частотах (например, при радиочастотах) зависимость от частоты в обоих случаях менее значительна и формула Максвелла для показателя преломления приводит к правильным результатам.

Можно утверждать, что макроскопическая теория во всей строгости применима к электромагнитным полям в вакууме. При исследовании полей в веществе следует, вообще говоря, обратиться к уравнениям электронной теории. Впрочем, для длинных волн (радиоволн) точность теории вполне удовлетворяет всем требованиям практики, и здесь она применима без каких-либо ограничений.

## § 53. ВВЕДЕНИЕ В МИКРОСКОПИЧЕСКУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

В этой главе рассматриваются основы микроскопической электродинамики (классической электронной теории), которые в главных чертах были заложены на рубеже нашего века голландским ученым Г. Лоренцом. Электронная теория является последовательным развитием макроскопической электродинамики.

Основная задача электронной теории состоит в исследовании взаимодействия электромагнитного поля с веществом с учетом его атомно-молекулярной структуры.

В отличие от макроскопической теории поля, в которой заряды играют явно второстепенную роль (роль особых точек, в которых  $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$ ), микроскопическая теория рассматривает вещество как систему положительных и отрицательных электрических зарядов. Эти заряды взаимодействуют между собой через посредство их полей.

Со времени обоснования электронной теории представления о строении атома подвергались неоднократным изменениям, что нагляднее всего выражается в смене общепринятых «моделей» атома. Модель атома, предложенная Дж. Дж. Томсоном (1903)

и получившая в свое время всеобщее признание в рамках классической электронной теории, уступила место модели атома Резерфорда — Бора, которую затем сменила квантовомеханическая модель атома. Все эти модели имеют, однако, одну существенную общую черту: отрицательные заряды существуют в виде дискретных частиц — электронов — и могут быть легко отделены от атомов, в то время как положительные заряды прочно связаны с атомом.

Классическая электронная теория исходит из фундаментального положения, что уравнения Максвелла, сформулированные в макроскопической электродинамике, со всей строгостью применимы в микромире. Отметим попутно, что это положение отвергается квантовой физикой. Достаточно вспомнить первый постулат Бора, в котором содержится аксиоматическое утверждение об отсутствии излучения при движении электрона в атоме по стационарным орбитам, т. е. при движении с ускорением (вопреки Максвеллу!).

Классическое положение о полной тождественности законов макро- и микромира является принципиально неверным, поэтому нельзя рассматривать объекты микромира, перенося на них целиком, как это делается в электронной теории, все законы макроскопической физики. Тем не менее классическая электронная теория не утратила своего значения до сих пор.

Достоинством классической электронной теории является наглядность ее модельных представлений, на основе которых она приходит к качественно правильным выводам. Однако количественные результаты электронной теории обычно расходятся с опытными данными (часто весьма сильно).

Очень многие представления классической электронной теории в связи с их наглядностью и простотой сохранились до сих пор в курсах общей физики и в физике средней школы; это вполне правомерно, так как во многих случаях квантовая механика только уточняет выводы классической электронной теории и ограничивает область их применения.

## § 54. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА — ЛОРЕНЦА

В § 1 был изложен введенный Лоренцем способ усреднения микрофизических величин, являющихся функциями координат. Для усреднения нестационарных величин дополнительно вводят физически бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$ . В соответствии с идеями Лоренца, он должен быть велик по сравнению с продолжительностью атомных процессов (например, с временем жизни возбужденного атома) и вместе с тем достаточно малым, чтобы величины, усредненные по соседним промежуткам времени  $\Delta t$ , либо мало, либо вовсе не отличались друг от друга.

Введенный Лоренцем способ усреднения величин вида  $\psi(x, y, z)$  можно распространить и на переменные величины вида  $f(x, y, z, t)$ :

$$\langle f(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V} \int_{\Delta t} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau,$$

где  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  — приращения  $x, y, z, t$ . Средние значения обозначаются символом  $\langle \rangle$ .

Из общего вида  $\langle f \rangle$  ясно, что  $\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$ . Соответственно

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \vec{a} \rangle &= \operatorname{div} \langle \vec{a} \rangle, \\ \langle \operatorname{rot} \vec{a} \rangle &= \operatorname{rot} \langle \vec{a} \rangle. \end{aligned}$$

Воспользуемся идеями Лоренца, чтобы записать систему уравнений электромагнитного поля для микроскопического поля, т. е. для поля в математически бесконечно малом объеме (в «точке»). Естественно, что константы  $\epsilon, \mu, \gamma$  в эти уравнения входить не будут, так как они возникают в результате усреднений по физически бесконечно малым объемам. Введем обозначения: напряженности микроскопического поля  $\vec{e}$  (т. е.  $\vec{E}_m$ ) и  $\vec{h}$  ( $\vec{H}_m$ ), плотности заряда  $\rho_m$ , плотности тока  $\vec{j}_m = \rho_m \vec{v}$  (индекс «микро» заменен индексом «м»).

Необходимо отметить, что в математически бесконечно малом объеме (в «точке») свободные и связанные заряды, очевидно, неразличимы, поэтому  $\rho_m$  означает плотность любого электрического заряда в данной точке. Точно так же неразличимы токи свободных и связанных зарядов (токи проводимости и молекулярные токи). Все токи с точки зрения микромира должны рассматриваться как конвекционные токи  $\rho_m \vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — скорость перемещения зарядов.

Исходя из положения о строгой применимости уравнений Максвелла в микромире, приходим к системе уравнений микроскопического поля, называемых также уравнениями Лоренца:

I уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \rho_m \vec{v} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{e});$$

II уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{h}); \quad (54.1)$$

уравнения для дивергенций:

$$\operatorname{div} (\mu_0 \vec{h}) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{e}) = \rho_m.$$

Равенство нулю расходимости магнитного вектора выражает предположение, что в природе нет магнитных зарядов.

Макроскопические значения физических величин обозначим без индексов:  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$ . Выполнив усреднения величин  $e$ ,  $h$ ,  $\rho_m$ ,  $j_m$  по Лоренцу, получим значения этих величин для макроскопического поля:

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{e} \rangle &= \vec{E}, & \langle \rho_m \rangle &= \rho + \rho_{\text{связ}}, \\ \mu_0 \langle \vec{h} \rangle &= \vec{B}, & \langle \vec{j}_m \rangle &= \langle \rho_m \vec{v} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (54.2)$$

Магнитное поле (поле вектора  $\vec{B}$ ) по определению обусловлено всеми токами (как токами проводимости, так и молекулярными токами) [ср. § 29]. Таким образом, вектор  $\vec{B}$  можно определить как усредненную напряженность поля, обусловленную всеми микроскопическими токами (умножаемую при записи в СИ еще на множитель  $\mu_0$ ).

В соответствии с усреднением (54.2) уравнения макроскопического поля имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \langle \rho_m \vec{v} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{III. } \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \text{IV. } \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\langle \rho_m \rangle}{\epsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (54.3)$$

Записанные здесь уравнения макроскопического поля часто называют уравнениями Максвелла — Лоренца. Новую форму при усреднении приобретает первое уравнение (54.3). В нем отражен тот факт, что более полной характеристикой магнитного поля является вектор  $\vec{B}$ . В правую сторону уравнения входит только «чистый» ток смещения; первое слагаемое учитывает токи проводимости и токи связанных зарядов. Как мы видим, в уравнения Максвелла — Лоренца входят только векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Сопоставим уравнение I (54.3) с первым уравнением Максвелла в его классической редакции, предложенной Герцем:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

или, с учетом соотношения  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Поскольку вектор  $\vec{B}$  определяется помимо токов проводимости еще и молекулярными токами, микроскопическая плотность которых обозначается  $\vec{j}_{\text{мол}}$ , можно записать первое уравнение Максвелла — Лоренца в таком виде:

$$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) + \vec{j}_{\text{мол}}. \quad (54.4)$$

Уравнение (54.4) совпадает с первым уравнением (54.3) при условии:

$$\langle \rho_{\text{м}} \vec{v} \rangle = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{мол}}. \quad (54.5)$$

Это уравнение выявляет физический смысл величин — компонент плотности тока (54.2). Усредненная плотность микроскопических токов складывается из плотностей токов проводимости  $\vec{j}$ , поляризационных токов  $\vec{j}_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  и токов намагничивания  $\vec{j}_{\text{мол}}$ . Природу поляризационного тока понять нетрудно: при изменении вектора поляризации во времени происходит упорядоченное движение зарядов, образующих диполи (как при ориентационном, так и при электронном механизме поляризации). Токи намагничивания связаны с упорядочением внутримолекулярных токов, которые при намагниченности  $\vec{J} = 0$  распределены хаотично.

Связь вектора плотности тока  $\vec{j}_{\text{мол}}$  с вектором намагниченности  $\vec{J}$  будет дана в следующем параграфе.

От уравнений феноменологической электродинамики отличается также уравнение IV (54.3): вместо  $\text{div} \vec{D} = 0$  имеем:

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E}) = \langle \rho_{\text{м}} \rangle.$$

Используя снова уравнение связи электрических векторов  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , найдем дивергенцию вектора  $\vec{D}$ :

$$\text{div} \vec{D} = \text{div} (\epsilon_0 \vec{E}) + \text{div} \vec{P},$$

откуда

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E}) = \text{div} \vec{D} - \text{div} \vec{P} = \rho - \text{div} \vec{P}. \quad (54.6)$$

Это уравнение совпадает с IV (54.3) при условии:

$$\langle \rho_{\text{м}} \rangle = \rho - \text{div} \vec{P}.$$

Как было показано ранее (§ 12 и 13),  $\text{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}$ , откуда вытекает формула усреднения:

$$\langle \rho_{\text{м}} \rangle = \rho + \rho_{\text{связ}}.$$

Как известно, в феноменологической теории появление связанных зарядов, токов поляризации и намагничивания учитывается введением относительных проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$ .

В следующих параграфах будет показано, что при сопоставлении уравнений Максвелла с уравнениями электронной теории выявляется физическая природа ряда величин, которыми оперирует феноменологическая электродинамика. Выражение проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$  через микрофизические параметры дается в § 57, 60—61; для удельной электропроводности это выполняется в курсе электронной теории вещества.

## § 55. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА В МАГНЕТИКАХ.

### СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ $\vec{H}$ , $\vec{B}$ И $\vec{J}$

В § 13 был дан вывод равенств  $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}$  и  $\vec{P}'_n = \sigma_{\text{связ}}$ . Нам предстоит выполнить аналогичную операцию для магнитного поля: найти связь между вектором намагниченности  $\vec{J}$  и усредненными (макроскопическими) плотностями молекулярных токов, обуславливающих намагничивание.

Рассмотрим внутри магнетика плоский контур  $L$ , охватывающий площадку  $S$ . Как видно из рисунка 78, молекулярные токи могут двумя способами пересекать площадку  $S$ : токи 1 проходят через  $S$  два раза в противоположных направлениях и вклада в результирующий ток не дают. Токи 2 по одному разу пересекают площадку  $S$ ; поэтому результирующий молекулярный ток образуется алгебраической суммой токов 2. Считаем токи, пересекающие  $S$  в направлении нормали  $\vec{n}$  положительными, а противоположно направленные — отрицательными.

В целях упрощения можно полагать все молекулярные токи одинаковыми и равными  $i_m$  («микро»): площади охватываемых ими кругов также считаем одинаковыми и равными  $S_0$ . Очевидно, произведение  $i_m S_0 \vec{n}'$  (рис. 79) представляет собой магнитный момент элементарного молекулярного тока  $\vec{p}_m$ . Пусть в единице объема магнетика содержится  $N$  центров молекулярных токов. Обозначим через  $\alpha$  угол между нормалью  $\vec{n}'$  к плоскости молекулярного тока и направлением элемента  $d\vec{l}$  контура  $L$ . Построим вокруг элемента длины  $dl$  как оси элементарный цилиндр с

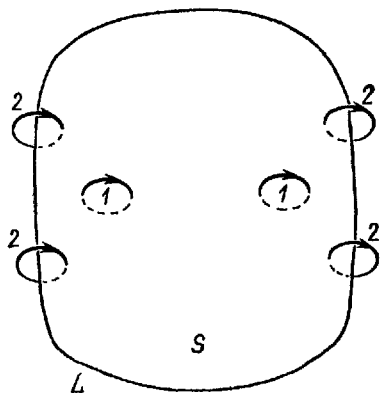


Рис. 78

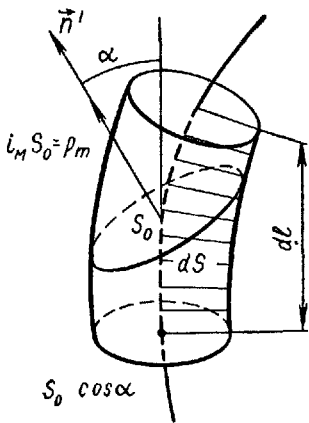


Рис. 79

площадью основания  $S_0 \cos \alpha$ . Число центров молекулярных токов внутри выделенного цилиндра равно:  $N dl S_0 \cos \alpha$ . Отметим, что в намагниченном состоянии угол  $\alpha = \angle(\vec{n}', d\vec{l})$  у расположенных «цепочкой» молекулярных токов в пределах элементарного цилиндра практически одинаков. Молекулярные токи, центры которых лежат внутри этого цилиндра, пересекают заштрихованную площадку  $dS$  (элемента  $S$ ) только один раз; в силу этого с элементом длины  $dl$  контура  $L$  связано  $N dl S_0 \cos \alpha$  элементарных токов, которые создают молекулярный ток  $i_m N S_0 \cos \alpha dl$ . Соответственно, весь молекулярный ток через  $S$  равен:

$$I_{\text{мол}} = \oint_L i_m N S_0 \cos \alpha dl. \quad (55.1)$$

Выразим  $S_0 \cos \alpha dl$  в виде скалярного произведения двух векторов:

$$S_0 \cos \alpha dl = \vec{S}_0 d\vec{l},$$

где  $S_0$  — модуль вектора  $\vec{S}_0$ , направление которого связано с направлением молекулярного тока правилом правого винта. Выражение (55.1) можно переписать так:

$$I_{\text{мол}} = \oint_L i_m N (\vec{S}_0 d\vec{l}).$$

Вводя магнитный момент элементарного молекулярного тока  $\vec{p}_m = i_m \vec{S}_0$ , получаем:

$$I_{\text{мол}} = \oint_L N (\vec{p}_m d\vec{l}). \quad (55.2)$$

Произведение  $N \vec{p}_m$  представляет собой по определению вектор намагниченности  $\vec{J} = N \vec{p}_m$ , откуда

$$I_{\text{мол}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}. \quad (55.3)$$

Выражениями (55.1, 2, 3) выполнен переход от микрофизической величины (молекулярных токов) к макрофизической величине  $I_{\text{мол}}$  (усредненной).

Применим теорему Стокса:

$$I_{\text{мол}} = \int_S \text{rot}_n \vec{J} dS, \quad (55.4)$$



где интегрирование проводится по всей поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ .

С другой стороны, из определения плотности тока вытекает:

$$I_{\text{мол}} = \int_S j_{n, \text{мол}} dS, \quad (55.5)$$

где  $j_{n, \text{мол}}$  — нормальная составляющая объемной макроскопической плотности молекулярных токов. Приравнявая формулы (55.4) и (55.5), имеем:

$$\int_S j_{n, \text{мол}} dS = \int_S \text{rot}_n \vec{J} dS.$$

В связи с произвольностью выбора поверхности  $S$  подынтегральные выражения равны; при этом равны не только нормальные составляющие векторов, но и сами векторы

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{J}. \quad (55.6)$$

При равномерном намагничивании ( $\vec{J} = \text{const}$  во всех точках магнетика)  $\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{J} = 0$ ; таким образом, усредненная плотность молекулярных токов при однородной намагниченности равна нулю. Это можно наглядно представить следующим образом. Выделим в магнетике (ср. рис. 28) физически бесконечно малый объем в виде куба. При  $\vec{J} = \text{const}$  противоположные грани пронизываются одинаковым числом молекулярных токов. При этом части контуров токов, «пересеченных» двумя противоположными гранями куба, в среднем дополняют друг друга до замкнутых контуров, геометрическая сумма которых равна нулю. При неоднородной намагниченности молекулярные токи, пересеченные противоположными гранями, уже не дополняют друг друга полностью:  $\vec{j}_{\text{мол}} \neq 0$ . Естественно, что геометрическая сумма молекулярных токов, лежащих целиком внутри куба, равна нулю.

Таким образом, усреднением (54.5) микроскопических токов получаем окончательное выражение для макроскопической плотности тока:

$$\langle \rho_m \vec{v} \rangle = \langle \vec{j}_m \rangle = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{J}. \quad (55.7)$$

Сумма поляризационного тока  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  и «чистого» тока смещения  $\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \vec{E}$ , входящая в первое уравнение Максвелла — Лоренца (54.4), представляет собой плотность тока смещения  $\vec{j}_{\text{смещ}}$ :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{смещ}}.$$

Следовательно, можно выразить первое уравнение Максвелла—Лоренца иначе, вводя в его правую часть только плотности токов:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}} + \vec{j}_{\text{мол.}}$$

Первые два слагаемых справа определяют  $\operatorname{rot} \vec{H}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}},$$

в силу чего

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{rot} \vec{J},$$

или

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{J}. \quad (55.8)$$

В неферромагнитных средах соблюдается прямая пропорциональность:

$$\vec{J} = \kappa \vec{H}, \quad (55.9)$$

где  $\kappa$  — магнитная восприимчивость; в силу этого выражение (55.8) можно переписать так:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \kappa \vec{H} = (1 + \kappa) \vec{H} = \mu \vec{H},$$

где  $1 + \kappa = \mu$  — магнитная проницаемость. Уравнение связи векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

входит, как известно, в систему основных уравнений электромагнитного поля.

В ферромагнетиках пропорциональность  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  нарушается, иначе говоря, коэффициенты  $\kappa$  и  $\mu$  не являются постоянными величинами, а сложным образом зависят от величины и частоты намагничивающего поля.

Рассмотрим еще связь между поверхностной плотностью молекулярных токов  $\vec{i}_{\text{мол}}$  и вектором намагниченности  $\vec{J}$ . Берем дивергенцию от обеих частей равенства (55.8):

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{J},$$

откуда вытекает:

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}. \quad (55.10)$$

Таким образом, источниками вектора напряженности являются области неоднородной намагниченности, например полюсы магнита,

Рассмотрим соотношение между поверхностной плотностью молекулярных токов  $\vec{i}_{\text{мол}}$  и вектором намагниченности  $\vec{J}$ . Предельный переход от объемной плотности молекулярных токов  $\vec{j}_{\text{мол}}$  к поверхностной плотности  $\vec{i}_{\text{мол}}$  осуществляется аналогично этому переходу для соответствующих плотностей

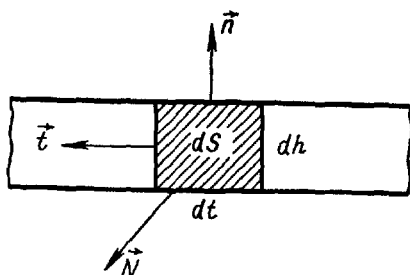


Рис. 80

( $\vec{j}$  и  $\vec{i}$ ) тока проводимости. На рисунке 80 изображен тонкий проводящий слой толщиной  $dh$  и рассматривается ток через элемент сечения  $dS = dt \cdot dh$ . Введем обозначения:  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к слою, направленный из первой среды во вторую;  $\vec{t}$  и  $\vec{N}$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы, касательные к поверхности слоя. Для составляющих плотностей тока вводим обозначения  $i_t$  и  $i_N$ , чтобы сохранить за вектором  $\vec{n}$  значение нормали к поверхности слоя. При бесконечном «сжатии» слоя ( $dh \rightarrow 0$ ) и постоянстве  $dt$  имеем [ср. § 30]:

$$\lim j_n dS = \lim j_n dt dh = i_N dt. \quad (55.11)$$

Как было показано при выводе граничных условий (30.6), для тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  имеет место соотношение

$$H_{2t} - H_{1t} = i_N.$$

Из рисунка 80 видно, что векторы  $\vec{t}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{n}$  образуют правую винтовую тройку:  $\vec{t} = [\vec{N} \vec{n}]$ . Следовательно,

$$H_t = \vec{H} \vec{t} = \vec{H} [\vec{N} \vec{n}] = \vec{N} [\vec{n} \vec{H}], \quad i_N = \vec{N} \vec{i},$$

откуда

$$\vec{N} \vec{i} = \vec{N} [\vec{n} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)].$$

Таким образом, связь между  $\vec{H}$  и поверхностной плотностью  $\vec{i}$  имеет вид:

$$\vec{i} = [\vec{n} \vec{H}_2] - [\vec{n} \vec{H}_1],$$

а связь между  $\vec{H}$  и объемной плотностью тока  $\vec{j}$  выражена первым уравнением Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}.$$

Обобщаем: если два произвольных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{j}$  связаны соотношением  $\text{rot } \vec{a} = \vec{j}$ , то на поверхности разрыва этих векторов связывающее их соотношение принимает вид:

$$[\vec{n} (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)] = \vec{i},$$

где  $\vec{i}$  получаем из выражения (55.11). В случае молекулярных токов, обуславливающих намагничивание, мы получили соотношение (55.6).

Согласно вышеизложенному для поверхностной плотности молекулярных токов получим:

$$\vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{n} (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)], \quad (55.12)$$

где индекс 1 относится к исследуемому магнетик, 2 — к окружающей его среде,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности магнетика. При  $\vec{J}_2 = 0$  получим:

$$\vec{i}_{\text{мол}} = -[\vec{n} \vec{J}_1]. \quad (55.13)$$

## § 56. СИЛЫ ЛОРЕНЦА

В настоящее время огромное значение приобрел раздел прикладной физики, называемый электроникой; ее задачей является получение электронных потоков и управление ими, осуществляемые либо при помощи электрического поля, либо магнитного поля, либо комбинированием этих двух способов. В принципе эти способы применимы для управления потоками любых заряженных частиц.

Выведем выражение для силы, действующей на электрон во внешнем электромагнитном поле. Эту силу, называемую силой Лоренца, можно рассматривать как равнодействующую двух сил: силы  $\vec{f}_E$ , действующей на электрон со стороны электрического поля, и силы  $\vec{f}_H$ , действующей на электрон со стороны магнитного поля:

$$\vec{f} = \vec{f}_E + \vec{f}_H. \quad (56.1)$$

Сила  $\vec{f}_E$  действует независимо от состояния движения электрона, сила  $\vec{f}_H$  действует только на движущийся электрон. Очень часто лоренцевой силой называют только эту составляющую силы  $\vec{f}$ .

Математическое выражение для силы  $\vec{f}_E$  непосредственно вытекает из формул электростатики:

$$\vec{f}_E = e\vec{E}, \quad (56.2)$$

где  $\vec{E}$  — напряженность поля,  $e$  — заряд электрона (знак минус включен в  $e$ );  $\vec{f}_E$  и  $\vec{E}$  противоположно направлены\*.

При вычислении силы  $\vec{f}_H$ , с которой магнитное поле действует на движущийся электрон, в курсе общей физики исходят из известного выражения для амперовой силы, с которой магнитное поле действует на проводник с током. При этом амперову силу рассматривают как равнодействующую всех элементарных лоренцовых сил, с которыми магнитное поле действует на электроны проводимости проводника. Движущиеся электроны взаимодействуют с решеткой металла, вследствие чего эти силы приложены к проводнику. Если исходить из одинакового значения скорости направленного движения электронов, то, очевидно, все элементарные лоренцевы силы в однородном магнитном поле будут одинаковы и их можно вычислить делением амперовой силы, действующей на участок проводника, на число электронов проводимости в этом участке.

Перепишем формулу Ампера в дифференциальной форме (29.20):

$$d\vec{f} = [j \vec{B}] dV.$$

Переход от формулы Ампера к выражению для силы Лоренца может быть осуществлен более строгим путем, если ввести в рассмотрение силу  $\vec{k}$ , с которой поле  $\vec{B}$  действует на единицу объема проводника при плотности протекающего через него тока  $j$ :

$$\vec{k} = \frac{d\vec{f}}{dV} = [j \vec{B}].$$

Как указывалось ранее, плотность тока может быть представлена как произведение  $\rho \vec{v}$ , где  $\rho$  — плотность зарядов,  $\vec{v}$  — скорость их направленного движения. Поэтому

$$\vec{k} = \rho [\vec{v} \vec{B}]. \quad (56.3)$$

Обозначая через  $dV$  элемент объема электрона и интегрируя по всему объему электрона  $V$ , получим:

$$\vec{f}_H = \int_V \vec{k} dV = \int_V \rho [\vec{v} \vec{B}] dV = e [\vec{v} \vec{B}]. \quad (56.4)$$

Здесь предполагается постоянство  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  в объеме, занятом зарядом.

В общем случае наличия двух полей ( $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ) выражение для силы Лоренца приобретает вид

$$\vec{f} = \vec{f}_E + \vec{f}_H = e (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]). \quad (56.5)$$

\* В целях получения ряда распространенных формул, например для лоренцовых сил в общепринятой форме, в данном и в последующих параграфах пользуемся обозначениями напряженностей макроскопических полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Сила, действующая на единицу объема проводника, в общем случае

$$\vec{k} = \rho (\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]). \quad (56.6)$$

В этих выводах отчетливо проявляется основное положение классической электронной теории о строгой применимости законов макромира, в данном случае закона Ампера, в микромире.

## § 57. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ОРИЕНТАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ПОЛЯРИЗАЦИИ

Ориентационный механизм поляризации характерен для диэлектриков, молекулы которых можно рассматривать как жесткие диполи, т. е. диполи с независимым от поля электрическим моментом  $\vec{p}$ . Под влиянием электрического поля происходит ориентация этих диполей. В дальнейшем мы ограничимся теми случаями, когда поле либо постоянно, либо меняется столь медленно, что диполи успевают следовать за изменяющим свое направление полем.

При ориентационном механизме поляризации нагревание, ведущее к более энергичному столкновению молекул, оказывает на диполи дезориентирующее действие и результирующая поляризация всегда зависит от двух конкурирующих факторов: поля  $\vec{E}$  и температуры  $T$ . Выведем зависимость поляризации  $\vec{P}$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от  $\vec{E}$ ,  $T$  и атомных параметров вещества.

Пусть в единице объема диэлектрика находится  $N$  молекул с постоянным электрическим моментом  $\vec{p}$ . При отсутствии дезориентирующего действия теплового движения все диполи под влиянием поля ориентировались бы строго по полю и результирующая поляризация была бы  $\vec{P}_k = N\vec{p}$  (поляризация насыщения). Таков эффект упорядочивающего действия поля.

Рассмотрим теперь действие лишь температурного фактора, т. е. примем  $\vec{E} = 0$ . Вследствие хаотического характера теплового движения все направления моментов диполей окажутся равновероятными. Выразим это математически. Для этого опишем вокруг произвольной точки внутри диэлектрика сферу единичного радиуса и выделим внутри ее меньшую концентрическую сферу единичного объема (рис. 81). Центры обеих сфер совместим с началом сферической системы координат. Продолжим мысленно по прямой каждый дипольный момент  $\vec{p}$  и фиксируем точки пересечения этой прямой с поверхностью сферы единичного радиуса. Эти «следы» будут равномерно распределены по поверхности сферы. Естественно, что число «следов»  $dN$  на дан-

ном элементе сферы прямо пропорционально площади этого элемента  $dS$ .

Выберем в качестве элемента поверхности сферы шаровой пояс, лежащий между параллелями  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ . Его поверхность  $dS = 2\pi \sin \theta d\theta$ . В силу сказанного

$$dN = c \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = C \sin \theta d\theta, \quad (57.1)$$

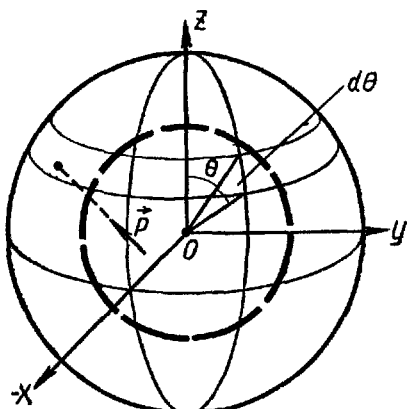


Рис. 81

где  $c$  и  $C$  — коэффициенты пропорциональности (в  $C$  включен множитель  $2\pi$ ). Эта запись выражает равномерное (хаотическое) распределение диполей по всем возможным направлениям — результат теплового воздействия.

Одновременное действие обоих конкурирующих факторов — температуры и поля — учитывается при помощи теоремы Больцмана из статистической физики: в условиях термодинамического равновесия закон распределения молекул при наличии поля консервативных сил отличается от закона их распределения

в отсутствие поля сил множителем  $e^{-\frac{W}{kT}}$ , где  $W$  — потенциальная энергия молекулы в данном поле сил,  $k$  — константа Больцмана. Таким образом, закон распределения диполей по углам в электрическом поле приобретает вид

$$dN = Ce^{-\frac{W}{kT}} \sin \theta d\theta. \quad (57.2)$$

Пусть электрическое поле направлено вдоль полярной оси  $z$ . Выражение для энергии диполя во внешнем электрическом поле известно (см. упр. 18):

$$W = -\vec{p}\vec{E} = -pE \cos \theta.$$

Подставляя его в (57.2), имеем:

$$dN = Ce^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta = Ce^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (57.3)$$

где введено обозначение

$$a = \frac{pE}{kT}. \quad (57.4)$$

Определим значение коэффициента пропорциональности  $C$  из условия, что общее число молекул в единичном объеме равно  $N$ :

$$N = \int_{V=1} dN = \int_0^\pi C e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (57.5)$$

Подынтегральное выражение допускает существенное упрощение, если учесть, что при обычных температурах величина  $a$  во всех практически достижимых внешних полях значительно меньше единицы; поэтому можно с достаточной точностью заменить экспоненциальный член первыми двумя членами его разложения:

$$e^{a \cos \theta} = 1 + a \cos \theta + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{2!} + \dots$$

В силу этого выражение (57.5) упрощается:

$$N = \int_0^\pi C (1 + a \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2C.$$

Итак, коэффициент пропорциональности  $C = \frac{N}{2}$ , и закон распределения приобретает вид

$$dN = \frac{N}{2} (1 + a \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{при } a \ll 1). \quad (57.6)$$

Переходим к вычислению вектора поляризации диэлектрика, направленного параллельно вектору поля  $\vec{E}$ , т. е., по условию, вдоль полярной оси  $z$ . Модуль вектора поляризации равен алгебраической сумме проекций  $p \cos \theta$  отдельных моментов на полярную ось. Суммарный момент  $dN$  молекул, оси которых при своем продолжении пересекают выделенный шаровой пояс, равен  $p dN \cos \theta$ . Окончательно значение поляризации получаем интегрированием по всем значениям полярного угла:

$$P = \int_0^\pi p \cos \theta dN = \frac{pN}{2} \int_0^\pi (1 + a \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{pNa}{3}.$$

После подстановки  $a$  из (57.4) имеем:

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E. \quad (57.7)$$

Таким образом, величина поляризации прямо пропорциональна напряженности поля и обратно пропорциональна абсолютной температуре. Сопоставляя с известным выражением  $P = \alpha \epsilon_0 E$ , можно выразить диэлектрическую восприимчивость  $\alpha$  через атомные параметры и температуру:

$$\alpha = \frac{Np^2}{3\epsilon_0 kT}. \quad (57.8)$$



В общем случае в диэлектрике могут реализоваться оба механизма поляризации: под действием поля диполи ориентируются и одновременно «растягиваются», т. е. растет их момент. Электронная поляризация является внутримолекулярным или внутриатомным процессом, не зависящим от температуры. Приращение момента диполя пропорционально  $E$ :

$$\Delta p = \beta \epsilon_0 E; P_{\text{эл}} = N \beta \epsilon_0 E = \alpha_{\text{эл}} \epsilon_0 E,$$

где  $\beta$  — поляризуемость молекулы. В общем случае восприимчивость  $\alpha$  имеет соответственно ориентационную и электронную компоненты  $\alpha_{\text{ор}} + \alpha_{\text{эл}}$ , результирующая поляризация равна:

$$P = P_{\text{ор}} + P_{\text{эл}} = \frac{N p^2}{3kT} E + N \beta \epsilon_0 E = \alpha \epsilon_0 E.$$

Для диэлектрической проницаемости в этом случае имеем:

$$\epsilon = 1 + \alpha = 1 + N \left( \frac{p^2}{3\epsilon_0 kT} + \beta \right). \quad (57.9)$$

## § 58. УПРУГО СВЯЗАННЫЙ ЭЛЕКТРОН

В предложенной английским физиком Дж. Дж. Томсоном в 1903 г. гипотезе о строении атома впервые в истории физики выдвигалась научно обоснованная модель атома. Эта модель пользовалась в свое время всеобщим признанием вплоть до 1912 г., когда Резерфорд своими работами по рассеянию  $\alpha$ -частиц атомами показал, что она не соответствует действительности.

Основываясь на своей модели, Томсон впервые смог дать физическую картину элементарного микроисточника света.

Томсону надо было показать, что электроны в его модели удерживаются в положении равновесия квазиупругой силой. Поэтому модель Томсона часто называют моделью упруго связанного электрона.

Наиболее простым вариантом такой модели является атом с одним электроном, положение равновесия которого совпадает с центром атома. Поскольку атом в целом нейтрален, то положительный заряд такого атома равен элементарному заряду  $e$ . По предположению этот заряд размазан по всему объему атома — шарик с радиусом  $a$ . При возбуждении атома (электронным ударом, тепловым движением, воздействием света) электрон смещается из положения равновесия. Требуется показать, что на электрон, смещенный из положения равновесия на расстояние  $x \leq a$ , действует квазиупругая сила  $f = m\ddot{x} = -kx$ , где  $k$  — коэффициент квазиупругой силы, связанный с частотой известным соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

При доказательстве мы пользуемся выводом, полученным при решении задачи (упр. 10) о поле сферического слоя, равномерно заряженного по объему. На электрон, расположенный на расстоянии  $x$  от центра атома, действует только положительный заряд шара радиусом  $x$ . Напряженность поля сферического слоя, внешнего по отношению к электрону, в месте расположения электрона равна нулю. Заряд шара радиусом  $x$  действует на электрон так же, как точечный заряд такой же величины, расположенный в центре шара, т. е. в центре атома; поэтому величина этой силы может быть вычислена по закону Кулона.

Объемная плотность положительного заряда равна  $\frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ ,

поэтому заряд шара радиусом  $x$  равен  $\frac{4}{3}\pi x^3 \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{ex^3}{a^3}$ . Отсюда

согласно закону Кулона получаем силу притяжения электрона к центру атома:

$$f = -\frac{ex^3}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \frac{e}{x^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} x. \quad (58.1)$$

В данном случае знак силы определяется отрицательным знаком заряда электрона. Следовательно, на смещенный из положения равновесия электрон действует квазиупругая возвращающая сила, что является, как уже указывалось выше, условием гармонического колебания электрона, с которым связано излучение электромагнитных волн. Коэффициент перед  $x$  в (58.1) представляет собой, очевидно, коэффициент квазиупругой силы:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} = m\omega^2. \quad (58.2)$$

По известной частоте, характеризующей спектральную линию, из формулы (58.2) можно определить порядок размера атома. Полагаем частоту света  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \cdot 10^{14}$  Гц, тогда

$$a = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m 4\pi^2 \nu^2}} \approx 10^{-10} \text{ м} = 10^{-8} \text{ см.}$$

Томсон получил правильную величину «размеров» атомов, однако считать, что таковы размеры объема, занятого положительным зарядом в атоме, было ошибочным. Опытами Резерфорда было показано, что положительный заряд атома сосредоточен в ядре, линейные размеры которого в несколько десятков тысяч раз меньше размеров атома.

## § 59. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим вопрос об излучении упруго связанного колеблющегося электрона.

Пусть во время возбуждения электрон был «подброшен» до границы атома, т. е. удален от положения равновесия на рас-

стояние  $a$ ; исследуем частное решение уравнения движения такого электрона

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (59.1)$$

в форме

$$x = a \cos \omega t. \quad (59.2)$$

Энергия колеблющегося электрона  $W$  складывается из кинетической энергии  $\frac{m\dot{x}^2}{2}$  и потенциальной  $\frac{kx^2}{2}$ . Полная энергия колеблющегося электрона

$$W = \frac{ma^2\omega^2}{2}. \quad (59.3)$$

Мы получили, очевидно, максимальную энергию, которой может обладать электрон, оставаясь внутри атома.

Запишем формулу для средней мощности излучения вибратора  $\bar{\Sigma}$  (51.6):

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}. \quad (59.4)$$

Дипольный момент атома  $p_0 = ea$ , откуда

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 e^2 a^2}{c^3}. \quad (59.5)$$

Введем выражение для энергии (59.3), тогда

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{2e^2\omega^2}{mc^3} W. \quad (59.6)$$

Здесь не учтено затухание вследствие излучения. Поскольку колеблющийся электрон излучает электромагнитные волны, то уравнения (59.1) и (59.2) не являются точными уравнениями движения, а уравнения (59.4)—(59.6)—точными формулами мощности. Естественно, что амплитуда колебания электрона после возбуждения будет все время убывать, поэтому в уравнение (59.1) следует ввести еще одну силу, называемую обычно лучистым трением, а в уравнение (59.2)—множитель, учитывающий затухание. При использовании выражения (59.6) правильной считать  $\bar{\Sigma}$  значением мгновенной мощности, а  $W$ —значением мгновенной энергии электрона.

Изменение излучения в результате слабого затухания колебаний электрона можно учесть следующим образом: производная  $-\frac{dW}{dt}$  представляет собой, очевидно, убыль энергии колеблющегося электрона за единицу времени (мощность излучения).

Полагая  $\bar{\Sigma} = -\frac{dW}{dt}$ , получим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{2e^2\omega^2}{mc^3} W. \quad (59.7)$$

Выражение (59.7) есть закон убывания энергии электрона вследствие излучения в дифференциальной форме. Обозначим для краткости:  $\frac{1}{12\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2e^2\omega^2}{mc^3} = \gamma$ ; тогда

$$\frac{dW}{dt} = -\gamma W. \quad (59.8)$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{dW}{W} = -\gamma dt; \ln W = -\gamma t + \ln C;$$

$$\ln \frac{W}{C} = -\gamma t; W = Ce^{-\gamma t}.$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий: при  $t=0$  (момент возбуждения)  $C=W_0$ —начальная энергия возбуждения. Мы получили закон излучения в интегральной форме

$$W = W_0 e^{-\gamma t}.$$

Таким образом, энергия излучающего электрона убывает по экспоненциальному закону. В оптике большое значение имеет величина  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ , называемая средним временем жизни возбужденного атома. Очевидно, что при  $t=\tau$  энергия электрона уменьшается в  $e \approx 2,7$  раза. Таким образом, средняя продолжительность жизни возбужденного атома представляет собой промежуток времени от момента возбуждения до момента, когда энергия электрона, полученная при возбуждении, убывает вследствие излучения в  $e$  раз (т. е. до 37% своего начального значения).

При излучении видимого света ( $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$  Гц) средняя продолжительность жизни возбужденного атома оказывается равной

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{12\pi\epsilon_0 mc^3}{2e^2\omega^2} \approx 10^{-8} \text{ с.}$$

Отсюда вытекает важное представление о «структуре» световых волн. Каждый атом после возбуждения излучает свет в виде импульса, или, как принято говорить, цуга волн, свойства которого уже были рассмотрены в § 44.

## § 60. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИИ

Дисперсию света в элементарных курсах физики определяют как разложение сложного света (например, белого) на составные компоненты (на «цвета»). Как известно, разложение легко осуществить при помощи призмы. Возможность разложения света на компоненты обусловлена тем, что свету с разной длиной волны соответствуют разные показатели преломления, а следовательно, разные скорости распространения в одной и той же среде.

Оптические волны охватывают огромный диапазон длин волн (инфракрасные, видимые и ультрафиолетовые), отличающиеся друг от друга в десятки тысяч раз. В вакууме все электромагнитные волны распространяются с одной и той же скоростью  $c$ . В прозрачных средах (например, во многих диэлектриках) скорость их распространения неодинакова.

Под воздействием электрического поля световой волны в диэлектрике возникает переменная поляризация: молекулярные диполи, рассматриваемые как электрические резонаторы, совершают вынужденные колебания с частотой колебаний поля. Колебания диполей порождают вторичные электромагнитные волны, которые, как и первичная световая волна, распространяются со скоростью  $c$ . Сложение этих вторичных волн с первичной и дает результирующую волну, амплитуда, фаза, длина волны и скорость которой (но не частота) будут существенно зависеть от соотношения частот падающей световой волны и собственной частоты диполей. Поэтому волны с различной частотой распространяются в веществе с различной скоростью и имеют различные показатели преломления.

Дисперсией света называют зависимость показателя преломления света  $n$  в веществе от длины волны или частоты. Дисперсию характеризуют производными  $\frac{dn}{d\lambda}$  или  $\frac{dn}{d\nu}$ , которые показывают, на сколько изменяется показатель преломления с изменением  $\lambda$  или  $\nu$  на единицу. Учитывая связь между показателем преломления и скоростью распространения волн  $v = \frac{c}{n}$  и  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ , можно характеризовать дисперсию также производными  $\frac{dv}{d\lambda}$  или  $\frac{dv}{d\nu}$ .

Напомним, что макроскопическая электродинамика Максвелла оказалась неспособной объяснить дисперсию. Как известно, по закону Максвелла  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , а при  $\mu \approx 1$   $n \approx \sqrt{\epsilon}$ . Диэлектрическую проницаемость считали константой для каждого вещества, поэтому показатель преломления также должен был быть постоянным, не зависящим от  $\lambda$  и  $\nu$ . Электронная теория позволила дать атомно-молекулярное истолкование формально введенным параметрам  $\epsilon$  и  $n$  и объяснить влияние частоты поля на  $\epsilon$ , а следовательно, и на  $n$ .

По установившейся терминологии различают нормальную и аномальную дисперсию. В области нормальной дисперсии показатель преломления  $n$  и дисперсия  $\frac{dn}{d\lambda}$  растут по мере перехода от длинных волн к коротким (участки  $BA$  и  $DC$  на рис. 82, на котором изображен ход дисперсии света в органическом красителе — фуксине). В области аномальной дисперсии наблюдается противоположный характер зависимости  $n$  от  $\lambda$  (участок  $BC$

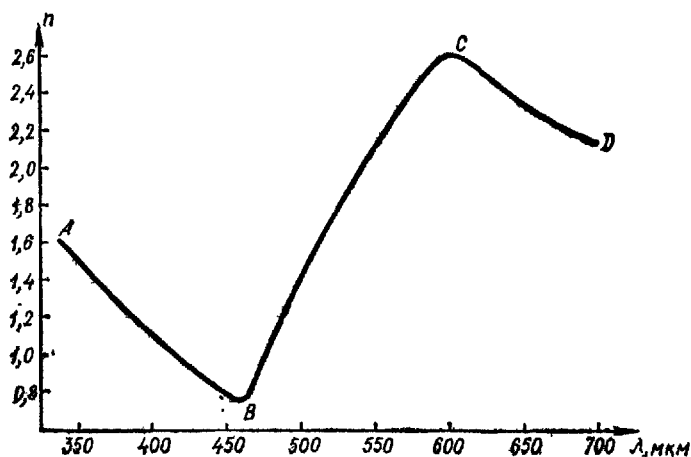


Рис. 82

на рис. 82). Интервал длин волн, в котором наблюдается аномальная дисперсия, совпадает с областью поглощения этих волн данным веществом. Поэтому термин «аномальная» неудачен, так как каждое вещество в той или иной области спектра обладает одной или несколькими полосами поглощения.

Гипотеза упруго связанных электронов (которым соответствует электронный механизм поляризации) позволяет объяснить явление дисперсии света. Электрон в атоме способен совершать свободные колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  под действием квазиупругой силы  $f$ ; уравнение этого движения

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (60.1)$$

Световые волны действуют на электрон с периодической силой  $eE$ , зависящей от напряженности электрического поля волны  $E = E_0 \sin \omega t$ , где  $\omega$  — круговая частота колебаний поля световой волны, отличная от частоты собственных колебаний электрона.

Колебания электрона в атоме затухают, так как имеют место излучение и другие потери энергии колебаний, например вследствие межатомных столкновений. В разреженных газах можно в первом приближении учитывать только потери на излучение. Это осуществляется введением в уравнение движения силы лучистого трения  $G$ , которую из-за малости затухания можно считать прямо пропорциональной скорости движения электрона:

$$G = g \frac{dx}{dt}.$$

При этих допущениях мы получаем уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = eE - kx - g\dot{x}, \quad (60.2)$$

называемое уравнением дисперсии.

Решив это уравнение, определяют величину смещения  $x$ , затем по этой величине находят поляризацию  $P$ , наконец, диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  и показатель преломления  $n$  как функции атомных параметров ( $e$ ,  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $g$ ) и частоты внешнего поля. Эти данные позволяют определить дисперсию  $\frac{dn}{d\lambda}$ . Решение задачи упрощается, если пренебречь затуханием электронов, т. е. предположить  $g=0$ .

Подставив вместо  $E$  и  $k$  их значения, приводим уравнение (60.2) к виду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Решение такого уравнения хорошо известно из теории колебаний:

$$x = \frac{eE_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Поляризация однородного вещества по определению равна  $P = Np$ , где  $N$  — число атомов в единице объема,  $p$  — электрический момент атомного диполя; поскольку  $p = ex$ , имеем:

$$P = Nex.$$

Используем соотношение электростатики  $D = \epsilon \epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P$ . Подставив сюда значение  $P$  и  $x$ , после сокращения на  $E$  получаем:

$$\epsilon = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \approx n^2. \quad (60.3)$$

Это соотношение устанавливает связь между  $\epsilon$  и атомно-молекулярными параметрами.

Полное решение уравнения дисперсии (60.2) имеет вид

$$x = e^{-\frac{g}{2m}t} [Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}] + \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega g}{m}}, \quad (60.4)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{g}{2m}\right)^2}$  — частота собственных колебаний электронов при наличии затухания. Комплексное выражение для  $x$  означает, что смещение сдвинуто по фазе относительно  $E$ . Исходя из этого выражения, можно получить значение  $n^2$  (вывод опускается):

$$n^2 = K^2 + 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{g^2}{m^2}}, \quad (60.5)$$

где  $K$  — показатель поглощения. При  $g=0$  и  $K=0$  мы снова приходим к выражению (60.3). Теория и эксперимент находятся в согласии. Область нормальной дисперсии (участок  $CD$  на рис. 82) соответствует неравенству  $\omega < \omega_0$ , т. е. случаю, когда частота световых волн меньше частоты собственных колебаний электрона; на участке  $AB$  снова наблюдается нормальная дисперсия:  $\omega > \omega_0$ . Область аномальной дисперсии совпадает с областью резонанса и поглощения, где  $\omega \approx \omega_0$ .

## § 61. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ НАМАГНИЧИВАНИЯ ПАРА- И ДИАМАГНЕТИКОВ

В классической теории магнетизма рассматриваются три группы веществ: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики\*.

Магнетизм веществ обусловлен орбитальным движением внутриатомных электронов и наличием у них спинов (собственных моментов импульса). Орбитальному движению и спину электронов соответствуют магнитные моменты — орбитальный  $p_{ml}$  и спиновый  $p_{ms}$ . Магнитные свойства атома (или молекулы) характеризуются результирующим магнитным моментом входящих в их состав частиц, в первую очередь геометрической суммой орбитальных и спиновых моментов электронов  $p_{ma} = \sum (p_{ml} + p_{ms})$ . Магнитные моменты атомных ядер составляют лишь тысячные доли от магнитного момента электрона. У пара- и ферромагнетиков ( $\mu > 1$ ) результирующий магнитный момент атома отличен от нуля. У диамагнетиков результирующий магнитный момент каждого атома равен нулю. Ниже будут рассмотрены основы электронной теории намагничивания пара- и диамагнетиков.

Намагничивание парамагнетиков (кислород, алюминий, платина и др.) можно рассматривать на основе гипотезы о молекулярных магнитных диполях, которые внешнее магнитное поле ориентирует в направлении вектора напряженности  $\vec{H}$ . В силу этого можно все рассуждения и выводы, приведенные в § 58 для ориентационной поляризации диэлектриков, распространить и на парамагнетики (с соответствующей заменой  $\vec{E}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon$  на  $\vec{H}$ ,  $\vec{p}_m$ ,  $\vec{J}$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$  — напряженность магнитного поля, магнитный дипольный момент атома или молекулы, вектор намагниченности, магнитная восприимчивость и проницаемость). Таким образом, мы по аналогии приходим к выражениям:

$$J = \kappa H = \mu_0 \frac{N p_m^2}{3kT} H, \quad (61.1)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{N p_m^2}{3kT}. \quad (61.2)$$

\* Остаются вне рассмотрения антиферромагнетики и другие классы магнетиков.



Последнее соотношение выражает закон Кюри: восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна абсолютной температуре.

Рассмотрим намагничивание диамагнетиков (азот, ртуть, свинец, висмут, вода, медь и др.). Как указывалось выше, у атомов (молекул) диамагнитных веществ результирующий магнитный момент равен нулю ( $p_{ma} = 0$ ).

Таким образом, атомы уже нельзя рассматривать как диполи и лишено смысла говорить о каком-либо ориентирующем действии поля. В курсе физики диамагнетизм связывают с явлением электромагнитной индукции, т. е. с появлением в атомах и молекулах индуцированных токов, направление которых в соответствии с правилом Ленца объясняет основную особенность диамагнетиков: появление одноименного магнитного полюса против индуцирующего полюса (рис. 83).

По представлениям электронной теории индуцированные полем токи возникают в виде добавочного движения электронов во внешнем поле — прецессии их орбитального магнитного момента вокруг направления внешнего магнитного поля. Это явление накладывается на невозмущенное движение электронов, имеющее место в отсутствии поля.

Благодаря своему орбитальному движению электрон подобен микроскопическому гироскопу.

Рассмотрим прецессию внутриатомного электрона во внешнем магнитном поле (рис. 84). Пусть внешнее магнитное поле  $\vec{H}$  направлено снизу вверх и орбитальный момент импульса электрона  $\vec{L}$ , совпадающий с его осью вращения вокруг ядра, образует некоторый угол с полем.

Через  $\vec{p}_{mi}$  обозначен орбитальный магнитный момент электрона, направленный противоположно  $\vec{L}$  (это условие вытекает из определения  $\vec{L}$  и  $p_{mi}$ , направление первого вектора связано с направлением движения электрона, направление второго вектора — с направлением движения положительного заряда, эквивалентного движению заряда электрона, т. е. направленного противоположно ему).

Поле стремится изменить траекторию электрона так, чтобы плоскость

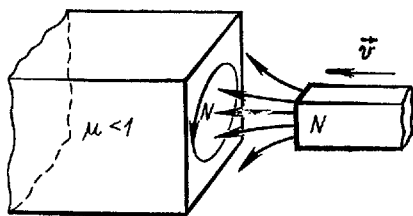


Рис. 83

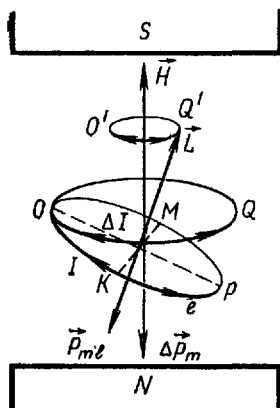


Рис. 84

траектории была перпендикулярна полю, т. е. чтобы векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{H}$  совпали по направлению. Иначе говоря, поле стремится повернуть кольцевой ток, которому эквивалентен вращающийся электрон, вокруг оси  $KM$ .

Следовательно, электрон повернется вокруг третьей оси, перпендикулярной как оси вращения, так и оси  $KM$ , т. е. вокруг мгновенной оси  $OP$ . Возникнет прецессия, т. е. электронная орбита будет непрерывно перемещаться так, чтобы точка  $O$  описывала окружность  $OQ$ , а конец вектора момента импульса  $\vec{L}$  — окружность  $O'Q'$ . На окружности  $O'Q'$  стрелками указаны вправо — направление прецессии электрона, влево — направление эквивалентного ей тока  $\Delta I$ . Этому току соответствует дополнительный магнитный момент  $\Delta p_m$  и добавочное магнитное поле, направленное против внешнего поля. Таково объяснение диамагнитного эффекта в рамках электронной теории.

Теория прецессионного движения электронов во внешнем магнитном поле была разработана Ларморов, и поэтому иногда говорят о ларморовой прецессии. Лармору принадлежит и теорема, устанавливающая величину угловой скорости прецессионного движения электронов.

Во время прецессии электронов сила Лоренца уравнивает силу Кориолиса:

$$\vec{F}_{\text{лор}} + \vec{F}_{\text{кор}} = 0,$$

т. е.

$$-e[\vec{v}\mu_0\vec{H}] + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] = 0, \quad (61.3)$$

где  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость прецессии. Отсюда следует теорема Лармора

$$\vec{\Omega} = \frac{+e}{2m}\mu_0\vec{H}. \quad (61.4)$$

Таким образом, вектор угловой скорости направлен параллельно  $\vec{H}$  (поскольку  $e$  означает абсолютную величину элементарного заряда).

Диамагнитный эффект является универсальным, т. е. он наблюдается во всех телах, в том числе и в пара- и ферромагнетиках, в которых он, однако, маскируется более сильным противоположным эффектом — ориентирующим действием поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе преподавания курса физики учитель средней школы должен добиваться формирования у его питомцев широкого круга общих понятий и представлений, образующих естественно-научную основу материалистического миропонимания. Подготовка учителя физики к этой деятельности и является важнейшей за-

дачей всех разделов вузовского курса физики, в том числе и электродинамики.

Как мы видели, развитие экспериментальных и теоретических исследований привело к началу нашего века к созданию единого, универсального учения об электромагнетизме—электродинамике, область применения которой считалась неограниченной (весь микро-, макро- и мегамир). На смену механической картине мира, основывавшейся на успехах ньютоновской динамики, пришла электромагнитная картина мира.

В соответствии с электромагнитной картиной мира все явления природы (исключая гравитационные) в конечном счете сводятся к электромагнитным взаимодействиям, которые осуществляются между телами и частицами посредством их электромагнитных полей. Электромагнитные поля (а, следовательно, и электромагнитные взаимодействия) распространяются с конечной скоростью (близкодействие).

Огромным достижением электродинамики явилось расширение наших знаний о видах материи. Если раньше, в рамках механической картины мира, известен был лишь один вид материи— вещество, то новая картина мира опирается уже на более богатые знания: было прочно установлено существование нового вида материи—электромагнитного поля, обладающего всеми атрибутами материи—массой, энергией, импульсом, моментом импульса. Единство материального мира (вещества и поля) выражается прежде всего во всеобщей применимости фундаментальных физических принципов сохранения (массы, энергии, импульса, момента импульса).

Параллельно с успехами в области теоретических и экспериментальных исследований электромагнитных явлений проходил невиданный по темпам и размаху процесс их внедрения во все отрасли техники, культуру и быт людей.

Наивысшего уровня полноты и совершенства электромагнитная картина мира достигла в результате создания теории относительности, которую можно считать завершением электродинамики.

С созданием квантовой механики начался новый этап развития физики. Квантовая механика ограничила область применения электродинамики, главным образом для микромира, и позволила значительно глубже проникнуть в сущность процессов микромира.

# СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

## ВВЕДЕНИЕ

Специальная (частная) теория относительности приобрела особую важную роль в системе образования учителя физики, поскольку элементы СТО теперь вошли в программу средней школы.

В основе СТО лежит принцип относительности, который сводится к утверждению, что состояние равномерного прямолинейного движения не влияет на течение физических явлений (это крайне нечеткое утверждение, оно будет в дальнейшем разъяснено). В инерциальных системах отсчета, т. е. в системах, движущихся равномерно и прямолинейно, описание всех явлений природы производится одинаковым образом. Основной задачей СТО является определение условий, при которых описание всех явлений природы в инерциальных системах отсчета (ИСО) оказывается тождественным. Формулируя иначе, можно считать основной задачей СТО выявление законов физики, не зависящих от выбора ИСО.

С основными опытными фактами, на которые опирается СТО, студенты знакомятся уже в курсе общей физики, и поэтому в данном разделе эксперимент привлекается не для обоснования теории, а для иллюстрации правильности ее выводов.

Специальная теория относительности не похожа на другие разделы физики. Сравнительно прост ее математический аппарат, просты ее постулаты. Но за этой простотой кроется хитрое переплетение идей и открытий, ставших достоянием физики начала XX в. При изучении основ СТО потребуются критический пересмотр ряда привычных, якобы самоочевидных, основанных на «здравом смысле», понятий и представлений. Кажущаяся парадоксальность многих выводов СТО проистекает именно из того, что мы свыклись с рядом представлений и понятий, приняв их (в значительной мере интуитивно, без достаточных оснований) за извечные, непреложные истины.

## § 62. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Система отсчета.** При постановке любого физического эксперимента подразумевается, что эксперимент осуществляется в определенных условиях, в определенной системе. Наиболее привычно применение системы отсчета в механике. Механика начинается с описания движения, а для этого прежде всего нужно иметь

тело, относительно которого рассматривается движение других тел. С выбранным телом связывается (или на это тело наносится) система координат. В геометрии, говоря о координатной системе, не обязательно помнить, что координатная система связывается с телом. Система координат в физике обязательно связана с материальным телом. Для простоты мы будем пользоваться исключительно прямоугольной декартовой системой координат.

Далее везде будем иметь в виду тела малых размеров и не будем рассматривать вращение тел. В механике о таких телах говорят как о материальных точках. В СТО вместо «материальная точка» принято говорить «частица». Для описания движения частицы необходимы еще часы. Чтобы определить скорость частицы, движущейся равномерно вдоль оси  $X$ , нужно знать ее координаты  $x_1$  и  $x_2$  в соответствующие моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Тогда скорость равна отношению  $\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$ . Проще всего опреде-

лить моменты  $t_1$  и  $t_2$  по часам, находящимся в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Значит, даже в столь простом случае желательно иметь двое часов. Но в механике Ньютона всегда подразумевается, что в каждой системе отсчета достаточно одних часов. Чтобы пояснить, в чем дело, введем два понятия, весьма существенные для СТО.

Событие— все то, что происходит в данный момент времени в данной точке (локализовано в малой области пространства за малый промежуток времени). Примеры событий: 1) мгновенная вспышка света в малой области пространства. 2) Частица движется по некоторой криволинейной траектории. В определенный момент времени  $t$  эта частица находится в некоторой точке с координатами  $x, y, z$ . Это тоже событие (положение частицы в данной точке в данный момент времени).

Событие характеризуют четыре числа— три пространственные координаты  $x, y, z$  и отсчет времени  $t$ , который в СТО называется временной координатой. Мы будем говорить, что числа  $x, y, z, t$ —это «координаты событий». Определяя скорость, нужно определить координаты двух событий, т. е.  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$ .

Как же по часам, находящимся, например, в начале системы отсчета, узнать, когда частица оказалась в точке  $x_1$ , а затем в точке  $x_2$ ? В механике Ньютона считалось, что, когда частица будет в точке  $x_1$  (или  $x_2$ ), оттуда можно без промедления (мгновенно) сообщить об этом в ту точку, где расположены часы. В СТО говорят о передаче сообщения (информации) как о передаче сигнала.

Сигнал—это любой процесс, позволяющий передать из одной точки пространства в другую точку силовое воздействие, которое может, например, что-либо «включить» или «выключить» в этой точке.

Передать сигнал из точки 1 в точку 2—это значит сообщить прибору, находящемуся в точке 2, импульс (передать импульс—

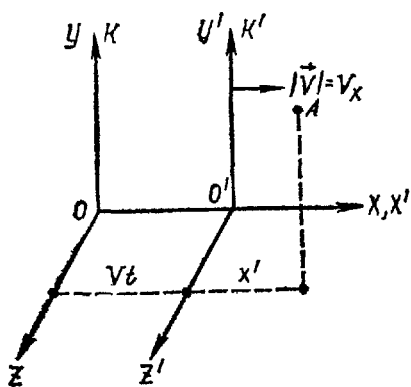


Рис. 85

это и есть «подействовать силой»). Но импульс всегда передается вместе с энергией. Поэтому сигнал—передача энергии и импульса на расстояние. Классическая механика допускает передачу энергии и импульса с бесконечно большой скоростью. Допустив существование бесконечно быстрых сигналов, можно ограничиться одними часами (неподвижными в данной системе отсчета), чем и пользуются в классической (ньютоновской) механике. Итак, система отсчета классической механики включает в себя тело

отсчета, координатную систему, часы, а также эталоны длины и времени.

**Принцип относительности Галилея.** Выбор системы отсчета достаточно произволен. Можно, например, изменять масштабы координатной системы. Нас это интересовать не будет. Рассмотрим две системы отсчета, находящиеся в относительном движении. Пусть система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $V$ . Сделанный выбор координатных систем (рис. 85) является достаточно общим, так как мы рассматриваем вакуум и исходим из того, что пространство однородно и изотропно.

Пространство однородно в том смысле, что все его точки равноправны. Пространство изотропно в том смысле, что его свойства по всем направлениям одинаковы. Из однородности пространства вытекает, что выбор начала отсчета координатной системы безразличен. Из изотропности пространства следует, что, поворачивая оси координат системы отсчета, можно привести их к расположению, изображенному на рисунке 85, без влияния на свойства систем. Нас будут интересовать системы отсчета, движущиеся друг относительно друга поступательно (без вращения), равномерно и прямолинейно. Подразумевается, что каждая из систем отсчета  $K$  и  $K'$  имеет нужные приборы для измерений. Все эти приборы покоятся в своей системе отсчета.

В 1632 г. в книге «Диалоги о двух главнейших системах мира» Галилей сформулировал принцип относительности. На современном физическом языке его можно изложить следующим образом: состояние равномерного прямолинейного движения не оказывает влияния на течение механических процессов; если производятся тождественные опыты в системах отсчета, находящихся в состоянии равномерного прямолинейного движения, они ведут к тождественным результатам. Чтобы описание явлений было одинаковым, системы отсчета должны «строиться» тожде-

ственно. Если при тождественных опытах получаются тождественные результаты, то основные законы механики должны записываться одинаково для всех таких систем отсчета. (Уравнения одинаковы, но входящие в них величины количественно определяются эталонами длины и времени своей системы отсчета.)

Покажем, что законы Ньютона не могут быть справедливыми во всех системах отсчета. Пусть частица покоится относительно системы  $K$  и на нее не действует сила. Относительно системы  $K'$ , движущейся с ускорением  $\vec{a}$ , эта частица имеет ускорение  $-\vec{a}'$ , т. е. на нее по II закону

Ньютона действует сила  $\vec{F}^* = -m\vec{a}$ . Согласно III закону все силы—это силы взаимодействия. В нашем примере  $\vec{F}^*$ —сила инерции («фиктивная» сила); силы противодействия нет.

Инерциальными системами отсчета (ИСО) называют системы отсчета, в которых справедливы все три закона Ньютона. Инерциальная система отсчета должна быть найдена из опыта. Рассмотрим известный опыт с маятником Фуко (рис. 86). На маятник, отклоненный в сторону, действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , направленные под углом друг к другу и лежащие в одной плоскости. (Для простоты рисунок изображен так, как будто опыт проводился на одном из полюсов Земли (Северном или Южном).)

Если Земля—ИСО, то плоскость качания маятника должна оставаться неизменной. Опыт показывает, что плоскость качания поворачивается. Следовательно, Земля—не инерциальная система. В качестве ИСО часто рассматривают систему отсчета, оси которой направлены на неподвижные звезды (такая система не вращается). Выбор начала отсчета для этой системы произволен, но удобнее начало совместить с Солнцем (гелиоцентрическая система), особенно если нужно рассматривать движение планет.

Систему отсчета, жестко связанную с Землей, называют геоцентрической (она не является инерциальной системой отсчета).

Согласно принципу относительности Галилея любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, также является инерциальной. Различие между ИСО состоит в их относительной скорости.

Переход от одной ИСО к другой эквивалентен проведению преобразований Галилея (или Лоренца), т. е. сопоставлению результатов наблюдений в обеих системах.

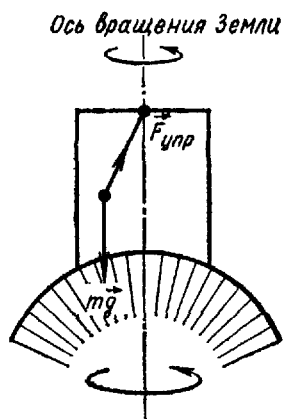


Рис. 86

**Принцип относительности и законы Ньютона.** Мы уже говорили, что если частица движется, то ее нахождение в данной точке траектории  $x, y, z$  в момент времени  $t$  есть событие. Движение частицы есть последовательность событий.

Во второй закон Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (62.1)$$

входят координаты событий. Сила в общем случае является функцией расстояния между двумя точками траектории (двух событий), т. е.  $\vec{F}$  может быть функцией  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ . При переходе от одной ИСО к другой координаты событий будут изменяться. Чтобы выяснить, что происходит с уравнениями механики при переходе от одной ИСО к другой, нужно выяснить, как преобразуются координаты и время события.

Пусть в инерциальной системе  $K$  определено событие  $(x, y, z, t)$ . Координаты этого события в другой ИСО определяются при помощи преобразований Галилея (см. рис. 86), вытекающих из геометрических соображений. В системе  $K'$ , движущейся прямолинейно относительно  $K$  с переносной скоростью  $V = V_x$ , координаты того же самого события равны:

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (62.2)$$

Формулу обратного перехода можно получить, если изменить знак переносной скорости на обратный:

$$x = x' + Vt'.$$

Здесь оси  $OX$  и  $O'X'$  совпадают, а оси  $OY$  и  $O'Y'$ ,  $OZ$  и  $O'Z'$  попарно параллельны (поскольку  $V = V_x$ );  $t' = t$ , так как сигналы для информации о времени наступления события в обеих системах предполагаются бесконечно быстрыми (скорость движения системы отсчета в этом случае не существенна). Кроме того, в этих формулах преобразования координат события при переходе от инерциальной системы  $K$  к системе  $K'$  (преобразования Галилея) предположено, что в момент времени  $t = 0$  оба начала координат  $O$  и  $O'$  совпадают.

Запишем преобразования Галилея в векторной форме:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t, \quad \vec{V}(V, 0, 0). \quad (62.3)$$

Если  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  — закон движения частицы в системе  $K$ , то закон ее движения в системе  $K'$  определяется формулой (62.3)

$$\vec{r}'(t') = \vec{r}(t) - \vec{V}t. \quad (62.4)$$

Найдем скорость частицы, продифференцировав формулу (62.4) по  $t$  (или  $t'$ ):

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V}, \quad \text{т. е. } \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}. \quad (62.5)$$



Формула (62.5) определяет преобразование скорости частицы при переходе от  $K$  к  $K'$ , т. е. выражает закон сложения скоростей в классической механике: скорости, если они невелики, складываются как векторы. Далее мы увидим, что скорости, близкие к скорости света в вакууме (релятивистские скорости), преобразуются иначе.

Запишем основное уравнение классической динамики (второй закон Ньютона) в системе  $K$ :  $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ ; при  $m = \text{const}$   $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ . Если принцип относительности Галилея справедлив, то вид второго закона Ньютона должен сохраняться и в системе  $K'$ . Преобразование координат и времени при переходе от  $K$  к  $K'$  дается соотношениями (62.2), а преобразование скорости — соотношением (62.5). Дифференцируя соотношение (62.5), получим:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (62.6)$$

Поскольку  $m = \text{const}$ , левая часть второго закона Ньютона остается одинаковой во всех ИСО. Если сила зависит от расстояния между частицами, от относительной скорости частиц и от времени, то она тоже сохраняет свое значение во всех ИСО. Действительно, нетрудно убедиться, что  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ ,  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1$ ,  $t = t'$ .

Таким образом, правая часть второго закона Ньютона также не изменяется при переходе от одной ИСО к другой. Следовательно, во всех ИСО второй закон Ньютона имеет один и тот же вид:

в системе  $K$ :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

в системе  $K'$ :

$$\frac{d}{dt'}(m\vec{v}') = \vec{F}'.$$

Теперь уже ясно, почему в принцип относительности Галилея необходимо вводить начальные условия. Второй закон Ньютона выражается дифференциальным уравнением второго порядка относительно координат. Его решение содержит шесть произвольных постоянных. Сами уравнения одинаковы в обеих системах. Чтобы физические явления происходили тождественно, решения уравнений также должны быть тождественными. Для этого, кроме одинаковых уравнений, нужны одинаковые начальные условия: обычно это начальные координаты и начальная скорость частицы.

**Принцип относительности Эйнштейна.** Галилей обнаружил, что состояние равномерного прямолинейного движения не оказывает влияния на течение механических процессов. Галилей не задумывался о других явлениях, так как в те времена механика составляла по существу всю физику. До середины прошлого века считали, что все физические явления можно объяснить на основе механики Ньютона.

В середине XIX в. была создана теория электромагнитных явлений (теория Максвелла). Эта теория сумела дать объяснение световым явлениям. В это же время появилась теория тепловых явлений — термодинамика и статистическая физика. Возник вопрос о том, как влияет равномерное прямолинейное движение на все физические явления.

Первый постулат СТО — принцип относительности Эйнштейна — распространяет принцип относительности Галилея на всю физику: состояние равномерного прямолинейного движения не оказывает влияния ни на какие физические явления.

Такое расширение принципа относительности Галилея является вполне естественным. Природа едина, и существует всеобщая взаимосвязь явлений. Учебное деление физики на разделы — механику, термодинамику, электродинамику, оптику и т. д. — связано с тем, что для описания этих групп явлений используются различные законы (законы Ньютона, уравнения Максвелла, I и II начала термодинамики). Но реальные физические явления не укладываются в такую классификацию.

Принцип относительности Эйнштейна может быть сформулирован следующим образом: тождественные опыты, поставленные в любой ИСО при тождественных начальных условиях, дают тождественные результаты. Или короче: все инерциальные системы отсчета равноправны.

Заметим, что в СТО система отсчета отличается от системы отсчета классической механики; об этом речь пойдет несколько позже.

Иногда первый постулат СТО формулируют так: никакими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя обнаружить ее равномерного прямолинейного движения. Смысл этой формулировки состоит в том, что не существует такого физического опыта, который позволил бы отдать предпочтение одной ИСО перед другой.

Если принцип относительности Эйнштейна справедлив, то не только законы Ньютона, но и уравнения Максвелла во всех инерциальных системах отсчета должны сохранять форму своей записи. Преобразуя уравнения Максвелла при переходе от одной ИСО к другой, мы должны получить уравнения такого же вида. Оказывается, что преобразования Галилея не изменяют вид II закона Ньютона, но изменяют вид уравнений Максвелла.

Последний факт указывает на то, что преобразования Галилея не могут быть применены без ограничений ко всем физическим явлениям. В классической механике неявно принималось, что взаимодействия или сигналы могут передаваться с бесконечной скоростью. В частности, долгое время считалось, что скорость распространения света бесконечна.

Рёмер впервые измерил скорость света, она оказалась конечной. Электродинамика Максвелла показала конечность скорости передачи электромагнитного взаимодействия:  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  — в среде,  $\dot{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  — в вакууме.

Эйнштейн показал, что гравитационные взаимодействия тоже передаются с конечной скоростью, пределом которой является значение скорости света в вакууме.

Современная физика учит, что взаимодействия (сигналы) могут передаваться лишь с конечной скоростью. Бесконечно быстрых сигналов, бесконечно быстрой передачи взаимодействий не существует. Существует предельная скорость передачи сигналов.

Если бы предельная скорость была разной в разных ИСО, можно было бы отличить одну ИСО от другой. Следовательно, предельная скорость должна быть одинакова во всех ИСО. Итак, если справедлив принцип относительности Эйнштейна и существует предельная скорость передачи сигнала (взаимодействия), эта скорость должна быть одной и той же во всех ИСО.

По современным воззрениям предельной скоростью передачи сигнала является скорость света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

Итак, СТО справедлива постольку, поскольку существует предельная скорость сигнала, одинаковая во всех ИСО. Таким образом, мы подошли ко второму постулату СТО: скорость электромагнитных волн (света) в вакууме одна и та же во всех ИСО. В каждой ИСО она имеет одно и то же значение по любому направлению и в любой области пространства.

Наличие предельной скорости передачи сигнала (взаимодействия) сразу же влечет за собой осложнения, прежде всего для всей схемы классической механики.

Скорости называют нерелятивистскими, если  $v \ll c$ ; если же  $v \sim c$ , то релятивистскими. Для нерелятивистских скоростей справедлива ньютоновская механика. При релятивистских скоростях следует пользоваться соотношениями СТО.

Когда скорости тел приближаются к скорости света, пользоваться системой отсчета с одними часами крайне неудобно. Эйнштейн предложил «строить» систему отсчета несколько иначе, чем классическую, по-иному отсчитывая время наступления событий.

Определение времени наступления событий в СТО производится при помощи многих часов; координатную систему, снабженную многими часами, называют релятивистской системой от-

счета. Все часы, которые рассматриваются в СТО, тождественны. Как выбрать тождественные часы и тождественные эталоны длины? Квантовая механика утверждает, что все частицы одного сорта тождественны (т. е. неразличимы). Если взять определенный атом, то его излучение характеризуется набором собственных частот. Если у некоторого атома наблюдается излучение с частотой  $\nu$  (и длиной волны  $\lambda$ ), то у тождественного атома имеется излучение той же частицы  $\nu$  (и  $\lambda$ ). В качестве тождественных часов можно взять атомы определенного сорта, а в качестве эталона длины — длину волны излучения атомов определенного сорта. Таким образом, в каждой системе отсчета можно иметь столько тождественных часов и эталонов длины, сколько нужно.

В каждую точку координатной системы помещаем неподвижные часы. Тогда время наступления события в данной точке пространства — это показания часов, находящихся в этой точке. Показания часов, расположенных в разных точках, должны быть согласованы между собой, иначе мы не получим связного описания явлений.

Согласование показаний часов называют синхронизацией часов. Нельзя синхронизировать часы в одном месте, а потом расставить их по местам, так как при расстановке часы будут двигаться с ускорением, которое влияет на ход часов. Поэтому нужно сначала расставить часы по местам, а потом их синхронизировать.

Если на оси  $X$  в точке  $I$  находятся часы и необходимо их синхронизировать, то из точки  $O$  в момент времени  $t=0$  посылают световой или радиосигнал в точку  $I$ . Координаты точек мы можем определить заранее. В момент прихода сигнала в точку  $I$  на часах, находящихся в этой точке, следует поставить время  $t_1 = \frac{x_1}{c}$ . Использовать для синхронизации световой сигнал нужно

потому, что скорость света в вакууме имеет одно и то же значение во всех ИСО. Тогда синхронизация часов во всех релятивистских инерциальных системах отсчета будет одинаковой.

Момент наступления события (кратко: время события) в данной системе отсчета определяется по часам, синхронизированным указанным способом. Пусть два события наступили в разных точках пространства. Их можно считать одновременными, если в момент наступления событий часы, находящиеся в точках, где произошли события, и предварительно синхронизированные указанным способом, показывают одно и то же время. Определение одновременности тесно связано с вопросом синхронизации часов. Не существует одновременности как таковой. Она определяется способом синхронизации часов.

Изложенный способ синхронизации (по Эйнштейну) используется при всех выводах СТО. Часы и эталоны длины данной ИСО всегда покоятся в ней. Сколько имеется систем отсчета, столько же наборов синхронизированных часов используется для описания событий.

Определение времени события в разных системах  $K$  и  $K'$  осуществляется следующим образом. Пусть в момент наступления события в данной точке  $A$  пространства там же находились часы системы  $K$  и часы системы  $K'$ . Время данного события в системе  $K$  фиксируется показаниями часов системы  $K$ , а время того же события в системе  $K'$  — показаниями часов системы  $K'$ , оказавшихся в точке  $A$ .

Чтобы можно было сравнивать показания часов двух систем, нужно установить связь между показаниями двух наборов синхронизированных часов. Пусть в некоторый момент времени начала координатных систем  $O$  и  $O'$  совпадают. Часам этих систем, находящимся в совпадающих точках  $O$  и  $O'$ , приписываются одинаковые показания ( $t = t' = 0$ ). Во всех остальных точках часы из разных наборов будут показывать разное время.

#### § 64. СЛЕДСТВИЯ ПОСТУЛАТОВ СТО

1. В том случае, если относительное движение систем  $K$  и  $K'$  происходит так, как это изображено на рисунке 85, размер эталона длины (линейки), покоящегося в  $K$  и совпадающего по направлению с осью  $Y$  (или  $Z$ ), т. е. перпендикулярно движению, одинакова, измеряют ли его по масштабам и часам системы  $K$  или же по масштабам и часам системы  $K'$ . Предлагаем читателям самостоятельно провести соответствующие рассуждения. Из этого факта следуют два соотношения для двух координат события:

$$y = y', \quad z = z'.$$

2. **Относительность промежутков времени.** Рассмотрим мысленный эксперимент. В системе  $K'$  в точке  $O'$  находится радиолокатор, на некотором расстоянии от него  $z'_0$  помещено зеркало (это означает, что радиолокатор и зеркало неподвижны относительно  $K'$ ). Посылаем радиосигнал из начала отсчета  $O'$  и ждем его возвращения. Промежуток времени между посылкой и возвращением сигнала

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c}.$$

Рассмотрим те же два события в системе  $K$ . Пусть в начальный момент времени системы  $K$  и  $K'$  совпадали, и в этот момент был послан сигнал. Какой промежуток времени  $\Delta t$  отсчитали часы в системе  $K$  между посылкой и приемом сигнала (рис. 87)?

Из рисунка 87 по теореме Пифагора находим:

$$z_0^2 + V^2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 = c^2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

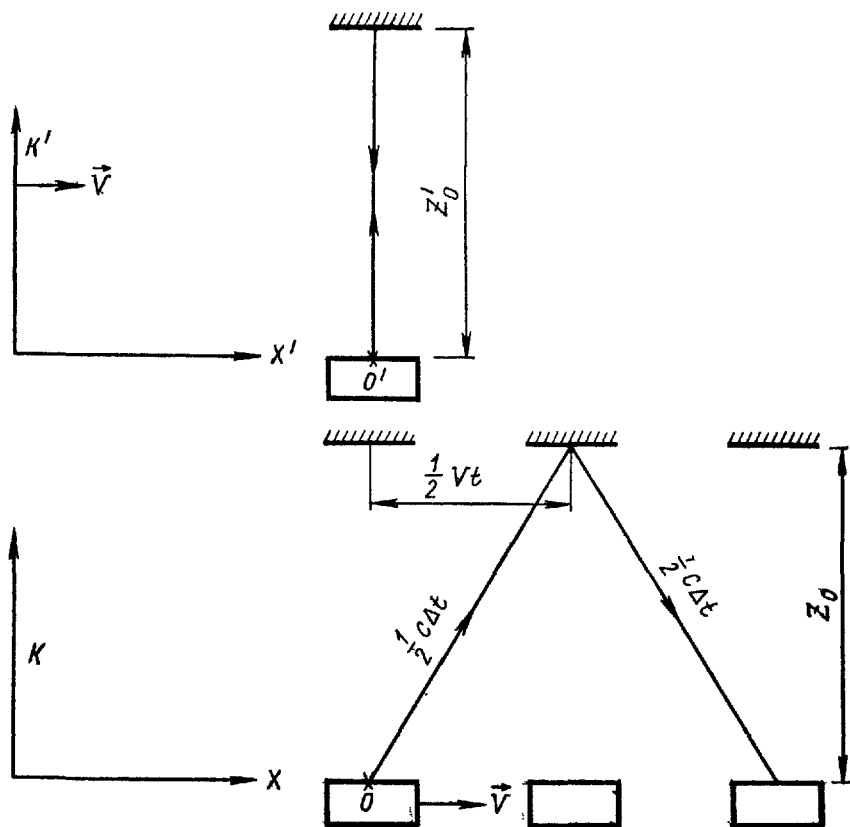


Рис. 87

Но поскольку  $z_0 = z'_0$ , можно написать  $\Delta t' = \frac{2z_0}{c}$ , и из последнего равенства получаем:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (64.1)$$

Промежуток времени между двумя событиями относителен, он разный в разных системах отсчета.

Введем обозначения:

$$\frac{V}{c} = \beta, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma; \quad (64.2)$$

тогда полученный результат можно записать так:

$$\Delta t = \Gamma \Delta t'. \quad (64.3)$$

В системе  $K'$  промежуток времени между двумя рассмотренными событиями отсчитывался одними часами. Если события наступают в одной и той же точке системы, промежуток между ними отсчитывается одними часами и называется промежутком собственного времени. Промежуток собственного времени будем обозначать  $\Delta\tau$ . Итак, интервал собственного времени между событиями и промежуток координатного времени между той же парой событий не совпадают.

Координатное время—это промежуток времени, отсчитанный по двум синхронизированным часам некоторой системы отсчета.

Приведенный пример показывает, что часы систем  $K$  и  $K'$ , находящиеся в момент  $t' = t = 0$  в одной точке пространства, могут отсчитывать различные моменты времени. Действительно, в момент возвращения сигнала в точку  $O'$  часы в  $O'$  покажут время  $t' = 0 + \Delta t'$ . Часы же системы  $K$ , находящиеся в точке  $O$ , отметят момент времени  $t = 0 + \Delta t$ . Это будут разные моменты времени. Проанализировав этот «эксперимент», нетрудно обнаружить, что в нем непосредственно используется синхронизация часов по Эйнштейну

**3. Относительность длин линеек, расположенных вдоль направления относительного движения систем отсчета.** Пусть в системе  $K'$  вдоль оси  $X'$  расположена неподвижная линейка длиной  $l_0$ . На конце линейки имеется зеркало. От начала линейки посылается световой сигнал и наблюдается его возвращение после отражения от зеркала (рис. 88). Очевидно,

$$l_0 = c \cdot \frac{\Delta\tau}{2},$$

где  $\Delta\tau$ —промежуток собственного времени между посылкой и возвращением светового сигнала. Пусть системы  $K$  и  $K'$  совпали в момент времени  $t = t' = 0$ . Найдем теперь длину линейки  $l$  в системе  $K$ .

Свет в системе  $K$  догоняет зеркало со скоростью  $c - V$ , а затем идет навстречу началу линейки со скоростью  $c + V$ , поэтому про-

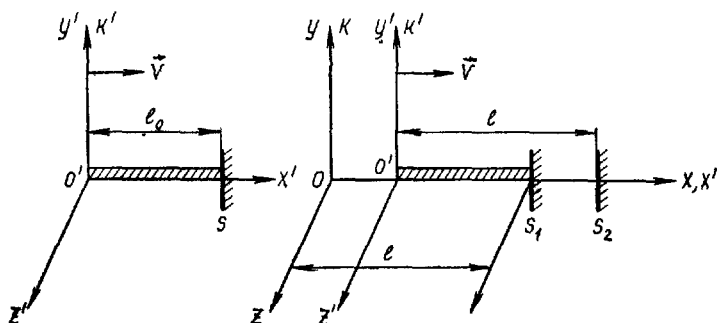


Рис 88

межутков времени между посылкой и возвращением сигнала в системе  $K$  равен:

$$\Delta t = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{2l}{c} \Gamma^2.$$

Но мы только что выяснили, что  $\Delta t = \Gamma \Delta \tau$ . Отсюда предыдущее равенство запишется так:

$$\frac{2l}{c} \Gamma = \Delta \tau.$$

Но  $\frac{c\Delta \tau}{2} = l_0$ , откуда

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (64.4)$$

Если измерять длину стержня в той системе, где он покоится, получаем собственную длину стержня  $l_0$ . В движущейся системе отсчета у него другая длина:

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Этот результат называют относительностью длин.

Получим теперь преобразования координат события при переходе от одной ИСО к другой — преобразования Лоренца. Сначала найдем формулу преобразования координаты  $x$  события. В начальный момент времени, когда координатные системы  $K$  и  $K'$  совпадают, с точки зрения  $K$  координатная сетка  $K'$  вдоль общей оси  $X$ ,  $X'$  сжата:  $x = x' \sqrt{1-\beta^2} = \frac{x'}{\Gamma}$ .

С течением времени вся картина смещается вправо со скоростью  $V$ :

$$x = \frac{x'}{\Gamma} + Vt,$$

откуда

$$x' = \Gamma (x - Vt) = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (64.5)$$

Это и есть формула преобразования координаты  $x$  события.

Теперь нужно найти временную координату события в системе  $K'$ , если координаты этого события  $K$  были  $(x, y, z, t)$ . Мы предпочтем довольно длинный вывод, имеющий ряд методических достоинств.

Снова рассматриваем две системы отсчета  $K$  и  $K'$ . В тот момент, когда начала отсчета  $O$  и  $O'$  совпадают (и по условию часы систем  $K$  и  $K'$ , находящиеся в общем начале координат, показывают  $t=0$  и  $t'=0$ ), из этого общего начала вдоль положительного направления оси  $X$  посылается световой сигнал (рис. 89). Поскольку эксперимент проводится в вакууме, скорость сигнала равна  $c$ . Теперь посмотрим, что можно сказать



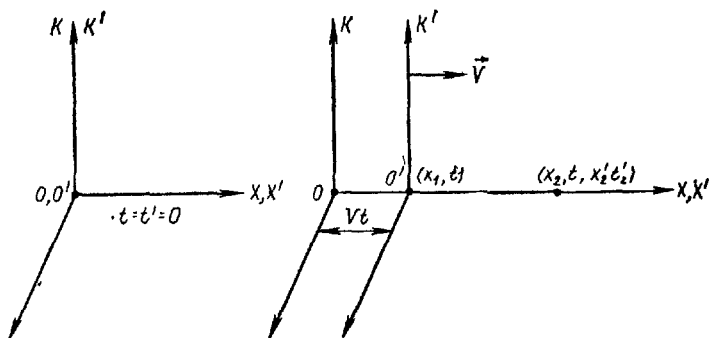


Рис. 89

о показаниях часов системы  $K'$  в некоторый момент времени  $t$ , зафиксированный по часам  $K$ . За время  $\Delta t = t$  световой сигнал дойдет до точки пространства, координата которой в системе  $K$  равна:  $x_2 = ct$ . Эта же точка в системе  $K'$  будет иметь координату  $x'_2 = ct'$ . Приход светового сигнала в точку пространства — это событие, и  $x$ -е координаты события должны быть связаны соотношением (64.5); подставляя в него  $x_2$  и  $x'_2$  и разделив обе части на  $c$ , получим:

$$t'_2 = \Gamma(1 - \beta)t.$$

Итак, если свет приходит в некоторую точку пространства, то часы в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$  показывают разное время наступления этого события. Нетрудно подсчитать, что показывают часы системы  $K$  еще в одной точке, а именно в точке  $x_1 = Vt$ . В этой точке в момент  $t$  окажется начало отсчета  $O'$  и те часы, которые в момент послышки сигнала показывали время  $t' = 0$ . По часам системы  $K$  к этому моменту истек промежуток времени  $\Delta t = t$ . Но часы, закрепленные в  $O'$ , отсчитали при этом промежуток собственного времени  $\Delta \tau = t'_1 - 0$ . Следовательно, согласно формуле (64.3) они покажут время

$$t'_1 = \frac{\Delta t}{\Gamma} = \frac{t}{\Gamma}.$$

Это очень важный результат. Если одновременно в системе  $K$  отметить показания часов системы  $K'$  в разных точках  $x$ , мы получим различные отсчеты. Не забудем, что и в  $K$ , и в  $K'$  часы синхронизированы. Но синхронизация часов оказалась относительной. У нас уже есть все, чтобы рассчитать «рассинхронизацию» часов. Сопоставим полученные результаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= Vt, & t'_1 &= \frac{t}{\Gamma}, \\ x_2 &= ct, & t'_2 &= \Gamma(1 - \beta)t. \end{aligned}$$

На длине  $\Delta x = x_2 - x_1 = c(1 - \beta)t$  набегают разность показаний часов  $t'_2 - t'_1 = \Gamma\beta(\beta - 1)t$ . Таким образом, на единице длины рас-синхронизация составит

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x} = -\Gamma \frac{\beta}{c}. \quad (64.6)$$

Она не зависит от момента времени  $t$ . Для произвольной пары точек  $x_2$  и  $x_1$  можно записать:

$$t'_2 - t'_1 = -\Gamma \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1).$$

По условию согласования двух наборов часов в точке  $x_1 = 0$  имеем показание часов  $t'_1 = 0$ , если  $t = 0$ . Поэтому, полагая,  $x_2 = x$ , получим:

$$t'(x, t = 0) = -\Gamma \left( \frac{\beta}{c} \right) x.$$

Из этой формулы видно, что покажут часы системы  $K'$ , находящиеся в точке  $x$  в момент времени  $t = 0$ . Слева от начала отсчета  $O$  часы системы  $K'$  опережают часы системы  $K$ , а справа отстают от них.

Но нам нужно знать, что покажут часы системы  $K'$ , находящиеся в момент времени  $t$  в точке  $x$ , т. е.  $t'(x, t)$ . В точке  $x$  в момент  $t$  окажутся те часы системы  $K'$ , которые в момент  $t = 0$  были в точке  $x - Vt$  и согласно выражению (67.6) отставали от часов в системе  $K$  на промежуток времени  $-\Gamma \frac{\beta}{c} (x - Vt)$ . Эта разность не зависит от времени. Но в момент  $t$  часы системы  $K'$ , находящиеся в  $O'$ , показывают момент  $t'_1 = \frac{t}{\Gamma}$ . Следовательно, показание часов системы  $K'$ , которое мы ищем, равно:

$$t'(x, t) = \frac{t}{\Gamma} - \Gamma \frac{\beta}{c} (x - Vt) = \Gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (64.7)$$

Это и есть искомая формула. Соберем теперь вместе все преобразования координат события, представляющие собой преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} x'(x, t) &= \Gamma(x - Vt), & y' &= y, & z' &= z, \\ t'(x, t) &= \Gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right). \end{aligned} \quad (64.8)$$

Формулы обратного перехода можно получить изменением знака переносной скорости:

$$\begin{aligned} x(x', t') &= \Gamma(x' + Vt'), \\ t(x', t') &= \Gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \end{aligned}$$

что непосредственно вытекает из первого постулата СТО (равноправия всех ИСО).

Приводим преобразования Лоренца для прямого и обратного перехода без введенной ради сокращения величины  $\Gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & y' &= y, & z' &= z, & x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & & & & & t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (64.9)$$

## § 65. ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Проведем еще один мысленный эксперимент, рассматривая его в двух ИСО— $K$  и  $K'$ . В начальный момент, когда по условию оба начала отсчета  $O$  и  $O'$  совпадают,  $t = t' = 0$ ; в общем начале отсчета произведем вспышку света. Согласно второму постулату СТО свет распространяется по всем направлениям в  $K$  и  $K'$  с одинаковой скоростью  $c$ . Следовательно, волновой фронт (т. е. поверхность равных фаз) будет представлять собой сферы в обеих системах. Уравнения этих сфер можно записать:

$$\begin{array}{ll} \text{в системе } K & \text{в системе } K' \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 & x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \end{array}$$

Мы написали для системы  $K'$  справа  $t'$  (вместо  $t$ ) по следующим соображениям. Допустим, что время в системах  $K$  и  $K'$  одинаково, т. е.  $t = t'$ . Тогда радиусы обеих сфер (для данного момента  $t$ ) оказываются одинаковыми. Получается, что один и тот же физический объект—волновой фронт—описывается с равным правом двумя сферами одинакового радиуса, но с центрами в точках  $O$  и  $O'$ . Это бессмысленно, следовательно, положить  $t = t'$  невозможно. Перепишем оба равенства в виде

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0, \\ c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0. \end{aligned}$$

В этом мысленном опыте фактически речь идет о двух событиях. Первое из них состоит в отправлении сигнала из начала системы отсчета  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$  в момент времени  $t_0 = 0$ ; второе—в приходе сигнала в произвольную точку сферы с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . Если составить выражение

$$\sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

которое называют интервалом между двумя событиями и обозначают символом  $s$ , то полученный нами результат можно сформулировать так: для двух событий, состоящих в отправлении

светового сигнала из одной точки и приходе его в другую, квадрат интервала между этими событиями в любой ИСО должен быть равен нулю:  $s^2 = 0$ ,  $s'^2 = 0$ .

Конечно, интервал между событиями может быть определен не только для отправления и прихода светового луча. Если координаты события 1 определяются числами  $x_1, y_1, z_1, t_1$ , а координаты события 2 —  $x_2, y_2, z_2, t_2$ , то по определению интервал между этими событиями  $s_{12}$  равен:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}; \quad (65.1)$$

для произвольных событий интервал  $s_{12}$  уже не равен нулю.

Часто бывает удобно перейти к рассмотрению событий, происходящих в бесконечно близких точках и в бесконечно близкие моменты времени. Полагая в этом случае  $t_2 - t_1 = dt$ ,  $x_2 - x_1 = dx$ ,  $y_2 - y_1 = dy$ ,  $z_2 - z_1 = dz$ , получим для квадрата интервала:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (65.2)$$

Основным свойством интервала между событиями является его инвариантность при переходе от одной ИСО к другой.

Из мысленного эксперимента по посылке—приему светового сигнала следует согласно выражению (65.2), что если в одной ИСО  $ds^2 = 0$ , то и во всякой другой  $ds'^2 = 0$ . Обе величины —  $ds^2$  и  $ds'^2$  — бесконечно малые одного порядка, поэтому должны быть пропорциональны друг другу. Следовательно, можно записать

$$ds^2 = a ds'^2,$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности. Это соотношение должно выполняться для интервала между любой парой событий. Действительно, никаких условий на связь между интервалами  $ds$  и  $ds'$  для пары произвольных событий у нас нет, а для событий частного вида — приема и отправления светового сигнала — связь должна быть именно такой. Коэффициент  $a$  не может зависеть от координат  $x, y, z$  и времени  $t$ , потому что это означало бы, что различные точки пространства и различные моменты времени неравноправны.

Так как мы считаем пространство и время однородными, то  $a$  должно быть постоянной величиной, зависящей только от абсолютного значения относительной скорости двух рассматриваемых ИСО. Действительно, коэффициент  $a$  не может зависеть и от направления относительной скорости двух ИСО, так как это означало бы неравноправие различных направлений в пространстве. В силу изотропности пространства мы должны считать, что  $a$  может зависеть только от абсолютного значения относительной скорости двух ИСО.

Рассмотрим три ИСО, обозначив их соответственно  $K, K', K''$ , причем  $V_1$  — скорость  $K'$  относительно  $K$ , а  $V_2$  — скорость  $K''$  относительно  $K$ . Мы можем написать, что

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad (65.3)$$

$$ds^2 = a(V_2) ds_2^2. \quad (65.4)$$

Рассматривая непосредственно системы  $K'$  и  $K''$ , можно записать:

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2, \quad (65.5)$$

где  $V_{12}$  — модуль скорости системы  $K'$  относительно  $K''$ . Подставляя последнее выражение в формулу (65.3) и сравнивая с формулой (65.4), находим:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (65.6)$$

Поскольку  $V_{12}$  зависит не только от модулей векторов  $V_1$  и  $V_2$ , но и от угла между ними (а этот угол вообще не входит в последнее соотношение), очевидно, что удовлетворить соотношению (65.6) можно тогда, когда коэффициент  $a$  сводится просто к постоянной величине; постоянная  $a$ , как это ясно из последнего равенства, может быть равна только единице. Поэтому  $ds^2 = ds'^2$ . Поскольку в случае распространения светового сигнала из  $s_{12} = 0$  следует  $s'_{12} = 0$ , то из равенства бесконечно малых интервалов вытекает равенство конечных интервалов:  $s = s'$ .

Это значит, что для преобразований координат и времени, согласующихся с постулатами СТО, интервал должен быть инвариантной величиной. Мы увидим, что такими преобразованиями как раз и являются преобразования Лоренца.

Итак, выражение  $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  должно оставаться неизменным при переходе от системы  $K$  к  $K'$ . Когда системы  $K$  и  $K'$  расположены так, как это изображено на рисунке 85,  $y = y'$ ,  $z = z'$  и сумма  $y^2 + z^2$  уже является инвариантом. Поэтому инвариантом преобразования фактически будет выражение

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

## § 66. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Выпишем еще раз прямые и обратные преобразования Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Vt), & x &= \Gamma(x' + Vt'), \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), & t &= \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{aligned} \right\} \quad (66.1)$$

Отметим основные следствия, непосредственно вытекающие из этих преобразований.

1. Преобразования Галилея получаются из преобразований Лоренца при следующих условиях:

а) относительная скорость систем отсчета должна быть нерелятивистской  $\beta = \frac{V}{c} \ll 1$ , откуда

$$\Gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1.$$

Тогда

$$x' = x - Vt.$$

б)  $\frac{V}{c} \cdot \frac{x}{c} \ll t$ ; это условие накладывается на переход к преобразованиям Галилея  $t' = t$ ; скорость систем отсчета нерелятивистская, время распространения света в той области, где происходят интересующие нас события, тоже должно быть мало.

Итак, при определенных условиях формулы преобразований Лоренца переходят в формулы преобразований Галилея. Для этого необходимо, чтобы относительные скорости систем отсчета были нерелятивистскими.

2 Пусть два события I и II наблюдаются в системах  $K$  и  $K'$ :

I.  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ;  $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$ .

II.  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ ;  $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$ .

Введем обозначения для разности координат:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, & \Delta x' &= x'_2 - x'_1, \\ \Delta y &= y_2 - y_1, & \Delta y' &= y'_2 - y'_1, \\ \Delta z &= z_2 - z_1, & \Delta z' &= z'_2 - z'_1, \\ \Delta t &= t_2 - t_1, & \Delta t' &= t'_2 - t'_1. \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

Из преобразований Лоренца вытекает определенное соотношение для разности координат двух событий:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \Gamma(x_2 - Vt_2), & x'_1 &= \Gamma(x_1 - Vt_1), \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \Gamma(\Delta x - V\Delta t). \end{aligned}$$

Для разности координат событий получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \Gamma(\Delta x - V\Delta t), & \Delta x &= \Gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \\ \Delta y' &= \Delta y, & \Delta y &= \Delta y', \\ \Delta z' &= \Delta z, & \Delta z &= \Delta z', \\ \Delta t' &= \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right), & \Delta t &= \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right). \end{aligned} \right\} \quad (66.3)$$

Все следствия постулатов СТО могут быть получены из преобразований Лоренца, так как эти преобразования есть следствия двух постулатов СТО

**Относительность длин.** Пусть в системе  $K'$  на оси  $X'$  зафиксированы две точки  $x'_1$  и  $x'_2$ . Расстояние между ними, измеренное в системе  $K'$ , — собственная длина (масштаб на оси  $X'$ ):  $x'_2 - x'_1 = l_0$ .

В системе  $K$ , относительно которой масштаб движется, длина масштаба  $l$  равна:  $x_2 - x_1$  ( $x_2$  и  $x_1$  отмечаются одновременно в системе  $K$ ).

Из соотношений (66.3) имеем:  $\Delta x' = \Gamma (\Delta x - V \Delta t)$ . Положим  $\Delta t = 0$ , тогда

$$l_0 = \Gamma l.$$

Мы второй раз получили формулу

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (66.4)$$

Длина масштаба оказывается разной, если ее измерять в разных системах отсчета, находящихся в относительном движении. Длина масштаба не имеет смысла, если не указывать систему отсчета, в которой она измеряется.

В каждой системе отсчета (не собственной) длина линейки определяется формулой  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . Если ставить физический эксперимент так, что физическая система будет двигаться относительно приборов, то все длины, которые нужно использовать для интерпретации наблюдений, изменяются по сравнению с собственной именно по этой формуле.

Так как все ИСО равноправны, то и все длины, полученные в различных ИСО, относящиеся к одному и тому же объекту, имеют равноправный физический смысл. Различие в длинах, обнаруживаемое в разных ИСО, связано с относительностью одновременности.

**Относительность одновременности.** Пусть в системе  $K$  два события одновременны, т. е.  $t_1 = t_2$ , или  $\Delta t = 0$ , но согласно соотношениям (69.3)

$$\Delta t' = \Gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = -\Gamma \frac{V}{c^2} \Delta x = -\Gamma \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c} \neq 0.$$

Относительностью одновременности можно пренебречь, когда  $\left(\frac{V}{c}\right)$  и  $\left(\frac{\Delta x}{c}\right)$  малы.

**Собственное время.** Пусть в системе  $K$  два события произошли в одной и той же точке пространства  $\Delta x = 0$ . Тогда  $\Delta t = \Delta \tau$  — промежуток собственного времени. Но согласно формуле (67.3)

$$\Delta t' = \Gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Относительность времени давно получила прямое экспериментальное подтверждение. В 1938 г. в космических лучах была обнаружена частица  $\mu$ -мезон. Ее обнаружили и на ускорителях. Время жизни  $\mu$ -мезона, полученного на ускорителе,  $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  с. Если мезон медленный  $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ , а на ускорителе получают медленные мезоны, то  $\tau_0$  можно считать собственным временем жизни мезона.

Мезоны вторичных космических лучей возникают при взаимодействии космических протонов с атмосферой; они возникают на высоте 5—6 км и движутся с релятивистскими скоростями. Поток

космических мезонов обнаруживается и на уровне моря. Следовательно, 5—6 км  $\mu$ -мезоны могут пройти без распада. Путь, проходимый мезоном от места его рождения,  $\Delta x$  равен  $V \cdot \Delta t$  ( $\Delta t$  — время жизни мезона в системе  $K$  — Земля). Если  $\Delta t$  совпадало бы с  $\tau_0$ , то даже при движении со скоростью света  $\mu$ -мезон прошел бы всего лишь расстояние  $\Delta x \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 6 \cdot 10^2 \text{ м}$  и до уровня моря он бы не дошел. Но, согласно нашим результатам,  $\Delta t = \Gamma \Delta \tau = \Gamma \tau_0$ . Для космических  $\mu$ -мезонов (согласно определениям их скорости)  $\Gamma \approx 10$ , поэтому  $\Delta t \approx 10 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$  — время жизни  $\mu$ -мезона в системе, относительно которой он движется. Тогда  $\Delta x = c \cdot 10 \tau_0 \approx 6 \text{ км}$ , и  $\mu$ -мезон может дойти до уровня моря.

Это прямое подтверждение относительности промежутков времени при переходе от одной системы отсчета к другой.

### § 67. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА В КОМПЛЕКСНОЙ ЗАПИСИ

Квадрат интервала между двумя событиями в СТО имеет вид:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Удобно считать временную координату в СТО мнимой. Положим,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$ , тогда квадрат интервала равен:

$$ds^2 = - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

а преобразования Лоренца можно записать так:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \Gamma (x_1 + i\beta x_4), & x_1 &= \Gamma (x'_1 - i\beta x'_4), \\ x'_2 &= x_2, & x_2 &= x'_2, \\ x'_3 &= x_3, & x_3 &= x'_3, \\ x'_4 &= \Gamma (x_4 - i\beta x_1), & x_4 &= \Gamma (x'_4 + i\beta x'_1). \end{aligned} \quad (67.1)$$

Эти формулы получаются непосредственно из соотношений (64.8):

$$\begin{aligned} x' &\equiv x'_1 = \Gamma \left[ x - \frac{V}{ic} ict \right] = \Gamma (x_1 + i\beta x_4), \\ ict' &= x'_4 = \Gamma \left( ict - ic \frac{V}{c^2} x \right) = \Gamma (x_4 - i\beta x_1). \end{aligned}$$

Введение мнимой единицы — вспомогательная операция. Никакого существенного значения в СТО мнимая единица не имеет. Однако ее использование существенно упрощает вычисления.

### § 68. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКОРОСТЕЙ

При рассмотрении движения частицы ее нахождение в данной точке пространства в данный момент времени есть событие. Движение частицы — последовательное наступление событий.



Формулы преобразований Лоренца непосредственно относятся к событиям, связанным с частицей. В СТО скорость частицы определяется так же, как и в классической механике:

$$\text{если } x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad \left| \quad \text{если } x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t'), \right. \\ \text{то} \quad \left. \begin{array}{l} \text{то} \\ v_x = \frac{dx}{dt} \text{ и т. д.} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{то} \\ v'_x = \frac{dx'}{dt'} \text{ и т. д.} \end{array} \right.$$

Рассмотрим два события, разделенные бесконечно малым промежутком времени  $dt$ . Для этих событий

$$dx' = \Gamma(dx - V dt), \quad dt' = \Gamma \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right).$$

Составив отношение

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - \frac{V}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}},$$

получим формулу

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \quad (68.1)$$

Используя соотношения  $dy' = dy$ ,  $dz' = dz$  и составляя отношения  $\frac{dy'}{dt'}$  и  $\frac{dz'}{dt'}$ , получим остальные формулы для преобразования компонент скорости:

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \quad (68.2)$$

Формулы обратного перехода получают обычным методом:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \quad (68.3)$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этих формул:

1. Формулы несимметричны относительно  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Это связано с тем, что относительная скорость систем отсчета направлена по оси  $X$ .

2. Если скорости  $v$  и  $V$  много меньше  $c$ , т. е.  $\frac{v}{c} \ll 1$ ,  $\beta = \frac{V}{c} \ll 1$ , то получим классический закон сложения скоростей.

3. Следует обратить внимание на правило знаков, используемое в формулах (68.1) — (68.3): компоненты скорости  $v_x$  и  $v'_x$  совпадают по направлению с переносной скоростью  $V$ .

Полученные формулы дают другие результаты, чем преобразования Галилея.

Пусть в системе  $K'$  ( $v'_x = v'$ ,  $v'_y = 0$ ,  $v'_z = 0$ ), тогда в системе  $K$   $v_y = 0$  и  $v_z = 0$ , т. е. частица движется по оси  $X$ , и

$$v_x = v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}, \quad (68.4)$$

тогда как преобразования Галилея приводят к результату:  
 $v = v' + V$ .

Допустим, что  $v' = c$ . Тогда согласно преобразованиям Галилея  $v = c + V$ , а по формуле (68.4)

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c.$$

Из формул преобразования скоростей СТО получаем, что скорость света одна и та же во всех ИСО, как это и должно быть согласно второму постулату СТО.

### § 69. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ И ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ

Используя введенные обозначения (66 2), запишем квадрат интервала между двумя событиями:

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (69.1)$$

Введем особое обозначение для пространственного расстояния между точками, где наступили два рассматриваемых события:

$$l_{12}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

а также обозначим для симметрии  $\Delta t = t_{12}$ .

Основное свойство интервала — его инвариантность:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \quad (69.2)$$

1. Пусть в системе  $K$  наступили два события I и II, причем для них известны  $t_{12}$  и  $l_{12}$ . Нельзя ли так подобрать систему  $K'$ , чтобы в ней эти два события наступали бы в одной точке (одноместно), т. е. чтобы  $l' = 0$ ? В этом случае

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Условие  $s_{12}^2 > 0$  — условие существования системы отсчета, в которой два заданных события наступали бы в одной и той же точке. Интервалы, для которых выполнено это условие, называют временн и подобными. Условие  $s_{12}^2 > 0$  можно записать еще и так:

$$c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2, \quad ct_{12} > l_{12}.$$

**Пример.** Частица движется в системе  $K$  вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ . Как найти систему, в которой события, происходя-

щие с частицей, наступают в одной и той же точке пространства. Для этого должно выполняться условие  $\Delta x' = 0$ . Но

$$\Delta x' = \Gamma (\Delta x - V \Delta t) = \Gamma (v - V) \Delta t,$$

откуда ясно, что должно соблюдаться условие  $V = v$ , т. е.  $K'$  должна быть системой, сопутствующей частице. Результат заранее очевидный. Однако в случае времениподобного интервала наблюдается еще одна существенная деталь. Воспользуемся формулой

$$\Delta t' = \Gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \Gamma \left( 1 - \frac{V}{c} \frac{v}{c} \right) \Delta t. \quad (69.3)$$

Напомним, что равенство  $(\Delta x / \Delta t) = v$  справедливо только для событий рассматриваемого типа. Но из формулы (69.3) видно, что  $\Delta t'$  и  $\Delta t$  одного знака [ $(V/c) < 1$ ,  $(v/c) < 1$ ]. Значит, если в системе отсчета  $K$  событие II наступало позже, чем событие I, то и во всех других системах отсчета порядок следования событий будет таким же. Последовательность событий во времени сохраняется во всех системах отсчета (при условии  $s_{12}^2 > 0$ ). При этом условии два события могут находиться между собой в причинно-следственной связи. Рассмотрим для примера два события.

Событие I — посылка светового сигнала (причина). Когда он приходит в некоторую точку, происходит событие II — взрыв (следствие).

Если одно событие причина, а другое — следствие, то вначале наступает причина, потом следствие. В случае времениподобного интервала существует такая система отсчета  $K'$ , в которой оба события одновременны, т. е. наступают в одной и той же точке. Ясно, если одно событие было причиной, а другое — следствием, то причина должна наступать раньше. В этом случае обернуть ход событий нельзя ни в какой системе отсчета. Именно этому требованию удовлетворяют времениподобные интервалы. Нетрудно вскрыть и физический смысл условия  $s_{12}^2 > 0$ .

Пусть в точке 1 наступает первое событие, второе событие наступает в точке 2. Расстояние между точками  $l_{12}$ . Соблюдено условие  $ct_{12} > l_{12}$ . Если из точки 1 послать световой сигнал в момент наступления события I, он придет в точку 2 до наступления события II;  $c$  — предельная скорость передачи сигнала. В этих условиях можно передать сигнал из точки 1 в точку 2 до наступления второго события. Событие I может быть причиной события II.

В физике причинно-следственная связь обусловлена взаимодействием между телами. Предельная скорость передачи взаимодействия (сигнала) равна  $c$ . Возможность (или невозможность) причинно-следственных взаимоотношений как раз и определяется конечностью скорости передачи взаимодействия.

2. Пусть в системе  $K$  наступают два произвольных события, причем  $\Delta t \neq 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ . Нельзя ли найти такую систему отсчета

$K'$ , в которой оба события наступают одновременно:  $\Delta t' = 0$ ?  
Согласно соотношению (66.3)

$$\Delta t' = \Gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right). \quad (69.4)$$

Из условия  $\Delta t' = 0$  получим искомую скорость системы:

$$V = \frac{c \Delta t}{\Delta x} c. \quad (69.5)$$

Нужно убедиться, что  $V < c$ , потому что только в этом случае можно реализовать систему отсчета.

Если  $\Delta t' = t'_{12} = 0$ , то из формулы (69.2) вытекает:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l_{12}^2 \leq 0.$$

В общем случае условие возможности выбора необходимой системы отсчета заключается в том, что квадрат интервала — величина отрицательная. Такой интервал называют пространственноподобным.

Рассмотрим два события, наступивших на оси  $X$ . Пространственноподобный интервал в этом случае имеет вид:

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0, \quad \frac{c \Delta t}{\Delta x} < 1, \quad (69.6)$$

поэтому скорость  $V$ , определяемую согласно формуле (69.5), можно выбрать так, что она будет меньше  $c$ . Следовательно, если интервал между событиями пространственноподобный, то можно подобрать такую систему отсчета, в которой оба события наступают одновременно.

Выпишем формулу для промежутка времени между рассматриваемыми событиями в системе  $K'$ :

$$\Delta t' = \Gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right). \quad (69.7)$$

Мы видели, что существует такая скорость  $V < c$ , при которой  $\Delta t = 0$ . Выберем скорость  $V^*$  так, чтобы  $V < V^* < c$ ; тогда очевидно, что круглая скобка в формуле (72.7) станет отрицательной независимо от знака  $\Delta t$ .

Если интервал между событиями пространственноподобный, то существуют ИСО, удовлетворяющие условию: при  $\Delta t > 0$  в  $K$   $\Delta t' < 0$  в  $K'$  (для тех же самых событий). Значит, если два события связаны между собой пространственноподобным интервалом, то последовательность их наступления во времени может изменяться при переходе от одной ИСО к другой. В этом нет ничего противоестественного, ибо события, связанные пространственноподобным интервалом, не могут находиться в причинно-следственной связи. Действительно,  $s_{12}^2 < 0$ , поэтому  $ct_{12}^2 < l_{12}^2$ . Пусть в точке 1 наступило событие 1, и в момент его наступления послан сигнал в точку 2. Этот сигнал не успеет дойти

в точку 2 до того, как наступит событие II. Следовательно, событие I не может служить причиной появления события II.

3. Допустим теперь, что в системе  $K$  наступили два события, для которых  $t_{12} \neq 0$  и  $l_{12} \neq 0$ . Выясним, существует ли такая ИСО  $K'$ , в которой эти события наступят одновременно и одномерно, т. е. можно ли добиться выполнения условий  $t'_{12} = 0$  и  $l'_{12} = 0$ ?

Из предыдущего следует, что это может быть лишь в том случае, если  $s^2_{12} = 0$ . Но это значит (исключая случай распространения светового сигнала  $t_{12} = 0$  и  $l_{12} = 0$ ), что если два события совпали в одной ИСО, то они совпадают и во всех остальных.

### Упражнения

39. На сколько укорачивается диаметр Земли в направлении движения вокруг Солнца с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно Солнца? Радиус Земли  $r = 6,4 \cdot 10^3$  км, орбитальная скорость Земли  $v = 30$  км/с.

40. С точки зрения наблюдателя, находящегося в движущемся поезде, удары молнии в точках  $A$  (впереди поезда) и  $B$  (позади поезда) произошли одновременно. Какая молния ударила в Землю раньше с точки зрения наблюдателя на Земле?

Указание. С Землей свяжите условно неподвижную систему  $K$ , с поездом — систему  $K'$  (рис. 90). Обозначьте координаты обоих событий в обеих системах: в точке  $A(x_1, t_1; x'_1, t'_1)$ , в точке  $B(x_2, t_2; x'_2, t'_2)$ . Используйте затем формулы преобразования времени при условии  $t'_2 = t'_1$ .

41. Сопоставьте законы сложения скоростей классической и релятивистской механики на примере капли, падающей отвесно (в системе, связанной с Землей) и попадающей на окно трамвая, движущегося со скоростью  $V$ . Найдите угол отклонения  $\alpha$  капли от вертикали при релятивистском и нерелятивистском рассмотрении (необходимые обозначения даны на рисунке 91).

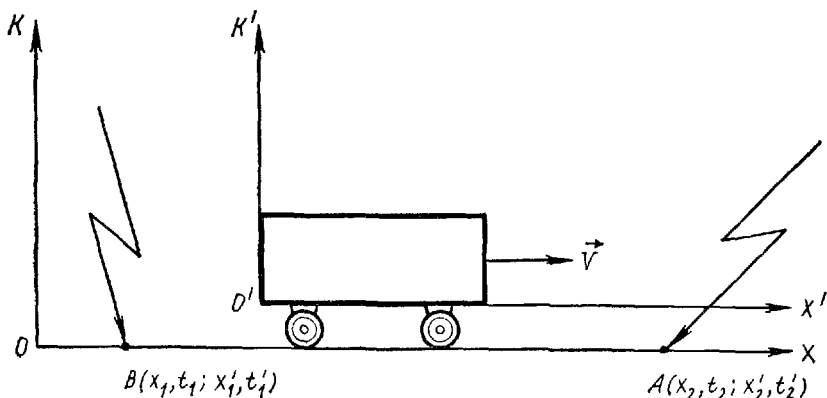


Рис 90

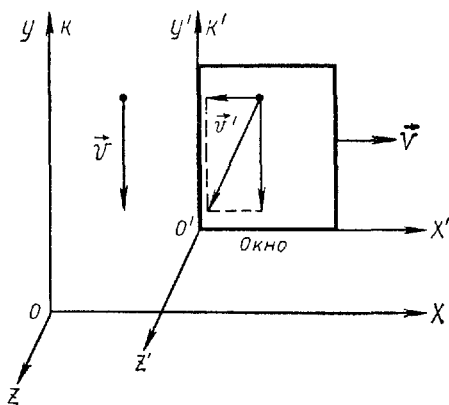


Рис. 91

**У к а з а н и е.** Используйте формулы преобразования проекций скорости по Лоренцу (68.1)—(68.3) и по Галилею.

При анализе задачи выясните, можно ли воспользоваться различием в получаемых результатах для экспериментальной проверки СТО.

**42.** Две ракеты удаляются от Земли в прямо противоположные стороны со скоростью  $0,8c$  относительно Земли. Найдите: а) с какой скоростью ракеты удаляются друг от друга с точки зрения земного наблюдателя; б) с какой скоростью

движется одна ракета в системе отсчета, связанной с другой ракетой.

**У к а з а н и е.** При решении второй задачи условно неподвижную систему  $K$  свяжите с «нашей» ракетой, штрихованную систему следует связать с Землей, которая удаляется от «нашей» ракеты со скоростью  $V=0,8c$  (переносной скоростью). Другая ракета удаляется от Земли со скоростью  $v'=0,8c$ .

**43.** Проверьте, что интервал между событиями является инвариантом преобразований Лоренца.

**У к а з а н и е.** Удобно выполнить проверку инвариантности для квадрата интервала  $s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$ . Из преобразований Лоренца вытекает:

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 \quad \text{и} \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1.$$

В силу этого достаточно проверить, соблюдается ли равенство

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2.$$

## § 70. Четырехмерная кинематика СТО

Релятивистская механика пользуется четырехмерным представлением СТО. Хотя законы релятивистской механики можно записать и в трехмерной форме (в пространственных координатах), правильная их интерпретация невозможна без знакомства с четырехмерным построением, включающим наряду с пространственными координатами четвертую координату — временную.

Из формул преобразования Лоренца

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t'(x, t) = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

видно, что каждая из координат события в  $K'$  ( $x'$  и  $t'$ ) определяется через координаты этого же события  $x, t$ , измеренные в системе  $K$ . Это прямым образом указывает на то, что времен-

ные и пространственные координаты события не независимы, а связаны между собой. То же обстоятельство вытекает из инвариантности интервала

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \text{Inv} \text{ (инвариант)}.$$

Однако в этом выражении связываются уже пространственные и временные интервалы. Именно благодаря этому можно ввести четырехмерное пространство (пространство-время).

Чтобы в самых общих чертах пояснить, что значит «введение пространства», обратимся к трехмерному пространству.

Трехмерное пространство можно разметить с помощью декартовой системы координат. Тогда получим многообразие точек. Чтобы из многообразия точек «получилось» пространство, в котором можно было ввести и использовать геометрические величины, необходимо определить основную геометрическую величину — длину или же расстояние между точками.

Обычно для определения расстояния между двумя точками пользуются теоремой Пифагора и для бесконечно малого расстояния  $ds$  в евклидовом пространстве пишут:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (70.1)$$

Естественно, расстояние между точками не должно зависеть от выбора системы отсчета, и, следовательно, определение должно быть таким, чтобы оставаться инвариантным при преобразовании координат.

Теперь вернемся к СТО. У события — четыре координаты  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$  (в этой записи у всех координат одинаковая размерность), тесно связанные между собой. Рассмотрим многообразие точек, которое характеризуется координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $ict$  или  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ . Появление координат у точек этого многообразия означает введение четырех ортогональных осей (не следует пытаться воссоздать наглядный образ таких осей). Многообразие точек с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $ict$  называют миром Минковского (по имени известного математика Германа Минковского, заложившего основу четырехмерной СТО).

Если из начала отсчета в какую-то четырехмерную точку, т. е. точку с четырьмя координатами, провести радиус-вектор, то можно считать, что координаты этой точки — компоненты четырехмерного радиус-вектора. Четырехмерные векторы будем обозначать буквами со стрелками, поставленными под буквами; четырехмерный радиус-вектор запишется так:

$$\vec{R}(x, y, z, ict) \equiv \vec{R}(\vec{r}, ict). \quad (70.2)$$

Рассмотрим, как перейти в этом случае от многообразия к пространству, т. е. как следует определить «расстояние между двумя точками» в этом четырехмерном пространстве.

В СТО рассматриваются только ИСО. При переходе от одной ИСО к другой имеется инвариант  $ds^2 = ds'^2 = \text{Inv}$ .

Поскольку из физических соображений следует, что при переходе от одной ИСО к другой должен сохраняться квадрат интервала, можно считать интервал между событиями «длиной» в пространстве событий. Итак, за расстояние в четырехмерном пространстве мы примем величину:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \quad (70.3)$$

Нетрудно видеть, что квадрат дифференциала четырехмерного радиус-вектора совпадает с квадратом интервала

$$ds^2 = dR^2 = dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 - c^2 dt^2. \quad (70.4)$$

В формуле (70.4) три знака «-» у квадратов дифференциалов и один — минус. В связи с этим четырехмерное пространство называется псевдоевклидовым (в евклидовом пространстве в квадратичной форме (70.1) все знаки у квадратов дифференциалов одинаковы).

Итак, каждому событию соответствует точка в четырехмерном пространстве, бесконечно малое расстояние в котором определяется формулой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (70.5)$$

Вернемся теперь к вопросу, что означают требования СТО для механики. Основой СТО является принцип относительности. Основным законом механики — второй закон Ньютона.

В классической механике выполняется принцип относительности Галилея, согласно которому II закон Ньютона сохраняет свой вид во всех ИСО. Однако при этом используются в качестве закона преобразования координат и времени преобразования Галилея. Мы уже убедились, что в общем случае правильные преобразования координат события — это преобразования Лоренца, но они должны изменить вид II закона Ньютона, иначе принцип относительности Эйнштейна оказывается уже несправедливым.

Итак, поскольку в сочетании с преобразованиями Лоренца уравнения Ньютона не обеспечивают выполнения принципа относительности Эйнштейна, уравнения механики должны быть видоизменены. Вместе с тем при переходе к нерелятивистским скоростям новые уравнения должны переходить в уравнения Ньютона. Вводимые новые четырехмерные величины в предельном случае  $v \ll c$  переходят в величины классической механики.

Построение четырехмерных релятивистских уравнений движения опирается на особенности векторной записи. Как и в случае обычного трехмерного пространства, преимущество векторной записи состоит в том, что эта запись не зависит от координатной системы. При изменении координатной системы изменяются



проекции векторов, т. е. запись уравнения в проекциях зависит от выбора системы координат (а векторная запись — нет).

Если бы удалось записать уравнения динамики в четырехмерной векторной форме, то первый постулат СТО был бы автоматически выполнен, поскольку такая запись сохраняет свой вид для любой инерциальной системы отсчета, т. е. при преобразованиях Лоренца. При трехмерной записи в законе динамики

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  дифференцирование производится по времени. Но, дифференцируя вектор импульса по времени, получают снова вектор только потому, что в классической физике время считается инвариантом, т. е. одним и тем же для всех систем отсчета. В СТО время уже не инвариант, оно изменяется при переходе от одной ИСО к другой. Отношение четырехмерного вектора ко времени уже не является вектором. Таким образом, необходимо ввести величину, связанную с обычным временем, но обладающую свойством инварианта. Этим свойством обладает собственное время частицы. Получим еще раз связь собственного и координатного времени с помощью интервала между событиями.

Рассмотрим движение частицы. Квадрат интервала между двумя событиями, происходящими с частицей, запишется так:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Пусть тело покоится в  $K'$ :  $dx' = dy' = dz' = 0$ , а  $dt' = d\tau$ , где  $d\tau$  — собственное время. Из соотношения

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 &= c^2 \left( 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) dt^2 = \\ &= c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 \end{aligned}$$

получаем:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}, \quad (70.6)$$

где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

Формула (70.6) связывает собственное время с координатным. Собственное время — инвариант преобразований Лоренца.

Обращаем внимание на различие в записи (и смысле) радикалов  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\Gamma}$  и  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$ . Они совпадают лишь в случае  $V = v$  (когда система отсчета  $K'$  связана с движущейся частицей, т. е. когда  $v' = 0$ ).

В уравнения динамики должно входить собственное время. Собственное время можно интерпретировать как время, отсчитанное по часам, связанным с движущимся телом. Но это не

обязательно. Если часы связаны с телом, которое движется с ускорением, то часы отсчитывают собственное время лишь до тех пор, пока на них не влияет ускорение. Но подсчитать собственное время можно всегда, зная промежуток координатного времени и скорость частицы, с помощью формулы (70.6).

Используя понятие инвариантного времени, можно перейти к построению основных четырехмерных величин, необходимых в механике. Проще всего идти методом аналогий с трехмерным пространством; обычно три первые компоненты четырехмерных величин имеют аналогии в обычном пространстве. Четвертая же компонента потребует особого рассмотрения.

**Четырехмерная скорость.** Скорость определяется производной

в 3-пространстве  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  | в 4-пространстве (пространстве-времени)  $\vec{V} = \frac{dR}{d\tau}$ . (70.7)

В научной и учебной литературе при четырехмерном представлении СТО широко применяются сокращенные обозначения: трехмерное пространство — 3-пространство, четырехмерный вектор скорости — 4-скорость (читается: четырех-скорость) и др. Эти обозначения используются и в этой книге. Будем считать, что индексы  $\alpha, \beta, \dots$  пробегает значения 1, 2, 3, а  $i, k, \dots$  — значения 1, 2, 3, 4. Обозначим компоненты четырехмерной скорости через  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Для первых трех компонент согласно (70.6) имеем:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\alpha}{dt} = \gamma v_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (70.8)$$

где  $v_\alpha$  — компоненты трехмерной скорости. Итак, три первые компоненты четырехмерной скорости — это компоненты трехмерной скорости, умноженные на множитель  $\gamma$ , зависящий от модуля скорости частицы. Четвертая компонента равна:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma \frac{d(ict)}{dt} = ic\gamma. \quad (70.9)$$

При  $v \ll c$  множитель  $\gamma \sim 1$ , и тогда первые три компоненты четырехмерной скорости совпадают с обычной скоростью. Четвертая компонента скорости отлична от нуля даже тогда, когда частица покоится (при  $v=0$   $\gamma=1$  и  $u_4=ic$ ). Последнее обстоятельство имеет ясный смысл. Время остановить нельзя, оно всегда течет. В четырехмерном мире «покоя» (в том смысле, что  $\vec{V} \neq 0$ ) быть не может.

Выпишем компоненты четырехмерной скорости в таком виде

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \gamma v_x & \gamma v_y & \gamma v_z & ic\gamma \end{pmatrix} = \vec{V} \begin{pmatrix} \gamma v & ic\gamma \end{pmatrix}. \quad (70.10)$$

В частности, в той системе отсчета, где тело покоится ( $v=0$ ),

$$\vec{V}^0 \left\{ \begin{matrix} u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0 \\ 0, 0, 0, ic \end{matrix} \right\}. \quad (70.11)$$

Найдем квадрат модуля 4-вектора скорости, используя соотношение (70.10):

$$\vec{V}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2. \quad (70.12)$$

Проще, пользуясь инвариантностью квадрата модуля четырехмерного вектора  $\vec{V}^2 = \vec{V}^{0^2}$ , подсчитать эту величину в собственной системе отсчета с привлечением выражения (70.11).

В качестве примера использования 4-вектора скорости выведем еще раз формулы преобразования компонент трехмерной скорости при переходе от одной ИСО к другой. Для этого рассмотрим запись скорости в четырехмерном пространстве в виде четырехмерного вектора, которая сразу же раскрывает закон ее преобразования при переходе от одной инерциальной системы к другой. Этот закон был дан выше (67.1) для преобразования компонент четырехмерного радиус-вектора  $\vec{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Пусть в системе  $K$  заданы составляющие 4-скорости  $\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Согласно формулам (67.1) в системе  $K'$  получим:

$$u'_1 = \Gamma(u_1 + i\beta u_4), \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3, \quad u'_4 = \Gamma(u_4 - i\beta u_1). \quad (70.13)$$

Составляющие четырехмерной скорости в системах  $K$  и  $K'$  согласно (70.10) будут:

$$\vec{V}(\gamma\vec{v}, ic\gamma), \quad \vec{V}'(\gamma'\vec{v}', ic\gamma').$$

Подставляя их значения в выражение (70.13), получим:

$$\begin{aligned} \gamma'v'_x &= \Gamma(\gamma v_x - \gamma V), & \gamma'v'_y &= \gamma v_y, & \gamma'v'_z &= \gamma v_z, \\ ic\gamma' &= \Gamma(ic\gamma - i\beta\gamma v_x). \end{aligned} \quad (70.14)$$

Из равенства (70.14) следует, что

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}.$$

Подставляя это выражение в три первых равенства (70.14), получим:

$$v'_x = \frac{1}{\gamma'} \Gamma(v_x - V), \quad v'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} v_y, \quad v'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} v_z,$$

т. е. формулы, непосредственно полученные из преобразований Лоренца.

## § 71. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Перейдем теперь к построению основного уравнения динамики СТО. Воспользовавшись снова аналогией, введем четырехмерный вектор импульса частицы

$$\left. \begin{array}{l} \text{трехмерный импульс} \\ \text{(3-импульс)} \\ \vec{p} = m_0 \vec{v} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{четырёхмерный импульс} \\ \text{(4-импульс)} \\ \vec{P} = m_0 \vec{V}. \end{array} \quad (71.1)$$

Чтобы получить четырехмерный вектор  $\vec{P}$ , нужно умножить четырехмерный вектор  $\vec{V}$  на скаляр. Скаляр (инвариант)  $m_0$  называют массой покоя частицы. Поскольку никаких других масс мы вводить не будем, то всюду ниже под массой понимается масса покоя\*. Смысл последнего названия станет ясным несколько позже. Мы постараемся записать уравнение динамики в четырехмерной векторной форме, опять-таки исходя из аналогии:

$$\left. \begin{array}{l} \text{основное трехмерное} \\ \text{уравнение динамики} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{основное четырехмерное} \\ \text{уравнение динамики} \\ \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F}. \end{array} \quad (71.2)$$

Мы уже объясняли, почему вместо  $dt$  нужно использовать инвариантное выражение  $d\tau$ . Определив четырехмерную скорость, мы определили тем самым левую часть выражения (71.2). Что такое четырехмерная сила, нам предстоит выяснить. Компоненты левой части выражения (71.2) легко записать:

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dP_\alpha}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (m_0 u_\alpha) = \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma v_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Если ввести обозначение для компонент четырехмерной силы  $\vec{F}$  ( $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ ), то первые три компоненты (71.2) можно записать в виде

$$\gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma v_\alpha) = \mathcal{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Здесь мы сделаем существенное предположение, оправданием которого служит правильность полученных результатов. Будем считать, что первые три компоненты четырехмерной силы имеют вид

$$\mathcal{F}_\alpha = \gamma F_\alpha, \quad (71.3)$$

\* Индекс «0» у  $m_0$  введен в связи с общепринятым обозначением массы покоя. Часто появляющееся ниже произведение  $m_0 \gamma$  в литературе обычно называют массой движения или релятивистской массой. Существенно, что  $m_0 \gamma$  не является инвариантом преобразований Лоренца.

где  $F_\alpha$  — компоненты трехмерной силы. Тогда три первые компоненты четырехмерного уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_\alpha) = F_\alpha, \quad (71.4)$$

где  $v_\alpha$  и  $F_\alpha$  имеют смысл трехмерных компонент скорости и силы. Написав уравнения (71.4) последовательно для  $\alpha = 1, 2, 3$  и умножив каждое из них соответственно на единичные векторы, направленные по осям  $X, Y, Z$  (т. е. на  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), и сложив полученные выражения, получим трехмерное релятивистское уравнение динамики (второй закон Ньютона в релятивистской форме)

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}) = \vec{F}. \quad (71.5)$$

Таким образом, три первых уравнения четырехмерного уравнения динамики — это релятивистское уравнение движения. Нам остается выяснить смысл четвертого уравнения

$$\frac{d}{dt}(m_0 u_4) = \mathcal{F}_4; \quad \frac{d}{d\tau}(m_0 i c \gamma) = \mathcal{F}_4. \quad (71.6)$$

Правую часть этого уравнения (т. е.  $\mathcal{F}_4$ ) можно вычислить следующим образом. Дифференцируя выражение (70.12) по  $\tau$ , получим:

$$\gamma \vec{v} \frac{d}{d\tau}(\gamma \vec{v}) - c \gamma \frac{d}{d\tau}(c \gamma) = 0. \quad (71.7)$$

Заменяя в первом выражении  $d\tau$  на  $\frac{dt}{\gamma}$  и пользуясь (71.6), после умножения обеих частей на  $m_0$  получим:

$$\gamma^2 \vec{v} \vec{F} + i c \gamma \mathcal{F}_4 = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{F}_4 = i \frac{\gamma}{c} (\vec{F} \vec{v}),$$

откуда окончательно

$$\frac{d}{dt}(m_0 c^2 \gamma) = \vec{F} \vec{v},$$

или

$$m_0 \dot{\gamma} = \frac{1}{c^2} (\vec{F} \vec{v}). \quad (71.8)$$

Поскольку в формуле (71.8) стоит мощность силы, действующей на частицу, выражение в круглых скобках предыдущей формулы следует принять за энергию частицы

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma. \quad (71.9)$$

Уместно сопоставить соответствующие величины ньютоновской и релятивистской трехмерной механики. Уравнение движения формально одинаково

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \\ \vec{p} = m\vec{v}, \\ T = \frac{m\vec{v}^2}{2}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F}. \quad (71.10) \\ \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}. \\ \mathcal{E} = m_0c^2\gamma. \quad (71.11) \end{aligned}$$

Классический импульс

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

Энергия частицы (кинетическая)

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2},$$

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}.$$

Энергия частицы (полная)

$$\mathcal{E} = m_0c^2\gamma. \quad (71.11)$$

Мы видим, что отличие соотношений релятивистской механики от классической состоит в определении импульса и в определении энергии. Прежде чем обсуждать особенности релятивистских уравнений движения, выпишем определения 4-вектора силы и 4-вектора импульса, который называют 4-вектором энергии-импульса, поскольку  $m_0i\vec{c}\gamma = i\frac{m_0c^2\gamma}{c} = i\frac{\mathcal{E}}{c}$ :

$$\vec{P} = m_0\vec{V} = \left\{ \begin{array}{cccc} P_1, & P_2, & P_3, & P_4 \\ m_0\gamma v_x, & m_0\gamma v_y, & m_0\gamma v_z, & i\frac{\mathcal{E}}{c} \end{array} \right\} \equiv \vec{P} \left( \vec{p}, i\frac{\mathcal{E}}{c} \right), \quad (71.12)$$

$$\vec{F} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathfrak{F}_1, & \mathfrak{F}_2, & \mathfrak{F}_3, & \mathfrak{F}_4 \\ \gamma F_x, & \gamma F_y, & \gamma F_z, & i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v}) \end{array} \right\} \equiv \vec{F} \left( \gamma\vec{F}, i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v}) \right). \quad (71.13)$$

Преобразуем левую часть выражения (71.5) с учетом (71.8):

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0\dot{\gamma}\vec{v} + m_0\gamma\dot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}(\vec{F}\vec{v}) + \dot{\vec{v}}m_0\gamma.$$

Поэтому можно написать:

$$m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left[ \vec{F} - \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}(\vec{F}\vec{v}) \right]. \quad (71.14)$$

Если в классической механике ускорение и сила совпадают по направлению, то в релятивистской механике они, вообще говоря, не совпадают. Исключения составляют два случая:

1)  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , тогда  $m_0\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{\gamma}$ . В этом случае, как видно из выражения (71.8),  $\gamma = \text{const}$ .

Уравнение движения при  $\vec{F} \perp \vec{v}$  имеет вид

$$m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

В том случае, когда сила всегда перпендикулярна скорости, релятивистское уравнение движения совпадает с ньютоновским,

но величина массы должна быть изменена ( $m_0\gamma$ ). Это можно проверить экспериментально. При движении заряженной частицы в магнитном поле сила Лоренца  $\vec{F} = e[\vec{v}\vec{B}]$ ; умножив обе части этого уравнения на  $\vec{v}$ , получим, что энергия частицы не меняется.

2) Пусть  $\vec{F} \parallel \vec{v}$ . Уравнение движения имеет вид

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{F} = \frac{1}{\gamma^3} \vec{F}.$$

Для каждого данного момента времени

$$m_0 \gamma^3 = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3},$$

т. е. является переменной величиной.

Для двух рассмотренных случаев, когда ускорение и сила направлены одинаково, коэффициент пропорциональности между силой и ускорением разный. В промежуточном случае связь между ускорением и силой носит более сложный (тензорный) характер. Из уравнений Эйнштейна нельзя указать никакой однозначной зависимости массы от скорости, пригодной для всех случаев, поэтому разумно пользоваться инвариантной массой покоя  $m_0$ .

Напомним, что

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = \frac{m_0 c^2 \gamma}{c^2} \vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}. \quad (71.15)$$

Откуда получим:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = m_0^2 c^2 \gamma^2, \quad p^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2$$

и, наконец,

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2. \quad (71.16)$$

Энергия и импульс связаны так, что они определяют массу покоя.

Макроскопических тел, движущихся с релятивистской скоростью, в земных и околоземных условиях нет. В 1934 г. была открыта искусственная радиоактивность. Скорость электронов оказалась равной  $0,9c$ . С тех пор были открыты и исследованы многие элементарные частицы, движущиеся с релятивистскими скоростями. Массу покоя—этот характерный признак микро-частиц—удалось определить по виду треков элементарных частиц, например в камере Вильсона. Экспериментальные данные позволяют определить энергию и импульс частиц и вычислить их массу покоя. До сих пор мы получили ряд соотношений для частицы, лишенной внутреннего строения. Но эти же соотношения можно применить и к системе частиц.

Рассмотрим систему, состоящую из отдельных частиц. Масса покоя системы определяется формулой

$$M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2, \quad (71.17)$$

где  $E$  — полная энергия и  $P$  — суммарный импульс системы. Если частицы не взаимодействуют между собой, то  $E = \sum \mathcal{E}_i$ ,  $P = \sum p_i$  (всегда). Для взаимодействующих частиц  $E = \sum \mathcal{E}_i + U$  ( $U$  — энергия взаимодействия частей системы, т. е. та энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить систему на невзаимодействующие части). Для того чтобы система была устойчива, энергия ее должна быть минимальна ( $U < 0$ , если система устойчива). В СТО точное выражение для потенциальной энергии записать не удастся.

Рассмотрим систему невзаимодействующих частиц (идеальный газ). Выберем систему отсчета, где суммарный импульс частиц  $P = 0$ . Тогда

$$M = \frac{E}{c^2}, \quad E = M c^2.$$

Масса покоя системы есть энергия системы (в той ИСО, в которой суммарный импульс равен нулю), деленная на  $c^2$ . Эта формула — обобщение выражения для энергии одной частицы. Действительно, из  $\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma$  при  $v = 0$  получим:

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2.$$

Таким образом, масса покоя определяет энергию, содержащуюся в системе или частице (энергия покоя). Энергия покоя тела массой 1 г равна:  $1 \text{ г} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ см}^2/\text{с}^2 \approx 10^{14} \text{ Дж}$ .

Для системы невзаимодействующих частиц  $M c^2 = \sum \mathcal{E}_i$ , где  $\mathcal{E}_i = m_{0,i} c^2 \gamma_i$ , имеем:

$$M c^2 = \sum m_{0,i} c^2 \gamma_i.$$

Введем понятие кинетической энергии в СТО — энергии, которой обладает движущаяся частица. Когда частица покоится, ее энергия  $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$ , когда движется  $\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma$ . Отсюда

$$T = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1). \quad (71.18)$$

Покажем, что классическая кинетическая энергия — предельный случай релятивистской:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1) \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

(с точностью до  $\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4}$ ). Всегда можно написать

$$\mathcal{E} = T + m_0 c^2.$$



Тогда для системы невзаимодействующих частиц

$$Mc^2 = \sum \mathcal{E}_i = \sum T_i + c^2 \sum m_{0,i},$$

$$M = \frac{\sum T_i}{c^2} + \sum m_{0,i}.$$

Масса покоя в теории относительности не является аддитивной величиной. При образовании системы масса покоя не входит аддитивно в массу системы.

Рассмотрим устойчивую систему взаимодействующих частиц в системе отсчета, где  $\vec{P} = 0$ .

$$Mc^2 = E = \sum \mathcal{E}_i + U = c^2 \sum m_{0,i} + \sum T_i + U \quad (U < 0).$$

Величину  $\Delta M = \sum m_{0,i} - M$  называют дефектом масс. С помощью этого соотношения определяют энергию связи атомного ядра. Пусть  $N_p$  — число протонов в ядре,  $N_n$  — число нейтронов; тогда  $N_p m_p + N_n m_n$  — сумма масс частиц, составляющих ядро. Масса ядра  $M$  может быть определена независимо. Дефект массы ядра  $\Delta M = N_p m_p + N_n m_n - M$ . Энергия связи может быть определена по формуле

$$U = \Delta M c^2,$$

если  $U \gg \sum T_i$ .

## § 72. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ВЕКТОРОВ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И СИЛЫ

Мы определили четырехмерные векторы энергии-импульса и силы:

$$\vec{P} \left( P_1, P_2, P_3, P_4 \right) \equiv \vec{P} \left( p, i \frac{\mathcal{E}}{c} \right), \quad \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v},$$

$$\vec{F} \left( \gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z, i \frac{\gamma}{c} (\vec{F} \vec{v}) \right) \equiv \vec{F} \left( \gamma \vec{F}, i \frac{\gamma}{c} (\vec{F} \vec{v}) \right).$$

Компоненты четырехмерных векторов находятся в определенной связи друг с другом. Составим, например, выражение

$$\vec{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}, \quad P_0^2 = -\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} = -m_0^2 c^2.$$

Из этого выражения вытекает уже известная нам связь между энергией, импульсом и массой частицы:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2.$$

Кстати, выразив энергию через импульс, мы получим релятивистскую функцию Гамильтона

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{H}(p) = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

Формулы преобразования компонент четырехмерных векторов ведут к интересным следствиям. Запишем формулы преобразования четырехмерного вектора энергии-импульса:

$$P'_1 = \Gamma(P_1 + i\beta P_4); P'_2 = P_2; P'_3 = P_3; P'_4 = \Gamma(P_4 - i\beta P_1).$$

Пусть в системе  $K$  частица покоится (собственная система частицы). Тогда в этой системе  $\vec{P}^0(0, 0, 0, i\frac{\mathcal{E}^0}{c})$ , а в системе  $K'$

$$p'_x = \Gamma\left(i\beta \cdot i\frac{\mathcal{E}^0}{c}\right) = -\Gamma\frac{V}{c^2}\mathcal{E}^0; p'_y = p'_z = 0;$$

$$i\frac{\mathcal{E}'}{c} = \Gamma\left(i\frac{\mathcal{E}^0}{c}\right); \mathcal{E}' = \Gamma\mathcal{E}^0.$$

Естественно, что мы вернулись к уже известным формулам (71.15) и (71.10). Мы получили важный результат: в механике частицы всякая передача энергии связана с передачей импульса. Но этот же результат имеет место и в электродинамике (§ 40). Оказывается, он имеет универсальное значение, и именно поэтому утверждалось, что сигнал—это передача энергии и импульса из одной точки пространства в другую.

Полезно знать, как преобразуются силы при переходе от одной ИСО к другой. Пусть в системе  $K$  тело покоится и на него действует трехмерная сила  $\vec{F}$ . Тогда в этой системе 4-сила  $F^0$  имеет компоненты  $\vec{F}^0(F_x^0, F_y^0, F_z^0, 0)$ . Компоненты силы преобразуются по стандартным формулам:

$$\mathfrak{F}'_1 = \Gamma(\mathfrak{F}_1 + i\beta\mathfrak{F}_4); \mathfrak{F}'_2 = \mathfrak{F}_2; \mathfrak{F}'_3 = \mathfrak{F}_3; \mathfrak{F}'_4 = \Gamma(\mathfrak{F}_4 - i\beta\mathfrak{F}_1),$$

откуда немедленно получим (четвертое соотношение не рассматриваем):

$$\gamma'F'_x = \Gamma F_x^0; \gamma'F'_y = F_y^0; \gamma'F'_z = F_z^0.$$

Но в рассматриваемом случае  $\gamma' = \Gamma$ , поэтому мы находим закон преобразования компонент трехмерной силы:

$$F'_x = F_x^0; F'_y = F_y^0 \sqrt{1-\beta^2}; F'_z = F_z^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (72.1)$$

Компоненты силы в направлении движения не изменяются. При нерелятивистских скоростях силы вообще не изменяются при переходе от одной ИСО к другой.

### § 73. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ (ФОТОНЫ) КАК РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЧАСТИЦЫ

Релятивистская механика строилась для частиц, обладающих конечной (отличной от нуля) массой покоя. Это видно, в частности, из того, что четырехмерный импульс частицы  $\vec{P} = m_0\vec{V}$

имеет смысл лишь при условии  $m_0 \neq 0$ . Все частицы с массой  $m_0 \neq 0$  не могут достичь скорости  $c$  в результате движения с ускорением. Для этого им нужно было бы сообщить бесконечную энергию и импульс ( $\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma$ ,  $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ , но при  $\vec{v} \rightarrow c$  множитель  $\gamma \rightarrow \infty$ ).

При взаимодействии электромагнитного поля с микрочастицей такая частица (например, электрон) получает от электромагнитного поля всегда определенную энергию и определенный импульс (речь идет для простоты о монохроматическом излучении, т. е. излучении с заданной частотой  $\omega$ ).

Впервые предложение о передаче электрону определенной энергии светом было высказано А. Эйнштейном в связи с теорией фотоэффекта (1905). Для объяснения рассеяния  $\gamma$ -кванта на электронах пришлось предположить, что электромагнитное поле передает электрону не только определенную энергию, но и определенный импульс.

Такая картина взаимодействия электромагнитного поля с электроном может быть наглядно описана как взаимодействие «частицы света» (фотона), обладающей определенной энергией и импульсом, с электроном. Конечно, было бы весьма наивно думать, что электромагнитное поле действительно состоит из частиц, напоминающих бильярдные шарики. Картина «частиц света» пригодна лишь для описания обмена энергией и импульсом между полем и микрочастицами.

Какие свойства мы должны приписать фотону, если хотим считать его релятивистской частицей? Одно из свойств фотона — связь между его энергией и импульсом — можно получить из макроскопической электродинамики. Действительно, для давления света  $P$ , падающего из вакуума на стенку, существует соотношение

$$P = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad (73.1)$$

где через  $\mathcal{E}$  обозначена энергия, падающая в единицу времени нормально на единицу площади стенки, полностью поглощающей свет. Теперь представим себе, что на стенку падают фотоны (на самом деле, как это будет ясно из дальнейшего, существенно лишь то, что энергия и импульс на стенку передаются дискретными порциями). Пусть свет представляет собой плоскую волну, так что все фотоны движутся по одному направлению. По предположению каждый фотон несет с собой энергию  $\epsilon$  и импульс  $\vec{p}$ . Если за единицу времени на единицу площади стенки попало  $N$  фотонов и все они были поглощены, стенка приобрела энергию  $N\epsilon$  и импульс  $N\vec{p}$ . Но импульс, приобретенный единицей площади стенки за единицу времени как раз и есть давление све-

та  $P^*$ , так что  $P = Np$ , а  $\mathcal{E} = N\varepsilon$ . Поэтому из уравнения (73.1) вытекает связь между энергией и импульсом фотона

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (73.2)$$

Для релятивистских частиц связь между энергией, импульсом и скоростью движения определяется соотношением  $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}$ , откуда ясно, что для выполнения (73.2) необходимо, чтобы  $v = c$ . Итак, если интерпретировать фотон как релятивистскую частицу, то нужно считать, что он движется со скоростью света  $c$ .

Как и для всякой релятивистской частицы, для фотона в вакууме можно построить четырехмерный вектор энергии-импульса  $P \left( \vec{p}, i \frac{\mathcal{E}}{c} \right)$ . По общим формулам для вычисления квадрата четырехмерного вектора с учетом  $v = c$  получим:  $P^2 = 0$ . С другой стороны, для обычных частиц  $P^2 = -m_0^2 c^2$  [см. (70.12)]. Отсюда видно, что масса покоя фотона равна нулю. Следовательно, лишь те частицы могут двигаться с предельной релятивистской скоростью, у которых масса покоя равна нулю.

Из релятивистской механики получить выражения для энергии и импульса фотона нельзя. Но известно, что при испускании и поглощении, при взаимодействии с веществом свет ведет себя как набор частиц, каждая из которых обладает энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\omega/c$  (здесь  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг·с — постоянная Планка, а  $\omega$  — круговая частота света). В каждом элементарном акте взаимодействия с веществом участвует одна такая частица, названная в свое время Эйнштейном квантом света (фотоном); в каждом акте взаимодействия выполняются законы сохранения энергии и импульса. Поэтому за энергию кванта можно принять выражение  $\hbar\omega$ , а за импульс  $\vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{s}$ , где  $\vec{s}$  — единичный вектор, направленный по лучу. Таким образом, если квант света (фотон) рассматривать как релятивистскую частицу, то ее четырехмерный вектор энергии-импульса определяется следующим образом:

$$P \left( \hbar \vec{k}, i \frac{\hbar\omega}{c} \right), \quad (73.3)$$

где  $\vec{k} = k\vec{s}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  ( $\vec{k}$  — волновой вектор,  $\vec{s}$  — единичный вектор, направленные по лучу). Если сократить все компоненты  $P$  на общий множитель (постоянную Планка  $\hbar$ ), приходим к четы-

---

\* По закону Ньютона  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Разделив обе части на площадь, на которую действует сила, получим давление, т. е.  $\vec{P} = \frac{\vec{F}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$ ; справа как раз стоит приращение импульса на единицу площади в единицу времени,

рехмерному волновому вектору кванта света (фотона)

$$\vec{k}(\vec{k}, ik); k = \frac{\omega}{c}; P = \hbar \vec{k}. \quad (73.4)$$

С введением четырехмерного волнового вектора можно легко получить формулы, описывающие эффект Доплера; он обнаруживается для волн любой природы и заключается в том, что при относительном движении источника и приемника (наблюдателя) частота звука или света, определяемая наблюдателем, отличается от частоты, измеренной в системе отсчета, где источник покоится.

Рассмотрим плоскую световую волну, наблюдаемую в системе отсчета  $K'$  и характеризуемую четырехмерным вектором  $\vec{k}$ . Выберем систему  $K'$  так, чтобы луч света распространялся в этой системе в плоскости  $x'y'$  и составлял угол  $\theta'$  с осью  $X'$ . Выпишем компоненты четырехмерного вектора  $\vec{k}'$ :

$$k'_1 = k' \cos \theta' = \frac{\omega'}{c} \cos \theta', \quad k'_2 = k' \sin \theta' = \frac{\omega'}{c} \sin \theta', \quad (73.5)$$

$$k'_3 = 0, \quad k'_4 = i \frac{\omega'}{c} = ik'.$$

Компоненты  $\vec{k}$  в системе  $K$  находят по формулам

$$k_1 = \Gamma(k'_1 - i\beta k'_4), \quad k_2 = k'_2, \quad k_3 = k'_3, \quad k_4 = \Gamma(k'_4 + i\beta k'_1). \quad (73.6)$$

Прежде всего обнаруживаем, что и в системе  $K$  луч не выходит из плоскости  $(XY)$ , так как  $k_3 = 0$ . Из формул (73.6) находим для  $k_4$ :

$$i \frac{\omega}{c} = \Gamma \left( i \frac{\omega'}{c} + i\beta \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \right),$$

или

$$\omega = \omega' \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega' \Gamma (1 + \beta \cos \theta'). \quad (73.7)$$

Следовательно, если в системе  $K'$  частота света была равна  $\omega'$ , то в системе  $K$  она уже будет согласно выражению (73.7) иной. Из первой формулы (73.6) вытекает, что

$$\frac{\omega}{c} \cos \theta = \Gamma \left( \frac{\omega'}{c} \cos \theta' - i\beta i \frac{\omega'}{c} \right),$$

или, если принять во внимание выражение (73.7),

$$\cos \theta = \frac{\omega'}{\omega} \Gamma (\cos \theta' + \beta) = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}. \quad (73.8)$$

С учетом формулы (73.7) из второй формулы (73.5) получим:

$$\sin \theta = \frac{\omega'}{\omega} \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'} \sin \theta' = \frac{\sin \theta'}{\Gamma (1 + \beta \cos \theta')}. \quad (73.9)$$

Нетрудно с помощью уравнений (73.8) и (73.9) найти выражение для  $\sin \theta'$  через угол  $\theta$ :

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (73.10)$$

Полученные формулы позволяют дать количественное объяснение двум оптическим эффектам—эффекту Доплера и aberrации света.

Пусть источник покоится в системе  $K'$ . Тогда приборы, покоящиеся в этой системе, фиксируют собственную частоту источника света  $\omega_0$  ( $\omega_0 = \omega'$ ). Найдем зависимость частоты  $\omega$  в системе  $K$  от угла  $\theta$ .

Из формулы (73.8) следует, что  $\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$ , откуда

$$1 + \beta \cos \theta' = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta}$$

и, следовательно, выражение (73.7) можно окончательно записать так:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (73.11)$$

Эта формула описывает эффект Доплера. Наблюдатель в системе  $K$  зафиксирует частоту излучения  $\omega$ , не совпадающую с собственной частотой источника  $\omega_0$ . Наблюдаемая частота  $\omega$  зависит не только от относительной скорости источника и наблюдателя ( $\beta = \frac{V}{c}$ ), но и от угла  $\theta$ , под которым свет идет к наблюдателю относительно направления движения источника.

В частности, если излучение принимается в направлении относительной скорости, то мы имеем так называемый продольный эффект Доплера. Если система  $K'$  находится правее системы  $K$ , то источник удаляется от наблюдателя и свет движется в направлении, противоположном направлению оси (рис. 92). В этом случае  $\cos \theta = \cos \pi = -1$ , а для частоты  $\omega$  и периода  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Наблюдатель, принимающий свет от удаляющегося источника, обнаруживает уменьшение частоты.

Напротив, если система  $K'$  находится слева от  $K$ , то  $\cos \theta = 1$  и источник приближается к наблюдателю:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

При сближении приемника и источника частота принимаемого света увеличивается по сравнению с собственной частотой. С точ-

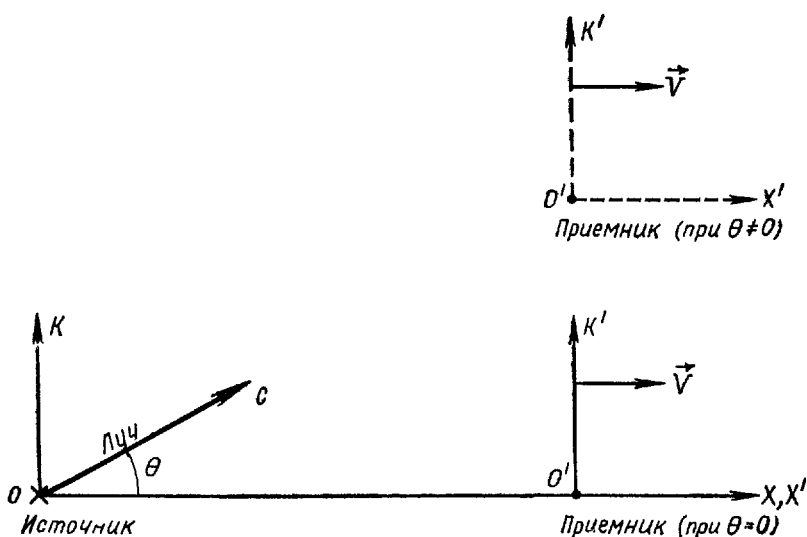


Рис. 92

ностью до членов  $\beta^2$  две последние формулы можно переписать так:

$$T = T_0 (1 - \beta),$$

$$\omega = \omega_0 (1 + \beta)$$

(для получения этих формул проще всего умножить числитель и знаменатель дроби под корнем на числитель).

Если источник движется перпендикулярно лучу зрения ( $\theta = \pi/2$ ), то наблюдается поперечный эффект Доплера, при котором изменение частоты описывается формулой

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (73.12)$$

т. е.  $\omega$  зависит уже от  $\beta^2$ . Если скорость движения источника нерелятивистская, разложение бинорма в уравнении (73.12) дает

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right).$$

Поперечный эффект является эффектом второго порядка, поэтому его наблюдать гораздо труднее, чем продольный. Неудивительно поэтому, что поперечный доплер-эффект был обнаружен лишь в 1938 г., причем релятивистская формула была полностью подтверждена. В классической теории никакого поперечного доплер-эффекта быть не должно. Поперечный доплер-эффект возникает исключительно из-за относительности промежутков времени между событиями.

## § 74. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФОРМЕ

Электродинамика Максвелла удовлетворяет всем требованиям СТО: при преобразовании Лоренца все уравнения Максвелла сохраняют свой вид. Из этого не следует, однако, что релятивистская формулировка электродинамики ничего не внесла в наше понимание электромагнитных явлений. Электродинамика в четырехмерной форме раскрыла все достоинства тензорного исчисления как математического аппарата теории относительности. Использование четырехмерного антисимметричного тензора позволяет придать уравнениям электродинамики такой вид, который сохраняется при преобразованиях Лоренца. Мы начнем с введения некоторых четырехмерных величин.

Мы видели (см. § 41 и 48), что в вакууме электродинамические потенциалы  $\vec{A}$  и  $\phi$  удовлетворяют уравнениям Даламбера:

$$\square \vec{A} \equiv \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (74.1)$$

$$\square \phi = \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (74.2)$$

Из уравнений (74.1)—(74.2) видно, что компоненты векторного потенциала  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  и скалярный потенциал  $\phi$  удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям (уравнениям Даламбера), которые отличаются лишь правой частью. Можно объединить три уравнения (74.1) и уравнение (74.2) в одно четырехмерное векторное уравнение, если ввести два четырехмерных вектора:

вектор четырехмерного потенциала

$$\Phi \left( A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c} \phi \right), \quad (74.3)$$

вектор четырехмерной плотности тока

$$s \left( j_x, j_y, j_z, ic\rho \right). \quad (74.4)$$

Вспомним определение четырехмерного радиус-вектора

$$R \left( x, y, z, ict \right).$$

Компоненты четырехмерных векторов  $\Phi$ ,  $s$ ,  $R$  выписаны в двух строчках, и их сопоставление сразу позволяет найти нужное значение компоненты. Определив четырехмерный потенциал и четырехмерную плотность тока, можно уравнения (74.1) и (74.2) записать одной формулой

$$\square \Phi_i = -\mu_0 s_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (74.5)$$



То, что три уравнения (74.5) при  $i=1, 2, 3$  совпадают с уравнением (74.1), очевидно. Уравнение (74.5) для  $i=4$  дает

$$\square \frac{i}{c} \varphi = -\mu_0 ic\rho,$$

но

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (74.6)$$

и мы приходим к уравнению (74.2).

Рассмотрим теперь преобразования плотности тока. Для этого воспользуемся формулами

$$s_1 = \Gamma(s'_1 - i\beta s'_4), \quad s_2 = s'_2, \quad s_3 = s'_3, \quad s_4 = \Gamma(s'_4 + i\beta s'_1). \quad (74.7)$$

Четырехмерный ток образован плотностью тока и плотностью заряда. То, что ток и плотность заряда объединились в один четырехмерный вектор, вполне естественно. Если говорить о системах отсчета, находящихся в относительном движении, то заряд может покоиться лишь в одной, «собственной» системе отсчета. Во всех других ИСО заряд движется, и с точки зрения этих систем представляет собой ток. Такой ток называют конвекционным. Таким образом, переход от покоящегося заряда (электростатики) к току—это переход от собственной системы отсчета к любой другой ИСО.

Ток течет в веществе и в том случае, когда  $\rho=0$ . Например, в металлах суммарная плотность заряда, складывающаяся из зарядов ионов и свободных электронов, равна нулю:

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Но ток, конечно, может идти, если имеется направленное движение электронов:

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- = \rho_- \vec{v}_-,$$

потому что скорость направленного движения ионов равна нулю.

Пусть в системе  $K'$  задана плотность заряда  $\rho'$ , а тока нет ( $\vec{j}'=0$ ). Следовательно, в системе  $K'$  четырехмерная плотность тока имеет компоненты  $s'(0, 0, 0, ic\rho' = ic\rho_0)$ , т. е.  $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0$ ,  $s'_4 = ic\rho_0$ . Тогда согласно выражениям (74.7) в системе  $K$  имеем:

$$s_1 = \Gamma(-i\beta ic\rho_0) = \Gamma V \rho_0, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = \Gamma ic\rho_0. \quad (74.8)$$

В развернутой форме последнее уравнение запишется так:

$$s_4 = ic\rho = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, мы приходим к закону преобразования плотности заряда при переходе от «собственной» системы, где заряд

покоится, к системе, относительно которой заряд движется со скоростью  $V$ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (74.9)$$

Из первого уравнения (74.8) получаем:

$$s_1 = j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho V. \quad (74.10)$$

Смысл равенства (74.10) очень прост. Скорость заряда, покоящегося в системе  $K'$ , относительно системы  $K$  равна  $V$ , поэтому  $s_1 = j_x$  представляет собой конвекционный ток. Что касается изменения плотности заряда (74.9), то оно связано с изменением объема. Так как объем  $\mathcal{V}$  изменяется по закону

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

а речь идет об одном и том же физическом объеме, содержащем тот же заряд  $dq$ , то

$$\rho_0 = \frac{dq}{d\mathcal{V}_0}, \text{ а } \rho = \frac{dq}{d\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{dq}{d\mathcal{V}_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho_0 \Gamma.$$

Конечно, полный заряд в заданном объеме остается неизменным в любой системе отсчета:

$$\rho_0 d\mathcal{V}_0 = \rho d\mathcal{V}. \quad (74.11)$$

## § 75. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В электродинамике напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и магнитную индукцию  $\vec{B}$  удобно находить через электродинамические потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  (см. § 41):

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (75.1)$$

Перенишем эти формулы, используя компоненты четырехмерного потенциала:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad (75.2)$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - ic \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right). \quad (75.3)$$

Последние члены в равенствах (75.2)—(75.3) записаны на основании определения компонент четырехмерного потенциала,

Аналогично, используя компоненты  $\vec{\Phi}$ , можно записать и остальные компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Получим формулы, аналогичные (75.2)–(75.3), из которых следует, что все компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  можно выразить через некоторые комбинации производных от компонент четырехмерного вектора  $\vec{\Phi}$  по четырехмерным координатам. Эти комбинации образуют антисимметричный четырехмерный тензор второго ранга

$$F_{ik} = c \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (75.4)$$

Появление тензора вполне естественно, так как производные от компонент вектора преобразуются по правилу преобразования тензоров. В том, что тензор (75.4) содержит только векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , можно убедиться, придавая индексам  $i, k$  в этой формуле независимо значения от единицы до четырех. Мы получим 16 значений  $F_{ik}$  (четыре из которых равны нулю), выраженных через компоненты  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Запишем эти компоненты в виде матрицы

$$F_{i,k} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (75.5)$$

Как обычно, в обозначении  $F_{i,k}$  первый индекс  $i$  указывает строку, а второй — столбец матрицы  $F_{ik}$ .

То, что электромагнитное поле в вакууме описывается антисимметричным тензором, обусловлено равенством числа независимых координат антисимметричного тензора (шести) числу компонент у двух трехмерных векторов.

Наш результат существенно отличается от трехмерной картины. Хотя векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  выражаются через компоненты четырехмерного потенциала, но сами по себе трехмерные векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не дополняются до четырехмерных векторов. В четырехмерном пространстве единое электромагнитное поле определяется величиной более сложной математической природы, чем вектор. Этой величиной является 4-тензор, называемый тензором электромагнитного поля.

Появление одного четырехмерного тензора вместо двух трехмерных векторов, описывающих электромагнитное поле, имеет глубокий физический смысл. Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны между собой, а «появление» или «исчезновение» одного из полей связано с выбором системы отсчета. Например, «чистое» электрическое поле, порождаемое зарядом, возник-

кает в специальных условиях, когда заряд рассматривается в системе, где он покоится. Однако в любой другой инерциальной системе этот заряд уже движется и, следовательно, образует электрический ток, с которым связано магнитное поле. С другой стороны, если по проводнику идет ток и проводник в некоторой системе отсчета представляется нейтральным, то в других инерциальных системах отсчета он представляется заряженным и, следовательно, в этих системах с ним связано электрическое поле зарядов. Если, например, в данной области пространства наблюдатель системы  $K$  фиксирует наличие одного лишь электрического поля, то наблюдатель любой другой системы  $K'$  фиксирует там же кроме электрического поля и магнитное. Наоборот, если измерениями в системе  $K$  установлено наличие одного лишь магнитного поля в точке наблюдения  $A$ , тогда в любой другой системе  $K'$  устанавливается наличие там же как магнитного, так и электрического поля.

Поскольку любая компонента тензора в новой системе отсчета есть линейная комбинация всех компонент тензора в старой системе отсчета, то при переходе от одной системы отсчета к другой электрическое поле может появиться за счет того, что в другой системе было только магнитное поле, и наоборот. В известном смысле электромагнитное поле является замкнутым: если измерениями в какой-то ИСО установлено, что в некоторой неподвижной (относительно этой ИСО) точке наблюдения  $A$  нет ни электрического, ни магнитного поля, то электромагнитного поля там нет ни в одной другой ИСО.

Как только установлено математическое выражение физической величины, правила ее преобразования от одной инерциальной системы к другой получаются автоматически. Компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  являются компонентами тензора (75.5).

Напомним правило преобразования компонент тензора при преобразовании координат по Лоренцу. Перепишем его в сокращенном виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 - i\beta\Gamma x'_4, \\ x_2 &= 0x'_1 + 1x'_2 + 0x'_3 + 0x'_4, \\ x_3 &= 0x'_1 + 0x'_2 + 1x'_3 + 0x'_4, \\ x_4 &= i\beta\Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 + \Gamma x'_4. \end{aligned} \quad (75.6)$$

Тем самым мы составили матрицу коэффициентов этого линейного преобразования — матрицу Лоренца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\beta\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \quad (75.7)$$

Преобразование (75.6) можно переписать теперь в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x'_k \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (75.8)$$

Нетрудно проверить, что формулы обратного перехода получаются в том случае, если поменять местами столбцы и строки:

$$x'_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ki} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (75.9)$$

Компоненты четырехмерных векторов преобразуются как координаты, потому что координаты — это компоненты четырехмерного радиус-вектора

$$A_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} A'_k; \quad A'_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ki} A_k. \quad (75.10)$$

Выведем формулы преобразования для производных компонент вектора по координатам, входящим в (75.4). Для удобства выпишем необходимые соотношения

$$\Phi_i = \sum \alpha_{im} \Phi'_m; \quad x'_i = \sum \alpha_{ki} x_k,$$

откуда

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki}.$$

Найдем теперь  $(\partial \Phi_i / \partial x_k)$  в новых, штрихованных, координатах:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial}{\partial x'_i} (\sum \alpha_{im} \Phi'_m) \alpha_{ki} = \sum \sum \alpha_{im} \alpha_{ki} \frac{\partial \Phi'_m}{\partial x'_i}.$$

Здесь использовано правило дифференцирования сложной функции — нужно помнить о связи между штрихованными координатами — и постоянство коэффициентов  $\alpha$ .

Чтобы получить производную от компоненты вектора по «новой» координате в некоторой системе, нужно взять линейную комбинацию производных в «старой» системе. Это и есть закон преобразования компонент тензора. При дифференцировании всякой скалярной функции получается вектор, имеющий свои законы преобразования. Если дифференцируется вектор, то получается тензор второго ранга.

Получим закон преобразования компонент электромагнитного поля. Для этого запишем формулу преобразования компонент тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \sum_m \sum_l \alpha_{im} \alpha_{kl} F'_{ml}. \quad (75.11)$$

В сумму (78.11) входит шестнадцать членов, каждый из которых содержит произведение двух  $\alpha_{ik}$  и одной из компонент  $F_{ik}$ .

Рекомендуем читателю, который впервые сталкивается с такими формулами, выписать все шестнадцать членов. Удобнее

всего это сделать так. Сначала развернуть сумму, например, по  $m$ , придавая  $m$  значения 1, 2, 3, 4. Индекс  $l$  по-прежнему означает суммирование. Получим сумму из четырех членов, в которой уже индекса  $m$  не будет. Затем в каждом из этих четырех членов произведем суммирование по  $l$ . В итоге все шестнадцать членов будут выписаны. Затем в эти члены нужно подставлять  $\alpha_{ik}$  из матрицы Лоренца и компоненты  $F_{ik}$  из матрицы (75.5). Вы сразу обнаружите, что большинство членов суммы (75.11) равно нулю, поэтому провести суммирование не очень сложно. Действительно,  $\alpha_{1m}$  при  $m$ , изменяющемся от 1 до 4,— это элементы первой строки матрицы Лоренца (75.7), а  $\alpha_{2l}$  при  $l=1, 2, 3, 4$ — это элементы второй строки матрицы Лоренца. Но в первой строке матрицы отличны от нуля только элементы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{14}$ . Следовательно, нужно брать для  $m$  лишь значения 1 и 4. Во второй строке отличен от нуля только элемент  $\alpha_{22}=1$ . Следовательно, для  $l$  нужно взять только значение  $l=1$  и вместо формулы (75.11) можно написать:

$$F_{12} = cB_z = \alpha_{22}\alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{11}F'_{12} + \\ + \alpha_{14}F'_{12} = \Gamma \left\{ cB'_z - i\frac{V}{c}(iE'_y) \right\} = \frac{cB'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Сопоставляя второе и последнее равенства в написанной цепочке равенств и сокращая на  $c$ , получим:

$$B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y \right).$$

Аналогичным образом получаются формулы преобразования остальных компонент; запишем их:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y), \\ B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right), \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right). \quad (75.12)$$

В основе теории относительности лежит принцип относительности Эйнштейна. Главное в этом принципе то, что законы физики инвариантны во всех ИСО. Компоненты же полей, как мы видим, изменяются. Однако существуют некоторые комбинации характеристик полей, которые не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. Выпишем их (их инвариантность можно проверить непосредственным вычислением с помощью формул преобразования Лоренца):

$$E^2 - c^2B^2 = \text{Inv}, \quad (75.13)$$

$$\vec{E}\vec{B} = \text{Inv}. \quad (75.14)$$

Если в какой-либо системе  $\vec{B}$  или  $\vec{E}=0$ , то второй инвариант обращается в нуль.

1)  $\vec{E}\vec{B}=0$ , если  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

2) Если  $E^2 - c^2 B^2 > 0$ , то за счет выбора ИСО можно получить  $\vec{B}'=0$ .

Если  $E^2 - c^2 B^2 < 0$ , то получить  $\vec{B}'=0$  нельзя, но можно путем выбора соответствующей ИСО устранить электрическое поле ( $\vec{E}'=0$ ).

В случае плоской электромагнитной волны оба инварианта обращаются в нуль.

### Упражнения

**44.** В состав жесткой компоненты вторичных космических лучей входят  $\pi$ -мезоны (с массой  $m_0=273$  электронных масс). Определите среднее время жизни  $t$  мезона в лабораторной системе отсчета и длину его пробега, если среднее время жизни в системе, относительно которой он покоится (т. е. собственное время), равно  $\tau=10^{-8}$  с, а его полная энергия составляет  $\mathcal{E}=5 \cdot 10^9$  эВ.

**Указание.** Используйте формулу (64.3), связывающую собственное  $\tau$  и координатное время  $t$ :  $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ , в которой значение корня

определяется из формулы (71.11)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Из этой же формулы найдите скорость частицы в лабораторной системе ( $V=v$ ) и пройденный ею путь.

**45.** Определите скорость электрона, которому в ускорителе сообщили полную энергию 1,02 МэВ.

**Указание.** Исходите из релятивистского выражения для кинетической энергии (71.18)

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2.$$

«Энергию покоя» легко вычислить (она равна  $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 0,51$  МэВ), затем найдите скорость электрона  $v$  ( $V$ ).

**46.** Вычислите скорость электрона, ускоренного разностью потенциалов  $U = 10^5$  В: а) по формулам СТО, б) в нерелятивистском приближении.

**Указание.** а) Исходите из формулы (71.18)

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = eU,$$

откуда

$$\frac{eU}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычисления существенно упрощаются подстановкой  $\frac{v}{c} = \sin \alpha$ :

$$\frac{eU + m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Из таблиц найдите значения  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ .

б) В нерелятивистском приближении примените формулу

$$T = eU = \frac{mv^2}{2}.$$

47. Фотон с частотой  $\omega$  поглощается покоящимся атомом массой  $m_0$ . Найдите скорость атома после поглощения фотона

Указание. Поскольку атом после поглощения фотона будет двигаться в направлении движения фотона, можно записать законы сохранения энергии и импульса в следующем виде:

$$m_0c^2 + \hbar\omega = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

откуда

$$v = c \frac{\hbar\omega}{m_0c^2 + \hbar\omega}.$$

Полагая, что энергия фотона много меньше энергии покоя атома  $m_0c^2$ , воспользуйтесь правилом приближенного вычисления  $\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С момента появления специальной теории относительности (1905) прошло свыше семидесяти лет. Не исключено, что релятивистские представления о времени и пространстве и сама СТО могли появиться раньше, чем в 1905 г. Однако реальное значение такой теории было бы невелико. Конечно, ее появление позволило бы дать объяснение оптическим экспериментам, связанным с «движущейся средой» (абберация, опыт Физо, эффект Доплера), завершило бы электродинамику движущихся сред, но самые важные следствия теории, касающиеся механики, все равно остались бы в тени.

Специальная теория относительности существенна там, где встречаются скорости, сравнимые со скоростью света, и энергии, сравнимые с энергией покоя частиц. Об отступлениях от ньютоновской механики стало известно лишь за несколько лет до работы Эйнштейна «Об электродинамике движущихся тел» (1905).



Эти отступления были обнаружены в опытах Кауфмана (1902) по отклонению быстрых электронов в электрических и магнитных полях. Но сами эксперименты Кауфмана стали возможными только после открытия радиоактивности (1896) и электрона (1894—1896).

Три года спустя после опытов Кауфмана Эйнштейн сумел записать в релятивистски правильной форме закон динамики быстро движущихся тел. Его выводы были весьма неожиданными. Оказалось, что при релятивистских скоростях инертная масса тела уже не остается постоянной. Был обнаружен фундаментальный закон взаимосвязи массы и энергии. Из него следовало, что любое тело, обладающее конечной массой покоя, в состоянии покоя обладает колоссальной энергией — энергией покоя.

Физика нашего времени развивалась очень бурно, и подтверждения выводов релятивистской механики не заставили себя ждать. Самым драматическим подтверждением релятивистского закона взаимосвязи массы и энергии было создание атомной бомбы. Релятивистская механика давно уже стала инженерной наукой. На ее основе проектируются и успешно работают ускорители элементарных частиц, ядерные реакторы. Релятивистские соотношения широко используют при описании рассеяния и превращения микрочастиц.

Роль СТО обусловлена ее вкладом не только в физику, но и в мировоззрение. Теория относительности позволила сделать новый шаг в понимании пространства и времени. Ньютон признавал объективную реальность пространства и времени, но согласно его представлениям время и пространство независимы друг от друга и, что самое главное, независимы от вещества и его движения. Согласно Ньютону существуют абсолютное время и абсолютное пространство. Физические явления по Ньютону разыгрываются в пространстве так, будто пространство является простоместищем тел.

Взгляды СТО на пространство и время представляют собой по сравнению с воззрениями Ньютона решающий шаг в сторону диалектической трактовки физических закономерностей. Диалектический материализм учит, что время и пространство — это формы существования материи. Но основным свойством, присущим материи, является движение, которое происходит в пространстве и во времени.

Время в СТО зависит от простейшего (механического) движения. Время и пространство оказываются связанными между собой, они, сливаясь, образуют единый четырехмерный «мир». Следующий, вполне логичный с точки зрения диалектического материализма шаг делается уже в общей теории относительности, где устанавливается связь между свойствами пространства, времени и распределением вещества. Таким образом, представления о пространстве и времени в физике трактуются в соответствии с общими положениями диалектического материализма.

## Пояснение некоторых математических преобразований

1. К § 43. Использованное здесь преобразование

$$\operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = -i \vec{k} \vec{E}$$

можно обосновать следующим образом. Запишем выражение, стоящее под знаком дивергенции, в виде произведения вектора  $\vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}$  на скаляр  $e^{i \omega t}$ , который от координат не зависит и поэтому может быть вынесен за знак дивергенции:

$$\operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = e^{i \omega t} \operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}).$$

Согласно правилам дифференцирования экспоненциальной функции по координатам имеем (учитывая  $\vec{E}_0 = \text{const}$ ):

$$\operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}) = -i \vec{k} \vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Таким образом,

$$e^{i \omega t} \operatorname{div}(\vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}) = -i \vec{k} \vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i \omega t} = -i \vec{k} \vec{E}. \quad (a)$$

Аналогично можно обосновать другое равенство (§ 43):

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = -i [\vec{k} \vec{H}].$$

Выносим множитель  $e^{i \omega t}$  за знак ротора:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = e^{i \omega t} \operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}})$$

и выписываем определитель для ротора в правой части:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_0 e^{-i k_x x} & H_0 e^{-i k_y y} & H_0 e^{-i k_z z} \end{vmatrix}.$$

В и м а н и е. Нельзя смешивать единичный вектор  $\vec{k}$  с волновым вектором и мнимую единицу  $i = \sqrt{-1}$  с единичным вектором  $\vec{i}$ .

Согласно правилу дифференцирования экспоненциальных функций заменим в определителе оператор  $\frac{\partial}{\partial x}$  множителем  $-i k_x$  и т. д., а компоненты амплитуды напряженности записываем:  $H_0 e^{-i k_x x} = H_{0x}$  и т. д. Тогда определитель для ротора приобретает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{H}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -i k_x & -i k_y & -i k_z \\ H_{0x} & H_{0y} & H_{0z} \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{i} (i k_y H_{0z} - i k_z H_{0y}) - \vec{j} (i k_z H_{0x} - i k_x H_{0z}) - \vec{k} (i k_x H_{0y} - i k_y H_{0x}). \end{aligned}$$

В последнем звене стоит векторное произведение  $-i[\vec{k}\vec{H}_0e^{-i\vec{k}\vec{r}}]$ . С учетом опущенного нами выше множителя  $e^{i\omega t}$  имеем:

$$-i[\vec{k}\vec{H}_0e^{-i\vec{k}\vec{r}}e^{i\omega t}] = -i[\vec{k}\vec{H}], \quad (6)$$

Во избежание недоразумений уточняем, что в искомые формулы (а) и (б) входит волновой вектор  $\vec{k}$ .

2. К § 50. В записях формул (50.2) встречаются преобразования вида

$$\text{rot } \vec{a}\left(t - \frac{R}{v}\right) = \left[ \text{grad} \left( t - \frac{R}{v} \right) \dot{\vec{a}} \right] = -\frac{1}{v} \dot{\vec{a}} [\vec{m}a],$$

причем нами проведена замена  $\dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{P}}$ . Здесь использовано правило дифференцирования функции от функции

$$\frac{d}{dt} f[\varphi(t)] = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Как известно, ротор вектора  $\vec{a}$  записывается при помощи определителя

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Если вектор  $\vec{a}$  зависит от аргумента  $\left(t - \frac{R}{v}\right)$ , то скалярная часть компонент, образуемых по диагоналям, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} a_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( t - \frac{R}{v} \right) \cdot \frac{\partial a_y}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

В силу этого можно переписать определитель так:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a}\left(t - \frac{R}{v}\right) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( t - \frac{R}{v} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( t - \frac{R}{v} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \left( t - \frac{R}{v} \right) \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{grad}_x \left( t - \frac{R}{v} \right) & \text{grad}_y \left( t - \frac{R}{v} \right) & \text{grad}_z \left( t - \frac{R}{v} \right) \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \end{vmatrix} = \\ &= \left[ \text{grad} \left( t - \frac{R}{v} \right) \dot{\vec{a}} \right]. \end{aligned}$$

Проекция градиента имеют вид

$$\text{grad}_x \left( t - \frac{R}{v} \right) = -\frac{1}{v} \cdot \frac{R_x}{R} \quad \text{и т. д.}$$

(поскольку  $\text{grad}_a R = \frac{\vec{R}}{R}$ )\*. Поэтому мы получаем для первого исходного

\* Индекс «а» означает, что дифференцирование проводится по координатам точки наблюдения,

равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} \left( t - \frac{R}{v} \right) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{v} \frac{R_x}{R} & -\frac{1}{v} \frac{R_y}{R} & -\frac{1}{v} \frac{R_z}{R} \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{v} \left\{ \vec{i} \left( \frac{R_y}{R} \dot{a}_z - \frac{R_z}{R} \dot{a}_y \right) + \vec{j} \left( \frac{R_z}{R} \dot{a}_x - \frac{R_x}{R} \dot{a}_z \right) + \vec{k} \left( \frac{R_x}{R} \dot{a}_y - \frac{R_y}{R} \dot{a}_x \right) \right\}. \end{aligned}$$

В фигурных скобках стоит векторное произведение единичного радиус-вектора  $\vec{m} = \frac{\vec{R}}{R}$  на производную вектора  $\vec{a}$  по времени; следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{a} \left( t - \frac{R}{v} \right) = -\frac{1}{v} \vec{m} \dot{a}.$$

### Решения задач

$$1. \text{ а) } E_1 = -\frac{2qlr_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \left( r_1^2 - \frac{l^2}{4} \right)^2},$$

$$\text{ б) } E_2 = \frac{ql}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \left( r_2^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Результирующая напряженность поля зарядов дуги направлена по оси симметрии  $Ox$ , т. е.  $E = E_x = \int dE_x$ . Необходимо перейти к переменной  $\alpha$ :

$$dl = r d\alpha.$$

$$\text{Ответ: } E = \frac{k \sin \alpha_0}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

3. В силу осевой симметрии результирующее поле направлено по  $z$ :  $E = E_z$ . Следует пользоваться цилиндрической системой координат и выбрать центр диска за начало координат.

$$\text{Ответ: } E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

Скобки  $|z|$  означают, что здесь  $z$  — расстояние между точкой наблюдения и центром диска и является существенно положительной величиной.

В точке  $z = +0$  имеем:  $E_{+0} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ , в точке  $z = -0$  имеем:  $E_{-0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ .

$$4. \text{ В силу сферической симметрии } E = E_z = \int \frac{\rho(z - z_0) dV}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}.$$

Выполняя замену переменных под знаком интеграла:  $z = R$ ,  $z_0 = R_0 \cos \theta$ ,  $r = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \theta}$ , получим:

$$E = \int_{R_0=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho(R - R_0 \cos \theta) R_0^2 \sin \theta dR_0 d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрирование по  $\varphi$  выполняется сразу; для интегрирования по  $\theta$  следует подынтегральное выражение представить как разность. После подстановки

пределов получаем:

$$E = \frac{2\pi\rho}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{R_0=0}^a \frac{R_0}{R^2} 2R_0 dR_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi\rho a^2}{3R^2}.$$

5. В силу сферической симметрии поля поток через вспомогательную сферическую поверхность радиуса  $r_e$  (индекс «e» от exterior — внешний) выражается формулой

$$N = E_e S = E_e \cdot 4\pi r_e^2.$$

Этот же поток по теореме Остроградского — Гаусса записывается так:  $N = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi a^2}{\epsilon\epsilon_0}$ . Приравняем оба выражения для потока;

$$E_e \cdot 4\pi r_e^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi a^2}{\epsilon\epsilon_0};$$

$$E_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_e^2} = \frac{\sigma a^2}{\epsilon\epsilon_0 r_e^2}.$$

Вспомогательную сферу радиусом  $r_i$  (индекс «i» от interior — внутренний) поток вектора  $\vec{E}$  не пронизывает, поскольку внутри этой сферы нет зарядов:  $E_i = 0$ .

6. В силу осевой симметрии поля поток через оба основания вспомогательного цилиндра равен нулю. Для потока через боковую поверхность имеем:  $N = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l$ . По теореме Остроградского — Гаусса

$$N = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{2\pi a l \sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Отсюда  $E = \frac{a\sigma}{\epsilon\epsilon_0 r}$ . Заряд пояса единичной длины  $k = 2\pi a\sigma$ . Преобразуем предыдущую формулу к виду

$$E = \frac{2\pi a\sigma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{k}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Так выражается и поле однородной заряженной линии, если  $k$  — линейная плотность зарядов.

7. По обе стороны от заряженной плоскости  $S$  имеется однородное поле, для которого  $S$  — плоскость зеркальной симметрии. Поток через прямой цилиндр произвольной высоты, построенный на площадке  $\Delta S$  и создаваемый зарядами  $\sigma\Delta S$ , пронизывает только оба основания. Поток через одно основание:

$$N = \frac{Q}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{2\epsilon\epsilon_0} = E\Delta S;$$

отсюда  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ .

8. Фиксируем на пластинках две равные единичные площадки, расположенные друг против друга. Во внешнем пространстве потоки полностью компенсируют друг друга. В пространстве между пластинками потоки (а следовательно, и напряженности) складываются; согласно результатам упражнения 7 имеем:  $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ .

9. Поле обладает симметрией относительно плоскости, делящей пластинку пополам. Силовые линии нормальны к пластинке, поэтому целесообразно пользоваться декартовыми координатами, выбрав в качестве начала координат точку, лежащую на плоскости симметрии. Имеем:  $E = E_x$ .

Для наружной точки  $A_e$  теорема Остроградского — Гаусса записывается

в виде:  $\operatorname{div} \vec{E}_e = \frac{dE_e}{dx} = 0$  (переходим к полной производной, поскольку  $E$  зависит только от  $x$ ). Отсюда  $E_e = C_1$ .

$$\text{Для точки } A_i \text{ внутри пластинки: } \operatorname{div} \vec{E}_i = \frac{dE_i}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Интегрирование дает:  $E_i = \frac{\rho x}{\epsilon\epsilon_0} + C_2$ .

Если перемещать точку  $A_i$  внутри пластинки в сторону уменьшения  $x$ , то значение  $E_i$  непрерывно уменьшается и при отрицательных значениях  $x$  становится отрицательным. В силу непрерывности напряженности при  $x=0$  имеем  $E_{i,0} = 0$ , т. е.  $E_{i,0} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \cdot 0 + C_2 = 0$ , и  $C_2 = 0$ .

Используем условие непрерывности на границе пластинки, где  $x = \frac{h}{2}$ . Подходя к границе извне, получаем  $E_{e, \text{гран}} = C_1$ , подходя к границе изнутри, имеем:

$$E_{i, \text{гран}} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{h}{2}.$$

Поскольку  $E_{e, \text{гран}} = E_{i, \text{гран}}$  (непрерывность):  $C_1 = \frac{\rho h}{2\epsilon\epsilon_0}$ . Окончательно:

$$E_e = \frac{\rho h}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad E_i = \frac{\rho x}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Обратите внимание на то обстоятельство, что в данной задаче поле в бесконечности не равно нулю. Этот результат является следствием условия (конечно, нереального), что заряды занимают бесконечный объем. Поле конечной пластинки в бесконечности  $E=0$ .

10. Налицо сферическая симметрия, поле имеет радиальное направление, следует пользоваться сферическими координатами:  $E = E_r$ .

Для наружной точки имеем:

$$\operatorname{div} \vec{E}_e = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_e)}{dr} = 0,$$

откуда  $\frac{d}{dr} (r^2 E_e) = 0$ , т. е.  $r^2 E_e = C_1$ , и, наконец,  $E_e = \frac{C_1}{r^2}$ . Для точки  $A_i$  внутри слоя имеем:

$$\operatorname{div} \vec{E}_i = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_i) = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0},$$

откуда

$$\frac{d}{dr} (r^2 E_i) = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \rho r^2,$$

$$r^2 E_i = \frac{1}{3\epsilon\epsilon_0} \rho r^3 + C_2,$$

$$E_i = \frac{1}{3\epsilon\epsilon_0} \rho r + \frac{C_2}{r^2}.$$

Для точки  $A_0$  в полости (аналогично внешнему полю):  $E_0 = \frac{C_3}{r^2}$ .

При определении постоянных  $C_1, C_2, C_3$  исходим из свойств напряженности при объемном распределении зарядов: ее конечности и непрерывности.

Пусть  $r \rightarrow 0$  (центр сферы): Тогда при всяком  $C_3 \neq 0$   $E_0$  стремится к бес-

конечности. Чтобы удовлетворить условию конечности напряженности, надо принять  $C_3=0$ . Отсюда имеем  $E_0=0$ .

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия непрерывности на внутренней границе слоя ( $r=b$ ) и на его внешней границе ( $r=a$ ), как это уже было показано в упражнении 9.

Таким образом находим:  $C_2 = -\frac{1}{3\epsilon\epsilon_0} \rho b^3$ ,  $C_1 = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} (a^3 - b^3)$ , откуда

$$E_i = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0 r^2} (r^3 - b^3),$$

$$E_e = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0 r^2} (a^3 - b^3).$$

Обозначая заряд слоя  $Q = \frac{4\pi\rho}{3} (a^3 - b^3)$ , получаем:

$$E_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

11. Для индукции поля в наружной точке  $A_e$  имеем:

$$\operatorname{div} \vec{D}_e = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_e) = 0,$$

$$D_e = \frac{C_1}{r^2}.$$

В точке  $A_i$  внутри шара:

$$\operatorname{div} \vec{D}_i = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_i) = \rho,$$

$$D_i = \frac{\rho r}{3} + \frac{C_2}{r^2}.$$

Из условия конечности  $D_i$  при  $r \rightarrow 0$  получаем:  $C_2=0$ , откуда

$$D_i = \frac{\rho r}{3}.$$

Используя условие непрерывности на границе ( $r=a$ ), имеем:  $\frac{\rho a}{3} = \frac{C_1}{a^2}$ ;  $C_1 = \frac{\rho a^3}{3}$ ;  $D_e = \frac{\rho a^3}{3r^2}$ . Определив  $D$ , находим значение напряженности из соотношений

$$E_i = \frac{D_i}{\epsilon_1 \epsilon_0} \text{ и } E_e = \frac{D_e}{\epsilon_2 \epsilon_0}; \quad E_i = \frac{\rho r}{3\epsilon_1 \epsilon_0}, \quad E_e = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_2 \epsilon_0 r^2}.$$

12. Ввиду осевой симметрии поля пользуемся цилиндрическими координатами. Поскольку  $D = D_r$ , имеем:

$$\operatorname{div} \vec{D}_e = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_e) = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D}_i = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_i) = \rho,$$

Дальнейший ход решения повторяет решение упражнения 11. Окончательно:

$$D_e = \frac{\rho a^2}{2r}; \quad D_l = \frac{\rho r}{2};$$

$$E_e = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_2 \varepsilon_0 r}; \quad E_l = \frac{\rho r}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0}.$$

13. В наружной точке поле шара (как при  $\rho = \text{const}$ , так и при  $\sigma = \text{const}$ ) выражается так же, как и напряженность поля точечного заряда такой же величины, помещенного в центре шара:  $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ .

Аналогичный вывод справедлив и для потенциала. Имеем:

$$E = E_r = -\frac{d\varphi}{dr}; \quad d\varphi = -E dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr.$$

Интегрируем от  $r$  до  $\infty$  (где  $\varphi_\infty = 0$ ):

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_\infty} d\varphi = -\int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi_\infty - \varphi_A = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

т. е.

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

14. В силу осевой симметрии  $E = E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$ ;  $d\varphi = -E dr = -\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} dr$ .

Ввиду бесконечного объема цилиндра потенциал в бесконечности не равен нулю. Примем поэтому какую-либо эквипотенциальную поверхность за начальный уровень отсчета, например поверхность цилиндра. Интегрируем

последнее выражение на отрезке от  $a$  до  $r$ :  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r}$ .

Имеем:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln r \Big|_a^r = -\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} (\ln r - \ln a);$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln a - \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln r.$$

Первые два слагаемых представляют собой постоянную величину; если взять разность потенциалов двух точек поля, то она, конечно, выпадает. В силу этого ее просто опускают и приходят к так называемому логарифмическому потенциалу:

$$\varphi = -\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln r = \frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r}.$$

15. Надо воспользоваться выражениями  $\text{rot}_r \vec{E}$ ,  $\text{rot}_\theta \vec{E}$  и  $\text{rot}_\varphi \vec{E}$ . При подстановке условий задачи получаем, что все составляющие ротора равны нулю, т. е.  $\text{rot} \vec{E} = 0$ . Следовательно, поле потенциально.

16. Отмечаем, что потенциал зависит только от  $r$ , откуда значение лапласиана потенциала:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$



В наружной точке  $A_e$ :

$$\Delta\varphi_e = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0,$$

отсюда

$$r^2 \frac{d\varphi_e}{dr} = -C_1; \quad \frac{d\varphi_e}{dr} = -\frac{C_1}{r^2} = -E_e;$$

$$\varphi_e = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Аналогично находим  $E_i$  и  $\varphi_i$  внутри шара. Определение постоянных интегрирования проводится на основе свойств потенциала и напряженности при объемном распределении зарядов (конечность, непрерывность, равенство нулю в бесконечности):

$$\varphi_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad \varphi_i = \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

17. При поверхностном распределении заряда потенциал всех точек поверхности одинаков и равен:  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Следовательно,

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S \sigma\varphi dS = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

В случае объемного распределения заряда при  $r < a$  (ср. упр. 16) потенциал  $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$ . Следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right) dV.$$

Выразив элемент объема в сферических координатах, в результате интегрирования по объему шара получаем:

$$W_2 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

таким образом,  $W_2 > W_1$ .

18. Исходим из выражения для энергии диполя во внешнем поле:

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\vec{l}\vec{E},$$

$$W = -q\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}.$$

отсюда

19. Исходим из формулы (20.9)  $Q_q = -\frac{\partial W}{\partial q}$ . При вращательном движении роль обобщенной силы играет вращающий момент  $\vec{K}$ , обобщенной координатой является угол поворота  $\theta$ , т. е.  $K = -\frac{\partial W}{\partial \theta}$ . С учетом результата упражнения 18 имеем:

$$K = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (pE \cos \theta) = -pE \sin \theta,$$

Отрицательный знак означает, что вращающий момент стремится уменьшить угол  $\theta$  между  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ . Следовательно,  $\vec{K} = [\vec{p}\vec{E}]$ .

20. Выделим в проводящей среде между обкладками сферический слой элементарной толщины  $dr$ ; его сопротивление

$$dR = \rho \frac{dr}{S} = \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma}.$$

Полное сопротивление

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma} = \frac{1}{4\pi \gamma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Ток через конденсатор

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{4\pi \gamma r_1 r_2 (\Phi_1 - \Phi_2)}{r_2 - r_1}.$$

21. Ответ можно непосредственно получить из упражнения 20, полагая вторую обкладку конденсатора удаленной в бесконечность:  $r_2 = \infty$ . Тогда  $R = \frac{1}{4\pi \gamma r}$ . В случае полусферического заземления, зарытого вровень с поверхностью почвы (см. рис. 44), сопротивление заземления в два раза больше, т. е.  $R = \frac{1}{2\pi \gamma r}$ .

22. Пусть заряды шаров равны  $+q$  и  $-q$ , тогда их потенциалы относительно бесконечности выражаются формулами  $\Phi_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a}$ ;  $\Phi_2 = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 a}$ , откуда получаем разность потенциалов между шарами:  $U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2q}{4\pi \epsilon_0 a}$ .

Вводим это выражение в формулу напряженности поля у поверхности шаров:  $|E| = |E_n| = \left| \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \right| = \frac{U}{2a}$ .

Находим ток через поверхность одного шара:

$$I = \int_S j_n dS = \gamma \int_S E_n dS = \gamma \frac{U}{2a} 4\pi a^2 = 2\pi \gamma U,$$

откуда определяется исходное сопротивление  $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi \gamma a}$ .

23. Плотность тока на расстоянии  $r$  от центра заземлителя находим делением полного тока утечки  $I$  на площадь полусферы  $j = \frac{I}{2\pi r^2}$ . Таким же образом запишется плотность тока на любом расстоянии  $r$ . Соответственно напряженность поля тока равна:

$$E_r = \frac{j}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma}.$$

Тогда шаговое напряжение

$$U_{ш} = \int_r^{r+0,8} E_r dr = \frac{I}{2\pi \gamma} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right).$$

24. Закон преломления линий тока  $\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ .

25. Для элементарной и полной напряженности соответственно имеем:

$$dH = \frac{I dl \sin(\vec{dl}, \vec{r})}{4\pi r^2}, \quad H = \int \frac{I dl \sin(\vec{dl}, \vec{r})}{4\pi r^2},$$

Подстановка тригонометрических соотношений  $l = R \operatorname{ctg} (180^\circ - \varphi) = -R \operatorname{ctg} \varphi$ ,  $dl = \frac{R}{\sin^2 \varphi} d\varphi$ ,  $r = \frac{R}{\sin \varphi}$  позволяет преобразовать интеграл к виду

$$H = \frac{I}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{I}{4\pi R} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

В случае бесконечно длинного прямолинейного тока ( $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ ) получим:  $H = \frac{I}{2\pi R}$  (в системе СГС  $H = \frac{2I}{cR}$ ).

26. Расположенные симметрично элементы тока  $I d\vec{l}_1$  и  $I d\vec{l}_2$  порождают поле напряженностью  $2dH \sin \alpha$ , направленное вдоль оси кольцевого тока. Следовательно,

$$H = \Sigma dH \sin \alpha \text{ и } H = \int_{l=2\pi a} \frac{I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha = \frac{aI}{2r^2} \sin \alpha.$$

При подстановке  $r = \sqrt{a^2 + d^2}$  и  $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}$  получаем:  $H = \frac{a^2 I}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$ .

В центре кольца ( $d=0$ )  $H = \frac{I}{2a}$ .

27. На расстоянии  $a$  поле первого тока равно:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi a},$$

на метр длины проводника со вторым током действует сила:

$$F_{12} = \mu_0 I_2 I_1 H_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}.$$

28. Как указывалось в пояснении, допустимо приближение

$$\oint_L H_l dl = \int_l H_l dl + \int_{NaS} H_l dl \approx \int_l H_l dl = Hl.$$

В соответствии с законом полного тока  $Hl = In$ , т. е.  $H = \frac{In}{l}$ .

29. Во внешнем пространстве имеем для циркуляции по окружности радиусом  $r_e$ :  $\oint_L H_{le} dl = H_e 2\pi r_e = I = j\pi a^2$ , откуда

$$H_e = \frac{I}{2\pi r_e}.$$

При переходе к внутреннему полю надо учесть, что контур обхода охватывает ток  $j\pi r_i^2$ , поэтому

$$\oint_L H_{li} dl = H_{li} 2\pi r_i = j\pi r_i^2,$$

откуда

$$H_{li} = \frac{j r_i}{2}.$$

30. В соответствии с указанием к упражнению запишем выражение для векторного потенциала бесконечно длинного прямого тока:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вычисление  $\vec{H}$  по  $\vec{A}$  производят на основе определения:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A},$$

Находим составляющие  $H$  по декартовым осям:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot}_x \vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} = \\ &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{I}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим:  $H_y = \frac{I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$ ;  $H_z = 0$ .

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} = \frac{I}{2\pi (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{I}{2\pi r}.$$

31. Сравниваем амплитудные значения плотностей тока проводимости  $j_0$  и тока смещения  $j_0$ , смещ в граните при  $f = 10^3$  Гц:  $\frac{j_0}{j_0, \text{ смещ}} = \frac{1}{50}$ .

32. Вращающий момент сил, действующих в магнитном поле на рамку с током  $I$ , находим по формуле  $K = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -ISB \sin \theta$ .

Рамка находится в равновесии при  $K = 0$ , т. е. при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Первое положение равновесия соответствует минимуму, второе — максимуму потенциальной функции  $U$ ; первое положение является устойчивым равновесием.

33. В рассматриваемом случае выражение для коэффициента взаимной индукции  $L_{12}$  сводится к сумме интегралов, относящихся к парам параллельных сторон обоих прямоугольников. Для двух параллельных прямых длиной  $l$ , находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга, имеем:

$$\begin{aligned} L(l, h) &= \iint \frac{dl_1 dl_2}{R} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}} = \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \left[ \ln(x_1 - x_2) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2} \right]_{x_1 = -\frac{l}{2}}^{x_1 = \frac{l}{2}}, \end{aligned}$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — текущие координаты точек обоих отрезков, отсчитываемых от их центров. Интегрирование по частям каждого из членов разности, получаемой после подстановки вместо  $x_1$  его значений  $\pm \frac{l}{2}$ , дает:

$$L(l, h) = 2h - 2\sqrt{l^2 + h^2} + 2l \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{h}.$$

34. Используя упрощения, связанные с цилиндрической формой проводника, переходим в выражении для вектора Умова — Пойнтинга к численным

значениям:  $S = EH = \frac{Ia}{2} \cdot \frac{I}{\gamma} = \frac{I^2 a}{2\gamma}$ . В участок цилиндра длиной  $l$  с боковой поверхностью  $2\pi al$  ежесекундно проникает энергия:

$$S \cdot 2\pi al = \frac{I^2 a}{2\gamma} \cdot 2\pi al = \frac{I^2}{\gamma} \pi a^2 l = \frac{I^2}{\gamma} V,$$

где  $V$  — объем проводника. Множитель  $\frac{I^2}{\gamma}$  по закону Джоуля — Ленца означает количество теплоты, выделяемой током в единицу объема в единицу времени.

35. В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H(r, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Этой системе уравнений можно удовлетворить, положив  $E_r = E_z = 0$  и  $E_\varphi = E_\varphi(r, t)$ . Из последнего уравнения находим:

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ -\mu_0 \int \frac{\partial H(r, t)}{\partial t} r dr + f(t) \right\},$$

где  $f(t)$  — произвольная функция времени  $t$ . Таким образом, в плоскости, перпендикулярной к оси магнитного поля, линии напряженности вихревого электрического поля образуют систему концентрических окружностей с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

36. Учитывая соотношение между  $E$  и  $H$  поля световой волны, получаем:

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E, \quad S = EH = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2, \quad \text{отсюда} \quad E = \sqrt{S \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \approx 750 \text{ В/м} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ ед. СГС}, \quad H \approx 2 \text{ А/м} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Э.}$$

$$37. \frac{f_E}{f_H} = \frac{2\pi m v}{e \mu_0 H_0} \approx 10^8 \text{ раз},$$

$$38. v_1 = \frac{c}{n_1} = 1,827 \cdot 10^{10} \text{ см/с}; \quad v_2 = \frac{c}{n_2} = 1,835 \cdot 10^{10} \text{ см/с}; \quad v_3 = \frac{c}{n_3} = 1,852 \times 10^{10} \text{ см/с}.$$

Средняя величина дисперсии в данном интервале

$$\frac{\Delta v}{\Delta \lambda} = \frac{v_3 - v_1}{\Delta \lambda} = \frac{0,025 \cdot 10^{10} \text{ см}}{1290 \text{ с} \cdot \text{А}}.$$

По формуле Рэлея:  $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \approx 1,722 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ . Для соотношения фазовой и групповой скоростей получаем:  $\frac{v_2}{u} \approx 1,066$ .

39. Преобразуем формулу (65.4), основываясь на формуле приближенных вычислений  $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}} \approx 1 + \alpha$ . Соответственно

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx l \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right),$$

откуда  $|l_0 - l| = \Delta l = l \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) - l = \frac{1}{2} \beta^2 l = \frac{v^2}{c^2} r = 6,4 \text{ см}$ .

40. В системе  $K'$  имеем:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

откуда вытекает:  $t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1) = 0$  и  $t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)$ .

Правая часть этого равенства положительна:  $\frac{V}{c^2} > 0$ ,  $(x_2 - x_1) > 0$  (из условия задачи). Следовательно,  $t_2 > t_1$ ; таким образом, с точки зрения наблюдателя на Земле (на полотне железной дороги) удар молнии произошел в точке  $A$  (впереди поезда) позже, чем удар молнии в точке  $B$  (позади поезда).

41. Записываем проекции скорости капли в момент попадания ее на стекло относительно системы  $K$ :  $v_x = 0$ ;  $v_y = -v$ ;  $v_z = 0$ .

В штрихованной системе  $K'$ , связанной с вагоном, проекции скорости в соответствии с формулой (68.1) — (68.3) равны:  $v'_x = -V$ ;  $v'_y = -v \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ;  $v'_z = 0$ . Отсюда получается выражение для отклонения капли от вертикали:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{V}{v \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx \frac{V}{v} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right). \quad (a)$$

Применяя преобразования Галилея, получаем:  $v'_x = -V$ ;  $v'_y = -v$ ;  $v'_z = 0$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{v}. \quad (б)$$

Сопоставление релятивистского результата (а) с классическим (б) показывает, что разница зависит от  $\frac{V^2}{c^2}$  (эффект второго порядка).

Полагая скорость трамвая  $V = 10$  м/с, получаем:  $\frac{V^2}{c^2} \approx 10^{-16}$ ; измерение угла с такой точностью лежит за пределами возможностей измерительной техники.

42. а) Для земного наблюдателя расстояние между ракетами за каждую секунду (по часам Земли) увеличивается на 480 000 км. Это отнюдь не противоречит постулату о предельном значении скорости, равном  $c$ , поскольку здесь речь не идет о скорости тела.

б) Пользуемся формулой (68.1), так как скорости  $V$ ,  $v$  и  $v'$  направлены вдоль одной прямой в одну сторону:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + \frac{0,64c^2}{c^2}} \approx 0,976c \approx 2,93 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

43. Проверка выполняется подстановкой в левую часть записанного равенства соответствующих формул преобразований Лоренца (64.9):

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

с последующим возведением в квадрат.

44. Из формул (64.3) и (71.11) имеем:

$$t = \frac{\mathcal{E}\tau}{m_0 c^2}.$$

Учитывая, что масса покоя  $\pi$ -мезона равна  $m_0 = 273 \cdot 9 \cdot 10^{-31}$  кг, получаем:  $t \approx 3,5 \cdot 10^{-7}$  с.

Из формулы (71.11) находим скорость мезона  $v = V = c \sqrt{1 - m_0^2 \frac{c^4}{\mathcal{E}^2}}$  и его путь с момента рождения до гибели (в лабораторной системе), полагая скорость неизменной:  $s = vt = 106$  м.

45. Энергия покоя электрона  $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 0,51$  МэВ. Преобразуем релятивистскую формулу кинетической энергии к виду

$$\frac{T}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1,$$

Но левая часть по условию задачи равна двум, отсюда легко вычислить  $v = 2,83 \cdot 10^8$  м/с.

46. Использование тригонометрических таблиц существенно облегчает вычисление скорости, стоящей под знаком квадратного корня. В нашем случае

$$\cos \alpha = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2} \approx 0,84,$$

откуда  $\alpha \approx 32^\circ$ ,  $\sin \alpha \approx 0,53$ .

Возвращаясь к исходной подстановке, получаем:  $v = c \sin \alpha \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 0,53 \approx 1,6 \cdot 10^8$  м/с.

В нерелятивистском приближении

$$T = eU = \frac{mv^2}{2};$$

отсюда  $v_{\text{нерел}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 1,9 \cdot 10^8$  м/с.

Тот факт, что в расчетах такого рода релятивистская скорость частицы всегда меньше скорости, вычисляемой по формулам нерелятивистской физики, легко понятен: в нем проявляется существование предельной скорости движения частиц.

47. Указанное в упражнении 39 правило приближенного вычисления позволяет осуществить следующее преобразование:

$$\frac{1}{m_0 c^2 + \hbar \omega} = \frac{1}{m_0 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2}} \approx \frac{1}{m_0 c^2} \left( 1 - \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} \right),$$

откуда получаем искомую формулу для скорости атома

$$v \approx \frac{\hbar \omega}{m_0 c} \left( 1 - \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} \right).$$

## Рекомендуемая литература

- Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. М., Гостехиздат, 1955.
- Беллюстин С. В. Классическая электронная теория. М., Высшая школа, 1971.
- Борн М. Эйнштейновская теория относительности. М., Мир, 1964.
- Румер Ю. Б., Рывкин М. С. Теория относительности. М., Учпедгиз, 1960.
- Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства-времени. М., Мир, 1968.
- Угаров В. А. Специальная теория относительности. М., Наука, 1977.
- Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М., Наука, 1970.
- Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике. М., Наука, 1977.



Предисловие . . . . .	3
<b>ЭЛЕКТРОДИНАМИКА</b>	
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Микро- и макроэлектродинамика . . . . .	8
<b>I. Постоянное электрическое поле в однородной среде</b>	
§ 2. Закон Кулона. Напряженность поля . . . . .	11
§ 3. Поле точечных, объемных, поверхностных и линейных зарядов в однородной среде . . . . .	13
Упражнения . . . . .	17
§ 4. Силовые линии поля. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ . . . . .	18
§ 5. Теорема Остроградского—Гаусса в интегральной и дифференциальной формах . . . . .	20
§ 6. Диэлектрики в электростатическом поле. Вектор электрической индукции $\vec{D}$ . . . . .	23
Упражнения . . . . .	27
§ 7. Потенциальный характер электростатического поля . . . . .	30
§ 8. Потенциал электростатического поля в однородной среде . . . . .	32
§ 9. Потенциал поля точечных, объемных, поверхностных и линейных зарядов в однородной среде . . . . .	33
§ 10. Градиент потенциала и его связь с напряженностью поля . . . . .	35
Упражнения . . . . .	36
§ 11. Поле диполя . . . . .	37
§ 12. Электрическое поле поляризованного тела . . . . .	41
§ 13. Поверхностные и объемные связанные заряды. Связь между векторами $\vec{E}$ , $\vec{D}$ , $\vec{P}$ . . . . .	44
§ 14. Проводники в электростатическом поле . . . . .	49
§ 15. Энергия взаимодействия электрических зарядов . . . . .	50
§ 16. Потенциальная энергия заряда во внешнем электрическом поле. Энергия электростатического поля . . . . .	52
§ 17. Полная система уравнений Максвелла и граничных условий для электростатического поля . . . . .	54
§ 18. Дифференциальное уравнение для потенциала (уравнение Пуассона—Лапласа) . . . . .	60
§ 19. Потенциал поля системы зарядов на больших расстояниях . . . . .	64
§ 20. Силы, действующие на заряды со стороны поля . . . . .	66
Упражнения . . . . .	69
<b>II. Постоянный ток</b>	
§ 21. Основные положения . . . . .	70
§ 22. Закон Ома в дифференциальной форме . . . . .	73
§ 23. Другие законы постоянного тока в дифференциальной форме . . . . .	75
Упражнения . . . . .	77

### III. Магнитное поле постоянных токов

§ 24. Магнитное поле линейных постоянных токов. Законы Ампера и Био—Савара—Лапласа . . . . .	79
§ 25. Магнитное поле объемных и поверхностных токов . . . . .	83
Упражнения . . . . .	85
§ 26. Закон полного тока. Дифференциальное уравнение магнитного поля постоянных токов ( $I$ уравнение Максвелла) . . . . .	86
§ 27. Векторный потенциал стационарных магнитных полей в отсутствии магнетиков . . . . .	89
§ 28. Уравнение Пуассона—Лапласа для векторного потенциала в отсутствии магнетиков . . . . .	91
Упражнения . . . . .	93
§ 29. Магнитное поле постоянных токов в однородных магнетиках Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ . . . . .	94
§ 30. Полная система уравнений Максвелла для стационарных магнитных полей в магнетиках. Граничные условия . . . . .	100

### IV. Квазистационарное электромагнитное поле

§ 31. Условия квазистационарности . . . . .	104
§ 32. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме ( $II$ уравнение Максвелла) . . . . .	106
§ 33. $I$ уравнение Максвелла . . . . .	108
§ 34. Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле . . . . .	112
§ 35. Энергия взаимодействия токов. Коэффициент взаимной индукции . . . . .	114
§ 36. Коэффициент самоиндукции Энергия системы токов. Плотность энергии магнитного поля токов . . . . .	116
Упражнения . . . . .	120

### V. Переменное электромагнитное поле

§ 37. Полная система уравнений электромагнитного поля . . . . .	122
§ 38. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Вектор Умова—Пойнтинга . . . . .	125
§ 39. Единственность решения уравнений электродинамики . . . . .	128
§ 40. Импульс электромагнитного поля. Давление света . . . . .	130
§ 41. Решение уравнений Максвелла методом электродинамических потенциалов. Уравнения Даламбера . . . . .	133
Упражнения . . . . .	138

### VI. Электромагнитные волны

§ 42. Волновые решения уравнений Максвелла . . . . .	139
§ 43. Свойства плоской электромагнитной волны . . . . .	143
§ 44. Монохроматическая и реальная электромагнитные волны . . . . .	146
§ 45. Фазовая и групповая скорости . . . . .	150
§ 46. Отражение и преломление света на границе двух диэлектриков . . . . .	153
§ 47. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах . . . . .	157
Упражнения . . . . .	161

### VII. Излучение электромагнитных волн

§ 48. Западающие потенциалы. Условие квазистационарности поля . . . . .	162
§ 49. Западающие потенциалы на большом расстоянии от системы зарядов и токов . . . . .	164
§ 50. Вычисление напряженности магнитного поля и потока энергии в пределах малого телесного угла волновой зоны . . . . .	167
§ 51. Гармонический осциллятор и его излучение . . . . .	168

### VIII. Основы классической электронной теории Лоренца

§ 52. Ограниченность макроскопической электродинамики . . . . .	173
§ 53. Введение в микроскопическую электродинамику . . . . .	174
§ 54. Уравнения Максвелла—Лоренца . . . . .	175

§ 55. Усреднение уравнений Лоренца в магнетиках. Связь между векторами $\vec{H}$ , $\vec{B}$ , $\vec{J}$ . . . . .	179
§ 56. Силы Лоренца . . . . .	184
§ 57. Электронная теория ориентационного механизма поляризации . . . . .	186
§ 58. Упруго связанный электрон . . . . .	189
§ 59. Основы классической теории излучения . . . . .	190
§ 60. Основы теории оптической дисперсии . . . . .	192
§ 61. Электронная теория намагничивания пара- и диамагнетиков . . . . .	196
Заключение . . . . .	198

## СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Введение . . . . .	200
§ 62. Основные понятия . . . . .	—
§ 63. Постулаты СТО . . . . .	206
§ 64. Следствия постулатов СТО . . . . .	209
§ 65. Интервал между событиями . . . . .	215
§ 66. Преобразования Лоренца и их следствия . . . . .	217
§ 67. Формулы преобразований Лоренца в комплексной записи . . . . .	220
§ 68. Релятивистская формула преобразования скоростей . . . . .	—
§ 69. Классификация интервалов между событиями и принцип причинности . . . . .	222
Упражнения . . . . .	225
§ 70. Четырехмерная кинематика СТО . . . . .	226
§ 71. Релятивистская динамика . . . . .	232
§ 72. Преобразование четырехмерных векторов энергии-импульса и силы . . . . .	237
§ 73. Световые кванты (фотоны) как релятивистские частицы . . . . .	238
§ 74. Электродинамика в релятивистской форме . . . . .	244
§ 75. Тензор электромагнитного поля . . . . .	246
Упражнения . . . . .	251
Заключение . . . . .	252
Дополнения. Пояснение некоторых математических преобразований . . . . .	254
Решения задач . . . . .	256
Рекомендуемая литература . . . . .	268

*Давид Иванович Пеннер,  
Владимир Александрович Угаров*

**Электродинамика  
и специальная теория  
относительности**

Спецредактор *Ю. Н. Дрожжин*. Редактор *А. И. Юдина*  
Художественный редактор *В. М. Прокофьев*. Художник *Б. Н. Юдкин*  
Технический редактор *Л. Е. Пухова*, Корректор *О. С. Захарова*

ИБ № 4451

Сдано в набор 25 04 79. Подписано к печати 21 09.79. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.  
Бум. типограф № 3 Гарнит. литерат. Печать высокая Усл. печ.  
л. 17. Уч.-изд. л. 15,28 Тираж 22 000 экз. Заказ 3301. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение»  
Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудо-  
вого Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени  
А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-54, Валовая, 28, в типографии им. Смирнова Смоленского  
облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смо-  
ленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.